Fomesoutra.com
ça soutra!

collection IRMA

MATHEMATIQUES

1e C.E.

GEOMETRIE








CEDIC
NEA

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Professeur à l'Université d'Abidjan
Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques)

BENGALY
KALIFA

Mathématiques

en classes de 1re C et E

TOME 2

GÉOMÉTRIE

Monique BRETON
Jacques PAPADOPOULOS
Bernard PIERROT

ISBN : 2-7124-0261-8
: 2-7236-0789-5

© Cedic/Nathan - Les Nouvelles Editions Africaines - Abidjan 1986

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

Numéro d'Éditeur : 581-Code 789

PRÉFACE

Le présent manuel est le résultat d'un travail collectif réalisé par les enseignants-chercheurs de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA). Il répond au souci du Ministère de l'Éducation Nationale et de la Recherche Scientifique de Côte d'Ivoire de mettre à la disposition des enseignants et des élèves un outil de travail fonctionnel et adapté au contexte socio-culturel ivoirien et africain. Son élaboration repose sur de nombreuses expérimentations réalisées dans des classes témoins, réparties sur l'ensemble du territoire afin de tenir compte des variantes socio-culturelles et des modes de perception et de compréhension des concepts fondamentaux. Par ailleurs, des comparaisons enrichissantes ont été également réalisées avec d'autres pays africains francophones et anglophones engagés dans des recherches similaires.
A travers son contenu, son support didactique, ses illustrations et sa présentation, ce manuel, destiné aux classes de Première C et E se propose d'atteindre trois objectifs essentiels :

- Le premier consiste, compte tenu de l'hétérogénéité du niveau et de la formation des élèves accédant aux classes de Première C et E à mettre l'accent sur les notions de base indispensables pour une bonne assimilation des programmes de mathématiques et de sciences physiques du second cycle.

- Le second vise à rendre moins abstrait et par conséquent plus vivant l'enseignement des mathématiques en établissant dans la mesure du possible une relation permanente entre les concepts, les méthodes de démonstration et leurs applications dans le vécu quotidien des élèves.

- Le troisième objectif est d'offrir aux élèves et aux maîtres un instrument qui permette, d'une part, la transmission et l'acquisition graduelles du contenu du programme et, d'autre part, l'auto-entraînement des élèves grâce à des exercices progressifs et des problèmes variés capables de tester en permanence le niveau de compréhension et de maîtrise des notions fondamentales.

Nous sommes conscients que malgré l'importance de l'effort consenti par les auteurs de ce manuel, des imperfections demeurent que nous demandons à tous les utilisateurs de nous signaler afin de pouvoir y apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions.
L'IRMA est ouvert à toute contribution susceptible d'enrichir le contenu et la forme des manuels de sa collection.

SALIOU TOURÉ

REMERCIEMENTS

Il nous est agréable de remercier ici les personnes suivantes :

Mesdames : GUYON, Inspectrice de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire.
OUEDRAOGO-HADDAD, chercheur à l'IRMA.

Messieurs : BEGHAIN, chercheur à l'IRMA.
CANAZZI, chercheur à l'IRMA.
DUMONCEAU, chercheur à l'IRMA.
LANZA, professeur au L.G. de Bingeville.
MATHIEU, conseiller pédagogique.
MATHURIN, conseiller pédagogique.
N'DA, animateur pédagogique.
PAULUS, chercheur à l'IRMA.
VAUDIN, professeur au L.T. d'Abidjan.

dont les suggestions nous ont été précieuses.

Nos remerciements vont aussi à M. Daniel BOUTTE, Inspecteur Pédagogique, qui, malgré ses charges, a bien voulu lire notre manuscrit et nous faire bénéficier de sa grande expérience.

Enfin, nous remercions particulièrement M. François-Gilles CARPENTIER, chercheur à l'IRMA, et M. Auguste AKE, professeur à l'École Normale Supérieure, pour leurs remarques et suggestions constructives.

Les auteurs

REMARQUES PRÉLIMINAIRES

Conformément à l'esprit du nouveau programme nous avons tenu à réserver, tout au long de ce manuel, une part importante au travail personnel de l'élève grâce à des **questions** et à des **exercices** intégrés au cours.

Les questions, dont les réponses complètes figurent à la fin de chaque chapitre, visent à faire découvrir par l'élève, sur des exemples simples, une nouvelle notion ou un théorème. Une telle question est alors suivie de la définition générale ou de la démonstration (sauf quand le résultat est admis) et de l'énoncé du théorème étudié. Cette définition ou ce théorème est éventuellement complété par des remarques et une **méthode pratique** permettant à l'élève d'utiliser efficacement l'énoncé cité. Chaque « méthode pratique » comporte un exemple entièrement traité.

Les exercices qui font partie intégrante du cours ne sont que des applications directes de la notion ou du théorème venant d'être introduit. Ils permettent à l'élève de contrôler qu'il a correctement acquis la nouvelle notion en s'aidant éventuellement des indications de solution qu'il trouvera à la fin du chapitre.

De plus, à la fin de chaque tome, figurent des **sujets de recherche.** Ces problèmes peuvent parfois conduire l'élève, non limité par le temps, à découvrir une notion prolongeant le cours mais non explicitement au programme de la classe de Première.

Les auteurs.

PLAN DE L'OUVRAGE

ANALYSE

A1. Fonctions - Applications

A2. Fonctions polynômes

A3. Tracés de courbes

A4. Suites numériques

A5. Suites numériques
convergence - divergence

A6. Étude locale d'une fonction

A7. Étude globale d'une fonction

GÉOMÉTRIE

G1. Géométrie plane

G2. Trigonométrie

G3. Transformations du plan

G4. Représentations de l'espace

G5. Orthogonalité dans l'espace

G6. Probabilités - Statistiques

SOMMAIRE

GÉOMÉTRIE

G1. Géométrie plane 5
I. Points. Vecteurs. Couples de réels 5
II. Produit scalaire 17
III. Angles orientés 31

G2. Trigonométrie 64
I. Déterminations de la mesure d'un angle orienté 64
II. Fonctions cosinus, sinus et tangente 73
III. Formules usuelles de trigonométrie 89
IV. Équations trigonométriques de la forme : $x \in \mathbb{R}$, $a \cos x + b \sin x + c = 0$ 95

G3. Transformations du plan 114
I. Translation. Homothéties 114
II. Symétries axiales 130
III. Rotations 139
IV. Synthèse sur les isométries 147
V. Similitudes 152
VI. Application vectorielle associée à une application ponctuelle 161

G4. Représentations de l'espace 196
I. Espace $\mathcal{E}$ et parallélisme 196
II. Projections 204
III. Ensemble $\mathfrak{V}$ des vecteurs de l'espace 211
IV. Étude analytique de $\mathcal{E}$ 223
V. Distance dans $\mathcal{E}$. Repère orthonormé 246
VI. Épure d'un point 250
VII. Épure d'une droite 254
VIII. Épure d'un plan 269

G5. Orthogonalité dans l'espace 314
I. Droites orthogonales 314
II. Droites et plans orthogonaux 316
III. Plans perpendiculaires 324
IV. Produit scalaire 333
V. Projection de l'angle droit 341
VI. Distance d'un point à un plan en analytique et en descriptive 349
VII. Lieux géométriques 359

G6. Probabilités et statistiques 387
I. Dénombrement 387
II. Probabilités 401
III. Caractéristiques de dispersion d'une série statistique 408
IV. Ajustement linéaire 419

PROGRAMME DE 1re CE

(6 heures hebdomadaires)

ALGÈBRE

Applications

- Applications injectives, surjectives, bijectives; applications réciproques; composition des applications.
- Restriction d'une application.
- Image directe, image réciproque.

Fonctions polynômes

- Généralités.
- Factorisation. Pratique de la division euclidienne sur des exemples.
- Zéros d'une fonction polynôme.
- Signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x, f étant une fonction polynôme.

Équations, inéquations, systèmes

- Équations et inéquations du second degré.
- Équations et systèmes d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$.
- Problèmes se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes.

ANALYSE

Fonctions numériques

- Comparaison de deux fonctions numériques.
- Opération sur les fonctions numériques.
- Fonctions associées à une fonction f :

$$x \longmapsto f(x-a) \qquad x \longmapsto |f(x)|$$
$$x \longmapsto f(x)+b \qquad x \longmapsto f(kx)$$
$$x \longmapsto kf(x)$$

- Parité; périodicité; ensemble d'étude.

Étude locale d'une fonction numérique

- Limite et continuité d'une fonction en un point.
- Limite à gauche, limite à droite.
- Fonction dérivable en un point, nombre dérivé, approximation par une fonction affine.
- Interprétation géométrique du nombre dérivé; équation de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction.
- Nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite.
- Règles de dérivation de la somme, du produit, du quotient de fonctions dérivables en un point.

Étude globale d'une fonction numérique

- Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
- Dérivation des fonctions sinus et cosinus.
- Fonction dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables; d'une fonction du type :

$$x \longmapsto f(ax + b), \quad f \text{ étant dérivable.}$$

- Énoncé du théorème donnant le sens de variation d'une fonction f dérivable sur un intervalle, à partir du signe de $f'(x)$.

Étude de quelques fonctions

- Fonction polynôme f dont on peut déterminer le signe de $f'(x)$.
- Fonctions homographiques (asymptotes parallèles aux axes).
- Fonctions $x \longmapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ avec $a \neq 0$ et $d \neq 0$ (exemples d'asymptotes obliques).
- Fonction rationnelle f dont on peut déterminer le signe de $f'(x)$.

Primitives de fonctions usuelles

- Monômes, sin, cos, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ et leurs combinaisons linéaires.

Suites numériques

- Suites arithmétiques, suites géométriques.
- Suite définie par une formule de récurrence.
- Suites monotones; comparaison de deux suites.
- Suites convergentes (on admettra les théorèmes sur les suites convergentes).
- Initiation au raisonnement par récurrence.

ACTIVITÉS

- Sensibilisation aux méthodes numériques :
  - Approximation des zéros d'une fonction numérique.
  - Encadrements des nombres réels.
  - Calcul d'une aire par la méthode des rectangles.

STATISTIQUES, DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉ

- Caractéristique de dispersion d'une série statistique.
- Séries statistiques à deux caractères : corrélation linéaire.
- Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini; arrangements, combinaisons, permutations sur un enseignement fini.
- Introduction élémentaire aux probabilités : événements, probabilité d'un événement dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

GÉOMÉTRIE

Géométrie plane

- Angle orienté défini à partir d'un couple de vecteurs.
- Coordonnées polaires d'un point.
- Distance d'un point à une droite.
- Vecteur normal à une droite.
- Relations métriques dans le triangle.
- Recherche de lieux géométriques.
- Projections, isométries, similitudes : propriétés géométriques, expression analytique, image de figures simples, utilisation de ces applications du plan pour la résolution de problèmes de construction ou de configuration.

Géométrie de l'espace

- Repérage d'un point dans l'espace.
- Technique de représentation par projection orthogonale sur deux plans perpendiculaires (géométrie descriptive) : représentation d'un point, d'une droite, d'un plan; intersection de droites et plans; droites et plans orthogonaux.
- Vecteurs de l'espace : définition, opérations, base.
- Produit scalaire : définition, propriétés, bases orthogonales, bases orthonormées, expression analytique dans une base orthonormée.
- Droites et plans : caractérisations vectorielles, équations cartésiennes, représentation paramétrique, vecteur normal à un plan, distance d'un point à un plan, étude analytique du parallélisme et de l'orthogonalité de droites et de plans.
- Approche géométrique de projections, translations, homothéties.

ACTIVITÉS

- Produit vectoriel dans un espace orienté.

TRIGONOMÉTRIE

- Calculs sur les angles orientés (définis à partir de couples de vecteurs); calculs sur les mesures de ces angles orientés.
- Formules usuelles de transformations.
- Équations dans $\mathbb{R}$: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Équations se ramenant aux cas précédents. Équations : $a \cos x + b \sin x + c = 0$. Inéquations trigonométriques.
- Études des fonctions sinus, cosinus, tangente et fonctions associées.

1 Géométrie plane

I. POINTS. VECTEURS. COUPLES DE RÉELS
II. PRODUIT SCALAIRE
III. ANGLES ORIENTÉS

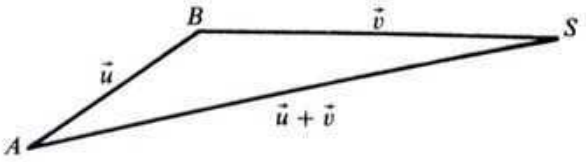
I. Points. Vecteurs. Couples de réels

1 Ensemble $\mathfrak{V}$ des vecteurs du plan

On rappelle que, O étant un point choisi dans le plan $\mathfrak{P}$ l'application de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{V}$ qui, à tout M de $\mathfrak{P}$ associe l'unique vecteur $\vec{u}$ de $\mathfrak{V}$ dont un représentant est le bipoint (O, M) (c'est-à-dire tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$) est une bijection de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{V}$.
On dit que $\mathfrak{P}$ est le **plan affine,** et $\mathfrak{V}$ est le **plan vectoriel** associé à $\mathfrak{P}$.
Dans l'ensemble $\mathfrak{V}$ des vecteurs du plan on a défini l'addition de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} &\longrightarrow \mathfrak{V} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

où : si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BS} = \vec{v}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AS}$.



Cette addition possède les propriétés suivantes :

(1) $\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \forall \vec{v} \in \mathfrak{V} \quad \forall \vec{w} \in \mathfrak{V} \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + v) + \vec{w}$

(2) $\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \forall \vec{v} \in \mathfrak{V} \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(3) $\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \quad$ où $\quad \vec{0} = \overrightarrow{AA}$

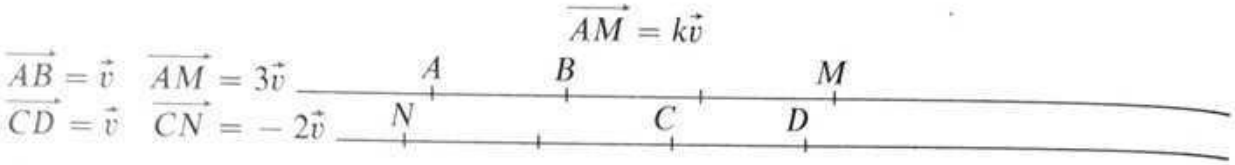
(4) $\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \exists \vec{u}' \in \mathfrak{V} \quad \vec{u} + \vec{u}' = \vec{u}' + \vec{u} = \vec{0}$

où, si $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ alors $\vec{u}' = \overrightarrow{NM}$. Le vecteur $\vec{u}'$ se note $-\vec{u}$ et est appelé l'**opposé** du vecteur $\vec{u}$.
On a également défini la multiplication d'un vecteur par un nombre réel de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathfrak{V} &\longrightarrow \mathfrak{V} \\ (k, \vec{v}) &\longmapsto k\vec{v} \end{aligned}$$

où : si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $k\vec{v} = \vec{0}$

si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{v}$ possède un représentant (A, B) tel que $A \neq B$. Il existe alors un et un seul point M de la droite (AB) tel que $\overline{AM} = k\overline{AB}$, on a :



Cette multiplication possède les propriétés suivantes :

(5) $\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

(6) $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

(7) $\forall \vec{v} \in \mathfrak{V} \quad 1\vec{v} = \vec{v}$

(8) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \vec{v} \in \mathfrak{V} \quad a(b\vec{v}) = ab\vec{v}.$

On dit que le triplet $(\mathfrak{V}, +, .)$. ensemble $\mathfrak{V}$ des vecteurs du plan muni de l'addition $+$ et de la multiplication par un nombre réel, est un **espace vectoriel réel.**

Question 1 *Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ constitué des couples de nombres réels, on définit les lois $+$ et $.$ par :*

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$((x, y), (x', y')) \longmapsto (x + x', y + y') \qquad (k, (x, y)) \longmapsto (kx, ky).$$

Montrer que ces deux lois vérifient les propriétés (1) à (8).

De même on dit que le triplet $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel réel. Ses éléments sont aussi appelés des vecteurs.

Exercice 1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathfrak{V}$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{w}$ de $\mathfrak{V}$ tel que : $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$.
Le vecteur $\vec{w}$ est noté $\vec{v} - \vec{u}$. Soient (A, B) et (A, C) des représentants respectifs de $\vec{v}$ et de $\vec{u}$. Construire un représentant de $\vec{v} - \vec{u}$.
Démontrer les propriétés :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad a(-\vec{u}) = (-a)\vec{u} = -a\vec{u}$$
$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$$
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad (a - b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}.$$

Exercice 2 Montrer que :

$$\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}) \iff a\vec{u} = \vec{0}.$$

Exercice 3 Montrer les deux propriétés suivantes :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \quad a\vec{u} = a\vec{v} \implies \vec{u} = \vec{v}$$
$$\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} - \{\vec{0}\} \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad a\vec{u} = b\vec{u} \implies a = b.$$

Exercice 4 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathfrak{V}$ ou $\mathbb{R}^2$. Soient a, b et c trois nombres réels. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ affectés respectivement des coefficients a, b et c le vecteur $\vec{z}$ défini par :

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

(On définirait de même une combinaison linéaire de 2, 4, 5 ... vecteurs de $\mathcal{V}$).

1) Soit (A, B, C) un triangle. Construire un représentant de la combinaison linéaire $\vec{z}$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$ $a = b = c = 1$ $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ $a = 1,\quad b = 2$ $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

2) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs :

$$\vec{u} = (2, 1) \qquad \vec{v} = (-2, 3) \qquad \vec{w} = (-1, 1).$$

Trouver les combinaisons linéaires suivantes :

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ b) $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ c) $\vec{u} - 5\vec{v} + 2\vec{w}$.

2 Vecteurs colinéaires de $\mathcal{V}$. Points alignés de $\mathcal{S}$. Base de $\mathcal{V}$. Repère cartésien de $\mathcal{S}$

On rappelle que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si le vecteur $\vec{u}$ est nul ou bien s'il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

De plus, on sait que : trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. C'est cette propriété que l'on utilise le plus souvent pour savoir si trois points sont alignés.

Question 2 *Montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe deux nombres réels a et b non tous deux nuls (c'est-à-dire tels que $(a, b) \neq (0, 0)$) tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs ne soient pas colinéaires.*

Une **base** de $\mathcal{V}$ est un couple de vecteurs non colinéaires. On rappelle que : un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs de $\mathcal{V}$ est une base de $\mathcal{V}$ si et seulement si : tout vecteur de $\mathcal{V}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

Exercice 5 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. Parmi les couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs de $\mathcal{V}$, trouver ceux qui en sont une base :

1) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ 2) $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j}$

3) $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$ $\vec{v} = \vec{0}$. 4) $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

Soit (O, I, J) un **repère affine de** $\mathcal{S}$ c'est-à-dire un triplet de points non alignés de $\mathcal{S}$.
Soit $\vec{i}$ le vecteur de $\mathcal{V}$ de représentant (O, I) : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$.
Soit $\vec{j}$ le vecteur de $\mathcal{V}$ de représentant (O, J) : $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Soit alors M un point quelconque de $\mathcal{S}$, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ et ce vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ c'est-à-dire qu'il existe un unique couple de nombres réels (x, y) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

On dit que le couple (x, y) est le couple de coordonnées du point M dans le **repère cartésien** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$.

Définition

Soit O un point de $\mathcal{P}$.
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle le **repère cartésien** de $\mathcal{P}$ d'origine O et associé à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$.

On dit que le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et que le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
En fait si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien de $\mathcal{P}$ l'application : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$M \longmapsto (x, y)$
qui, à tout point M de $\mathcal{P}$ associe son couple de coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}^2$.
Elle est en effet la composée de la bijection : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$
$M \longmapsto \overrightarrow{OM}$
qui, à tout point M de $\mathcal{P}$, associe l'unique vecteur de $\mathcal{V}$ de représentant (O, M), et de la bijection : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\vec{u} \longmapsto (x, y)$
qui à tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ associe son couple (x, y) de coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ défini par $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$:

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$M \longmapsto \overrightarrow{OM} \longmapsto (x, y)$$

où $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de $\mathcal{P}$ on notera $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le point de couple de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 6 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$ dont les couples de coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ sont respectivement (x, y) et (x', y'). Quelles sont dans cette même base les coordonnées des vecteurs suivants :

$$-\vec{u}, \quad \vec{u} + \vec{v}, \quad 3\vec{u} + 5\vec{v}, \quad \vec{0}?$$

Exercice 7 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de $\mathcal{P}$ et $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points de $\mathcal{P}$.
Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, du milieu K de $[AB]$ et du barycentre G des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 4)$.

Exercice 8 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de $\mathcal{P}$ et $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$.
Vérifier que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur de coordonnées a et b dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Trouver les coordonnées A et B de ce vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Trouver les coordonnées X et Y de ce point M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ en fonction de x et y.
Soit O' le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(1 ; -3)$. Trouver les coordonnées X' et Y' du point M dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$ en fonction de x et y.

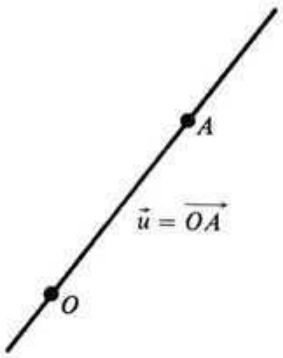
3 Vecteurs et droites

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$. On note $D_{\vec{u}}$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.
$D_{\vec{u}}$ est non vide car $\vec{0}$ est élément de $D_{\vec{u}}$.
Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $D_{\vec{u}} = \{\vec{0}\}$.
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $D_{\vec{u}} = \{\vec{v} \in \mathcal{V} ; \exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{v} = k\vec{u}\}$.

Question 3 *Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$. Montrer que toute combinaison linéaire de deux vecteurs de $D_{\vec{u}}$ est un vecteur de $D_{\vec{u}}$.*

Soient O un point de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$ et A le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
Puisque $\vec{u}$ est non nul, les points O et A sont distincts et déterminent la droite (OA) :

$$(OA) = \{M \in \mathcal{P} ; \quad \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA}\}$$



et l'application : $D_{\vec{u}} \longrightarrow (OA)$ où $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$, est une bijection de $D_{\vec{u}}$ sur (OA).
$\vec{v} \longmapsto M$

Il en résulte que, pour tout vecteur $\vec{v}$ de $D_{\vec{u}}$ il existe un unique nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (k étant l'abscisse dans le repère (O, A) de l'unique point M de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$).
On dit que $D_{\vec{u}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $\vec{u}$, que $(\vec{u})$ est une base de la droite vectorielle $D_{\vec{u}}$ et que le nombre réel k est la coordonnée du vecteur $\vec{v}$ de $D_{\vec{u}}$ dans cette base.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$.
On appelle **droite vectorielle** $(\vec{u})$ l'ensemble $D_{\vec{u}}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$ colinéaires à $\vec{u}$.

$$D_{\vec{u}} = \{\vec{v} \in \mathcal{V} ; \exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{v} = k\vec{u}\}.$$

On dit que le vecteur non nul $\vec{u}$ **engendre** $D_{\vec{u}}$.

Question 4 *Soit $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $\vec{u}$.*
Soit $\vec{v}$ le vecteur non nul de $D_{\vec{u}}$ de coordonnée a dans la base $(\vec{u})$.
Montrer que $(\vec{v})$ est une base de $D_{\vec{u}}$ c'est-à-dire que :
quel que soit le vecteur $\vec{w}$ de $D_{\vec{u}}$, il existe un et un seul nombre réel k' tel que $\vec{w}$ égale $k'\vec{v}$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur de $D_{\vec{u}}$ de coordonnée k dans la base $(\vec{u})$ et de coordonnée k' dans la base $(\vec{v})$. Exprimer k' en fonction de k.

Exercice 9 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. On considère l'ensemble D des vecteurs de coordonnées x et y dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ telles que $2x + 3y = 0$.
Démontrer que D est une droite vectorielle et en préciser une base.

Une droite de $\mathcal{S}$ sera aussi appelée **droite affine** : c'est un ensemble de points alors qu'une **droite vectorielle** est un ensemble de vecteurs.
Une droite (affine) (D) du plan $\mathcal{S}$ est déterminée par un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul (vecteur directeur de (D)) et on a :

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad (M \in (D) \iff \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k\vec{u})$$

c'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad (M \in (D) \iff \overrightarrow{AM} \in D_{\vec{u}})$$

Une droite (D) du plan $\mathcal{S}$ est aussi déterminée par deux points distincts A et B. On a :

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad (M \in (D) \iff \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB})$$

c'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad (M \in (D) \iff AM \in D_{\overrightarrow{AB}})$$

Remarques

1) On appelle **demi-droite vectorielle** engendrée par le vecteur non nul $\vec{u}$ l'ensemble $D_{\vec{u}}^+$ défini par :

$$D_{\vec{u}}^+ = \{ \vec{v} \in \mathcal{V}; \exists k \in \mathbb{R}^+ \quad \vec{v} = k\vec{u} \}.$$

Alors la demi-droite affine d'origine A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ appartienne à $D_{\vec{u}}^+$.



Soit B le point du plan défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. La demi-droite d'origine A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est la demi-droite $[AB)$ et on a :

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad (M \in [AB) \iff \exists k \in \mathbb{R}^+ \quad \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB})$$

2) De même, le segment $[AB]$ est l'ensemble des points de la droite (AB) située « entre A et B »; autrement dit, dans le repère (A, B), le segment $[AB]$ est l'ensemble des points de la droite (AB) dont l'abscisse est comprise entre 0 et 1. On a :

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad (M \in [AB] \iff \exists k \in [0, 1] \quad \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB})$$

Égalité de deux droites vectorielles

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ tels que $D_{\vec{u}} = D_{\vec{v}}$. Le vecteur $\vec{v}$, élément de $D_{\vec{v}}$, est aussi élément de $D_{\vec{u}}$; $D_{\vec{u}}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ donc $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
On a ainsi montré :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V} - \{\vec{0}\} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V} - \{\vec{0}\} \quad (D_{\vec{u}} = D_{\vec{v}} \Longrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires})$$

Réciproquement : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$ non nuls et colinéaires, et $D_{\vec{u}}$ et $D_{\vec{v}}$ les droites vectorielles de base $(\vec{u})$ et $(\vec{v})$.
Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et colinéaires, il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Soit $\vec{w}$ un vecteur de $D_{\vec{v}}$.
Il existe un nombre réel t tel que :

$$\vec{w} = t\vec{v}$$

d'où :

$$\vec{w} = t(k\vec{u})$$
$$= (tk)\vec{u}$$

d'où : $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$

donc $\vec{w} \in D_{\vec{u}}$.

On a ainsi montré :

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{V} \quad \vec{w} \in D_{\vec{v}} \Longrightarrow \vec{w} \in D_{\vec{u}}$$

donc : $D_{\vec{v}} \subset D_{\vec{u}}$.

Question 5 *Montrer, en utilisant le même raisonnement que* $D_{\vec{u}} \subset D_{\vec{v}}$.

D'où :

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Les droites vectorielles de base $(\vec{u})$ et de base $(\vec{v})$ sont égales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Soit (D) une droite affine. Deux vecteurs directeurs de (D) sont colinéaires donc, d'après ce théorème, ils engendrent la même droite vectorielle d'où :

Définition

Soit (D) une droite affine de $\mathcal{E}$. On appelle **droite vectorielle associée** à (D), l'unique droite vectorielle Δ ayant pour base un quelconque vecteur directeur de (D).

Soient (D) et (D') deux droites affines de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On sait (classe de Seconde) que (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires; il résulte donc de la définition précédente que :

Théorème

Deux droites affines sont parallèles si et seulement si les droites vectorielles qui leur sont associées sont égales.

En utilisant l'abus de langage qui consiste à dire que la droite vectorielle Δ, associée à la droite affine (D), est la **direction** de (D) on formule le théorème ci-dessus de la façon suivante :

Théorème

Deux droites affines sont parallèles si et seulement si elles ont même direction.

Exercice 10 Trouver l'intersection de deux droites vectorielles distinctes.

Il résulte du théorème précédent que étant donné un point A et une droite vectorielle Δ engendrée par un vecteur non nul donné $\vec{u}$ il existe une et une seule droite affine (D) passant par A et de direction Δ à savoir :

$$(D) = \{ M \in \mathcal{P};\ \overrightarrow{AM} \in \Delta \}$$

c'est-à-dire

$$(D) = \{ M \in \mathcal{P};\ \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \}$$

Exercice 11 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan . Trouver un système d'équations paramétriques de la droite affine passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

2) $A\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = \vec{i}$

3) $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = \vec{j}$

4) $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.

Exercice 12 Dessiner l'ensemble E des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans chacun des cas suivants :

1) $E = \left\{ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P};\ \exists k \in \mathbb{R} \quad x = 1 + 2k \quad \text{et} \quad y = -1 + 3k \right\}$

2) $E = \left\{ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P};\ \exists t \in \mathbb{R} \quad x = 2 \quad \text{et} \quad y = 3 + 2t \right\}$

3) $E = \left\{ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P};\ \exists m \in \mathbb{R}^+ \quad x = -2 + 3m \quad \text{et} \quad y = 5 \right\}$

4) $E = \left\{ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P};\ \exists a \in [0,1] \quad x = 3 + a \quad \text{et} \quad y = -4 + 2a \right\}$.

Exercice 13 Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ trouver l'intersection des droites (D) et (D') dans chacun des cas suivants.

1) (D) et (D') ont respectivement pour équations cartésiennes :

$$2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 4x - 3y + 7 = 0.$$

2) (D) a pour équation cartésienne : $x + y - 1 = 0$.
(D') a pour représentation paramétrique :

$$x = 2 + t \quad \text{et} \quad y = 3 + t.$$

3) (D) et (D') ont respectivement pour représentations paramétriques :

$$x = t \quad \text{et} \quad y = 3 - t,$$
$$x = 1 + k \quad \text{et} \quad y = -1 + 2k.$$

4 Systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Question 6 *Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$.*
Montrer que le vecteur $5\vec{i} + 2\vec{j}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on déterminera les coefficients.
Plus généralement montrer que tout vecteur $\vec{w}$, égal à $x\vec{i} + y\vec{j}$, est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ affectés de coefficients que l'on déterminera en fonction de x et de y. Quel est l'ensemble $E_{\vec{u},\vec{v}}$ des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Question 7 *Considérons les deux couples de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} = (2; 3)$ et $\vec{v} = (-1; -3/2)$.*
Tout couple de $\mathbb{R}^2$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$?
Quel est l'ensemble $E_{\vec{u},\vec{v}}$ des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$?

Plus généralement soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$ (ou de $\mathbb{R}^2$) on note $E_{\vec{u},\vec{v}}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Premier cas : $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.

On a : $$E_{\vec{u},\vec{v}} = \{\vec{0}\}.$$

Deuxième cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et non tous deux nuls. ($\vec{u} \neq \vec{0}$, par exemple).

On a : $$E_{\vec{u},\vec{v}} = \Delta_{\vec{u}}.$$

En effet soit $\vec{w}$ un vecteur de $E_{\vec{u},\vec{v}}$, il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Or $\vec{v}$ étant colinéaire à $\vec{u}$, il existe un nombre réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

d'où : $$\vec{w} = a\vec{u} + b(k\vec{u})$$
$$\vec{w} = (a + bk)\vec{u}$$

d'où : $$E_{\vec{u},\vec{v}} \subset \Delta_{\vec{u}}.$$

Il est clair d'autre part que $\Delta_{\vec{u}} \subset E_{\vec{u},\vec{v}}$ donc :

$$E_{\vec{u},\vec{v}} = \Delta_{\vec{u}}.$$

Troisième cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
On a $E_{\vec{u},\vec{v}} = \mathcal{V}$ car $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Ainsi l'ensemble $E_{\vec{u},\vec{v}}$ est : soit le singleton $\{\vec{0}\}$
soit une droite vectorielle
soit le plan vectoriel $\mathcal{V}$.

Exercice 14 Pour tout nombre réel m on considère les couples de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\vec{u} = (m; 2) \qquad \vec{v} = (3, m + 5).$$

Trouver $E_{\vec{u},\vec{v}}$ selon les valeurs du nombre réel m.

$\mathcal{V}$ étant rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}$ égal à $x\vec{i} + y\vec{i}$ et $\vec{v}$ égal à $x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$. On rappelle que :

– le **déterminant** dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est le nombre réel $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ égal à $xy' - yx'$ et noté $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$.
– Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant, dans une base donnée, est nul.

Exercice 15 Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$. On note $\mathcal{B}$ la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}'$ la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Soient $\vec{w}$ le vecteur de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{B}$ et (A, B) dans $\mathcal{B}'$, et $\vec{t}$ le vecteur de coordonnées (c, d) dans $\mathcal{B}$ et (C, D) dans $\mathcal{B}'$.
Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{w}, \vec{t}) = 10 \det_{\mathcal{B}'}(\vec{w}, \vec{t})$.

Question 8 *On considère le système d'inconnue* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$:

$$(T) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 7y = 1 \end{cases}$$

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ *une base de* $\mathcal{V}$ *posons :*

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} \quad , \quad \vec{v} = 3\vec{i} - 7\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{w} = 7\vec{i} + \vec{j}.$$

Montrer que résoudre (T) *c'est trouver les coefficients de la combinaison linéaire de* $\vec{u}$ *et de* $\vec{v}$*, si elle existe, égale à* $\vec{w}$.

Plus généralement interprétons et résolvons le système (S) de deux équations du premier degré d'inconnue (x, y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$(S) \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont six nombres réels donnés.
On note S l'ensemble des couples solutions de (S).
Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ étant rapporté à la base $\mathcal{B}$ égale à $((1,0), (0,1))$ considérons les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = (a_1; a_2) \qquad \vec{v} = (b_1; b_2) \qquad \vec{w} = (c_1; c_2).$$

En généralisant la question 8, on déduit que : résoudre (S) c'est trouver, quand ils existent, les coefficients x et y d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ égale à $\vec{w}$:

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}.$$

Le système (S) a au moins une solution si et seulement si le vecteur $\vec{w}$ est élément de $E_{\vec{u},\vec{v}}$ d'ou les différents cas suivants :

Premier cas : $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.
On a $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et :

$$E_{\vec{u},\vec{v}} = \{\vec{0}\} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} \text{si} & \vec{w} = (0, 0) & \mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \\ \text{si} & \vec{w} \neq (0, 0) & \mathcal{S} = \varnothing. \end{cases}$$

Deuxième cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et non tous deux nuls.
On a donc : $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $E_{\vec{u},\vec{v}} = \Delta_{\vec{u}}$ (par exemple si $\vec{u} \neq \vec{0}$).

- Si $\vec{w}$ n'appartient pas à $\Delta_{\vec{u}}$ (c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) \neq 0$) alors $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $\vec{w}$ appartient à $\Delta_{\vec{u}}$ (c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) = 0$) alors il existe un nombre réel k tel que : $\vec{w} = k\vec{u}$.

D'autre part il existe un nombre réel k' tel que : $\vec{v} = k'\vec{u}$.
On a donc :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \quad \text{si et seulement si} \quad k\vec{u} = x\vec{u} + k'y\vec{u}$$

ce qui est équivalent à : $x = k - k'y$

donc : $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = k - k'y\}$

ou encore : $\mathcal{S} = \{(k - k'y, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$.

Troisième cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
On a $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ et $E_{\vec{u},\vec{v}} = \mathbb{R}^2$. $(\vec{u}, \vec{v})$ étant une base de $\mathbb{R}^2$ il existe un et un seul couple (a, b) tel que :

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$$

donc : $\mathcal{S}\ \{(a, b)\}$.
En conclusion :
L'ensemble $\mathcal{S}$ dépend de la nullité du déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$. Ce déterminant, égal à $\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ s'appelle le déterminant du système (S) d'où :

Théorème

Un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ possède une et une seule solution si et seulement si son déterminant est différent de zéro. Un tel système s'appelle un **système de Cramer.**
Un système de deux équations du premier degré dont le déterminant est nul soit ne possède aucune solution, soit en possède une infinité.

Parfois on ne cherche pas à résoudre un tel système mais on utilise le théorème ci-dessus.
Par exemple, étant donnée une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathfrak{V}$, on considère l'application f de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ qui au vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $(4x + 6y)\vec{i} + (2x + 3y)\vec{j}$ et E l'image directe de $\mathfrak{V}$ par f.
Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathfrak{V}$ de coordonnées (x', y'). On a :
$\vec{v} \in E$ si et seulement si il existe un couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$(S) \begin{cases} 4x + 6y = x' \\ 2x + 3y = y' \end{cases}$$

Le déterminant de ce système (S) est nul, donc soit (S) n'a aucune solution, soit (S) a une infinité de solutions. On a :

$$(S) \iff \begin{cases} 4x + 6y = x' \\ x' - 2y' = 0 \end{cases}$$

d'où : $\vec{v} \in E \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 4x + 6y = x' \quad \text{et} \quad x' - 2y' = 0.$

Or la proposition :

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 4x + 6y = x'$$

est vraie, quel que soit le nombre réel x' $\left(\text{par exemple, en prenant } x = \frac{x'}{4} \text{ et } y = 0\right)$.

D'où : $\vec{v} \in E \iff x' = 2y'$

c'est-à-dire : $\vec{v} \in E \iff \vec{v} = y'(2\vec{i} + \vec{j}).$

Ainsi E est la droite vectorielle de base $(2\vec{i} + \vec{j})$.

Question 9 *Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ (ou $\mathbb{R}^2$) étant rapporté à la base $\mathcal{B}$, égale à $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs : $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, et $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j}$ et k un nombre réel.*

Montrer que :

1) $det_B(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = det_B(\vec{u}, \vec{w}) + det_B(\vec{v}, \vec{w})$

2) $det_B(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = det_B(u, \vec{v}) + det_B(\vec{u}, \vec{w})$

3) $det_B(k\vec{u}, \vec{v}) = det_B(\vec{u}, k\vec{v}) = k\ det_B(\vec{u}, \vec{v}).$

Soit (S) un système de Cramer, avec les notations ci-dessus l'unique couple solution (a, b) est défini par :

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$$

donc, en utilisant les résultats de la question 9, on obtient :

$$\det_B(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{v}) = \det_B(a\vec{u}, \vec{v}) + \det_B(b\vec{v}, \vec{v})$$

c'est-à-dire : $$\det_B(\vec{w}, \vec{v}) = a\ \det_B(\vec{u}, \vec{v})$$

car $b\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{v}$.
D'où, puisque $\det_B(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$:

$$a = \frac{\det_B(\vec{w}, \vec{v})}{\det_B(\vec{u}, \vec{v})}$$

de même :

$$\det_B(\vec{u}, a\vec{u} + b\vec{v}) = \det_B(\vec{u}, a\vec{u}) + \det(\vec{u}, b\vec{v})$$
$$= b\ \det_B(\vec{u}, \vec{v})$$

d'où, puisque $\det_B(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$:

$$b = \frac{\det_B(\vec{u}, \vec{w})}{\det_B(\vec{u}, \vec{v})}.$$

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 4y = 9 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -x + 4y = 10 \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ -6x + 14y = 3 \end{cases}$$

Exercice 17 Discuter suivant la valeur du nombre réel m du nombre des solutions du système (S) d'inconnue (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$(S)\ \begin{cases} (m+1)x + 4y = m + 8 \\ (4m-2)x + 4my = 4m + 5. \end{cases}$$

II. Produit scalaire

1 Rappels sur le produit scalaire

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$, le **produit scalaire** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que : étant donnés un représentant (O, A) de $\vec{u}$ et le représentant (O, B) de $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB}$$

où H est le projeté orthogonal de A sur une droite support de (O, B).

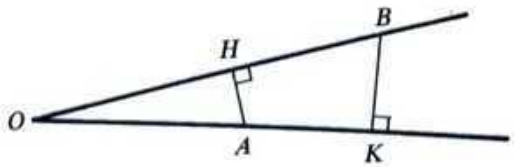
Remarques

• Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réel indépendant des représentants choisis.

• Soient O un point du plan, A et B les deux points du plan tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
Si $\vec{u}$ est nul ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overline{OH} \cdot \overline{OB} \\ &= \overline{OA} \cdot \overline{OK} \end{aligned}$$

où H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OB).
K est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).



• Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de représentants respectifs (O, A) et (O, B), on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$$

où $\qquad OA = d(O, A) \quad \text{et} \quad OB = d(O, B).$

• Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{u}$ noté $\vec{u}^2$.

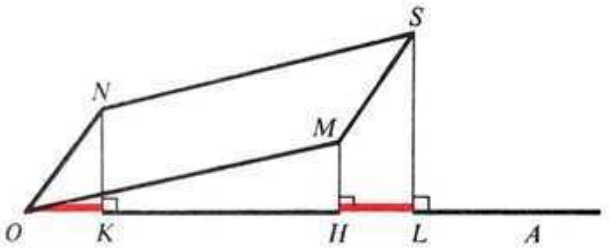
Question 10 *Le vecteur $\vec{u}$ étant donné, vérifier qu'il existe une infinité de vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ et en construire quelques représentants.*

Question 11 *Soient O, A et B trois points tels que : $OA = OB = 1$. Trouver une mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$ sachant que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Propriétés du produit scalaire :

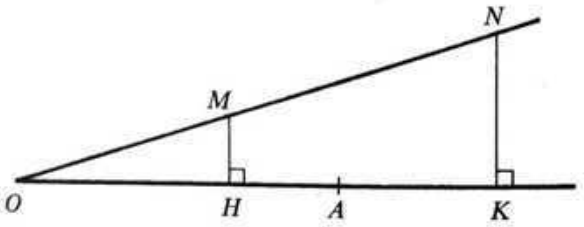
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$
$\overrightarrow{ON} = v$
$\overrightarrow{OM} = \vec{w}$
$\overrightarrow{OS} = \vec{v} + \vec{w}$



- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$:

$\overrightarrow{OH} = \vec{v}$
$\overrightarrow{ON} = k\vec{v}$
$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$



- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \vec{u}^2 \geqslant 0$
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \vec{u}^2 = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

Exercice 18 Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$ tels que :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 4 \qquad \vec{j} \cdot \vec{j} = 10 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = 6.$$

1) Montrer que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

2) Calculer les produits scalaires suivants :

$$(3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \vec{i}; \qquad (\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot 2\vec{j}; \qquad (2\vec{i} - 5\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 3\vec{j}).$$

3) Trouver le nombre réel négatif x dans chacun des cas suivants :

1) $(\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 5\vec{j}) = 2$ 2) $(\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (\vec{i} + x\vec{j}) = 4$.

2 Orthogonalité

On rappelle que deux **vecteurs** sont **orthogonaux** et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Question 12 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, montrer que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ si et seulement si tout vecteur de la droite vectorielle $\Delta_{\vec{u}}$, engendrée par $\vec{u}$, est orthogonal à tout vecteur de la droite vectorielle $\Delta_{\vec{v}}$ engendrée par $\vec{v}$.*

Définition

On dit que deux droites vectorielles Δ et Δ' sont **orthogonales** et l'on note $\Delta \perp \Delta'$, si et seulement si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre.

Cette définition nous permet de formuler le résultat de la question 13 sous la forme suivante :

Théorème

Deux droites vectorielles sont orthogonales si et seulement si il existe un vecteur non nul de l'une qui est orthogonal à un vecteur non nul de l'autre.

On sait (classe de 3e) que deux droites affines sont perpendiculaires si et seulement si leurs directions sont orthogonales d'où :

Théorème

Deux droites affines sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Exercice 19 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan $\mathcal{P}$ tel que :

$$\vec{i}^2 = 1 \qquad \vec{j}^2 = 10 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 3.$$

Soit : $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 24\vec{i} - 7\vec{j}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(3, -1)$. Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, la droite (D') passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$. Démontrer que (D) et (D') sont perpendiculaires.

Question 13 *Montrer que deux vecteurs non nuls et orthogonaux ne sont pas colinéaires et constituent donc une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$.*

Définition

On appelle **base orthogonale** du plan vectoriel $\mathcal{V}$ tout couple de vecteurs non nuls et orthogonaux.

Exercice 20 Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les deux vecteurs orthogonaux tels que $\vec{i}^2 = 1$ et $\vec{j}^2 = 3$.
Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ forment une base orthogonale de $\mathcal{V}$.
Trouver les coordonnées X et Y dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ d'un vecteur $\vec{w}$ de coordonnées x et y dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 21 Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthogonale telle que $\vec{i}^2 = 1$ et $\vec{j}^2 = 4$ et $\vec{u}$ le vecteur tel que $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$. Trouver l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.
Plus généralement quelle est la nature de l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur non nul donné?

3. Rappels sur la norme

On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$ le nombre réel noté $\|\vec{u}\|$, et égal à $\sqrt{\vec{u}^2}$.
Un vecteur de norme égale à 1 est dit vecteur **unitaire** ou **normé.**
Propriétés de la norme d'un vecteur.

- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| \geqslant 0.$
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}.$
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|.$
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$

Question 14 *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, montrez qu'il existe exactement deux vecteurs unitaires et colinéaires à $\vec{u}$.*

Remarques

- Soient A et B deux points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$$

donc :
$$\|\overrightarrow{AB}\| = |\overline{AB}| = d(A, B) = AB.$$

- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$

où θ est une mesure de l'angle $\widehat{MON}$ avec $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. ($\theta$ ne dépend pas des représentants choisis pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.)

- De la double inégalité $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ on déduit l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

Exercice 22 Démontrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$
$$\|\vec{u} - v\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

En déduire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Exercice 23 Montrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Exercice 24 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{U}$, α et β deux nombres réels.
Montrer que :

$$\|\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta\vec{u} \cdot \vec{v} + \rho^2 \|\vec{v}\|^2.$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{U}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 4 \qquad \|\vec{v}\| = 5 \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 10.$$

Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants :

$$2\vec{u} + 3\vec{v},\ \vec{u} - \vec{v},\ \vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} - 4\vec{v}.$$

On rappelle qu'une **base orthonormée** de $\mathcal{U}$ est un couple de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$$\|\vec{i}\| = 1, \qquad \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

c'est-à-dire une base orthogonale dont les vecteurs sont unitaires.
D'autre part un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$ est dit orthonormé si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathcal{U}$.

Exercice 25 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de couples de coordonnées respectifs (x, y) et (x', y') dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Calculer, en fonction de x, y, x' et y' les nombres réels suivants :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \qquad \|\vec{u}\|, \|\vec{v}\| \quad \text{et} \quad \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}).$$

En déduire que : pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{U}^2$ on a :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\det_{(i,j)}(\vec{u}, \vec{v}))^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

Soient A et B les points de $\mathcal{P}$ de couples de coordonnées respectifs (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$; calculer $d(A, B)$.

4. Vecteur normal à une droite

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{j}, \vec{j})$ noté $\mathcal{R}$.

Question 15 *Soient (D) la droite de $\mathcal{P}$ dont une équation dans $\mathcal{R}$ est :*

$$2x + 3y - 8 = 0.$$

et $\vec{n}$ le vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$. Montrer que la droite vectorielle $\Delta_{\vec{n}}$, engendrée par $\vec{n}$, est orthogonale à la direction de la droite (D).

Définition

On appelle **vecteur normal à une droite** affine (D) tout vecteur **non nul** orthogonal à un vecteur directeur quelconque de (D).

Question 16 *Soit $\vec{u}$, égal à $p\vec{i} + q\vec{j}$ un vecteur non nul de $\mathfrak{V}$. Montrer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = -q\vec{i} + p\vec{j}$. En déduire qu'il existe une et une seule droite vectorielle orthogonale à une droite vectorielle donnée. En déduire qu'étant donnée une droite affine (D) et un point A du plan il existe une et une seule droite affine (D') perpendiculaire à (D) et passant par A.*

Soit (D) la droite affine d'équation dans $\mathcal{R}$:

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = -b\vec{i} + a\vec{j}$, est un vecteur directeur de (D), donc est non nul. La droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $\vec{n}$, égal à $a\vec{i} + b\vec{j}$, est l'unique droite vectorielle orthogonale à la direction de (D); le vecteur $\vec{n}$ est donc un vecteur normal à (D) et tout autre vecteur normal à (D) est colinéaire à $\vec{n}$.

Théorème

Soit (D) la droite dont une équation dans un repère orthonormé du plan est :

$$ax + by + c = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a, b) est un vecteur normal à (D) et tout autre vecteur normal à (D) lui est colinéaire.

Exercice 26 Soit (D) la droite dont une équation est :

$$3x + 4y + 9 = 0.$$

Montrer qu'il existe exactement deux vecteurs unitaires et normaux à (D) dont on précisera les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Plus généralement montrer qu'il existe deux vecteurs unitaires et normaux à la droite d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

Préciser leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 27 Soient (D) et (D') les deux droites d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

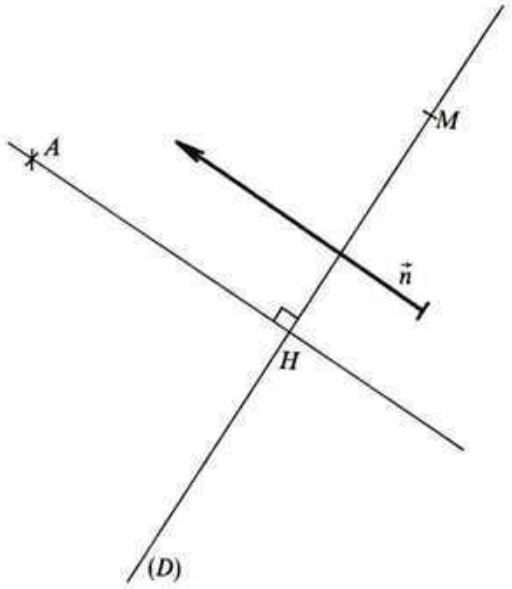
Montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si : $aa' + bb' = 0$.
Si (D) et (D') ont pour équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

Exercice 28 Soient $\vec{n}$, égal à $a\vec{i} + b\vec{j}$ un vecteur de $\mathfrak{V}$ et A le point de couple de coordonnées (x_A, y_A) dans $\mathcal{R}$.
Trouver une équation de la droite passant par A et dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.
Trouver les équations des hauteurs et des médiatrices du triangle PQR où P, Q et R sont les points de couples de coordonnées respectifs, $(-2; 2)$, $(1; -1)$ et $(3; -1)$. En déduire les coordonnées de l'orthocentre H et du centre I du cercle circonscrit au triangle PQR.

Question 17 *Soient A le point de coordonnées $(-1; 2)$ et (D) la droite d'équation $y = x - 1$. Trouver une représentation paramétrique de la droite (D') passant par A et perpendiculaire à (D). En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur la droite (D). En utilisant le fait que la distance du point A à la droite (D), notée $d(A, (D))$ est égale à la distance de A à son projeté orthogonal H sur (D), calculer $d(A, (D))$.*

Plus généralement soit (D) la droite d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$



Soit A le point de coordonnées (p, q), calculons $d(A, (D))$. Soit H le projeté orthogonal de A sur (D). Puisque le vecteur $\vec{n}$ tel que $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$, est normal à (D), il existe un nombre réel k tel que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ ait pour coordonnées $(ka; kb)$. Les coordonnées de H sont donc :
$(p + ka, q + kb)$.
Or H est élément de (D) donc on a :

$$a(p + ka) + b(q + kb) + c = 0$$

ou encore : $$k(a^2 + b^2) = -(ap + bq + c).$$

Or : $$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = k(a^2 + b^2)$$

d'où : $$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -(ap + bq + c).$$

Soit B le point tel que : $$\overrightarrow{AB} = \vec{n}.$$

On a : $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

or : $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$

d'où : $AH \cdot AB = |ap + bq + c|$

donc : $d(A, (D)) = \dfrac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Théorème

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé, soient (D) la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et A le point de coordonnées (p, q).
La distance du point A à la droite (D) est le nombre réel $d(A, (D))$ tel que :

$$d(A, (D)) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Question 18 *Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}$ on considère les deux dates (D) et (D') d'équations respectives :* $3x + 4y - 5 = 0$

et : $4x - \sqrt{2}y + 3 = 0.$

Montrer que l'ensemble (B) des points du plan équidistants des deux droites (D) et (D') est la réunion de deux droites (D_1) et (D_2) dont on déterminera les équations. Vérifier que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.
(D_1) et (D_2) s'appellent les ***bissectrices du couple de droites sécantes*** *$((D); (D'))$.*

Question 19 *Soit (D_1) la droite passant par le point de coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.*
Soit (D_2) la droite passant par le point de coordonnées $(-1, -1)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{j}$.
Soit (D_3) la droite dont une équation est : $x = -1$.
Trouver les coordonnées des points P, Q et R tels que :

$$\{Q\} = (D_1) \cap (D_3) \quad \{P\} = (D_3) \cap (D_2) \quad \{R\} = (D_1) \cap (D_2).$$

On note (D_P) celle des deux bissectrices du couple de droites $((D_2), (D_3))$ qui coupe le segment $[QR]$; (D_P) s'appelle la ***bissectrice intérieure*** *du couple de droites $((D_2), (D_3))$ du triangle PQR. De même on note (D_Q) et (D_R) les bissectrices intérieures des couples de droites $((D_1), (D_3))$ et $((D_1), (D_2))$.*
Montrer que les trois droites (D_P), (D_Q) et (D_R) sont concourantes en un point, dont on déterminera les coordonnées, et que ce point est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle PQR. Ce cercle s'appelle le ***cercle inscrit*** *dans le triangle PQR.*
Les bissectrices intérieures (D_P), (D_Q) et (D_R) du triangle PQR sont en fait les bissectrices respectives des angles géométriques $\widehat{QPR}$, $\widehat{PQR}$ et $\widehat{PRQ}$ (voir exercice 56) (on rappelle que la bissectrice d'un angle géométrique est l'axe de la symétrie qui, à chaque côté de l'angle fait correspondre l'autre côté).

Exercice 29 Soient les points A, B et C de coordonnées respectives $(0; 2)$, $(-1; 1)$ et $(3; -1)$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$.
Trouver les équations des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC.

5 Applications du produit scalaire aux lieux géométriques

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et k un nombre réel.

a) **Ensemble E_1 des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$**

Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$
$$= \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

Soit I le milieu de $[AB]$.

Question 20 *Montrer que pour tout point M du plan on a :*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

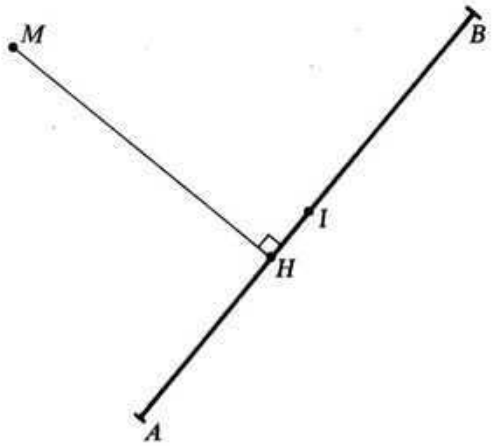
En déduire que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \left(M \in E_1 \iff \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{k}{2}\right).$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

On a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \overline{BA} \times \overline{HI}$

donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \overline{AB} \times \overline{IH}.$



On a ainsi le résultat :

Théorème

Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan de projeté orthogonal H sur la droite (AB) on a :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB} \times \overline{IH}.$$

On a : $\forall M \in \mathcal{P} \quad \left(M \in E_1 \iff \overline{AB} \cdot \overline{IH} = \frac{k}{2} \right)$

ou encore : $\forall M \in \mathcal{P} \quad \left(M \in E_1 \iff \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}} \right)$

Or, il existe un unique point H de la droite (AB) tel que :

$$\overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}.$$

donc : un point M du plan est élément de E_1 si et seulement si M se projette sur la droite (AB) en cet unique point H.
E_1 est donc la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par ce point H.

Exercice 30 On veut retrouver cet ensemble E_1 par une autre méthode. Montrer qu'il existe un point unique H de la droite (AB) appartenant à E_1.
Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P}. \quad (M \in E_1 \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HM} = 0)$$

En déduire l'ensemble E_1.

Exercice 31 Soient A et B les points de $\mathcal{P}$ de coordonnées (2, 2) et $(-1, -1)$. Trouver une équation cartésienne et une représentation paramétrique de l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 = 3$$

Exercice 32 Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 = 2AB^2$$

b) **Ensemble E_2 des points M du plan tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$**

Question 21 *Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ donner l'ensemble E_2.*
Si $\alpha + \beta = 0$ avec α non nul montrer que E_2 est l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = \frac{k}{\alpha}$. En déduire l'ensemble E_2.

On suppose désormais que $\alpha + \beta \neq 0$.

Question 22 *Soit $E_2 = \{ M \in \mathcal{P};\ 3MA^2 + 5MB^2 = 128 \}$ où A et B sont deux points distincts de $\mathcal{P}$ tels que $AB = 8$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 5)$. Montrer que :*

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad 3MA^2 + 5MB^2 = 8MG^2 + 3GA^2 + 5GB^2.$$

En déduire que E_2 est un cercle de centre G dont on déterminera le rayon.
Dessiner E_2 *(unité de longueur : 1 cm).*

Plus généralement trouvons, lorsque $\alpha + \beta \neq 0$, l'ensemble E_2 défini par

$$E_2 = \{ M \in \mathcal{P};\ \alpha MA^2 + \beta MB^2 = k \}.$$

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).
Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$$

ou encore :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + 2\overrightarrow{MG}(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB})$$

or :
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

donc :
$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

d'où :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \left(M \in E_2 \iff MG^2 = \frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta} \right).$$

Posons :
$$a = \frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta}.$$

Si $a < 0$ alors $E_2 = \varnothing$.
Si $a = 0$ alors $E_2 = \{ G \}$.
Si $a > 0$ alors $E_2 = \mathcal{C}(G, \sqrt{a})$ où $\mathcal{C}(G, \sqrt{a})$ désigne le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{a}$.

Exercice 33 Soient A et B les points du plan de coordonnées (1, 2) et $(-2, -2)$. Trouver et dessiner l'ensemble E_2 des points M du plan tels que : $2MA^2 + 3MB^2 = 50$.

Exercice 34 Trouver suivant la valeur du nombre réel k la nature de l'ensemble E_2 tel que $E_2 = \{ M \in \mathcal{P};\ MA^2 + 2MB^2 = k \}$ où A et B sont deux points donnés de $\mathcal{P}$.

Exercice 35 Trouver l'ensemble E des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 12$$

où A et B sont deux points donnés du plan $\mathcal{P}$ tels que $d(A, B) = 3$.

Étudions maintenant le cas particulier $\alpha = \beta = 1$.
Soit $E_2 = \{ M \in \mathcal{P};\ MA^2 + MB^2 = k \}$.

Question 23 *Soit I le milieu de $[AB]$ montrer que :*

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

En déduire, selon la valeur du nombre réel k, la nature de E_2.

On retiendra :

Théorème (Premier théorème de la médiane)
Soient A, B et M trois points du plan et I le milieu de $[AB]$. On a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Exercice 36 En utilisant ce premier théorème de la médiane trouver la longueur de chacune des trois médianes du triangle ABC tel que $d(A, B) = 2$ $d(B, C) = 3$ $d(A, C) = 4$.

Exercice 37 Soit m un nombre réel. Soit E l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = m$.

Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad (M \in E \iff [MA^2 - m^2 MB^2 = 0 \text{ et } M \neq B]).$$

En déduire que :

si $m = 1$ alors E est la médiatrice du segment $[AB]$,
si $m \neq 1$ alors E est l'ensemble vide ou est un cercle privé éventuellement d'un point.

c) **Ensemble E_3 des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.**

Question 24 *Soit I le milieu de $[AB]$, montrer que :*

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Dessiner, si possible, l'ensemble E_3 dans chacun des cas suivants :

1) $AB = 2$ $k = 3$.

2) $AB = 1$ $k = -3$.

3) $AB = 2$ $k = -1$.

On retiendra :

Théorème (Deuxième théorème de la médiane)
Soient A, B et M trois points du plan et I le milieu de $[AB]$ on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Dans le cas général on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \left(M \in E_3 \iff IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}\right).$$

Donc :

si $k < -\frac{AB^2}{4}$ alors $E_3 = \varnothing$

si $k = -\frac{AB^2}{4}$ alors $E_3 = \{I\}$

si $k > -\frac{AB^2}{4}$ alors $E_3 = \mathcal{C}\left(I, \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}\right)$

où $\mathcal{C}\left(I, \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}\right)$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$.

Exercice 38 Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A de coordonnées $(2, -1)$ et le vecteur $\vec{u}$ égal à $\vec{i} + 3\vec{j}$. Soit k un nombre réel donné, on note (D_k) l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.

Trouver et dessiner l'ensemble (D_k) dans chacun des cas suivants :

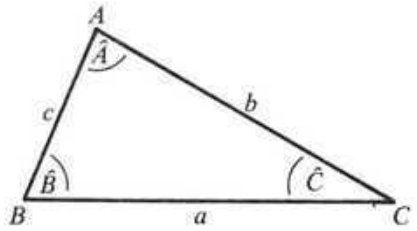
1) $k = 0$ 2) $k = 3$ 3) $k = -2$.

Plus généralement soient A un point du plan $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$, et k un nombre réel. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est une droite dont on déterminera une équation cartésienne et une représentation paramétrique en fonction de k, des coordonnées de A et celles de $\vec{u}$.

6 Application du produit scalaire aux relations métriques dans le triangle

Dans tout ce paragraphe on considère un triangle ABC et on note : a, b et c les distances respectives BC, AC et AB,

$\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles géométriques respectifs $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.



On a déjà vu deux relations métriques : les deux théorèmes de la médiane.

Question 25 *Montrer que* $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
En déduire que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

Théorème

Dans le triangle ABC on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Remarque

De même on démontrerait :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

Exercice 39 Construire dans chacun des cas suivants un triangle ABC dont les côtés ont pour longueur a, b et c, puis calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1) $a = 5\sqrt{3}$ $b = 10$ $c = 5$.
2) $a = 5$ $b = 4$ $c = 3$.
3) $a = 8$ $b = 6$ $c = 4$.

Exercice 40 Démontrer le théorème de Pythagore.

Question 26 *Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).*
Exprimer l'aire S du triangle ABC grâce aux points A, B, C et M.
Exprimer $\sin \widehat{BAC}$ grâce à ces points.
En déduire S en fonction du sinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

Théorème

L'aire S d'un triangle ABC est tel que :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}.$$

Remarque :

De même on démontrerait :

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}.$$

Exercice 41 On considère trois demi-droites de même origine $[OA)$, $[OB)$ et $[OC)$ telles que les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOC}$ aient tous deux pour mesure 15 (en degrés) et que $[OA)$ et $[OB)$ soient distinctes. Soient (D) une droite perpendiculaire au support de $[OC)$ et H le point d'intersection de la demi-droite $[OB)$ et de la droite (D).
Quelle doit être la mesure de $[OH]$ (en cm) pour que la mesure (en cm^2) de l'aire du triangle défini par les demi-droites $[OA)$, $[OB)$ et la droite (D) soit 25?

Question 27 *Déduire du théorème précédent que :*

$$a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A}.$$

Dans un triangle ABC peut-on avoir $\sin \hat{A} = 0$?

Ainsi les rapports $\frac{a}{\sin \hat{A}}$ et $\frac{b}{\sin \hat{B}}$ sont égaux. On démontre de même qu'ils sont égaux à $\frac{c}{\sin \hat{C}}$. De plus, en notant R le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle ABC, on démontre (voir exercice 68) que ces rapports sont égaux à $2R$.

Théorème

Soient ABC un triangle et R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle. On a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{C}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

Exercice 42 Soient A et B deux points du plan distants de 3 cm.
Construire les différents triangles possibles ABC tels que la mesure en cm de $[AC]$ soit 2, et l'angle ABC ait pour mesure 60 (en degrés).
Quelles sont, dans chaque cas,
- la longueur du côté $[BC]$,
- la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ (à un degré près),
- la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$ (à un degré près),
- l'aire du triangle ABC?

III. Angles orientés

1 Rappels sur l'angle orienté d'un couple de demi-droites de même origine

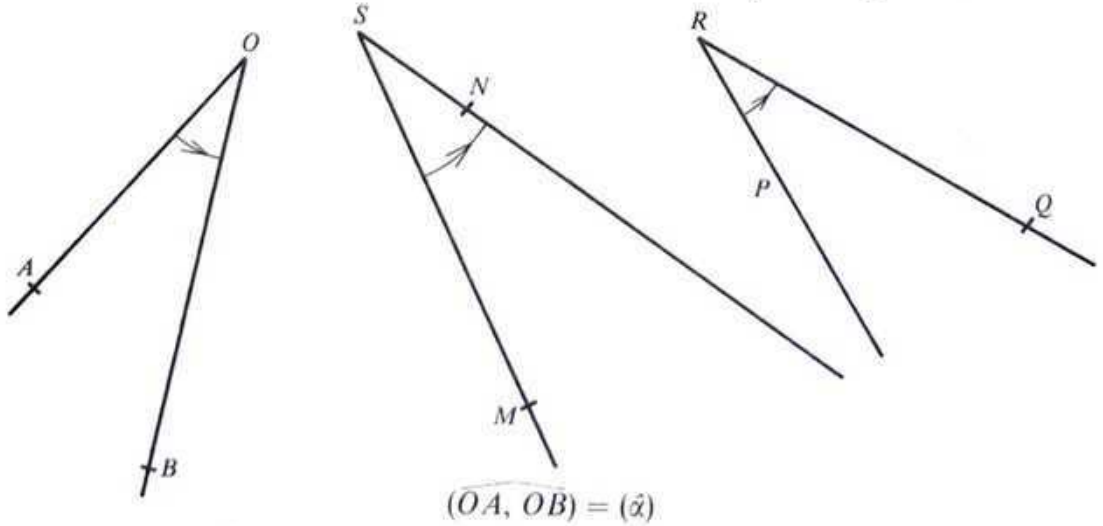
Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

Définition

Soient $[OA)$ et $[OB)$ deux demi-droites de même origine et de support distincts, on appelle **angle orienté du couple de demi-droites** $([OA), [OB))$, noté $(\widehat{OA, OB})$, l'ensemble des couples de demi-droites de même origine $([SM), [SN))$ tels que :

$\widehat{MSN}$ est isométrique à $\widehat{AOB}$
et
(S, M, N) est de même sens que (O, A, B).

On rappelle que le sens du triplet (O, A, B) est donné par le sens de parcours sur le cercle circonscrit au triangle OAB pour le « trajet de O à B en passant par A ».



$(\widehat{OA, OB}) = (\hat{\alpha})$

$([SM), [SN)) \in (\hat{\alpha})$, c'est un représentant de $(\hat{\alpha})$

$([RP), [RQ)) \in (\hat{\alpha})$, c'est un représentant de $(\hat{\alpha})$.

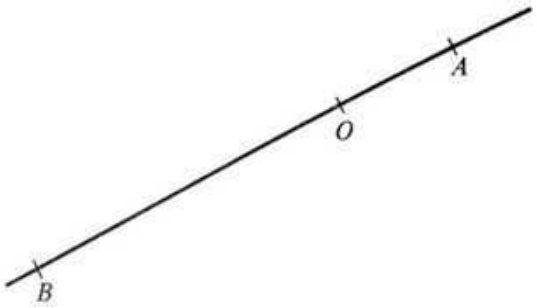
Cas particuliers :

l'angle nul



$(\hat{0}) = (\widehat{OA, OB})$ avec $[OA) = [OB)$.

l'angle plat



$(\hat{p}) = (\widehat{OA, OB})$ avec $[OA)$ et $[OB)$ opposées.

On appelle **angle droit** l'unique angle orienté noté $(\hat{d})$ défini par $(\hat{d}) = (\widehat{OI, OJ})$ où (O, I, J) est un repère orthonormé direct du plan.
On rappelle :

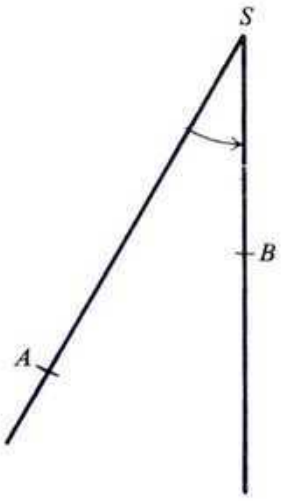
Théorème

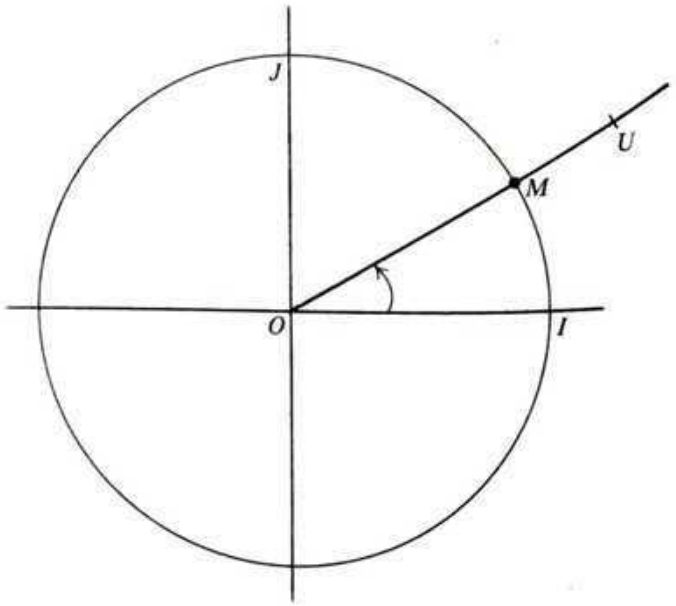
Soient $(\hat{\alpha})$ un angle orienté et $[OA)$ une demi-droite du plan. Il existe une demi-droite $[OB)$ et une seule telle que $(\widehat{OA, OB}) = (\hat{\alpha})$.

Cercle trigonométrique

Le repère orthonormé direct du plan étant le repère (O, I, J) on rappelle que le cercle trigonométrique est le cercle (C) de centre O et de rayon égal à 1.

A tout angle orienté $(\widehat{SA, SB})$ on associe l'unique demi-droite $[OU)$ telle que $(\widehat{SA, SB}) = (\widehat{OI, OU})$.



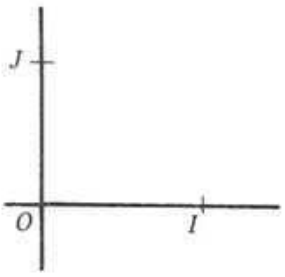


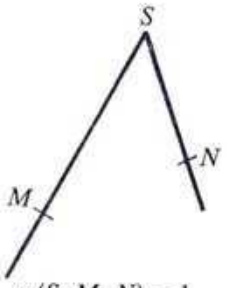
Soit M l'unique point d'intersection de (C) et de la demi-droite $[OU)$; on a : $(\widehat{SA, SB}) = (\widehat{OI, OM})$.

Cette application qui, à tout angle orienté $(\hat{\alpha})$ associe l'unique point M de (C) tel que $(\widehat{OI, OM}) = (\hat{\alpha})$ est une bijection, de l'ensemble des angles orientés de couple de demi-droites de même origine sur le cercle trigonométrique (C).

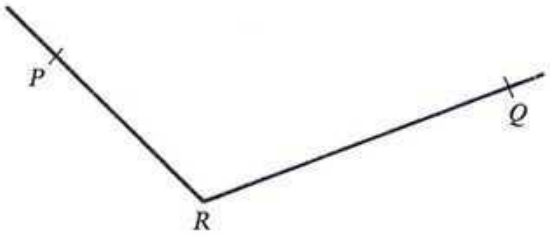
Détermination principale de la mesure d'un angle orienté

Soit σ l'application qui, à tout triplet de points non alignés (S, M, N) associe le nombre réel 1 si (S, M, N) est de sens direct, le nombre réel -1 si (S, M, N) est de sens indirect :





$\sigma(S, M, N) = 1$



$\sigma(R, P, Q) = -1$

On définit la détermination principale de la mesure en radians (respectivement en degrés) de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$ notée MES$(\hat{\alpha})$ (respectivement MES(°)$(\hat{\alpha})$) par :

$$\text{MES} \quad (\hat{\alpha}) = \sigma(S, M, N) \times \text{mes} \quad \widehat{MSN}$$

$$\text{MES(°)}(\hat{\alpha}) = \sigma(S, M, N) \times \text{mes(°)} \ \widehat{MSN}$$

où : $(\hat{\alpha}) = (\widehat{SM, SN})$.

Comme : $\text{MES}\,(\hat{o}) = \text{MES(°)}(\hat{o}) = 0$

$\text{MES}\,(\hat{p}) = \pi \quad$ et $\quad \text{MES(°)}(\hat{p}) = 180$

$\text{MES}\,(\hat{d}) = \dfrac{\pi}{2} \quad$ et $\quad \text{MES(°)}(\hat{d}) = 90.$

Pour tout angle orienté $(\hat{\alpha})$ on a :

- $-\pi < \text{MES} \quad (\hat{\alpha}) \leqslant \pi$
- $-180 < \text{MES(°)}(\hat{\alpha}) \leqslant 180.$

Théorème

L'application MES (respectivement MES(°)) qui à tout angle orienté associe la détermination principale de sa mesure est une bijection de l'ensemble des angles orientés sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$ (respectivement $]-180; 180]$).

Remarques

• Étant donné un nombre réel x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (resp. $]-180; 180]$), il existe un unique angle orienté $(\hat{\alpha})$ tel que $\text{MES}(\hat{\alpha}) = x$ (respectivement $\text{MES}^{(\circ)}(\hat{\alpha}) = x$). Par abus de langage on parlera parfois de l'angle orienté de x radians (resp. x degrés).

• Si $(\hat{\alpha})$ est égal à l'angle $(\widehat{SM, SN})$, et non plat, alors l'angle opposé de $(\hat{\alpha})$ est $-(\hat{\alpha})$ avec : $-(\hat{\alpha}) = (\widehat{SN, SM})$ et on a :

$$\text{MES}(-(\hat{\alpha})) = -\text{MES}(\hat{\alpha}).$$

Exercice 43 Dans chacun des cas suivants placer sur le cercle trigonométrique le point M associé à l'angle orienté dont la détermination principale de la mesure est x :

1) $x = \frac{\pi}{3}$ 2) $x = -\frac{\pi}{4}$ 3) $x = \frac{5\pi}{6}$ 4) $x = \frac{3\pi}{4}$

5) $x = 120°$ 6) $x = -30°$ 7) $x = 78°$ 8) $x = -112°$.

2 Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls, d'un couple de demi-droites

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

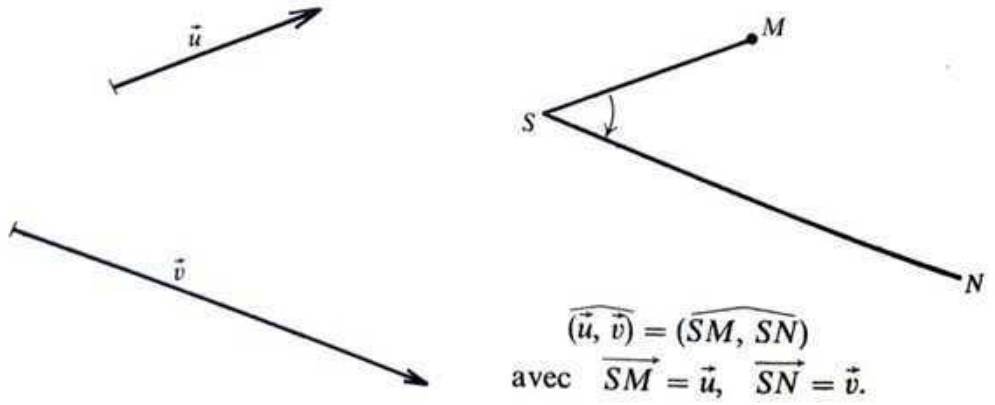
Question 28 *Soient S et S' deux points du plan, M et N les points du plan tels que $\overrightarrow{SM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{SN} = \vec{v}$ et M' et N' les points du plan tels que $\overrightarrow{S'M'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{S'N'} = \vec{v}$.*

Vérifier que $(\widehat{SM, SN}) = (\widehat{S'M', S'N'})$.

Ainsi quels que soient les représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ choisis on obtient le même angle orienté, celui-ci ne dépend donc que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. D'où :

Définition

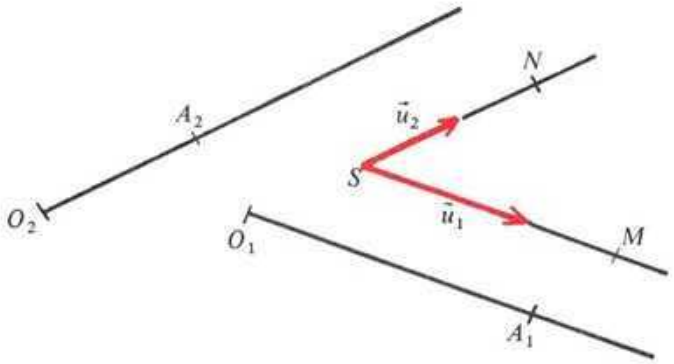
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle **angle orienté du couple de vecteurs** $(\vec{u}, \vec{v})$ et l'on note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ l'angle orienté des demi-droites de même origine $[SM)$ et $[SN)$ où les couples (S, M) et (S, N) sont respectivement des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.



$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{SM, SN})$
avec $\overrightarrow{SM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{SN} = \vec{v}$.

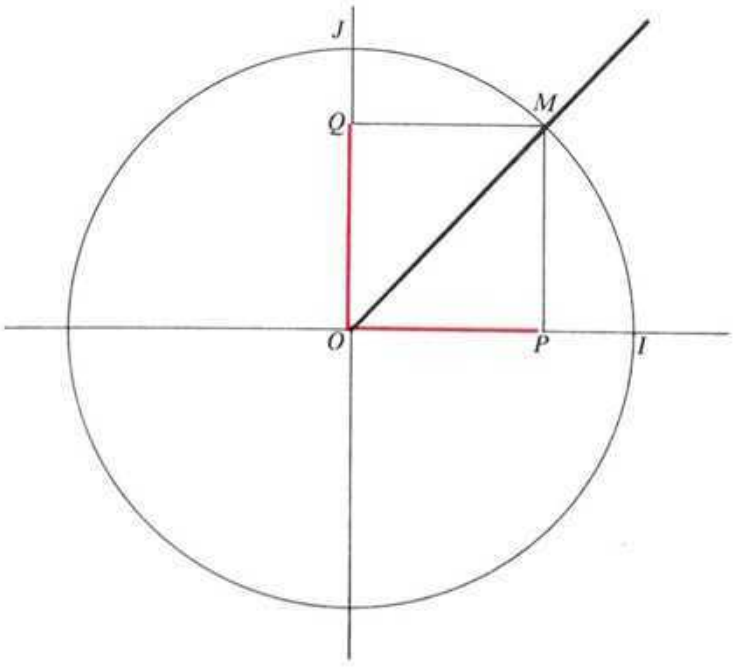
Question 29 *Soit $\vec{u}_1$ un vecteur non nul de la demi-droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$. Soit $\vec{v}_1$ un vecteur non nul de la demi-droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v}$. Montrer que l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}_1})$ est égal à l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.*

Ainsi l'angle orienté d'un couple de demi-droite affines de même origine est l'angle orienté de deux vecteurs directeurs respectifs quelconques de chacune de ces deux demi-droites. En particulier l'angle orienté d'un couple de demi-droites affines de même origine est l'angle orienté de leurs vecteurs directeurs unitaires.
Plus généralement on définit l'angle orienté d'un couple de demi-droites affines, n'ayant pas nécessairement même origine, comme étant l'angle orienté d'un couple de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de la première demi-droite et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de la seconde.



3 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Soit $(\hat{\alpha})$ un angle orienté (d'un couple de vecteurs ou de demi-droites), on considère l'unique point M du cercle trigonométrique tel que $(\hat{\alpha}) = \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})}$.



Soient P le projeté orthogonal de M sur (OI) et Q le projeté orthogonal de M sur (OJ).

Définition

On appelle **cosinus de l'angle** orienté $(\hat{\alpha})$ le nombre réel $\overline{OP}$; on le note cos $(\hat{\alpha})$.
On appelle **sinus de l'angle** orienté $(\hat{\alpha})$ le nombre réel $\overline{OQ}$; on le note sin $(\hat{\alpha})$.

Remarques

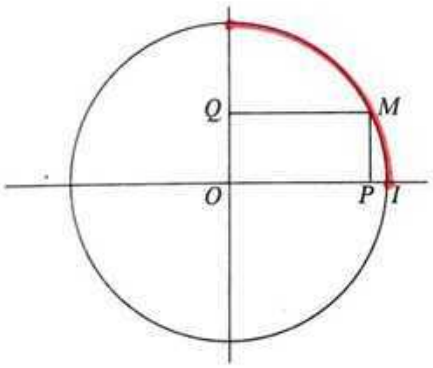
– Quel que soit l'angle orienté $(\hat{\alpha})$ on a :

$$-1 \leqslant \cos(\hat{\alpha}) \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \sin(\hat{\alpha}) \leqslant 1$$
$$\cos^2(\hat{\alpha}) + \sin^2(\hat{\alpha}) = 1$$

– Signes de cos $(\hat{\alpha})$ et de sin $(\hat{\alpha})$.

M appartient au 1er Quadrant

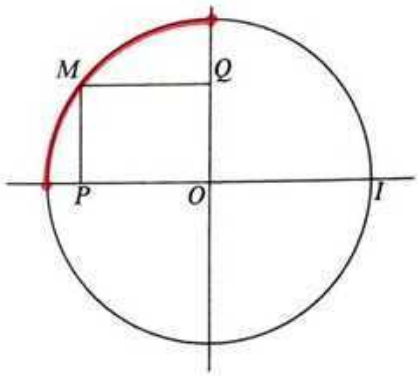
$$0 \leqslant \text{MES}(\hat{\alpha}) \leqslant \frac{\pi}{2}$$



$\cos(\hat{\alpha}) \geqslant 0, \quad \sin(\hat{\alpha}) \geqslant 0$

M appartient au 2e Quadrant

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \text{MES}(\hat{\alpha}) \leqslant \pi$$



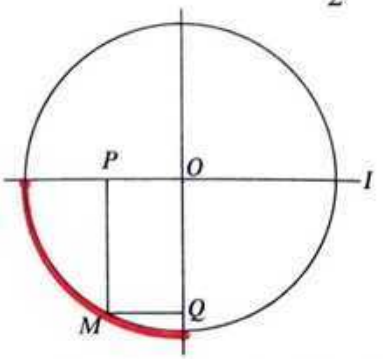
$\cos(\hat{\alpha}) \leqslant 0, \quad \sin(\hat{\alpha}) \geqslant 0$

On retrouve ici les signes des cos et sin des angles géométriques vus en classe de Troisième (cas où la détermination principale de la mesure de $(\hat{\alpha})$ est dans $[0, \pi]$). Dans ces deux cas on a :

$$\cos(\hat{\alpha}) = \cos(\widehat{IOM}) \quad \text{et} \quad \sin(\hat{\alpha}) = \sin(\widehat{IOM}).$$

M appartient au 3e quadrant

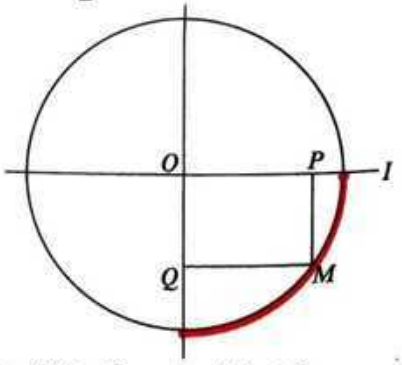
$$-\pi < \text{MES}(\hat{\alpha}) \leqslant -\frac{\pi}{2}$$



$\cos(\hat{\alpha}) \leqslant 0, \quad \sin(\hat{\alpha}) \leqslant 0$

M appartient au 4e quadrant

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{MES}(\hat{\alpha}) \leqslant 0$$



$\cos(\hat{\alpha}) \geqslant 0, \quad \sin(\hat{\alpha}) \leqslant 0$

On admet que lorsque M appartient au troisième ou quatrième quadrant on a encore $\cos(\hat{\alpha}) = \cos(\widehat{IOM})$ mais que, par contre, on a $\sin(\hat{\alpha}) = -\sin(\widehat{IOM})$.
Ainsi quel que soit l'angle orienté $(\hat{\alpha})$ on a :

$$\cos(\hat{\alpha}) = \cos(\widehat{IOM}).$$

Expression analytique du cosinus et du sinus d'un angle orienté.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de couples de coordonnées respectifs (x, y) et (x', y') dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

et :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{IOM})$$

où I est le point tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et M est l'unique point du cercle trigonométrique tel que :

$$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})} = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

On obtient :

$$\cos \widehat{IOM} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

c'est-à-dire :

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

ou encore :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Question 30 *En utilisant l'expression ci-dessus et l'égalité vue à l'exercice 25 :*

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + [det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})]^2 = \|\vec{u}\|^2 \, \|v\|^2.$$

Montrer que l'on a :

$$|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = \frac{|det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On remarque que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires si et seulement si : $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Question 31 *Soit M un point du cercle trigonométrique. Montrer que :*

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}).$$

Question 32 *Soient M et N deux points d'ordonnées non nulles du plan $\mathcal{P}$.*
Montrer que les triplets (O, I, M) et (O, I, N) sont de même sens si et seulement si :

$$det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \times det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) > 0.$$

Plus généralement on admet (on le démontre dans le chapitre : Transformations du plan) que si $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont deux représentants d'un même angle orienté $(\hat{\alpha})$ alors $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}', \vec{v}')$ ont même signe.

En prenant $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, il en résulte que :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{et} \quad \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$$

sont de même signe.
Par ailleurs, d'après la question 31 :

$$\sin\,\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})} = \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}).$$

On a donc :

$$\sin\,\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ rapporté à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ directe on a :

$$\cos\,\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin\,\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Exercice 44 Le plan vectoriel étant rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ calculer le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.
2) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ $\quad \vec{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$.
3) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad \vec{v} = 4\vec{i} + 8\vec{j}$.
4) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ $\quad \vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$.

4 Addition des angles orientés

On rappelle que :

Définition

Soient $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ deux angles orientés, $([OX), [OY))$ un représentant de l'angle $(\hat{\alpha})$, $([OY), [OZ))$ le représentant de $(\hat{\beta})$ de côté origine $[OB)$. La somme des angles orientés $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ est l'angle orienté $(\hat{\gamma})$ dont un représentant est $([OX), [OZ))$. On note $(\hat{\gamma}) = (\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$.

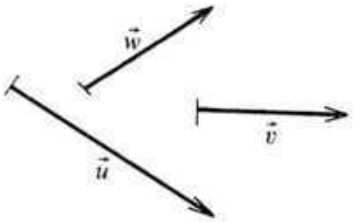
Remarques :

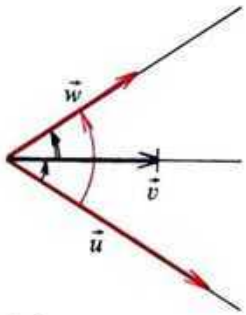
1) La somme de deux angles orientés ne dépend pas des représentants choisis.
2) Quelles que soient les demi-droites de même origine $[OX)$, $[OY)$ et $[OZ)$ on a :

$$\widehat{(OX, OY)} + \widehat{(OY, OZ)} = \widehat{(OX, OZ)} \quad \text{(Égalité de Chasles).}$$

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

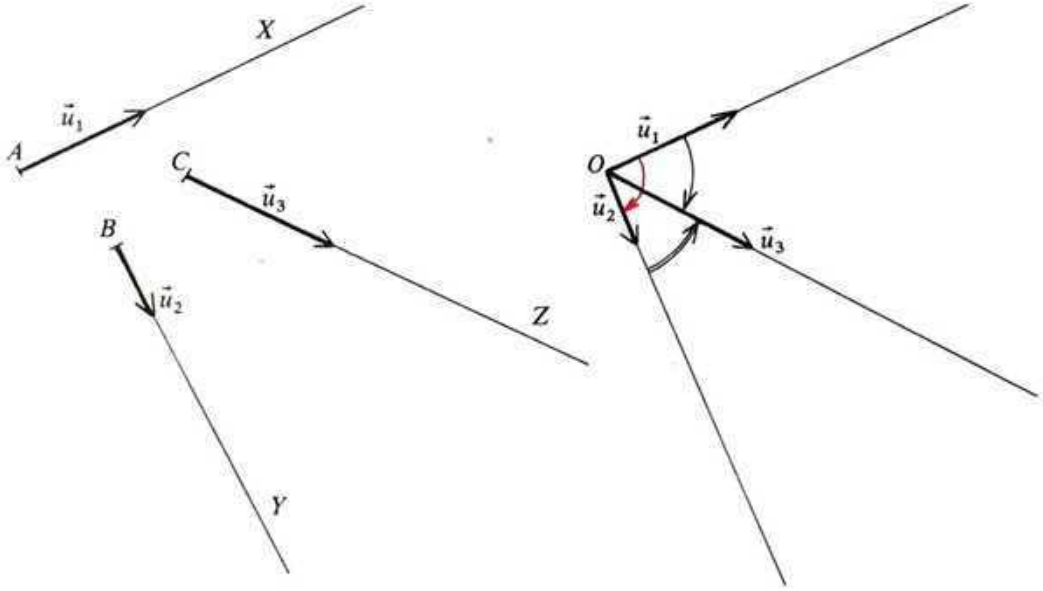
$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}).$$





Quelles que soient les demi-droites $[AX)$, $[BY)$ et $[CZ)$, on a :

$$(\widehat{AX, BY}) + (\widehat{BY, CZ}) = (\widehat{AX, CZ}).$$



Exercice 45 On considère les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ dont les couples de coordonnées, dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, sont respectivement (2; 1), (− 2, 3) et (1, − 4). O étant un point fixé du plan, tracer les trois demi-droites $[Ox_1)$, $[Ox_2)$ et $[Ox_3)$ de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

Trouver, en degré, les déterminations principales de la mesure de $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$, $(\widehat{\vec{u}_2, \vec{u}_3})$ puis de leur somme.

Exercice 46 Illustrer graphiquement les propriétés suivantes où $(\hat{\alpha})$, $(\hat{\beta})$ et $(\hat{\gamma})$ sont trois angles orientés, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls :

$$(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta}) = (\hat{\beta}) + (\hat{\alpha})$$
$$((\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})) + (\hat{\gamma}) = (\hat{\alpha}) + ((\hat{\beta}) + (\hat{\gamma}))$$
$$(\hat{\alpha}) + (\hat{o}) = (\hat{o}) + (\hat{\alpha}) = (\hat{\alpha}).$$
$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = (\hat{o}).$$

En déduire que l'ensemble des angles orientés muni de l'addition est un groupe commutatif.

On note $-(\hat{\alpha})$ l'angle opposé de $(\hat{\alpha})$: si $(\hat{\alpha}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ alors $-(\hat{\alpha}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$; il vérifie $(\hat{\alpha}) + (-(\hat{\alpha})) = (\hat{0})$.
Étant donnés deux angles orientés $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$, il existe un unique angle orienté $(\hat{x})$ tel que :

$$(\hat{\alpha}) + (\hat{x}) = (\hat{\beta}),$$

et on a $(\hat{x}) = (\hat{\beta}) + (-(\hat{\alpha}))$.
On dit que $(\hat{x})$ est la différence des angles $(\hat{\beta})$ et $(\hat{\alpha})$ pris dans cet ordre et on note $(\hat{x}) = (\hat{\beta}) - (\hat{\alpha})$.

Exercice 47 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ quatre vecteurs non nuls.
Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ si et seulement si $(\widehat{\vec{u}, \vec{x}}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{y}})$.
Montrer que $(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
En déduire que, pour tout nombre réel k non nul, on a $(\widehat{k\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Exercice 48 Vérifier que, quel que soit l'angle $(\hat{\alpha})$, on a $(\hat{\alpha}) + (\hat{p}) = (\hat{\alpha}) - (\hat{p})$.

Exercice 49 Soient $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ deux **angles supplémentaires** c'est-à-dire de somme $(\hat{p})$.
Démontrer que $\sin(\hat{\alpha}) = \sin(\hat{\beta})$.

On a vu en classe de Troisième que la somme des mesures en degrés des angles géométriques d'un triangle est égale à 180. Étudions la somme des angles orientés et intérieurs d'un triangle.

Question 33 *Soient A, B et C trois points non alignés. On considère les points D et E définis par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.*
Démontrer que l'angle $(\widehat{AC, AD})$ est égal à l'angle $(\widehat{CA, CB})$.
En déduire que : $(\widehat{AB, AC}) + (\widehat{CA, CB}) + (\widehat{BC, BA}) = (\hat{p})$.

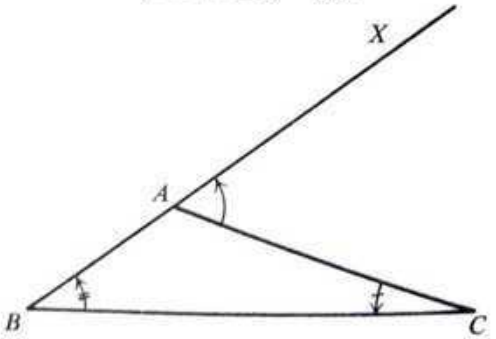
On retiendra :

Théorème

Soit ABC un triangle. La somme des angles intérieurs $(\widehat{AB, AC})$, $(\widehat{CA, CB})$ et $(\widehat{BC, BA})$ est égale à l'angle plat.

Soit $[AX)$ la demi-droite opposée à $[AB)$.
On a :

$$(\widehat{AB, AX}) = (\hat{p})$$



c'est-à-dire :

$$(\widehat{AB, AC}) + (\widehat{AC, AX}) = (\hat{p})$$

d'où : $\widehat{(AB, AC)} + \widehat{(AC, AX)} = \widehat{(AB, AC)} + \widehat{(CA, CB)} + \widehat{(BC, BA)}$

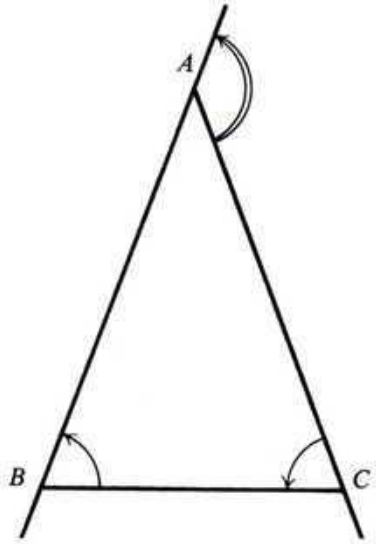
donc : $\widehat{(AC, AX)} = \widehat{(CA, CB)} + \widehat{(BC, BA)}.$

On a ainsi montré que :

$$\widehat{(AC, BA)} = \widehat{(CA, CB)} + \widehat{(BC, BA)}.$$

Soit $(\hat{\alpha})$ un angle orienté, on appelle **double de l'angle** $(\hat{\alpha})$ l'angle orienté $(\hat{\alpha}) + (\hat{\alpha})$. On le note $2(\hat{\alpha})$.

Utilisons le résultat précédent pour caractériser un triangle isocèle ABC de sommet A c'est-à-dire tel que les angles orientés $\widehat{(CA, CB)}$ et $\widehat{(BC, BA)}$ soient égaux.



En effet dans ce cas l'égalité :

$$\widehat{(AC, BA)} = \widehat{(CA, CB)} + \widehat{(BC, BA)}$$

s'écrit :

$$\widehat{(AC, BA)} = 2\widehat{(BC, BA)}.$$

Réciproquement :

si : $\widehat{(AC, BA)} = 2\widehat{(BC, BA)}$

puisque :

$$\widehat{(AC, BA)} = \widehat{(CA, CB)} + \widehat{(BC, BA)}$$

alors :

$$\widehat{(BC, BA)} + \widehat{(BC, BA)} = \widehat{(CA, CB)} + \widehat{(BC, BA)}$$

donc :

$$\widehat{(BC, BA)} = \widehat{(CA, CB)}.$$

On a ainsi montré :

Théorème

Un triangle ABC est isocèle de sommet A si et seulement si l'angle $\widehat{(AC, BA)}$ est le double de l'angle $\widehat{(BC, BA)}$.

Remarque

On démontre (exercice 7, ch. II) le résultat suivant :

Théorème

Soient $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ deux angles orientés on a :

$$2(\hat{\alpha}) = 2(\hat{\beta}) \iff [(\hat{\alpha}) = (\hat{\beta}) \quad \text{ou} \quad (\hat{\alpha}) = (\hat{\beta}) + (\hat{p})].$$

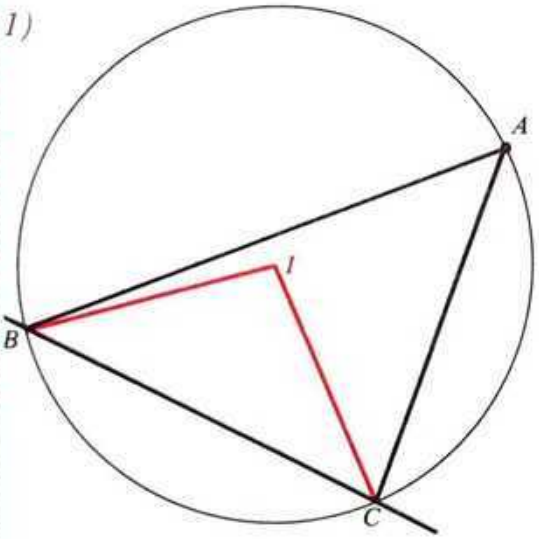
5 Angle au centre. Angle inscrit

On sait qu'étant donnés trois points non alignés A, B, C il existe un cercle et un seul les contenant à savoir le cercle circonscrit au triangle ABC.

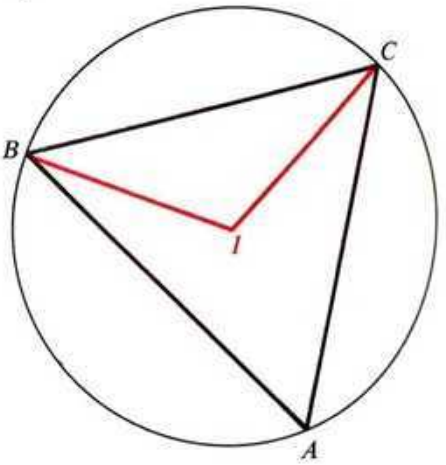
Soient ABC un triangle et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I et circonscrit à ce triangle. On cherche une relation entre l'angle $\widehat{(IB, IC)}$ et l'angle $\widehat{(AB, AC)}$. L'angle $\widehat{(AB, AC)}$ étant dit **inscrit** dans le cercle $(\mathcal{C})$; l'angle $\widehat{(IB, IC)}$ étant appelé **angle au centre** associé à la corde $[BC]$.

Question 34 *Comparez, à l'aide d'un rapporteur, les mesures en degrés des angles* $\widehat{(IB, IC)}$ *et* $\widehat{(AB, AC)}$ *dans chacun des cas de figure suivants :*

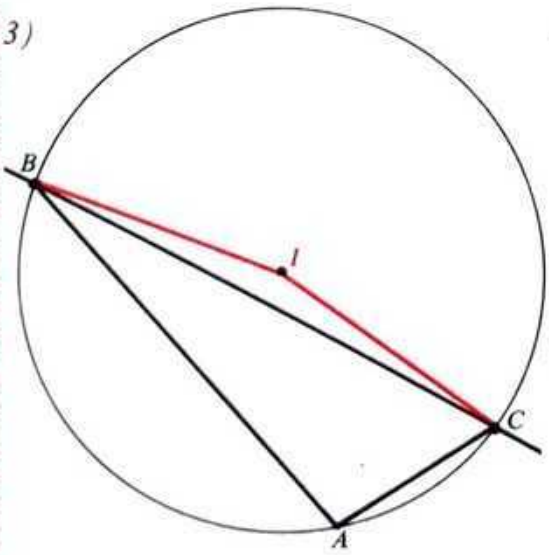
1)



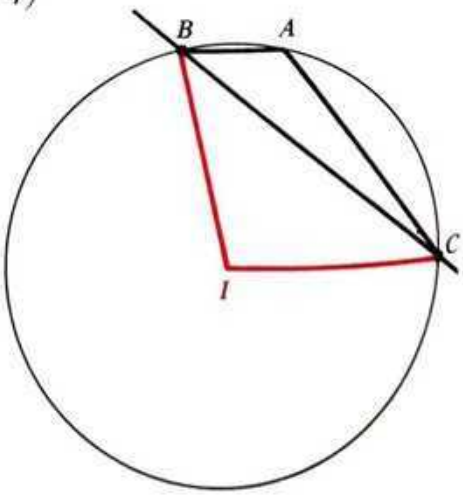
2)



3)



4)



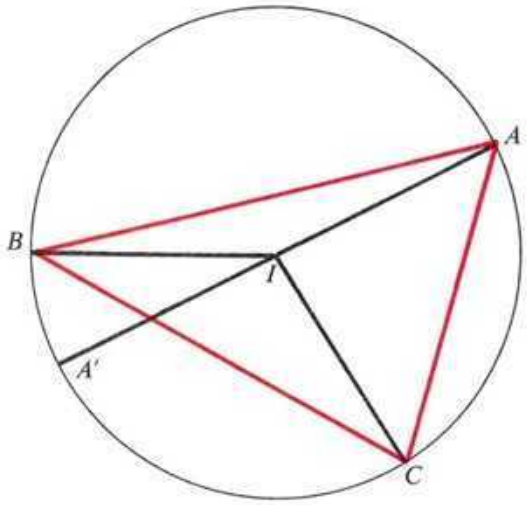
5) A, B et C sont les points de coordonnées respectives :

$(1; 1)$, $(1; 3)$ *et* $(4; 1)$.

Montrons que :

$$\widehat{(IB, IC)} = 2\widehat{(AB, AC)}.$$

Soit A' le point diamétralement opposé au point A.



Le triangle IAB étant isocèle de sommet I, on a :

$$\widehat{(IB, IA')} = 2\widehat{(AB, AI)} \qquad (1)$$

Le triangle IAC étant isocèle de sommet I, on a :

$$\widehat{(IC, IA')} = 2\widehat{(AC, AI)}$$

ou encore :
$$\widehat{(IA', IC)} = 2\widehat{(AI, AC)} \qquad (2)$$

En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2) on obtient :

$$\widehat{(IB, IC)} = 2\widehat{(AB, AC)}.$$

On a ainsi montré :

Théorème

Soient A, B et C trois points non alignés.

Si I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, alors l'angle $\widehat{(IB, IC)}$ est le double de l'angle $\widehat{(AB, AC)}$.

Exercice 50 Soient (C) un cercle de centre I, (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en O et qui coupent (C) respectivement en A et B pour (D_1), C et D pour (D_2).

1) Dans le cas où le point O est à l'intérieur du cercle (C), on dit que l'angle $\widehat{(OB, OD)}$ est un **angle intérieur** à (C).

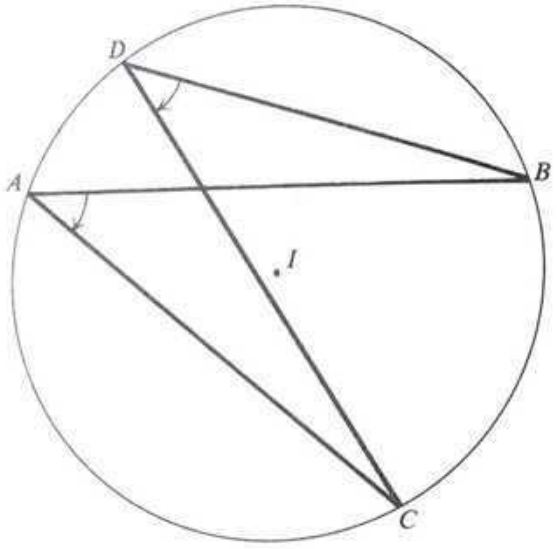
Démontrer alors que l'on a :

$$\widehat{(IB, ID)} + \widehat{(IA, IC)} = 2\widehat{(OB, OD)}$$
$$= 2\widehat{(OA, OC)}.$$

2) Dans le cas où le point O est à l'extérieur du cercle (C), on dit que l'angle $\widehat{(OB, OD)}$ est un **angle extérieur** à (C).
Démontrer que si B appartient au segment $[AO]$ et C appartient au segment $[DO]$ alors on a :

$$\widehat{(IA, ID)} + \widehat{(IB, IC)} = 2\widehat{(OA, OD)}.$$

Soient ABC un triangle, (C) le cercle circonscrit à ce triangle et D un point de (C).



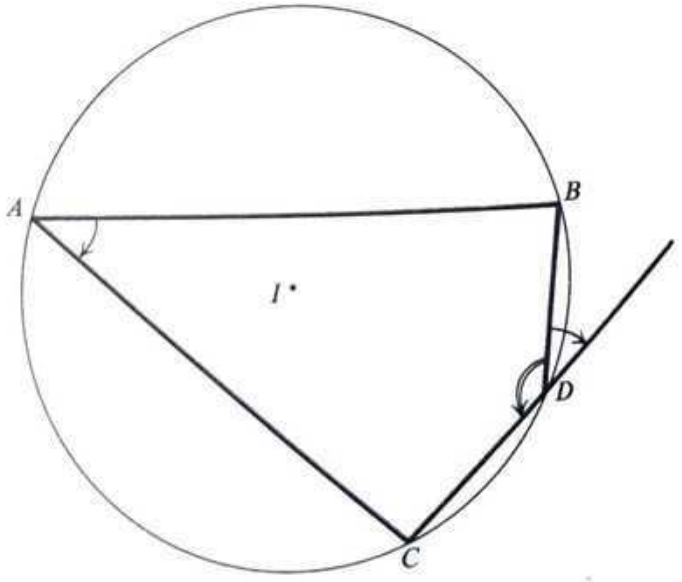
On a :

$$\widehat{(IB, IC)} = 2\widehat{(AB, AC)}$$

et aussi :

$$\widehat{(IB, IC)} = 2\widehat{(DB, DC)}.$$

Ainsi les angles orientés $\widehat{(AB, AC)}$ et $\widehat{(DB, DC)}$ ont même double.



Ces deux angles vérifient donc :

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, DC)} \text{ ou } \widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, DC)} + (\hat{p}).$$

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, DC)} + (\hat{p})$$

se traduit par :

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, CD)}.$$

On admet (classe de terminale) que si $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, DC)}$ ou $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, CD)}$, alors D appartient à (C). On a ainsi :

Théorème

Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux du plan. On a :

A, B, C et D sont sur un même cercle si et seulement si

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, DC)} \text{ ou : } \widehat{(AB, AC)} = \widehat{(DB, DC)} + (\hat{p}).$$

Remarques

- On a alors : les angles géométriques $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont soit égaux soit supplémentaires.
- Les angles $\widehat{(AB, AC)}$ et $\widehat{(DB, DC)}$ sont égaux lorsque les points A et D sont dans le même demi-plan de frontière (BC).
- L'angle $\widehat{(AB, AC)}$ est égal à la somme de $\widehat{(DB, DC)}$ et de l'angle plat lorsque A et D ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (BC).

Exercice 51 Soient (C) un cercle de centre I, et M, N, P et Q quatre points distincts deux à deux de (C) tels que N et Q ne soient pas dans le même demi-plan de frontière (MP).
Montrer que :

$$\widehat{(IM, IP)} + \widehat{(IN, IQ)} = 2\widehat{(MN, QP)}.$$

Réponses aux questions

Q 1

• Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $(x'', y'') \in \mathbb{R}^2$; on a :

$$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x + x' + x'', y + y' + y'')$$

et :

$$(x, y) + [(x', y') + (x'', y'')] = (x + x' + x'', y + y' + y'')$$

la loi + est donc associative.

• Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x', y') + (x, y) = (x' + x, y' + y) = (x + x', y + y')$$

donc : $(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y)$.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) = (0, 0) + (x, y).$$

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0) = (-x, -y) + (x, y)$$

ainsi : $-(x, y) = (-x, -y)$.

• Soient a et b deux nombres réels, et (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$:

$$(a + b)(x, y) = ((a + b)x, (a + b)y) = (ax, ay) + (bx, by) = a(x, y) + b(x, y).$$

• Soient $a \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$a[(x, y) + (x', y')] = (ax + ax', ay + ay') = a(x, y) + a(x', y').$$

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$1(x, y) = (x, y).$$

• Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a[b(x, y)] = a(bx, by) = (abx, aby) = ab(x, y).$$

Ainsi $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel réel.

Q 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si :

$$\vec{v} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = k\vec{v}$$

c'est-à-dire :

$$0\vec{u} + 1\vec{v} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad 1\vec{u} - k\vec{v} = \vec{0}$$

puisque $1 \neq 0$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires il existe deux nombres réels a et b non nuls simultanément tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$.

Réciproquement : s'il existe deux nombres réels a et b tels que : $(a, b) \neq (0, 0)$ et $a\vec{v} + b\vec{v} = \vec{0}$,

si $a = 0$, alors b est non nul, l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ devient $b\vec{v} = \vec{0}$ donc $\vec{v} = \vec{0}$

si $a \neq 0$, alors l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ est équivalente à $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$ il existe donc un nombre réel k $\left(k = -\frac{b}{a}\right)$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

On a ainsi démontré que :

$$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \iff [\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}].$$

En prenant la négation de chacune de ces propositions on a :

$$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires}) \iff [\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \implies (a, b) = (0, 0)].$$

(Soient P et Q deux propositions; la négation de l'implication $[P \implies Q]$ est [P et (non Q)].)

Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si et seulement si la seule combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, égale au vecteur nul, est celle où les deux coefficients sont nuls.

Q 3

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de $D_{\vec{u}}$: il existe deux nombres réels k et k' tels que $\vec{v} = k\vec{u}$ et $\vec{w} = k'\vec{u}$.

Soient a et b deux nombres réels.

On a :

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a(k\vec{u}) + b(k'\vec{u}) = (ak + bk')\vec{u}$$

$ak + bk'$ est un nombre réel

donc $a\vec{v} + b\vec{w}$ appartient à $D_{\vec{u}}$.

Q 4

$\vec{v} = a\vec{u}$ avec a non nul car $\vec{v}$ est non nul; d'où $\vec{u} = \frac{1}{a}\vec{v}$.

Soit $\vec{w}$ un élément de $D_{\vec{u}}$, il existe un unique nombre réel k tel que $\vec{w} = k\vec{u}$.

On en déduit que : $\vec{w} = k\left(\frac{1}{a}\vec{v}\right) = \frac{k}{a}\vec{v}$

c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel

$$k'\left(k' = \frac{k}{a}\right) \quad \text{tel que} \quad \vec{w} = k'\vec{v}.$$

Supposons qu'il existe deux nombres réels k'_1 et k'_2 tels que :

$$\vec{w} = k'_1\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{w} = k'_2\vec{v}$$

alors : $k'_1\vec{v} = k'_2\vec{v}$

d'où $(k'_1 - k'_2)\vec{v} = \vec{0}$, et, comme $\vec{v} \neq \vec{0}$, $k'_1 = k'_2$.
Ainsi il existe un unique nombre réel k' tel que $\vec{w} = k'\vec{v}$.
D'après le calcul ci-dessus on a :
$\vec{w}$ a pour coordonnée k dans la base $(\vec{u})$ si et seulement si $\vec{w}$ a pour coordonnée k' dans la base $(\vec{v})$ avec $k' = \dfrac{k}{a}$.

Q 5

On a $\vec{v} = k\vec{u}$, et, comme $\vec{v}$ est non nul, k est différent de 0 et on a : $\vec{u} = \dfrac{1}{k}\vec{v}$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur de $D_{\vec{u}}$: il existe un nombre réel z tel que $\vec{w} = z\vec{u}$ d'où $\vec{w} = \dfrac{z}{k}\vec{v}$, c'est-à-dire : $\vec{w} \in D_{\vec{v}}$.
Ainsi on a montré : $D_{\vec{u}} \subset D_{\vec{v}}$.

Q 6

$$\begin{cases} \vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{u} = 3(\vec{v} - 3\vec{j}) - 2\vec{j} \\ \vec{i} = \vec{v} - 3\vec{j} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{u} - 3\vec{v} = -11\vec{j} \\ \vec{i} = v - 3\vec{j} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{j} = \dfrac{1}{11}(3\vec{v} - \vec{u}) \\ \vec{i} = \vec{v} - \dfrac{3}{11}(3\vec{v} - \vec{u}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{i} = \dfrac{3}{11}\vec{u} + \dfrac{2}{11}\vec{v} \\ \vec{j} = \dfrac{3}{11}\vec{v} - \dfrac{1}{11}\vec{u} \end{cases}$$

$$\vec{z} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$= 5\left(\frac{3}{11}\vec{u} + \frac{2}{11}\vec{v}\right) + 2\left(\frac{3}{11}\vec{v} - \frac{1}{11}\vec{u}\right)$$

$$= \frac{13}{11}\vec{u} + \frac{16}{11}\vec{v}$$

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$= x\left(\frac{3}{11}\vec{u} + \frac{2}{11}\vec{v}\right) + y\left(\frac{3}{11}\vec{v} - \frac{1}{11}\vec{u}\right)$$

$$= \frac{3x - y}{11}\vec{u} + \frac{2x + 3y}{11}\vec{v}$$

$E_{\vec{u},\vec{v}} = \{\vec{w} \in \mathcal{V};\ \exists (k, k') \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}\}$

on a $E_{\vec{u},\vec{v}} \subset \mathcal{V}$ par définition.
D'après le calcul précédent tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{V}$, qui est donc de la forme $x\vec{i} + y\vec{j}$, vérifie :

$$\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$$

avec $k = \dfrac{3x - y}{11}$ et $k' = \dfrac{2x + 3y}{11}$

donc : $\vec{w} \in E_{\vec{u},\vec{v}}$. On a ainsi montré que $\mathcal{V}$ est inclus dans $E_{\vec{u},\vec{v}}$.
Donc $E_{\vec{u},\vec{v}} = \mathcal{V}$.

Q 7

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$. On cherche s'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$(x, y) = a(2, 3) + b\left(-1, -\frac{3}{2}\right).$$

On a :

$$(x, y) = a(2, 3) + b\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\iff (x, y) = \left(2a - b, 3a - \frac{3}{2}b\right)$$

$$\iff \begin{cases} x = 2a - b \\ y = 3a - \dfrac{3}{2}b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = 6a - 3b \\ 2y = 6a - 3b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6a - 3b = 3x \\ 3x = 2y \end{cases}$$

prenons, par exemple, $x = 1$ et $y = 1$, l'égalité $3x = 2y$ n'est pas vérifiée donc pour ce couple $(1, 1)$, a et b n'existent pas.
Le couple $(1, 1)$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. La phrase « tout couple de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ » est donc fausse.
D'après le calcul ci-dessus, l'ensemble $E_{\vec{u},\vec{v}}$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que : $y = \dfrac{3}{2}x$.

Ainsi : $(x, y) \in E_{\vec{u},\vec{v}} \iff (x, y) = \left(x, \dfrac{3}{2}x\right)$

$$\iff (x, y) = \frac{x}{2}(2, 3).$$

Donc $E_{\vec{u},\vec{v}}$ est l'ensemble des couples colinéaires à $(2, 3)$

$E_{\vec{u},\vec{v}}$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ de base $\vec{u}$.
On trouve aussi $E_{\vec{u},\vec{v}} = D_{\vec{v}}$ en écrivant :

$$\left(x, \frac{3}{2}x\right) = -x\left(-1, -\frac{3}{2}\right).$$

Q 8

Soient x et y deux nombres réels :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff 7\vec{i} + \vec{j} = x(2\vec{i} + 4\vec{j}) + y(3\vec{i} - 7\vec{j})$$

$$\iff 7\vec{i} + \vec{j} = (2x + 3y)\vec{i} + (4x - 7y)\vec{j}$$

Et, comme $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$, tout vecteur a un unique couple de coordonnées dans cette base. Ainsi on a :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff \begin{cases} 7 = 2x + 3y \\ 1 = 4x - 7y \end{cases}.$$

Résoudre (T), c'est donc chercher les nombres réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Q 9

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$

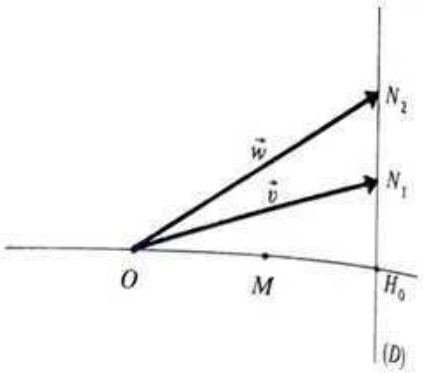
$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 & x_3 \\ y_1 + y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$
$$= (x_1 + x_2)y_3 - x_3(y_1 + y_2)$$
$$= (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2)$$
$$= \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w}).$$

2) $$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ y_1 & y_2 + y_3 \end{vmatrix}$$
$$= x_1(y_2 + y_3) - y_1(x_2 + x_3)$$
$$= (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_1y_3 - y_1x_3)$$
$$= \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w})$$

3) $$\det_{\mathcal{B}}(k\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} kx_1 & x_2 \\ ky_1 & y_2 \end{vmatrix}$$
$$= kx_1y_2 - ky_1x_2$$
$$= k(x_1y_2 - ky_1x_2)$$
$$= k \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$$
$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, k\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & kx_2 \\ y_1 & ky_2 \end{vmatrix}$$
$$= x_1ky_2 - y_1kx_2$$
$$= k(x_1y_2 - y_1x_2)$$
$$= k \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}).$$

Q 10

Soit O un point fixe du plan. On considère le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Pour avoir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ il faut $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc M est distinct de O.
Considérons le repère $(O, \overrightarrow{OM})$ de la droite (OM).
On pose $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OH}$ où H est le



projeté orthogonal de N sur (OM) il existe un unique point H_0 de (OM) tel que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OH_0} = 2$: c'est le point d'abscisse 2 de cet axe. Ainsi on a une infinité de vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$: ce sont tous les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ tels que N se projette en H_0 sur (OM) c'est-à-dire avec N sur la droite (D) perpendiculaire à (OM) en H_0.

Q 11

On a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$; d'où, puisque $OA = 1$, $OB = 1$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{mes}^\circ \widehat{AOB} = 30.$$

Q 12

Soit $\vec{u}'$ un vecteur de $\Delta_{\vec{u}}$: il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}' = k\vec{u}$.
Soit $\vec{v}'$ un vecteur de $\Delta_{\vec{v}}$: il existe $k' \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v}' = k'\vec{v}$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, d'où

$$\vec{u}' \cdot \vec{v}' = (k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v})$$
$$= kk'(\vec{u} \cdot \vec{v})$$
$$= 0$$

donc $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux.
La réciproque est évidente, il suffit de prendre $\vec{u}$ qui appartient à $\Delta_{\vec{u}}$, et $\vec{v}$ qui appartient à $\Delta_{\vec{v}}$.

Q 13

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et orthogonaux.
Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$, puisqu'ils sont non nuls il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (et k est non nul car $\vec{u} \neq \vec{0}$) ; d'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = k\vec{v} \cdot \vec{v}$$

on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, d'où $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$.
Or on sait que :

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad (\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \vec{0})$$

donc : $\vec{v}$ est nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc, par définition, ils constituent une base de $\mathcal{V}$.

Q 14

$\vec{u} \neq \vec{0}$ donc $\|\vec{u}\| \neq 0$.
Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire et colinéaire à $\vec{u}$.
Il existe un nombre réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Écrire $\|\vec{v}\| = 1$ revient à écrire $|k|\,\|\vec{u}\| = 1$, ou encore $|k| = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}$. On a donc exactement deux valeurs de k.
Il existe donc exactement deux vecteurs unitaires et colinéaires à $\vec{u}$, ce sont :

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}.$$

On remarque que ces deux vecteurs sont opposés et qu'il existe un unique vecteur, c'est $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, unitaire, colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens.

Q 15

Puisque (D) a pour équation

$$2x + 3y - 8 = 0,$$

le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées -3 et 2 dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, est un vecteur directeur de (D). Dire que $\Delta_{\vec{n}}$ est orthogonale à la direction de (D) c'est dire que $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Or on a :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{u} &= (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= 2(-3) + 3(2)\end{aligned}$$

$\vec{n} \cdot \vec{u}$ est nul donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Q 16

Soit $\vec{n}$ un vecteur de $\mathcal{V}$ de coordonnées x et y dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
On a :
$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ si et seulement si $px + qy = 0$.

- Si p est non nul on a :
$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ si et seulement si $x = -\dfrac{p}{q}y$

c'est-à-dire : $\vec{n} = -\dfrac{q}{p}y\vec{i} + y\vec{j}$

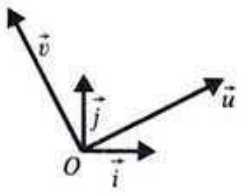
c'est-à-dire : $\vec{n} = \dfrac{y}{p}\vec{v}$

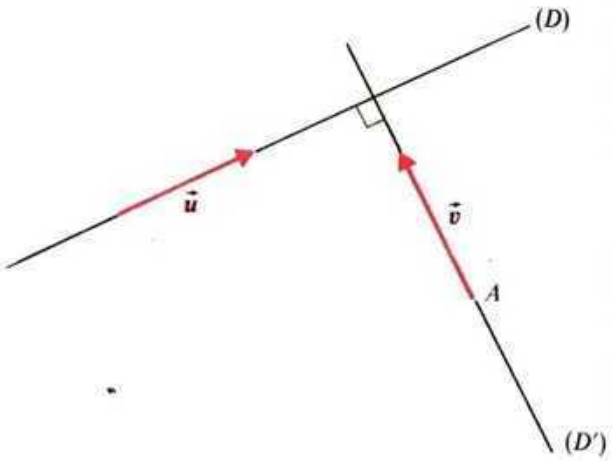
où $\vec{v} = -q\vec{i} + p\vec{j}$.

- Si p est nul, alors q est non nul car $\vec{u} \neq \vec{0}$.
On a alors : $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ si et seulement si $y = 0$

c'est-à-dire : $\vec{n} = \dfrac{-x}{q}\vec{v}$

car alors $\vec{v} = -q\vec{i}$.
On a ainsi démontré que :
$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ si et seulement si $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{v}$.
L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ est donc la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$.
Soit $\Delta_{\vec{u}}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$, il existe une seule droite vectorielle orthogonale à $\Delta_{\vec{u}}$, c'est $\Delta_{\vec{v}}$, car tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ est dans $\Delta_{\vec{v}}$.
Soit (D) une droite affine et A un point du plan.



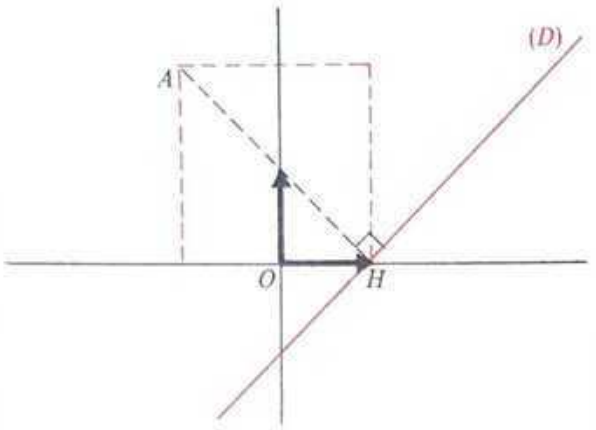


Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D), $\Delta_{\vec{u}}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. D'après ce qui précède il existe une unique droite vectorielle $\Delta_{\vec{v}}$ orthogonale à $\Delta_{\vec{u}}$ (si $\vec{u} = p\vec{i} + p\vec{j}$ on peut prendre $\vec{v} = -q\vec{i} + p\vec{j}$). Donc il existe une unique droite (D') perpendiculaire à (D) et passant par A : c'est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Q 17

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \quad (D) : x - y - 1 = 0.$$

(graphiquement $d(A, (D)) = d(A, H)$
$= 2\sqrt{2}$
diagonale du carré de côté de longueur 2)



D'après le théorème précédent le vecteur $\vec{n}$ de couple de coordonnées $(1, -1)$ est normal à (D). La droite (D') est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan :

$$M \in (D') \iff \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k\vec{n}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - k \end{cases}$$

Le projeté orthogonal H de A sur (D) vérifie : $H \in (D') \cap (D)$. D'où ses coordonnées x et y vérifient :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad x = -1 + k, \quad y = 2 - k$$

et $y = x - 1$

d'où : $2 - k = (-1 + k) - 1$

c'est-à-dire : $k = 2$

On a ainsi $H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$:

$$d(A, (D)) = d(A, H)$$
$$= \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2}$$
$$= 2\sqrt{2}.$$

Q 18

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan. On a :

$M \in B$

$$\iff d(M, (D)) = d(M, (D'))$$

$$\iff \frac{|3x + 4y - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x - \sqrt{2}y + 3|}{\sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2}}$$

$$\iff |3x + 4y - 5|3\sqrt{2} = 5|4x - \sqrt{2}y + 3|$$

$$\iff [9\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 15\sqrt{2} = 20x - 5\sqrt{2}y + 15$$

ou $9\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 15\sqrt{2} = -20x + 5\sqrt{2}y - 15]$

$$\iff (20 - 9\sqrt{2})x - 17\sqrt{2}y + 15(1 + \sqrt{2}) = 0$$

ou $(20 + 9\sqrt{2})x + 7\sqrt{2}y + 15(1 - \sqrt{2}) = 0.$

Soient (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives dans $\mathcal{R}$:

$$(20 - 9\sqrt{2})x - 17\sqrt{2}y + 15(1 + \sqrt{2}) = 0,$$
$$(20 + 9\sqrt{2})x + 7\sqrt{2}y + 15(1 - \sqrt{2}) = 0.$$

On a : $(B) = (D_1) \cup (D_2)$.

De plus :

$$(20 - 9\sqrt{2})(20 + 9\sqrt{2}) + (-17\sqrt{2})(7\sqrt{2}) = 400 - 162 - 238 = 0$$

donc les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires. L'ensemble des points équidistants de deux droites est la réunion de leurs bissectrices (qui sont deux droites perpendiculaires).

Q 19

La droite (D_1) passe par le point A_1 de couple de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et a pour vecteur normal $\vec{i} + \vec{j}$, donc un point M de couple de coordonnées (x, y) appartient à (D_1) si et seulement si $\overrightarrow{A_1M} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 0$

c'est-à-dire $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

(D_1) a donc pour équation $x + y = 0$.

Le point Q appartient à (D_1) et à (D_3) donc ses coordonnées x et y vérifient :

$$x + y = 0 \quad \text{et} \quad x = -1.$$

Donc Q a pour couple de coordonnées $(-1, 1)$.

La droite (D_2) passe par $A_2\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et a pour vecteur normal $\vec{j}$, d'où un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan appartient à (D_2) si et seulement si :

$$\overrightarrow{A_2M} \cdot \vec{j} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(x + 2) \cdot 0 + (y + 1) \cdot 1 = 0$$

(D_2) a donc pour équation $y = -1$.

Le point P appartient à (D_3) et à (D_2) donc ses coordonnées sont -1 et -1.

Le point R appartient à (D_1) et à (D_2) donc ses coordonnées sont 1 et -1.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan, on a :

$$d(M, (D_1)) = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}$$
$$d(M, (D_2)) = |y + 1|$$
$$d(M, (D_3)) = |x + 1|$$

d'où :

$d(M, (D_2)) = d(M, (D_3))$

$\iff (y = x \text{ ou } y = -x + 2)$.

La droite (D_P) est celle des deux droites d'équations $y = x$ et $y = -x + 2$ qui coupe le segment $[QR]$, donc elle a pour équations $y = x$ (l'autre étant parallèle à (D_1)).

De même, on a :

$d(M, (D_1)) = d(M, (D_2))$

$\iff [x + (1 - \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0$

ou $x + (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0]$.

De ces deux droites, (D_R) est celle qui coupe $[PQ]$, donc celle qui a un coefficient directeur négatif; (D_R) a pour équation

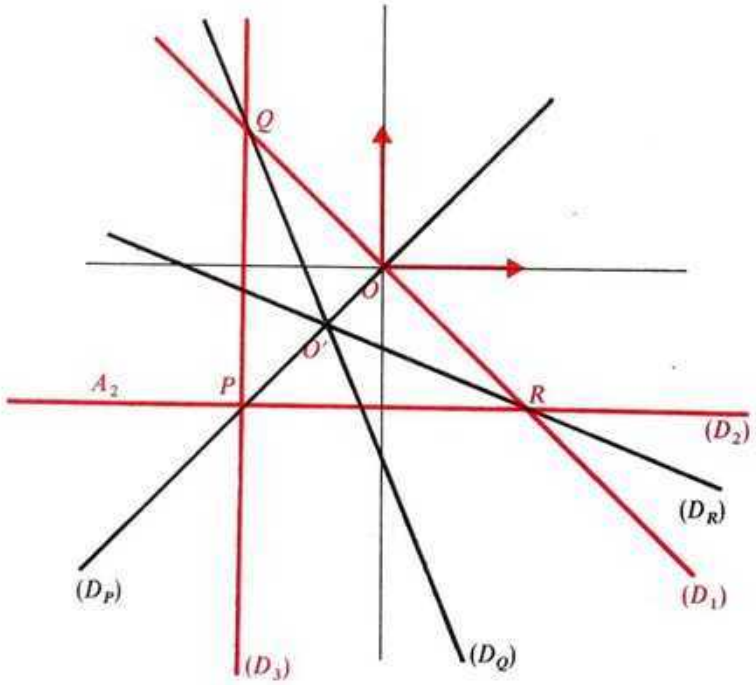
$$x + (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0.$$

De même on a :

$d(M, (D_1)) = d(M, (D_3))$

$\iff [y + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

ou $y + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0]$



et (D_Q) a pour équation :

$$y + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0.$$

On a alors :

$M \in (D_P) \cap (D_Q) \cap (D_R)$

$\iff [y = x \text{ et } x + (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$

et $y + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0]$

on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad [x + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

$\iff x = 1 - \sqrt{2}.]$

Ainsi les trois bissectrices intérieures (D_P), (D_Q) et (D_R) sont concourantes au point O' de couple de coordonnées

$$(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}).$$

Ce point O' est l'unique point du plan dont les distances à (D_1), (D_2) et (D_3) sont égales, notons r la valeur de ces trois distances. Soit $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre O' et de rayon r.

Puisque $d(O', (D_1)) = r$, la droite (D_1) est tangente au cercle $(\mathcal{C}')$.

De même (D_2) et (D_3) sont tangentes au cercle $(\mathcal{C}')$.

O' est donc le centre du cercle $(\mathcal{C}')$ tangent aux trois côtés du triangle PQR.

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont

concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle. Le cercle inscrit est tangent aux trois côtés du triangle.

Q 20

Soit M un point du plan. On a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$$
$$= 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$$

Or I est le milieu de $[AB]$, d'où

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Donc : $$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

Ainsi :

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI}$$
$$= 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI}$$

Donc : M est un élément de E_1 si et seulement si $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = k$

c'est-à-dire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{k}{2}$.

Q 21

- Si $\alpha = 0$, alors on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad (M \in E_2 \iff \beta MB^2 = k).$$

Si $\beta = 0$ et $k = 0$ alors : $E_2 = \mathcal{P}$
Si $\beta = 0$ et $k \neq 0$ alors : $E_2 = \varnothing$.
Si $\beta \neq 0$, alors on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \left(M \in E_2 \iff MB^2 = \frac{k}{\beta}\right)$$

Si $\frac{k}{\beta} < 0$, alors $E_2 = \varnothing$.

Si $\frac{k}{\beta} = 0$, alors $E_2 = \{B\}$.

Si $\frac{k}{\beta} > 0$, alors E_2 est le cercle de centre B, de rayon $\sqrt{\frac{k}{\beta}}$.

- Si $\beta = 0$, par le même raisonnement, on trouvera $\mathcal{P}$, $\varnothing$, un singleton ou un cercle.

- Si $\alpha + \beta = 0$ avec $\alpha \neq 0$, alors on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad M \in E_2 \iff \alpha MA^2 - \alpha MB^2 = k$$
$$\iff \alpha(MA^2 - MB^2) = k$$
$$\iff MA^2 - MB^2 = \frac{k}{\alpha}.$$

Ainsi E_2 est en fait l'ensemble E_1 avec $\frac{k}{\alpha}$, c'est donc la droite perpendiculaire à (AB) au point H défini par $\overrightarrow{IH} = \frac{k}{2\alpha\overrightarrow{AB}}$ où I est le milieu de $[AB]$.

Q 22

G est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 5)$,
se traduit par l'égalité :

$$3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Soit M un point de $\mathcal{P}$:

$$3MA^2 + 5MB^2 = 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$$
$$= 3(MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA})$$
$$+ 5(MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB})$$
$$= (3 + 5)MG^2 + 3GA^2$$
$$+ 5GB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB})$$
$$= 8MG^2 + 3GA^2 + 5GB^2$$

Considérons sur la droite (AB) un repère tel que $\overline{AB} = 8$. Le point G est sur la droite (AB) et on a :

$$\begin{cases} 3\overline{GA} + 5\overline{GB} = 0 \\ -\overline{GA} + \overline{GB} = \overline{AB} \end{cases}$$

d'où $\overline{GA} = -\frac{5}{8}\overline{AB}$ et $\overline{GB} = \frac{3}{8}\overline{AB}$
$= -5$ $= 3$

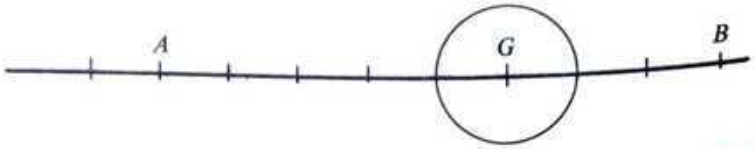
d'où : $GA = 5$, $GB = 3$.
On a donc, pour tout point M du plan,

$$3MA^2 + 5MB^2 = 8MG^2 + 3.25 + 5.9$$
$$= 8MG^2 + 120$$

Ainsi on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad (M \in E_2 \iff 8MG^2 = 128 - 120)$$
$$\forall M \in \mathcal{P} \quad (M \in E_2 \iff MG^2 = 1)$$

E_2 est donc le cercle de centre G et de rayon 1.



Q 23

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$. On a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} \\ &\quad + MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \\ &\quad + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}). \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[AB]$, d'où :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} ;$$

et $$IA = IB = \frac{AB}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} IA^2 + IB^2 &= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\ &= \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout point M de $\mathcal{P}$:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

On en déduit que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad M \in E_2 \iff MI^2 = \frac{1}{2}\left[k - \frac{AB^2}{2}\right]$$

Donc :

si $k < \frac{AB^2}{2}$ alors $\frac{1}{2}\left[k - \frac{AB^2}{2}\right] < 0$ et $E_2 = \varnothing$

si $k = \frac{AB^2}{2}$ alors $\frac{1}{2}\left[k - \frac{AB^2}{2}\right] = 0$ et $E_2 = \{I\}$

si $k > \frac{AB^2}{2}$ alors $\frac{1}{2}\left[k - \frac{AB^2}{2}\right] > 0$ et E_2 est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)}$.

Q 24

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} \end{aligned}$$

où les mesures algébriques sont considérées sur la droite (AB) munie d'un repère donné. On a, puisque I est le milieu de $[AB]$,

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overline{AI} \cdot \overline{IB} = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{AB^2}{4}$$

Donc :

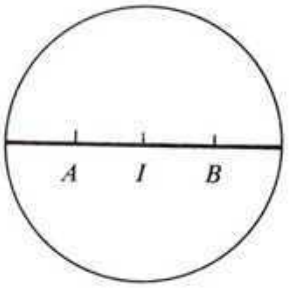
$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Ainsi, pour $E_3 = \{M \in \mathcal{P};\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\}$, on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \left(M \in E_3 \iff IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}\right)$$

1) $AB = 2$ et $k = 3$ d'où $k + \frac{AB^2}{4} = 4$ et on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad (M \in E_3 \iff IM^2 = 4).$$



E_3 est donc le cercle de centre I et de rayon 2.

2) $AB = 1$ et $k = -3$ d'où :

$$k + \frac{AB^2}{4} = -\frac{11}{4},$$

ce nombre est négatif donc $E_3 = \varnothing$.

3) $AB = 2$ et $k = -1$ d'où :

$$k + \frac{AB^2}{4} = 0,$$

donc $E_3 = \{I\}$.

Q 25

On a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \\ &= BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Or : $$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -AB \cdot AC \cos BAC. \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

Q 26

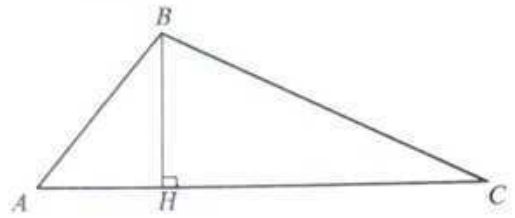
On a :

$$S = \frac{1}{2} AC \times BH$$

et :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BH}{AB}$$

dans le triangle AHB rectangle en H



d'où : $S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin BAC$.

Q 27

On a :

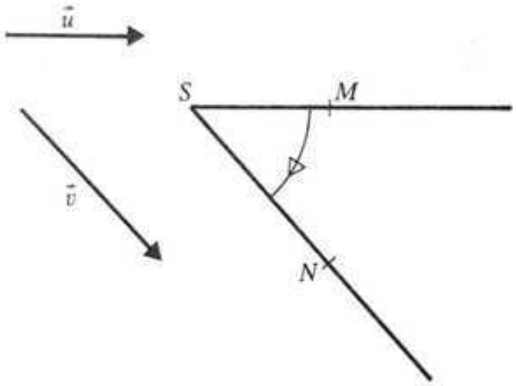
$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

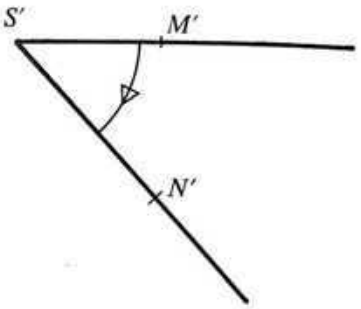
d'où :

$$b \sin \hat{A} = a \sin \hat{B}.$$

On a $\sin \hat{A} = 0$ lorsque l'angle $\hat{A}$ est nul, dans ce cas les points A, B et C seraient alignés ce qui est impossible puisque ABC est un triangle.

Q 28





Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{SS'}$. On a $t(S) = S'$.

Puisque $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{S'M'}$ on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{SS'}$
c'est-à-dire $t(M) = M'$

$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{S'N'}$ on a $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{SS'}$
c'est-à-dire $t(N) = N'$.

Ainsi, puisque t est une isométrie, on a :

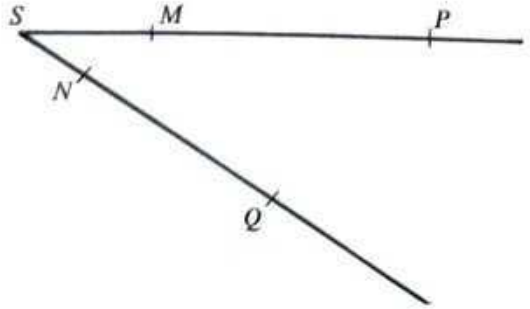
$\widehat{MSN}$ est isométrique à $\widehat{M'S'N'}$,

de plus (S, M, N) est de même sens que (S', M', N')

donc : $(\widehat{SM, SN}) = (\widehat{S'M', S'N'})$.

Q 29

Soit S un point du plan, M, N, P et Q les points de $\mathcal{S}$ définis par $\overrightarrow{SM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{SN} = \vec{v}$, $\overrightarrow{SP} = \vec{u}_1$ et $\overrightarrow{SQ} = \vec{v}_1$.



On a :

$$(\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}_1}) = (\widehat{SP, SQ}) \text{ et } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{SM, SN})$$

or $\vec{u}_1 \in D_{\vec{u}}^+$ d'où $P \in [SM)$ c'est-à-dire $[SM) = [SP)$.
De même $\vec{v}_1 \in D_{\vec{v}}^+$ d'où $[SN) = [SQ)$. On a ainsi $(\widehat{SM, SN}) = (\widehat{SP, SQ})$ c'est-à-dire $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}_1})$.

Q 30

A l'exercice 25, on a vu que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}))^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

c'est-à-dire, puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls :

$$\frac{(\vec{u}, \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2} + \frac{(\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}))^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2} = 1.$$

Or on a :

$$\cos^2 (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \sin^2 (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1$$

et : $$\cos^2 (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(\vec{u}, \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2}$$

d'où : $$\sin^2 (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}))^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2}$$

c'est-à-dire :

$$|\sin \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}| = \frac{|\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

Q 31

Soit Q le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \vec{j})$ on a, par définition :

$$\overline{OQ} = \sin \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})}.$$

Soient x et y les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a

$$y = \overline{OQ} \quad \text{et} \quad \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}$$

d'où :

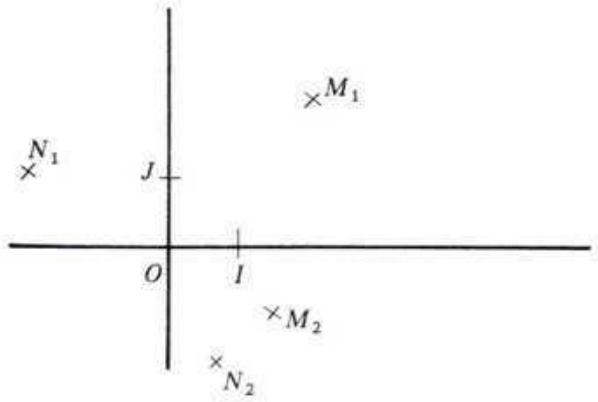
$$\begin{aligned} \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) &= y \\ &= \overline{OQ} \\ &= \sin \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})}. \end{aligned}$$

Q 32

Soient (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de M et N dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $y \neq 0$ et $y' \neq 0$. On a :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = y$$

et $$\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = y'.$$



(O, I, M) et (O, I, N) sont de même sens si et seulement si les points M et N sont situés dans le même demi-plan de frontière (OI) c'est-à-dire si et seulement si y et y' sont de même signe

autrement dit : $yy' > 0$

ou encore :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \times \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) > 0.$$

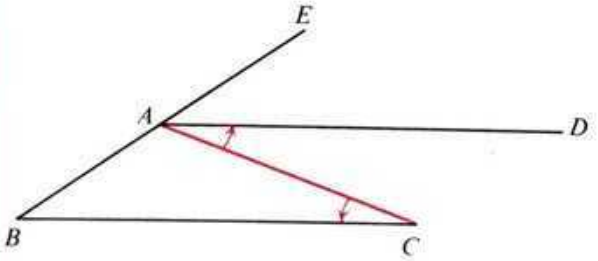
Q 33

On a :

$$\begin{aligned} \widehat{(AC, AD)} &= \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} \\ &= \widehat{(-\overrightarrow{CA}, -\overrightarrow{CB})} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \end{aligned}$$

d'où : $\widehat{(CA, CB)} = \widehat{(AC, BC)}$

$$\begin{aligned} &\widehat{(AB, AC)} + \widehat{(CA, CB)} + \widehat{(BC, BA)} \\ &= \widehat{(AB, AC)} + \widehat{(AC, BC)} + \widehat{(BC, BA)} \\ &= \widehat{(AB, BA)} \quad \text{d'après Chasles} \\ &= (\hat{p}). \end{aligned}$$



Résultats ou indications des exercices

1) $\vec{w} = (-\vec{u}) + \vec{v}$.

2) Utiliser les égalités :

$(a - a)\vec{u} = 0\vec{u}$ et $a(\vec{u} - \vec{u}) = a\vec{0}$.

8) Utiliser les égalités :

$\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$

et $\vec{w} = A(3\vec{i} - 2\vec{j}) + B(-\vec{i} + 4\vec{j})$.

Utiliser l'égalité :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

9) Montrer que D est l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{V}$ colinéaires au vecteur $\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$.

11) 1) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$

13) 2) $(D) \cap (D') = \{A\binom{0}{1}\}$

3) $(D) \cap (D') = \{B\binom{2}{1}\}$

14) On distinguera les cas : $m = 1$, $m = -6$ et m distinct de 1 et de -6.

15) On utilisera : $a = 3A - B$ et $b = -2A + 4B$.

17) On distinguera les cas : $m = 1$, $m = 2$ et m distinct de 1 et de 2.

18) 3° 1) $x = -\frac{10}{17}$ 2) $x = -\frac{6}{5}$.

21) L'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $\vec{u}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur de couple de coordonnées $\left(1 ; -\frac{3}{8}\right)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

25) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ et $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.

26) $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{i} + b\vec{j})$ et

$\vec{n}_2 = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{i} + b\vec{j})$.

28) $H\binom{-2}{-6}$ $I\binom{2}{3}$.

30) Faire la différence membre à membre de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI} = \frac{k}{2}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{k}{2}$.

31) $2x + 2y - 1 = 0$.

33) E_r est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $G\binom{-4/5}{-2/5}$ et de rayon 2.

35) $\{G\}$ où $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

41) 10.

46) On rappelle qu'un groupe commutatif est un ensemble G muni d'une loi notée $+$, définie par une application de $G \times G$ vers G, qui vérifie :

- $\forall x \in G \quad \forall y \in G \quad \forall z \in G \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité)
- $\exists e \in G \quad \forall x \in G \quad x + e = e + x = x$ (e élément neutre)
- $\forall x \in G \quad \exists x' \in G \quad x + x' = x' + x = e$ (x' élément symétrique de x)
- $\forall x \in G \quad \forall y \in G \quad x + y = y + x$ (commutativité).

47) Utiliser l'égalité de Chasles.

49) Utiliser l'écriture du sinus avec le déterminant et les propriétés des déterminants vus à la question 9.

Exercices

52. Soient a et b deux nombres réels non nuls, de somme différente de 0, et A et B deux points distincts du plan. On considère le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b).

1) Montrer que : $\overrightarrow{GA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{GB}$.

2) Démontrer qu'il existe un unique point H du plan (que l'on déterminera) tel que : $\overrightarrow{HA} = \frac{b}{a}\overrightarrow{HB}$ si a est différent de b.
Déterminer, en fonction de a et b, les nombres réels α et β pour que H soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).
3) Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[GH]$.
Montrer que :

- $IA^2 = IB^2 = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
- $JG^2 = JH^2 = \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JB}$
- $\overrightarrow{JA} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \overrightarrow{JB}$.

4) Soit O un point du plan non situé sur la droite (AB). La parallèle à la droite (OA) passant par B coupe la droite (OG) en K. Soit L le point défini par : $\overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{KB}$.
Vérifier que le point d'intersection des droites (OL) et (AB) est le barycentre des points pondérés (A, a) et $(B, -b)$.

53. Soient (O, I, J) un repère du plan, a et b deux nombres réels non nuls, et α, β et γ trois nombres réels. On considère les points $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ et P, Q et R définis par :

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{AP}, \quad \overrightarrow{OQ} = \beta\overrightarrow{BQ}, \quad \overrightarrow{RB} = \gamma\overrightarrow{RA}.$$

1) Calculer en fonction de α, β et γ les coordonnées de P, Q et R.

2) Trouver la condition sur α, β et γ pour que les points P, Q et R soient alignés.

3) Trouver la condition sur α, β et γ pour que les droites (AQ), (BP) et (OR) soient concourantes.

54. Soit ABC un triangle tel que les longueurs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ soient respectivement, en cm, 10, 6 et 8.
Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C.
Placer le point G_1 barycentre des points pondérés $\left(A, \frac{32}{5}\right)$ et $\left(B, \frac{18}{5}\right)$.
Vérifier que le triangle CG_1A est rectangle en G_1.
Placer le point G barycentre des points pondérés $(C, -2)$ et $(G_1, 10)$.
Soit E l'ensemble des points M du plan tels que :

$$32MA^2 + 18MB^2 - 10MC^2 = 108.$$

Vérifier que, pour tout point M du plan, on a :

$$32MA^2 + 18MB^2 - 10MC^2 = 8MG^2 + 32GA^2 + 18GB^2 - 10GC^2.$$

En déduire l'ensemble E.

55. Soient A, B, C et D quatre points du plan $\mathcal{P}$. Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}[AD^2 + BC^2 - AC^2 - DB^2].$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

56. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AA']$, de rayon R et de centre O.

1) Soit M un point quelconque du plan. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$ dans chacun des cas suivants :

$$a)\ OM < R \quad b)\ OM = R \quad c)\ OM > R.$$

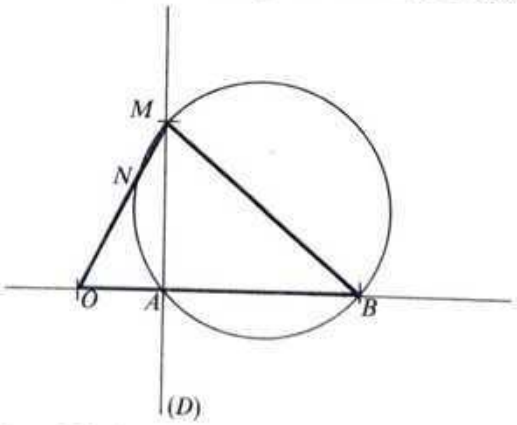
Le nombre réel $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$ s'appelle « puissance du point M par rapport au cercle $(\mathcal{C})$ ».

2) Soit M un point du plan n'appartenant pas au cercle $(\mathcal{C})$. Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en M et sécantes à $(\mathcal{C})$:

$$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{A, B\}$$
$$(\mathcal{C}) \cap (\Delta) = \{C, D\}$$

Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points quelconques du plan soient situés sur un même cercle.

57. Soient O, A et B trois points distincts et alignés.



Soient (D) la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A, et M un point de (D).

1) Vérifier que la droite (OM) coupe le cercle de diamètre $[BM]$ en deux points : M et N.

2) Trouver l'ensemble E des points N quand M décrit (D).

3) Comparer les nombres réels $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ et $\overline{ON} \cdot \overline{OM}$ en utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}$.
Le nombre réel $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}$ est appelé puissance du point O par rapport au cercle de diamètre $[BM]$.

58. Soient ABC un triangle, a, b et c les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Montrer que l'isobarycentre G des trois points A, B et C, vérifie :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

(On pourra utiliser un théorème de la médiane.)

59. Soient ABC un triangle, (D_A) la bissectrice intérieure du couple $((AB), (AC))$ c'est-à-dire celle des deux droites de points équidistants des droites (AB) et (AC), qui coupe le segment $[BC]$.

1) Tracer deux droites (Δ_1) et (Δ_2) respectivement parallèles à (AB) et (AC) coupant le segment $[BC]$ et situées à une même distance d, que l'on choisira, de (AB) et (AC) respectivement. Vérifier que le point d'intersection D de (Δ_1) et (Δ_2) appartient à (D_A). Tracer (D_A).

2) Soient P et Q les projetés orthogonaux du point D respectivement sur (AB) et (AC). Démontrer que les triangles DPA et DQA sont isométriques. En déduire que les angles orientés $\widehat{(AP, AD)}$ et $\widehat{(AD, AQ)}$ sont égaux. En déduire que par la symétrie orthogonale d'axe (D_A) la demi-droite $[AB)$ a pour image la demi-droite $[AC)$. On a ainsi montré que (D_A) est la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

3) Soit B' un point du plan tel que $\widehat{(AB, AB')}$ soit l'angle plat. Démontrer que la deuxième bissectrice (D'_A) du couple de droites $((AB), (AC))$ est la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{CAB'}$. On l'appelle la **bissectrice extérieure** de l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ABC.

60. Soient ABC un triangle, (D) la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ et K le point d'intersection de (D) et du segment $[BC]$. On note a, b et c les distances respectives BC, AC et AB.

1) Démontrer que :

$$\frac{BK}{c} = \frac{KC}{b} = \frac{a}{b + c}.$$

(On utilisera la formule donnant le sinus d'un angle supplémentaire.)

2) Montrer que K est le barycentre des points pondérés (B, b) et (C, c).

3) Soit (D') la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$ (voir exercice 59).
Démontrer que si (D') coupe la droite (BC) alors le point d'intersection est le barycentre des points pondérés (B, b) et $(C, -c)$.
Dans quel cas (D') et (BC) sont-elles parallèles?

61. Soient ABC un triangle, $(\mathcal{C})$ le cercle inscrit dans ce triangle et O le centre de $(\mathcal{C})$.
Vérifier que les hauteurs issues de O des triangles AOB, BOC et COB ont pour longueur le rayon r de $(\mathcal{C})$.
En déduire que l'aire du triangle ABC est égale au produit pr où p est le demi-périmètre du triangle ABC.

62. Soit ABC un triangle dont les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ ont respectivement pour longueur c, a et b; on note p le demi-périmètre de ce triangle.

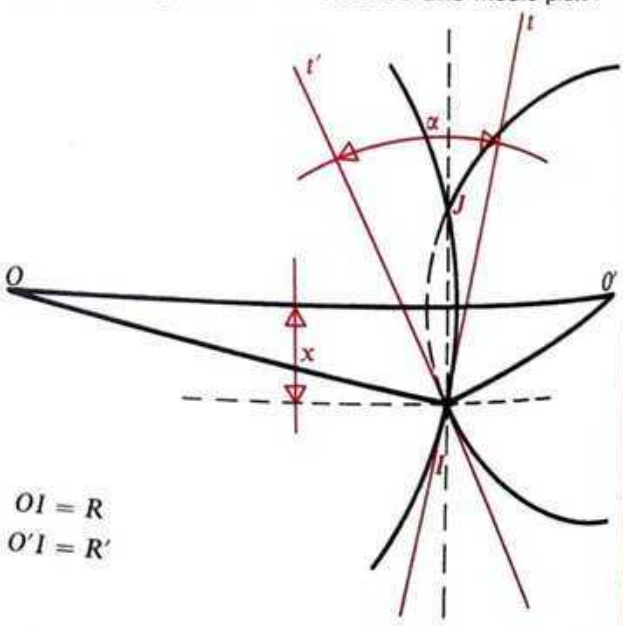
1) Exprimer le cosinus de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ grâce à a, b et c.

2) Montrer que :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3) Montrer que l'aire S du triangle ABC est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

63. Affûtage d'une fraise avec une meule plate :



Les axes de la meule et de la fraise sont perpendiculaires au plan de la coupe ci-dessus en O et O' respectivement.
La meule est représentée par la cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R. La fraise est représentée par le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et de rayon R'. $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont sécants en I et J.
L'angle géométrique $\widehat{tIt'}$ déterminé par les tangentes aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ au point I est appelé angle de dépouille. On note α la mesure de l'angle de dépouille et $2x$ la distance IJ.

1) Montrer que :

a) les angles $\widehat{(OO', OI)}$ et $\widehat{(IJ, It)}$ sont égaux.

b) les angles $\widehat{(O'O, O'I)}$ et $\widehat{(IJ, It')}$ sont égaux.

En déduire que la somme des angles $\widehat{(IO, IO')}$ et $\widehat{(It, It')}$ est l'angle plat.

2) Utiliser les relations métriques dans les triangles $OO'I$ et OHI où H est le projeté orthogonal de I sur (OO') pour montrer que :

$$x = \frac{RR' \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' \cos \alpha}}.$$

64. Soit ABC un triangle, on note a, b et c les distances BC, AC et AB, et p le demi-périmètre de ce triangle.

1) Soient $(\mathcal{C})$ le cercle inscrit dans le triangle ABC, I, J et K les points des côtés $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$ respectivement où $(\mathcal{C})$ est tangent.
Montrer que :

$$AJ = AK = p - a$$
$$BJ = BI = p - b$$
$$CI = CK = p - c.$$

2) Soient $(\mathcal{C}_B)$ le cercle tangent au côté $[AC]$ en N et aux droites (AB) et (AC) en respectivement M et L, points extérieurs au triangle ABC (on dit que $(\mathcal{C}_B)$ est le cercle **exinscrit** au triangle ABC situé dans le secteur angulaire $\widehat{[BA, BC]}$). On note O' le centre de $(\mathcal{C}_B)$ et r_B son rayon.

a) Montrer que $BL = BM = p$.

b) Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $(p - b)r_B$.
Remarque : on démontrerait de même que cette aire est égale à $(p - a)r_A$ et à $(p - c)r_C$ où r_A et r_C sont les rayons des deux autres cercles exinscrit au triangle ABC.

65. Soient ABC un triangle non isocèle, a, b et c les distances BC, AC et AB, D le point d'intersection de la droite (BC) et de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ et D' le point d'intersection de (BC) et de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.
L'exercice 60 a montré que D est le barycentre des points pondérés (B, b) et (C, c) et que D' est le barycentre des points pondérés (B, b) et $(C, -c)$.

1) Montrer que :

$$DC = \frac{ab}{b + c}$$
$$D'C = \frac{ab}{|c - b|}$$

2) Montrer, en utilisant le triangle DAC, que :

$$AD = \frac{bc}{b + c} \frac{\sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{DAC}}.$$

On note α la mesure de $\widehat{BAC}$, la mesure de $\widehat{DAC}$ est alors $\frac{\alpha}{2}$.
En admettant la formule (voir ch. G3) $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ montrer que :

$$AD = \frac{2bc}{b + c} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

3) Montrer que :

$$AD' = \frac{2bc}{|c - b|} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

66. Soient, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel non nul.

1) Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.

2) Donner une équation du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC.

3) Soit M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et de B.

a) Calculer $\cos \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}$ et $\sin \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}$ en fonction de a et des coordonnées x et y de M.

b) Démontrer que M a une ordonnée de même signe que a si et seulement si
$\widehat{(MA, MB)} = \widehat{(CA, CB)}$.

c) Comparer les angles $\widehat{(MA, MB)}$ et $\widehat{(CA, CB)}$ lorsque M a une ordonnée de signe contraire de a.

67. Couple de demi-droites « parallèles ».
Soient $([AB), [AC))$ et $([A'B'), [A'C))$ deux couples de demi-droites de mêmes origines. On dit que ce sont des couples de demi-droites « parallèles » si et seulement si :
la droite (AB) est parallèle à la droite $(A'B')$ et la droite (AC) est parallèle à la droite $(A'C')$.

1) Soient M, N, P et M' quatre points du plan tels que M, N et P soient non alignés, et f une isométrie du plan telle que $f(M) = M'$.
Construire les images respectives N' et P' des points N et P par f dans les cas où :

a) f est une translation

b) f est une symétrie centrale.

Vérifier que, dans chacun de ces cas, $([MN), [MP))$ et $([M'N'), [M'P'))$ sont des couples de demi-droites parallèles. Que peut-on dire des angles $\widehat{(MN, MP)}$ et $\widehat{(M'N', M'P')}$?

2) Soient $([AB), [AC))$ et $([A'B'), [A'C'))$ deux couples de demi-droites parallèles, on note :

$$\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{i}' = \overrightarrow{A'B'}, \quad \vec{j}' = \overrightarrow{A'C'}.$$

$D_{\vec{i}}$ et $D_{\vec{j}}$ les demi-droites vectorielles engendrées par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ respectivement, $D_{\vec{i}}$ et $D_{\vec{j}}$ les droites vectorielles de bases respectives $(\vec{i})$ et $(\vec{j})$.

a) Démontrer que l'on a :

$$\vec{i} \in D_{\vec{i}} \quad \text{et} \quad \vec{j} \in D_{\vec{j}}.$$

b) On dit que les couples $([AB], [AC])$ et $([A'B'], [A'C'])$ sont de même sens si et seulement si :

$$\vec{i} \in D_{\vec{i}} \quad \text{et} \quad \vec{j} \in D_{\vec{j}}$$

et de sens contraire si et seulement si :

$$\vec{i} \notin D_{\vec{i}} \quad \text{et} \quad \vec{j} \notin D_{\vec{j}}.$$

Démontrer que, dans ces deux cas, les angles $\widehat{(AB, AC)}$ et $\widehat{(A'B', A'C')}$ sont égaux.
On a ainsi montré que si deux angles orientés sont déterminés par des demi-droites parallèles et soit de même sens, soit de sens contraire, alors les angles orientés sont égaux.

c) Vérifier que dans les autres cas on a :

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(A'B', A'C')} + (\hat{p}).$$

On a ainsi montré que si deux angles orientés sont définis par des couples de demi-droites parallèles alors, soit ils sont égaux soit l'un est égal à la somme de l'autre et de l'angle plat.

3) Soient (AB) et $(A'B')$ deux droites parallèles, C et C' deux points du plan non situé sur (AB) et $(A'B')$ respectivement.

Montrer que si $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(A'B', A'C')}$ alors $([AB], [AC])$ et $([A'B'], [A'C'])$ sont des couples de demi-droites parallèles, soit de même sens, soit de sens contraire.

68. Soient B et C deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

A) Soit $(\hat{\alpha})$ un angle donné. A quelle condition sur MES $(\hat{\alpha})$ existe-t-il un point A tel que :

$$\widehat{(CB, CA)} = (\hat{\alpha}) \quad \text{et} \quad \widehat{(BA, BC)} = (\hat{\alpha}) + (\hat{d})$$

(Travailler sur les angles géométriques du triangle ABC)?
Donner alors le programme de construction du point A.

B) Soit ABC un triangle *pseudo-rectangle* c'est-à-dire tel que :

$$\widehat{(BA, BC)} = \widehat{(CB, CA)} + (\hat{d}).$$

1) On note O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC, A' le point de $(\mathcal{C})$ diamétralement opposé à A.

a) Vérifier que les points C et A' sont distincts.
On note O' le point d'intersection des droites (AB) et $(A'C)$.

b) Démontrer que les triangles ABC et $A'CB$ sont isométriques.

c) Démontrer que le triangle $BO'C$ est isocèle.

d) En déduire, que le triangle $AO'A'$ est isocèle.

c) En déduire que les droites (AO) et $BC)$ sont parallèles.

2) Soit A_1 le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
Montrer que la droite (AA_1) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

3) En utilisant le point A', démontrer que :

$$AB^2 + AC^2 = 4R^2$$

où R est le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

4) Soient C_1 le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et H l'orthocentre du triangle ABC.
Démontrer que :

$$\widehat{(BA_1, BA)} = \widehat{(BC, BC_1)}.$$

En déduire que :

$$\widehat{(CC_1, CB)} = \widehat{(CB, CA)}.$$

Puis montrer que :

$$CA = CH$$

et

$$BA = BH.$$

5) Démontrer que :

$$\widehat{(AB, AH)} = \widehat{(CB, CA)}.$$

69. Soient $(\hat{\alpha})$ un angle orienté, A et B deux points distincts du plan. On considère le point C du plan défini par :

$$\widehat{(AB, AC)} = (\hat{\alpha}) \quad \text{et} \quad AB = AC.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés, on veut résoudre l'équation :

(E_1) : $(\hat{x}) \in \mathcal{A}$, $2(\hat{x}) = (\hat{\alpha})$.

1) On pose $(\hat{x}) = \widehat{(AB, AD)}$.
Démontrer que (E_1) est équivalente à :

(E_2) : $\widehat{(AB, AD)} \in \mathcal{A}$, $\widehat{(AB, AD)} = -\widehat{(AC, AD)}$.

2) Dans le cas où $(\hat{\alpha})$ n'est pas nul, on note (Δ) la médiatrice du segment $[BC]$ et s la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
Vérifier que s transforme l'angle $\widehat{(AB, AD)}$ solution de (E_2) en $\widehat{(AC, AD)}$.
En déduire que D appartient à (Δ).

3) Dans le cas où $(\hat{\alpha})$ est nul en prenant pour droite (Δ) la droite (AB), vérifier que D appartient à (Δ).

4) Résoudre l'équation (E_1).

70. Soient $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, A, B et C trois points distincts de $(\mathcal{C})$, T un point de la tangente à $(\mathcal{C})$ en C situé dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas le point A, et I le milieu de $[BC]$.

Comparer les angles $\widehat{(OI, OC)}$, et $\widehat{(CB, CT)}$ (en utilisant l'angle $\widehat{(CO, CB)}$). Puis démontrer que :

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(CB, CT)}.$$

71. Soient ABC un triangle, a, b et c les longueurs BC, AC et AB respectivement, $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC, R le rayon de $(\mathcal{C})$, et O le centre de $(\mathcal{C})$ et A_1 le point de $(\mathcal{C})$ diamétralement opposé à A.

1) Comparer les angles $\widehat{(A_1C, A_1A)}$ et $\widehat{(BC, BA)}$. En déduire que :

$$\sin \widehat{(A_1C, A_1A)} = \sin \widehat{(BC, BA)}.$$

2) Calculer $\sin \widehat{CA_1A}$ en fonction de b et R.

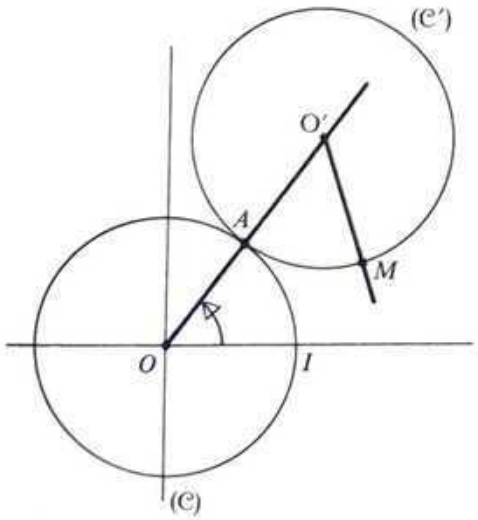
3) En déduire que :

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = 2R.$$

4) Soit S l'aire du triangle ABC. Montrer que l'on a :

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

72. Soient $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon R, et $(\mathcal{C}')$ un cercle de centre O' et de même rayon R qui « roule sans glisser » sur le cercle $(\mathcal{C})$: au départ $(\mathcal{C}')$ est tangent à $(\mathcal{C})$ en I, à l'arrivée $(\mathcal{C}')$ est tangent à $(\mathcal{C})$ en A, où les points I et A sont illustrés sur la figure ci-dessous :



1) Soit M le point du cercle $(\mathcal{C}')$, confondu avec I dans la position de départ. Déterminer l'angle $\widehat{(OI, O'M)}$ en fonction de l'angle $\widehat{(OI, OA)}$.

2) Déterminer la position du point A pour que le point M vérifie chacune des conditions suivantes :

a) $\widehat{(OI, O'M)} = (\hat{o})$

b) $\widehat{(OI, O'M)} = (\hat{p})$

c) $\widehat{(OI, O'M)} = (\hat{d})$

d) $\widehat{(OI, O'M)} = -(\hat{d})$.

73. Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles sécants en A et B, de centres respectifs O et O' et (D) une sécante à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ qui passe par le point B sans passer par le point A; on note M et M' les autres points d'intersection de (D) avec $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement.

1) Montrer que les angles $\widehat{(MA, MB)}$ et $\widehat{(OA, OO')}$ ont même double (on pourra utiliser le fait que (OO') est médiatrice de $[AB]$).

2) Montrer que $\widehat{(AM', AM)}$ et $\widehat{(AO', AO)}$ ont même double (on pourra utiliser des triangles).

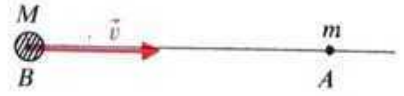
3) Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ les disques de frontières respectives $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
On note $(\mathcal{A}_1) = (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}')$
$(\mathcal{A}_2) = (\mathcal{C}') \cap (\mathcal{D})$.
$(\mathcal{A}_3)$ l'autre arc du cercle $(\mathcal{C})$ d'extrémités A et B.
$(\mathcal{A}_4)$ l'autre arc du cercle $(\mathcal{C}')$ d'extrémités A et B.
Vérifier qu'on ne peut avoir simultanément M sur $(\mathcal{A}_1)$ et M' sur $(\mathcal{A}_2)$.
Dans chacun des trois cas de figures possibles selon les positions de M et M' sur les arcs, déterminer si les angles orientés $\widehat{(MA, MB)}$ et $\widehat{(OA, OO')}$ d'une part, $\widehat{(M'B, M'A)}$ et $\widehat{(O'O, O'A)}$ d'autre part, sont égaux ou que l'un est la somme de l'autre et de l'angle plat.
En déduire, dans chaque cas, que :

$$\widehat{(AM', AM)} = \widehat{(AO', AO)}$$

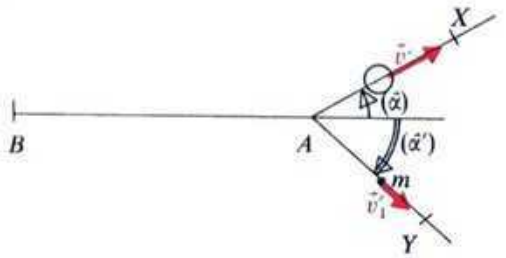
(on utilisera la somme des angles orientés d'un triangle).

74. Une particule de masse M est introduite au point B dans une chambre à bulles à une vitesse $\vec{v}$. Elle rencontre une particule de masse m immobile, située au point A. Une photographie permet de déterminer les trajectoires des particules M et m. Celle, $[AX)$, de M fait un angle orienté $(\hat{\alpha})$ avec la demi-droite $[BA)$ et celle, $[AY)$, de m un angle $(\hat{\alpha}')$ avec cette même demi-droite :

Avant le choc :



Après le choc :



Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires définis par : $\vec{i}$ est un vecteur directeur de la demi-droite $[BA)$, $\vec{j}$ est tel que le repère $(B, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé direct. En notant v, v', v'_1 les normes respectives des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{v}'$ et $\vec{v}'_1$, donner les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1) Écrire l'égalité vectorielle traduisant la conservation de la quantité de mouvement.
(On rappelle que la quantité de mouvement d'un mobile de masse m_1 animé d'une vitesse $\vec{v}_1$ est égale à $m_1\vec{v}_1$).
En déduire les intensités v' et v'_1 des vitesses respectives des particules M et m après le choc.

2) Soient R, S et T les points définis par :

$$\overrightarrow{AR} = M\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AS} = M\vec{v}',$$
$$\overrightarrow{AT} = m\vec{v}'_1$$

Démontrer que l'on a :

$$\widehat{(AR, AT)} = \widehat{(RA, RS)}.$$

Vérifier que l'on a :

$$\sin \widehat{(SR, SA)} = \sin (\alpha + \alpha')$$

où α et α' sont les mesures des angles $(\hat{a})$ et $(\hat{a}')$ (on remarque que les nombres α et α' sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\alpha + \alpha'$ est dans $[0, \pi]$).

En déduire les valeurs de v' et v'_1 en utilisant une relation métrique dans le triangle RAS.

75. Soient $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ deux forces appliquées au point A, d'intensités respectives 400 N et 450 N, et faisant entre elles un angle de 53 degrés. On note B et C les points définis par :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{F}_1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \vec{F}_2.$$

1) Placer les points A, B et C sur une figure où 100N seront représentés par 1 cm.
Placer le point S défini par :

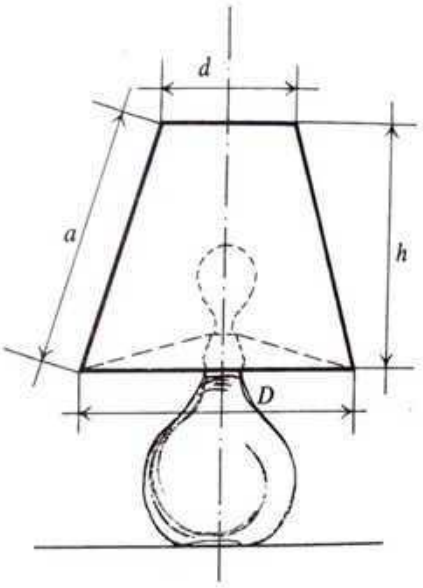
$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

2) On note $\vec{F}$ la résultante des deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. Utiliser les relations métriques dans les triangles pour calculer l'intensité de $\vec{F}$ puis la mesure en degrés (à un degré près) de l'angle entre les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}$.

3) Calculer le travail du système de forces $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ dans un déplacement sur la droite (AB) défini par un vecteur $\overrightarrow{AD}$.
Exprimer le travail de la résultante $\vec{F}$ pour ce même déplacement. Retrouver, connaissant l'intensité de $\vec{F}$, la valeur de la mesure de l'angle entre les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}$.

N.B. : On rappelle que le travail d'une force $\vec{F}$ dans un déplacement défini par le vecteur $\overrightarrow{MP}$ est : $\vec{F} \cdot \overrightarrow{MP}$.

76. Un artisan doit confectionner un abat-jour en batik. Celui-ci est un tronc de cône de hauteur h, les bases circulaires ayant respectivement pour diamètre D et d.



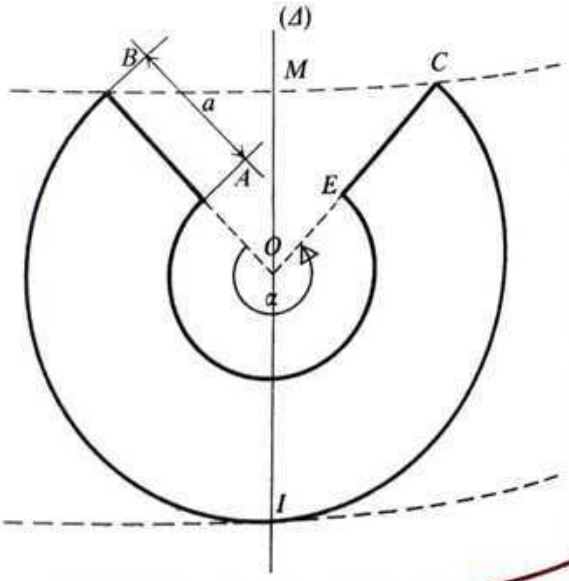
Le morceau de toile aura donc une forme de «secteur de couronne circulaire» dessinée ci-dessous.

1) En utilisant des triangles obtenus sur la coupe de l'abat-jour formé (1re figure).

a) Calculer a en fonction de D, d et h.

b) démontrer que :

$$OA = \frac{d}{D - d}\, a$$



c) donner les mesures de segments $[OA]$ et $[OB]$ en fonction de D, d et h.

2) Les valeurs en cm de D, d et h sont respectivement : 40, 20 et 25.

a) En utilisant le fait que la longueur d'un arc de cercle est le produit du rayon de ce cercle par la détermination dans $[0,2\pi[$ de la mesure de l'angle au centre associé, déterminer la mesure α de l'angle $\widehat{(OA, OE)}$.

b) Soient (Δ) la médiatrice de $[AE]$, M le milieu de $[BC]$, I le point de contact de la tangente parallèle à (BC) au cercle de centre O et passant par B. Trouver les dimensions de la pièce rectangulaire de tissu nécessaire (en cm, à 1 cm près).

2 Trigonométrie

I. DÉTERMINATIONS DE LA MESURE D'UN ANGLE ORIENTÉ
II. FONCTIONS COSINUS, SINUS ET TANGENTE
III. FORMULES USUELLES DE TRIGONOMÉTRIE
IV. ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DE LA FORME : $x \in \mathbb{R}$, $a \cos x + b \sin x + c = 0$

I. Déterminations de la mesure d'un angle orienté

1 Congruence

Question 1

Soient $(\hat{\alpha}_1)$ et $(\hat{\alpha}_2)$ deux angles orientés de déterminations principales de la mesure respectives m_1 et m_2. Dans chacun des cas suivants construire un représentant $([SA), [SB])$ de $(\hat{\alpha}_1)$ et le représentant $([SB), [SC))$ de $(\hat{\alpha}_2)$ de côté origine $[SB)$ puis trouver la détermination principale m de la mesure en degrés de l'angle $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$ (qui est $\widehat{(SA, SC)}$).

1) $m_1 = 120 \quad m_2 = 140$

2) $m_1 = -100 \quad m_2 = -130$

3) $m_1 = 80 \quad m_2 = 150$

4) $m_1 = 70 \quad m_2 = 50$

5) $m_1 = 80 \quad m_2 = -20$

6) $m_1 = 20 \quad m_2 = -130.$

Vérifier que dans chacun de ces six cas on a :

$$m = m_1 + m_2 \quad ou \quad m = m_1 + m_2 + 360 \quad ou \quad m = m_1 + m_2 - 360.$$

Question 2

Reprendre la question précédente mais cette fois-ci avec les cinq angles orientés $(\hat{\alpha}_1), (\hat{\alpha}_2), (\hat{\alpha}_3), (\hat{\alpha}_4)$ et $(\hat{\alpha}_5)$ de déterminations principales respectives de la mesure en degrés m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 et trouver la détermination principale m de la mesure de l'angle $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2) + (\hat{\alpha}_3) + (\hat{\alpha}_4) + (\hat{\alpha}_5)$.

1) $m_1 = 160 \quad m_2 = 120 \quad m_3 = 150$
$m_4 = 170 \quad m_5 = 180$

2) $m_1 = 60 \quad m_2 = 40 \quad m_3 = 165$
$m_4 = 160 \quad m_5 = 100$

3) $m_1 = -120 \quad m_2 = 60 \quad m_3 = 170$
$m_4 = -80 \quad m_5 = 45$

4) $m_1 = -130 \quad m_2 = -120 \quad m_3 = -170$
$m_4 = -150 \quad m_5 = -140.$

Vérifier que dans chaque cas on a :
il existe un entier relatif k tel que :

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + k360.$$

Définition

Soient x et y deux nombres réels, on dit que **x est congru à y modulo 360** si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = y + k360$.
On écrit $x \equiv y \quad [360]$.

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants trouver un nombre réel de l'intervalle]180, 180] et congru au nombre réel x donné modulo 360.

1) $x = 480$ 4) $x = -120{,}27$ 7) $x = 2280$
2) $x = -240$ 5) $x = 239{,}33$ 8) $x = 200$
3) $x = 1620$ 6) $x = 120$ 9) $x = -420$

Étudions les propriétés de la relation, appelée **congruence modulo 360,** définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x \equiv y \quad [360] \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = y + k \,.\, 360).$$

• Cette relation est réflexive car, pour tout nombre réel x, on a :

$$x = x + 0.360.$$

• Cette relation est symétrique car, s'il existe un entier relatif k tel que $x = y + k \,.\, 360$, alors on a :

$$y = x + (-k) \,.\, 360, \quad \text{et} \quad -k \in \mathbb{Z}.$$

• Cette relation est transitive car, s'il existe un entier relatif k et un entier relatif k' tels que :

$$x = y + k \,.\, 360 \quad \text{et} \quad y = z + k' \,.\, 360$$

alors :
$$x = z + (k + k')360 \quad \text{et} \quad k + k' \in \mathbb{Z}.$$

On a ainsi montré :

La congruence modulo 360 est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
De plus on admet :

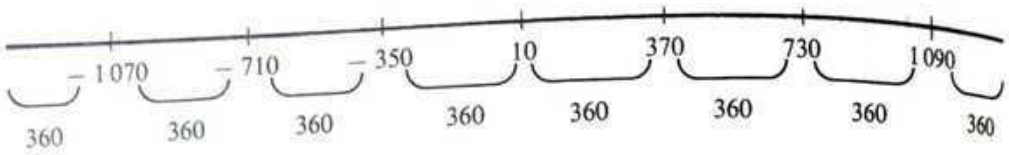
Théorème

Toute classe d'équivalence pour la congruence modulo 360 possède un unique représentant dans] − 180, 180].

Ainsi par exemple la classe d'équivalence de 10 est $\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = 10 + k \cdot 360\}$ c'est-à-dire :

$$\{..., -3\,590, ..., -710, -350, 10, 370, 730, 1\,090, ..., 3\,610, ...\}.$$

Plaçons ces éléments sur la droite réelle graduée :



On définit de même la relation de **congruence modulo** 2π par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\quad x \equiv y\ \ [2\pi] \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\quad x = y + k - 2\pi).$$

C'est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$. La classe d'équivalence du nombre réel $\frac{\pi}{3}$ est

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\}$$

c'est-à-dire : $\left\{..., -\frac{11\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}, ...\right\}$.

On retiendra :

Théorème

La congruence modulo 2π est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Toute classe d'équivalence pour cette relation possède un unique représentant dans $]-\pi, \pi]$. C'est-à-dire :

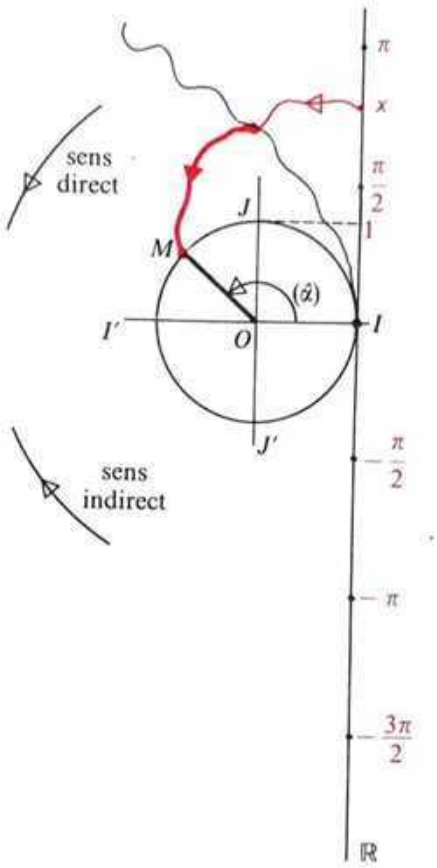
Pour tout nombre réel x, il existe un unique nombre réel a dans $]-\pi, \pi]$ tel que : il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $x = a + 2k\pi$.

Exercice 2 Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, trouver ceux qui sont des classes d'équivalence pour la congruence modulo 360 ou 2π :

1) $\{... -7\pi, -3\pi, \pi, 5\pi, 9\pi, 13\pi, ...\}$
2) $\{... -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, ...\}$
3) $\{... -170, -80, 10, 100, 190, 280, ...\}$.

2 Déterminations de la mesure d'un angle

Soit (O, I, J) un repère orthonormé direct du plan. Illustrons concrètement cette congruence modulo 2π. Imaginons pour cela que l'on dispose d'une corde dont une extrémité est fixée en I au cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$.



Le point I correspond à l'origine de l'axe réel matérialisé par une règle graduée. Ayant tendu la corde sur la règle, on marque sur la corde un point m correspondant au point d'abscisse x de $\mathbb{R}$. On enroule la corde sur le cercle dans le sens direct si x est positif, dans le sens indirect si x est négatif.
On obtient ainsi un unique point M du cercle $(\mathcal{C})$ correspondant au point m marqué sur la corde. Ce point M de $(\mathcal{C})$ définit un unique angle orienté $(\hat{\alpha})$ tel que $(\hat{\alpha}) = \widehat{(OI, OM)}$.
On vient ainsi de définir une application θ de $\mathbb{R}$ vers l'ensemble des angles orientés : au nombre réel x, θ associe l'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

Question 3 *L'application θ définie ci-dessus est-elle surjective?*

Question 4 *Quelles sont les points du cercle $(\mathcal{C})$ associés aux angles images respectives par θ des nombres réels suivants : $\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, 8\pi, -13\pi, \frac{11\pi}{2}, -4\pi, 5\pi, -\frac{\pi}{2}$?*

Il résulte de la question 4 que l'application θ n'est pas injective. Précisons ce résultat :

Question 5 *Soient x et x' deux nombres réels. A quelle condition ces deux nombres ont-ils même image par θ?*

Soit x un nombre réel d'image $(\hat{\alpha})$ par l'application θ. L'ensemble des antécédents de $(\hat{\alpha})$ par θ est l'ensemble des nombres réels y tels que $\theta(y) = \theta(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels y pour lesquels il existe un entier relatif k tel que $y = x + k \,.\, 2\pi$, c'est donc la classe d'équivalence modulo 2π de x.

Théorème et définition

1) L'application θ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des angles orientés. On appelle **mesure en radians** d'un angle orienté l'ensemble des antécédents de cet angle par l'application θ.

2) Soit $(\hat{\alpha})$ un angle orienté, sa mesure en radians est une classe d'équivalence pour la congruence modulo 2π; un représentant de cette classe, c'est-à-dire un nombre réel x tel que $\theta(x) = (\hat{\alpha})$, est appelé une **détermination de la mesure** en radians de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

3) La mesure en radians de tout angle orienté $(\hat{\alpha})$ possède **un unique** représentant dans $]-\pi, \pi]$ appelé la **détermination principale de la mesure** (en radians) de cet angle; on la note MES $(\hat{\alpha})$ ou plus simplement α s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Par exemple :

- la mesure en radians de l'angle nul est :

$$\{x \in \mathbb{R};\quad \exists k \in \mathbb{Z}\quad x = k2\pi\}$$

c'est-à-dire $\{\ldots -6\pi, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots\}$,
sa détermination principale en radians est : 0

- la mesure en radians de $\widehat{(OI, OJ')}$, où $J'\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, est :

$$\left\{x \in \mathbb{R};\quad \exists k \in \mathbb{Z}\quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$$

c'est-à-dire $\left\{\ldots \frac{-13\pi}{2}, \frac{-9\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots\right\}$,

sa détermination principale en radians est : $-\frac{\pi}{2}$

- la mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(OI, OA)}$, où $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est :

$$\left\{x \in \mathbb{R};\quad \exists k \in \mathbb{Z}\quad x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi\right\}$$

c'est-à-dire : $\left\{\ldots, \frac{-5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}, \ldots\right\}$,

sa détermination principale en radians est : $\frac{3\pi}{4}$.

Méthode pratique

Pour trouver la détermination principale α de la mesure en radians dont on connaît une détermination de la forme $y\pi$ où y est un nombre réel :

1) si $y\pi \in]-\pi, \pi]$ c'est-à-dire $y \in]-1, 1]$, alors $\alpha = y\pi$
2) si $y\pi \notin]-\pi, \pi]$, il suffit de trouver l'entier relatif k et le nombre réel z tels que :

$$y\pi = z\pi + k(2\pi) \quad \text{avec} \quad -\pi < z\pi \leqslant \pi, \quad \text{alors} \quad \alpha = z\pi;$$

c'est-à-dire trouver l'entier relatif k et le nombre réel z tels que $y = z + 2k$ avec $-1 < z \leqslant 1$.

Ainsi, par exemple, cherchons la détermination principale α de la mesure dont une détermination est $\frac{25\pi}{4}$:

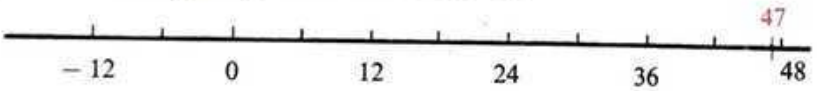
Puisque :
$$\frac{25}{4} = \frac{24+1}{4}$$
$$= 6 + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} + 2 \times 3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \in]-1, 1]$$

on a :
$$\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3(2\pi)$$

la détermination principale est donc $\frac{\pi}{4}$.

En fait l'entier relatif k tel qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ vérifiant $y = z + 2k$ et $-1 < z \leqslant 1$, est tel que $2k$ soit l'entier relatif pair « le plus proche » de y. Dans la plupart des cas, y est un nombre rationnel, écrit sous sa forme irréductible $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On cherche alors le « multiple pair » de q le plus proche de p.

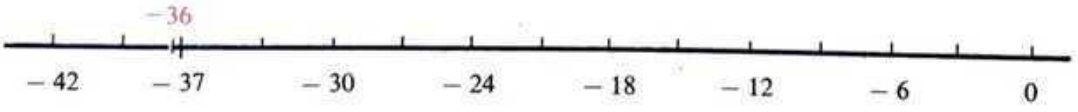
Ainsi par exemple, pour $y\pi = \frac{47\pi}{6}$, on a :
$$p = 47, \qquad q = 6,$$
le « multiple pair » de 6 le plus proche de 47 est 48.



On écrit donc :
$$y\pi = \frac{(48-1)\pi}{6}$$
$$= 4 \,.\, 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

d'où :
$$\alpha = -\frac{\pi}{6}.$$

De même pour :
$$y\pi = -\frac{37\pi}{3}$$



d'où :
$$y\pi = \frac{-36-1}{3}\pi$$
$$= -6 \,.\, 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{donc} \quad \alpha = -\frac{\pi}{3}.$$

Remarque

Dans la suite du cours, pour simplifier le langage, on fera l'abus suivant :

On appellera mesure d'un angle $(\hat{\alpha})$, une détermination de sa mesure et **la** mesure de $(\hat{\alpha})$ sera la détermination principale de sa mesure : MES $(\hat{\alpha})$. Ainsi une mesure de $(\hat{\alpha})$ est un antécédent de $(\hat{\alpha})$ par l'application θ.

Exercice 1 Trouver dans chacun des cas suivants la mesure en radians de l'angle dont une mesure est x.

1) $x = \frac{7\pi}{6}$ 3) $x = \frac{87\pi}{6}$ 5) $x = 1986\pi$

2) $x = -\frac{61\pi}{3}$ 4) $x = \frac{127\pi}{4}$ 6) $x = -\frac{1789}{2}\pi$.

Soit x une mesure en radians de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$, on dit que le nombre réel $\frac{180}{\pi}x$ est une détermination de la mesure (ou plus simplement une mesure) en degrés de $(\hat{\alpha})$. De même le nombre réel $\frac{200}{\pi}x$ est une mesure en grades de $(\hat{\alpha})$.

Question 6 *Soient a et b deux nombres réels. Montrer que a et b sont deux mesures en degrés d'un même angle orienté $(\hat{\alpha})$ si et seulement si a et b sont congrus modulo 360.*
En déduire que l'ensemble des mesures de $(\hat{\alpha})$ est une classe d'équivalence pour la congruence modulo 360 et qu'elle admet un unique représentant dans l'intervalle $]-180, 180]$, que l'on appelle la détermination principale de la mesure en degré, ou plus simplement la mesure de (α) en degré.

Question 7 *Trouver la mesure en degrés des angles orientés suivants :*

$\widehat{(OI, OI)}$, $\widehat{(OI, OJ)}$, $\widehat{(OI, OI')}$, $\widehat{(OI, OJ')}$, $\widehat{(OI, OA)}$, $\widehat{(OI, OB)}$

où (O, I, J) est le repère orthonormé dans lequel on a :

$$I'\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad J'\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Méthode pratique

Pour trouver la mesure en degrés d'un angle orienté dont on connaît une mesure x. On note α la mesure de l'angle.

1) si $x \in]-180, 180]$, alors $\alpha = x$

2) si $x \notin]-180, 180]$, il faut trouver un entier relatif k tel que : il existe $y \in]-180, 180]$ vérifiant :

$$x = 360k + y, \quad \text{on a alors} \quad \alpha = y.$$

En général on procède de la façon suivante :

1er cas : x est positif : on effectue la division euclidienne de x par 360 : on obtient $x = 360 \,.\, q + r$ avec q dans $\mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < 360$.

1) Si $r \leqslant 180$, alors :

$$\alpha = r.$$

2) Si $r > 180$, alors :

$$x = 360q + 360 + r - 360$$

d'où : $$x = 360(q + 1) + (r - 360)$$

or : $$r - 360 \in]-180; 0[$$

donc : $$\alpha = r - 360.$$

Ainsi par exemple :

1) $x = 3\,715$, on a :

$$x = 360 \,.\, 10 + 115 \quad \text{donc} \quad \alpha = 115.$$

2) $x = 2\,796$, on a :

$$x = 360 \,.\, 7 + 276$$

on écrit : $$x = 360 \,.\, 8 + (-84) \quad \text{donc} \quad \alpha = -84.$$

2e cas : x est négatif et non multiple de -180 (car alors, il est clair que α est égal à 180) : on applique la méthode précédente à $-x$, en remarquant que :

si : $$-x = 360k + y \quad \text{avec} \quad -180 < y < 180$$

alors : $$x = 360(-k) + (-y) \quad \text{avec} \quad -180 < y < 180.$$

Ainsi par exemple :

1) $x = -789$, on a :

$$-x = 360 \,.\, 2 + 69 \quad \text{donc} \quad \alpha = -69.$$

2) $x = -910$, on a :

$$-x = 360 \,.\, 2 + 190$$

d'où : $$-x = 360 \,.\, 3 + (-170) \quad \text{donc} \quad \alpha = 170.$$

Pour le cas de la mesure en grades on procèdera de même en écrivant x sous la forme $400k + y$ où k est un entier relatif et y un nombre réel de $]-200; 200]$.

Exercice 4

Trouver la mesure en degrés de l'angle dont une mesure est respectivement :

1) 1 515 en degrés

2) 2 001 en degrés

3) $-1\,984$ en degrés

4) $\frac{7\pi}{6}$ en radians

5) $-\frac{37\pi}{2}$ en radians

6) -735 en degrés.

Exercice 5 Écrire l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} : x = 45 + k90\}$ comme union de mesures (en degrés) d'angles orientés. Puis placer les points du cercle trigonométrique associés à ces nombres réels. Quelle est la figure formée par ces points?

Même question avec $\left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right\}$ en prenant la mesure en radians.

Exercice 6 Tracer deux demi-droites $[SA)$ et $[SB)$ telles qu'une mesure de l'angle $\widehat{(SA, SB)}$ soit respectivement :

1) 225 en degrés
2) 320 en degrés
3) -760 en degrés
4) $\frac{5\pi}{4}$ en radians
5) $-\frac{13\pi}{6}$ en radians
6) $\frac{25\pi}{12}$ en radians
7) 1 986 en degrés
8) $\frac{17\pi}{4}$ en radians
9) 2 327 en grades

3 Mesure de la somme de deux angles orientés

Question 8 *Soient $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ les deux angles orientés dont 40 et -120 sont respectivement des mesures en degrés.*
Vérifier que 400, -320 et 760 sont d'autres mesures de l'angle $(\hat{\alpha})$. Vérifier que -480, 240, $-7\,320$ sont d'autres mesures de l'angle $(\hat{\beta})$. Pour chaque mesure x de l'angle $(\hat{\alpha})$ et chaque mesure y de l'angle $(\hat{\beta})$ données ci-dessus, calculer $x + y$ et comparer cette somme à la mesure de l'angle somme : $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$.

Plus généralement, soient $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ deux angles orientés de mesures respectives m_1 et m_2; soient x_1 et x_1' deux déterminations de m_1, x_2 et x_2' deux déterminations de m_2. Montrons que $x_1 + x_2$ et $x_1' + x_2'$ sont deux déterminations de la mesure d'un même angle $(\hat{\gamma})$.
Si la mesure est en radians alors on a :

il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1' = x_1 + k_1 \cdot 2\pi$
il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $x_2' = x_2 + k_2 \cdot 2\pi$

d'où : $$x_1' + x_2' = (x_1 + x_2) + (k_1 + k_2) \cdot 2\pi$$

or $k_1 + k_2$ est élément de $\mathbb{Z}$ donc :

$$x_1' + x_2' \equiv x_1 + x_2 \quad [2\pi].$$

On admet que l'angle $(\hat{\gamma})$ dont $x_1 + x_2$ est une détermination de la mesure, est égal à la somme des angles $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$. Autrement dit :

si x et y sont deux nombres réels quelconques, alors :

$$\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$$

où θ est l'application qui à un nombre réel x associe l'angle orienté dont x est une mesure.

On traduit cette égalité ci-dessus en disant que : une mesure de la somme de deux angles orientés est la somme des mesures de ces deux angles.

Méthode pratique

Pour connaître la somme de deux angles orientés :

Soient $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ deux angles orientés. Pour connaître la somme de ces deux angles, il suffit de trouver une mesure x de $(\hat{\alpha})$; on aura $\theta(x) = (\hat{\alpha})$,
trouver une mesure y de $(\hat{\beta})$; on a $\theta(y) = (\hat{\beta})$, faire la somme $x + y$.
Ce nombre $x + y$ est une mesure de l'angle somme $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$, ou encore $\theta(x) + \theta(y)$.

Ainsi par exemple si $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ ont pour mesure en radians respectivement $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{6}$, alors $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$ a pour mesure, en radians, $\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}$ c'est-à-dire $\frac{19\pi}{12}$; donc la mesure de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$ est $-\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 7

1) Donner la mesure de la somme des angles orientés $(\hat{\alpha}_1)$ et $(\hat{\alpha}_2)$ de déterminations respectives :

a) 183 et 234 (en degrés)

b) $\frac{31\pi}{4}$ et $\frac{27\pi}{4}$ (en radians).

2) Soit α un nombre réel donné, résoudre l'équation :

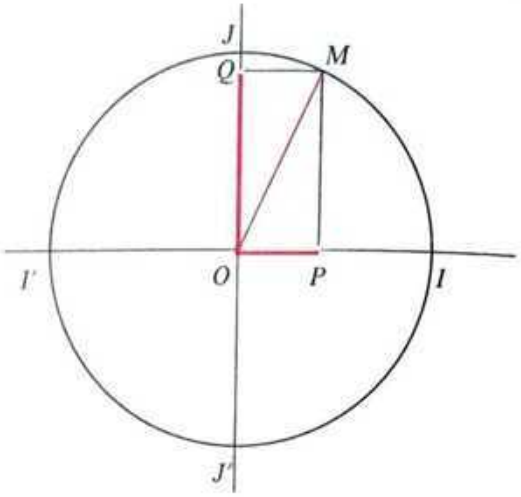
$$x \in \mathbb{R}, \qquad 2x \equiv 2\alpha \ [2\pi].$$

En déduire que : deux angles orientés ont même double si et seulement si : soit ils sont égaux, soit l'un est égal à la somme de l'autre et de l'angle plat.

II Fonctions cosinus, sinus et tangente

1 Définition des fonctions cosinus et sinus

Soient α une mesure en radians de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$, M le point du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ tel que $(\hat{\alpha}) = (\widehat{OI, OM})$, P le projeté orthogonal du point M sur la droite (OI) et Q le projeté orthogonal du point M sur la droite (OJ).



on a :

$$\cos(\hat{\alpha}) = \cos\widehat{(OI, OM)} = \overline{OP}$$

$$\sin(\hat{\alpha}) = \sin\widehat{(OI, OM)} = \overline{OQ}.$$

Puisque à un nombre réel α, on associe un et un seul point M de (C), donc un et un seul point P du segment $[I'I]$, la relation qui, à α associe le nombre $\overline{OP}$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $[-1, 1]$; cette application est appelée **cosinus** et notée cos; on a :

$\boxed{\cos \alpha = \overline{OP}}$, où cos α est l'image de α par cos.

De même, à α on associe un et un seul point Q du segment $[J'J]$, on définit ainsi l'application **sinus** de $\mathbb{R}$ vers $[-1, 1]$, notée sin, par :

$\boxed{\sin \alpha = \overline{OQ}}$, où sin α est l'image de α par sin.

On a ainsi :

$$\cos \alpha = \cos(\hat{\alpha})$$
$$\sin \alpha = \sin(\hat{\alpha}).$$

Remarque :

Bien que les notations soient les mêmes,
cos ($\hat{\alpha}$) désigne l'image de l'angle $(\hat{\alpha})$ par une application de l'ensemble des angles orientés vers $[-1, 1]$
cos α désigne l'image du nombre réel α par une application de $\mathbb{R}$ vers $[-1, 1]$.
Comme on a vu : $\cos^2(\hat{\alpha}) + \sin^2(\hat{\alpha}) = 1$, on a :

$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$

où on note $\cos^2 \alpha$ le nombre réel $(\cos \alpha)^2$.

Question 9 *Donner les valeurs de cos α et sin α pour tout nombre réel α de l'ensemble*

$$\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right\}.$$

2 Étude des fonctions cosinus et sinus

On a vu que les nombres réels α et β sont deux mesures d'un même angle orienté $\widehat{(OI, OM)}$ si et seulement si α est congru à β modulo 2π.

Par définition des fonctions cosinus et sinus on a ($\cos \alpha = \cos \beta$ et $\sin \alpha = \sin \beta$) si et seulement si α et β sont deux mesures du même angle orienté $\widehat{(OI, OM)}$. D'où :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha = \cos \beta \\ \text{et} \\ \sin \alpha = \sin \beta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \alpha \equiv \beta \ [2\pi].$$

De plus $\alpha \equiv \beta \ [2\pi]$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $\beta = \alpha + k \,.\, 2\pi$. Ainsi on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \cos (\alpha + k \,.\, 2\pi) = \cos \alpha$$
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sin (\alpha + k \,.\, 2\pi) = \sin \alpha.$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, de période 2π.

Méthode pratique

Pour calculer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel x, on cherche la détermination principale α de la mesure de l'angle $\theta(x)$, et on a $\cos \alpha$ ou $\sin \alpha$, lorsque la valeur est connue. Ainsi par exemple :

$$\begin{aligned} \cos \frac{51\pi}{4} &= \cos \frac{48 + 3}{4} \pi \\ &= \cos \left(6 \,.\, 2\pi + \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Sinon on utilise la calculatrice en mode radian.

Exercice 8 Calculer $\cos \frac{7\pi}{4}$, $\sin \frac{19\pi}{4}$, $\cos \frac{7\pi}{3}$, $\sin \frac{13\pi}{6}$.

Puisque les fonctions cosinus et sinus ont pour période 2π, pour étudier ces fonctions il suffit donc de considérer la variable dans un intervalle d'amplitude 2π : étudions cos et sin sur $[-\pi, \pi]$.

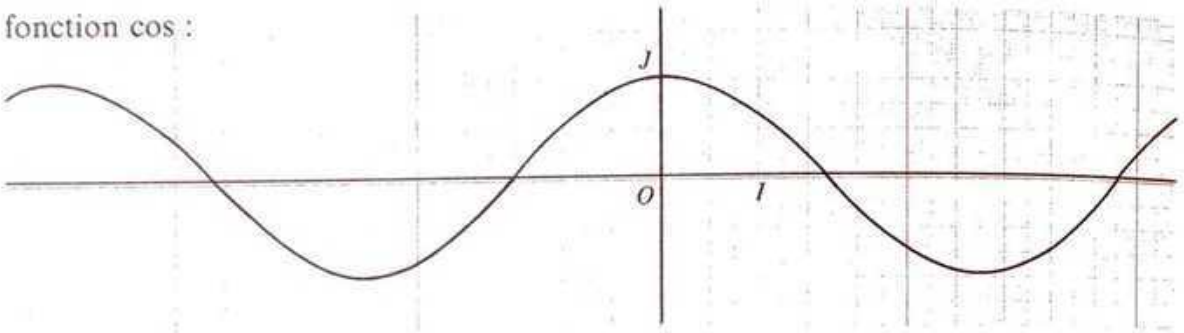
On trouve le sens de variation de ces fonctions en examinant les positions des points P et Q lorsque α décrit $[-\pi, \pi]$: le point M décrivant alors le cercle dans le sens positif, en passant, dans l'ordre, par les points I', J', I, J, I' ; on obtient ainsi les tableaux de variation suivants :

x	$-\pi$		0		π
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

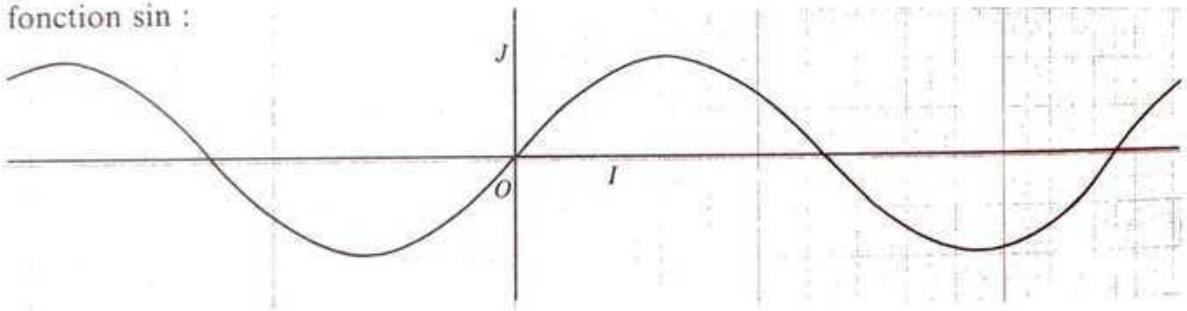
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

On verra en analyse d'autres précisions sur ces fonctions, intéressantes pour le tracé de leurs représentations graphiques données ci-dessous :

fonction cos :



fonction sin :



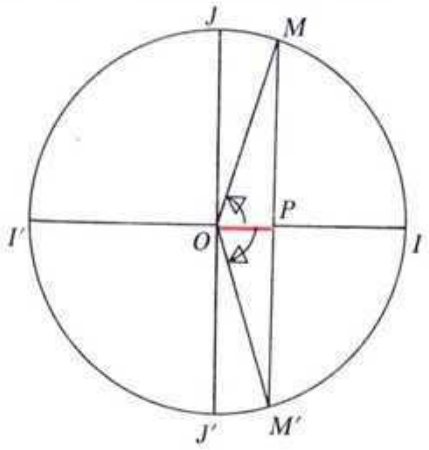
Question 10 *Utiliser les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus pour discuter les équations (E_1) et (E_2) suivantes d'inconnue réelle x, a étant un nombre réel donné :*

$$(E_1) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = a$$
$$(E_2) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = a.$$

Considérant a dans $[-1, 1]$, il existe au moins un nombre réel α tel que $\cos \alpha = a$.
Résolvons l'équation d'inconnue x :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = \cos \alpha.$$

Soit P le point de $[I'I]$ tel que $\overline{OP} = \cos \alpha$. Pour trouver tous les nombres réels x tels que $\cos x = \overline{OP}$, il faut déterminer tous les points du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de projection orthogonale P sur (OI) .
on obtient deux points M et M' de $(\mathcal{C})$, symétriques par rapport à (OI).



On a $\widehat{(OI, OM')} = -\widehat{(OI, OM)}$. Si α est une mesure de $\widehat{(OI, OM)}$, alors $-\alpha$ est une mesure de $\widehat{(OI, OM')}$. Les seules valeurs de x telles que $\cos x = \cos \alpha$ sont des mesures de $\widehat{(OI, OM)}$ ou de $\widehat{(OI, OM')}$ c'est-à-dire tous les nombres réels congrus à α ou à $-\alpha$ modulo 2π. On a ainsi :

Théorème

Soit α un nombre réel. L'ensemble des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = \cos \alpha$$

est l'ensemble S défini par :

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \alpha + k \,.\, 2\pi\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ \exists k' \in \mathbb{Z} \quad x = -\alpha + k \,.\, 2\pi\}$$

c'est-à-dire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \cos \alpha \iff (x \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\alpha\ [2\pi]).$$

Cas particulier : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 0$.
Dans ce cas les points M et M' sont en fait J et J' et l'écriture se simplifie, en effet on a alors $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ par exemple, et la phrase :

$$\left(\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{ou} \quad \exists k' \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{2} + k'2\pi\right)$$

peut s'écrire :

$$\left(\exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k_1 \pi\right)$$

(dans le 1er cas : $k_1 = 2k$, dans le 2^{e} cas : $k_1 = 2k' - 1$).
Ainsi on a : pour tout nombre réel x :

$$\cos x = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

c'est-à-dire :

$$\cos x = 0 \quad \text{si et seulement si :} \quad \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k_1 \pi.$$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x, et placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants aux solutions :

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$

2) $\cos 6x - \frac{1}{2} = 0$

3) $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}-2}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

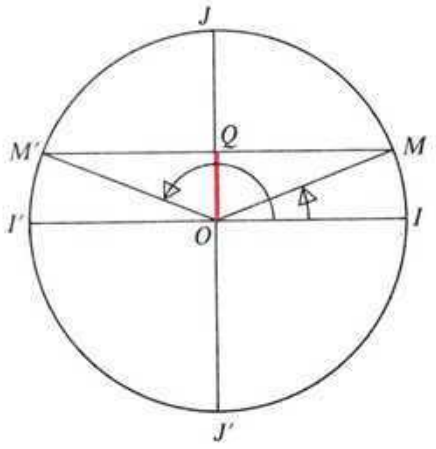
4) $\cos^2 x - \frac{3}{4} = 0$.

De même, résolvons l'équation d'inconnue x :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sin \alpha.$$

Soit Q le point de $[J'J]$ tel que $\overline{OQ} = \sin \alpha$; il existe exactement deux points M et M' du cercle $(\mathcal{C})$ de projeté orthogonal Q sur (OJ) : ces points sont symétriques par rapport à (OJ). On a $\widehat{(OI, OM)} = \widehat{(OM', OI')}$, donc la somme :

$\widehat{(OI, OM)} + \widehat{(OI, OM')}$ est l'angle orienté plat $\widehat{(OI, OI')}$.



De ce fait si α est une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM)}$ alors $(\pi - \alpha)$ est une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM')}$. On a ainsi :

Théorème

Soit α un nombre réel. L'ensemble des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sin \alpha$$

est l'ensemble S défini par :

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \alpha + k \,.\, 2\pi\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \pi - \alpha + k2\pi\}.$$

c'est-à-dire on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sin \alpha \iff (x \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi])$$

Cas particulier : $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = 0$.

Dans ce cas les points M et M' sont I et I' et on a pour tout nombre réel x :

$$\sin x = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x \equiv 0\ [\pi]$$

c'est-à-dire :

$$\sin x = 0 \quad \text{si et seulement si :} \quad \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x = k_1 \pi.$$

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x et placer sur (C) les points correspondants aux solutions :

1) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin 3x + \dfrac{1}{2} = 0$

3) $2(\sqrt{3} + 1) \sin x + 4 \sin^2 x + \sqrt{3} = 0$

4) $\sin x = 2 \sin^2 x$.

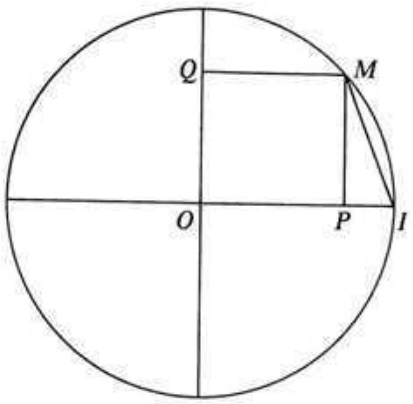
Question 11 *1) Résoudre graphiquement l'équation :*

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x.$$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation :

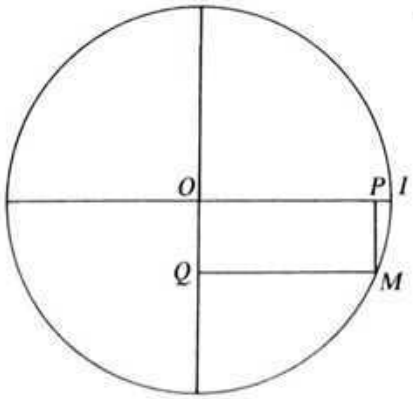
$$x \in \mathbb{R} \quad , \quad \sin x \leqslant x.$$

Illustrons ces résultats sur le cercle trigonométrique pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.



Si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, x est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ du cercle, et $\sin x = OQ$, qui est égal à PM. La distance PM est inférieure à la distance IM qui est elle-même inférieure à la longueur x de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ donc :

$$\sin x \leqslant x.$$



Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est alors $|x|$, comme ci-dessus la distance PM est inférieure à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$; ici la distance PM, égale à la distance OQ, est $|\sin x|$.

On a donc :

$$|\sin x| \leqslant |x|.$$

On remarque que, pour x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inégalité $\sin x \leqslant x$ peut s'écrire aussi $|\sin x| \leqslant |x|$.

On retiendra les résultats suivants :

Théorème

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin x \leqslant x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad |\sin x| \leqslant |x|.$$

Question 12 *Grâce aux représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus, résoudre les inéquations suivantes :*

1) $x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

2) $x \in \mathbb{R}, \quad \sin x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Méthode pratique

Pour résoudre les inéquations de l'un des types suivants :

$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \leqslant \cos \alpha$
$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \geqslant \cos \alpha$
$x \in \mathbb{R}, \quad \sin x \leqslant \sin \alpha$
$x \in \mathbb{R}, \quad \sin x \geqslant \sin \alpha$

où α est un nombre réel donné

(et les inégalités strictes correspondantes).

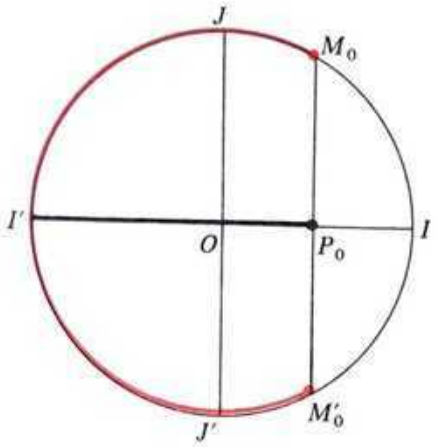
On utilise :

- Soit la représentation graphique de la fonction cosinus (respectivement sinus) et celle de la droite d'équation $y = \cos \alpha$ (respectivement $y = \sin \alpha$); on est ramené à chercher l'image réciproque d'un intervalle par une fonction dont on connaît la représentation graphique.

- Soit le cercle trigonométrique : la valeur α détermine deux points sur le cercle $(\mathcal{C})$ limitant deux arcs; on détermine quel est l'arc qui convient et on en déduit l'ensemble solution.

Ainsi par exemple, soit (I) l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \leqslant \frac{1}{2}.$$



Soit P_0 le point de $[I'I]$ tel que $\overline{OP_0} = \frac{1}{2}$ $\left(\text{on a par exemple } \alpha = \frac{\pi}{3}\right)$. Soient M_0 et M'_0 les points de $(\mathcal{C})$ de projeté orthogonal P_0 sur (OI) : ils déterminent deux arcs $\widehat{M_0M'_0}$ celui contenant I et celui contenant I'.

A tout nombre réel x on associe le point M de $(\mathcal{C})$ de projeté orthogonal P sur (OI) tel que $\overline{OP} = \cos x$. On a x vérifie (I) si et seulement si $P \in [I'P_0]$.
Donc x est une solution de l'inéquation (I) si et seulement si M est sur l'arc de cercle dessiné en rouge (arc $\widehat{M_0M'_0}$ qui contient I').

Cet arc rouge est la réunion de l'arc $\widehat{M_0I'}$ contenant J et de l'arc $\widehat{I'M'_0}$ contenant J', or l'ensemble des nombres réels x de $]-\pi, \pi]$ tels que M soit sur $\widehat{M_0I'}$ est l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, et l'ensemble des nombres réels x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ tels que M soit sur $\widehat{I'M'_0}$ est l'intervalle $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ donc l'ensemble des solutions de (I) dans $]-\pi, \pi]$ est $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

L'ensemble des solutions de (I) dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels x tels que :
il existe un nombre réel y dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tels que $x \equiv y \ [2\pi]$
c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels de la forme :

$$y + k2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right].$$

Cet ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (I) est aussi l'ensemble des nombres réels x pour lesquels il existe un entier relatif k tel que :

$$x \in \left]-\pi + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi\right] \quad \text{ou} \quad x \in \left[\frac{\pi}{3} + k2\pi; \pi + k2\pi\right].$$

Exercice 11 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\quad 2 \sin x - 1 \geqslant 0$

2) $x \in \mathbb{R}$, $\quad 4 \cos^2 x < 2 \cos x - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos x$

3) $x \in]-\pi, \pi]$, $\quad \cos 3x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4) $x \in]-\pi, \pi]$, $\quad \cos^2 x > \dfrac{1}{4}$.

Exercice 12 Donner, selon les valeurs du nombre réel t, le signe des expressions suivantes :

1) $\cos t$ 3) $2 \cos^2 t - 1$.

2) $\sin t$ 4) $2 \sin t \cos t - \sqrt{3} \cos t$.

Question 13 *Donner un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que la restriction $\cos_{|I}$ de la fonction cosinus à I, soit une bijection de I sur $[-1, 1]$.*
Donner un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que la restriction $\sin_{|J}$ de la fonction sinus à J, soit une bijection de J sur $[-1, 1]$.

La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$; son application réciproque notée arc cos (on lit arc cosinus), est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. Sur une calculatrice, l'image d'un nombre réel compris entre -1 et 1, par cette bijection arc cos est obtenue en utilisant, selon les cas, la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ ou les touches $\boxed{\text{inv}}$ et $\boxed{\cos}$.

De même la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$; son application réciproque notée arc sin (on lit arc sinus) est une bijection de $[-1, 1]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Sur la calculatrice on utilise la touche $\boxed{\sin^{-1}}$ ou les touches $\boxed{\text{inv}}$ et $\boxed{\sin}$.

On pourra utiliser ces bijections pour résoudre des équations du type :

$$(1) : x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = a; \qquad \text{ou} \qquad (2) : x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = a$$

Il faudra toutefois prendre soin de travailler en mode radian. Si l'on travaille en mode degré, la calculatrice nous donne l'image d'un nombre réel x par la fonction notée $\cos_\circ$ (lire cosinus degré) définie par $\cos_\circ x = \cos\left(\dfrac{\pi}{180}\, x\right)$. Cette fonction $\cos_\circ$ n'est pas la fonction cos. De façon analogue, la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ en mode degré nous donne l'image d'un nombre réel compris entre -1 et 1 pour la bijection réciproque de $\cos_\circ$, la valeur obtenue est un élément de $[0,180]$.

Ceci nous permet, si l'on travaille en mode degré, de résoudre des équations du type :

$$(1) : x \in \mathbb{R}, \quad \cos_\circ x = a \qquad \text{ou} \qquad (2) : x \in \mathbb{R}, \quad \sin_\circ x = a$$

Par exemple les nombres réels x tels que $\cos_\circ x = 0{,}6$ sont congrus à α ou $-\alpha$ modulo 360 où α a pour valeur approchée à un degré près 53; ce sont donc les nombres réels d'arrondi d'ordre 0 de la forme :

$$53 + k \,.\, 360 \text{ ou } -52 + k \,.\, 360 \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Exercice 13 Résoudre, à un degré près, les équations suivantes et placer les points correspondants sur le cercle trigonométrique. Préciser quelle figure forment ces points.

1) $x \in \mathbb{R}$, $12 \sin_\circ^2 x - 13 \sin_\circ x + 3 = 0$.

2) $x \in \mathbb{R}$, $50 \sin_\circ 3x = 13$.

3) $x \in \mathbb{R}$, $\cos_\circ 4x = 0{,}62$.

On remarquera que certaines machines ne « savent » pas calculer le cosinus ou le sinus de nombres « trop grands », d'où l'utilité de trouver « à la main » la mesure. Si on possède une machine plus performante elle permet de trouver directement la mesure en utilisant successivement les touches $\boxed{\cos}$ et $\boxed{\cos^{-1}}$: on trouve soit la mesure soit son opposé, il faut alors utiliser le signe du sinus pour conclure (utiliser $\boxed{\sin}$) : exemple : $x = 3\,555$ en degrés, la machine donne arc $\cos_\circ (\cos_\circ x) = 45°$ or $\sin_\circ x$ est négatif donc la mesure associée à x est -45 en degrés.

3 Fonction tangente

En classe de Troisième, on a défini $\text{tg } \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$ où $\hat{A}$ est un angle géométrique non droit.

De façon plus générale, on a :

Définition

On appelle fonction **tangente,** notée tg, la fonction : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{cases}$

Remarque

En fait on a plusieurs fonctions tangente selon l'unité de mesure choisie (tg en radians, $\text{tg}_\circ$ en degrés). L'ensemble de définition de la fonction tg est l'ensemble des nombres réels x non congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π (voir la résolution de : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 0$) c'est-à-dire :

$$\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R};\quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

Question 14 ⟨ *Donner l'ensemble de définition de la fonction* tg_o.

Remarque

On définit aussi la fonction **cotangente,** notée cotg, par :

$$\text{cotg} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

Exercice 14 ⟨ Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) cotg

2) $x \longmapsto \text{tg}(\pi - x)$.

3) $x \longmapsto \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

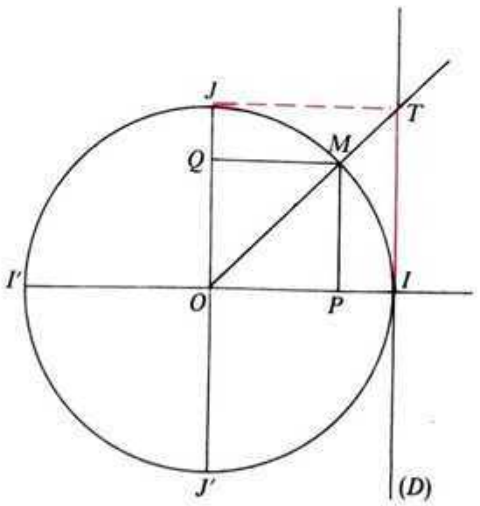
4) $x \longmapsto \text{tg}\, 3x$

Question 15 ⟨ *Compléter le tableau de valeurs suivant : (on notera ‖ lorsque tg x n'existe pas) :*

x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
tg x												

Soit α un nombre réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Soit M le point du cercle trigonométrique tel que α soit une mesure de $\widehat{(OI, OM)}$.



Soient P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur (OI) et (OJ).
Soit (D) la droite d'équation $x = 1$: elle est tangente au cercle (C) en I.
Puisque M est différent de J et de J', la droite (OM) coupe la droite (D) en un unique point T.

On a $\overline{OP} = \cos\alpha$ donc $\overrightarrow{OP} = \cos\alpha\overrightarrow{OI}$.

Si α n'est pas congru à 0 modulo 2π, les points P et M sont distincts, et la droite (PM) est parallèle à la droite (D). D'après l'énoncé vectoriel de l'axiome de Thalès on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\overrightarrow{OT}$$

d'où, puisque $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{IT}$,

$$\overrightarrow{PM} = \cos\alpha\overrightarrow{IT}$$

$(I, \overrightarrow{OJ})$ est un repère de la droite (D).

$(P, \overrightarrow{OJ})$ est un repère de la droite (PM)

on a alors : $\overline{PM} = \cos\alpha \cdot \overline{IT}$

or : $\overline{PM} = \overline{OQ}$

$= \sin\alpha$

d'où : $\overline{IT} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c'est-à-dire $\overline{IT} = \text{tg}\,\alpha$.

Question 16 *Vérifier que si α est congru à 0 modulo 2π la formule ci-dessus est encore vraie.*

Ainsi quel que soit le nombre réel α on a :

$$\text{tg}\,\alpha = \overline{IT}$$

(dans le repère $(I, \overrightarrow{OJ})$ de la droite (D)).

Exercice 15 Démontrer que, si α appartient à l'ensemble de définition de la fonction cotangente, alors $\text{cotg}\,\alpha = \overline{JT'}$ dans le repère $(J, \overrightarrow{OI})$ de la droite (D') d'équation $y = 1$ (tangente à $\mathcal{C}$ en J), où T' est l'unique point d'intersection de la droite (OM) et de (D').

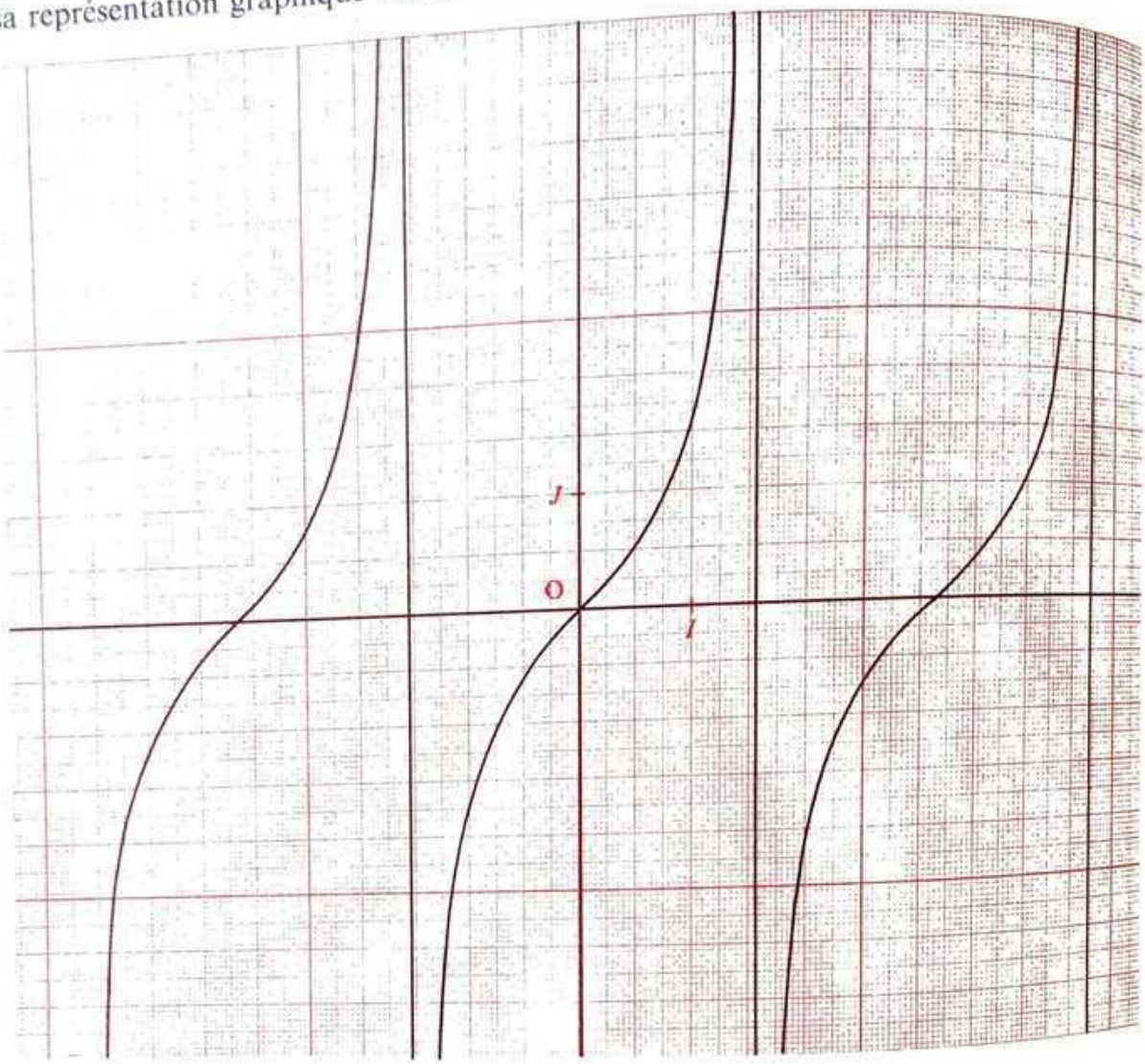
Question 17 *En utilisant le fait que deux points M et M', associés respectivement aux nombres réels x et $x + \pi$, sont diamétralement opposés sur $(\mathcal{C})$, démontrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad tg\,(x + \pi) = tg\,x.$$

Ainsi la fonction tg est périodique et de période π. Pour l'étudier, il suffit de considérer la variable dans un intervalle d'amplitude π. Étudions la fonction tg sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

En examinant la position du point T sur la droite (D) quand x décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, c'est-à-dire quand le point M décrit l'arc $\overset{\frown}{J'J}$ en passant par I, on observe que la fonction tg est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On verra, en analyse, d'autres précisions sur cette fonction, intéressantes pour le tracé de sa représentation graphique donnée ci-dessous.



Question 18 *Utiliser cette courbe représentative de la fonction tg pour résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x, où a est un nombre réel donné :*

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{tg } x = a.$$

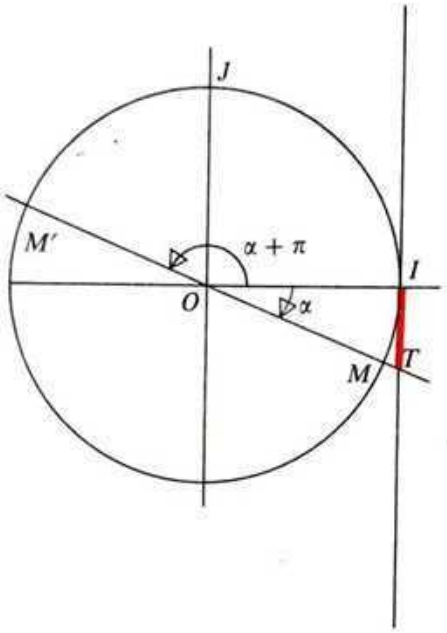
Résolvons cette équation grâce au cercle trigonométrique : soit T l'unique point de la droite (D) défini par $\overline{IT} = a$.

La droite (OT) coupe $(\mathcal{C})$ en deux points M et M'. Soit α une mesure de $(\widehat{OI, PM})$, alors $(\alpha + \pi)$ est une mesure de $(\widehat{OJ, OM'})$.

Les solutions de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{tg } x = a$$

sont les nombres réels x, associés aux points M et M', c'est-à-dire congrus à α ou à $\alpha + \pi$ modulo 2π; autrement dit ce sont les nombres réels congrus à α modulo π.



Théorème

Soit α un nombre réel donné. L'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, tg x = tg α est l'ensemble S défini par :

$$S = \{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \alpha + k\pi \}$$

c'est-à-dire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{tg } x = \text{tg } \alpha \iff x \equiv \alpha\ [\pi].$$

Méthode pratique

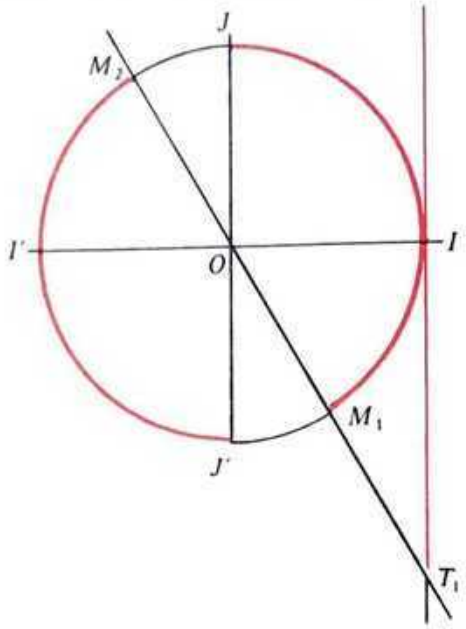
Pour résoudre les inéquations de l'un des types suivants :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{tg } x \leqslant \text{tg } \alpha$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{tg } x \geqslant \text{tg } \alpha$$

où α est un nombre réel donné (et les inégalités strictes correspondantes).
On procède, comme pour les fonctions sin et cos, soit en utilisant la courbe représentative de la fonction tg, soit en déterminant la partie du cercle trigonométrique qui convient.
Par exemple résolvons l'inéquation (I) suivante :

$$x \in \mathbb{R}, \quad tg\ x > -\sqrt{3}.$$

On place le point T_1 de (D) tel que $\overline{IT_1} = -\sqrt{3}$.
La droite (OT_1) coupe $(\mathcal{C})$ en M_1 et M_2.
Soit T le point de (D) tel que tg $x = \overline{IT}$.
x vérifie (I) si et seulement si T est sur la demi-droite $]T_1 I)$; c'est-à-dire, en notant M le point de $(\mathcal{C})$ associé à x,
x vérifie (I) si et seulement si M est sur l'un des deux arcs rouges $\overset{\frown}{M_1 J}$ ou $\overset{\frown}{M_2 J'}$. La détermination principale de la mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})$ est $-\frac{\pi}{3}$ donc les points de $\overset{\frown}{M_1 J}$ sont



associés aux nombres de $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$. La détermination principale de la mesure de $\widehat{(OI, OM_2)}$ est $\frac{2\pi}{3}$, l'arc $\widehat{M_2J'}$ est l'ensemble des points associés aux éléments de $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$. L'ensemble des solutions de (I) est l'ensemble des nombres réels, congrus modulo 2π à un élément de $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Du fait que les arcs $\widehat{M_1J}$ et $\widehat{M_2J'}$ sont symétriques par rapport à 0, l'ensemble des solutions de (I) est aussi l'ensemble des nombres réels congrus modulo π à un élément de $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$S_{(I)} = \left\{ x \in \mathbb{R};\quad \exists y \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\quad x \equiv y \ [\pi] \right\}.$$

Exercice 16 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

1) $x \in]-\pi, \pi]$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $x \in]-\pi, \pi]$, $\operatorname{tg} 2x = 1$.

3) $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$

4) $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

Exercice 17 Résoudre les inéquations ou systèmes d'inéquations suivants d'inconnue réelle x :

1) $x \in]-\pi, \pi]$, $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$

2) $x \in]-\pi, \pi]$, $1 < \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$

3) $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4) $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg}^2 x - 3 > 0$

Exercice 18 Donner, selon les valeurs du nombre réel t, le signe des expressions suivantes :

1) $\text{tg}\ t$.

2) $\text{tg}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$.

3) $\text{tg}\ 3t$.

4) $\text{tg}^2\ t + (1 + \sqrt{3})\ \text{tg}\ t - \sqrt{3}$.

Question 19 *Déterminer les intervalles I de $\mathbb{R}$ tels que la restriction à I de la fonction tangente soit une bijection de I sur $\mathbb{R}$.*

Puisque la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une application réciproque notée arctg (on lit arc tangente). arctg est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sur une calculatrice on utilise la touche $\boxed{\text{tg}^{-1}}$ ou $\boxed{\tan^{-1}}$ (dans ce cas tg sera exploitée par la touche $\boxed{\tan}$) ou les touches $\boxed{\text{inv}}$ et $\boxed{\tan}$; il faudra là encore être attentif au mode choisi car l'ensemble d'arrivée de arctg est $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ si on travaille en mode degré on obtient l'ensemble d'arrivée de la fonction $\text{arctg}_\circ$, qui est $]-90, 90[$.

On peut utiliser ces touches pour trouver une valeur approchée de :

1) x connaissant $\text{tg}_\circ\ x$ et un encadrement d'amplitude 180 de x. Exemple : $\text{tg}_\circ\ x = 48$ et $x \in]-90, 90[$, on a $x \simeq 88,80$ ce qui correspond à88°48′.

2) $\cos_\circ\ x$ ou $\sin_\circ\ x$ connaissant $\text{tg}_\circ\ x$ et un encadrement de x. Exemple : $\text{tg}_\circ\ x = -2$ et $x \in]0, 180[$, on a : $\cos_\circ\ [\text{arctg}_\circ\ (\text{tg}_\circ\ x)] \simeq 0,447$, mais comme $\text{tg}_\circ\ x < 0, x \in]90, 180[$, on a : $\cos_\circ\ x = -0,447$.

III. Formules usuelles de trigonométrie

Question 20 *Soient α un nombre réel, M le point de (C) associé à α et M' le point de (C) associé à $-\alpha$. Préciser comment sont situés les points M et M'. En déduire $\cos(-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$ et $\text{tg}(-\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\text{tg}\,\alpha$ respectivement.*

On retiendra que :

- les fonctions sinus et tangente sont impaires,
- la fonction cosinus est paire.

Question 21 *Soient M et M' deux points de (C) symétriques par rapport à la 1re bissectrice (droite d'équation $y = x$). Exprimer les coordonnées de M' en fonction de celles de M. Que peut-on dire des déterminations de la mesure de $\widehat{(OI, OM)}$ et $\widehat{(OI, OM')}$? En déduire, pour tout nombre réel α, l'écriture de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ en fonction des lignes trigonométriques de α : $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\text{tg}\,\alpha$.*

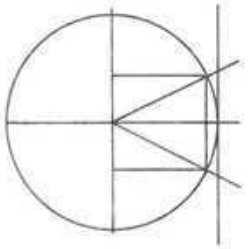
Question 22 *Soient M et M' deux points de (C) symétriques par rapport à (OJ). Que vérifient les déterminations de la mesure de $\widehat{(OI, OM)}$ et $\widehat{(OI, OM')}$? En déduire les lignes trigonométriques de $(\pi - \alpha)$ en fonction de celles de α.*

Question 23 *Exhiber la symétrie permettant de passer du point M associé à α au point M' associé à $(\pi + \alpha)$. En déduire les lignes trigonométriques de $(\pi + \alpha)$ en fonction de celles de α.*

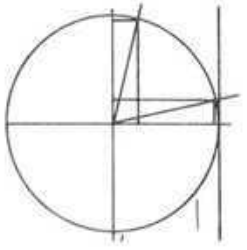
Question 24 *En utilisant l'égalité $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, et les questions 21 et 22, calculer les images de $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ par les fonctions cosinus, sinus et tangente.*

Dans les formules ci-dessous α est un nombre réel tel que les nombres écrits ci-dessous existent.

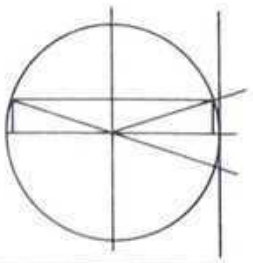
On saura retrouver ces formules :
soit par le calcul
soit en faisant un dessin



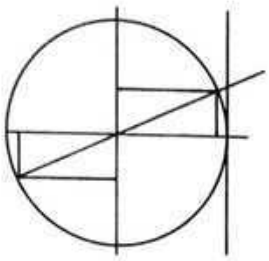
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$



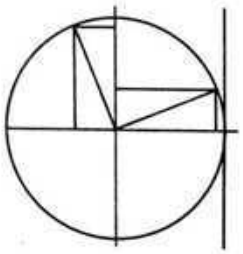
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$



$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Exercice 19 Exprimer en fonction de cos x, sin x ou tg x les nombres réels suivants :

1) $\sin(x - 5\pi)$
2) $\cos\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)$
3) $\cos(x + 7\pi)$
4) $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$
5) $\operatorname{tg}\left(-x - \frac{9\pi}{2}\right)$
6) $\operatorname{tg}\left(\frac{37\pi}{2} - x\right)$.

Généralisons ces formules, pour cela, considérons deux nombres réels α et β, et cherchons à exprimer cos $(\alpha - \beta)$ en fonction de cos α, sin α, cos β et sin β. Soient M et M' les points de (C) associés respectivement à α et β.

Question 25 *Donner les coordonnées de M et M' dans le repère (O, I, J) grâce à α et β.*
Soit γ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}})$. Vérifier que γ est congru à $\alpha - \beta$ modulo 2π.
Donner deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$ (grâce aux coordonnées, et grâce à γ).
En déduire la valeur de cos γ en fonction de cos α, sin α, cos β et sin β.

Question 26 *Dans la formule trouvée à la question 25 remplacer β par $-\beta$ pour donner cos $(\alpha + \beta)$ en fonction de cos α, sin α, cos β et sin β.*

Question 27 *Calculer, grâce aux résultats des questions 25 et 26, $\cos\left(\alpha + \left[\frac{\pi}{2} + \beta\right]\right)$ et $\cos\left(\alpha + \left[\frac{\pi}{2} - \beta\right]\right)$, en déduire sin $(\alpha + \beta)$ et sin $(\alpha - \beta)$ en fonction de cos α, sin α, cos β et sin β.*

Théorème

Quels que soient les nombres réels α et β, on a :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha.$$

Remarque

Ces formules permettent de retrouver celles donnant le cosinus et le sinus de $\pi + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

Question 28 *Soit a un nombre réel; en écrivant $2a = a + a$ et en utilisant les formules ci-dessus, calculer $\cos 2a$ et $\sin 2a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$. En déduire $\cos 2a$ en fonction de $\cos a$ seulement, de $\sin a$ seulement; en déduire $\cos^2 a$ puis $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$.*

Théorème

Quel que soit le nombre réel a, on a :

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$\boxed{\sin 2a = 2 \sin a \cos a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exercice 20 Soit x un nombre réel. Calculer
$\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ seulement
$\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ seulement.

Exercice 21 En remarquant que l'on a $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, calculer $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

De même calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 22 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x, suivante :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 1$$

(on fera intervenir $\cos 2x$).

Question 29 *Additionner membre à membre les deux égalités exprimant $\cos(\alpha - \beta)$ et $\cos(\alpha + \beta)$ en fonction de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ et $\sin\beta$.*
En déduire l'écriture du produit de deux cosinus en une somme. De même transformer en une somme les produits $\sin\alpha \sin\beta$ et $\sin\alpha \cos\beta$.

On a ainsi les résultats suivants (que l'on saura retrouver en cas de besoin).
Quels que soient les nombres réels α et β on a :

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Exercice 23 Soit x un nombre réel. Transformer en somme les produits $\cos 3x \cos 2x$, $\sin x \sin 3x$ et $\sin 2x \cos 3x$.
En déduire la résolution de :

$$x \in \mathbb{R} \quad , \quad 2 \sin 2x \cos 3x = \sin 5x.$$

Question 30 *Soient α et β deux nombres réels, $p = \alpha + \beta$ et $q = \alpha - \beta$.*
Calculer α et β en fonction de p et q.
En remplaçant dans les formules précédentes, α et β par leur valeur, trouver les formules de transformation de somme de cosinus et sinus en produit de tels termes.

Théorème

Soient p et q deux nombres réels, on a :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Exercice 24 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

1) $x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

2) $x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Exercice 25 Résoudre le système d'inconnue (x, y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$x - y = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \cos x - \cos y = -1.$$

Question 31 *En utilisant le fait que, pour tout nombre réel x, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, démontrer que, pour tout nombre réel x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π on a :*

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

De même calculer, pour x convenablement choisi $\sin^2 x$ en fonction de $tg\ x$.

Question 32 *Soit x un nombre réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Calculer $\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En déduire $\cos 2x$ en fonction de $tg\ x$. De même calculer $\sin 2x$ en fonction de $tg\ x$.*

Soit α un nombre réel tel que le nombre réel t, égal à $tg \frac{\alpha}{2}$, existe. Calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ en fonction de t. En déduire, lorsque $tg\ \alpha$ existe, $tg\ \alpha$ en fonction de t.

Théorème

Pour tout nombre réel x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on a :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}.$$

Pour tout nombre réel x tel que $\frac{x}{2}$ ne soit pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on a, en posant $t = \text{tg}\ \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Question 33 *Soient α et β deux nombres réels tels que α, β, $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ soient éléments de $\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. Calculer $tg\ (\alpha + \beta)$ et $tg\ (\alpha - \beta)$ en fonction de $tg\ \alpha$ et $tg\ \beta$.*
Le nombre réel a étant dans un certain ensemble à préciser, calculer $tg\ 2a$ en fonction de $tg\ a$.

Ainsi on a montré :

Soit D l'ensemble des nombres réels non congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Soient α et β deux éléments de D.

Si $\alpha + \beta$ est dans D, alors $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$.

Si $\alpha - \beta$ est dans D, alors $\text{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$.

Soit a élément de D tel que $2a$ soit aussi dans D, on a :

$$\text{tg}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}.$$

Soit x élément de D tel que $\dfrac{x}{2}$ soit aussi dans D, en posant $t = \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$ on a :

$$\text{tg}\,x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Exercice 26 Calculer $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{12}$ et $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 27 Résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{tg}\,2x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Remarque

Toutes les formules vues dans ce paragraphe sont aussi vérifiées par les fonctions $\cos_o$, $\sin_o$ et tg_o, en remplaçant éventuellement π par 180.

IV Équations trigonométriques de la forme : $x \in \mathbb{R}$, $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Question 34 *Vérifier que pour tout nombre réel x on a :*

$$3\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

En déduire la résolution de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 3\cos x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0.$$

Plus généralement, soient a, b et c trois nombres réels tels que a et b ne soient pas nuls simultanément. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(\mathcal{E}) \quad x \in \mathbb{R}, \qquad a\cos x + b\sin x + c = 0.$$

On pose : $X = \cos x$ et $Y = \sin x$.

Puisque, pour tout nombre réel x, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,
dire que x est solution de (&), c'est dire que le couple (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ est solution du système :

(S) $\qquad (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \qquad X^2 + Y^2 = 1 \quad \text{et} \quad aX + bY + c = 0.$

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Question 35 *Quel est l'ensemble E_1 des points du plan dont les coordonnées X et Y vérifient $X^2 + Y^2 = 1$?*
Quel est l'ensemble E_2 des points du plan dont les coordonnées X et Y vérifient $aX + bY + c = 0$?
Traduire par une inéquation avec la notion de distance une condition permettant de connaître le nombre de solutions du système (S). En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les nombres réels a, b et c pour que l'équation (&) ait au moins une solution.

Pour résoudre effectivement l'équation (&), on factorise l'expression $a \cos x + b \sin x$.
On note : A le nombre $a \cos x + b \sin x$
$\vec{u}$ le vecteur de coordonnées a et b dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$
$\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $\cos x$ et $\sin x$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.
On a, puisque $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé :

$$A = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

L'expression trigonométrique du produit scalaire, vue au chapitre précédent, permet d'écrire :

$$A = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

Question 36 *Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$. Vérifier que $\|\vec{u}\|$ est différent de 0. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u}_1$, égal à $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$.*

Ainsi les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}$ sont unitaires et on a :

$$\cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos (\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}})$$

On sait que x est une mesure de $(\widehat{\vec{i}, \vec{v}})$.
Soit y une mesure de $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$, c'est-à-dire de $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}_1})$.
On a :

$$(\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}_1, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, \vec{v}})$$
$$= (\widehat{\vec{i}, \vec{v}}) - (\widehat{\vec{i}, \vec{u}_1})$$

d'où :

$$\cos (\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}}) = \cos (x - y).$$

Ainsi on a : $A = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (x - y)$, où le nombre réel y est connu, modulo 2π, grâce aux égalités :

$$\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En conclusion :

Quels que soient les nombres réels a et b non nuls simultanément, il existe un nombre réel y tel que $\cos y = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2+b^2} \cos (x - y).$$

Question 37 *Factoriser, pour tout nombre réel x, l'expression $\cos x - \sqrt{3} \sin x$. En déduire la résolution de l'équation d'inconnue réelle x :*

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0.$$

En utilisant les notations ci-dessus on a :

$$(\mathcal{E}) \iff x \in \mathbb{R}, \qquad \cos (x - y) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

L'étude des équations de la forme :

$$X \in \mathbb{R}, \qquad \cos X = k$$

où k est un nombre réel donné, nous permet d'écrire :

1) Si $\left| -\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| > 1$, c'est-à-dire si $c^2 > a^2 + b^2$

alors $(\mathcal{E})$ n'a aucune solution.

2) Si $\left| -\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \leqslant 1$, c'est-à-dire si $c^2 \leqslant a^2 + b^2$

alors il existe un nombre réel α tel que $\cos \alpha = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et on a :

$$(\mathcal{E}) \iff x \in \mathbb{R} \quad , \quad \cos (x - y) = \cos \alpha$$

donc x est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $x - y$ est congru à α ou à $-\alpha$ modulo 2π. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est donc l'ensemble des nombres réels congrus à $\alpha + y$ ou à $-\alpha + y$ modulo 2π.

Remarque

Dans le cas où $a = 0$ (donc $b \neq 0$) on a :

$$(\mathcal{E}) \iff x \in \mathbb{R} \quad , \quad \sin x = -\frac{c}{b}.$$

Dans le cas où $b = 0$ (donc $a \neq 0$) on a :

$$(\mathcal{E}) \iff x \in \mathbb{R} \quad , \quad \cos x = -\frac{c}{a}.$$

Ces deux cas simples ont déjà été étudiés.

Exercice 28 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$

2) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x + 1 = 0$

3) $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1$.

Question 38 *Soit* (E) *l'équation d'inconnue réelle* x :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x - \sin x + 1 = 0.$$

Vérifier que les nombres réels congrus à π *modulo* 2π *ne sont pas solutions de* (E). *Considérons le nombre* x *dans* $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R};\ x \equiv \pi\ [2\pi]\}$ *alors* $\frac{x}{2}$ *n'est pas congru à* $\frac{\pi}{2}$ *modulo* π *donc* $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ *existe.*

En posant $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ *et en utilisant les formules donnant* $\cos x$ *et* $\sin x$ *en fonction de* t, *transformer l'équation* (E) *en une équation* (E′) *d'inconnue* t. *Résoudre* (E′). *En déduire l'ensemble solution de* (E).

Plus généralement, a, b et c étant trois nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad a \cos x + b \sin x + c = 0$$

admet les nombres réels congrus à π modulo 2π comme solutions si et seulement si $-a + c = 0$, c'est-à-dire $a = c$.

Considérons x non congru à π modulo 2π, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ existe; en posant $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ on a :

$$a \cos x + b \sin x + c = \frac{1}{1 + t^2} [a(1 - t^2) + b(2t) + c(1 + t^2)].$$

D'où : la résolution de (E) se ramène à celle de (E′) d'inconnue réelle t :

$$(E') \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (-a + c)t^2 + 2bt + a + c = 0.$$

• Dans le cas où $a \neq c$, cette équation est du second degré, son discriminant réduit est $b^2 - (-a^2 + c^2)$ donc :

si $c^2 > a^2 + b^2$ alors (E′) n'a pas de solution, (E) non plus
si $c^2 \leqslant a^2 + b^2$ alors (E′) a deux solutions t_1 et t_2, on en déduit les solutions de (E).

• Dans le cas où $a = c$, on a $c^2 \leqslant a^2 + b^2$; l'équation (E′) est équivalente à : $t \in \mathbb{R}$, $bt + a = 0$:

– si $b = 0$ alors (E′) n'a pas de solutions (car $a \neq 0$) et (E) n'a pour solutions que les nombres réels congrus à π modulo 2π
– si b est non nul alors (E) a une unique solution t_1 ; (E) a pour solutions les nombres réels congrus à π modulo 2π et les nombres réels congrus à $2 \operatorname{arctg} t_1$ modulo π.

Exercice 29 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x, en discutant selon les valeurs du nombre réel m.

1) $x \in \mathbb{R}$, $\sin x + \sqrt{3} \cos x = m$.

2) $x \in \mathbb{R}$, $(m - 3) \cos x - 2 \sin x = m - 4$.

Réponses aux questions

Q 1

On fait les dessins et on trouve, les mesures étant en degrés :

m_1	m_2	m	$m_1 + m_2$	égalité vérifiée
120	140	− 100	260	$m = m_1 + m_2 - 360$
− 100	− 130	130	− 230	$m = m_1 + m_2 + 360$
80	150	− 130	230	$m = m_1 + m_2 - 360$
70	50	120	120	$m = m_1 + m_2$
80	− 20	60	60	$m = m_1 + m_2$
20	− 130	− 110	− 110	$m = m_1 + m_2$

Q 2

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m	$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$	égalité vérifiée
160	120	150	170	180	60	780	$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - 2.360$
60	40	165	160	100	165	525	$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - 1.360$
− 120	60	170	− 80	45	75	75	$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + 0.360$
− 130	− 120	− 170	− 150	− 140	10	− 710	$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + 2.360$

Q 3

θ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des angles orientés car, quel que soit l'angle orienté $(\hat{x})$ il existe un unique point M de $(\mathcal{C})$ tel que $(\hat{x}) = \widehat{(OI, OM)}$, et on peut prendre alors pour antécédent de $(\hat{x})$ par exemple le nombre réel x égal à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ (pris dans le sens positif).

Q 4

$\frac{\pi}{2}$ est associé au point J. $\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{9\pi}{2}$ est aussi associé au point J, en effet, la longueur du cercle étant 2π, 4π correspond à 2 tours de corde autour du cercle dans le sens direct.
$8\pi = 4 \cdot 2\pi$ donc 8π est associé au point I (4 tours dans le sens direct) $-13\pi = -12\pi - \pi$ donc -13π est associé au point I' (6 tours dans le sens indirect puis encore un demi-tour).
$\frac{11\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2}$ donc $\frac{11\pi}{2}$ est associé au point J' $\left(2 \text{ tours puis } \frac{3}{4} \text{ de tour dans le sens direct}\right)$.
-4π est associé au point I (2 tours dans le sens indirect).
5π est associé au point I' (2 tours puis un demi-tour dans le sens direct).
$-\frac{\pi}{2}$ est associé au point J' (un quart de tour dans le sens indirect).

Q 5

On a $\theta(x) = \theta(x')$ si et seulement si x et x' sont associés au même point du cercle $(\mathcal{C})$, c'est-à-dire

si et seulement si la longueur de corde séparant les deux nombres réels x et x' est un certain nombre entier de fois la longueur du cercle $(\mathcal{C})$ (soit 2π) ou son opposé (si le sens est indirect). On a ainsi :

$\theta(x) = \theta(x')$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = x' + k \,.\, 2\pi$.

Q 6

Dire que a est une détermination de la mesure en degrés de $(\hat{\alpha})$ c'est dire qu'il existe une détermination x de la mesure en radians de $(\hat{\alpha})$ telle que : $a = \dfrac{180}{\pi} x$.

De même il existe une détermination y de la mesure en radians de $(\hat{\alpha})$ telle que :

$$b = \frac{180}{\pi} y.$$

Puisque x et y sont deux déterminations de la mesure de $(\hat{\alpha})$, il existe un entier relatif k tel que :

$$x = y + k2\pi$$

d'où : $\dfrac{180}{\pi} x = \dfrac{180}{\pi} y + \dfrac{180}{\pi} k2\pi$

c'est-à-dire : $a = b + k \,.\, 360.$

Ainsi a et b sont congrus modulo 360.
La mesure en degrés de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$ est donc l'ensemble des nombres réels congrus à a modulo 360 : c'est une classe d'équivalence pour la congruence modulo 360; cette classe admet un unique représentant dans $]-180, 180]$, c'est le nombre $\dfrac{180}{\pi}\alpha$ où α est la détermination principale de la mesure en radians de $(\hat{\alpha})$ $\left(\alpha \in]-\pi, \pi]\right.$ est équivalent à $\left.\dfrac{180}{\pi}\alpha \in]-180, 180]\right)$.

Q 7

MES $(\widehat{OI, OI}) = 0$ donc la mesure en degrés de $(\widehat{OI, OI})$ est

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = k \,.\, 360\}$$

et sa détermination principale 0.

MES $(\widehat{OI, OJ}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc la mesure en degrés de $(\widehat{OI, OJ})$ est

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = 90 + k \,.\, 360\}$$

et sa détermination principale est 90 car $\dfrac{180}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{2} = 90$. $(\widehat{OI, OI'}) = (\hat{\rho})$ et $\dfrac{180}{\pi} \,.\, \pi = 180$ donc la mesure en degrés de $(\widehat{OI, OI'})$ est

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = 180 + k \,.\, 360\}$$

et sa détermination principale est 180.

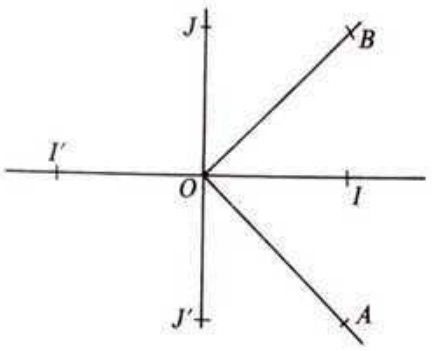
$$\text{MES } (\widehat{OI, OJ'}) = -\frac{\pi}{2}$$

et $\dfrac{180}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -90$

donc la mesure en degrés de $(\widehat{OI, OJ'})$ est $\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = -90 + k \,.\, 360\}$ et sa détermination principale -90.

$$\text{MES } (\widehat{OI, OA}) = -\frac{\pi}{4}$$

et $\dfrac{180}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -45$



donc la mesure en degrés de $(\widehat{OI, OA})$ est $\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = -45 + k \,.\, 360\}$ et sa détermination principale -45. De même la mesure en degrés de $(\widehat{OI, OB})$ est

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = 45 + k \,.\, 360\}$$

et sa détermination principale est 45.

Q 8

$$400 = 360 + 40,$$
$$-320 = -360 + 40,$$
$$760 = 2 \,.\, 360 + 40$$

donc 400, -320 et 760 sont d'autres déterminations de la mesure en degrés de $(\hat{\alpha})$.

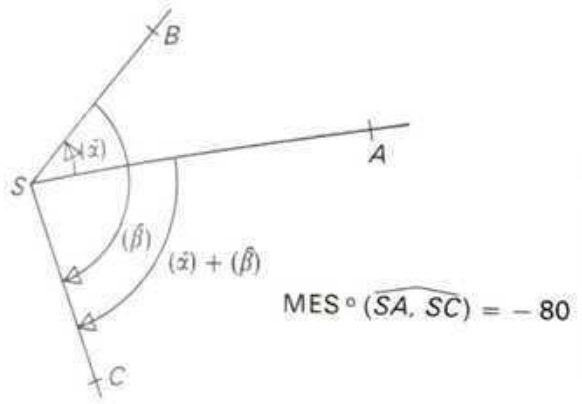
De même :

$$-480 = -360 - 120, \quad 240 = 360 - 120$$

et : $\quad -7320 = -20 \,.\, 360 - 120$

donc -480, 240 et -7320 sont d'autres déterminations de la mesure de $(\hat{\beta})$.

y \ x	40	400	-320	760
-120	-80	280	-440	640
-480	-440	-80	-800	280
240	280	640	-80	1 000
-7320	-7280	-6920	-7640	-6560



Chacune de ces sommes $x + y$ est congrue à la détermination principale -80 de la mesure de $(\vec{\alpha}) + (\vec{\beta})$ modulo 360; en effet :

$$\begin{aligned} 280 &= 360 - 80, \\ -440 &= -360 - 80, \\ 640 &= 2 \cdot 360 - 80, \\ -800 &= -2 \cdot 360 - 80, \\ 1\,000 &= 3 \cdot 360 - 80, \\ -7\,280 &= -20 \cdot 360 - 80, \\ -6\,920 &= -19 \cdot 360 - 80, \\ -7\,640 &= -21 \cdot 360 - 80, \\ -6\,560 &= -18 \cdot 360 - 80. \end{aligned}$$

Q 9

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$

Q 10

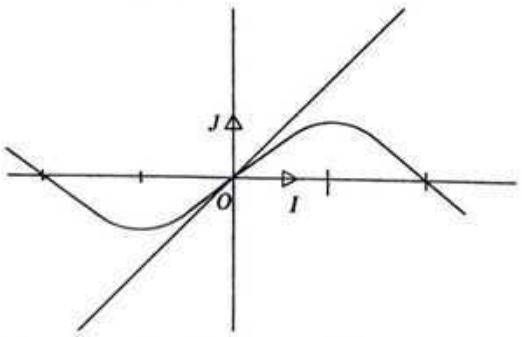
Pour cela on examine l'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = a$. Dans les deux cas on constate que si $|a| > 1$ (c'est-à-dire $a < -1$ ou $a > 1$) la droite ne coupe pas la courbe donc l'équation n'a pas de solution.
Si $|a| \leqslant 1$ (c'est-à-dire $-1 \leqslant a \leqslant 1$) la droite coupe la courbe en une infinité de points donc l'équation a une infinité de solution.
Plus précisément, dans le cas $|a| \leqslant 1$:

• pour (E_1), la courbe étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, notons α une solution, alors $-\alpha$ l'est aussi; la courbe étant invariante par les translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les nombres $\alpha + k2\pi$ et $\alpha + k2\pi$ sont aussi solutions. On trouve ainsi que l'ensemble des solutions de (E_1) est l'union des classes d'équivalences de α et de $-\alpha$ modulo 2π

• pour (E_2), notons β une solution, alors les autres solutions sont congrues à β modulo 2π, ou à $\pi - \beta$ modulo 2π (on constate que la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$).

Q 11

1) Graphiquement on constate que l'intersection de la courbe de la fonction sinus et de la droite d'équation $y = x$, est réduite au point O; donc l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x$ est $\{0\}$.



2) On constate aussi sur le dessin que dans le demi-plan $((OJ), I)$ fermé de frontière (OJ) et contenant I la partie de la droite est « au-dessus » de celle de la courbe, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sin x \leqslant x$$

mais dans le demi-plan ouvert de frontière (OJ) et ne contenant pas I, la partie de la droite est « au-dessous » de celle de la courbe (strictement) donc :

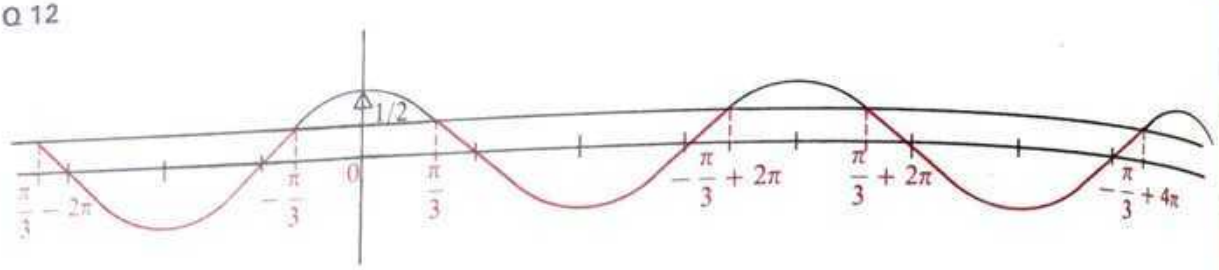
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sin x > x.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sin x \leqslant x$$

est $\mathbb{R}_+$.

Q 12

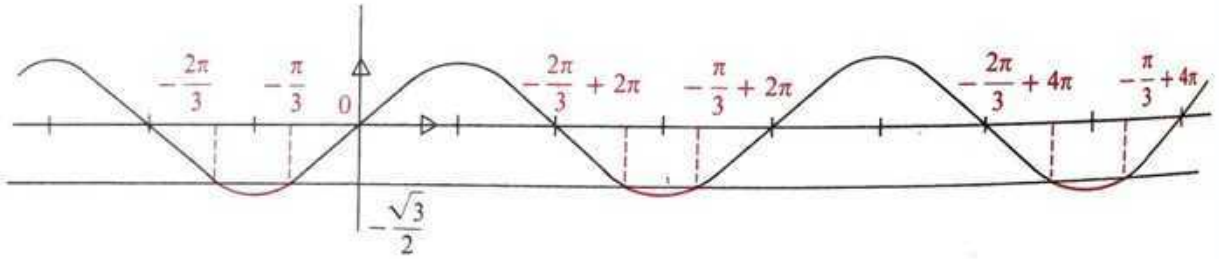


1) L'ensemble solution est la réunion des intervalles suivantes :

$$\ldots \cup \left[\frac{\pi}{3} - 2\pi,\ -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 4\pi\right] \cup \ldots$$

que l'on note :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi + k2\pi\right].$$



2) On trouve alors :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ -\frac{\pi}{3} + k2\pi\right].$$

Q 13

Vu la représentation graphique de la fonction cosinus, on peut prendre pour I l'un des intervalles suivants :

$\ldots\ [-2\pi, -\pi],\ [-\pi, 0],\ [0, \pi],\ [\pi, 2\pi],\ \ldots$

d'une manière générale un intervalle de la forme :

$$[k\pi,\ (k+1)\pi] \quad \text{où} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ceci correspond d'ailleurs, sur le cercle trigonométrique à considérer un des deux demi-cercles limités par les points I et I'.
Pour la fonction sinus, soit en examinant sa représentation graphique, soit en considérant un des deux demi-cercles limités par les points J et J', on constate que pour avoir une bijection sur $[-1, 1]$ il suffit de prendre la restriction de la fonction sinus à un des intervalles suivants :

$$\ldots\ \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right],\quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\quad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ \ldots$$

d'une manière générale :

$$\left[(2k-1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{où} \quad k\in\mathbb{Z}$$

($2k-1$ et $2k+1$ étant deux entiers impairs consécutifs).

Q 14

Soit $x\in\mathbb{R}$; on a :

$\text{tg}_0\ x$ existe si et seulement si $\cos_0 x \neq 0$.

Or, on a :

$\cos_0 x = 0$ si et seulement si x est congru à 90 modulo 180.

D'où : l'ensemble de définition de la fonction tg_0 est :

$$\mathbb{R} - \{x\in\mathbb{R};\ \exists k\in\mathbb{Z}\ \ x = 90 + k\cdot 180\}.$$

Remarque :

En grade on aurait :

$$\mathbb{R} - \{x\in\mathbb{R};\ \exists k\in\mathbb{Z}\ \ x = 100 + k\cdot 200\}.$$

Q 15

x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\|\|$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	0

Q 16

Si α est congru à 0 modulo 2π alors le point M est confondu avec I, le point T aussi et on a $\overline{IT} = 0$, comme tg 0 = 0 on a encore :

$$\text{tg } \alpha = \overline{IT}.$$

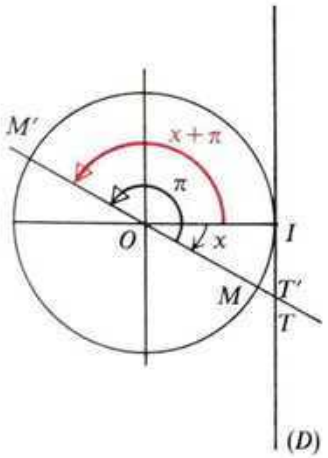
Q 17

Soient x un nombre réel, M et M' les points de $(\mathcal{C})$ associés respectivement à x et $x + \pi$; puisque π est la détermination principale de l'angle plat, les demi-droites $[OM)$ et $[OM')$ sont opposées; les points M et M' sont donc diamétralement opposés sur $(\mathcal{C})$; les points T et T' intersections de (D) et de (OM) et (OM') respectivement sont donc confondus. On a :

$$\overline{IT'} = \overline{IT}$$

c'est-à-dire :

$$\text{tg } (x + \pi) = \text{tg } x.$$



Q 18

En considérant la droite d'équation $y = a$, et la courbe représentative de la fonction tangente, on constate que, quel que soit a, la droite coupe la courbe en une infinité de points, ces points ayant des abscisses qui diffèrent d'un multiple de π (à cause de la périodicité de la fonction tangente). Ainsi si α est une solution de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{tg } x = a,$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation est la classe d'équivalence de α modulo π soit :

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \alpha + k\pi\}.$$

Q 19

En examinant la courbe représentative de la fonction tangente, on constate que tg est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, pour avoir une bijection il suffit de prendre sa restriction à un des intervalles :

$$\ldots \quad \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[, \quad \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \quad \ldots$$

c'est-à-dire un intervalle de la forme :

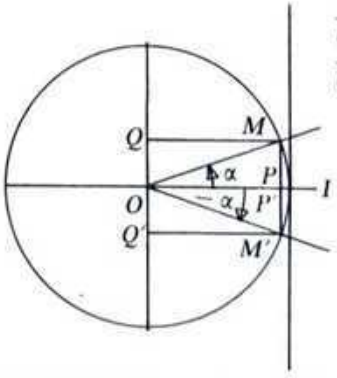
$$\left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On retrouve ce résultat sur le cercle trigonométrique : le point T décrit la droite (D) lorsque M parcourt un des deux arcs $\overset{\frown}{JJ'}$ c'est-à-dire lorsque x parcourt un intervalle de la forme ci-dessus.

Q 20

α est une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM)}$. $-\alpha$ est une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM')}$

on a : $\widehat{(OI, OM')} = -\widehat{(OI, OM)}$



$$\overline{OP'} = \overline{OP}$$
$$\overline{OQ'} = -\overline{OQ}$$

les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite (OI). Les coordonnées de M étant x et y, celles de M' sont donc x et $-y$ d'où, puisque $x = \cos \alpha$ et $y = \sin \alpha$, les résultats :

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

et, en faisant le quotient, si $\cos \alpha$ est non nul, $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha$.

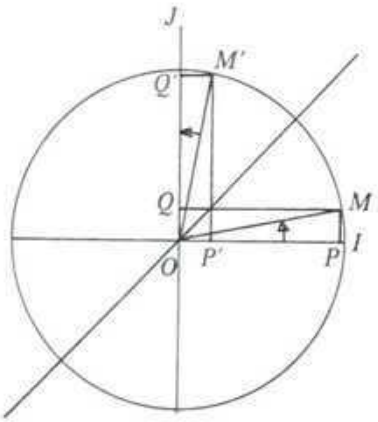
Q 21

Soient x et y les coordonnées de M, x' et y' celles de M'. On a $x' = y$ et $y' = x$.

Les angles $\widehat{(OI, OM)}$ et $\widehat{(OI, OM')}$ sont tels que :

$$\widehat{(OI, OM)} + \widehat{(OI, OM')} = (d)$$

car : $\widehat{(OM', OJ)} = \widehat{(OI, OM)}$.



$\overline{OP'} = \overline{OQ}$
$\overline{OQ'} = \overline{OP}$

Donc si α est une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM)}$ alors $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ est une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM')}$. On a

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha, \quad x' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

et $y' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ d'où les formules :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

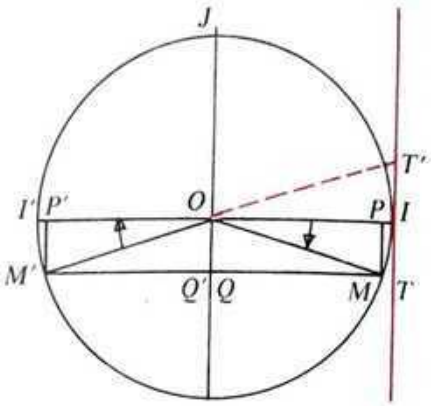
En faisant le quotient, si $\sin \alpha$ est non nul, on a $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, c'est-à-dire, si en plus $\cos \alpha$ est non nul, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$ (ou encore cotg α).

Q 22

Puisque M et M' sont symétriques par rapport à (OJ) on a :

$$\widehat{(OI, OM)} = \widehat{(OM', OI')}$$

d'où : $\widehat{(OI, OM)} + \widehat{(OI, OM')} = (\hat{p})$.



$\overline{OP'} = -\overline{OP}$
$\overline{OQ'} = \overline{OQ}$

Si α une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM)}$ alors $(\pi - \alpha)$ est une détermination de la mesure de $\widehat{(OI, OM')}$. Les abscisses des points M et M' sont opposées tandis que leurs ordonnées sont égales d'où : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

En faisant le quotient, si $\cos \alpha$ est non nul, on obtient $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$ (les points T et T' sont symétriques par rapport à I).

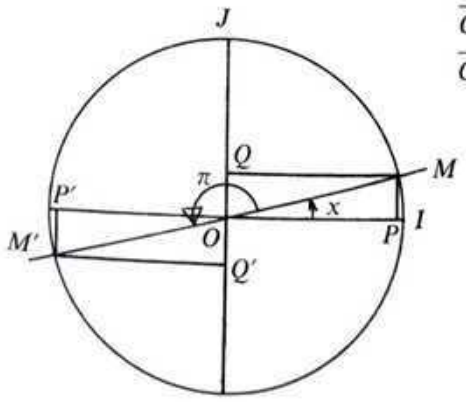
Q 23

On a $\widehat{(OI, OM')} = (\hat{p}) + \widehat{(OI, OM)}$ c'est-à-dire $\widehat{(OM, OM')} = (\hat{p})$. Les demi-droites $[OM)$ et $[OM')$ sont opposées, les points M et M' sont symétriques par rapport au point O. Leurs abscisses sont opposées, leurs ordonnées aussi, on a donc

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

et

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha.$$



$\overline{OP'} = -\overline{OP}$
$\overline{OQ'} = -\overline{OQ}$

Le quotient, lorsque $\cos \alpha$ est non nul, donne :

$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$ (formule déjà trouvée à la question 17).

Q 24

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

d'après la question 22

$$= -\sin\alpha$$

d'après la question 21

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

d'après la question 22

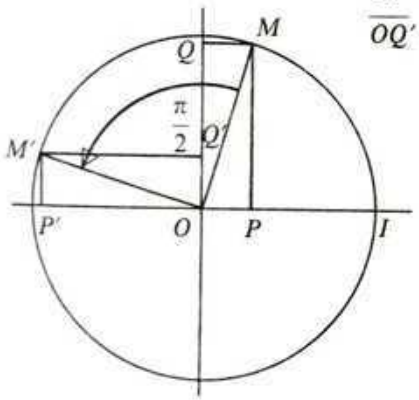
$$= \cos\alpha$$

d'après la question 21.

On en déduit, lorsque ces nombres existent, que :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

$\overline{OP'} = -\overline{OQ}$
$\overline{OQ'} = \overline{OP}$



On retrouve facilement les résultats sur les fonctions cosinus et sinus en examinant les coordonnées des points M et M' associés respectivement à α et $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

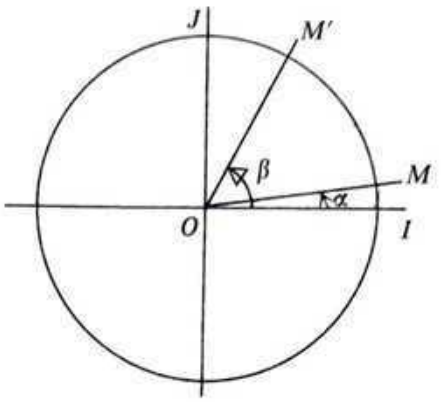
Q 25

Les coordonnées de M sont $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, celles de M' sont $\cos\beta$ et $\sin\beta$. On a :

$$\widehat{(OM', OM)} = \widehat{(OM', OI)} + \widehat{(OI, OM)}$$
$$= \widehat{(OI, OM)} - \widehat{(OI, OM')}$$

donc :

γ est congru à $\alpha-\beta$ modulo 2π.



$\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{OM'} = \cos\alpha\,.\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$

car $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{OM'} = OM\,.\,OM'\cos\widehat{(OM', OM)}$
$= 1\,.\,1\,.\cos\gamma$
$= \cos\gamma.$

Donc : $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

C'est-à-dire :

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Q 26

$\cos[\alpha-(-\beta)]$
$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$

c'est-à-dire, en utilisant :

$\cos(-\beta) = \cos\beta$ et $\sin(-\beta) = -\sin\beta,$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Q 27

$$\cos\left(\alpha+\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right)$$
$$= \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) - \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

c'est-à-dire :

$$-\sin(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

car : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\sin\beta$

et : $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \cos\beta$

c'est-à-dire :

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

De même :

$$\cos\left(\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)$$
$$= \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

et comme :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)=-\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$$

et : $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$$

on a :

$$-\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$$

c'est-à-dire :

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha.$$

Q 28

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a+a)\\ &= \cos a\cos a-\sin a\sin a\\ &= \cos^2 a-\sin^2 a\\ \sin 2a &= \sin a\cos a+\sin a\cos a\\ &= 2\sin a\cos a\end{aligned}$$

or $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

d'où : $\sin^2 a=1-\cos^2 a$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a-(1-\cos^2 a)\\ &= 2\cos^2 a-1.\end{aligned}$$

De même :

$$\cos^2 a=1-\sin^2 a$$

d'où : $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

De $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ on déduit :

$$\cos^2 a=\frac{\cos 2a+1}{2}$$

De $\cos 2a=1-2\sin^2 a$, on déduit :

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Q 29

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

d'où :

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

En faisant la différence membre à membre des deux égalités on obtient :

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$$

c'est-à-dire :

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

En additionnant les deux égalités donnant $\sin(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta)$ on obtient :

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

d'où :

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta).$$

Q 30

$$\begin{cases}p=\alpha+\beta\\ q=\alpha-\beta\end{cases}\iff\begin{cases}p+q=2\alpha\\ p-q=2\beta\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$$

$$\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos p+\cos q\right]$$

d'où :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

de même :

$$\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos q-\cos p\right]$$

d'où :

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

et :

$$\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin q+\sin p\right]$$

d'où :

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

On aura alors :

$$\begin{aligned}\sin p-\sin q &= \sin p+\sin(-q)\\ &= 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

grâce à la formule précédente appliquée à p et $-q$.

Q 31

$$\begin{aligned}1+\mathrm{tg}^2 x &= 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Soit x un nombre réel tel que $\sin x$ soit non nul (x non congru à 0 modulo π) :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 + 1.$$

Si de plus $\cos x$ est non nul (x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π) alors $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 1$, soit : $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, ou encore :

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}.$$

On remarque que, lorsque $\sin x = 0$, on a $\operatorname{tg} x = 0$ donc la formule $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ est vraie pour tout x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Q 32

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Or : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

d'où : $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$= 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x$$

$$= 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

car $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

donc : $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Posant $x = \frac{\alpha}{2}$, on applique les formules précédentes et on obtient :

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{2t}{1 + t^2}}{\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}}$$

$$= \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Q 33

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} \times \frac{1}{\dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$= (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \times \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

d'où :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

En remplaçant β par $-\beta$ dans cette formule et en utilisant le fait que tg est impaire, on obtient :

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Soit a un nombre réel tel que tg a et tg $2a$ existent (a non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, et non congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo $\frac{\pi}{2}$). En appliquant la formule donnant $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ au cas $\alpha = a$ et $\beta = a$, on obtient :

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

On retrouve, en posant $\alpha = 2a$, la formule trouvée à la question 32.

Q 34

Soit x un nombre réel :

$$2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left[\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \cos x\left(2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin x\left(2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x - 3 = 0$

$$\iff 2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6}$$

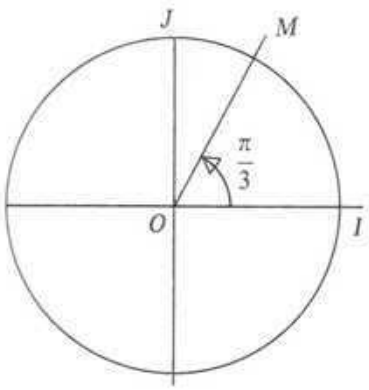
$$\iff \left(x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi] \right.$$
$$\left. \text{ou } x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi] \right)$$
$$\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ \exists k' \in \mathbb{Z} \ x = 0 + k'2\pi \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation donnée est l'union de :

$$\left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$$

et de :

$$\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k2\pi \}.$$



Cet ensemble solution est associée à l'ensemble des points I et M du dessin ci-dessus.

Q 35

E_1 est le cercle de centre O de rayon 1 (c'est-à-dire $(\mathcal{C})$).
Puisque a et b ne sont pas nuls simultanément, E_2 est une droite.
Le nombre de solutions de $(\mathcal{S})$ est le nombre de points d'intersection du cercle E_1 et de la droite E_2.
Soit $d(O, E_2)$ la distance du point O, centre du cercle E_1, à la droite E_2.

Si $d(O, E_2) < 1$ E_2 coupe E_1 en 2 points distincts
$(\mathcal{S})$ a deux solutions distinctes.

Si $d(O, E_2) = 1$ E_2 est tangente à E_1 en un point
$(\mathcal{S})$ a une solution.

Si $d(O, E_2) > 1$ E_2 ne coupe pas E_1
$(\mathcal{S})$ n'a pas de solution.

Or :

$$d(O, E_2) = \frac{|a \,.\, 0 + b \,.\, 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ainsi $(\mathcal{S})$ a une ou deux solutions, c'est-à-dire $(\mathcal{E})$ a au moins une solution si et seulement si :

$$d(O, E_2) \leqslant 1$$

c'est-à-dire : $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$
ou encore : $c^2 \leqslant a^2 + b^2$

Q 36

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 : \vec{v} \text{ est unitaire}$$

$(a, b) \neq (0, 0)$ est équivalent à $a^2 + b^2 \neq 0$
donc $\|\vec{u}\| \neq 0$

$\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ donc les coordonnées de $\vec{u}_1$ sont $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\vec{u}_1$ est unitaire car $\|\vec{u}_1\| = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\|$.

Q 37

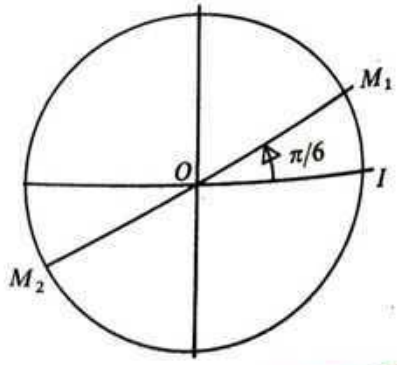
Dans l'expression $\cos x - \sqrt{3} \sin x$ on a :

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = -\sqrt{3},$$

d'où : $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

On écrit alors :

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\left[\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right] = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$



D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\iff x + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi].$$

L'ensemble solution est donc :

$$\left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{R} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$$

représenté par $\{M_1, M_2\}$ sur la figure ci-dessus.

Q 38

Si x est congru à π modulo 2π, alors on a :

$$\cos x = -1 \quad \text{et} \quad \sin x = 0$$

d'où $\quad 3 \cos x - \sin x + 1 = -2$

donc x n'est pas solution de $(\mathcal{E})$.
Soit x dans $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \quad x \equiv \pi \ [2\pi]\}$. On a :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

d'où :

$$3 \cos x - \sin x + 1 = \frac{3 - 3t^2 - 2t + 1 + t^2}{1 + t^2}$$

$(\mathcal{E})$ est donc équivalente à :

$$(\mathcal{E}') \ t \in \mathbb{R}, \quad -2t^2 - 2t + 4 = 0$$

$$(\mathcal{E}') \iff t \in \mathbb{R}, \quad -2(t-1)(t+2) = 0$$

$$\iff t = 1 \ \text{ ou } \ t = -2.$$

Soit S l'ensemble solution de $(\mathcal{E})$. On a :

$x \in S$ si et seulement si

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2$$

si et seulement si

$$\frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{4} \ [\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} \equiv -0{,}35\pi \ [\pi]$$

donc :

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k \,.\, 2\pi \right\}$$

$$\cup \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k' \in \mathbb{Z} \quad x = -0{,}7\pi + k' \,.\, 2\pi \right\}.$$

Résultats ou indications des exercices

3) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, -\frac{\pi}{2}$.

4) 75, -159, 176, -150, -90, -15.

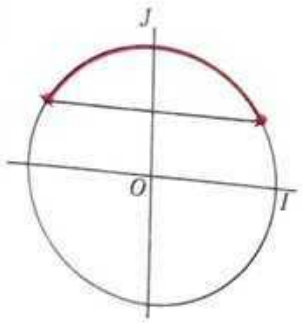
7) 57°, $\frac{\pi}{2}$ rd.

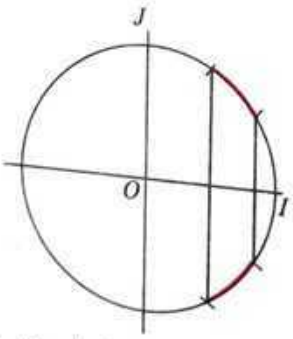
9) 1)
$S = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \right\}$
$\cup \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = \frac{2\pi}{3} + k \,.\, 2\pi \right\}$.

2) Les solutions sont congrues modulo 2π à l'un des six nombres réels suivants : $-\frac{7\pi}{18}, -\frac{5}{18}, -\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}$.

3) $S = \{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = k2\pi \}$
$\cup \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$
$\cup \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$.

11)





14) 1) $\mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = k\pi \}$.

2) $\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

3) $\mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = k\pi \}$.

4) $\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right\}$.

16) Les solutions de chacune des équations proposées sont respectivement congrues : à $\frac{\pi}{6}$ modulo π, à $\frac{\pi}{8}$ modulo $\frac{\pi}{2}$, à $-\frac{\pi}{6}$ modulo π, à $\frac{\pi}{4}$ ou à $-\frac{\pi}{4}$ modulo π.

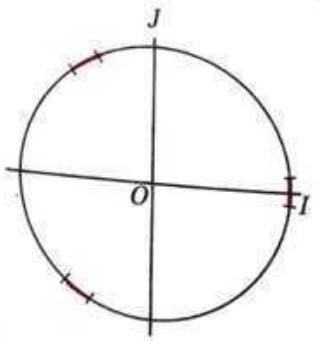
4) $S = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \ x \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \right.$
ou $x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$
$\left.$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \right\}$.

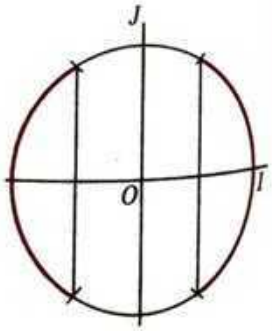
10) 1) $S = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \ x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \right.$
$\left.$ ou $\ x \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \right\}$.

2) $S = \{ x \in \mathbb{R};\ \exists \alpha \in E,\ \ x \equiv \alpha\ [2\pi] \}$ où
$E = \left\{ -\frac{\pi}{18}, -\frac{13\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{-5\pi}{18}, -\frac{17\pi}{18} \right\}$.

3) Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \frac{1}{2}$.





20) Soit x un nombre réel on a :
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$,
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

22) L'équation $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 2x = 1$ est équivalente à :

23) L'équation est équivalente à : $x \in \mathbb{R},\ \sin x = 0$.

24) Les solutions de chacune des équations proposées sont respectivement :

1) De la forme $\frac{\pi}{60} + 2k\frac{\pi}{5}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou congrues à $\frac{5\pi}{12}$ modulo 2π.

2) Congrues à $-\frac{\pi}{12}$ modulo π à $-\frac{5\pi}{12}$ modulo π.

25) Le système est équivalent à :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\quad x - y = \frac{\pi}{3}$$

et $$\exists k \in \mathbb{Z}\quad x + y = \pi + k4\pi.$$

27) $S = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z}\quad x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \right\}$.

28) Les solutions de chacune des équations proposées sont respectivement congrues :

- à π ou à $-\frac{\pi}{3}$ modulo 2π,
- à $\frac{5\pi}{18}, \frac{-7\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$ modulo 2π
- à 0 ou à $-\frac{\pi}{3}$ modulo π.

29) Pour la première équation on distinguera les cas :

$$m \notin [-2; 2],\quad m \in \{-2; 2\}$$

et $$m \in]-2; 2[.$$

Pour la seconde :

$$m < \frac{3}{2},\quad m \geqslant \frac{3}{2}.$$

Exercices

30. Démontrer que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2.$

En déduire, lorsque $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$, les valeurs de $\cos x + \sin x$, $\cos x$ et $\sin x$.

31. Dans quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ faut-il prendre le nombre x pour qu'il existe un nombre réel a dans chacun des cas suivants :

1) $\sin a = 2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}$?

2) $\cos a = \frac{x+1}{x}$?

3) $\cos a = 2x^2 - 5x + 4$?

32. Exprimer en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$ chacun des nombres réels suivants :

1) $\cos(x + 4\pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$.

2) $\sin(5\pi - x) + \cos\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) - \cos\left(x - \frac{23\pi}{2}\right)$.

3) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(3\pi - x) + \sin(x - 39\pi)$.

33. Étudier la parité des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \cos x + \sin^2 x + 3$.

2) $t \longmapsto \frac{\sin^2 t + 1}{2 \sin t}$.

3) $y \longmapsto \sin 3y - 2 \sin 4y$.

4) $u \longmapsto \frac{\sin u}{\cos^2 u} + 3 \sin 2u$.

34. Calculer $\sin x$ dans chacun des cas suivants :

1) $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos x = -\frac{3}{5}$.

2) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et $\cos x = \frac{2}{3}$.

35. Exprimer en fonction de $\operatorname{tg} x$ les nombres réels suivants :

1) $\operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{tg}(x - 3\pi) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$.

2) $\operatorname{tg}(51\pi + x) + \operatorname{tg}(x - 12\pi) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)$

36. Résoudre les inéquations ou systèmes suivants :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\cos \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $x \in]-\pi, \pi]$, $\frac{1 - 2\cos x}{2 \sin 2x - \sqrt{3}} \geqslant 0$.

3) $x \in \mathbb{R}$, $4 \sin^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{6} > 0$.

4) $x \in]-\pi, \pi]$, $\sin x - 1 < 0$ et $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{2}$.

5) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} < 0$.

37. Résoudre les inéquations ou systèmes suivants :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} 3x \geqslant 1$.

2) $x \in]-\pi, \pi]$, $(1 - \operatorname{tg} 3x)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2x) \geqslant 0$.

3) $x \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{3} \leqslant \operatorname{tg} x < 1$.

38. Résoudre les équations suivantes :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x - \cos 3x = 0$.

2) $x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$.

3) $x \in \mathbb{R}$, $\sin x + 2 \sin x + 3 \sin 3x = 0$.

4) $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 3x - \sin^2 x = 0$.

5) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1$.

6) $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

7) $x \in \mathbb{R}$, $\cos 4x + \sin^2 x - 2 = 0$.

8) $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

9) $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 2$.

39. Calculer $\operatorname{tg} x$ dans chacun des cas suivants :

1) $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $\cos x = -\frac{1}{3}$.

2) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin x = \frac{4}{5}$.

3) $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

40. Calculer $\sin_\circ x$ et $\cos_\circ x$ dans chacun des cas suivants, puis donner une valeur approchée de x à un degré près.

1) $x \in]90, 180]$ et $\operatorname{tg}_\circ x = -3$.

2) $x \in]-180, 0]$ et $\operatorname{tg}_\circ x = \frac{5}{3}$.

41. Calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, les expressions suivantes :

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4) $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$.

5) $\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$.

42. Soit x un nombre réel tel que $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2-\sqrt{3}$.

Calculer $\sin x$, $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$.
Déterminer x.

43. Soient x, y et z trois nombres réels de $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ tels que $x+y+z=\pi$. Démontrer les égalités suivantes :

1) $\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$.

2) $\cos x+\cos y+\cos z=1+4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$.

3) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z$.

44. Démontrer que, quels que soient les nombres réels α et β on a :

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

et

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

45. Factoriser les expressions suivantes où x est un nombre réel donné :

1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

2) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x$

3) $\cos 2x-\cos 4x+\cos 6x-\cos 8x$

4) $\cos^2 2x-\cos^2\frac{x}{2}$.

46. Résoudre les équations suivantes :

1) $x\in\mathbb{R}$, $(1+\sqrt{3})\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=1-\sqrt{3}$.

2) $u\in\mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos u+3\sin u+\sqrt{3}=0$.

3) $x\in]-\pi,\pi]$, $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$.

4) $t\in\mathbb{R}$, $\cos 2t-\sin 2t+1=0$.

5) $x\in\mathbb{R}$, $(1+\sqrt{2})\cos x+\sin x+1=0$.

6) $y\in\mathbb{R}$, $(2+\sqrt{3})\cos y-\sin y=1$.

7) $x\in]-\pi,\pi]$, $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$.

47. Discuter, suivant les valeurs du nombre réel m, du nombre des solutions de l'équation d'inconnue t :

$t\in]-\pi,\pi]$, $m\cos t-\sin t=1-m$.

3 Transformations du plan

I. TRANSLATIONS. HOMOTHÉTIES
II. SYMÉTRIES AXIALES
III. ROTATIONS
IV. SYNTHÈSE SUR LES ISOMÉTRIES
V. SIMILITUDES
VI. APPLICATION VECTORIELLE ASSOCIÉE Á UNE APPLICATION PONCTUELLE

Définitions

Une **application ponctuelle** du plan $\mathcal{P}$ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Une **transformation du plan** est une applications ponctuelle bijective du plan $\mathcal{P}$ sur lui-même.

I. Translations. Homothéties

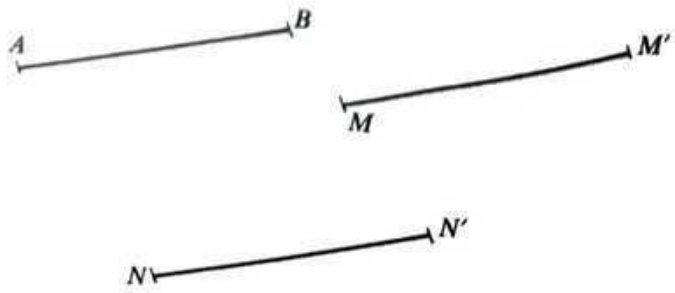
1) Propriétés géométriques de translations

On rappelle la définition d'une translation :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, la **translation** de vecteur $\vec{u}$ est l'application ponctuelle t de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

M' est appelé le **translaté** de M par t.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$
$$M' = t(M) : \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$N' = t(N) : \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$$



Question 1 *Vérifier que toute translation est une transformation du plan. Quelle est l'application réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$?*
Quelle est la translation de vecteur nul?

Question 2 *Démontrer que, quels que soient les points M et N du plan, et la translation t, les translatés respectifs M' et N' de M et N vérifient :*

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$

En déduire que toute translation est une ***isométrie*** *du plan c'est-à-dire une transformation plane qui conserve la distance. Démontrer que toute application ponctuelle f telle que :*

pour tout bipoint (M, N), on ait $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
où M' est l'image de M par f
et N' est l'image de N par f,

est une translation.

Question 3 *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Démontrer que la translation t de vecteur $\vec{u}$ n'admet aucun* ***point invariant*** *(c'est-à-dire un point M tel que $t(M)$ soit égal à M).*
Quel est l'ensemble des points invariants par la translation de vecteur nul?

Question 4 *Démontrer que la composée de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{v} + \vec{u}$.*
Démontrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations muni de la composition des applications est un groupe commutatif.

2) Expression analytique d'une application ponctuelle de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$

Question 5 *Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{S}$.*
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de couples de coordonnées respectifs $(2, 3)$ et $(5, -4)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$
t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$, et
t_2 la translation de vecteur $\vec{v}$.
Placer sur une figure les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, A_1 translaté de A par t_1, A_2 translaté de A_1 par t_2, B_1 translaté de B par t_1, B_2 translaté de B_1 par t_2.
Puis calculer les coordonnées de A_1, A_2, B_1 et B_2.
Soit M un point de $\mathcal{S}$ de coordonnées x et y dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note x_1 et y_1 les coordonnées du translaté M_1 de M par t_1.
Traduire $M_1 = t_1(M)$ par une égalité vectorielle, puis par un système de deux équations permettant de calculer x_1 et y_1 en fonction de x et y.
De même donner, en fonction de x_1 et y_1, les expressions des coordonnées x_2 et y_2 du translaté M_2 de M_1 par t_2. En déduire x_2 et y_2 en fonction de x et y.
En déduire une égalité vectorielle avec les points M et M_2. Retrouver la nature de $t_2 \circ t_1$ et la caractériser.

Définition

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. On appelle **expression analytique** de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la donnée des expressions de x' et y' en fonction de x et y où x et y sont les coordonnées d'un point M quelconque du plan, et x' et y' les coordonnées de l'image M' de M par f.

Remarques

Donner l'expression analytique de f revient à définir l'application g, appelée **représentation analytique** de f, application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui, au couple (x, y) des coordonnées d'un point M, associe le couple (x', y') des coordonnées de l'image M' de M par f : ainsi :

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\quad \forall M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\quad \left[M' = f(M) \iff (x'y') = g(x, y)\right].$$

On a vu qu'étant donné un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, l'application φ de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à un point associe ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est bijective. Ainsi on a :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \overset{\varphi}{} & & \overset{g}{} & & \overset{\varphi^{-1}}{} \\ \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & (x, y) & \longmapsto & (x', y') & \longmapsto & M' \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow \mathcal{P}' \\ & M & \longmapsto M' \end{array}$$

c'est-à-dire $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$.

On définit de cette manière une bijection qui, à g associe f, de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, sur l'ensemble des applications ponctuelles de $\mathcal{P}$.

Généralisons la question 5 :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ un élément de $\mathcal{V}$ de coordonnées a et b, t la translation de vecteur $\vec{u}$.

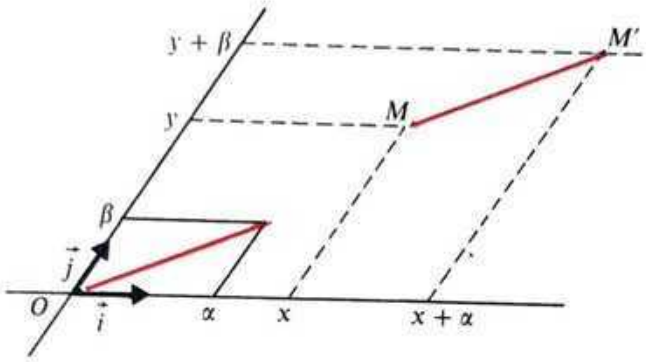
Soit M un point du plan de coordonnées x et y. On considère le translaté M' de M par t et on note x' et y' les coordonnées de M'. On a :

$$\begin{aligned} M' = t(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\iff (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} \\ &\iff \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, est :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Réciproquement : soit f une application ponctuelle d'expression analytique $\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$ où α et β sont deux nombres réels donnés



soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} M' = f(M) &\iff \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x' - x = \alpha \\ y' - y = \beta \end{cases} \\ &\iff (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \\ &\iff \overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \end{aligned}$$

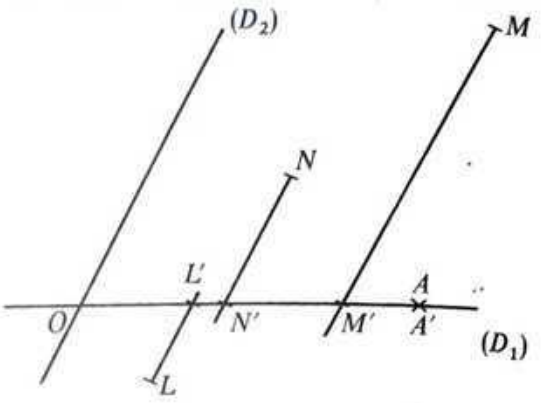
ainsi f est la translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.

Méthode pratique

Pour trouver l'expression analytique d'une application ponctuelle f de $\mathcal{P}$, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné, en général on se donne deux points quelconques du plan : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on traduit, par une ou plusieurs égalités vectorielles, l'égalité $f(M) = M'$, puis on traduit cette (ou ces) égalité(s) vectorielle(s) sur les coordonnées des points M et M', et on en déduit x' et y' en fonction de x et y. Voir l'exemple de la translation traité ci-dessus.

Exercice 1 On rappelle que, étant données deux droites sécantes (D_1) et (D_2), on appelle **projection** sur la droite (D_1) parallèlement à la droite (D_2) l'application p du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, qui, à tout point M du plan, associe le point M' d'intersection de la droite (D_1) et de la droite (appelée **projetante de** M) parallèle à (D_2) et passant par M. M' est appelé le **projeté** de M par p :

$M' = p(M)$
$N' = p(N)$
$L' = p(L)$
$A' = p(A)$



Soient $\vec{i}$ un vecteur directeur de (D_1)
$\vec{j}$ un vecteur directeur de (D_2)
O le point d'intersection de (D_1) et (D_2).

Donner, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'expression analytique respectivement de :

1) la projection p sur (D_1) parallèlement à (D_2)

2) la projection p' sur (D_2) parallèlement à (D_1).

Une projection est-elle une transformation du plan?

Exercice 2

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, (Δ_1) et (Δ_2) les droites d'équations respectives :

$$2x + 3y - 4 = 0 \quad \text{et} \quad x - y + 1 = 0$$

et A le point de coordonnées 2 et 1.
Placer ces éléments sur une figure.
Vérifier que les droites (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas parallèles. On considère la projection p sur (Δ_1) parallèlement à (Δ_2).
Donner une représentation paramétrique (on notera t le paramètre) de la projetante de A.
Trouver la valeur de t pour que le point correspondant de cette droite soit sur (Δ_1).
En déduire les coordonnées de l'image A' de A par p. Généraliser ce procédé pour trouver l'expression analytique de p.

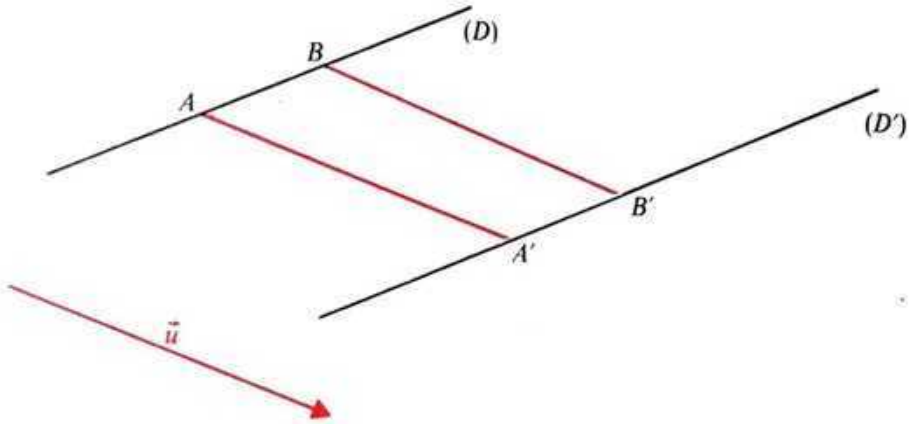
Question 6

Le plan étant rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (D) d'équation $2x + 3y - 4 = 0$ et la translation t de vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$.
Donner l'expression analytique de t. En déduire les coordonnées d'un point M en fonction de celles de son image M' par t.
Traduire le fait que le point M' appartient à l'image $t(D)$ de la droite (D) par la translation t.
Donner alors une équation de l'ensemble $t(D)$.

On a vu, en classe de seconde, que l'image par une translation t d'une droite (D) passant par le point A est la droite (D') parallèle à (D) et passant par l'image A' de A par t :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$$

De même, soient A et B deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par t; l'image du segment $[AB)$ (resp. de la demi-droite $[AB)$) par la translation t est le segment $[A'B']$ (resp. la demi-droite $[A'B')$). Ainsi pour trouver le translaté d'une droite, d'un segment ou d'une demi-droite il suffit de connaître le translaté de deux points distincts et d'appliquer un des résultats ci-dessus.



$(D') = t(D)$ où t est la translation de vecteur $\vec{u}$.

Méthode pratique

Pour trouver l'image d'une partie E de $\mathcal{P}$ par une transformation f du plan dont on connaît l'expression analytique dans un repère donné de $\mathcal{P}$, on cherche l'expression analytique de f^{-1} et on traduit le fait qu'un point M' du plan appartient à $f(E)$ par l'existence d'un point M (unique car f, étant une transformation, est bijective) de l'ensemble E tel que $M = f^{-1}(M')$. On traduit alors cette égalité et l'appartenance de M à E sur les coordonnées de M'.

Ainsi par exemple, pour la translation t de la question 6 et la parabole (P) du plan, ensemble des points de coordonnées x et y vérifiant :

$$y = 2x^2 - 3x + 4.$$

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux points du plan.

On a : $M = t^{-1}(M')$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y' = y' - 3 \end{cases}$.

Notons (P') l'image de (P) par t. On a :

$$M' \in (P') \iff \exists M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (P) \quad M = f^{-1}(M')$$

$$\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad y = 2x^2 - 3x + 4 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

$$\iff (y' - 3) = 2(x' - 2)^2 - 3(x' - 2) + 4$$

$$\iff y' = 2x'^2 - 11x' + 21.$$

(P') est donc la parabole d'équation $y = 2x^2 - 11x + 21$.

Exercice 3 Soient, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (D_1) la droite d'équation $-3x + 2y + 5 = 0$, t la translation de vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$ et (D_1') l'image de (D_1) par t.
Choisir un point A de (D_1); trouver les coordonnées de son translaté A';

vérifier que A' appartient aussi à (D_1). Donner la nature précise de (D'_1). Vérifier, en cherchant une équation de (D'_1) que l'on a : $t(D_1) = (D_1)$: on dit que la droite (D_1) est **globalement invariante** par la translation t.

Exercice 4 Trouver l'image par la translation t de vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$ de la partie (E) du plan formée des points de coordonnées x et y vérifiant le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 1 \leqslant x \leqslant 5 \quad \text{et} \quad y = x^2.$$

On verra en Analyse (chapitre 3) d'autres utilisations de l'expression analytique d'une translation.

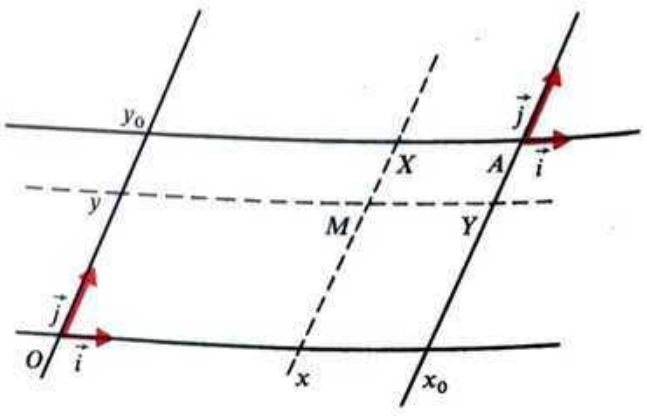
Question 7 *Soient t la translation de vecteur $3\vec{i} + 4\vec{j}$, et dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. On considère les points O', A' et B' translatés respectifs des points O, A et B, G le barycentre des points pondérés $(O, 1)$, $(A, 2)$ et $(B, -2)$, et G' le translaté de G. Placer tous ces points sur une figure et préciser leurs coordonnées.*
Vérifier que G' est le barycentre des points pondérés $(O', 1)$, $(A', 2)$ et $(B', -2)$.

Plus généralement : soient t une translation, A_1, A_2, ..., A_n n points du plan, α_1, α_2, ... α_n n nombres réels de somme non nulle. On note G le barycentre des points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ... (A_n, α_n).
On a $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ (1).
Soient, pour tout i de $\{1, 2, ... n\}$, A'_i l'image de A_i par t et G' l'image de G par t.
On sait que, quels que soient les points M et N du plan, leurs images respectives M' et N' par t vérifient $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.
En appliquant ce résultat aux points A_i et G, l'égalité (1) donne :

$$\alpha_1\overrightarrow{G'A'_1} + \alpha_2\overrightarrow{G'A'_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{G'A'_n} = \vec{0}$$

ce qui traduit le fait que G' est le barycentre des points pondérés (A'_1, α_1), (A'_2, α_2), ..., (A'_n, α_n).
On a ainsi démontré que le translaté du barycentre de n points pondérés est le barycentre des translatés de ces n points pondérés (affectés des mêmes coefficients respectivement).

Question 8 *Soient $\mathcal{R}$ le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{S}$, A le point de coordonnées x_0 et y_0 dans $\mathcal{R}$, et $\mathcal{R}'$ le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.*



Vérifier que les axes du repère $\mathcal{R}$ ont respectivement pour images par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, les axes du repère $\mathcal{R}'$. On dit que le changement du repère $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$, où seule l'origine a été changée, est un ***changement de repère par translation d'axes.***

Soit M un point du plan. On note x et y les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$, X et Y les coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$.

Démontrer que l'on a :

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Ces formules sont appelées ***formules de changement de repère par translation d'axes.***

On verra différentes utilisations de ces formules de changement de repère par translation d'axes, dans ce chapitre, mais aussi, en Analyse, en particulier dans le chapitre 3 pour la recherche de centres ou axes de symétries de la courbe représentative d'une fonction.

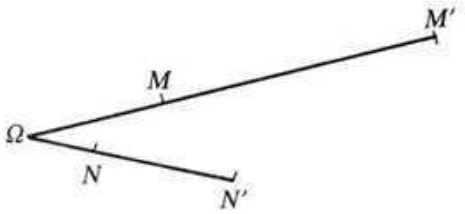
3) Propriétés géométriques des homothéties

On rappelle la définition d'une homothétie :

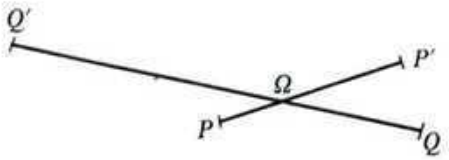
Soient Ω un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle **homothétie** de centre Ω et de rapport k, l'application h de $\mathcal{P}$ dans lui-même, qui, à tout point M, associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M};$$

M' est appelé **l'homothétique** de M par h.



$k = 3$
$M' = h(M)$
$N' = h(N)$



$k = -2$
$P' = h(P)$
$Q' = h(Q)$.

Remarque

Quel que soit le point M du plan, les points Ω (centre de l'homothétie) M et son homothétique M' sont alignés.

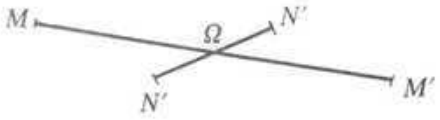
Ceci permet, à partir de deux couples distincts de points homothétiques et non tous alignés de placer le centre de l'homothétie (puis de trouver son rapport).

Cas particuliers :

1) $k = 1$: l'homothétie de centre Ω et de rapport 1 est l'application identique du plan :
$\mathrm{id}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.
$M \longmapsto M$

2) $k = -1$: l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre Ω c'est-à-dire l'application :

$$S_\Omega : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \quad \text{tel que } \Omega \text{ soit le milieu de } [MM']$$
$$M \longmapsto M'$$



$M' = S_\Omega(M)$
$N' = S_\Omega(N)$

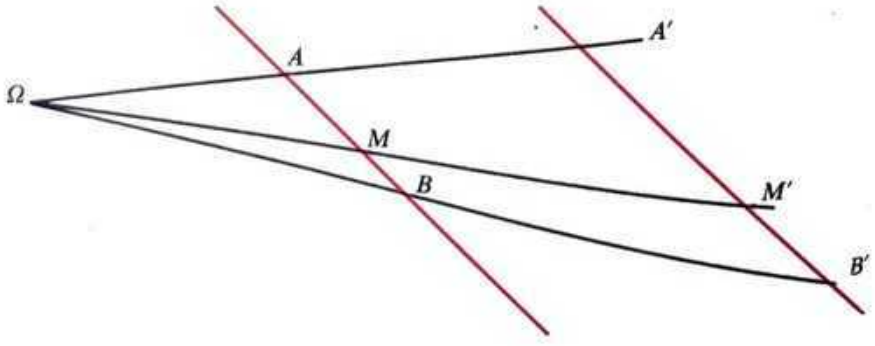
Question 9 *Démontrer que toute homothétie est une transformation du plan. Quelle est l'application réciproque de l'homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$)?*

Question 10 *Soit h une homothétie de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$).*
Démontrer que quels que soient les points M et N du plan d'homothétiques respectifs M' et N' on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

Puisque le carré de la distance de deux points M et N est $\overrightarrow{MN}^2$, on déduit de la question 10 les résultats :
toute homothétie de rapport k multiplie les distances, par $|k|$ et les aires par k^2.
En utilisant une caractérisation vectorielle d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment, et la question 10, on obtient les résultats :

- l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle;
- l'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite (d'origine homothétique et de supports parallèles);



• l'image d'un segment par une homothétie est un segment (d'extrémités homothétiques, de supports parallèles).

Soient h une homothétie de centre Ω, A et B deux points distincts :

$$\left.\begin{array}{l} h(A) = A' \\ h(B) = B' \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{l} h((AB)) = (A'B') \\ h([AB)) = [A'B') \\ h([AB]) = [A'B'] \end{array}$$

Ainsi, pour placer l'homothétique d'un point M de la droite (AB) il suffit de tracer la droite (ΩM), le point M' homothétique de M est alors le point d'intersection de (ΩM) et de la droite $(A'B')$ image de (AB).

En utilisant l'égalité vectorielle définissant le barycentre de n points, et la question 10, on obtient le résultat : l'homothétique du barycentre de n points pondérés est le barycentre de leurs homothétiques affectés respectivement des mêmes coefficients.

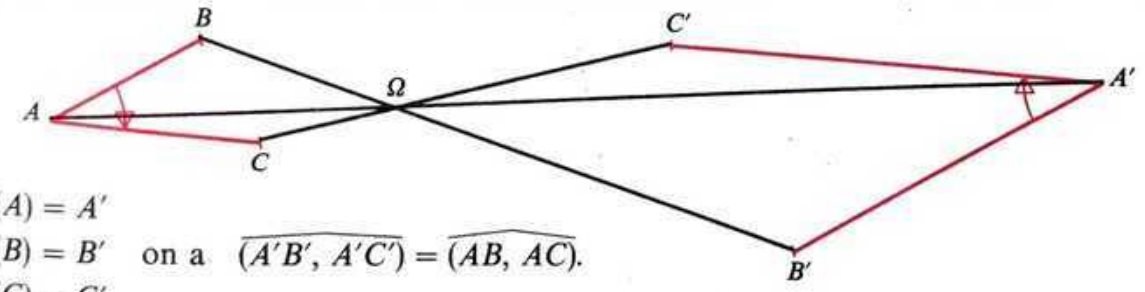
En utilisant le fait que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le nombre réel non nul k on a :

$$\widehat{(k\vec{u}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$

(voir exercice 47 du chapitre 1)
et la question 10, on obtient le résultat :

Théorème

Toute homothétie conserve les angles orientés.

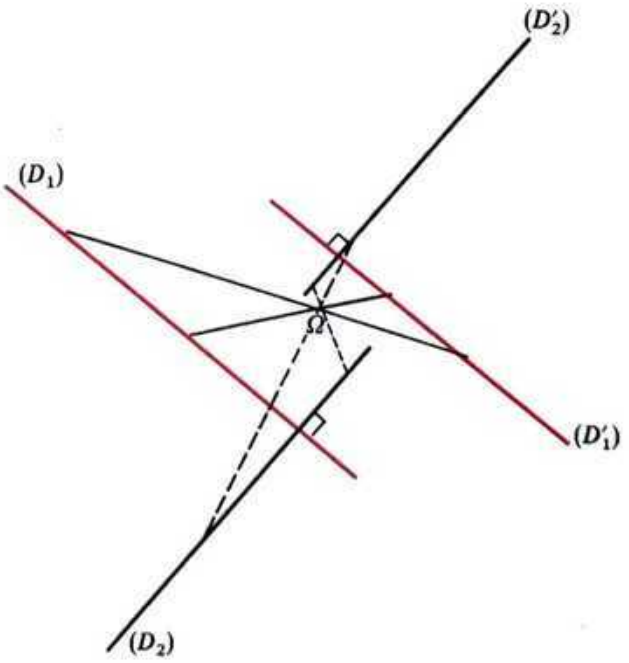


$h(A) = A'$
$h(B) = B'$ on a $\widehat{(A'B', A'C')} = \widehat{(AB, AC)}$.
$h(C) = C'$

En particulier toute homothétie conserve l'orthogonalité :

$(D_1) \perp (D_2)$
$(D'_1) = h(D_1)$
$(D'_2) = h(D_2)$

on a $(D'_2) \perp (D'_2)$.



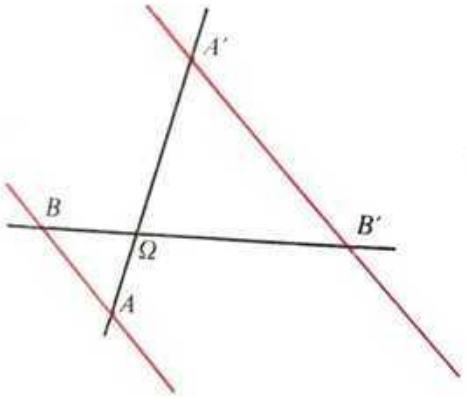
Question 11 *Soient Ω un point du plan $\mathcal{P}$, k un nombre réel non nul et h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.*
Démontrer que, si k est différent de 1, alors h a un et un seul point invariant : son centre Ω.
Quel est l'ensemble des points invariants lorsque h est égal à 1?

Question 12 *Soit f une application ponctuelle telle qu'il existe un nombre réel k distinct de 0 et de 1 vérifiant : quels que soient les points M et N d'images respectives par f, M' et N' on a :*

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

Démontrer que f est une homothétie de rapport k.

On considère quatre points A, B, A' et B' distincts deux à deux tels que les droites (AB) et $(A'B')$ soient parallèles et que les droites (AA') et (BB') ne soient pas parallèles. Il existe une unique homothétie h telle que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$: cette homothétie a pour centre Ω intersection des droites (AA') et (BB')

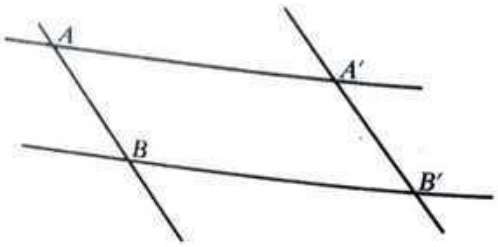


et pour rapport k, unique nombre réel non nul tel que :

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}.$$

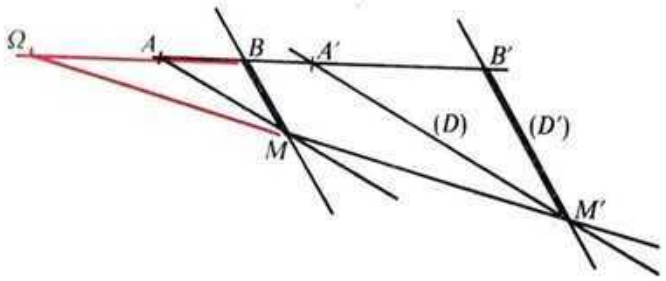
Remarquons que :

1) dans le cas où les droites (AB) et $(A'B')$ sont disjointes, dire que les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles, c'est dire que le nombre réel k ci-dessus est différent de 1. En effet si (AA') et (BB') sont parallèles, alors $AA'B'B$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, donc $k = 1$. Et si $k = 1$ alors les droites (AA') et (BB') sont parallèles. Dans ce cas, il existe une unique translation t telle que $t(A) = A'$ et $t(B) = B'$: t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.



2) Dans le cas où les droites (AB) et $(A'B')$ sont confondues.
Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ alors il existe une homothétie unique h telle que :

$$h(A) = A' \quad \text{et} \quad h(B) = B'.$$



On considère un point M du plan non situé sur la droite (AB). Son image M' par h est le point d'intersection des images par h des droites (MA) et (MB), ces images sont respectivement les droites (D) et (D') avec (D) parallèle à (MA) passant par A' et (D') parallèle à (MB) et passant par B'.
Le centre Ω de l'homothétie h est alors le point d'intersection des droites (AB) et (MM'); on détermine ensuite facilement le rapport k de h (qui est différent de 1).
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors on retrouve la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Théorème

Soient A, B, A' et B' quatre points distincts deux à deux tels que : les droites (AB) et $(A'B')$ soient parallèles et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Il existe une unique homothétie h telle que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$.

4) Expression analytique d'une homothétie.

Question 13 *Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et A le point de couple de coordonnées $(1, 2)$. On considère les homothéties h_1 et h_2 de centre A et de rapports respectifs 3 et -2.*
Soient M un point du plan de couple de coordonnées (x, y), M_1 l'image de M par h_1 et M' l'image de M_1 par h_2. Calculer les coordonnées x_1 et y_1 de M_1 en fonction de x et y.
Vérifier par le calcul que h_1 est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$ et donner la représentation analytique de son application réciproque.
Calculer les coordonnées x' et y' de M', en fonction de x_1 et y_1, puis en fonction de x et y.
On a ainsi trouvé l'expression analytique de $h_2 \circ h_1$. A partir de celle-ci, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM'}$, et vérifier que l'on a $\overrightarrow{AM'} = -6\overrightarrow{AM}$. Caractériser la transformation $h_2 \circ h_1$.

Plus généralement : soient Ω le point de coordonnées x_0 et y_0 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, k un nombre réel non nul et h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Soient M et M' deux points du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y'). On a :

$$M' = h(M) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\iff \begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est l'expression analytique de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (formules qu'on se gardera bien de retenir mais que l'on saura retrouver).

Exercice 5

Soit f l'application ponctuelle d'expression analytique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3 \\ y' = 2y + 4 \end{cases}$$

Démontrer que f admet un unique point invariant A dont on précisera les coordonnées.
Soit M un point quelconque du plan, M' l'image de M par f, calculer $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.
Caractériser f.

Exercice 6

Soit f l'application ponctuelle de représentation analytique :

$$g : (x, y) \longmapsto (-3x + 5, -3y + 8)$$

dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Placer sur une figure les points $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et leurs images A' et B' par f.
Vérifier que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Quelle est la nature de f? Préciser ses éléments caractéristiques.

5) Composée de deux homothéties

Question 14 *Reprendre les données de la question 13.*
En notant M_2 l'image de M par h_2 et M'' l'image de M_2 par h_1, trouver l'expression analytique de $h_1 \circ h_2$. Quel est la nature de $h_1 \circ h_2$?
A-t-on $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$?

Plus généralement : soient h_1 et h_2 deux homothéties de même centre Ω et de rapports respectifs k_1 et k_2.
Soient M un point quelconque du plan, M_1 son image par h_1 et M' l'image de M_1 par h_2.
On a :

$$\overrightarrow{\Omega M_1} = k_1\overrightarrow{\Omega M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k_2\overrightarrow{\Omega M_1}$$

d'où :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k_2 k_1 \overrightarrow{\Omega M}.$$

Ainsi, si M' est l'image de M par $h_2 \circ h_1$ alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k_2 k_1 \overrightarrow{\Omega M}$. Donc $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre Ω de rapport $k_2 k_1$. De même, on démontre, en notant M_2 l'image de M par h_2 et M'' l'image de M_2 par h_1, que l'on a $\overrightarrow{\Omega M''} = k_2 k_1 \overrightarrow{\Omega M}$.
Donc, $h_1 \circ h_2$ est aussi l'homothétie de centre Ω de rapport $k_2 k_1$ et on a : $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.

On a donc le résultat :

la composée de deux homothéties de même centre Ω est l'homothétie de centre Ω et dont le rapport est le produit des deux rapports; de plus, deux homothéties de même centre commutent. Si le produit des rapports est 1, la composée est $\mathrm{id}_{\mathscr{P}}$.

Question 15 *Le plan étant rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient h_1 l'homothétie de centre $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ de rapport 3, h_3 l'homothétie de centre O de rapport 2.*

Placer sur une figure les points O, A, $B\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et les images respectives O', A', B' et C' de ces points par $h_3 \circ h_1$.
A partir de la figure obtenue, donner la nature probable de l'application ponctuelle $h_3 \circ h_1$.
Donner les expressions analytiques de h_1, h_3 puis $h_3 \circ h_1$.
Soient M et N deux points quelconques du plan d'images respectives :

$$M' \quad et \quad N' \quad par \quad h_1$$
$$M'' \quad et \quad N'' \quad par \quad h_3 \circ h_1.$$

Calculer $\overrightarrow{M''N''}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$. En déduire que $h_3 \circ h_1$ est une homothétie dont on précisera le rapport.
Trouver graphiquement son centre Ω.
Calculer $\overrightarrow{OM''}$ en fonction de $\overrightarrow{OM'}$
$\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$
puis $\overrightarrow{OM''}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$.
Trouver alors $\overrightarrow{O\Omega}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ en écrivant que Ω est invariant par $h_3 \circ h_1$. Donner les coordonnées de Ω.

Plus généralement : soient h_1 l'homothétie de centre A_1 de rapport k_1 et h_2 l'homothétie de centre A_2 (distinct de A_1) de rapport k_2. Soient M et N deux points du plan, M_1 et N_1 leurs homothétiques par h_1, M' et N' les homothétiques de M_1 et N_1 par h_2; on a :

$$M' = h_2 \circ h_1(M) \quad \text{et} \quad N' = h_2 \circ h_1(N).$$

Puisque : $\overrightarrow{M_1N_1} = k_1 \overrightarrow{MN}$

et : $\overrightarrow{M'N'} = k_2 \overrightarrow{M_1N_1}$

on a : $\overrightarrow{M'N'} = k_1 k_2 \overrightarrow{MN}$

k_1 et k_2 étant non nuls, le nombre réel $k_1 k_2$ est aussi non nul.

1er cas : $k_1 k_2 = 1$

Puisque $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ quels que soient les points M et N, $h_2 \circ h_1$ est une translation.

Par ailleurs $h_1(A_1) = A_1$, considérons $A' = h_2(A_1)$, on a :

$$A' = h_2 \circ h_1(A_1)$$

$h_2 \circ h_1$ est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A'}$.

2e cas : $k_1k_2 \neq 1$

Puisque, quels que soient les points M et N on a $\overrightarrow{M'N'} = k_1k_2\overrightarrow{MN}$, avec k_1k_2 distinct de 0 et 1, $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport k_1k_2, son centre Ω étant l'unique point invariant par $h_2 \circ h_1$.
Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} M' = h_2(M_1) &\iff \overrightarrow{A_2M'} = k_2\overrightarrow{A_2M_1} \\ M_1 = h_1(M) &\iff \overrightarrow{A_1M_1} = k_1\overrightarrow{A_1M} \\ &\iff \overrightarrow{A_2M_1} = \overrightarrow{A_2A_1} + k_1\overrightarrow{A_1M} \end{aligned}$$

d'où :

$$M' = h_2 \circ h_1(M) \iff \overrightarrow{A_2M'} = k_2(\overrightarrow{A_2A_1} + k_1\overrightarrow{A_1M}).$$

Appliquant ce résultat au point Ω pour lequel on a :

$$\Omega = h_2 \circ h_1(\Omega),$$

on obtient :

$$\overrightarrow{A_2\Omega} = k_2(\overrightarrow{A_2A_1} + k_1\overrightarrow{A_1\Omega})$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{A_2\Omega} = k_2(\overrightarrow{A_2\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_1}) + k_2k_1\overrightarrow{A_1\Omega}$$

ou encore :

$$(k_2 - 1)\overrightarrow{A_2\Omega} + k_2(k_1 - 1)\overrightarrow{A_1\Omega} = \vec{0}$$

cette dernière égalité signifie que Ω est le barycentre des points pondérés $(A_2, k_2 - 1)$ et $(A_1, k_2(k_1 - 1))$, en effet la somme des coefficients est $-1 + k_2k_1$, elle est non nulle. Ainsi Ω est situé sur la droite (A_1A_2).
On a ainsi montré le résultat :

la composée de deux homothéties de centres distincts est :

- une translation, si le produit des rapports des deux homothéties est 1
- une homothétie, si le produit des rapports est différent de 1, son rapport est le produit des deux rapports et son centre est aligné avec les deux centres des homothéties données.

Puisque une homothétie de rapport 1 est $id_{\mathcal{P}}$ et aussi la translation de vecteur nul, on peut résumer les deux résultats sur la composée de deux homothéties de même centre ou de centres distincts en :

Théorème

La composée de deux homothéties est :

- une translation lorsque le produit des rapports est 1
- une homothétie lorsque le produit des rapports est différent de 1.

6 Groupe des homothéties-translations

On a vu que :

- la composée de deux translations est une translation
- la composée de deux homothéties est une translation ou une homothétie.

On cherche maintenant quelle est la composée d'une homothétie et d'une translation.

Question 16 *Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, t la translation de vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$ et h l'homothétie de centre $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de rapport 3.*
Trouver l'expression analytique de t, de h puis de $t \circ h$.
Vérifier que $t \circ h$ admet un seul point invariant Ω dont on précisera les coordonnées.
Trouver une égalité vectorielle vérifiée par tout point M de $\mathcal{P}$ et son image par $t \circ h$, pour donner la nature de $t \circ h$.
Quelle est l'image de A par $t \circ h$? par $h \circ t$?
Donner l'expression analytique de $h \circ t$ et sa nature en précisant les éléments géométriques qui interviennent.

Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties du plan $\mathcal{P}$
$\mathcal{T}$ l'ensemble des translations du plan $\mathcal{P}$
$\mathcal{G}$ la réunion des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$.

On a vu qu'étant donnée une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, on a :

- f est élément de $\mathcal{T}$ si et seulement si quels que soient les points M et N du plan, d'images respectives M' et N' par f on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

c'est-à-dire :

$$f \in \mathcal{T} \iff \forall (M, N) \in \mathcal{P}^2 \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$$

- f est élément de $\mathcal{H}$ si et seulement si il existe un nombre réel non nul et différent de 1 tel que :

quels que soient les points M et N d'images respectives M' et N' par f on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

c'est-à-dire :

$$f \in \mathcal{H} \iff \exists k \in \mathbb{R}^* - \{1\} \quad \forall (M, N) \in \mathcal{P}^2 \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}.$$

On a ainsi le résultat :

Une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est élément de $\mathcal{G}$ si et seulement si il existe un nombre réel non nul k tel que, quels que soient les points M et N du plan on a :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}.$$

Ainsi, soient f et g deux éléments de $\mathcal{G}$:

il existe deux nombres réels non nuls k_1 et k_2 tels que, quels que soient les points M et N du plan on a :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = k_1\overrightarrow{MN}, \qquad \overrightarrow{g(M)g(N)} = k_2\overrightarrow{MN}.$$

D'où, quels que soient les points M et N du plan on a :

$$\overrightarrow{g \circ f(M)g \circ f(N)} = k_1 k_2 \overrightarrow{MN}.$$

Donc $g \circ f$ est un élément de $\mathfrak{G}$.
On a ainsi montré que :

La composée de deux éléments de $\mathfrak{G}$ est un élément de $\mathfrak{G}$.
L'application identique de $\mathcal{T}$ est le seul élément de $\mathcal{H} \cap \mathcal{T}$; il appartient à $\mathfrak{G}$, c'est l'élément neutre pour la composition des applications ponctuelles.
Tout élément de $\mathfrak{G}$ est une transformation ponctuelle et son application réciproque est dans $\mathfrak{G}$ (la réciproque d'une translation est une translation, celle d'une homothétie est une homothétie).
Par ailleurs la composition des applications est une loi associative. On a ainsi montré le résultat :

Théorème

L'ensemble $\mathfrak{G}$ muni de la composition des applications est un groupe, non commutatif, appelé le groupe des homothéties-translations.

Étant donnés quatre points A, B, A' et B' distincts deux à deux tels que les droites (AB) et $(A'B')$ soient parallèles, il existe un élément f de $\mathfrak{G}$ et un seul tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Exercice 7 Soient h une homothétie et t une translation. Vérifier que $h \circ t$ est une transformation ponctuelle et donner son application réciproque.

Exercice 8 Soient O, A et B trois points non alignés, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et h l'homothétie de centre O et de rapport k. Déterminer l'ensemble des points invariants par $h \circ t$ lorsque k décrit $\mathbb{R}^*$.

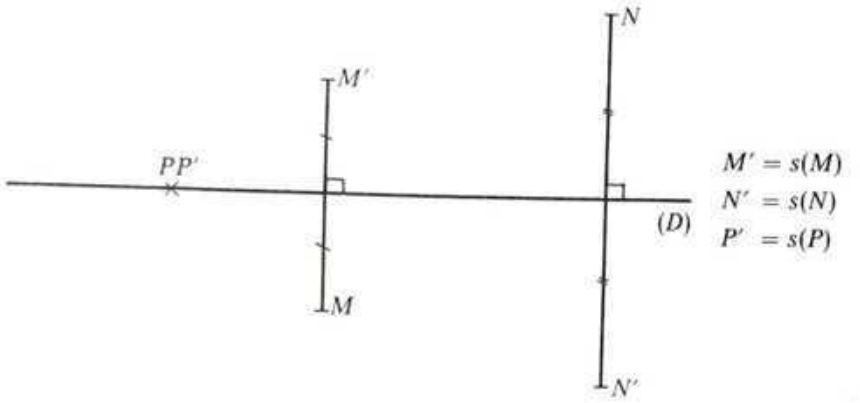
II. Symétries axiales

1 Propriétés géométriques des symétries

On rappelle la définition d'une symétrie orthogonale :

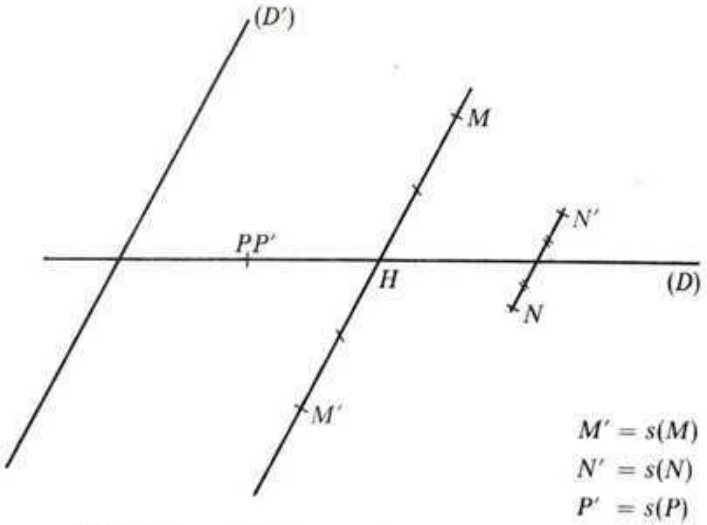
Soit (D) une droite du plan, on appelle **symétrie orthogonale** d'axe (D) ou **réflexion** d'axe (D) l'application s du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

- si M appartient à (D), alors $M' = M$
- si M n'appartient pas à (D) alors (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.



Plus généralement :

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles, on appelle **symétrie axiale** par rapport à (D) parallèlement à (D') l'application ponctuelle s de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M non situé sur (D) associe le point M' de la parallèle à (D') passant par M tel que le milieu de $[MM']$ appartienne à (D), et à tout M de (D) associe M lui-même. La droite (D') est appelée, improprement, la **direction** de la symétrie axiale s. La droite (D) est appelée l'**axe** de s. Le point M' image de M par s est appelé le **symétrique** de M par s. On a $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ où H est le projeté de M sur (D) parallèlement à (D').



De cette définition on déduit immédiatement :

- Une symétrie orthogonale est une symétrie axiale dont l'axe et la direction sont perpendiculaires.
- Toute symétrie axiale s est involutive c'est-à-dire $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.
- On en déduit que toute symétrie axiale est une transformation du plan et son application réciproque est elle-même.

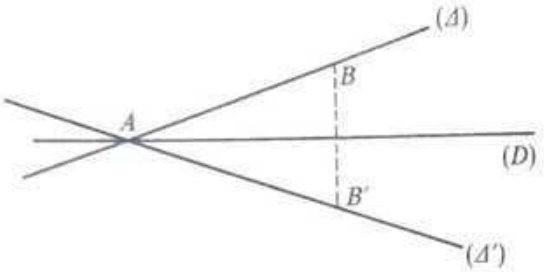
Question 17 *Démontrer que l'ensemble des points invariants par une symétrie axiale est son axe.*

On rappelle les propriétés des symétries *orthogonales* :

- Toute symétrie orthogonale est une isométrie.
- L'image d'une droite par une symétrie orthogonale est une droite.

Soient $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D) et (Δ) une droite du plan. Étudions les positions relatives de (D), de (Δ) et de son image (Δ') par $S_{(D)}$.

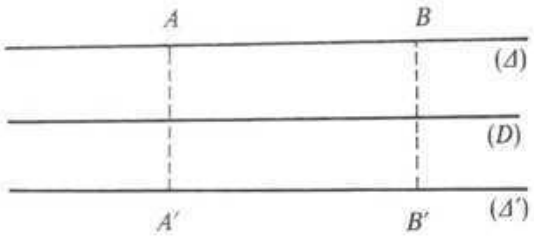
1er cas : (Δ) et (D) sont sécantes.



$\{A\} = (\Delta) \cap (D)$, $B \in (\Delta)$
$S_{(D)}(A) = A$ $S_D(B) = B'$
$S_{(D)}(\Delta) = (\Delta')$

(D), (Δ) et (Δ') sont concourantes.

2e cas : (Δ) et (D) sont parallèles.



$S_{(D)}(\Delta) = (\Delta')$

(Δ') est parallèle à (Δ).

Ainsi une droite et son image par une symétrie orthogonale sont :

- soit parallèles à l'axe
- soit sécantes en un point de l'axe.

• Toute symétrie orthogonale conserve le parallélisme des droites et l'orthogonalité des droites.

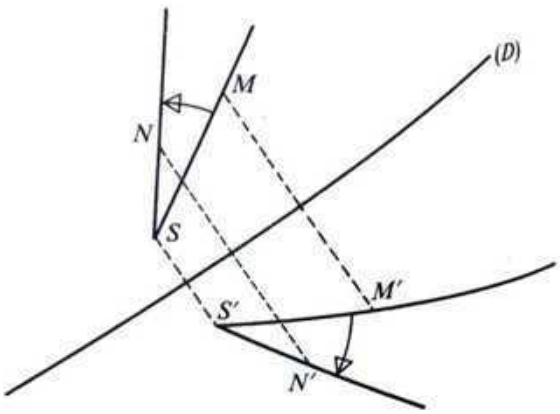
• Un couple de demi-droites de même origine et son image par une symétrie orthogonale sont des représentants de deux angles orientés opposés. On dira que :

toute symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.

$\overset{\frown}{S_{(D)}}$

M	M'
S	S'
N	N'

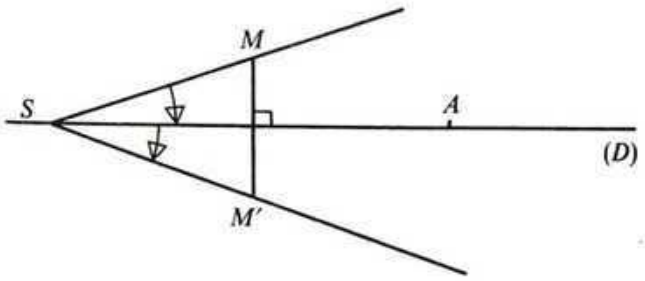
$\widehat{(S'M', S'N')} = -\widehat{(SM, SN)}$.



Cas particulier :

Soient $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D), S et A deux points distincts de (D), et M un point du plan n'appartenant pas à (D).

$S_{(D)}$	
S	S
A	A
M	M'



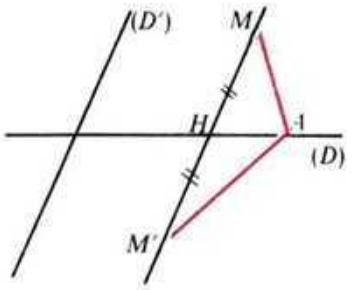
On a : $\widehat{(SA, SM')} = -\widehat{(SA, SM)}$

c'est-à-dire : $\widehat{(SM, SM')} = 2\widehat{(SM, SA)}$

(D) est la médiatrice de $[MM']$ c'est-à-dire la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{MSM'}$.
Une question se pose maintenant :

une symétrie axiale est-elle une isométrie?

Soient (D) et (D') deux droites sécantes et f la symétrie axiale par rapport à (D) parallèlement à (D'). Soient A un point de (D), M un point n'appartenant pas à (D), d'image M' par f et de projeté H sur (D) parallèlement à (D').
On a : $f(A) = A$ et H est le milieu de $[MM']$. Dans le triangle AMM', (AH) est la médiane issue de A.



Si f est une isométrie alors $AM = AM'$, le triangle AMM' est alors isocèle de sommet A. D'où la médiane issue de A est aussi médiatrice. Ainsi (MM') est perpendiculaire à (D). Donc f est une symétrie orthogonale.

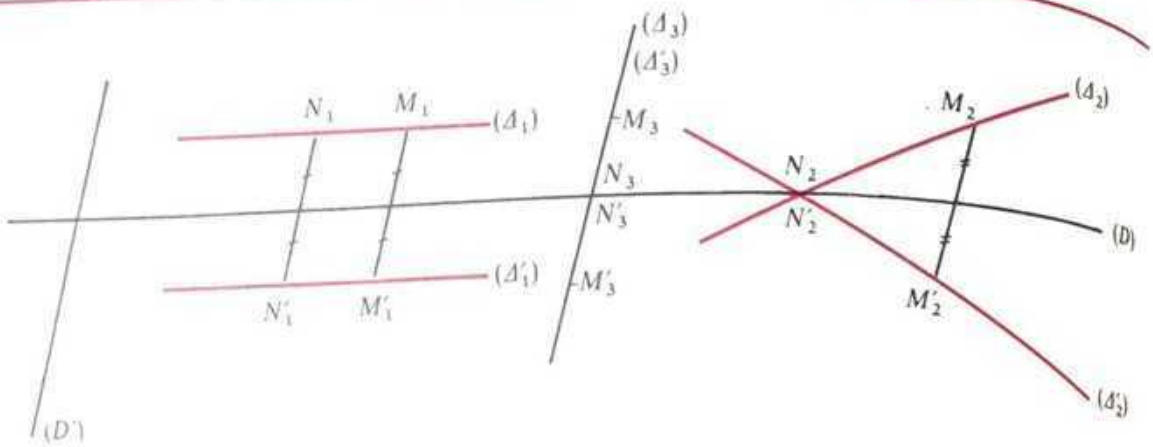
Théorème

Les seules symétries axiales qui sont des isométries sont orthogonales.

Remarque

Une symétrie axiale non orthogonale ne conserve donc pas les distances.

- Elle transforme une droite (Δ) en une droite (Δ') avec :
  - (Δ') parallèle à (Δ) si (Δ) est parallèle à l'axe de la symétrie ou à sa direction
  - (Δ') sécante à (Δ) en un point de l'axe si (Δ) est sécante à l'axe

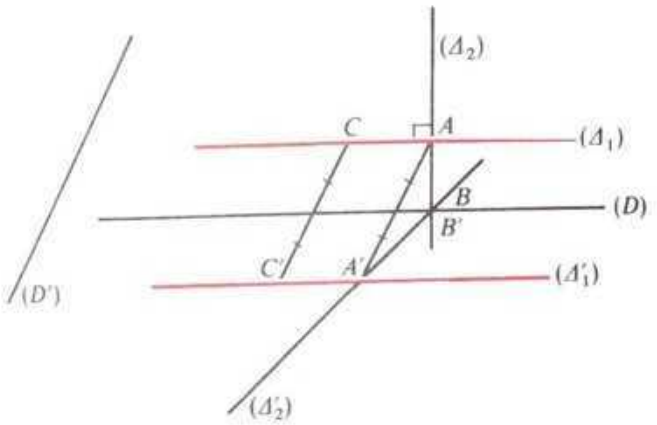


Elle ne conserve pas le parallélisme.

Ces résultats peuvent se démontrer par l'analytique (voir exercice n° 56).

- Une symétrie axiale non orthogonale ne conserve pas l'orthogonalité :

(Δ_1) est perpendiculaire à (Δ_2)
(Δ'_1) n'est pas perpendiculaire à (Δ'_2)



(donc elle ne conserve pas les angles orientés).

2 Expressions analytiques de symétries

Question 18 *Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, (D) la droite d'équation $2x + 3y - 4 = 0$, A et B les points de couples de coordonnées respectifs $(4, 3)$ et $(-3, -1)$, $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D), A' et B' les images respectives de A et B par $S_{(D)}$.*
Placer ces éléments sur une figure.
On note α et β les coordonnées de A', et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D).
Traduire :

1) les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux
2) le milieu de $[AA']$ appartient à (D).

Calculer α et β.
Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (D).

Calculer les coordonnées de H en écrivant que le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est normal à (D) et que H appartient à (D).

Calculer alors les coordonnées de B′ en utilisant l'égalité : $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BH}$.

Question 19

Avec les données de la question 18, soient M un point de coordonnées x et y, et M′ son symétrique par $S_{(D)}$, de coordonnées x′ et y′.

Calculer, par une des deux méthodes expliquées à la question 18, x′ et y′ en fonction de x et y.

Utiliser cette expression analytique de $S_{(D)}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour donner l'image par $S_{(D)}$ de la droite (Δ) d'équation $x + y = 1$ (on donnera une équation de cette image, et on la tracera).

Exercice 9

Trouver les expressions analytiques dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la symétrie orthogonale d'axe (D) dans chacun des cas suivants :

1) (D) a pour équation $y = x$.
(Comment est appelée cette droite? Où, en analyse, utilise-t-on cette symétrie?)

2) (D) a pour équation $y = 0$.
(Quelle est la droite (D)? A quel propos utilise-t-on cette symétrie en analyse?)

3) (D) a pour équation $x = 0$.
(Donner la nature exacte de (D). Où intervient cette symétrie en analyse?)

4) (D) a pour équation $y = -x$.
(Comment appelle-t-on cette droite?)

5) (D) a pour équation $x = a$ où a est un nombre réel fixé.
(Quelle est la position de (D)? Comment traduire sur une fonction f que sa représentation graphique est globalement invariante par cette symétrie?)

Exercice 10

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et f l'application ponctuelle d'expression analytique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{5}(4x + 3y - 9) \\ y' = \frac{1}{5}(4y - 3x + 3). \end{cases}$$

Chercher l'ensemble (I) des points invariants par f.

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par f. Démontrer que :

1) le milieu de $[MM']$ est un élément de (I)

2) le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à un vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.

En déduire que f est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Soit (C) le cercle de centre $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et de rayon 2.

Donner une équation de (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Donner une équation de l'image de (C) par f.
Tracer le cercle (C) et son image.

Question 20

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, (D) la droite d'équation $2x + 3y - 4 = 0$ et (D') la droite d'équation $y = x - 1$ dans ce repère.
Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles.
Soit S la symétrie axiale d'axe (D) parallèlement à (D').

Sur une figure, tracer les droites (D) et (D'), placer le point $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et son symétrique A' par S.
Trouver une représentation paramétrique de la droite (Δ) parallèle à (D') et passant par A. Calculer les coordonnées du projeté H_0 de A sur la droite (D) parallèlement à la droite (D') en écrivant que H_0 est élément de (Δ) et de (D).
Donner alors les coordonnées de A' en écrivant que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH_0}$.
Utiliser ce procédé pour trouver l'expression analytique de S dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 11

Soient $\mathcal{R}$ le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, (D) la droite passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{u}$, égal à $2\vec{i} + \vec{j}$, (D') la droite passant par $B\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{v}$, égal à $\vec{i} + 3\vec{j}$.
Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$ et trouver les coordonnées du point C intersection des droites (D) et (D'). Soit $\mathcal{R}'$ le repère $(C, \vec{u}, \vec{v})$.
Donner dans le repère $\mathcal{R}'$ l'expression analytique de la symétrie axiale S d'axe (D) parallèlement à (D').
Soit M un point du plan, donner l'expression de ses coordonnées x et y dans $\mathcal{R}$ en fonction de ses coordonnées X et Y dans $\mathcal{R}'$.
Trouver alors l'expression analytique de S dans le repère $\mathcal{R}$.

Exercice 12

1) Soient (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$3x - 4y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Donner l'expression analytique de la symétrie axiale s d'axe (D_1) et de direction (D_2) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit h l'homothétie de centre $C\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et de rapport 5.
Donner l'expression analytique de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; en déduire celle de $h \circ s$.
Quel est l'ensemble des points invariants par $h \circ s$?
$h \circ s$ est-elle une homothétie?

2) Soit s' la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$.
Donner l'expression analytique de $h \circ s'$.
Vérifier que, quels que soient les points M et N d'images respectives M' et N' par $h \circ s'$, on a $M'N' = 5MN$.
Quel est l'ensemble des points invariants par $h \circ s'$?
$h \circ s'$ est-elle une homothétie?

Exercice 13 Soit g l'application ponctuelle définie par son expression analytique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

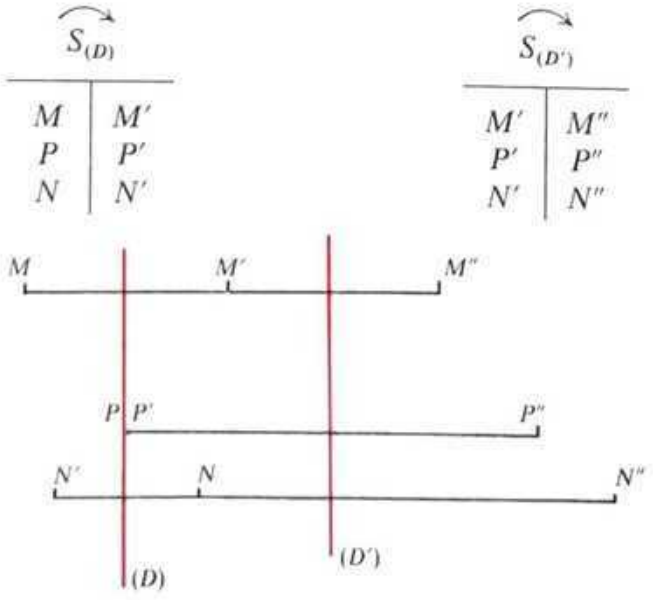
$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(x + 4y - 4) \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - y + 4). \end{cases}$$

Placer quelques points de $\mathscr{P}$ et leurs images sur une figure pour avoir une idée de la nature de g.
Quelle est l'application ponctuelle $g \circ g$?
Chercher l'ensemble (I) des points invariants par g.
Soit M un point du plan d'image M' par g.
Vérifier que le milieu de $[MM']$ est un élément de (I).
Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$, que l'on précisera, tel que, quel que soit M, $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à $\vec{u}$.
Caractériser la transformation g.

3 Composition de symétries orthogonales

Soient (D) et (D') deux droites du plan, $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D'). On étudie $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

1er cas : (D) est parallèle à (D')



Question 21 *Prouver que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.*
A-t-on $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(D')}$?
Préciser la nature de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ lorsque les droites (D′) et (D) sont confondues.

Exercice 14 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, et $\vec{v}$ le vecteur $2\vec{i} - 3\vec{j}$.
Donner l'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{v}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (Δ) la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{v}$. Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale s d'axe (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
En déduire celles de son application réciproque s^{-1}, puis de l'application s' telle que $s' = s^{-1} \circ t$.
Démontrer que s' est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe (Δ').
Vérifier que l'on a ainsi décomposé t en deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

Question 22 *Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. Trouver deux droites (D_1) et (D_2) telles que la translation de vecteur $\vec{v}$ soit égale à la composée $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$, où $S_{(D_2)}$ (resp. $S_{(D_1)}$) est la symétrie orthogonale d'axe (D_2) (resp. (D_1)).*

2e cas : (D) et (D′) sont sécantes

Question 23 *Dans le cas où (D) et (D′) sont perpendiculaires, démontrer que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ et $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ sont égales et que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la symétrie centrale S_0 de centre O point d'intersection des droites (D) et (D′).*
Soit A un point fixé du plan, trouver deux droites (D_1) et (D_2) telles que la symétrie centrale de centre A soit la composée des deux symétries orthogonales d'axe (D_1) et (D_2).

Question 24 *Soit O le point d'intersection des droites (D) et (D′).*
Soient M, N et P trois points du plan.
Placer sur une figure :

les points M_1, N_1, P_1 définis par :

	$\overset{\frown}{S_{(D)}}$
M	M_1
N	N_1
P	P_1

les points M', N', P' définis par :

	$\overset{\frown}{S_{(D')}}$
M_1	M'
N_1	N'
P_1	P'

Comparer les angles orientés $(\widehat{OM, OM'})$, $(\widehat{ON, ON'})$ et $(\widehat{OP, OP'})$.
Comparer les distances OM et OM′, ON et ON′, OP et OP′.

Quel est l'ensemble des points invariants par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$?
Est-ce que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une isométrie?
Est-ce que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ conserve l'orientation?
A-t-on $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(D')}$?

III. Rotations

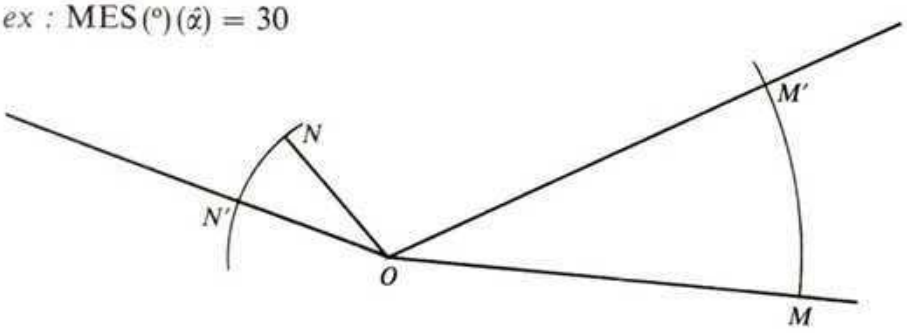
Désormais on utilisera l'abus de langage qui consiste, pour désigner l'angle orienté $(\hat{\alpha})$, à parler de l'angle α où $\hat{\alpha}$ est une détermination de la mesure de l'angle $(\hat{\alpha})$.

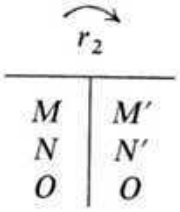
1 Propriétés géométriques des rotations

On rappelle la définition d'une rotation.
Étant donnés un point O du plan et un angle orienté $(\hat{\alpha})$ on appelle **rotation de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$** l'application r de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M associe le point M' tel que :

- si $M = O$ alors $M' = O$
- si $M \neq O$ alors $OM' = OM$ et $(\widehat{OM, OM'}) = (\hat{\alpha})$

ex : $\text{MES}(^\circ)(\hat{\alpha}) = 30$

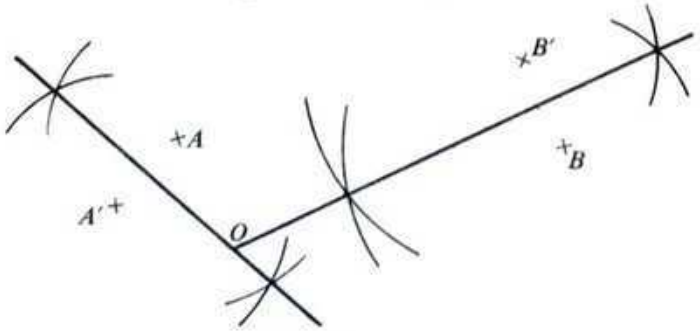




Question 25 *Quelle est la rotation de centre O et d'angle nul?*
Quelle est la rotation de centre O et d'angle plat?
Démontrer que si $(\hat{\alpha})$ est non nul alors la rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$ a un seul point invariant : son centre.

Remarque.

Pour trouver le centre O d'une rotation il suffit de connaître deux points distincts A et B d'images respectives A' et B' tels que les droites (AA') et (BB') ne soient pas parallèles; puisque $OA' = OA$ et $OB' = OB$, le point O est le point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.



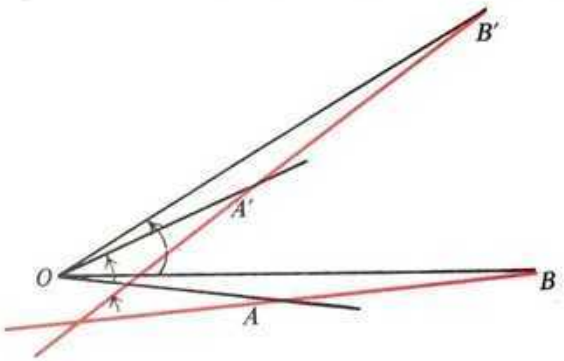
Question 26 *Démontrer que toute rotation est une transformation du plan et donner l'application réciproque de la rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$.*
Démontrer que la composée de deux rotations de même centre O est une rotation de centre O, dont l'angle est la somme des deux angles orientés.

Question 27 *Démontrer que la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.*
Démontrer que toute rotation est une composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants ou égaux.

De cette question et des propriétés des symétries orthogonales, on déduit les propriétés :

- Toute rotation est une isométrie (car les deux symétries sont bijectives et conservent la distance).
- Toute rotation est un déplacement (composée de deux symétries orthogonales).
- Toute rotation conserve les angles orientés (chacune des symétries transforme un angle en son opposé).

Puisque l'image d'une droite par une symétrie orthogonale est une droite, l'image d'une droite par une rotation est encore une droite. De même l'image d'une demi-droite par une rotation est une demi-droite. Voyons un résultat plus précis : Soient r une rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$, A et B deux points distincts, A' et B' leurs images respectives par r.
L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$. Étudions l'angle $(\widehat{AB, A'B'})$.



Supposons A distinct du point O.

On a :

r

O	O
A	A'
B	B'

Puisque r conserve les angles orientés on a :

$$(\widehat{AB, OA}) = (\widehat{A'B', OA'})$$

or :
$$(\widehat{AB, A'B'}) = (\widehat{AB, OA}) + (\widehat{OA, A'B'})$$

d'où :
$$\begin{aligned}(\widehat{AB, A'B'}) &= (\widehat{A'B', OA'}) + (\widehat{OA, A'B'}) \\ &= (\widehat{OA, A'B'}) + (\widehat{A'B', OA'}) \\ &= (\widehat{OA, OA'}) \\ &= (\hat{\alpha}).\end{aligned}$$

Si $A = O$ alors $(\widehat{OB, OB'}) = (\hat{\alpha})$ se traduit par $(\widehat{AB, A'B'}) = (\hat{\alpha})$. Ainsi on a :

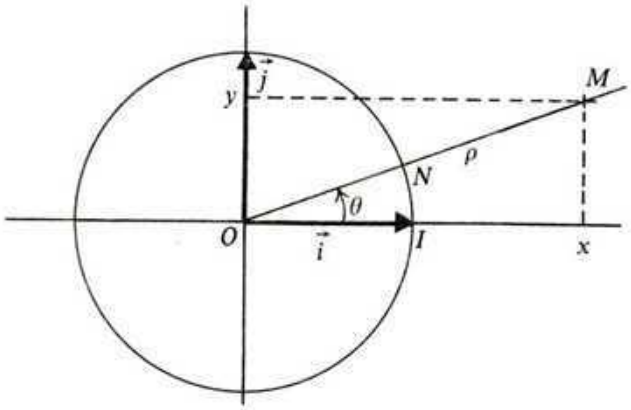
Théorème

Soient A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par une rotation d'angle $(\hat{\alpha})$. On a :

$$(\widehat{AB, A'B'}) = (\hat{\alpha}).$$

Coordonnées polaires d'un point

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$.



Soit M un point du plan, distinct du point O, de coordonnées x et y.
On sait que la distance OM est égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$, notons ρ ce nombre réel strictement positif.

Notons θ la détermination principale de la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$: elle est déterminée par $\cos\theta$ et $\sin\theta$. On a :

$$\cos\theta = \cos(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \sin(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}).$$

On a vu au chapitre 1 l'expression du cosinus et du sinus de l'angle de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées dans une base orthonormée; ici on a $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, d'où :

$$\cos(\widehat{\vec{i}, OM}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(ces nombres sont aussi les coordonnées du point N intersection de $[OM)$ et du cercle trigonométrique).
Ainsi on a :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Question 28 *Soient ρ un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel de $]-\pi, \pi]$. Démontrer qu'il existe un point M et un seul du plan tel que $OM = \rho$ et $MES\ (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ et donner les coordonnées x et y de ce point en fonction de ρ et θ. (M est situé sur le cercle de centre O de rayon ρ et sur la demi-droite d'origine O faisant un angle θ avec $[OI)$.)*

Définition et théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Quel que soit le point M du plan, distinct du point O, il existe un et un seul couple (ρ, θ) de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que :

$$\rho = OM \quad \text{et} \quad \theta = \text{MES}\ (\vec{i}, \overrightarrow{OM}).$$

Ce couple (ρ, θ) est appelé le couple des **coordonnées polaires** du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'application $\mathcal{P} - \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ est une bijection.
$M \longmapsto (\rho, \theta)$

Soit M un point du plan, ses coordonnées x et y définies par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sont appelées **coordonnées cartésiennes** dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si M est distinct du point O, alors son couple de coordonnées polaires (ρ, θ) vérifie :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad x = \rho\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Exercice 15 Trouver les coordonnées polaires des points A, B et C de couples de coordonnées cartésiennes respectifs $(-3, \sqrt{3})$, $(2, 2)$ et $(2\sqrt{3}, -2)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Trouver les coordonnées cartésiennes des points dont le couple des coordonnées polaires sont les suivants :

$$\left(3, -\frac{\pi}{4}\right), \quad \left(5, \frac{5\pi}{6}\right), \quad \left(2, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(4, -\frac{\pi}{2}\right), \quad (5, \pi), \quad (2, 0).$$

3 Expression analytique d'une rotation dont le centre est l'origine du repère

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

Question 29 *Le point A ayant pour couple de coordonnées cartésiennes $(3, 0)$ chercher les coordonnées de son image A' par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.*

Trouver de même les coordonnées de l'image B' par r du point $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

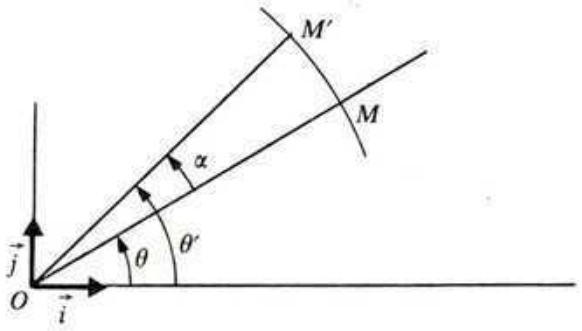
Plus généralement, soit r la rotation de centre O et d'angle α.
Soit M un point quelconque du plan, distinct de O; on note x et y ses coordonnées cartésiennes, ρ et θ ses coordonnées polaires dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; le point M' image de M par r est distinct de O (car $OM' = OM$) on note x' et y' ses coordonnées cartésiennes, ρ' et θ' ses coordonnées polaires dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a les égalités : $\quad x = \rho \cos \theta \qquad y = \rho \sin \theta$

$$x' = \rho' \cos \theta' \qquad y' = \rho' \sin \theta'.$$

D'autre part, $M' = r(M)$ signifie que : $\begin{cases} OM' = OM \\ \text{et} \quad \text{MES } (\widehat{OM, OM'}) \equiv \alpha \ [2\pi] \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} \rho' = \rho \\ \text{et} \quad \theta' - \theta \equiv \alpha \ [2\pi] \end{cases}$



car : $\quad (\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM'}}) - (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$

$$\text{MES } (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM'}}) = \theta'$$

et : $\quad \text{MES } (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta.$

Ainsi on a : $\quad \rho' = \rho \quad \text{et} \quad \theta' \equiv \theta + \alpha \ [2\pi]$

d'où : $\begin{cases} x' = \rho \cos (\theta + \alpha) \\ y' = \rho \sin (\theta + \alpha) \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} x' = \rho \cos \theta \cos \alpha - \rho \sin \theta \sin \alpha \\ y' = \rho \sin \theta \cos \alpha + \rho \cos \theta \sin \alpha \end{cases}$

et en utilisant les expressions de x et y, on obtient :

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha + x \sin \alpha. \end{cases}$$

On remarque que si M est le point O alors M' est aussi le point O et les formules ci-dessus sont encore vraies (si $x = 0$ et $y = 0$ alors $x' = 0$ et $y' = 0$). L'expression analytique de r dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$\begin{cases} x' = (\cos \alpha)x - (\sin \alpha)y \\ y' = (\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y. \end{cases}$$

Exercice 16

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, trouver l'expression analytique de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation de l'image par la rotation r de la droite d'équation $x = 2$.
Trouver une équation du cercle (C) de centre O et de rayon 3.
Déterminer l'image de (C) par r : en en cherchant une équation grâce à l'expression analytique, et vérifier le résultat par des égalités de distances.
Faire de même avec le cercle (C_1) de centre le point $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de rayon 2.

4 Expression analytique d'une rotation de centre quelconque

Question 30

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, A le point de coordonnées 2 et 1 dans ce repère, et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Soit M un point du plan d'image M' par r.
Donner les expressions des coordonnées X, Y de M dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de ses coordonnées x, y dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Donner les expressions des coordonnées X', Y' de M' dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de ses coordonnées x', y' dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Trouver l'expression analytique de r dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ c'est-à-dire exprimer X' et Y' en fonction de X et Y.
En déduire l'expression analytique de r dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 17

Soit f l'application ponctuelle d'expression analytique dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} - 5). \end{cases}$$

1) Vérifier que f admet un et un seul point invariant Ω dont on calculera les coordonnées.
Appliquer les formules de changement de repère par translation d'axes pour trouver l'expression analytique de f dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit (D) la droite passant par O et Ω. Donner l'expression analytique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la symétrie orthogonale s d'axe (D).
En déduire l'expression analytique de l'application s' égale à $f \circ s$.
Vérifier que l'on décompose ainsi f en deux symétries orthogonales dont on précisera les axes.

3) Trouver la nature, et les éléments géométriques de f.

5 Application au changement de repère par rotation d'axes

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, I et J les points du plan définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

Question 31 *Soient :* $\vec{i}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ *et* $\vec{j}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

Vérifier que $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ est un repère orthonormé du plan.
Soient I_1 et J_1 les points du plan définis par $\overrightarrow{OI}_1 = \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{OJ}_1 = \vec{j}_1$. Vérifier que I_1 et J_1 sont respectivement les images de I et J par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Soit M un point du plan de couple de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (x_1, y_1) dans $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$. Calculer x et y en fonction de x_1 et y_1. Exprimer x_1 et y_1 en fonction de x et y.
Soit A le point de coordonnées $(1, 3)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Donner les coordonnées X_1 et Y_1 du point M dans le repère $(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ en fonction de x et y.

Plus généralement : soient a un nombre réel, r la rotation de centre O et d'angle a, I' et J' les images respectives de I et J par r, $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ les vecteurs de représentants respectifs (O, I') et (O, J').

Question 32 *Vérifier que $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ est un repère orthonormé du plan.*
Quel est ce repère lorsque a est congru à 0 modulo 2π?
Trouver l'expression analytique de r dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Donner les coordonnées des points I' et J' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire les égalités :

$$\vec{i}' = \cos a\,\vec{i} + \sin a\,\vec{j}$$
$$\vec{j}' = -\sin a\,\vec{i} + \cos a\,\vec{j}.$$

Soit M un point du plan de couple de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(O, \vec{i}', \vec{j}')$.

On a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

et : $\overrightarrow{OM} = X(\cos a\,\vec{i} + \sin a\,\vec{j}) + Y(-\sin a\,\vec{i} + \cos a\,\vec{j})$

d'où : $x\vec{i} + y\vec{j} = (X \cos a - Y \sin a)\vec{i} + (X \sin a + Y \cos a)\vec{j}$.

On a ainsi les **formules de changement de repère par rotation d'axes d'angle** a :

$$\begin{cases} x = X \cos a - Y \sin a \\ y = X \sin a + Y \cos a. \end{cases}$$

Question 33 *Trouver l'expression des coordonnées X et Y de M dans $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ en fonction de ses coordonnées x et y dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*

6 Composée de deux rotations

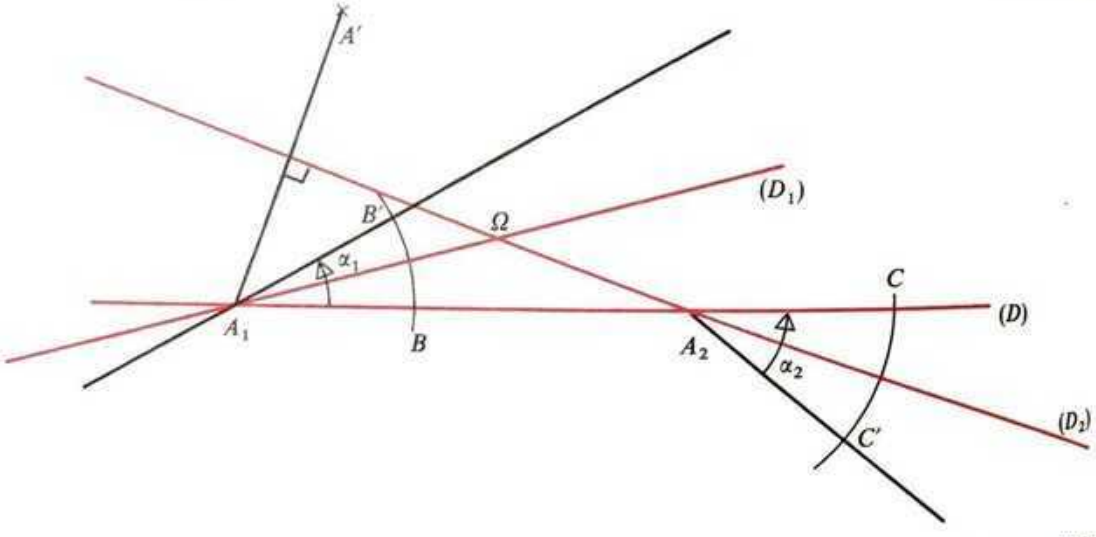
Exercice 18 Le plan étant rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$:

la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

la rotation r_2 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Trouver l'expression analytique de r_1 dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Trouver l'expression analytique de r_2 dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
En déduire celle de $r_2 \circ r_1$ dans ce repère.
L'application $r_2 \circ r_1$ est-elle une isométrie?
Déterminer l'ensemble des points invariants par $r_2 \circ r_1$ et la nature de $r_2 \circ r_1$.
Soit t la translation de vecteur $5\vec{i} - \vec{j}$.
Déterminer l'expression analytique de $t \circ r_1$ puis sa nature.

Plus généralement soient r_1 et r_2 deux rotations de centres respectifs A_1 et A_2 et d'angles respectifs $(\hat{\alpha}_1)$ et $(\hat{\alpha}_2)$. Le cas $A_1 = A_2$ ayant déjà été vu, on considère A_1 et A_2 distincts, et on étudie la composée r de r_1 suivie de r_2.
Soit (D) la droite $(A_1 A_2)$. Il existe une unique droite (D_1) telle que $r_1 = S_{(D)} \circ S_{(D_1)}$ ((D_1) est la bissectrice de $\widehat{BA_1B'}$ où B est un point de (D) distinct de A_1 et B' son image par r_1).



De même il existe une unique droite (D_2) telle que $r_2 = S_{(D_2)} \circ S_{(D)}$ ((D_2) est la bissectrice de $\widehat{CA_2C'}$ où C est un point de (D) distinct de A_2, et C' son image par l'application réciproque de r_2).
Ainsi on a :

$$r = S_{(D_2)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D_1)}.$$

Or $S_{(D)}$ est involutive donc :

$$r = S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}.$$

1er cas : (D_1) et (D_2) sont parallèles

Alors r est une translation de vecteur $2\vec{u}$ tel que $t_{\vec{u}}(D_1) = (D_2)$ on remarque (voir exercice n° 60) que (D_1) et (D_2) sont parallèles si et seulement si $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2) = (\hat{0})$.

2e cas : (D_1) et (D_2) sont sécantes

Alors r est une rotation.
Soit Ω le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2).
Ω est invariant par $S_{(D_1)}$, et par $S_{(D_2)}$ donc par r : Ω est le centre de la rotation r.
L'angle de la rotation est alors $(\widehat{\Omega A_1, \Omega A'})$ où A' est le symétrique de A_1 par rapport à (D_2) (en effet $S_{(D_1)}(A_1) = A_1$ et $r(A_1) = A'$).

Par ailleurs, soient M et N deux points distincts d'images respectives M_1 et N_1 par r_1, M' et N' les images respectives de M_1 et N_1 par r_2 on a :

$$\widehat{(MN, M_1N_1)} = (\hat{\alpha}_1) \quad \text{et} \quad \widehat{(M_1N_1, M'N')} = (\hat{\alpha}_2)$$

d'où :
$$\widehat{(MN, M'N')} = (\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2).$$

Si r est une translation, puisque $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$, alors on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
donc :
$$(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2) = (\hat{0}).$$

Donc si $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$ n'est pas nul alors r n'est pas une translation. D'après ce qui précède c'est une rotation, son angle est alors $\widehat{(MN, M'N')}$ c'est-à-dire $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$.
On a ainsi montré que :

Théorème

La composée de deux rotations est :

– une translation si la somme des angles de ces deux rotations est nulle
– une rotation si la somme de ces angles n'est pas nulle, l'angle de cette rotation étant la somme des angles.

IV. Synthèse sur les isométries

• Une isométrie est une transformation du plan qui conserve la distance. L'ensemble des isométries du plan est noté $\mathfrak{I}$.

• Un **déplacement** est la composée de deux symétries orthogonales; c'est une isométrie qui conserve les angles orientés (en fait un déplacement est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales).

La composée de deux déplacements est un déplacement.
On note $\mathfrak{I}^+$ l'ensemble des déplacements du plan
$\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations
$\mathcal{T}$ l'ensemble des translations.

On a :

$$\mathfrak{I}^+ = \mathcal{R} \cup \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{id}_{\mathcal{P}}\}.$$

Les cas de la composée de deux translations, et de deux rotations ont été examinés; voyons ici la composée d'une rotation r et d'une translation t :

$r \circ t \in \mathfrak{I}^+$, donc $r \circ t$ est soit une rotation r', soit une translation t'.
Si $r \circ t = t'$ alors $r = t' \circ t^{-1}$, ainsi r est la composée de deux translations donc r est une translation. Comme $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{id}_{\mathcal{P}}\}$ r est donc $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ c'est-à-dire une rotation d'angle nul.
Donc si l'angle $(\hat{\alpha})$ de r n'est pas nul, alors $r \circ t$ est une rotation.
De plus, soient A et B deux points distincts du plan :

t : $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$; r : $A' \mapsto A''$, $B' \mapsto B''$; on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $(\widehat{A'B', A''B''}) = (\hat{\alpha})$

d'où : $(\widehat{AB, A''B''}) = (\hat{\alpha})$.

Donc $r \circ t$ est aussi une rotation d'angle $(\hat{\alpha})$.
On ferait de même pour $t \circ r$.
On a ainsi montré :

Théorème

La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul est une rotation de même angle.

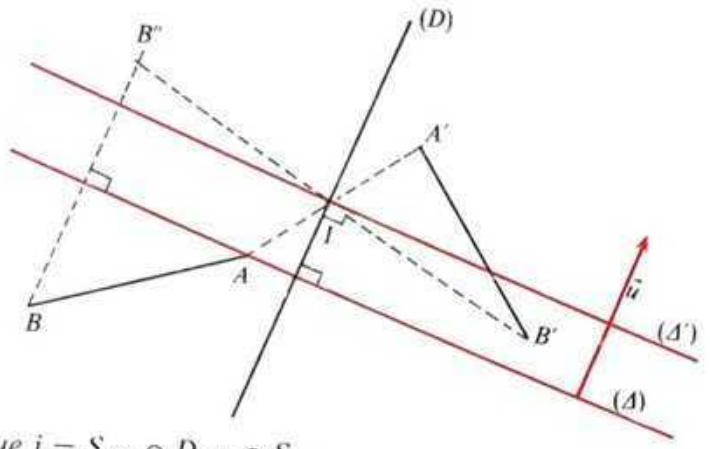
• Un **retournement** ou **antidéplacement** est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales; c'est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé (en fait un antidéplacement est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales).

La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
La composée d'un déplacement et d'un retournement est un retournement.
On note $\mathfrak{I}^-$ l'ensemble des antidéplacements.
On a :

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^+ \cup \mathfrak{I}^- \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}^+ \cap \mathfrak{I}^- = \varnothing$$

c'est-à-dire : l'ensemble des déplacements et l'ensemble des antidéplacements forment une partition de l'ensemble des isométries du plan.
Étant donnés deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ tels que $A \neq B$ et $AB = A'B'$; il existe un unique déplacement et un unique retournement qui appliquent A sur A' et B sur B'.

Question 34 *Soient i un antidéplacement, A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, d'images respectives A' et B' par i.*
Soient I le milieu de $[AA']$ *et S_I la symétrie centrale de centre I.*
Prouver que $S_I \circ i$ est un antidéplacement.
Soit B'' l'image de B' par S_I.
On note (Δ) la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{BAB''}$.
Prouver que $S_I \circ i = S_{(\Delta)}$. En déduire $i = S_I \circ S_{(\Delta)}$.
Soient (D) la droite perpendiculaire à (Δ) passant par I et (Δ') la droite parallèle à (Δ) passant par I.



Montrer que $i = S_{(D)} \circ D_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$.
Qu'est l'isométrie i dans le cas où $(\Delta) = (\Delta')$?
Dans le cas où (Δ) *et* (Δ') *sont disjointes, montrer que* $i = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$ *où* $\vec{u}$ *est un vecteur à définir.*

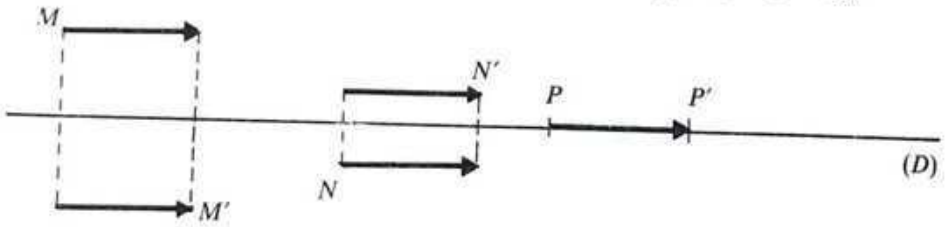
Définition

Soient (D) une droite du plan, et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D).
On appelle **symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur $\vec{u}$** l'isométrie $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$ composée de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la symétrie orthogonale d'axe (D).

(remarque $\vec{u}$ est non nul et $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$)

$S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$

M	M'
N	N'
P	P'



D'après la question 34 on a le résultat suivant :

Théorème

Tout antidéplacement du plan est :
- soit une symétrie orthogonale,
- soit une symétrie glissée.

Question 35 *Soit i la symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur* $\vec{u}$.
Soit M un point quelconque du plan d'image M' par i et M_1 *par* $S_{(D)}$.
Démontrer que :

- $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$
- *le milieu de* $[MM']$ *est un point de (D).*

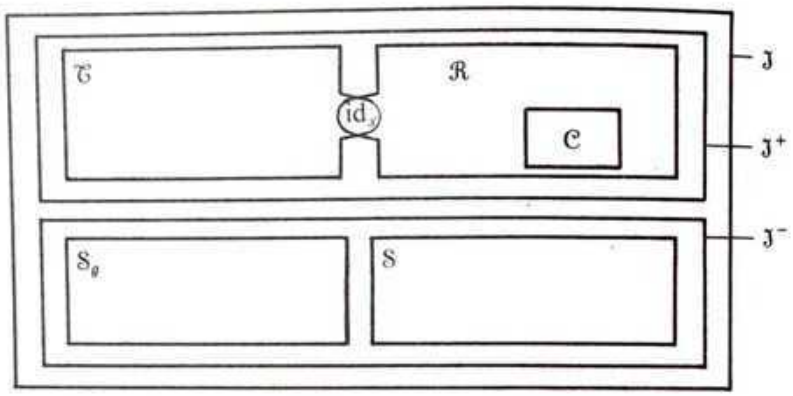
Vérifier que :

$$S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}.$$

Vérifier que i n'a aucun point invariant.

Dans la pratique, une fois démontré qu'une application ponctuelle f est un antidéplacement, pour savoir si f est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée on cherche l'ensemble E des points invariants par f :

si E est une droite alors f est la symétrie orthogonale d'axe E,
si E est l'ensemble vide, alors f est une symétrie glissée.
On a le schéma suivant :



$\mathcal{J}$: ensemble des isométries
$\mathcal{J}^+$: ensemble des déplacements
$\mathcal{J}^-$: ensemble des antidéplacements
$\mathcal{R}$: ensemble des rotations
$\mathcal{T}$: ensemble des translations
$\mathcal{C}$: ensemble des symétries centrales
$\mathcal{S}$: ensemble des symétries orthogonales
$\mathcal{S}_g$: ensemble des symétries glissées.

Exercice 19 Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Montrer que l'antidéplacement qui applique A sur C et B sur D est une symétrie glissée dont on précisera l'axe et le vecteur.

De cette classification des isométries, découle la suivante selon leur ensemble de points invariants :

- une isométrie ayant $\mathcal{P}$ comme ensemble de points invariants est $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$,
- une isométrie ayant une droite (D) comme ensemble de points invariants est une symétrie orthogonale (l'axe de cette symétrie est la droite (D)),
- une isométrie ayant un unique point invariant I est une rotation d'angle non nul et dont le centre est le point I,
- une isométrie n'ayant aucun point invariant est :
  - soit une translation de vecteur non nul (si c'est un déplacement)
  - soit une symétrie glissée (si c'est un retournement).

Ainsi, si une isométrie i a deux points distincts invariants A et B, alors i est :

- soit la symétrie orthogonale d'axe (AB) (s'il existe un point C non situé sur cette droite et non invariant par i),
- soit l'application identique (s'il existe un point C non situé sur la droite (AB) et aussi invariant par i).

Méthode pratique

Pour trouver la nature d'une isométrie, souvent on cherche ses points invariants et on utilise la classification ci-dessus.

- Ceci est facile lorsqu'on connaît l'expression analytique de l'isométrie relative à un repère donné.
- Ceci est facile aussi lorsqu'on connaît déjà des points invariants.

On aura d'ailleurs souvent avantage à chercher l'image de certains points (donnés ou choisis) pour voir la nature de l'isométrie.

Ainsi par exemple ABC étant un triangle équilatéral, la seule isométrie laissant A, B et C invariants est $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$; celle, f, laissant A invariant et telle que $f(B) = C$ et $f(C) = B$ est la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de (BC).

Exercice 20 Soient A, B et C trois points non alignés du plan, (Δ) la droite (AB) et $\vec{u}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que la transformation $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ est un antidéplacement.
Construire les images A', B' et C' des points A, B et C par $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$, puis les milieux respectifs I, J et K des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$.

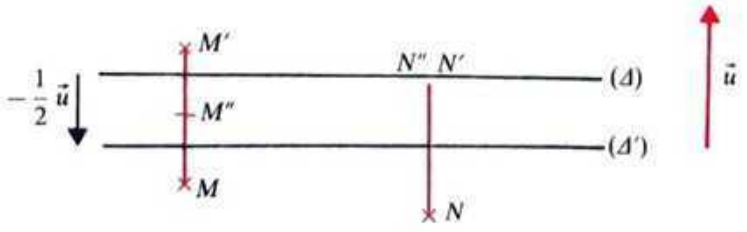
1) Si $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, démontrer que $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissée que l'on caractérisera.

2) Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, démontrer que $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

3) Examiner le cas où $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$; préciser la nature de $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ selon que $\vec{u}$ est nul ou non.

On retiendra que la composée $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ de la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ d'axe (Δ) et de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ est :
– soit une symétrie orthogonale si $\vec{u}$ est nul ou normal à (Δ)

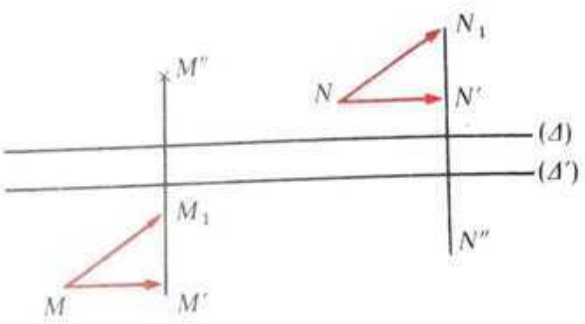
- si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)}$
- si $\vec{u}$ est normal à (Δ) alors $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta')}$ où $(\Delta') = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$

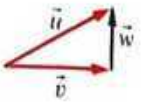


– soit une symétrie glissée si $\vec{u}$ est non nul et non normal à (Δ).
Soit $\vec{i}$ un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{j}$ un vecteur normal à (Δ).

Il existe un unique couple $(\vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs de $D_{\vec{i}} \times D_{\vec{j}}$ tel que : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$:

$$(\Delta') = t_{-\frac{1}{2}\vec{w}}(\Delta)$$





on a $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta')} \circ t_{\vec{v}}$.

Exercice 21 Soient (D_1), (D_2) et (D_3) trois droites distinctes concourantes en O.
On note S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs (D_1), (D_2) et (D_3), et S la composée $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
Démontrer que S est une symétrie orthogonale d'axe une droite (D_4) que l'on situera par rapport aux trois droites données.

V. Similitudes

1 Définition

Question 36 *Soient O, A, B et C quatre points du plan tels que A, B et C ne soient pas alignés, h l'homothétie de centre O de rapport 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.*
Placer les images O', A', B' et C' des points O, A, B et C respectivement par l'application $h \circ r$.
Comparer les distances $O'A'$, $A'B'$, $B'C'$ et $A'C'$ avec respectivement OA, AB, BC et AC. Démontrer que le résultat obtenu se généralise à tout couple (M, N) de points de $\mathcal{S}$.
Que peut-on dire de l'effet de $r \circ h$ sur les distances?

Définition

On appelle **similitude** du plan toute application bijective de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$ qui « conserve le rapport des distances » c'est-à-dire telle que : quels que soient les points M, N et P, distincts deux à deux, d'images respectives M', N' et P' on a :

$$\frac{M'N'}{M'P'} = \frac{MN}{MP} \quad \left(\text{ou encore } \frac{M'N'}{MN} = \frac{M'P'}{MP} = \frac{N'P'}{NP}\right).$$

Ainsi une transformation f du plan est une similitude si et seulement si elle « multiplie la distance par un nombre réel fixé k strictement positif »
c'est-à-dire si et seulement si il existe un nombre réel k strictement positif (et unique) tel que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \forall N \in \mathcal{P} \quad f(M)f(N) = kMN.$$

Le nombre réel k est appelé le **rapport** de la similitude.

Remarque

Toute isométrie est une similitude de rapport 1.
Toute homothétie de rapport k (k est un nombre réel non nul) est une similitude de rapport $|k|$.

Question 37 *Démontrer que la composée d'une isométrie suivie d'une homothétie de rapport α est une similitude de rapport $|\alpha|$.*
Démontrer qu'il en est de même pour la composée d'une homothétie suivie d'une isométrie.

Question 38 *Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.*
Démontrer qu'il existe trois similitudes f_1, f_2 et f_3 telles que :

$\overset{\frown}{f_1}$	
A	A
C'	B
B'	C

$\overset{\frown}{f_2}$	
B	B
A'	C
C'	A

$\overset{\frown}{f_3}$	
C	C
B'	A
A'	B

que l'on déterminera.

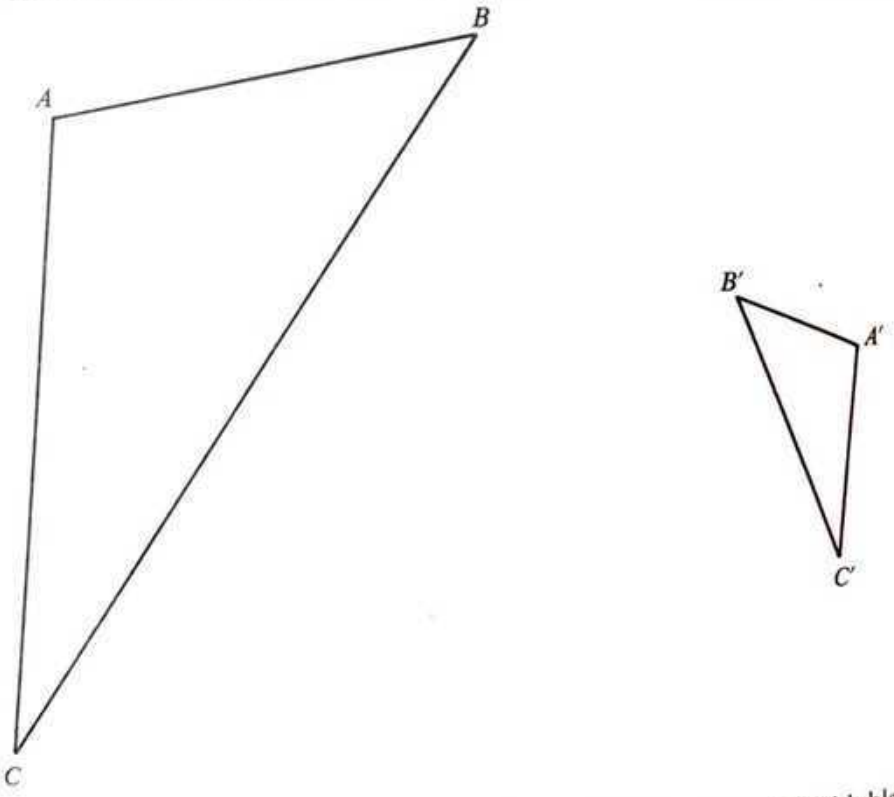
On rappelle la définition :
Soient $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$ deux figures du plan $\mathcal{P}$.
$(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$ sont dites **semblables** si et seulement si il existe une homothétie qui transforme $(\mathcal{F})$ en une figure isométrique à $(\mathcal{F}')$,
c'est-à-dire il existe une homothétie h et une isométrie i telle que $h(\mathcal{F})$ soit l'image de $(\mathcal{F}')$ par i.
Or l'isométrie i est bijective donc l'égalité $h(\mathcal{F}) = i(\mathcal{F}')$ est équivalente à $i^{-1} \circ h(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}')$.
D'après la question 37, $i^{-1} \circ h$ est une similitude donc si deux figures $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$ sont semblables il existe une similitude qui transforme $(\mathcal{F})$ en $(\mathcal{F}')$.
Examinons le cas particulier où $(\mathcal{F})$ est un triangle.

On a trois critères de similitude de deux triangles : soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. ABC est semblable à $A'B'C'$ si et seulement si ils vérifient :

- soit $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$
- soit mes $\hat{A}$ = mes $\hat{A}'$ et mes $\hat{B}$ = mes $\hat{B}'$
- soit mes $\hat{A}$ = mes $\hat{A}'$ et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$.

Exercice 22 Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ vérifient chacun de ces critères si et seulement si ils sont semblables.

Exercice 23 Soient ABC et $A'B'C'$ les deux triangles donnés sur la figure ci-dessous.



Vérifier, en mesurant sur la figure, que ces deux triangles sont semblables et préciser le nombre réel k tel que :

$$A'B' = kAB, \qquad A'C' = kAC \quad \text{et} \quad B'C' = kBC.$$

Soit O un point quelconque du plan. Placer les points A_1, B_1 et C_1 images respectives des points A, B et C par l'homothétie h de centre O et de rapport k.

Que peut-on dire des triangles $A\ B\ C$ et $A'B'C'$?

En déduire qu'il existe une application f telle que :

$\overset{\frown}{f}$

A	A'
B	B'
C	C'

et $f = i \circ h$ où i est une isométrie.

Vérifier que i est un retournement.

2 Propriétés des similitudes

De la définition découlent, de façon immédiate les propriétés suivantes :

- La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports des deux similitudes.

- L'application réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

On en déduit que l'ensemble des similitudes du plan, muni de la composition des applications, est un groupe.

Question 39 *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables.*
Soient s_1 et s_2 deux similitudes telles que les points A, B et C aient respectivement pour image A', B' et C' à la fois par s_1 et par s_2.
Soient M un point quelconque du plan, M_1 son image par s_1 et M_2 son image par s_2.
Démontrer que si M_1 et M_2 sont distincts alors A', B' et C' sont sur la médiatrice de $[M_1M_2]$.
En déduire $s_1 = s_2$.

Théorème

Étant donnés trois points non alignés A, B et C et trois points non alignés A', B' et C' tels qu'il existe un nombre réel strictement positif k vérifiant :

$$A'B' = kAB, \qquad A'C' = kAC \quad \text{et} \quad B'C' = kBC.$$

Il existe une similitude et une seule f (de rapport k) telle que :

$$f(A) = A', \qquad f(B) = B' \quad \text{et} \quad f(C) = C'.$$

Autrement dit : une similitude est déterminée de façon unique par trois points non alignés et leurs images.

Méthode pratique

Pour placer l'image M' d'un point M par une similitude f qui transforme les points non alignés A, B, C en les points non alignés, respectivement A', B' et C'.

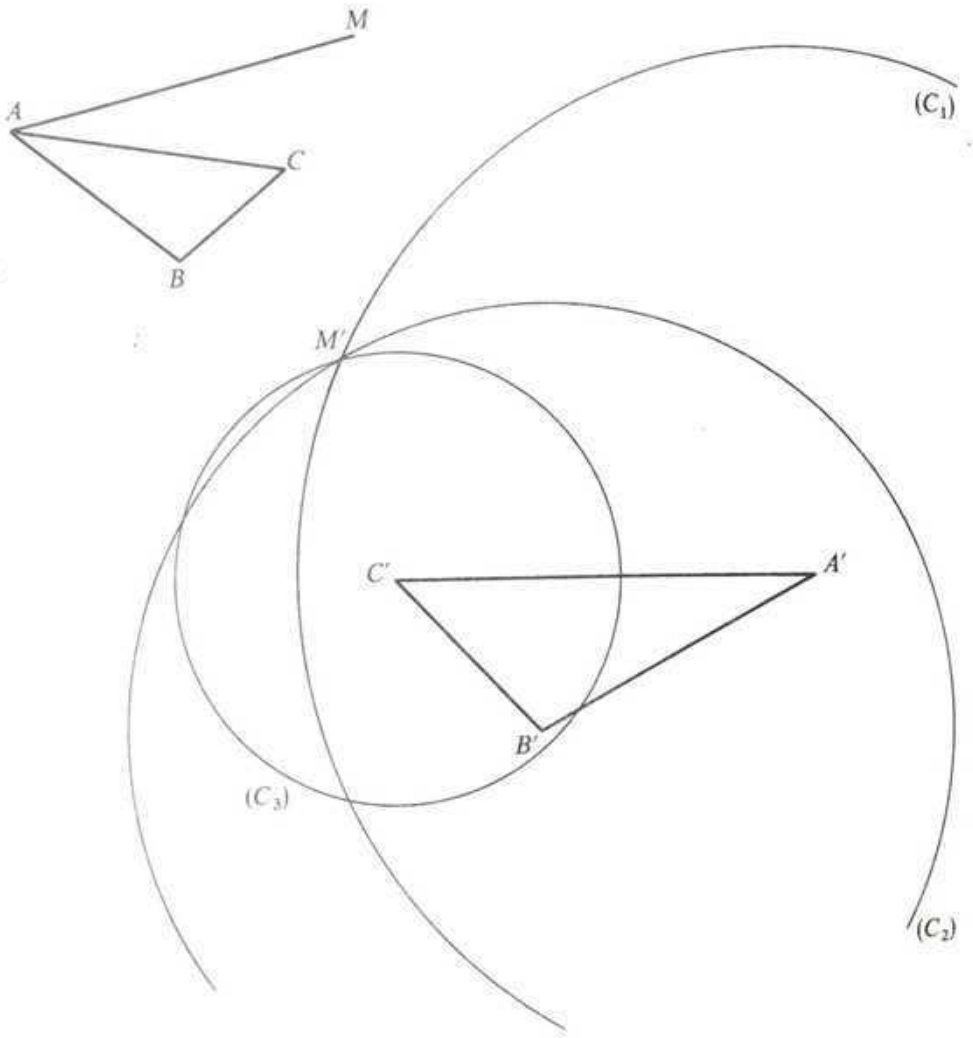
On recherche la valeur du rapport $k\left(k = \dfrac{A'B'}{AB}\right)$.

On trace les trois cercles (C_1), (C_2) et (C_3) :

(C_1) de centre A' et de rayon kMA
(C_2) de centre B' et de rayon kMB
(C_3) de centre C' et de rayon kMC.

Puisque $M'A' = kMA$, $M'B' = kMB$ et $M'C' = kMC$ le point M' est l'intersection des cercles (C_i), (C_2) et (C_3).

(En utilisant Thalès on peut multiplier une distance par un nombre donné comme quotient de deux distances.)



Exercice 24 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, et les points :

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\quad A'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\quad B'\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad C'\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}.$$

Vérifier, par le calcul, que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables et préciser le rapport de la similitude qui transforme A, B et C respectivement en A', B' et C'.

Décomposer f en une homothétie de centre O et une isométrie dont on donnera précisément les éléments.

Quelle est l'image du point $D\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ par f ?

Exercice 25 Soit f l'application ponctuelle d'expression analytique, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x - y \\ y' = x + \sqrt{3}y \end{cases}.$$

Vérifier que O est invariant par f.

Y a-t-il d'autres points invariants par f ?
Soient M un point du plan et M' son image par f, comparer OM' et OM.
Soit h l'homothétie de centre O de rapport 2. Donner l'expression analytique de l'application g égale à $h^{-1} \circ f$.
Trouver la nature de g : on vérifiera par le calcul le résultat trouvé graphiquement.
En déduire la nature de f et sa décomposition en deux transformations du plan dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 26

Soit s l'application ponctuelle d'expression analytique dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y \\ y' = \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

Montrer que s admet un unique point invariant A dont on calculera les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Donner l'expression analytique de s dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer la nature de s et une décomposition en précisant les éléments caractéristiques des applications ponctuelles.

3 Classification des similitudes

Soit une similitude de rapport k (où k est un nombre réel strictement positif). Étant donné un point O fixe du plan, on considère l'homothétie h de centre O et de rapport k.

L'application $s \circ h^{-1}$, composée d'une similitude, h^{-1}, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'une similitude, s, de rapport k est une similitude de rapport 1 c'est-à-dire une isométrie i.
$s \circ h^{-1} = i$ est équivalent à $s = i \circ h$.
De même $h^{-1} \circ s$ est une isométrie i' et on a $s = h \circ i'$.
Ainsi on a démontré :

Théorème

Toute similitude de rapport k est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k.

Remarques

On a ainsi : deux figures $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$ sont semblables si et seulement si il existe une similitude s telle que $s(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}')$.

Exercice 27 Soient $S_{(D)}$ une symétrie orthogonale d'axe (D), O un point de (D) et h l'homothétie de centre O et de rapport -2.
Démontrer que $h \circ S_{(D)}$ est une similitude dont on précisera le rapport.
Déterminer une homothétie h' de centre O et de rapport positif et une isométrie i' telle que :

$$h \circ S_{(D)} = h' \circ i'.$$

Remarque.

- La décomposition d'une similitude en une isométrie suivie d'une homothétie (ou d'une homothétie suivie d'une isométrie) n'est pas unique car on choisit le point O.
- Soient $h_1 \circ i_1$ et $h_2 \circ i_2$ deux décompositions de la même similitude s en une isométrie (i_1 ou i_2) suivie d'une homothétie (h_1 ou h_2). Comme une homothétie conserve les angles orientés, en choisissant trois points non alignés A, B et C d'images respectives A', B' et C' par s, on obtient le résultat suivant :

i_1 et i_2 sont :

- soit toutes deux dans $\mathfrak{I}^+$ (si les triplets (A, B, C) et (A', B', C') ont même orientation)
- soit toutes deux dans $\mathfrak{I}^-$ (si les triplets (A, B, C) et (A', B', C') n'ont pas la même orientation).

Définition

On appelle **similitude directe** toute composée d'une homothétie et d'un déplacement.
On appelle **similitude indirecte** toute composée d'une homothétie et d'un retournement.

Puisque toute homothétie et tout déplacement conserve les angles orientés, et tout antidéplacement transforme un angle orienté en son opposé, on a :

Théorème

Toute similitude directe conserve les angles orientés.
Toute similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

Étudions tout d'abord la décomposition d'une similitude directe non réduite à une translation.
Soit s une similitude directe : il existe une homothétie $h (h \in \mathcal{H})$ et un déplacement $i (i \in \mathfrak{I}^+)$ tels que $s = h \circ i$.
On a vu que : $\mathfrak{I}^+ = \mathcal{R} \cup \mathcal{G}$; i est soit une rotation soit une translation.
Si i est une translation ($i \in \mathcal{G}$) alors $h \circ i$, élément de $\mathcal{G}$, n'étant pas une translation, est une homothétie. Notons h' cette homothétie : on a ainsi $s = h'$ ou encore $s = h' \circ r_0$ où r_0 est l'application identique du plan c'est-à-dire la rotation d'angle nul.
On a ainsi décomposé s en $h' \circ r_0$ avec $h' \in \mathcal{H}$ et $r_0 \in \mathcal{R}$ d'où :

Théorème

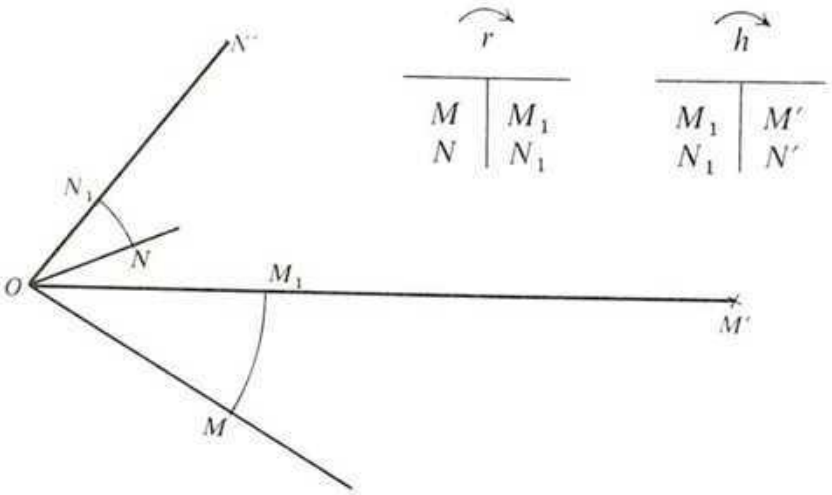
Toute similitude directe non réduite à une translation est la composée d'une homothétie et d'une rotation.

Question 40 *Soient O un point du plan, h l'homothétie de centre O et de rapport k, r la rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$ et s la similitude égale à $h \circ r$.*

1) Vérifier que, si k est strictement positif, alors pour tout point M distinct de O, le point M' image de M par s est l'unique point du plan tel que :

$$\widehat{(OM, OM')} = (\hat{\alpha}) \quad \text{et} \quad OM' = kOM.$$

Quelle est l'image du point O par s?



Vérifier que si $(\hat{\alpha})$ est l'angle nul et $k = 1$ alors s est l'application identique. Vérifier que si $(\hat{\alpha})$ n'est pas l'angle nul ou k est différent de 1, alors s admet un point invariant et un seul : le point O. On dit que s est la ***similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle $(\hat{\alpha})$.***

2) Vérifier que, si k est strictement négatif, alors h est la composée (dans un ordre quelconque) de l'homothétie h' de centre O et de rapport $|k|$ et de la rotation de centre O et d'angle plat. En déduire que s est la similitude de centre O, de rapport $|k|$ et d'angle $(\hat{\alpha}) + (\hat{p})$.

Question 41 *1) Démontrer que les seules similitudes ayant au moins deux points invariants distincts sont des isométries.*

2) Soit S une similitude dont on connaît un point invariant A. Écrire S comme composée d'une homothétie de centre A et d'une isométrie laissant A invariant. Donner la décomposition précise de S selon qu'elle est directe ou indirecte.

On démontre (voir exercice n° 70) que toute similitude non réduite à une isométrie admet un point invariant et un seul que l'on appelle son **centre.**

• Soit s une similitude directe non réduite à une isométrie. Notons O le centre, k le rapport de cette similitude, et h l'homothétie de centre O et de rapport k. La transformation $h^{-1} \circ s$ est une rotation r de centre O, notons $(\hat{\alpha})$ l'angle de cette rotation.
Ainsi on a $s = h \circ r$, et d'après la question 40, s est la similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle $(\hat{\alpha})$. En étudiant l'image par $h \circ r$ et $r \circ h$ d'un triplet (A, B, C) on constate que ces deux transformations sont égales. Dans le cas où s est une rotation, on a encore $s = h \circ r$ avec $k = 1$ et $s = r$.

On a ainsi montré le résultat :

Théorème

Toute similitude directe s non réduite à une translation est la composée d'une homothétie h et d'une rotation r telle que

- h et r aient même centre : le centre de la similitude s;
- le rapport de l'homothétie h soit le rapport k de la similitude de s.

De plus h et r sont alors uniques et vérifient $h \circ r = r \circ h$. L'angle de la rotation r est dit angle de la similitude s.

• Soit s une similitude indirecte non réduite à une isométrie. Notons O le centre, k le rapport de cette similitude et h l'homothétie de centre O et de rapport k.
La transformation $h^{-1} \circ s$ est un retournement qui admet le point O comme point invariant (car $s(O) = 0$ et $h^{-1}(O) = 0$). Puisque les seuls retournements ayant au moins un point invariant sont les symétries orthogonales, la transformation $h^{-1} \circ s$ est une symétrie orthogonale $S_{(D)}$ dont l'axe (D) passe par O.
Ainsi on a $s = h \circ s_{(D)}$ et cette décomposition de s en une homothétie de centre O et de rapport k et une symétrie orthogonale, est unique. La droite (D) est appelée l'axe de la similitude. On dit que s est la **similitude indirecte de centre O de rapport k et d'axe (D).**
En appliquant l'axiome de Thalès, on démontre que l'on a : $h \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ h$.
On a ainsi montré le résultat :

Théorème

Toute similitude indirecte s non réduite à une isométrie est la composée, dans un ordre quelconque, d'une homothétie, ayant le même centre O et le même rapport que s, et d'une symétrie orthogonale unique dont l'axe passe par le point O.

Question 42 *1) Vérifier que toute similitude conserve : l'alignement des points, le parallélisme et l'orthogonalité.*

2) Vérifier que toute similitude multiplie : les longueurs par son rapport, et les aires par le carré de son rapport.

Exercice 28 Soient s une similitude de rapport k, A un point du plan d'image A' par s. Montrer que l'image par s du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon kR.

VI. Application vectorielle associée à une application ponctuelle

Question 43 *Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. A tout point A du plan on associe l'application φ_A de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ qui, à tout vecteur $\vec{v}$, fait correspondre le vecteur $\varphi_A(\vec{v})$ défini par : M étant l'unique point du plan tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$ alors $\varphi_A(\vec{v}) = \overrightarrow{A'M'}$ où A' et M' sont les translatés respectifs de A et M. On a ainsi $\varphi_A(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{t(A)t(M)}$.*
Soit B un point du plan, vérifier que l'application φ_B associée à B, est égale à φ_A.
Quelle est la nature de l'application φ de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ associe le vecteur $\overrightarrow{t(M)t(N)}$?
φ est appelée application vectorielle associée à t.

Question 44 *Soit h une homothétie de centre A et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$). Démontrer que, quels que soient les points M, N, P, Q du plan, si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ alors $\overrightarrow{h(M)h(N)} = \overrightarrow{h(P)h(Q)}$.*
Ceci permet de définir l'application φ de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$, associée à h, par : quel que soit le représentant (M, N) du vecteur $\vec{v}$, $\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{h(M)h(N)}$.
Montrer que :

$$\forall \vec{v} \in \mathfrak{V} \quad \varphi(\vec{v}) = k\vec{v}.$$

Une telle application est appelée ***homothétie vectorielle*** *de rapport k.*
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α un nombre réel, calculer $\varphi(\vec{u} + \vec{v})$ et $\varphi(\alpha\vec{u})$ en fonction de $\varphi(\vec{u})$, $\varphi(\vec{v})$ et α.

Exercice 28 Soit A un point du plan. On considère l'application :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto A$$

Soit φ définie par : quel que soit $\vec{v}$ dans $\mathfrak{V}$, si $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$, alors $\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$. Montrer que φ est bien une application de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ c'est-à-dire que $\varphi(\vec{v})$ ne dépend pas du représentant de $\vec{v}$ choisi. Quelle est la nature de l'application vectorielle φ associée à f?

Exercice 29 Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en A, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Soit p la projection sur (D_1) parallèlement à (D_2).
Pour tout point M du plan, calculer les coordonnées de son image M' par p dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de celles de M.

Soit φ_A l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui au vecteur $\vec{v}$ associe le vecteur $p(A)p(M)$ où M est le point défini par $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$.
Calculer $\varphi_A(\vec{v})$ en fonction des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soient B un point du plan et φ_B l'application qui au vecteur $\overrightarrow{BN}$ associe $p(B)p(N)$. Montrer que $\varphi_A = \varphi_B$.
Soit φ cette application (qui ne dépend pas de l'origine choisie dans $\mathcal{P}$).
Notons $D_{\vec{i}}$ et $D_{\vec{j}}$ les droites vectorielles de base respective $(\vec{i})$ et $(\vec{j})$.
Démontrer que tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ s'écrit de façon unique $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1$ dans $D_{\vec{i}}$ et $\vec{v}_2$ dans $D_{\vec{j}}$. Exprimer alors, avec ces notations, $\varphi(\vec{v})$.
φ est appelée **projection vectorielle** sur la droite vectorielle $D_{\vec{i}}$ suivant la droite vectorielle $D_{\vec{j}}$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$ et α un nombre réel, calculer $\varphi(\vec{u} + \vec{v})$ et $\varphi(\alpha\vec{u})$ en fonction de $\varphi(\vec{u})$, $\varphi(\vec{v})$ et α.

Exercice 30

Avec les notations et les hypothèses de l'exercice 29, et s la symétrie par rapport à (D_1) parallèlement à (D_2).
Soit ψ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui au vecteur $\vec{v}$ de représentant (O, M) associe le vecteur $\overrightarrow{s(O)s(M)}$. Montrer que cette définition de ψ ne dépend pas de l'origine O choisie dans $\mathcal{P}$.
Calculer alors $\psi(\vec{v})$ grâce aux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.
ψ est appelée **symétrie vectorielle** d'axe $D_{\vec{i}}$ et de direction $D_{\vec{j}}$. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et α un nombre réel, calculer $\psi(\vec{u} + \vec{v})$ et $\psi(\alpha\vec{u})$ en fonction de $\psi(\vec{u})$, $\psi(\vec{v})$ et α.
Dans quel cas ψ «conserve la norme» c'est-à-dire :

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \|\psi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| ?$$

Dans quel cas ψ «conserve le produit scalaire» c'est-à-dire :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2 \quad \psi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} ?$$

Question 45

Soient (D) une droite du plan, O un point de (D), E le complémentaire de (D) dans $\mathcal{P}$.
On considère l'application g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall M \in (D) & g(M) = M \\ \forall M \in E & g(M) = S_0(M) \end{cases}$$

où S_0 est la symétrie centrale de centre O.
Soient A un point du plan distinct de O, φ_0 et φ_A les applications de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ définies par :

$$\text{si } \vec{v} = \overrightarrow{OM} \text{ alors } \varphi_0(\vec{v}) = \overrightarrow{g(O)g(M)}$$
$$\text{si } \vec{v} = \overrightarrow{AN} \text{ alors } \varphi_A(\vec{v}) = \overrightarrow{g(A)g(N)}$$

A-t-on $\varphi_0 = \varphi_A$?
A-t-on, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le nombre réel α,

$$\varphi_0(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi_0(\vec{u}) + \varphi_0(\vec{v}) ?$$
$$\varphi_0(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi_0(\vec{u}) ?$$

Définition

Une application φ de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ est une **application linéaire** de $\mathfrak{V}$ si et seulement si elle vérifie les deux propriétés :

1) $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{V}^2 \qquad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

2) $\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$.

Remarques :

- On démontre facilement qu'une application φ de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{V}^2 \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v}).$$

- L'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul.

Question 46 *Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et f l'application ponctuelle d'expression analytique dans ce repère :*

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 3 \\ y' = 5x - y - 1 \end{cases}$$

On considère l'application φ de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ qui, au vecteur $\vec{v}$ de représentant (M, N), associe le vecteur $\varphi(\vec{v})$ de représentant $(f(M), f(N))$. Vérifier que cette définition ne dépend pas du représentant choisi pour $\vec{v}$. Exprimer les coordonnées X' et Y' de l'image par φ du vecteur de coordonnées X et Y dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Vérifier que φ est linéaire.
φ conserve-t-elle la norme?
φ conserve-t-elle le produit scalaire?

Soient φ une application linéaire de $\mathfrak{V}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathfrak{V}$. On note $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ les images respectives de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par φ. Il existe quatre nombres réels uniques a, b, c et d tels que $\vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathfrak{V}$ de coordonnées x et y dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{u}) &= \varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j}) \\ &= x(a\vec{i} + b\vec{j}) + y(c\vec{i} + d\vec{j}) \\ &= (ax + cy)\vec{i} + (bx + dy)\vec{j} \end{aligned}$$

ainsi φ est « représentée » par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (ax + cy, bx + dy). \end{aligned}$$

Réciproquement : soit φ une application de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ telle qu'il existe quatre nombres réels a, b c et d vérifiant :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = (ax + cy)\vec{i} + (bx + dy)\vec{j}.$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u} + \vec{v}) &= \varphi[(x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}] \\ &= [a(x + x') + c(y + y')]\vec{i} + [b(x + x') + d(y + y')]\vec{j} \\ &= (ax + cy)\vec{i} + (bx + dy)\vec{j} + (ax' + cy')\vec{i} + (bx' + dy')\vec{j} \\ &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).\end{aligned}$$

Soit α un nombre réel :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\vec{u}) &= \varphi(\alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j}) \\ &= (a\alpha x + c\alpha y)\vec{i} + (b\alpha x + d\alpha y)\vec{j} \\ &= \alpha[(ax + cy)\vec{i} + (bx + dy)\vec{j}] \\ &= \alpha\varphi(\vec{u}).\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire

Théorème

Une application φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ est linéaire si et seulement si, étant donnée une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que, quel que soit le vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$, de coordonnées x et y, son image par φ soit le vecteur de coordonnées $ax + cy$ et $bx + dy$.

Remarque :

Une fois la base $(\vec{i}, \vec{j})$ fixée les quatre nombres réels sont uniques et définis par : $\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\varphi(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$.

On appelle **matrice** de l'application linéaire φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le tableau $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ où :

la 1re colonne est formée par les coordonnées a et b de $\varphi(\vec{i})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$,
la 2e colonne est formée par les coordonnées c et d de $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On a alors :

$$\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \vec{v}'\begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Question 47 *Soit h l'homothétie vectorielle de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) :*

$$h : \vec{v} \longmapsto k\vec{v}.$$ *h est linéaire d'après la question 44.*

*Soient $D_{\vec{j}}$ et $D_{\vec{j}}$ deux droites vectorielles de bases respectives $(\vec{i})$ et $(\vec{j})$ telles que $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base de $\mathcal{V}$: tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ s'écrit de façon unique : $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in D_{\vec{i}}$ et $\vec{v}_2 \in D_{\vec{j}}$ (voir exercice 29). On considère la **symétrie vectorielle** s d'axe $D_{\vec{i}}$ et de direction $D_{\vec{j}}$ définie par :*

$$s(\vec{v}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \text{où} \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{v}_1 \in D_{\vec{i}} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 \in D_{\vec{j}}.$$

1) Vérifier que s est une application linéaire.

2) L'application $h \circ s$ est-elle linéaire?

3) Vérifier que h et s sont des bijections et donner leurs applications réciproques h^{-1} et s^{-1}.

4) Les applications h^{-1} et s^{-1} sont-elles linéaires?

Plus généralement : Soit φ une application linéaire et bijective de $\mathfrak{V}$ sur $\mathfrak{V}$, et φ^{-1} son application réciproque.
Soient $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ deux éléments de $\mathfrak{V}$. Puisque φ est bijective, il existe :
un unique vecteur $\vec{u}$ tel que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}'$ et un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}'$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\vec{u}' + \vec{v}') &= \varphi^{-1}[\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})] \\ &= \varphi^{-1}[\varphi(\vec{u} + \vec{v})] \quad \text{car } \varphi \text{ est une application linéaire} \\ &= \vec{u} + \vec{v} \\ &= \varphi^{-1}(\vec{u}') + \varphi^{-1}(\vec{v}').\end{aligned}$$

Soit α un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\alpha\vec{u}') &= \varphi^{-1}[\alpha\varphi(\vec{u})] \\ &= \varphi^{-1}[\varphi(\alpha\vec{u})] \quad \text{car } \varphi \text{ est une application linéaire} \\ &= \alpha\vec{u} \\ &= \alpha\varphi^{-1}(\vec{u}').\end{aligned}$$

On a ainsi montré :

Théorème

Soit φ une application bijective de $\mathfrak{V}$ sur $\mathfrak{V}$ d'application réciproque φ^{-1}. Si φ est linéaire alors φ^{-1} est une application linéaire.

De même on démontre facilement (comme à la question 47) :

Théorème

La composée de deux applications linéaires de $\mathfrak{V}$ est une application linéaire de $\mathfrak{V}$.

On déduit de ces théorèmes que l'ensemble des applications linéaires bijectives de $\mathfrak{V}$ muni de la composition des applications est un groupe, appelé **groupe linéaire** de $\mathfrak{V}$, noté $GL(\mathfrak{V})$.

On montre qu'une application linéaire φ est bijective si et seulement si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$ où $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice de φ dans une base donnée de $\mathfrak{V}$ (exercice n° 70).

Exercice 31 Soit φ l'application linéaire de $\mathfrak{V}$ donnée par sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathfrak{V}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'image réciproque de $\{\vec{O}\}$ par φ (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathfrak{V}$ d'image le vecteur nul).
Déterminer l'image directe de $\mathfrak{V}$ par φ.
Mêmes questions pour ψ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 32 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Vérifier que l'application vectorielle ρ, associée à r, définie par : $\rho(\vec{MN}) = \vec{r(M)r(N)}$ est indépendante de l'origine choisie dans $\mathcal{P}$. Vérifier que ρ est une application linéaire et donner sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que $\{\rho, \rho \circ \rho, \rho \circ \rho \circ \rho\}$ est un groupe pour la composition des applications (on donnera la table).

Plus généralement : soit f une isométrie de $\mathcal{P}$. On considère :

$\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$

$\vec{v} \longmapsto \varphi(\vec{v})$ défini par : si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ alors $\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

• Montrons que l'écriture ci-dessus a un sens, c'est-à-dire que le vecteur $\varphi(\vec{v})$ est indépendant du représentant de $\vec{v}$ choisi :
Soient (A, B) et (A_1, B_1) deux représentants du vecteur $\vec{v}$, A', B', A'_1, B'_1 les images respectives de A, B, A_1 et B_1 par f.
ABB_1A_1 est un parallélogramme : le milieu I de $[AB_1]$ est celui de $[BA_1]$ puisque f est une isométrie, le point I a pour image le point I' qui est à la fois milieu de $[A'B'_1]$ et de $[B'A'_1]$: ainsi $A'B'B'_1A'_1$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'_1B'_1}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A_1)f(B_1)}$.

• Montrons que l'application φ ainsi définie conserve la norme : un vecteur $\vec{v}$ de représentant (A, B) a pour image par φ le vecteur $\overrightarrow{f(A)f(B)}$; puisque f est une isométrie on a : $d(A, B) = d(f(A), f(B))$ c'est-à-dire : $\|\vec{v}\| = \|\varphi(\vec{v})\|$.

• Montrons que l'application φ conserve le produit scalaire. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point de $\mathcal{P}$, B et C les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, A', B' et C' leurs images respectives par f.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}[AC^2 - AB^2 - BC^2]$$

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}[A'C'^2 - A'B'^2 - B'C'^2]$$

or : $AC = A'C', \quad AB = A'B', \quad BC = B'C'$

d'où : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{B'C'}$

c'est-à-dire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v})$.

(On remarque que si une application conserve le produit scalaire alors elle conserve la norme).

• Montrons que φ est une application linéaire :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\|\varphi(\vec{u} + \vec{v}) - \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2$$
$$= \|\varphi(\vec{u} + \vec{v})\|^2 + \|\varphi(\vec{u})\|^2 + \|\varphi(\vec{v})\|^2 - 2\varphi(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \varphi(\vec{u})$$
$$- 2\varphi(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \varphi(\vec{v}) + 2\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v})$$

D'après ce qui précède φ conserve la norme et le produit scalaire d'où :

$$\begin{aligned}\|\varphi(\vec{u}+\vec{v})-\varphi(\vec{u})-\varphi(\vec{v})\|^2 &= \|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{u}-2(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{v}+2\vec{u}\,.\,\vec{v}\\ &= \|(\vec{u}+\vec{v})-\vec{u}-\vec{v}\|^2\\ &= \|\vec{0}\|^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

d'où : $\varphi(\vec{u}+\vec{v})-\varphi(\vec{u})-\varphi(\vec{v})=\vec{0}$

c'est-à-dire : $\varphi(\vec{u}+\vec{v})=\varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{v})$.

Soit α un nombre réel, en calculant $\|\varphi(\alpha\vec{u})-\alpha\varphi(\vec{u})\|^2$, on montre de même que $\varphi(\alpha\vec{u})=\alpha\varphi(\vec{u})$.

On a ainsi montré que :

- l'application vectorielle associée à une isométrie conserve la norme et le produit scalaire
- toute application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui conserve le produit scalaire est linéaire

et :

Théorème

L'application vectorielle φ associée à une isométrie f, définie par :

$$\forall M\in\mathcal{S}\quad \forall N\in\mathcal{S}\quad \varphi(\overrightarrow{MN})=\overrightarrow{f(M)f(N)}$$

est une application linéaire.

Question 48 *Le plan est rapporté à un repère orthonormé du plan.*
Soit f l'application ponctuelle d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = 3x-4 \\ y' = -3y-2 \end{cases} \text{ dans ce repère.}$$

Soit h l'homothétie de centre $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ de rapport 3.

1) Donner l'expression analytique de h^{-1} puis celle de l'application s égale à $h^{-1}\circ f$.

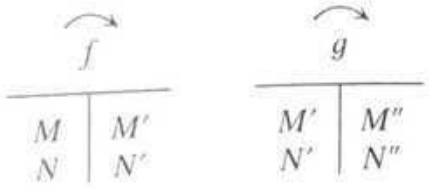
2) Caractériser les applications s et f.

3) Déterminer les applications vectorielles φ, ψ et σ associées respectivement à f, h et s.

4) Quelle égalité peut-on écrire avec φ, ψ et σ?
Sont-elles toutes trois linéaires?

Plus généralement : soient f et g deux applications ponctuelles dont les applications vectorielles φ et ψ associées sont linéaires.

Soit $\vec{v}$ un vecteur de représentant (M, N) :



On a :

$$\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{M'N'}$$
$$\psi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{M''N''}$$
$$\psi \circ \varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{M''N''}$$
$$= \overrightarrow{g \circ f(M) g \circ f(N)}.$$

Ainsi $\psi \circ \varphi$ est associée à $g \circ f$, et comme φ et ψ sont linéaires, $\psi \circ \varphi$ l'est.

Théorème

La composée de deux applications ponctuelles f et g dont les applications vectorielles associées φ et ψ sont linéaires, a pour application vectorielle associée l'application linéaire $\psi \circ \varphi$.

Remarques :

- Puisque une similitude est la composée d'une homothétie et d'une isométrie, et que les applications vectorielles associées à une homothétie et à une isométrie sont linéaires, on a le résultat suivant :

Toute similitude a une application vectorielle associée linéaire.

- On démontre alors que toute similitude a une expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = ax + cy + k \\ y' = bx + dy + \ell \end{cases}$ où $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire associée, et k et ℓ deux nombres réels.

- Si f est une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ ayant pour application vectorielle associée φ, alors on a :

f est bijective si et seulement si φ est bijective.

Réponses aux questions

Q 1

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$. Soient M et M' deux points du plan. On a :

$$M = t(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$\iff \overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$$
$$\iff \begin{cases} M \text{ est le translaté de } M' \\ \text{par la translation} \\ \text{de vecteur } -\vec{u}. \end{cases}$$

Ainsi t est bijective et son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Puisque un vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est nul si et seulement si $M' = M$, la translation de vecteur nul est l'application identique du plan : $\mathrm{id}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M \longmapsto M$.

Q 2

Soient t la translation de vecteur $\vec{u}$, M et N deux points du plan.

t	
M	M'
N	N'

On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$

d'où : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

ce qui est équivalent à $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Puisque $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, les normes de ces vecteurs sont égales, c'est-à-dire les distances $M'N'$ et MN sont égales; t est donc une isométrie.

Soit f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant la propriété donnée. Soit A un point fixé du plan d'image A' par f. Notons $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Quel que soit le point M d'image M' par f on a $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ d'où $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$; f est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Q 3

Soit M un point du plan. M est invariant par t si et seulement si $\overrightarrow{MM} = \vec{u}$, or $\vec{u}$ est non nul donc aucun point M n'est invariant par t.

Puisque la translation de vecteur nul est $id_{\mathcal{P}}$, tout point du plan est invariant par cette translation.

Q 4

Soient t et t' les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et M un point du plan, M' son image par t, M'' l'image de M' par t'. On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$, d'où, d'après l'égalité de Chasles $\overrightarrow{MM''} = \vec{v} + \vec{u}$.

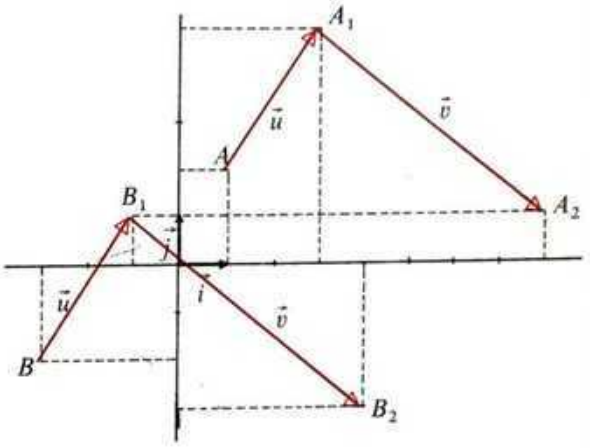
Ainsi $t' \circ t$ est la translation de vecteur $\vec{v} + \vec{u}$.

On en déduit que :

- la composition des applications est une loi de composition interne dans $\mathcal{C}$.
- cette loi $\circ$ est associative et commutative car $+$ l'est dans $\mathfrak{V}$.

L'élément neutre pour la loi $\circ$ est $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ c'est-à-dire la translation de vecteur nul; et toute translation a pour application réciproque une translation. Donc $(\mathcal{C}, \circ)$ est un groupe commutatif.

Q 5



$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}.$$

On a $\overrightarrow{AA_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ d'où : les coordonnées de A_1 sont $2 + 1$ et $3 + 2$ soit $(3, 5)$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = 5\vec{i} - 4\vec{j} \quad \text{d'où} \quad A_2\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}.$$

De même :

$$\overrightarrow{BB_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{d'où} \quad B_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = 5\vec{i} - 4\vec{j} \quad \text{d'où} \quad B_2\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad M_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}.$$

On a :

$$M_1 = t_1(M) \iff \overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$$
$$\iff (x_1 - x)\vec{i} + (y_1 - y)\vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 - x = 2 \\ y_1 - y = 3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y + 3 \end{cases}$$

$M_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$. On a :

$M_2 = t_2(M_1) \iff \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$

$M_2 = t_2(M_1) \iff (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$

$$\iff \begin{cases} x_2 - x_1 = 5 \\ y_2 - y_1 = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = x_1 + 5 \\ y_2 = y_1 - 4 \end{cases}$$

On a donc :

$$M_2 = t_2 \circ t_1(M) \iff \begin{cases} x_2 = (x + 2) + 5 \\ y_2 = (y + 3) - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = x + 7 \\ y_2 = y - 1 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$M_2 = t_2 \circ t_1(M) \iff \begin{cases} x_2 - x = 7 \\ y_2 - y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{MM_2} = 7\vec{i} - \vec{j}$$

$t_2 \circ t_1$ est donc la translation de vecteur $7\vec{i} - \vec{j}$ (remarque $\vec{u} + \vec{v} = 7\vec{i} - \vec{j}$).

Q 6

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux points du plan. On a :

$$M' = t(M) \iff \overrightarrow{MM'} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\iff \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

$$M' \in t(D) \iff \exists M \in (D) \quad M' = t(M)$$

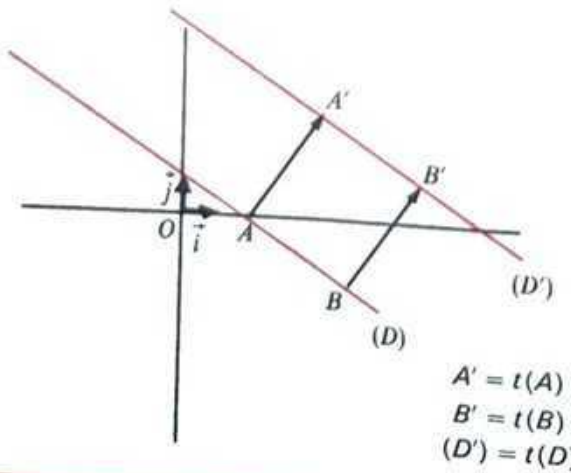
$$\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 3 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff 2(x' - 2) + 3(y' - 3) - 4 = 0$$

$$\iff 2x' + 3y' - 17 = 0$$

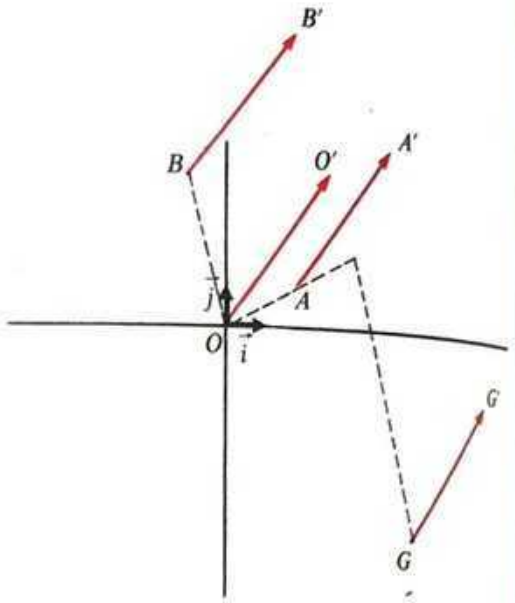
$t(D)$ est donc la droite (D') d'équation :

$2x + 3y - 17 = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



$A' = t(A)$
$B' = t(B)$
$(D') = t(D)$

Q 7



G est défini par : $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$. Ses coordonnées sont donc $(6, -6)$.
L'expression analytique de t est :

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}$$

d'où :

	t		
A	A'	$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$A'\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
B	B'	$B\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$B'\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$
O	O'	$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$O'\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
G	G'	$G\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$	$G'\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{O'G'} + 2\overrightarrow{A'G'} - 2\overrightarrow{B'G'}$

$= (9 - 3)\vec{i} + (-2 - 4)\vec{j} + 2[(9 - 5)\vec{i}$

$+ (-2 - 5)\vec{j}] - 2[(9 - 2)\vec{i} + (-2 - 8)\vec{j}]$

$= (6 + 8 - 14)\vec{i} + (-6 - 14 + 20)\vec{j}$

$= \vec{0}$.

G' est le barycentre de $(O', 1)$, $(A', 2)$ et $(B', -2)$.

Q 8

L'image de l'axe des abscisses du repère $(O, \vec{i})$ est la parallèle passant par A c'est-à-dire le nouvel axe des abscisses : celui de repère $(A, \vec{i})$.
De même l'image de $(O, \vec{j})$ est $(A, \vec{j})$. On a, d'après Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

c'est-à-dire :

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + (X\vec{i} + Y\vec{j})$$

d'où les formules demandées.

Q 9

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
Soient M et M' deux points du plan.
On a :

$$M' = h(M) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

Or k est non nul d'où :

$$M = h(M)$$
$$\iff \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$$
$$\iff \begin{cases} M \text{ est l'image de } M' \text{ par l'homothétie de centre } \Omega \text{ et de rapport } \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Ainsi h est une bijection et son application réciproque est l'homothétie de même centre Ω et de rapport inverse $\frac{1}{k}$.

Q 10

$$M' = h(M) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

et : $N' = h(N) \iff \overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}.$

De plus : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'}$

d'où : $\overrightarrow{M'N'} = -k\overrightarrow{\Omega M} + k\overrightarrow{\Omega N}$
$= k(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N})$
$= k\overrightarrow{MN}.$

Q 11

Soit M un point du plan.
M est invariant par h si et seulement si $h(M) = M$.

c'est-à-dire : $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M}$

ou encore : $(1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$

• si k est différent de 1, alors on a :

$$(1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0} \iff M = \Omega$$

donc si k est différent de 1 alors h a un et un seul point invariant Ω

• si k est égal à 1, alors l'équation $(1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$ est vérifiée quel que soit le point M; d'ailleurs h est alors l'application $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$. Dans ce cas l'ensemble des points invariants par h est le plan $\mathcal{P}$ lui-même.

Q 12

Soit A un point fixe du plan d'image A' par f.
Soit M un point du plan.

M est invariant par f si et seulement si

$$M = f(M)$$

c'est-à-dire, d'après la propriété de f,

$$\overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{AM}.$$

Or on a :

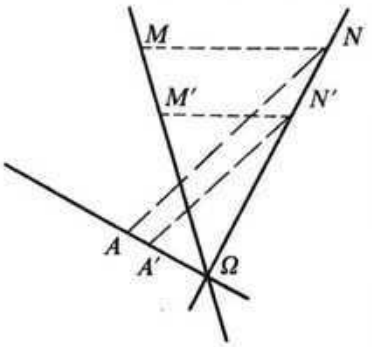
$$\overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{AM} \iff \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AM}$$
$$\iff (1-k)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'}$$

Puisque k est différent de 1, il existe un point et un seul invariant par f : c'est le point Ω défini par :

$$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}.$$

Soit N un point quelconque du plan, d'image N' par f. D'après la propriété de f on a : $\overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}$.
Ainsi f est l'homothétie de centre Ω et de rapport k (on a $k \neq 0$).
Pour trouver le point Ω graphiquement il suffit de prendre l'intersection de droites (MM') et (NN')

où $M' = f(M)$
et $N' = f(N)$



l'hypothèse sur f se traduit par :

$$(M'N') \parallel (MN)$$
$$(A'N') \parallel (AN)$$

Q 13

on a :

$$M_1 = h_1(M) \iff \overrightarrow{AM_1} = 3\overrightarrow{AM}$$
$$\iff (x_1 - 1)\vec{i} + (y_1 - 2)\vec{j}$$
$$= 3[(x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j}]$$
$$\iff \begin{cases} x_1 - 1 = 3(x-1) \\ y_1 - 2 = 3(y-2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 = 3x - 2 \\ y_1 = 3y - 4. \end{cases}$$

Soit $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{P}$, chercher l'existence d'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$ tel que $M_2 = h_1(M)$, revient à chercher les nombres x et y tels que

$$\begin{cases} x_2 = 3x - 2 \\ y_2 = 3y - 4 \end{cases}.$$

Or ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_2 + 2}{3} \\ y = \dfrac{y_2 + 4}{3} \end{cases}$$

donc h_1 est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$ et la représentation analytique de son application réciproque est :

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y+4}{3}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned} M = h_2(M_1) &\iff \overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM_1} \\ &\iff (x'-1)\vec{i} + (y'-2)\vec{j} \\ &\qquad = -2[(x_1-1)\vec{i} + (y_1-2)\vec{j}] \\ &\iff \begin{cases} x'-1 = -2(x_1-1) \\ y'-2 = -2(y_1-2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x' = -2x_1 + 3 \\ y' = -2y_1 + 6. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} M' = h_2 \circ h_1(M) &\iff \begin{cases} x' = -2(3x-2) + 3 \\ y' = -2(3y-4) + 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x' = -6x + 7 \\ y' = -6y + 14. \end{cases} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AM'}$ a pour coordonnées $x' - 1$ et $y' - 2$ c'est-à-dire $-6x + 6$ et $-6y + 12$.

Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $x - 1$ et $y - 2$, d'où :

$$\overrightarrow{AM'} = -6\overrightarrow{AM}.$$

Ceci prouve que $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre A et de rapport -6.

Remarque. $-6 = 3 \times (-2)$, on a le produit des rapports de h_1 et h_2.

Q 14

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} M_2 = h_2(M) &\iff \overrightarrow{AM_2} = -2\overrightarrow{AM} \\ &\iff \begin{cases} x_2 - 1 = -2(x-1) \\ y_2 - 2 = -2(y-2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_2 = -2x + 3 \\ y_2 = -2y + 6. \end{cases} \end{aligned}$$

De même, on a :

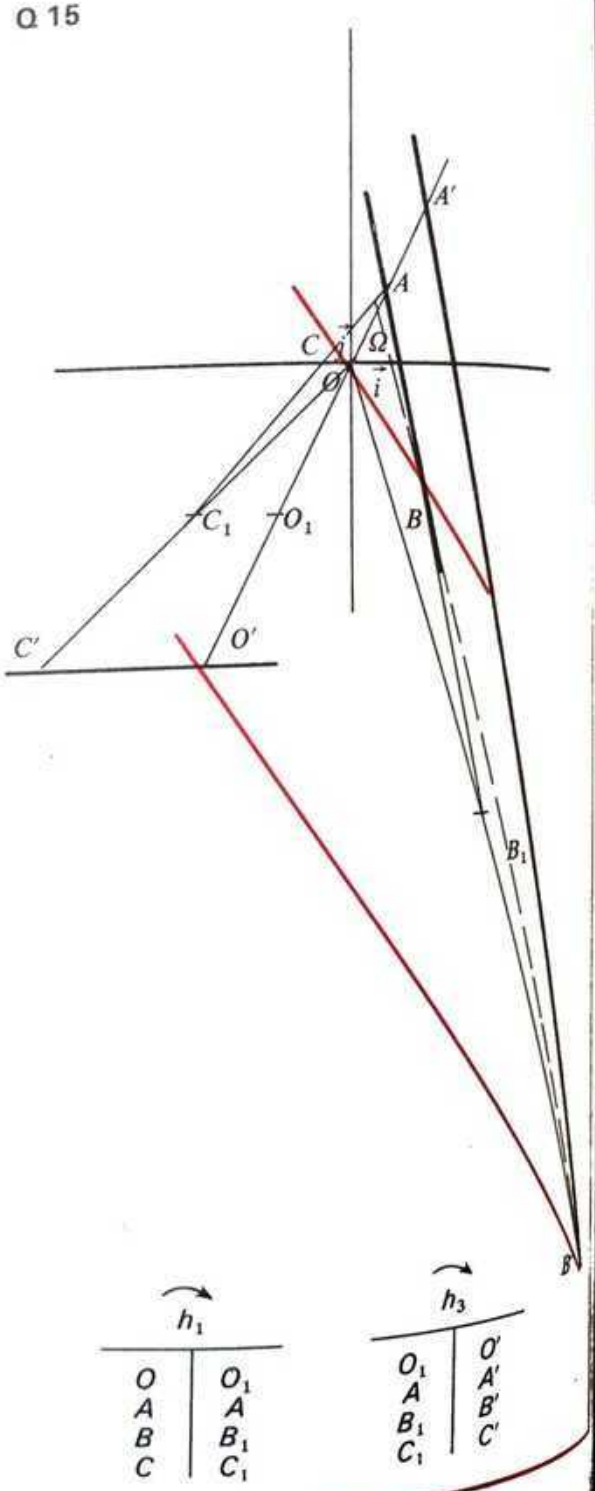
$$\begin{aligned} M'' = h_1(M_2) &\iff \overrightarrow{AM''} = 3\overrightarrow{AM_2} \\ &\iff \begin{cases} x'' = 3x_2 - 2 \\ y'' = 3y_2 - 4. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} M'' = h_1 \circ h_2(M) &\iff \begin{cases} x'' = 3(-2x+3) - 2 \\ y'' = 3(-2y+6) - 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x'' = -6x + 7 \\ y'' = -6x + 14. \end{cases} \end{aligned}$$

On constate que, comme dans la question 13, $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de centre A et de rapport -6; on a :
$h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ car elles ont même expression analytique.

Q 15



h_1	
O	O_1
A	A
B	B_1
C	C_1

h_3	
O_1	O'
A	A'
B_1	B'
C_1	C'

On constate que les droites :
$(O'C')$ et (OC) sont parallèles
$(O'B')$ et (OB) sont parallèles
$(A'B')$ et (AB) sont parallèles...

Il semble donc que $h_3 \circ h_1$ soit une homothétie, son rapport est alors 6 car $\overrightarrow{A'B'} = 6\overrightarrow{AB}$ (constaté sur le dessin).
L'expression analytique de h_1 est (voir Q 13 et 14) :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4. \end{cases}$$

Celle de h_3 est :

$$\begin{cases} x'' = 2x' \\ y'' = 2y'. \end{cases}$$

Donc celle de $h_3 \circ h_1$ est :

$$\begin{cases} x'' = 6x - 4 \\ y'' = 6y - 8. \end{cases}$$

Soient x_1 et y_1 les coordonnées de M
x_2 et y_2 les coordonnées de N
celles de M'' sont $6x_1 - 4$, $6y_1 - 8$
celles de N'' sont $6x_2 - 4$, $6y_2 - 8$
donc celles de $\overrightarrow{M''N''}$ sont $6(x_2 - x_1)$, $6(y_2 - y_1)$
on a ainsi :

$$\overrightarrow{M''N''} = 6\overrightarrow{MN}$$

$h_3 \circ h_1$ est donc une homothétie de rapport 6 et de centre Ω :
Ω est le point d'intersection des droites (AA') et (BB') (par exemple).
On a, par définition de h_3 :

$$\overrightarrow{OM''} = 2\overrightarrow{OM'}$$

par définition de h_1 :

$$\overrightarrow{AM'} = 3\overrightarrow{AM}$$

d'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA} + 3(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) = -2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OM}$$

d'où : $\overrightarrow{OM''} = -4\overrightarrow{OA} + 6\overrightarrow{OM}.$
Ainsi on a :

$$\overrightarrow{O\Omega} = -4\overrightarrow{OA} + 6\overrightarrow{O\Omega}$$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$
les coordonnées de Ω sont donc :

$$\frac{4}{5} \text{ et } \frac{8}{5}.$$

Q 16

L'expression analytique de h est :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$$

(voir questions précédentes)

celle de t est :

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' + 3 \end{cases}$$

donc celle de $t \circ h$ est :

$$\begin{cases} x'' = 3x \\ y'' = 3y - 1. \end{cases}$$

Le point $\Omega\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est invariant par $t \circ h$ si et seulement si $\begin{cases} x = 3x \\ y = 3y - 1. \end{cases}$
Donc $t \circ h$ admet un seul point invariant Ω de coordonnées 0 et 1/2.
Soit M un point du plan de coordonnées x et y.
Son image M'' par $t \circ h$ a pour coordonnées $3x$ et $3y - 1$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M''}$ est :

$$3x\vec{i} + \left(3y - 1 - \frac{1}{2}\right)\vec{j}$$

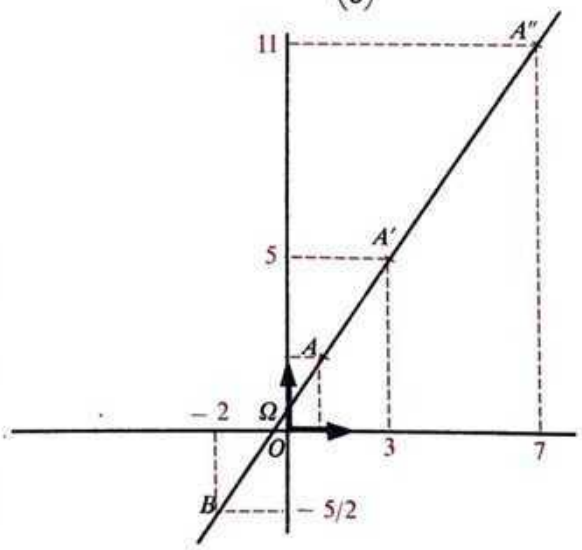
c'est-à-dire :

$$3\left(x\vec{i} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{j}\right).$$

Or : $\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{i} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{j}.$
D'où :

$$\overrightarrow{\Omega M''} = 3\overrightarrow{\Omega M}$$

$t \circ h$ est donc l'homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et de rapport 3.
On a $h(A) = A$ donc $t \circ h(A)$ est le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ c'est-à-dire $A'\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.



$t(A) = A'$ donc $h \circ t(A)$ est le point A'' tel que $\overrightarrow{AA''} = 3\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{AA''} = 6\vec{i} + 9\vec{j} \quad \text{d'où} \quad A''\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

A' et A'' sont distincts donc $h \circ t$ et $t \circ h$ sont différentes.
En utilisant les expressions analytiques de h et de t on trouve celle de $h \circ t$:

$$\begin{cases} x_2 = 3(x+2) - 2 \\ y_2 = 3(y+3) - 4 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_2 = 3x + 4 \\ y_2 = 3y + 5. \end{cases}$$

Là encore on a un seul point invariant B dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x = 3x + 4 \\ y = 3y + 5. \end{cases}$$

On a : $B\begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$.

Soit M un point du plan d'image M_1 par t et M_2 par $h \circ t$.
On a :

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM_2} = 3\overrightarrow{AM_1}$$

de plus : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$

d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM_2} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_2} \\ &= \overrightarrow{BA} + 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MM_1}) \\ &= 3\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{AB} + 3(2\vec{i} + 3\vec{j}) \end{aligned}$$

et comme :

$$2\overrightarrow{AB} = -6\vec{i} - 9\vec{j}$$

on a :

$$\overrightarrow{BM_2} = 3\overrightarrow{BM}$$

donc $h \circ t$ est l'homothétie de centre $B\begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$ et de rapport 3.

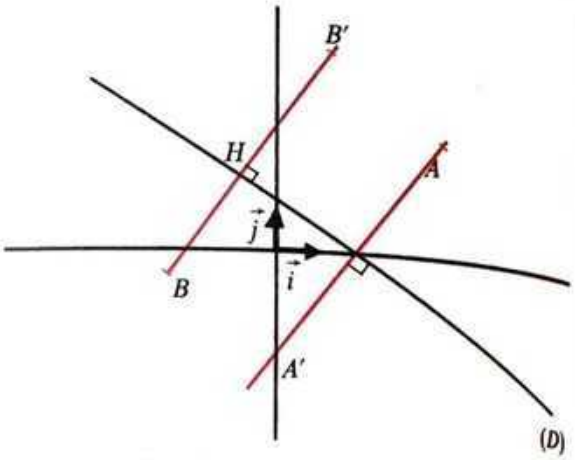
Q 17

Soit S la symétrie axiale d'axe (D) parallèlement à (D') (avec (D) et (D') non parallèles).
Soit M un point du plan d'image M' par S, et de projeté H sur (D) parallèlement à (D'). On a :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}.$$

D'où M est invariant par S si et seulement si $M' = M$ c'est-à-dire $M = H$. Ainsi M est invariant par S si et seulement si M appartient à (D). L'ensemble des points invariants par S est (D).

Q 18



1) $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$
$\overrightarrow{AA'} = (\alpha - 4)\vec{i} + (\beta - 3)\vec{j}$.

$\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(\alpha - 4)(-3) + (\beta - 3) \cdot 2 = 0$$

c'est-à-dire :

$$-3\alpha + 2\beta = -6 \qquad (1)$$

2) Le milieu I de $[AA']$ a pour coordonnées : $\frac{4+\alpha}{2}$ et $\frac{3+\beta}{2}$.
Ainsi on a :

$$\begin{aligned} I \in (D) &\iff 2\left(\frac{4+\alpha}{2}\right) + 3\left(\frac{3+\beta}{2}\right) - 4 = 0 \\ &\iff 2\alpha + 3\beta = -9 \qquad (2) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} -6\alpha + 4\beta = -12 \\ 6\alpha + 9\beta = -27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = -3 \\ 2\alpha = -9 - 3\beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

le point A' a pour coordonnées 0 et -3. Soient a et b les coordonnées de H, $\vec{n}$ le vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$: $\vec{n}$ est un vecteur normal à (D). On a :

$\overrightarrow{BH}$ est normal à $(D) \iff \overrightarrow{BH}$ est colinéaire à $\vec{n}$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{BH} = k\vec{n}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \exists k \in \mathbb{R} \\ a = 2k - 3 \\ b = 3k - 1 \end{pmatrix}$$

H appartient à (D) se traduit alors par :

$$2(2k - 3) + 3(3k - 1) - 4 = 0$$

c'est-à-dire : $13k - 13 = 0$

$k = 1$

soit : $a = -1$ et $b = 2$.

d'où :

Les coordonnées de H sont -1 et 2.

Soient x et y les coordonnées de B'.

$\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BH}$ est équivalent à :

$$\begin{cases} x + 3 = 2(-1 + 3) \\ y + 1 = 2(2 + 1) \end{cases}$$

soit : $x = 1$ et $y = 5$.

Les coordonnées de B' sont 1 et 5.

Q 19

1re méthode : On a :

$$\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u} \iff -3(x' - x) + 2(y' - y) = 0$$
$$\iff -3x' + 2y' = -3x + 2y \qquad (3)$$

et :

le milieu de $[MM']$ appartient à (D) est équivalent à :

$$2\left(\frac{x + x'}{2}\right) + 3\left(\frac{y + y'}{2}\right) - 4 = 0$$

c'est-à-dire :

$$2x' + 3y' = 8 - 2x - 3y. \qquad (4)$$

Résolvons le système formé des deux équations (3) et (4) d'inconnues x' et y'.

On a :

$$\begin{cases} -3x' + 2y' = -3x + 2y \\ 2x' + 3y' = 8 - 2x - 3y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -6x' + 4y' = -6x + 4y \\ 6x' + 9y' = 24 - 6x - 9y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 13y' = 24 - 12x - 5y \\ 2x' = 8 - 2x - 3y - 3y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{2}\left[8 - 2x - 3y - \frac{3}{13}(24 - 12x - 5y)\right] \\ y' = \frac{1}{13}(24 - 12x - 5y) \end{cases}$$

l'expression analytique de $S_{(D)}$ est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(16 + 5x - 12y) \\ y' = \frac{1}{13}(24 - 12x - 5y). \end{cases}$$

2e méthode : Soit $H\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ le projeté orthogonal de M sur (D). On a donc :

$$(5) \begin{cases} \overrightarrow{MH} \text{ colinéaire à } \vec{n} \\ H \in (D) \end{cases}$$

On a :

$$(5) \iff \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{MH} = t\vec{n} \\ 2x_1 + 3y_1 - 4 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \left(\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x_1 = 2t + x \\ y_1 = 3t + y \end{cases} \text{ et } 2(2t + x) + 3(3t + y) - 4 = 0 \right)$$
$$\iff \left(\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x_1 = 2t + x \\ y_1 = 3t + y \end{cases} \text{ et } t = \frac{-1}{13}(2x + 3y - 4) \right)$$
$$\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{13}(2x + 3y - 4) + x \\ y_1 = -\frac{3}{13}(2x + 3y - 4) + y. \end{cases}$$

De plus :

$$M' = S_{(D)}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$$
$$\iff \begin{cases} x' - x = 2(x_1 - x) \\ y' - y = 2(y_1 - y) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x' = x - \frac{4}{13}(2x + 3y - 4) \\ y' = y - \frac{6}{13}(2x + 3y - 4). \end{cases}$$

L'expression analytique de $S_{(D)}$ est donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 16) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 24). \end{cases}$$

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan. On a :

$$M \in S_{(D)}(\Delta) \iff \exists N \in (\Delta) \quad M = S_{(D)}(N).$$

Or on sait que $S_{(D)}$ est involutive donc on a :

$$M = S_{(D)}(N) \iff N = S_{(D)}(M)$$

d'où :

$$M \in S_{(D)}(\Delta)$$
$$\iff \left(\exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad x + y = 1 \text{ et } \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 16) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 24) \end{cases} \right)$$

d'où :

$$M \in S_{(D)}(\Delta) \iff \frac{1}{13}(5x - 12y + 16) + \frac{1}{13}(-12x - 5y + 24) = 1.$$

Ainsi $S_{(D)}(\Delta)$ est l'ensemble des points de coordonnées x et y telles que :

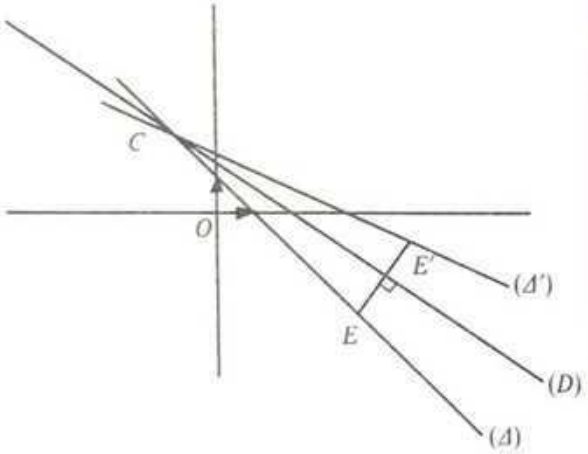
$$5x - 12y + 16 - 12x - 5y + 24 = 13$$

$S_{(D)}(\Delta)$ est donc la droite (Δ') d'équation :

$$-7x - 17y + 27 = 0.$$

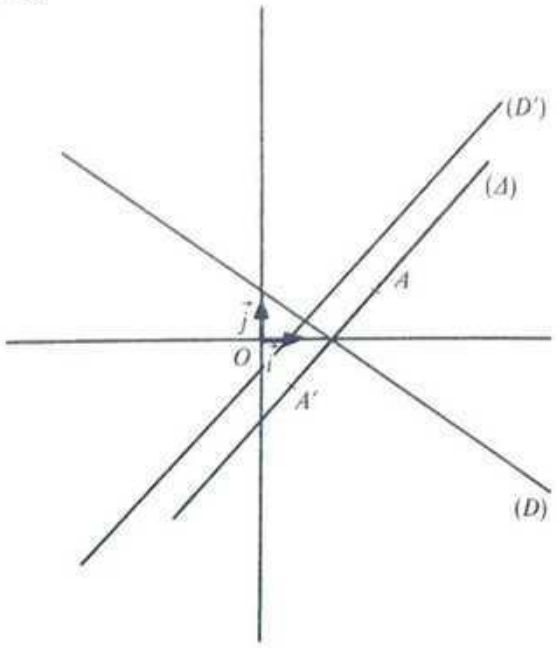
Pour le tracé on utilise le point $C\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ d'intersection de (D) et (Δ) qui est invariant, et un point E de (Δ) distinct de C $\left(\text{ici } E\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right)$ d'image E' par $S_{(D)}$. On a :

$$(\Delta') = (CE') \qquad E'\begin{pmatrix}72/13\\-9/13\end{pmatrix}.$$



Puisqu'une symétrie axiale transforme une droite en une droite, on pouvait écrire $S_{(D)}(\Delta) = (CE')$ pour connaître une équation de (Δ').

Q 20



Les vecteurs $-3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D'); puisque ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan. On a :

$$M \in (\Delta) \iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{i}+\vec{j}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x-3=k \\ y-1=k \end{cases}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x=3+k \\ y=1+k \end{cases}$$

H_0 est le point d'intersection de (D) et (Δ) donc ses coordonnées x_0 et y_0 vérifient :

$$\exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x_0 = 3+k \\ y_0 = 1+k \end{cases}$$

et $\qquad 2x_0 + 3y_0 - 4 = 0$

d'où :

$$\exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x_0 = 3+k \\ y_0 = 1+k \\ 2(3+k)+3(1+k)-4=0 \end{cases}$$

d'où :

$$\exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} k = -1 \\ x_0 = 2 \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées de H_0 sont donc 2 et 0.
Soient a et b les coordonnées de A'. On a :

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM_0}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a-3 = 2(2-3) \\ b-1 = 2(0-1) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Les coordonnées de A' sont 1 et -1.

Plus généralement, soient $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan, $H\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ son projeté sur (D) parallèlement à (D'), et $M\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ son image par S.

On a :

$$\overrightarrow{MH} \text{ colinéaire à } \vec{i}+\vec{j} \quad \text{et} \quad H \in (D)$$

d'où :

$$\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x_1 - x = t \\ y_1 - y = t \end{cases}$$

et :

$$2x_1 + 3y_1 - 4 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x_1 = x + t \\ y_1 = y + t \end{cases}$$

et :

$$2(x + t) + 3(y + t) - 4 = 0$$

ou encore :

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad t = \frac{-1}{5}(2x + 3y - 4)$$

et :

$$\begin{cases} x_1 - x = t \\ y_1 - y = t. \end{cases}$$

Par ailleurs on a :

$$M' = S(M) \iff \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$$

d'où :

$$M' = S(M) \iff \begin{cases} x' - x = 2(x_1 - x) \\ y' - y = 2(y_1 - y). \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\begin{cases} x' = -\frac{2}{5}(2x + 3y - 4) + x \\ y' = -\frac{2}{5}(2x + 3y - 4) + y. \end{cases}$$

L'expression analytique de S est donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(x - 6y + 8) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x - y + 8). \end{cases}$$

Q 21

Soient P un point de (D) et M un point du plan d'images respectives M' et M'' par $S_{(D)}$ et $S_{(D')} \circ S_{(D)}$. On note H le projeté orthogonal de M sur (D) ; on a :

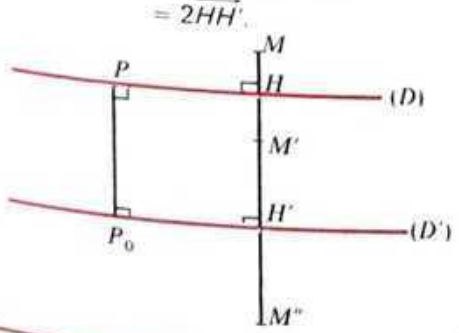
$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HM'}.$$

On note H' le projeté orthogonal de M' (ou de M) sur (D') ; on a :

$$\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'H'}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'} = 2\overrightarrow{HH'}.$$



Soit P_0 le projeté orthogonal de P sur (D'), puisque (D) et (D') sont parallèles, $PHH'P_0$ est un rectangle et on a $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{PP_0}$.
D'où, pour tout M du plan, d'image M' par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ on a :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{PP_0}.$$

Ainsi $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{PP_0}$ c'est-à-dire de vecteur $2\vec{u}$ tel que $t_{\vec{u}}(D) = (D')$.
On montrerait de même que $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{P_0P}$.
Donc, on a :

$$S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(D')}$$

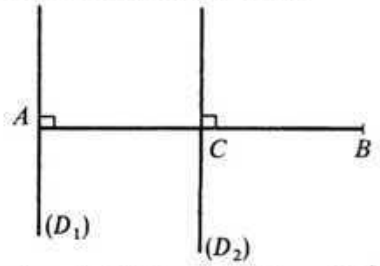
si et seulement si :

$$2\overrightarrow{PP_0} = 2\overrightarrow{P_0P}$$

c'est-à-dire si et seulement si $P_0 = P$ ou encore si et seulement si (D) et (D') sont confondues; dans ce cas la composée est la translation de vecteur nul c'est-à-dire l'application identique du plan.

Q 22

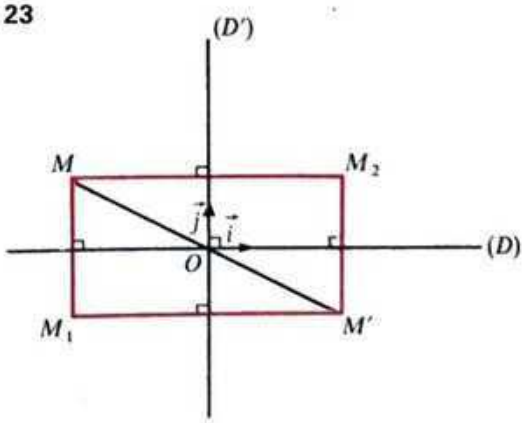
Soient (D_1) une droite du plan telle que $\vec{v}$ soit normal à (D_1) et A un point de (D_1).



On considère le point C du plan tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{v}$ (c'est le milieu de $[AB]$ où (A, B) est un représentant de $\vec{v}$) et (D_2) la droite parallèle à (D_1) passant par C. (On a $(D_2) = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(D_1)$.) On a, d'après la question 21, $S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire $\vec{v}$ car C est le projeté orthogonal de A sur (D_2).

Remarque. Il suffit de se donner le point A pour avoir (D_1) et (D_2) uniques.

Q 23

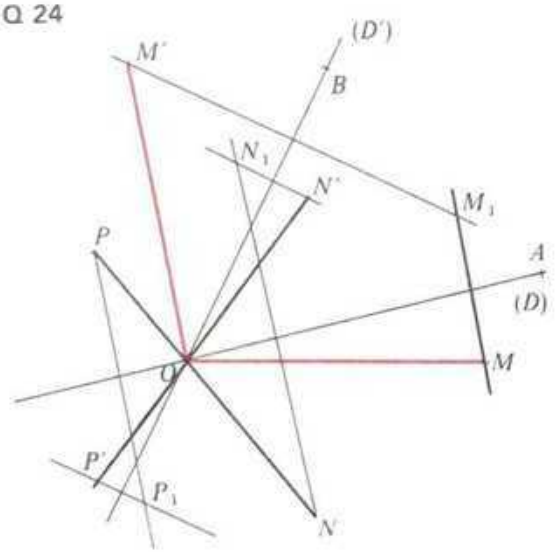


Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs directeurs respectivement de (D) et (D').
Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal. L'expression analytique de $S_{(D)}$ est $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ celle de $S_{(D')}$ est $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$
Donc celle de $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$. Ainsi $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est la symétrie centrale de centre O.
De même l'expression analytique de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$
D'où :

$$S_{(D)} \circ S_{(D')} = S_O.$$

On a ainsi montré que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ et $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ sont égales et égales à S_O.
Il suffit de prendre deux droites perpendiculaires en A et d'appliquer ce qui précède.

Q 24



Sur la figure on constate :

$$\widehat{(OM, OM')} = \widehat{(ON, ON')} = \widehat{(OP, OP')}$$

(leur mesure est 103°) :

$$OM = OM'$$
$$ON = ON'$$
et : $$OP = OP'$$

(vérifier au compas) (on remarque aussi que $\widehat{AOB}$ a pour mesure 51,5° qui est la moitié de 103°).
Un point du plan est invariant par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ si et seulement si il a même image par $S_{(D')}$ et par $S_{(D)}$ car la réciproque de $S_{(D')}$ est $S_{(D')}$.
Donc l'ensemble des points invariants par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est le singleton $\{0\}$. Puisque $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ sont des isométries, leur composée en est une.
Puisque chaque symétrie transforme un angle orienté en son opposé, la composée conserve l'orientation. Les transformations $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ et $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ ne sont pas égales (voir pour un point distinct de O) mais sont réciproques l'une de l'autre (car une symétrie est une involution).

Q 25

La rotation de centre O et d'angle nul est l'application identique du plan (les demi-droites $[OM')$ et $[OM)$ sont confondues et comme $OM' = OM$, on a $M' = M$).
La rotation de centre O et d'angle plat est la symétrie centrale de centre O (les demi-droites $[OM')$ et $[OM)$ sont opposées, et $OM' = OM$ donc O est le milieu de $[MM']$).
Si $(\hat{\alpha})$ est non nul, alors quel que soit le point M distinct de O, les demi-droites $[OM)$ et $[OM')$ sont distinctes donc M et M' sont distincts; le seul point invariant est donc le point O.

Q 26

Quels que soient les points M et M' du plan distincts de O, on a :

$$\widehat{(OM, OM')} = (\hat{\alpha}) \iff \widehat{(OM', OM)} = -(\hat{\alpha}).$$

Donc la rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$ et son application réciproque est la rotation de même centre O et d'angle opposé : $-(\hat{\alpha})$.
Quels que soient les points M, M' et M'' du plan, si :

$$\widehat{(OM, OM')} = (\hat{\alpha})$$

et :

$$\widehat{(OM', OM'')} = (\hat{\beta})$$

alors :

$$\widehat{(OM, OM'')} = (\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$$

et si :

$$OM = OM' \quad \text{et} \quad OM' = OM''$$

alors : $$OM = OM''.$$

Donc la composée (dans un ordre quelconque car l'addition des angles est commutative) des rotations de centre O et d'angles $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ est la rotation de centre O et d'angle la somme $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$.

Q 27

• Soient (D) et (D') deux droites sécantes en O. D'après la question 24. Le point O est le seul point invariant par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.
Soient A et M deux points du plan distincts du point O. On a vu dans la question 24 que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ conserve les angles orientés d'où :

$$\widehat{(OA, OM)} = \widehat{(OA', OM')}$$

où A' et M' sont les images respectives de A et M par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

Donc :

$$\widehat{(OM, OM')} = \widehat{(OA, OA')}.$$

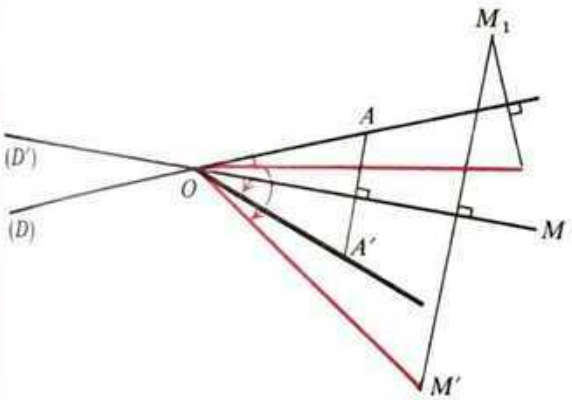
On a vu aussi que $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une isométrie donc $OM = OM$. Ainsi $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la rotation de centre O et d'angle $\widehat{(OA, OA')}$ où A est un point fixé du plan, distinct de O et d'image A' par $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

• Soit r une rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$.

– Si $(\hat{\alpha}) = (\hat{0})$ alors r est l'application identique donc composée d'une quelconque symétrie orthogonale par elle-même.

– Si $(\hat{\alpha}) \neq (\hat{0})$ alors on considère une droite (D) passant par O et un point A de (D) distinct de O et d'image A' par r : on a $(\hat{\alpha}) = \widehat{(OA, OA')}$.

Soit (D') la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{AOA'}$ c'est-à-dire, puisque $OA = OA'$, la médiatrice de $[AA']$. (D) et (D') sont sécantes en O car A' est distinct de A (car $(\hat{\alpha}) \neq (\hat{0})$). D'après ce qui précède $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une rotation, son centre est l'intersection de (D') et de (D) donc c'est O.



Puisque (D') est la médiatrice de $[AA']$ on a $S_{(D')}(A) = A'$ c'est-à-dire :

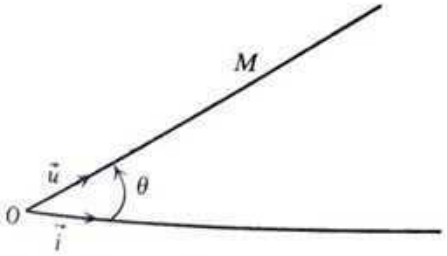
$$S_{(D')} \circ S_{(D)}(A) = A' \quad \text{car} \quad A \in (D);$$

l'angle de la rotation $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est donc $\widehat{(OA, OA')}$ c'est-à-dire $(\hat{\alpha})$.
Ainsi on a :

$$r = S_{(D')} \circ S_{(D)}.$$

Q 28

Soit $[Oz)$ la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{u}$ unitaire tel que MES $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \theta$.



($\vec{u}$ est unique, donc $[Oz)$ est unique). L'unique point M répondant à la question est défini par $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$.
Puisque $\vec{u}$ est unitaire et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé on a :

$$\vec{u} = \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})\,\vec{i} + \sin(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})\,\vec{j}$$

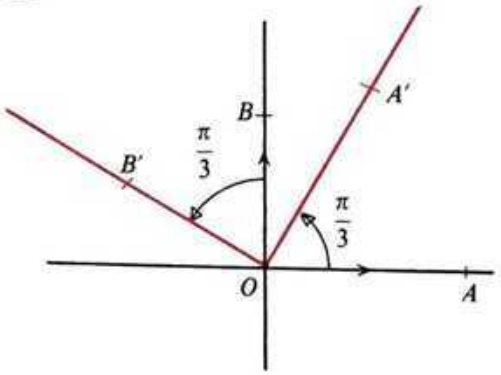
d'où :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos\theta\,\vec{i} + \rho \sin\theta\,\vec{j}.$$

Les coordonnées de M sont donc :

$$\rho \cos\theta \quad \text{et} \quad \rho \sin\theta.$$

Q 29



$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} \quad \text{d'où} \quad \text{MES } (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA'}}) = \frac{\pi}{3}$$

et : $$OA' = OA = 3$$

d'où A' a pour coordonnées polaires 3 et $\frac{\pi}{3}$; ses coordonnées cartésiennes sont donc :

$$3 \cos\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad 3 \sin\frac{\pi}{3}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2\vec{j} \quad \text{d'où} \quad \text{MES } (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$$

et comme :

$$\text{MES } (\widehat{OB, OB'}) = \frac{\pi}{3}$$

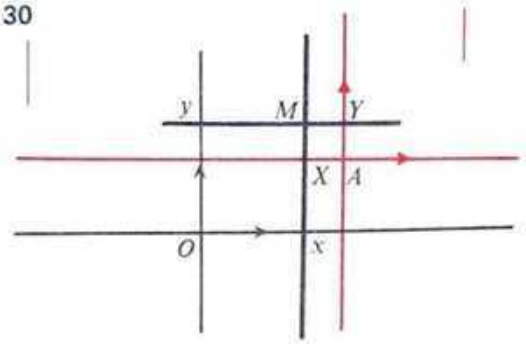
on a :

$$\text{MES } (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OB'}}) = \frac{5\pi}{6}$$

et : $$OB' = OB = 2.$$

Les coordonnées polaires de B' sont donc 2 et $\frac{5\pi}{6}$, et ses coordonnées cartésiennes $-\sqrt{3}$ et 1.

Q 30



Les formules de changement de repère par translation d'axes sont :

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} X' = x' - 2 \\ Y' = y' - 1. \end{cases}$$

Dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ (voir l'exercice 16) l'expression analytique de r est :

$$\begin{cases} X' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ Y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y). \end{cases}$$

En remplaçant X, Y, X' et Y' par leurs expressions ci-dessus on a :

$$\begin{cases} x' - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 2 - y + 1) \\ y' - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 2 + y - 1). \end{cases}$$

L'expression analytique de r dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 1. \end{cases}$$

Q 31

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

donc $\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$ sont unitaires :

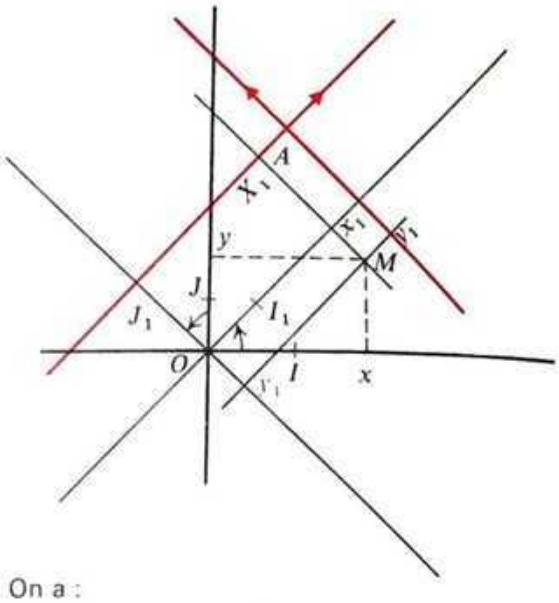
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

d'où : $\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = 0$

$(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ est donc un repère orthonormé.

Les coordonnées polaires de I_1 sont $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, celles de J_1 sont $\left(1, 3\frac{\pi}{4}\right)$; ainsi en notant r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ on a :

$$r(I) = I_1 \quad \text{et} \quad r(J) = J_1.$$



On a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

et :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1$$

d'où :

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) + y_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right).$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y). \end{cases}$$

Le repère $(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ est obtenu par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ à partir de $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ d'où :

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - 1 \\ Y_1 = y_1 - 3 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) - 1 \\ Y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) - 3. \end{cases}$$

Q 32

r	
O	O
I	I'
J	J'

La rotation r est une isométrie d'où :

$$OI' = OI \quad \text{et} \quad OJ' = OJ$$

c'est-à-dire $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ sont unitaires.
La rotation r conserve l'orthogonalité d'où (OI') et (OJ') sont perpendiculaires c'est-à-dire $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ orthogonaux.
Si a est congru à 0 modulo 2π, alors r est l'application identique et les deux repères sont confondus.
Les coordonnées polaires de I' et J' sont respectivement $(1, a)$ et $\left(1, \dfrac{\pi}{2} + a\right)$. Donc leurs coordonnées cartésiennes :

$$(\cos a, \sin a)$$

et :

$$\left(\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Ainsi on a :

$$\vec{i}' = \cos a\, \vec{i} + \sin a\, \vec{j}$$
$$\vec{j}' = -\sin a\, \vec{i} + \cos a\, \vec{j}.$$

On retrouve ces résultats par l'expression analytique de r.

Q 33

Le système :

$$(S) \begin{cases} x = X\cos a - Y\sin a \\ y = X\sin a + Y\cos a \end{cases}$$

est équivalent à :

$$\begin{cases} x\sin a = X\cos a\sin a - Y\sin^2 a \\ -y\cos a = -X\cos a\sin a - Y\cos^2 a \end{cases}$$

d'où :

$$x\sin a - y\cos a = -Y(\sin^2 a + \cos^2 a)$$

donc :

$$Y = -x\sin a + y\cos a.$$

De même (S) est équivalent à :

$$\begin{cases} x\cos a = X\cos^2 a - Y\sin a\cos a \\ y\sin a = X\sin^2 a + Y\sin a\cos a \end{cases}$$

donc :

$$x\cos a + y\sin a = X.$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} X = x\cos a + y\sin a \\ Y = -x\sin a + y\cos a. \end{cases}$$

Q 34

Puisque S_I est un déplacement (rotation de centre I et d'angle plat) et que i est un antidéplacement la composée $S_I \circ i$ est un antidéplacement.
On a :

i	
A	A'
B	B'

S_I	
A'	A
B'	B''

$S_I \circ i$	
A	A
B	B''

d'où : $AB = AB''$

(Δ) étant la bissectrice de $\widehat{BAB''}$ l'image de B par $S_{(\Delta)}$ est le point B_1 de $[AB'')$ tel que $AB_1 = AB$ d'où $B_1 = B''$. De plus $S_{(\Delta)}(A) = A$ car $A \in (\Delta)$.
Ainsi les deux antidéplacements $S_I \circ i$ et $S_{(\Delta)}$ transforment A en A et B en B'', avec A et B distincts, donc ils sont égaux.
Puisque S_I est involutive, l'égalité :

$$S_I \circ i = S_{(\Delta)}$$

est équivalente à $i = S_I \circ S_{(\Delta)}$.
Les droites (D) et (Δ') sont perpendiculaires en I d'où :

$$S_I = S_{(D)} \circ S_{(\Delta')}.$$

Donc :

$$i = S_{(D)} \circ S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}.$$

Dans le cas où $(\Delta) = (\Delta')$ on a :

$$S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

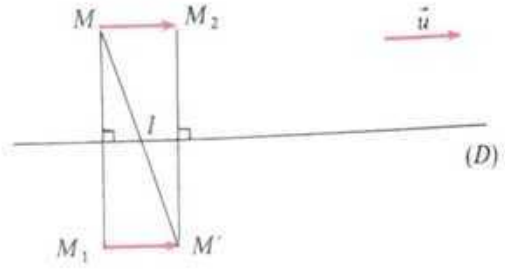
donc i est la symétrie axiale d'axe (D).
Dans le cas où $(\Delta) \neq (\Delta')$, la composée $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ est une translation car (Δ) et (Δ') sont parallèles, le vecteur $\vec{u}$ de la translation étant $\overrightarrow{AA_1}$ où A_1 est le symétrique de A par rapport à (Δ'). On a ainsi :

$$i = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}.$$

On remarque que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).

Q 35

$\vec{u}$ est vecteur directeur de (D).



Soient M un point du plan M_1 son image par $S_{(D)}$, M_2 son image par $t_{\vec{u}}$ et M' son image par i. On a :

$$M' = S_{(D)}(M_2) \quad \text{car} \quad i = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}.$$

Puisque (MM_2) est parallèle à (D), $MM_2M'M_1$ est un rectangle d'où :

$$\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{MM_2}$$

ou encore $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$ c'est-à-dire

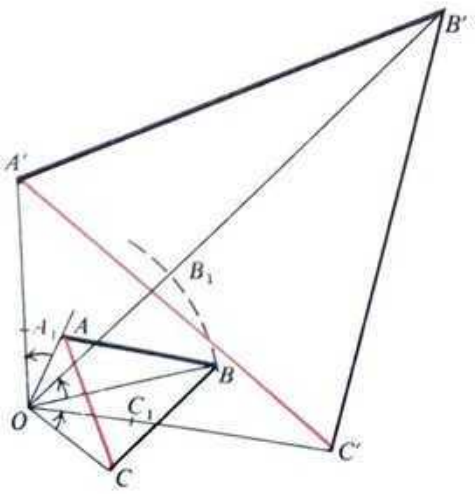
$$M' = t_{\vec{u}}(M_1).$$

Ainsi on a :

$$S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}.$$

Donc une symétrie glissée est la composée, dans un ordre quelconque, d'une symétrie axiale et d'une translation dont le vecteur est un vecteur directeur de l'axe.
De plus le milieu I de $[MM']$ est le centre du rectangle $MM_2M'M_1$, donc il appartient à la médiatrice de $[MM_1]$ c'est-à-dire $I \in (D)$. Si le point M est invariant par i alors les points M', I et M sont confondus d'où M appartient à (D); M est alors confondu avec M_1 et on a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ or $\vec{u}$ est non nul donc i n'admet aucun point invariant.

Q 36



r		h		
O	O	O	O	on a $O' = O$
A	A_1	A_1	A'	
B	B_1	B_1	B'	
C	C_1	C_1	C'	

On constate sur le dessin que l'on a :

$$OA' = 3OA$$
$$A'B' = 3AB$$
$$B'C' = 3BC$$
$$A'C' = 3AC.$$

Soient M et N deux points du plan d'images respectives M_1 et N_1 par r, M' et N' par $h \circ r$.
Puisque la rotation r est une isométrie on a :

$$M_1N_1 = MN.$$

Puisque h est une homothétie de rapport 3, que $M' = h(M_1)$ et $N' = h(N_1)$

on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = 3\overrightarrow{M_1N_1}.$$

D'où :

$$M'N' = 3M_1N_1.$$

Donc : $M'N' = 3MN.$

L'application $r \circ h$ multiplie les distances par 3.

Q 37

Soient i une isométrie et h une homothétie de rapport α, M et N deux points du plan.

i		h	
M	M_1	M_1	M'
N	N_1	N_1	N'

On a : $M_1N_1 = MN$

$$\overrightarrow{M'N'} = \alpha\overrightarrow{M_1N_1}$$

d'où : $M'N' = |\alpha| M_1N_1$

d'où : $M'N' = |\alpha| MN$

$h \circ i$ est donc une similitude de rapport $|\alpha|$.

h		i	
M	M_2	M_2	M''
N	N_2	N_2	N''

On a : $\overrightarrow{M_2N_2} = \alpha\overrightarrow{MN}$

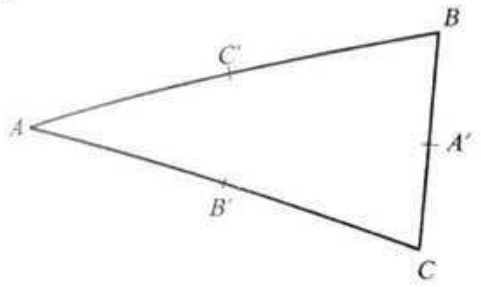
d'où : $M_2N_2 = |\alpha| MN$

de plus : $M''N'' = M_2N_2$

d'où : $M''N'' = |\alpha| MN$

$i \circ h$ est une similitude de rapport $|\alpha|$.

Q 38



f_1 = homothétie de centre A et de rapport 2 car $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB'}$. De même :

f_2 est l'homothétie de centre B et de rapport 2
f_3 est l'homothétie de centre C et de rapport 2.

Q 39

Supposons $M_1 \neq M_2$. On a :

s_1	
A	A'
B	B'
C	C'
M	M_1

s_2	
A	A'
B	B'
C	C'
M	M_2

D'où :

$$\frac{A'M_1}{A'B'} = \frac{AM}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{A'M_2}{A'B'} = \frac{AM}{AB}.$$

Ainsi on a :

$$A'M_1 = A'M_2$$

c'est-à-dire A' appartient à la médiatrice de $[M_1M_2]$.
De même on démontre que B' et C' appartiennent à la médiatrice de $[M_1M_2]$. Les points A', B' et C' sont donc alignés ce qui contredit le fait que $A'B'C'$ soit un triangle.

Donc :

$$M_1 = M_2.$$

Ainsi on a :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad s_1(M) = s_2(M)$$

c'est-à-dire :

$$s_1 = s_2.$$

Q 40

1) Cas où $k > 0$.
Soient M un point du plan distinct de O, M_1 l'image de M par r et M' l'homothétique de M_1 par h.
Ces points sont caractérisés par :

$$OM_1 = OM \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}) = (\hat{\alpha})$$
$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM_1}.$$

Puisque k est strictement positif, on a :

$$OM' = kOM_1$$

et :

$$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}})$$

d'où :

$$OM' = kOM \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = (\hat{\alpha}).$$

Puisque $r(O) = O$ et $h(O) = O$ on a $s(O) = O$: O est invariant par s.

• Si $(\hat{\alpha}) = (\hat{0})$ et $k = 1$ alors, quel que soit le point M distinct de O, son image M' vérifie :

$$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = (\hat{0}) \quad \text{et} \quad OM' = OM$$

d'où : $M' = M$.

Ainsi tout point est invariant par s donc $s = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

• Si $(\hat{\alpha}) \neq (\hat{0})$ alors tout point M distinct de O a son image M' qui est distincte de M car les demi-droites $[OM)$ et $[OM')$ sont différentes.

• Si $k \neq 1$ alors tout point M distinct de O a son image M' qui est distincte de M car les distances OM et OM' sont différentes.
Ainsi si $(\hat{\alpha}) \neq (\hat{0})$ ou $k \neq 1$ alors s n'a qu'un point invariant : O.

2) Cas où $k < 0$.
Soit M un point du plan d'image M_2 par h.
On a :

$$\overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM}.$$

Soient h_1 et h_2 les homothéties de centre O et de rapport respectif $|k|$ et -1. Puisque $|k| \times (-1) = k$, h est la composée, dans un ordre indifférent, de h_1 et h_2.
h_2 est aussi la symétrie centrale de centre O, ou encore la rotation de centre O et d'angle plat.
La composée de cette rotation h_2 et de la rotation r est donc la rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha}) + (\hat{\rho})$ d'où :

$$s = h_1 \circ h_2 \circ r$$

s'écrit :

$$s = h_1 \circ r'$$

où h_1 est l'homothétie de centre O et de rapport $|k|$ et r' la rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha}) + (\hat{\rho})$.

Q 41

1) Soit S une similitude laissant les deux points distincts A et B invariants; en notant k son rapport on a $AB = kAB$ d'où $k = 1$ c'est-à-dire S est une isométrie.

2) Soient k le rapport de la similitude S et h l'homothétie de centre A et de rapport k. L'application $h^{-1} \circ S$ est une isométrie i car composée de deux similitudes de rapports inverses.

Le point A est invariant par S et h^{-1} donc par i. On a :

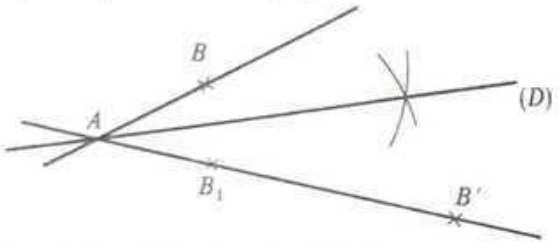
$$h^{-1} \circ S = i \iff S = h \circ i.$$

Ainsi S est décomposée en une homothétie h de centre A et une isométrie i laissant A invariant.

• Si S est directe, i est un déplacement laissant A invariant : c'est une rotation de centre A, d'angle $(\vec{s})$. S est la similitude de centre A de rapport k et d'angle $(\vec{s})$ (celui-ci est déterminé par un point B distinct de A et son image B' par S :

$$(\vec{s}) = (\widehat{AB, AB'}).$$

• Si S est indirecte, i est un antidéplacement laissant A invariant : c'est une symétrie orthogonale dont l'axe (D) passe par A.
Pour déterminer cette droite (D) il suffit de connaître un point B distinct de A, et son image B'. On trace (AB), (AB') on place le point B_1 de $[AB']$ tel que $AB_1 = AB$ on a $h(B_1) = B'$ et $i(B) = B'$.



(D) est la médiatrice de $[BB_1]$ ou encore la bissectrice de $\widehat{BAB_1}$ c'est-à-dire la bissectrice de $\widehat{BAB'}$.

Q 42

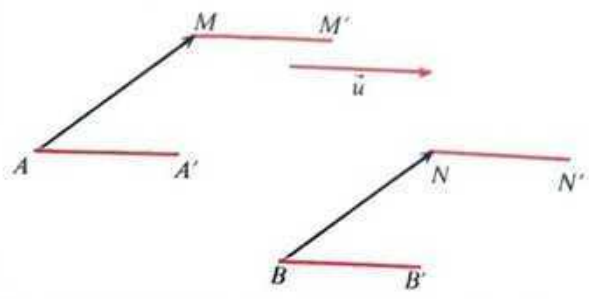
• Toute isométrie conserve l'alignement des points, toute homothétie également, donc toute similitude conserve l'alignement des points.

• Toute isométrie conserve le parallélisme et l'orthogonalité, toute homothétie aussi, donc toute similitude conserve le parallélisme et l'orthogonalité des droites.

• Toute similitude multiplie les longueurs par son rapport (c'est la définition), donc les aires par le carré de son rapport car une aire est le produit de deux longueurs.

Q 43

Soit $\vec{v}$ un vecteur de représentants d'origine A et B respectivement (A, M) et (B, N).



On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$.
Soient A', M', B' et N' les translatés respectifs des points A, M, B et N.
On a : $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{B'N'} = \overrightarrow{BN}$.
D'où : $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{B'N'}$
c'est-à-dire : $\varphi_A(\vec{v}) = \varphi_B(\vec{v})$.
Donc : $\varphi_A = \varphi_B$.

De plus les points ci-dessus vérifient $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ c'est-à-dire $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}$.
φ est donc l'application identique du plan vectoriel $\mathcal{V}$.

Q 44

Soient M, N, P et Q quatre points d'homothétiques respectifs par h : M', N', P' et Q'. On a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{PQ}$$

donc si :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$$

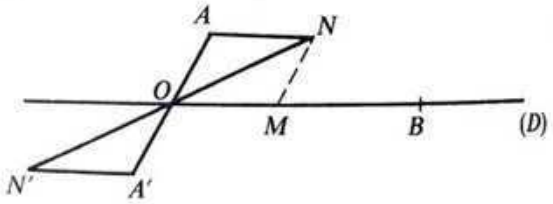
c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{h(M)h(N)} = \overrightarrow{h(P)h(Q)}.$$

L'égalité $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ se traduit par :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}) &= k\vec{v} \\ \varphi(\vec{u} + \vec{v}) &= k(\vec{u} + \vec{v}) \\ &= k\vec{u} + k\vec{v} \\ &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) \\ \varphi(\alpha\vec{u}) &= k(\alpha\vec{u}) \\ &= \alpha(k\vec{u}) \\ &= \alpha\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

Q 45



g	
O	O
A	A'
B	B
M	M'
N	N'

Supposons que A n'appartienne pas à (D). Soit $\vec{v}$ un vecteur de représentants (A, N) et (O, M), tel que $M \in (D)$ et $M \neq O$, l'image M' de M par g est M. Les images A' et N' respectivement de A et N sont leurs symétriques par rapport à O (car le point N n'appartient pas à (D) du fait que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OM}$).

On a : $\overrightarrow{A'N'} = -\overrightarrow{AN}$

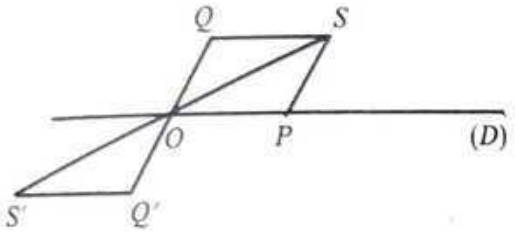
c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{g(A)g(N)} = -\overrightarrow{g(O)g(M)}$$

donc φ_0 et φ_A ne sont pas égales.

• Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants (O, P) et (O, Q) respectivement tels que :

$$P \in (D) - \{O\}, \quad Q \notin (D).$$



Soit S le point défini par $\overrightarrow{OS} = \vec{u} + \vec{v}$

$(S \notin (D))$

g	
O	O
P	P
Q	Q'
S	S'

$$\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{SO} \quad \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{QO}$$

d'où :

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QP}$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_0(\vec{u}) + \varphi_0(\vec{v}) = \overrightarrow{QP}$$

et on a :

$$\varphi_0(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{SO}$$

donc :

$$\varphi_0(\vec{u} + \vec{v}) \neq \varphi_0(\vec{u}) + \varphi_0(\vec{v}).$$

• Soient $\vec{u}$ un vecteur de représentant (O, L), α un nombre réel et K le point tel que $\overrightarrow{OK} = \alpha\overrightarrow{OL}$.

1) Si $L \in (D)$ alors $K \in (D)$ et on a :

$$g(L) = L, \quad g(K) = K$$

d'où :

$$\varphi_0(\overrightarrow{OK}) = \overrightarrow{OK} = \alpha\varphi_0(\overrightarrow{OL}).$$

2) Si $L \notin (D)$ alors $K \notin (D)$ et les images L' et K' de ces points par g sont définies par $\overrightarrow{OL'} = -\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{OK'} = -\overrightarrow{OK}$ d'où

$$\varphi_0(\overrightarrow{OK}) = -\overrightarrow{OK} = -\alpha\overrightarrow{OL} = \alpha(-\overrightarrow{OL}) = \alpha\varphi_0(\overrightarrow{OL}).$$

Ainsi on a montré que :

$$\forall \vec{u} \in \mathfrak{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \cdot \quad \varphi_0(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u}).$$

Q 46

Soient (M, N) un représentant de $\vec{v}$:
(x_1, y_1) les coordonnées de M
(x_2, y_2) les coordonnées de N
(x'_1, y'_1) les coordonnées de $f(M)$
(x'_2, y'_2) les coordonnées de $f(N)$.
On a :

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 3y_1 + 3 \\ y'_1 = 5x_1 - y_1 - 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x'_2 = 2x_2 + 3y_2 + 3 \\ y'_2 = 5x_2 - y_2 - 1 \end{cases}.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ sont :

$$\begin{cases} x'_2 - x'_1 = 2(x_2 - x_1) + 3(y_2 - y_1) \\ y'_2 - y'_2 = 5(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) \end{cases}$$

Or $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$, donc en prenant un autre représentant (P, Q) de $\vec{v}$, le vecteur $\overrightarrow{f(P)f(Q)}$ aura les mêmes coordonnées que $\overrightarrow{f(M)f(N)}$. Donc la définition de $\varphi(\vec{v})$ ne dépend pas du représentant choisi de $\vec{v}$.

• De plus le calcul ci-dessus permet de dire que lorsque les coordonnées de $\vec{v}$ sont X et Y (c'est-à-dire $X = x_2 - x_1$ et $Y = y_2 - y_1$) alors les coordonnées de $\varphi(\vec{v})$ sont X' et Y' avec :

$$\begin{cases} X' = 2X + 3Y \\ Y' = 5X - Y \end{cases}$$

• Soient $\vec{v}_1\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs d'images respectives $v'_1\begin{pmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \end{pmatrix}$ et $v'_2\begin{pmatrix} X'_2 \\ Y'_2 \end{pmatrix}$ par φ. On a :

$$\begin{cases} X'_1 + X'_2 = (2X_1 + 3Y_1) + (2X_2 + 3Y_2) \\ Y'_1 + Y'_2 = (5X_1 - Y_1) + (5X_2 - Y_2) \end{cases}$$

d'où les coordonnées de $\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$ sont :

$$\begin{cases} 2(X_1 + X_2) + 3(Y_1 + Y_2) \\ 5(X_1 + X_2) - (Y_1 + Y_2) \end{cases}$$

d'où :

$$\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 = \varphi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Soit α un nombre réel :

$$\begin{cases} \alpha X'_1 = 2(\alpha X_1) + 3(\alpha Y_1) \\ \alpha Y'_1 = 5(\alpha X_1) - (\alpha Y_1) \end{cases}$$

d'où :

$$\alpha\vec{v}'_1 = \varphi(\alpha\vec{v}_1)$$

donc φ est linéaire.

• $\|\vec{v}_1\|^2 = X_1'^2 + Y_1'^2$
$= (2X_1 + 3Y_1)^2 + (5X_1 - Y_1)^2$
$= 29X_1^2 + 10Y_1^2 + 2X_1Y_1$
$\|\vec{v}_1\|^2 = X_1^2 + Y_1^2$.

Par exemple pour $X_1 = 0$ et $Y_1 = 1$ on a $\|\vec{v}_1'\| = \sqrt{10}$ et $\|\vec{v}_1\| = 1$ donc φ ne conserve pas la norme.

• Puisque φ ne conserve pas la norme elle ne conserve pas le produit scalaire (car $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$).

Q 47

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α un nombre réel, $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{u}_1 \in D_i$, $\vec{u}_2 \in D_j$, $\vec{v}_1 \in D_i$ et $\vec{v}_2 \in D_j$.
On a :

$$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$$

avec :

$$\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in D_i \text{ et } \vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in D_j$$

d'où :

$$\begin{aligned} s(\vec{u} + \vec{v}) &= (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) - (\vec{u}_2 + \vec{v}_2) \\ &= (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \\ &= s(\vec{u}) + s(\vec{v}). \end{aligned}$$

On a :

$$\alpha\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2$$

avec :

$$\alpha\vec{u}_1 \in D_i \text{ et } \alpha\vec{u}_2 \in D_j$$

d'où :

$$\begin{aligned} s(\alpha\vec{u}) &= \alpha\vec{u}_1 - \alpha\vec{u}_2 \\ &= \alpha(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \\ &= \alpha s(\vec{u}) \end{aligned}$$

s est donc linéaire.

2) On a :

$$\begin{aligned} h \circ s(\vec{u} + \vec{v}) &= h[s(\vec{u} + \vec{v})] \\ &= h[s(\vec{u}) + s(\vec{v})] \\ &\quad \text{car } s \text{ linéaire} \\ &= h[s(\vec{u})] + h[s(\vec{v})] \end{aligned}$$

car h est linéaire. D'où :

$$h \circ s(\vec{u} + \vec{v}) = h \circ s(\vec{u}) + h \circ s(\vec{v}).$$

De même :

$$\begin{aligned} h \circ s(\alpha\vec{u}) &= h[s(\alpha\vec{u})] \\ &= h[\alpha s(\vec{u})] \\ &= \alpha h[s(\vec{u})] \\ &= \alpha h \circ s(\vec{u}) \end{aligned}$$

$h \circ s$ est donc linéaire.

3) h est bijective car $k \neq 0$ et on a :

$$h^{-1} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{v} \longmapsto \frac{1}{k}\vec{v}$$

s est bijective car
$s(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ est équivalent à $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ et $-\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ (d'après l'unicité); et on a : $s^{-1} = s$.

4) h^{-1} est l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{k}$ donc est linéaire
s^{-1} est s donc est linéaire.

Q 48

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan d'homothétique $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ par h^{-1} :

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x' - 2 = \frac{1}{3}(x - 2) \\ y' - 1 = \frac{1}{3}(y - 1) \end{cases}$$

l'expression analytique de h^{-1} est donc

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(y + 2) \end{cases}$$

Puisque $s = h^{-1} \circ f$, l'expression analytique de s est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}[(3x - 4) + 4] \\ y' = \frac{1}{3}[(-3y - 2) + 2] \end{cases}$$

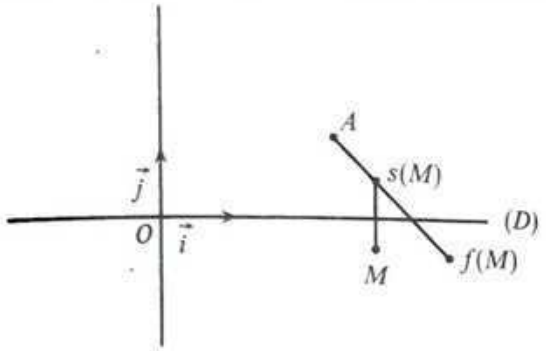
c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2) s est donc la symétrie orthogonale d'axe la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\vec{i}$:

$s = h^{-1} \circ f$ équivaut à $h \circ s = f$

donc f est la similitude indirecte composée de la symétrie orthogonale d'axe la droite (D) d'équation $x = 0$, suivie de l'homothétie de centre A de rapport 3.



3) Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées X et Y ; le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a aussi pour coordonnées X et Y ; l'image de O par f a pour coordonnées -4 et -2 ; l'image de M par f a pour coordonnées $3X - 4$ et $-3Y - 2$
d'où $\overrightarrow{f(O)f(M)}$ a pour coordonnées :

$$(3X-4)-(-4) \text{ et } (-3Y-2)-(-2).$$

Ainsi $\varphi(\vec{u})$ a pour coordonnées $3X$ et $-3Y$.
ψ est l'homothétie vectorielle de rapport 3 :

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \psi(\vec{v}) = 3\vec{v}.$$

σ est la symétrie vectorielle d'axe $D_{\vec{i}}$ et de direction $D_{\vec{j}}$, car associée à s qui a pour axe (D) de vecteur directeur $\vec{i}$ et pour direction $D_{\vec{j}}$.

4) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ on a :

$$\varphi(\vec{u})\begin{pmatrix} 3X \\ -3Y \end{pmatrix}$$

$$\psi(\vec{u})\begin{pmatrix} 3X \\ 3Y \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\vec{u})\begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}$$

d'où : $\varphi = \psi \circ \sigma$.

ψ et σ sont linéaires car respectivement homothétie vectorielle et symétrie vectorielle.
φ est linéaire car :

$$\begin{cases} 3(X+X') = 3X + 3X' \\ -3(Y+Y') = -3Y - 3Y' \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} 3(\alpha X) = \alpha(3X) \\ -3(\alpha Y) = \alpha(-3Y) \end{cases}$$

Résultats ou indications des exercices

2) L'expression analytique de p est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 3y + 4) \\ y' = \frac{2}{5}(-x + y + 2) \end{cases}$$

4) Partie de la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 7$ située dans la bande :

$$3 \leqslant x \leqslant 7.$$

6) Homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix} 5/4 \\ 2 \end{pmatrix}$ de rapport -3.

10) Par exemple $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{u}$ est normal à la droite (l) d'équation $3x + y - 3 = 0$.

(C) : $[x - (-2)]^2 + [y - (-1)]^2 = 2^2$.

11) $C\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

dans $\mathcal{R}$, S a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(7x - 4y + 6) \\ y' = \frac{1}{5}(6x - 7y + 18) \end{cases}$$

12) $h \circ s$ a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -x + 8y - 12 \\ y' = 3x + y + 2 \end{cases}$$

$h \circ s'$ a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = 5x - 8 \\ y' = -5y \end{cases}$$

ni $h \circ s$ ni $h \circ s'$ ne sont des homothéties.

13) Symétrie axiale d'axe la droite (l) d'équation $x - 2y + 2 = 0$, parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, égal à $-\vec{i} + \vec{j}$.

14) L'expression analytique de s' est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y - 26) \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 39) \end{cases}$$

17) f est la rotation de centre $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Et l'axe de s' est la droite d'équation :

$$(3 + 2\sqrt{3})x + (4 + \sqrt{3})y + 5 = 0.$$

18) $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre $\Omega\begin{pmatrix} \frac{3}{4}(\sqrt{3} + 1) \\ \frac{1}{4}(9 - \sqrt{3}) \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$t \circ r_1$ est la rotation de centre $C\begin{pmatrix} \frac{2}{5}(9 + \sqrt{3}) \\ \frac{2}{5}(1 + 5\sqrt{3}) \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

19) On pourra utiliser le projeté orthogonal A_1 de C sur (AB), et la médiatrice de $[AA_1]$.

20) On pourra utiliser un repère orthonormé (O, D, E) avec O et D sur la droite (Δ).

21) Considérer trois points A, B et C de (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement. (D_4) est l'image de (D_3) par la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$. On utilisera :

$$S \circ (S_3 \circ S_2 \circ S_1) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

et les rotations $S \circ S_3$ et $S_2 \circ S_1$.

22) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si ils vérifient l'une des propriétés suivantes :

1) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.

2) $\text{mes}\,\hat{A} = \text{mes}\,\hat{A}'$ et $\text{mes}\,\hat{B} = \text{mes}\,\hat{B}'$

(utiliser une homothétie de rapport $\frac{A'B'}{AB}$)

3) $\text{mes}\,\hat{A} = \text{mes}\,\hat{A}'$ et $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$

(utiliser la même méthode).

24) $f = h \circ i$ où h est l'homothétie de centre O de rapport 2. et i la rotation de centre $\Omega\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (voir Ω sur la figure puis vérifier).

25) g est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

26) $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $s = h \circ r$ avec :

h = homothétie de centre A de rapport 2

r = rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

27) i' = symétrie orthogonale d'axe la droite (D') perpendiculaire à (D) en O.

Exercices

33. Soient O et Ω deux points distincts et k un nombre réel non nul et différent de 1.
On note h et h' les deux homothéties de rapport k et respectivement de centre O et Ω.

1) Déterminer les isométries i_1 et i'_1 telles que :

$$h' = h \circ i_1$$
$$h' = i'_1 \circ h.$$

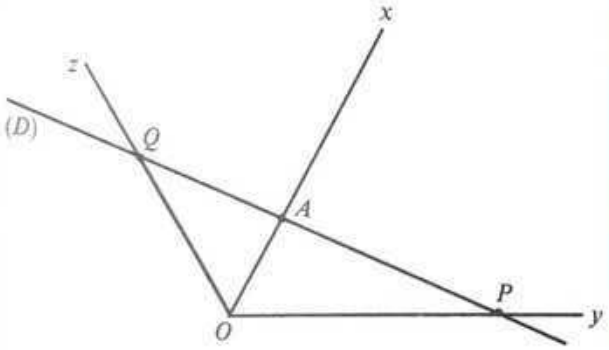
2) Déterminer les isométries i_2 et i'_2 telles que :

$$h = h' \circ i_2$$
$$h = i'_2 \circ h'.$$

34. Soient $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites telles que :

$$\widehat{(Oy, Ox)} = \widehat{(Ox, Oz)} \quad \text{et} \quad \text{MES}\ \widehat{(Oy, Ox)} = \frac{\pi}{3}.$$

On considère sur ces demi-droites des repères d'origine O et de même unité.

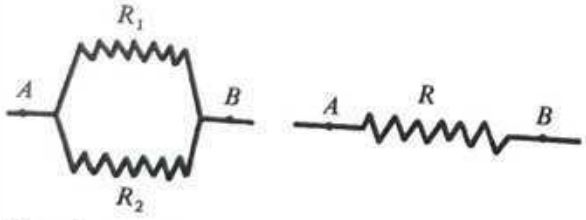


Soit (D) une droite qui coupe $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ respectivement en A, P et Q d'abscisses respectives x, p et q.
Montrer que ces abscisses x, p et q vérifient :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Indication : On peut tracer la parallèle à (OQ) passant par A.

Application



On sait que deux résistors R_1 et R_2 montés en parallèle sont équivalents à un résistor R qui est déterminé par la formule :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

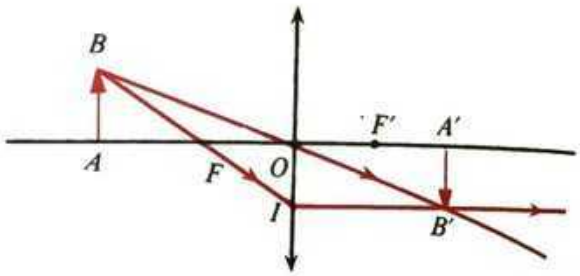
Déterminer une valeur approchée de R dans le cas où :

$$R_1 = 4\ \Omega \quad \text{et} \quad R_2 = 2{,}4\ \Omega$$

(incertitude 0,05 Ω).

35. Le schéma ci-dessous représente la construction de l'image (A', B') de l'objet (A, B) donnée par une lentille convergente :

$$OF = OF' = f \quad \text{(distance focale)}$$
$$OA = p \qquad OA' = q.$$



1) Montrer que les nombres f, p et q vérifient l'égalité :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

On utilisera des triangles homothétiques.

2) En utilisant la méthode de l'exercice 34 déterminer une valeur approchée (incertitude 0,5 cm) :

- de q quand : $p = 50$ et $f = 20$ (unité : cm)
- de f quand : $p = 43$ et $p' = 23$.

36. Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes, et A un point n'appartenant pas à ces droites.

1) Comment construire le segment $[IJ]$ admettant A comme milieu sachant que :

$$I \in (D_1) \quad \text{et} \quad J \in (D_2) ?$$

(On pourra construire l'image de (D_1) par une symétrie centrale.)

2) Trouver un segment $[KL]$ sachant que :

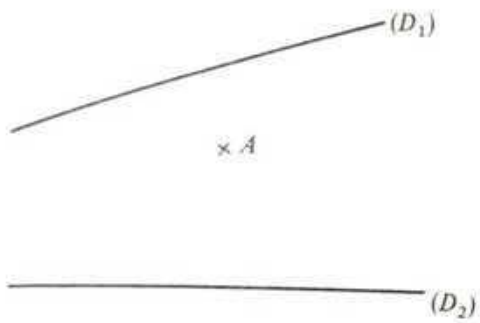
$$K \in (D_1) \quad \text{et} \quad L \in (D_2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AL} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AK}.$$

3) Généraliser en donnant le programme de construction des points M de (D_1) et P de (D_2) tels que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AM}$, où k est un nombre réel non nul donné.

37. On rappelle que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC se coupent en un même point : le centre du cercle inscrit dans le triangle.
(Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle.)
Soient trois points distincts A, B et C non alignés.

Trouver un programme de construction donnant le cercle inscrit dans le triangle sans tracer les bissectrices des angles intérieurs.
(On utilisera un cercle auxiliaire et une homothétie.)

38. Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en O (ce point n'étant pas accessible sur la figure).



Par un point A fixé, n'appartenant pas aux droites (D_1) et (D_2), construire la droite (D) passant par O.
On utilisera une droite sécante à (D_1) et (D_2) et son image par une homothétie de centre O pour placer l'homothétique de A.

39. Étant donnés un point O du plan, un vecteur $\vec{v}$, et un nombre réel k non nul, on considère l'application ponctuelle $f_{O,\vec{v},k}$ définie par :

$$f_{O,\vec{v},k} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

où M' est défini par :

$$\overrightarrow{OM'} = \vec{v} + k\overrightarrow{OM} \quad (1)$$

1) Démontrer que $f_{O,\vec{v},k}$ est une transformation du plan.

2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f_{O,\vec{v},k}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{v} = \vec{0}$

b) $k = 1$

c) $\vec{v} = \vec{0}$ et $k = 1$.

3) Dans cette partie, on prend $\vec{v}$ non nul et k différent de 1.
Montrer que $f_{O,\vec{v},k}$ admet un unique point invariant A défini par :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{1-k}\vec{v}.$$

Vérifier que $f_{O,\vec{v},k}$ est une homothétie que l'on caractérisera.

4) Démontrer que l'ensemble de toutes les transformations $f_{O,\vec{v},k}$ est l'ensemble $\mathfrak{G}$.

40. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation f du plan soit un élément de $\mathfrak{G}$, est que, dans un repère donné du plan, la représentation analytique de f soit de la forme :

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$$

où k est un nombre réel non nul, a et b deux nombres réels.

41. 1) Soient un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, A un point de $(\mathcal{C})$ et (D) une droite. Tracer les deux droites (D_1) et (D_2) parallèles à (D) et tangentes à $(\mathcal{C})$.
Montrer qu'il existe deux cercles tangents en A au cercle $(\mathcal{C})$ et tangents à la droite (D).
On précisera les points de tangence en utilisant une homothétie de centre A.

2) Soient un cercle $(\mathcal{C})$, une droite (D) et B un point de (D).
Trouver les deux cercles tangents à la fois à $(\mathcal{C})$, et à (D) en B.

42. 1) Soient (D) et (Δ) deux droites parallèles, et A un point du plan situé dans la bande délimitée par ces deux droites et non située sur une de ces droites.
Construire les deux cercles passant par A et tangents aux deux droites (D) et (Δ). (Construire un cercle tangent aux deux droites et utiliser des transformations adéquates.)

2) Maintenant les droites (D) et (Δ) sont sécantes au point O et A est un point quelconque du plan n'appartenant ni à (D) ni à (Δ).
Construire les cercles passant par A et tangents aux droites (D) et (Δ).

3) Étudier les cas particuliers où le point A est situé sur une des deux droites.

43. Soient O et A deux points distincts du plan et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon OA. On considère deux points M et P du cercle $(\mathcal{C})$, distincts de A et tels que l'angle $\widehat{(AM, AP)}$ ait une mesure α donnée.

1) Construire le symétrique M' du point M par rapport à la droite (AP).

2) Trouver l'ensemble des points M' quand M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ privé de A. (On utilisera une rotation.)

44. Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, f l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, au point M, associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AM},$$

et G le barycentre des points pondérés $(A, -3)$ et $(B, 1)$.
Calculer $\overrightarrow{GM'}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$.
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

45. ***a)*** Démontrer que la composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

b) Soient O, A et B trois points distincts deux à deux. On note s la symétrie de centre O et t la translation définie par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Déterminer l'image O' du point O par la transformation $t \circ s$ puis le centre Ω de cette symétrie centrale.

c) Étudier la transformation $s \circ t$.
A-t-on $s \circ t = t \circ s$?

46. Soient ABC un triangle équilatéral tel que le triplet (A, B, C) soit direct, s_A, s_B et s_C les symétries centrales de centres respectifs A, B et C.

1) Démontrer que $s_A \circ s_B \circ s_C$ est une symétrie centrale dont on déterminera le centre Ω.

2) Comparer les deux symétries centrales $s_A \circ s_B \circ s_C$ et $s_B \circ s_C \circ s_A$.

3) Résoudre l'équation :

$(X, Y, Z) \in \{A, B, C\}^3$, $s_X \circ s_Y \circ s_Z = s_A \circ s_B \circ s_C$.

47. Soient $ABCD$ un carré et I_1, I_2, I_3 et I_4 les milieux respectivement de $[AD]$, $[DC]$, $[CB]$ et $[BA]$. On note s_{I_1}, s_{I_2}, s_{I_3} et s_{I_4} les symétries centrales respectivement de centre I_1, I_2, I_3 et I_4.

1) Étudier la transformation f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

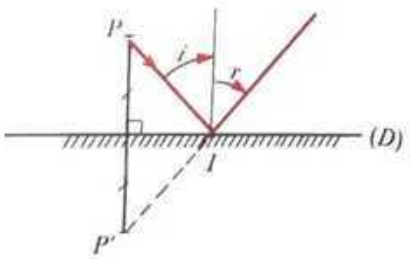
$$f = s_{I_4} \circ s_{I_1} \circ s_{I_2} \circ s_{I_3}.$$

Aurions-nous obtenu le même résultat avec un rectangle $ABCD$?

2) Étudier la transformation g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

$$g = s_{I_4} \circ s_{I_2} \circ s_{I_3} \circ s_{I_1}.$$

48. (Problème de réflexion).



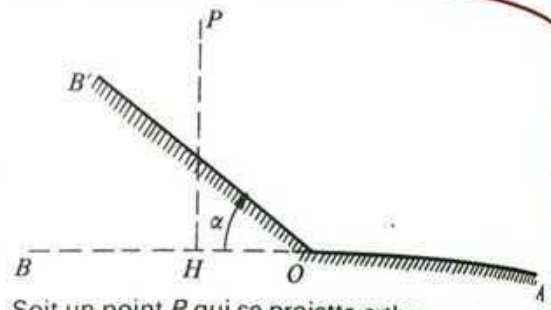
Un miroir plan est schématisé par la droite (D). L'image d'un point P, donnée par ce miroir, est alors représentée par le symétrique de P dans la symétrie orthogonale d'axe (D).

1) Démontrer la loi de la réflexion suivante : l'angle d'incidence $(\hat{i})$ est égal à l'angle de réflexion $(\hat{r})$.

2) Soient deux miroirs plans (M_1) et (M_2) schématisés respectivement par les segments $[OA]$ et $[OB]$:

$$OA = OB = 15.$$

Ces deux miroirs ont une arête commune (schématisée par le point O).
Le miroir (M_1) est immobile et le miroir (M_2) tourne autour de l'arête commune d'un angle $(\hat{\alpha})$: il, est alors représenté par $[OB']$.



Soit un point P qui se projette orthogonalement en H sur [OB] et qui est défini par :

$$OH = 5, \qquad HP = 10.$$

a) Construire l'image P_1 du point P dans le miroir (M_2) quand il est représenté par $[OB]$, puis l'image P_2 de P quand ce miroir est représenté par $[OB']$.
Vérifier que P, P_1 et P_2 sont sur un cercle que l'on précisera.

b) Montrer que :

$$(\widehat{OP_1}, \widehat{OP_2}) = 2(\widehat{OB}, \widehat{OB'}).$$

c) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de la mesure α de l'angle $(\widehat{OB}, \widehat{OB'})$.
Quel est l'ensemble décrit par le point P', image de P dans le miroir (M_2) quand celui-ci tourne autour de l'arête commune?

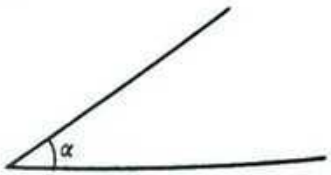
49. O étant un point fixé du plan, on considère l'ensemble $\mathcal{R}$ des rotations de centre O. Montrer que cet ensemble muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe commutatif.
Soient r_1, r_2 et r_3 les rotations de centre O et respectivement d'angles $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$. Résoudre les équations suivantes :

a) $f \in \mathcal{R}$, $\quad f \circ r_1 = r_2$.

b) $g \in \mathcal{R}$, $\quad r_1 \circ g \circ r_3 = r_2$.

50. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles isométriques.
Indiquer la condition sur les côtés de ces triangles pour qu'il existe une rotation r transformant ABC en $A'B'C'$.

51. Soit r une rotation définie par son angle $(\hat{\alpha})$ (non nul) et l'image A' d'un point A de $\mathcal{P}$. On cherche le centre Ω de cette rotation dans le cas de la figure ci-dessous :





Dans quel demi-plan de frontière (AA') se trouve Ω?
On note I le milieu de $[AA']$.
Prouver que les angles géométriques $\widehat{A'\Omega I}$ et $\widehat{\Omega A' I}$ sont complémentaires. Déterminer la position du point Ω. Donner le programme de construction du centre de la rotation r.

52. Soit r une rotation définie par les points A et B, et leurs images respectives A' et B'.
Quelles conditions doivent vérifier les points A, B, A' et B' pour que r soit déterminée de façon unique?
Donner le programme de la construction du centre Ω de cette rotation r.
(On pourra utiliser l'exercice 51.)

53. Soient ABC un triangle équilatéral tel que MES$(^\circ)$ $(\widehat{AB, AC}) = 60$ et r_A, r_B et r_C les rotations de centres respectifs A, B et C et d'angle $(\widehat{AB, AC})$.
Déterminer la transformation f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

$$f = r_A \circ r_B \circ r_C.$$

(On pourra chercher les images de A, B et C.)
Déterminer la transformation g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

$$g = r_A \circ r_C \circ r_B.$$

54. Soient une droite (D), A et B deux points distincts n'appartenant pas à (D). Déterminer le point M de la droite (D) pour que la somme $AM + MB$ soit minimale (on pourra utiliser une symétrie).

55. Soit $ABCD$ un carré tel que le triplet (A, B, C) soit de sens direct.

A) Soient r_A, r_B, r_C et r_D les rotations de centres respectifs A, B, C et D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Étudier les images de A, B, C et D pour trouver la nature de la transformation f définie par :

$$f = r_A \circ r_B \circ r_C \circ r_D.$$

2) Trouver la nature de la transformation g définie par :

$$g = r_A \circ r_B \circ r_D \circ r_C.$$

B) 1) Soient M et P deux points distincts du plan, $(\hat{\alpha})$ un angle, r_M et r_P les rotations d'angle $(\hat{\alpha})$ et de centres respectifs M et P.

a) Dans le cas où $(\hat{\alpha})$ est différent de l'angle plat, montrer que le centre I de la rotation $r_M \circ r_P$ vérifie :

$$(\widehat{PI, IM}) = (\hat{\alpha}).$$

Le centre I' de la rotation $r_P \circ r_M$ est-il confondu avec I?

b) Étudier, dans le cas où $(\hat{\alpha})$ est l'angle plat, la composée $r_M \circ r_P$.

2) Utiliser les résultats de la partie *B* 1) pour retrouver les résultats du *A*).

3) Dans cette partie toutes les rotations sont d'angle $\frac{\pi}{2}$. Résoudre l'équation :

$(X, Y, Z, T) \in \{A, B, C, D\}^4$,

$$r_X \circ r_Y \circ r_Z \circ r_T = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}.$$

56. Soient (D) et (D') deux droites sécantes en O du plan $\mathcal{P}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.

1) Donner l'expression analytique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la symétrie s par rapport à (D) parallèlement à (D').

2) Soit (Δ) une droite du plan. Démontrer que l'image (Δ') de (Δ) par s est une droite et préciser la position de (Δ') par rapport à (Δ) (on discutera selon la position de (Δ) par rapport à (D) et (D')).

3) Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites parallèles. Vérifier que leurs images respectives (Δ'_1) et (Δ'_2) par s ne sont parallèles en elles que si (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles, soit à (D) soit à (D').

57. Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes et A un point fixé n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2). On veut construire un carré $ABCD$ avec B appartenant à (D_1) et D appartenant à (D_2). En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour trouver l'image de (D_1) (ou de (D_2)) déterminer le programme de la construction de ce carré.

58. Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes et A un point fixé n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2).
Construire un triangle équilatéral ABC dont le sommet B appartient à (D_1) et l'autre sommet C appartient à (D_2).
(Comme dans l'exercice précédent on pourra utiliser une rotation de centre A.)

59. Soient A, B et C trois points non alignés et I le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
On note r la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{AB, AC})$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{IB}$.

1) Montrer qu'il existe trois droites (D_1), (D_2) et (D_3) que l'on déterminera telles que :

$$t = s_{(D_2)} \circ s_{(D_1)} \quad \text{et} \quad r = s_{(D_1)} \circ s_{(D_3)}.$$

2) Démontrer que $t \circ r$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

3) Montrer quil existe trois droites (D'_1), (D'_2) et (D'_3) que l'on déterminera telles que :

$$t = s_{(D'_1)} \circ s_{(D'_2)} \quad \text{et} \quad r = s_{(D'_3)} \circ s_{(D'_1)}.$$

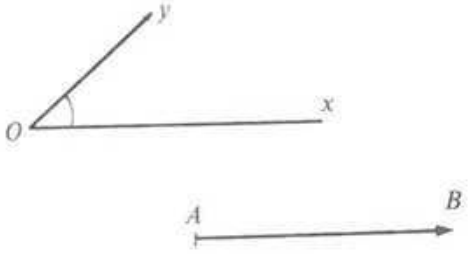
4) Montrer que $r \circ t$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

5) Est-ce que $t \circ r = r \circ t$?

60. Soient (D), (D_1) et (D_2) trois droites du plan telles que (D) et (D_1) soient sécantes en A_1 et (D) et (D_2) sécantes en A_2. On considère deux points E_1 et E_2 respectivement de (D_1) et (D_2) situés dans le même demi-plan de frontière (D) et F un point de la droite (D) tel que A_2 appartienne au segment $[A_1, F]$. On note $(\hat{x}_1)$ le double de $(\widehat{A_1F, A_1E_1})$ et $(\hat{x}_2)$ le double de l'angle $(\widehat{A_2E_2, A_2F})$.
Démontrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles si et seulement si :

$$(\hat{x}_1) + (\hat{x}_2) = (\hat{0}).$$

61. On considère les trois points A, B et C et l'angle $(\hat{x})$ de représentant $([Ox), [Oy))$ donnés sur la figure ci-dessous.



On note r la rotation de centre C et d'angle $(\hat{x})$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Soient I le centre de la rotation $t \circ r$, I' l'image de I par la rotation r.
Vérifier que $\overrightarrow{I'I} = \overrightarrow{AB}$.
Pourquoi le triangle CII' est-il isocèle? Utiliser l'axe de symétrie de ce triangle isocèle pour construire le point I.

2) Chercher de même le programme de la construction du point invariant J par la transformation $r \circ t$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

62. Soient r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, s la symétrie orthogonale par rapport à une droite (D) donnée ne passant pas par O et (D') la parallèle à (D) passant par O.

1) Tracer la droite (Δ) définie par :

$$r = s_{(D')} \circ s_{(\Delta)}$$

où $s_{(D')}$ et $s_{(\Delta)}$ sont les symétries orthogonales respectivement d'axe (D') et (Δ).
Soit f la transformation de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

$$f = s \circ r.$$

Montrer que f est une symétrie glissée. Donner ses caractéristiques.

2) Tracer la droite (Δ') définie par :

$$r = s_{(\Delta')} \circ s_{(D')}$$

où $s_{(\Delta')}$ est la symétrie orthogonale d'axe (Δ'). Étudier la nature de la transformation g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

$$g = r \circ s.$$

Donner ses caractéristiques et comparer f et g.

63. Soient (D) une droite et un point O n'appartenant pas à (D).
Soient s_0 la symétrie centrale de centre O et $s_{(D)}$ la symétrie orthogonale par rapport à (D).
Montrer que $s_{(D)} \circ s_0$ est une symétrie glissée que l'on caractérisera. (Décomposer s_0 en deux symétries orthogonales.)
Étudier $s_0 \circ s_{(D)}$.

64. Soient ABC un triangle équilatéral et les droites (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C) respectivement médiatrices de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
On note $s_{(\Delta_A)}$, $s_{(\Delta_B)}$ et $s_{(\Delta_C)}$ les symétries orthogonales respectivement par rapport à (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C).

1) Montrer que $s_{(\Delta_A)} \circ s_{(\Delta_B)} \circ s_{(\Delta_C)}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite (Δ) que l'on déterminera.

2) Même question avec $s_{(\Delta_A)} \circ s_{(\Delta_C)} \circ s_{(\Delta_B)}$.

3) Résoudre l'équation :

$$((\Delta_x), (\Delta_y), (\Delta_z)) \in \{(\Delta_A), (\Delta_B), (\Delta_C)\}^3;$$
$$s_{(\Delta x)} \circ s_{(\Delta y)} \circ s_{(\Delta z)} = s_{(\Delta B)} \circ s_{(\Delta C)} \circ s_{(\Delta_A)}.$$

65. Soient $ABCD$ un carré et s la similitude directe de centre A de rapport k et d'angle α.

1) Construire l'image $A'B'C'D'$ du carré $ABCD$ dans le cas où :

$$k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

2) Montrer que, pour tout nombre réel k non nul et pour toute valeur de α, on a :

(DD') est perpendiculaire à (BB')

(considérer une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$).

66. Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et k étant un nombre réel, on considère l'application f_k de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') avec :

$$\begin{cases} x' = k + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y) + k + 1. \end{cases}$$

1) Démontrer que f_k est une isométrie.

2) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel k, l'ensemble des points invariants par f_k.

3) Donner, suivant les valeurs de k, la nature de f_k en précisant ses éléments caractéristiques.

67. Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'expression analytique dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1 - 3x + 4y}{5} \\ y' = \dfrac{2 + 4x + 3y}{5}. \end{cases}$$

1) Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

2) Trouver l'ensemble des points invariants par f.

3) Déterminer l'ensemble des milieux des segments $[Mf(M)]$ quand M décrit $\mathcal{E}$.

4) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ appartient, pour tout M de $\mathcal{E}$, à une droite vectorielle fixe.

5) En déduire la nature de f.

68. Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'expression analytique dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x' = -2x - y + 3 \\ y' = x + 1. \end{cases}$$

1) Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

2) Trouver l'ensemble des points invariants par f.

3) Soit (D) une droite d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.
Démontrer que l'image de (D) est une droite dont on donnera une équation.

4) Une droite du plan peut-elle être :

a) parallèle à son image?

b) invariante?

c) perpendiculaire à son image?

5) Soient I et J les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

a) Déterminer les images O', I' et J' respectivement de O, I et J par f.

b) Démontrer que, quel que soit le point M, d'image M' par f, il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{O'M'} = a\overrightarrow{O'I'} + b\overrightarrow{O'J'},$$

et donner a et b en fonction des coordonnées de M. Quelle est la propriété de f mise ici en évidence?

69. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que l'application vectorielle φ qui lui est associée, soit indépendante de l'origine choisie dans $\mathcal{E}$.
Démontrer que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ on a :

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$

(prendre des représentants (A, B) et (B, C) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement).

70. *A*) Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ étant rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère une application linéaire φ déterminée par sa matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ relative à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1) Démontrer que φ est bijective si et seulement si $ad - bc$ est non nul.

2) Démontrer que φ est injective si et seulement si $ad - bc$ est non nul.

3) En déduire qu'une application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ est injective si et seulement si elle est bijective.

B) Dans cette partie on démontre que toute similitude non réduite à une isométrie admet un point invariant et un seul (appelé son centre).
Soient s une similitude de rapport k différent de 1, f l'application vectorielle (et linéaire) associée à s, g l'application vectorielle définie par :

$$g = f - \mathrm{id}_{\mathcal{V}}.$$

1) Vérifier que g est linéaire.

2) Soit $\vec{v}$ un vecteur de représentant (M, N).

a) Vérifier que, si $g(\vec{v}) = \vec{0}$ alors $M = N$.

b) En déduire que :

$$\{\vec{v} \in \mathcal{V},\ g(\vec{v}) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}.$$

c) En déduire que g est injective, puis bijective.

3) Soit O un point fixé du plan :

a) Vérifier qu'un point M est invariant par s si et seulement si il vérifie :

$$g(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{s(O)\,O}.$$

b) Prouver que s admet un unique point invariant.

4 Représentations de l'espace

I. Espace $\mathcal{E}$ et parallélismes
II. Projections
III. Ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs de l'espace
IV. Étude analytique de $\mathcal{E}$
V. Distance dans $\mathcal{E}$. Repère orthonormé
VI. Épure d'un point
VII. Épure d'une droite
VIII. Épure d'un plan

I. Espace $\mathcal{E}$ et parallélisme

1 Axiomes d'incidence

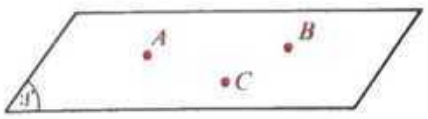
L'espace $\mathcal{E}$ est un ensemble infini de points vérifiant les axiomes suivants :

A_1 : Toute droite est un ensemble infini de points, c'est une partie propre de $\mathcal{E}$.
A_2 : Par deux points distincts de $\mathcal{E}$, il passe une droite et une seule.



$(D) = (AB)$

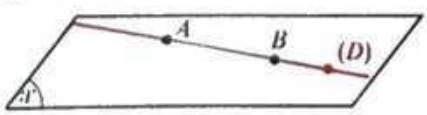
A_3 : Tout plan est un ensemble infini de points, c'est une partie propre de $\mathcal{E}$.
A_4 : Par trois points non alignés de $\mathcal{E}$, il passe un plan et un seul. On note (ABC) le plan défini par les trois points A, B et C non alignés.



$\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}$

$\mathcal{P} = (ABC)$.

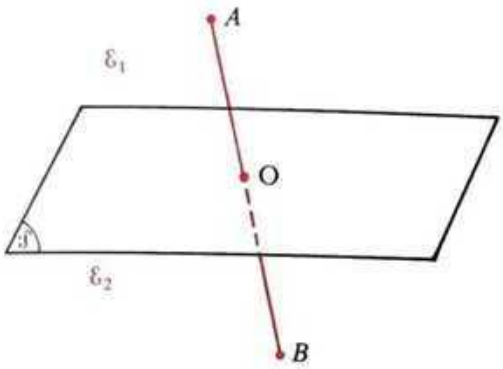
A_5 : Si une droite a deux points distincts qui appartiennent à un plan alors cette droite est incluse dans le plan :



$\{A, B\} \subset (D)$
$\{A, B\} \subset \mathcal{P}$

A_6 : Tout plan $\mathcal{P}$ partage l'espace $\mathcal{E}$ en deux demi-espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ tels que :

$$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{P}$$
$$\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$$
$$\forall A \in \mathcal{E}_1 \quad \forall B \in \mathcal{E}_1 \quad [AB] \subset \mathcal{E}_1$$
$$\forall A \in \mathcal{E}_2 \quad \forall B \in \mathcal{E}_2 \quad [AB] \subset \mathcal{E}_2$$
$$\forall A \in \mathcal{E}_1 \quad \forall B \in \mathcal{E}_2 \quad [AB] \cap \mathcal{P} \neq \varnothing \quad \text{(« passage des douanes »)}$$



$A \in \mathcal{E}_1$
$B \in \mathcal{E}_2$
$[AB] \cap \mathcal{P} = \{0\}$

2 Positions relatives de droites et de plans

a) **Droites**

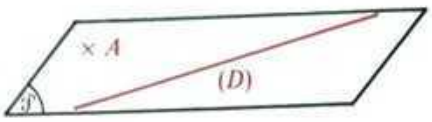
Soient (D) et (D') deux droites de l'espace $\mathcal{E}$.

(D) et (D') sont coplanaires	(D) et (D') sont parallèles	(D) et (D') sont disjointes	(D) (D')
		(D) et (D') sont confondues	(D) (D')
	(D) et (D') sont sécantes		(D), (D'), A ; $(D) \cap (D') = \{A\}$
(D) et (D') ne sont pas coplanaires			$(D) \cap (D') = \varnothing$

Remarque. Un plan est défini de façon unique :

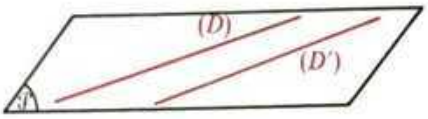
- par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.

On note $\mathcal{P}(A, (D))$ le plan défini par le point A et la droite (D) où $A \notin (D)$



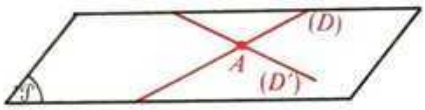
$A \in \mathcal{P}$
$(D) \subset \mathcal{P}$

- par deux droites parallèles et disjointes



$(D) \subset \mathcal{P}$
$(D') \subset \mathcal{P}$ $\quad (D) \cap (D') = \varnothing$

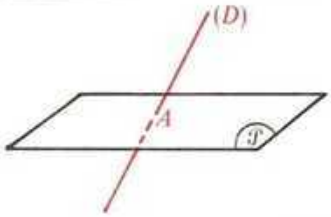
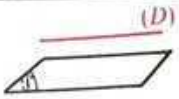
- par deux droites sécantes.



$(D) \subset \mathcal{P}$
$(D') \subset \mathcal{P}$ $\quad (D) \cap (D') = \{A\}$

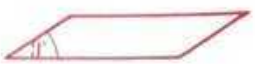
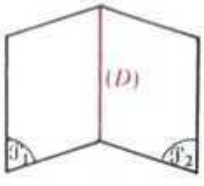
On note $\mathcal{P}((D), (D'))$ le plan défini par les deux droites (D) et (D') (sécantes, ou, parallèles et disjointes).

b) **Droite et plan**

(D) et $\mathcal{P}$ sont sécants			$(D) \cap \mathcal{P} = \{A\}$
(D) est parallèle à $\mathcal{P}$	(D) est incluse dans $\mathcal{P}$		$(D) \cap \mathcal{P} = (D)$
	(D) et $\mathcal{P}$ sont disjoints		$(D) \cap \mathcal{P} = \varnothing$

c) **Plans**

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace $\mathcal{E}$.

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles	$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus		$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$
	$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont disjoints		$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants			$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (D)$

Remarque. Si deux plans distincts ont un point commun alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point.

Exercice 1 Soient (D) et (D') deux droites parallèles distinctes, A un point de (D) et B un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à (D).
On note $\mathcal{P}$ le plan défini par les droites (D) et (D').
Montrer que :

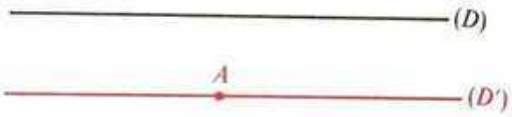
1) si B n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors les droites (AB) et (D') sont non coplanaires.

2) si B appartient à $\mathcal{P}$, alors les droites (AB) et (D') sont sécantes.

3 Parallélisme

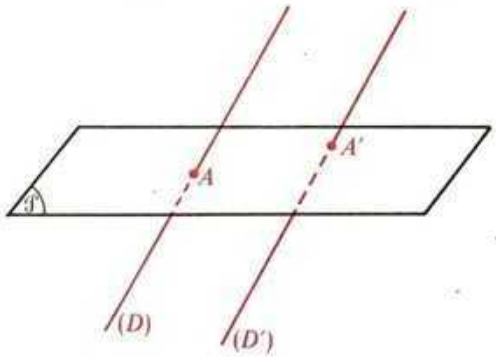
a) Droites

- La relation « est parallèle à » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des droites de l'espace.
- Les classes d'équivalence sont appelées **directions de droites.**
- Par un point de $\mathcal{E}$, on peut tracer une et une seule droite parallèle à une droite donnée.



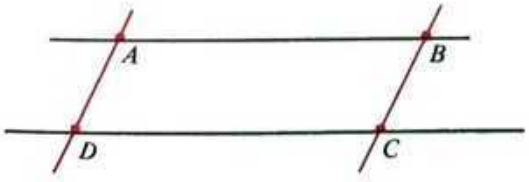
$(D') \parallel (D)$
$A \in (D')$

- Si deux droites sont parallèles alors tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.



$(D) \parallel (D')$
$(D) \cap \mathcal{P} = \{A\}$
$(D') \cap \mathcal{P} = \{A'\}$

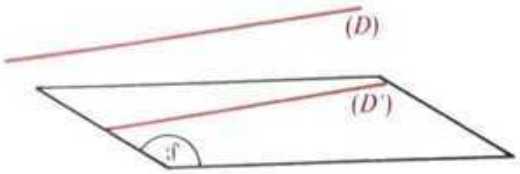
- Soient A, B, C et D quatre points de l'espace $\mathcal{E}$ tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés, la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ est le **quadrilatère** $ABCD$.
Un quadrilatère $ABCD$ de $\mathcal{E}$ est un **parallélogramme** si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et les droites (AD) et (BC) sont parallèles :



$(AB) \parallel (CD)$
$(AD) \parallel (BC)$

b) **Droite et plan**

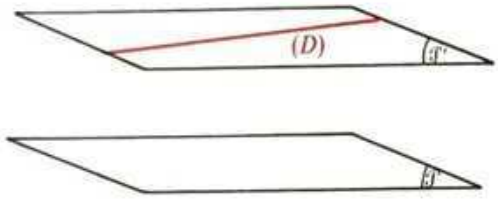
• Une droite (D) est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si (D) est incluse dans $\mathcal{P}$ ou (D) est parallèle à une droite (D') elle même incluse dans $\mathcal{P}$
Puisque (D) est parallèle à elle-même on a :



$$(D') \subset \mathcal{P} \quad (D) \parallel (D')$$

(D) est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si (D) est parallèle à une droite incluse dans $\mathcal{P}$.

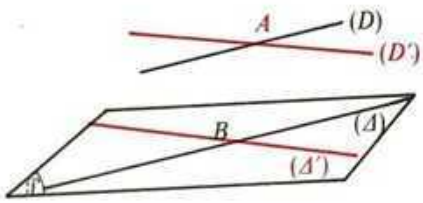
• Une droite (D) est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si (D) est incluse dans un plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$.



$$(D) \subset \mathcal{P}' \quad \mathcal{P}' \parallel \mathcal{P}$$

• Si une droite (D) est parallèle à une droite incluse dans un plan $\mathcal{P}$ et a un point commun avec $\mathcal{P}$ alors (D) est incluse dans $\mathcal{P}$.

Remarques



$$\begin{array}{l}(\Delta) \subset \mathcal{P} \\ (\Delta') \subset \mathcal{P} \\ (\Delta) \parallel (D) \\ (\Delta') \parallel (D') \\ (\Delta) \cap (\Delta') = \{B\} \\ (D) \cap (D') = \{A\}.\end{array}$$

Deux droites (D) et (D') peuvent être parallèles à un plan $\mathcal{P}$, sans être parallèles entre elles. Cette notion-ci de parallélisme est en fait une relation entre deux éléments qui n'appartiennent pas au même ensemble. On ne parlera donc pas, par exemple, de relation symétrique, et on dira toujours une droite est parallèle à un plan et non le contraire

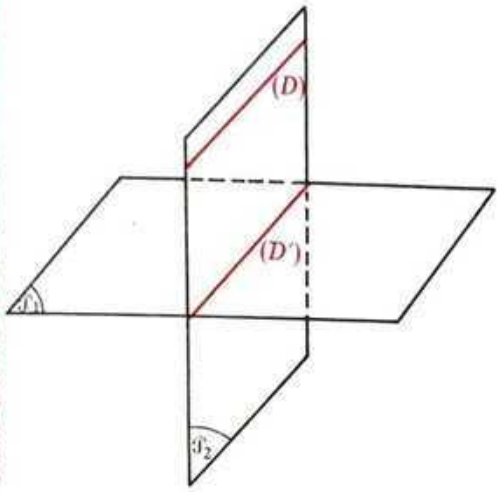
Exercice 2 Soient (D) et (D') deux droites parallèles et $\mathcal{P}$ un plan. Démontrer que si (D) est parallèle à $\mathcal{P}$ alors (D') est parallèle à $\mathcal{P}$.

• Si deux droites sont parallèles entre elles et que l'une est parallèle à un plan alors l'autre est parallèle à ce plan.

Question 1 *Soient (D) et (D') deux droites non parallèles.*
Montrer qu'il existe un plan et un seul qui contienne (D) et tel que (D') soit parallèle à ce plan.

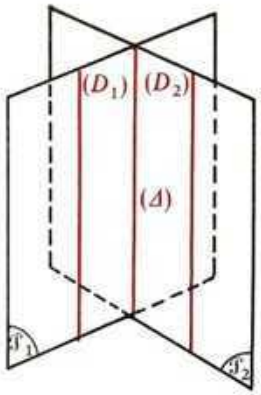
Ainsi un plan est caractérisé par un point et deux directions distinctes de droites.

Question 2 *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants, et (D) une droite de $\mathcal{P}_2$ telle que (D) est parallèle à $\mathcal{P}_1$.*
Démontrer que l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite (D') parallèle à (D).



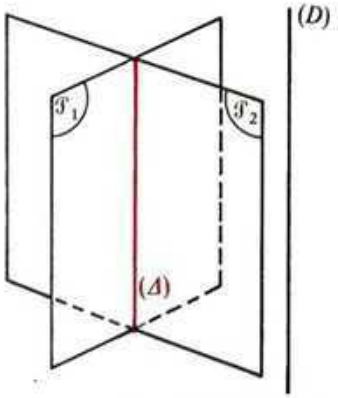
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (D')$
$(D) \subset \mathcal{P}_2$
$(D) \parallel \mathcal{P}_1$.

Ainsi : soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants de $\mathcal{E}$, une droite (D) de $\mathcal{P}_2$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ si et seulement si (D) est parallèle à la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
De ce fait si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles, alors l'intersection de deux plans sécants contenant respectivement (D_1) et (D_2), est une droite parallèle à (D_1) (et à (D_2)).



$(D_1) \subset (P_1)$
$(D_2) \subset (P_2)$
$(D_1) \parallel (D_2)$
$(P_1) \cap (P_2) = (\Delta)$.

Question 3 *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants et (D) une droite parallèle aux deux plans :*



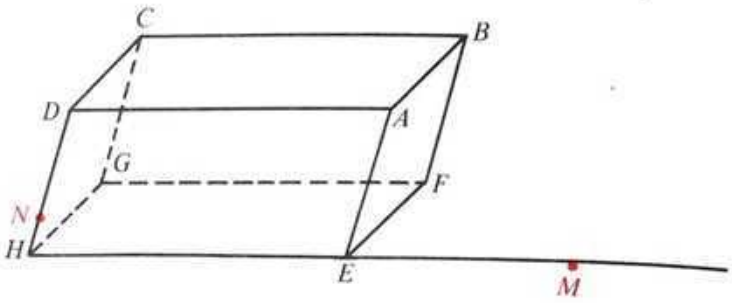
(D) est parallèle à $\mathcal{P}_1$
(D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)$.

Démontrer que l'intersection (Δ) de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite parallèle à (D).

Ainsi, si une droite (D) est parallèle à deux plans sécants alors l'intersection de ces deux plans est une droite parallèle à (D).
Les résultats trouvés dans les deux dernières questions peuvent être résumés par :
Si deux plans sont sécants, il existe alors une direction de droites, et une seule, représentée à la fois dans l'un et dans l'autre plan : c'est la direction de la droite d'intersection de ces deux plans.

Exercice 3

Soient $ABCDEFGH$ un parallélépipède, M un point de la demi-droite $[HE)$ n'appartenant pas au segment $[HE]$, et N un point du segment $[DH]$ distinct de D et de H.



1) Soit $\mathcal{S}$ le plan passant par M et N et tel que la droite (AB) soit parallèle à $\mathcal{S}$.
Tracer l'intersection des plans $\mathcal{S}$ et (EFG).

2) Soient P, Q et R les points d'intersection respectifs de $\mathcal{S}$ avec $[AE]$, $[BF]$ et $[CG]$.
Quelles sont les intersections du plan $\mathcal{S}$ avec chacune des faces?
Montrer que $NPQR$ est un parallélogramme.

Exercice 4

Soient A, B, C, E, F et G six points tels que :

- A, B et C sont non alignés.
- E, F et G sont non alignés,
- les plans (ABC) et (EFG) sont disjoints,
- les droites (BC) et (FG) ne sont pas coplanaires.

1) Démontrer que les points E, B et C ne sont pas alignés.
Tracer l'intersection (D_1) des plans (EBC) et (EFG).
Montrer que (D_1) est sécante à (FG) en un point noté I.

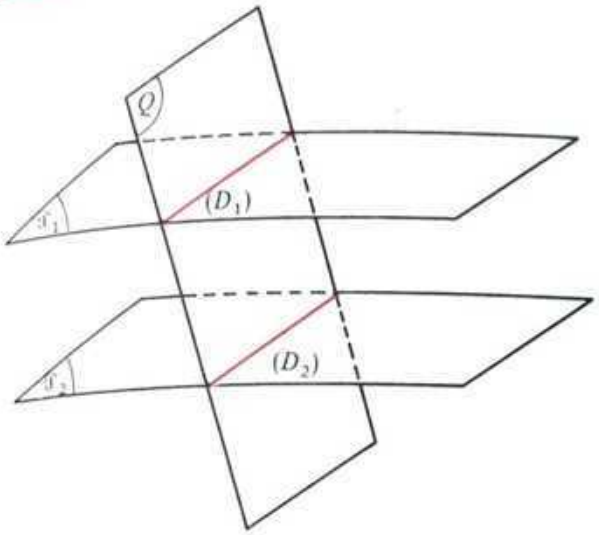
2) Démontrer que les points A, F et G ne sont pas alignés.
Tracer l'intersection (D_2) des plans (AFG) et (ABC).
Montrer que (D_2) est sécante à (CB) en un point noté J.

3) Trouver l'intersection des plans (AFG) et (EBC).

c) Plans

Nous avons démontré en classe de seconde que :

- Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un, est sécant à l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles :



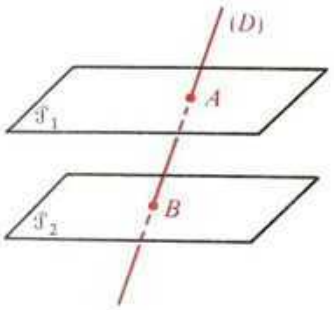
$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$ $\quad$ $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{Q} = (D_2)$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q} = (D_1)$ $\quad$ $(D_1) \parallel (D_2)$.

Question 4 *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles et (D) une droite.*

1) Démontrer que si (D) est parallèle à $\mathcal{P}_1$ alors (D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$.

2) Démontrer que si (D) est sécante à $\mathcal{P}_1$ alors (D) est sécante à $\mathcal{P}_2$.

On a ainsi le résultat :



$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$
$(D) \cap \mathcal{P}_1 = \{A\}$
$(D) \cap \mathcal{P}_2 = \{B\}$.

• Si deux plans sont parallèles alors toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

Du théorème d'Euclide, on déduit :

• Par tout point de l'espace il passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.

De la question 4, on déduit :

• Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécante entre elles.

Exercice 5 Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles, (D_1) et (D_2) deux droites distinctes, parallèles entre elles et sécantes à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$. Montrer que les points d'intersection sont les sommets d'un parallélogramme.

II. Projections

1) Projection sur un plan parallèlement à une droite

Question 5 *Soient $\mathcal{P}$ un plan, (D) une droite non parallèle à $\mathcal{P}$ et M un point de $\mathcal{E}$. Vérifier que l'unique droite (Δ) parallèle à (D) et passant par M, est sécante à $\mathcal{P}$.*

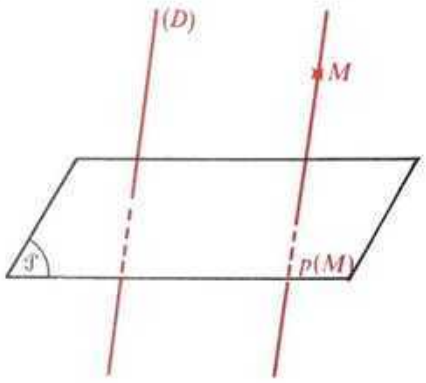
Définition

Soient $\mathcal{P}$ un plan et (D) une droite sécante à $\mathcal{P}$.
On appelle **projection sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite** (D) l'application p de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite parallèle à (D) passant par M.
La direction de (D) est appelée **direction de la projection** p. L'image du point M par la projection p est appelée le **projeté du point** M sur $\mathcal{P}$ parallèlement à (D).
La droite parallèle à (D) passant par M est appelée la **projetante** du point M.
L'image d'une figure $\mathcal{F}$ par p est appelée le **projeté de la figure** $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{P}$ parallèlement à (D).

Remarques

1) L'image de $\mathcal{E}$ par p est le plan $\mathcal{P}$.

2) L'ensemble des points invariants par p est le plan $\mathcal{P}$.



Question 6 *Soient p la projection sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à (D) et (Δ) une droite.*

1) Montrer que si (Δ) est parallèle à (D) alors le projeté de (Δ) est un singleton.

2) Montrer que si (Δ) n'est pas parallèle à (D) alors le projeté de (Δ) est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan contenant (Δ) et tel que (D) lui soit parallèle. Soient, dans ce cas, A et B deux points distincts de (Δ) de projetés respectifs A' et B'.
Vérifier que le projeté de (Δ) est la droite $(A'B')$.
Vérifier que le projeté du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.

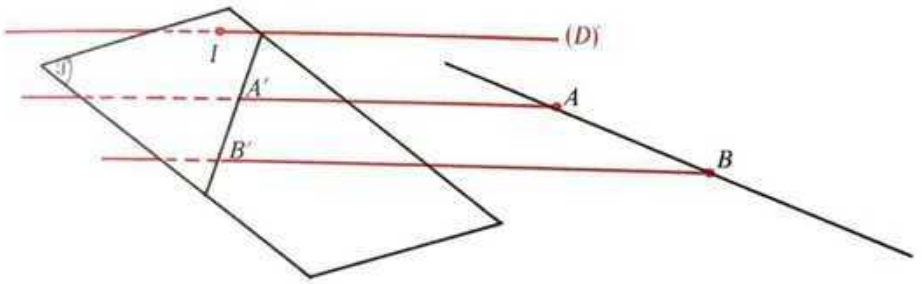
On a ainsi les résultats suivants :

Théorème

Le projeté d'une droite sur un plan est soit une droite soit un singleton.
Le projeté d'un segment sur un plan est un segment éventuellement réduit à un singleton.

Méthode pratique

Pour tracer le projeté d'une droite (resp. d'*un segment*) *sur un plan* parallèlement à une droite : on projette deux points distincts A et B de la droite (respectivement les extrémités du segment), le projeté est alors la droite passant par ces deux projetés (resp. le segment d'extrémités ces projetés) :



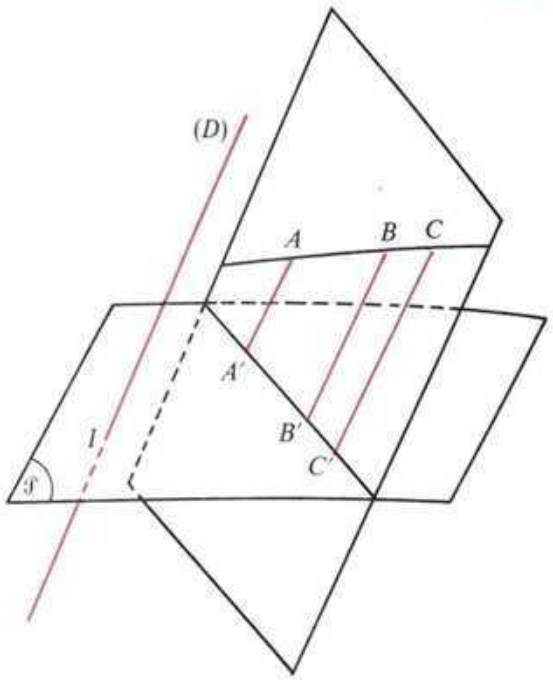
$(D) \cap \mathcal{P} = \{I\}$
$p(A) = A'$
$p(B) = B'$

le projeté de (AB) est $(A'B')$
celui de $[AB]$ est $[A'B']$.

Exercice 6 Soient $\mathcal{P}$ un plan, (D) une droite sécante à $\mathcal{P}$, p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à (D), (D_1) et (D_2) deux droites n'appartenant pas à la direction de (D), et parallèles entre elles.
Montrer que les projetés respectifs (D'_1) et (D'_2) de (D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles entre elles.
Montrer que les projetés de deux bipoints équipollents d'un plan $\mathcal{Q}$ sont deux bipoints équipollents de $\mathcal{P}$.

Une projection sur un plan parallèlement à une droite (D) conserve le parallélisme de droites non parallèles à (D).

Question 7 *Soit p la projection sur un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une droite (D) non parallèle à $\mathcal{P}$, A, B et C trois points distincts deux à deux et alignés mais tels que la droite (AB) ne soit pas parallèle à (D), et A', B' et C' les projetés respectifs de A, B et C par p.*
Montrer que les points A, B, C, A', B' et C' sont situés dans un même plan (on dit qu'ils sont ***coplanaires****).*



Montrer que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Ainsi on a : (**Énoncé de Thalès**).
Soient p la projection sur un plan $\mathcal{S}$ parallèlement à une droite (D), A, B et C trois points distincts deux à deux, de projetés respectifs A', B' et C' par p.
Si A, B et C appartiennent à une droite non parallèle à (D), alors on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

Question 8 *Démontrer que le projeté sur un plan du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté.*

Remarque.
Soient A_1, A_2 ... A_n n points distincts deux à deux et tous situés sur une même droite non parallèle à (D), A'_1, A'_2, ..., A'_n leurs projetés respectifs sur $\mathcal{S}$.
Quels que soient les nombres i, j, k et ℓ de $\{1, 2, ..., n\}$ distincts deux à deux, on a :

$$\frac{\overline{A_iA_j}}{\overline{A_kA_\ell}} = \frac{\overline{A'_iA'_j}}{\overline{A'_kA'_\ell}}.$$

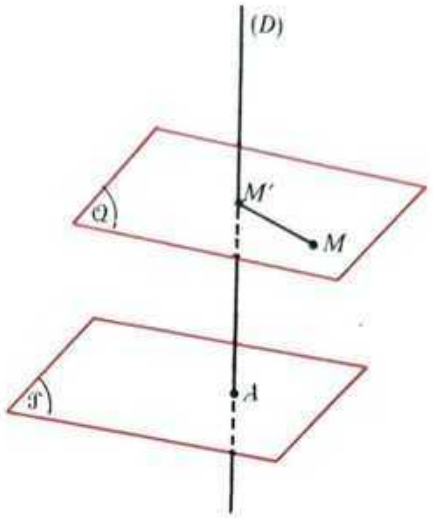
Exercice 7 Soient $ABCDEFGH$ un parallélépipède, I le point d'intersection des diagonales du parallélogramme $ABGH$.

1) Déterminer l'image I' de I par la projection p sur le plan (ABC) parallèlement à la droite (BE).

2) Déterminer l'image I'' de I par la projection q sur le plan (BCF) parallèlement à la droite (AF).

2 Projection sur une droite parallèlement à un plan

Question 9 *Soient $\mathcal{P}$ un plan, (D) une droite sécante à $\mathcal{P}$ et M un point de $\mathcal{E}$. Pourquoi l'unique plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par M, est-t-il sécant à la droite (D) en un point M'?*



Définition

Soient $\mathcal{P}$ un plan et (D) une droite sécante à $\mathcal{P}$.
On appelle **projection sur la droite (D) parallèlement au plan $\mathcal{P}$**, l'application q de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' intersection de la droite (D) et du plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par M.
La direction du plan $\mathcal{P}$ est appelée **direction de la projection** q.
L'image du point M par q est appelée le **projeté** de M sur (D) parallèlement à $\mathcal{P}$.
Le plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par M s'appelle le **plan projetant** de M.
L'image d'un ensemble $\mathcal{F}$ de points par q est appelée le **projeté de la figure $\mathcal{F}$** sur (D) parallèlement à $\mathcal{P}$.

Remarques

1) L'image de $\mathcal{E}$ par q est (D).

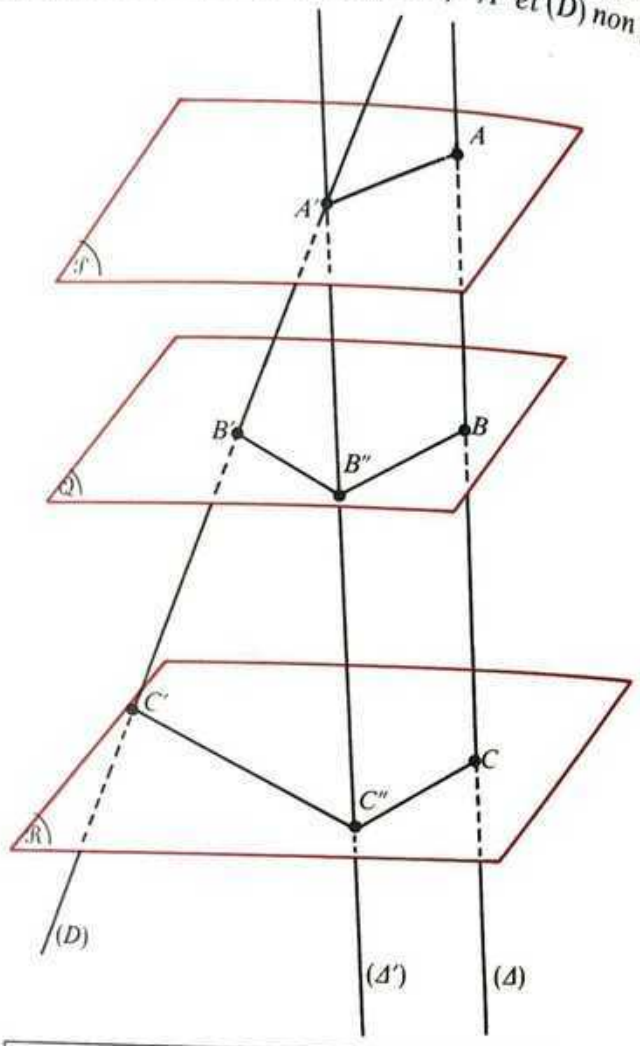
2) L'ensemble des points invariants par q est la droite (D).

Question 10 *Soient $\mathcal{P}$ un plan, (D) une droite sécante à $\mathcal{P}$ et q la projection sur (D) parallèlement à $\mathcal{P}$.*
Soit (Δ) une droite.

1) Montrer que si (Δ) est parallèle à $\mathcal{P}$ alors le projeté de (Δ) est un singleton.

2) Montrer que si (Δ) est sécante à $\mathcal{P}$ alors son projeté est la droite (D).

Question 11 *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois plans parallèles et disjoints deux à deux, (Δ) une droite sécante respectivement à ces plans en A, B et C, (D) une droite sécante respectivement à ces plans en A', B' et C', avec $A \neq A'$ et (D) non parallèle à (Δ).*



$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \varnothing$	$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}$
$\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \varnothing$	$(\Delta) \cap \mathcal{Q} = \{B\}$
$\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \varnothing$	$(\Delta) \cap \mathcal{R} = \{C\}$
$(D) \cap \mathcal{P} = \{A'\}$	$(\Delta') \cap \mathcal{P} = \{A'\}$
$(D) \cap \mathcal{Q} = \{B'\}$	$(\Delta') \cap \mathcal{Q} = \{B''\}$
$(D) \cap \mathcal{R} = \{C'\}$	$(\Delta') \cap \mathcal{R} = \{C''\}$
$(\Delta) \parallel (\Delta')$	

1) Soit (Δ') la droite parallèle à (Δ) menée par A'.
Montrer que (Δ') est sécante à $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$. On note respectivement B'' et C'' les points d'intersection de (Δ') avec $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

2) Montrer que $AA'B''B$ et $AA'C''C$ sont des parallélogrammes.

3) Montrer que : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{A'B''}}{\overline{A'C''}}$.

En déduire que : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

Question 12 *Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois plans parallèles et disjoints deux à deux, (Δ) une droite sécante à ces plans en A, B et M respectivement, (D) une droite sécante à ces plans respectivement en A', B' et M'. On considère le point M'' de la droite (D) tel que :*

$$\frac{\overline{A'M''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

Montrer que M'' est le projeté de M sur (D) parallèlement à $\mathcal{S}$.

Ainsi on a :

Théorème (de Thalès)

Soit q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan $\mathcal{S}$ sécant à (D), A, B et C trois points de projetés respectifs A', B' et C'. Si A, B et C sont distincts deux à deux et tous trois sur une droite sécante à $\mathcal{S}$ alors on a : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

Théorème (réciproque du théorème de Thalès)

Soient q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan $\mathcal{S}$ sécant à (D), A, B et M trois points alignés sur une droite sécante à $\mathcal{S}$ avec A et B distincts, A' et B' les projetés respectifs de A et B par q. Si un point M' de la droite (D) est tel que :

$$\frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$$

alors M' est le projeté de M par q.

Question 13 *Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, et q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan $\mathcal{S}$ sécant à (D).*

1) Montrer que si la droite (AB) est parallèle à $\mathcal{S}$, alors le projeté du segment $[AB]$ par q est un segment réduit à un singleton.

2) Montrer que si la droite (AB) est sécante $\mathcal{S}$, alors le projeté du segment $[AB]$ par q est le segment $[A'B']$, où $A' = q(A)$ et $B' = q(B)$.

3) Montrer que le projeté du milieu M du segment $[AB]$ est le milieu du segment projeté $[A'B']$.

Ainsi le projeté d'un segment sur une droite est un segment de cette droite et, toute projection sur une droite « conserve les milieux ».

Remarque.
Soient A_1, A_2, ..., A_n n points distincts deux à deux et alignés, et q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan $\mathcal{S}$ sécant à (D). En notant, pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, A'_i

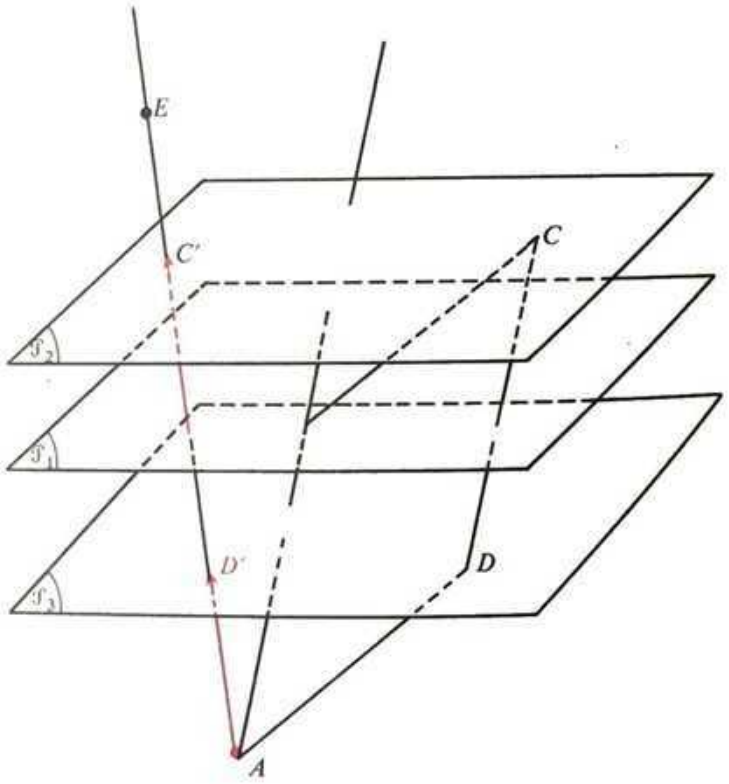
l'image de A_i par q on a, quels que soient les nombres i, j, k et ℓ de $\{1, 2, ..., n\}$ distincts deux à deux, $\dfrac{\overline{A_iA_j}}{\overline{A_kA_\ell}} = \dfrac{\overline{A'_iA'_j}}{\overline{A'_kA'_\ell}}$

Exercice 8

Soit q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan $\mathcal{P}$ sécant à (D).
Montrer que les projetés de deux bipoints équipollents d'un plan $\mathcal{R}$, par q, sont aussi deux bipoints équipollents de la droite (D).

Exercice 9

Soient $ABCD$ un parallélogramme, (AE) une droite non située dans le plan $(ABCD)$, $\mathcal{P}_1$ un plan contenant le point B et sécant à (AE) en B', q la projection sur (AE) parallèlement à $\mathcal{P}_1$. On note $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans projetants respectifs de C et D, et C' et D' les projetés respectifs de C et D.



1) Déterminer l'intersection I de (AB) et $\mathcal{P}_3$
Déterminer l'intersection J de (CD) et $\mathcal{P}_1$
Déterminer l'intersection K de (AB) et $\mathcal{P}_2$.

2) Montrer que $AD' = B'C'$ et que $AB' = D'C'$.

3) Vérifier que la longueur du projeté de la diagonale $[AC]$ parallélogramme $ABCD$ est égale à la somme des longueurs des projetés des côtés consécutifs $[AB]$ et $[AD]$ de ce parallélogramme.

III. Ensemble $\mathfrak{w}$ des vecteurs de l'espace

1 Définition de l'ensemble des vecteurs de l'espace : $\mathfrak{w}$

Question 14 *Soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$. Vérifier que si $ABCD$ est un parallélogramme alors ces quatre points sont coplanaires.*

Ainsi lorsque quatre points A, B, C et D de l'espace sont tels que $ABCD$ soit un parallélogramme, dans le plan contenant ces quatre points, les bipoints (A, B) et (D, C) sont équipollents. D'où :

Définition

Soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$. On dit que le bipoint (A, B) est équipollent au bipoint (D, C), et on note $(A, B) \uparrow\uparrow (D, C)$, si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

Remarque.
Dans le cas où les points A, B, C et D sont tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés, on a :

$$(A, B) \uparrow\uparrow (D, C) \iff ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

Question 15 *Soient A, B, C, D, E et F 6 points de $\mathcal{E}$ tels que $ABCD$ et $ABEF$ sont des parallélogrammes et C, D et E ne soient pas alignés.*
Montrer que $CDFE$ est un parallélogramme.

Cette question permet de justifier la transitivité de la relation $\uparrow\uparrow$ définie sue $\mathcal{E}^2$ (si C, D et E sont alignés, on travaille dans le plan contenant les 6 points). Étant donnés les résultats connus sur l'équipollence dans un plan, la relation $\uparrow\uparrow$ est évidemment une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}^2$. Comme dans le plan, on définit les **vecteurs** comme classes d'équivalence de bipoints de $\mathcal{E}^2$.
L'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$ est noté $\mathfrak{W}$. Un vecteur est encore noté $\vec{u}$.
Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathfrak{W}$. On a :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \iff (A, B) \in \vec{u}.$$

Comme dans le plan :

- $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff A = B.$
- $\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4 \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$
- **Étant donné un vecteur $\vec{u}$ de $\mathfrak{W}$ et un point O de $\mathcal{E}$, l'équation :**

$$M \in \mathcal{E}, \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{u}$$

admet une solution unique.

On définit ainsi l'application φ_0 de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{W}$ qui au point M de $\mathcal{E}$ associe le vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
Cette application φ_0 est bijective.

2 Définition de la loi + dans $\mathcal{W}$. Translations dans $\mathcal{E}$

L'addition de deux vecteurs de $\mathcal{W}$ est définie grâce à l'égalité de **Chasles** :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Cette opération étant définie sur $\mathcal{W}$ comme l'addition dans $\mathcal{U}$, on démontre qu'elle est indépendante des représentants choisis des vecteurs, et qu'elle vérifie les mêmes propriétés, à savoir :

- L'ensemble $\mathcal{W}$ muni de l'addition des vecteurs est un groupe commutatif (l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$, et noté $-\overrightarrow{AB}$).

Et on a les conséquences suivantes :

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{W}^3 \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{w}$.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$, l'équation :

$$\vec{x} \in \mathcal{W}, \quad \vec{x} + \vec{u} = \vec{v}$$

admet une unique solution $\vec{x}_0$, et on a :

$$\vec{x}_0 = \vec{v} + (-\vec{u}), \quad \text{que l'on note } \vec{v} - \vec{u}.$$

Ceci définit, comme dans $\mathcal{U}$, la différence de deux vecteurs de $\mathcal{W}$.
De même on a :

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même, notée $t_{\vec{u}}$, définie par :

$$t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad M \longmapsto M'$$

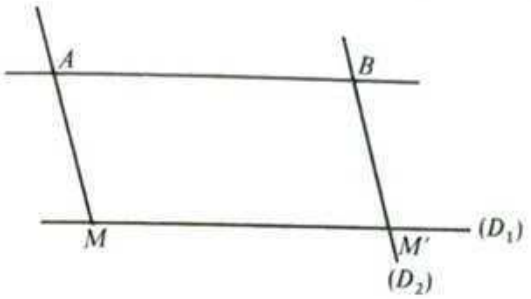
où M' est l'unique point tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
M' est appelé le **translaté** de M par $t_{\vec{u}}$.

Méthode pratique

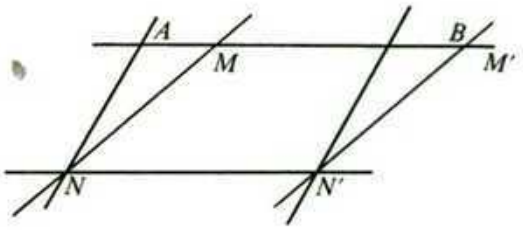
Pour placer le translaté M' d'un point M de $\mathcal{E}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ donné par un représentant (A, B) :

- **Si $A = B$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ et la translation de vecteur nul est l'application identique de $\mathcal{E}$:** $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \ M \longmapsto M$
donc $M' = M$.

• Si A et B sont distincts alors ils déterminent une droite (AB). Si M et A sont confondus alors $M' = B$.
Plaçons-nous dans le cas où M et A sont distincts.
Dire que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ c'est dire que $ABM'M$ est un parallélogramme. Ainsi, dans le cas où M n'appartient pas à la droite (AB), on trace les droites (D_1) : parallèle à (AB) passant par M et (D_2) : parallèle à (AM) passant par B. Ces droites sont parallèles à une droite du plan (AMB) et contiennent un point de ce plan donc elles sont incluses dans le plan (AMB).



Dans ce plan (AMB) les droites (D_1) et (D_2) parallèles à deux droites sécantes sont sécantes. Le point M' est leur intersection.
Dans le cas où M appartient à la droite (AB), on choisit un point N n'appartenant pas à (AB), on place comme ci-dessus le point N' tel que $ABN'N$ soit un parallélogramme. Puis on place le point M' tel que $NN'M'M$ soit un parallélogramme.

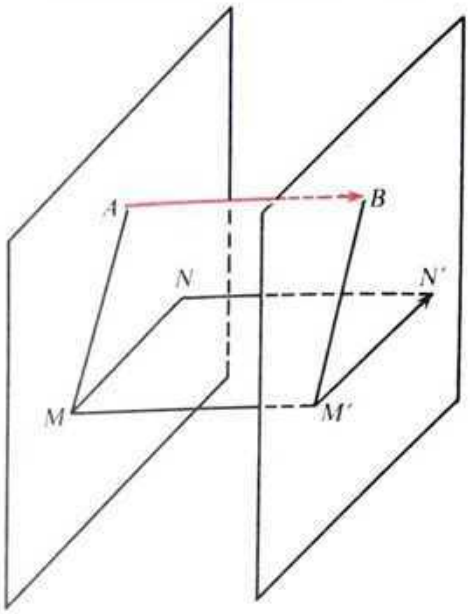


En fait dans le cas où M est un point distinct de A, la figure, tracée en perspective cavalière, se fait comme dans le plan. On peut alors utiliser le fait que les distances MM' et AB sont les mêmes et faire ainsi un report de distance à partir du point M, sur la droite parallèle à (AB) passant par M en respectant « le sens » des bipoints.

Exercice 10 Soient A, B, C trois points non alignés, et D un point de $\mathcal{E}$ non coplanaire avec A, B et C.
Construire les images respectives A', B', et C' des points A, B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Question 16 *Soient $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$, M et N des points d'images respectives M' et N' par la translation de vecteur $\vec{u}$.*
Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

On a ainsi, en notant (A, B) un représentant du vecteur $\vec{u}$, la figure ci-contre. Les bipoints (M, N) et (M', N') sont équipollents.



Théorème

Dans $\mathcal{E}$, l'image d'un bipoint (M, N) par une translation est un bipoint équipollent au bipoint (M, N).

Question 17

1) Quel est l'ensemble des points invariants par une translation?

2) Montrer qu'une translation est une application bijective de $\mathcal{E}$ sur lui-même et préciser sa bijection réciproque.

3) Montrer que la composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des vecteurs des deux translations.

4) Montrer que l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$, muni de la composition des applications est un groupe commutatif.

Exercice 11

Soient A, B et C trois points non alignés et D un point non coplanaire avec A, B et C.
Montrer qu'il existe un point unique E, que l'on construira, tel que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}.$$

Exercice 12

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ non alignés et D un point de $\mathcal{E}$ non situé dans le plan (ABC).

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. On note $\vec{s}$ cette somme.

2) Construire le point S tel que $\overrightarrow{CS} = \vec{s}$.

3) Vérifier que les segments $[AS]$ et $[BD]$ ont même milieu M.

4) Soit N le milieu du segment $[AC]$.
Montrer que : $\vec{s} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NM}$.

3 Définition de la loi . sur $\mathfrak{W}$. Homothéties dans $\mathcal{E}$

La multiplication d'un vecteur de $\mathfrak{W}$ par un nombre réel est définie comme dans $\mathfrak{V}$ par :
Soient $\vec{u} \in \mathfrak{W}$, $k \in \mathbb{R}$ et A un point de $\mathcal{E}$. En notant B le point de $\mathcal{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et (D) une droite contenant A et B.
$k \,.\, \vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ où C est le point de (D) tel que : $\overline{AC} = k\overline{AB}$.
Là encore la définition ne dépend pas du point A choisi.
Cette multiplication possède les propriétés suivantes :

- $\forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad 1 \,.\, \vec{u} = \vec{u}$
- $\forall (k, k') \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad k \,.\, (k' \,.\, \vec{u}) = (kk') \,.\, \vec{u}.$
- $\forall (k, k') \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad (k + k') \,.\, \vec{u} = k \,.\, \vec{u} + k' \,.\, \vec{u}$
- $\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{W}^2 \quad k \,.\, (\vec{u} + \vec{v}) = k \,.\, \vec{u} + k \,.\, \vec{v}$
- $\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad (k \,.\, \vec{u} = \vec{0} \iff [k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}])$.

Les notions de combinaison linéaire de vecteurs et de colinéarité de deux vecteurs de $\mathfrak{W}$, sont exactement les mêmes que dans $\mathfrak{V}$.
De même on a :

Définition

Soient O un point de $\mathcal{E}$, k un nombre réel non nul. On appelle **homothétie de centre O et de rapport k**, l'application h :

$$h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \longmapsto M' \text{ défini par } \overrightarrow{OM'} = k \,.\, \overrightarrow{OM}$$

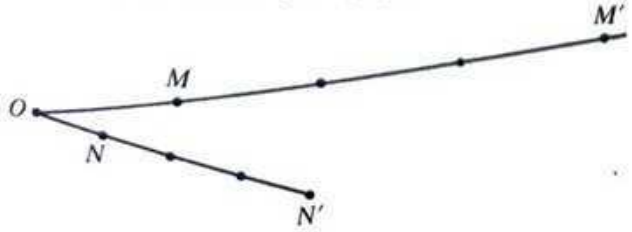
M' est appelé l'**homothétique** de M par k.

Question 18 *Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k, M et N deux points de $\mathcal{E}$ d'images respectives M' et N' par h.*
Montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

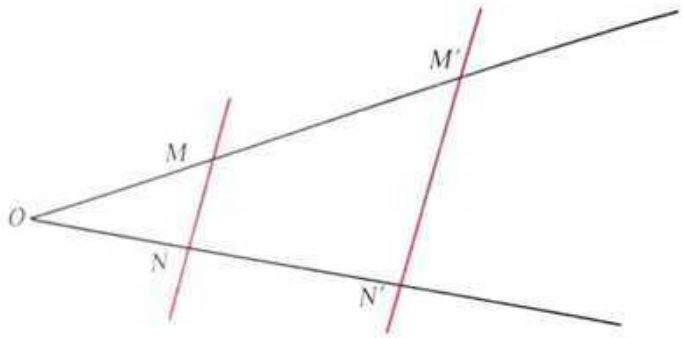
Méthode pratique

Pour placer l'image M' d'un point M par une homothétie de centre O de rapport k :
Puisque $\overrightarrow{OM'} = k \,.\, \overrightarrow{OM}$, les points O, M et M' sont alignés.
On considère en réalité un plan contenant les points O et M et la construction se fait dans ce plan (et même sur la droite (OM) quand M est distinct de O).



$k = 4$
$M' = h(M)$
$N' = h(N)$

On reporte les distances au compas ou on trace les parallèles si on connaît un point et son image



$M' = h(M)$
$N' = h(N)$

Question 19 *1) Quelle est l'homothétie de centre O et de rapport 1?*

2) La ***symétrie centrale*** *de centre O est l'application de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *qui, à tout point M de* $\mathcal{E}$ *associe le point M' défini par : O est le milieu de [MM']. Montrer que la symétrie centrale de centre O est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.*

3) Quel est l'ensemble des points invariants par une homothétie?

4) Montrer qu'une homothétie est une application bijective de $\mathcal{E}$ *sur lui-même et préciser sa bijection réciproque.*

5) Montrer que la composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre et dont le rapport est le produit des rapports des deux homothéties.

Exercice 13 Soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$ tels que A, B et C soient non alignés et D non situé dans le plan (ABC).
Montrer qu'il existe un point unique E, que l'on construira tel que :

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CA}.$$

Exercice 14 Soient h_1 et h_2 deux homothéties de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 $(\Omega_1 \neq \Omega_2)$ et de rapports respectifs k_1 et k_2 avec $k_1 k_2 \neq 1$. Soient M un point de $\mathcal{E}$ non aligné avec Ω_1 et Ω_2, et $\mathcal{P}$ le plan $(\Omega_1 \Omega_2 M)$.

1) Démontrer que l'image M' de M par $h_2 \circ h_1$ appartient à $\mathcal{P}$.

2) On admet (voir exercice n° 74) que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$. Construire le centre Ω de l'homothétie $h_2 \circ h_1$.

Exercice 15 Soient S_1 et S_2 deux symétries centrales de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 (avec $\Omega_1 \neq \Omega_2$).
Démontrer que $S_2 \circ S_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$

3 Vecteurs et droites

Comme dans $\mathfrak{V}$ on a :

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathfrak{W}$. On appelle **droite vectorielle** $D_{\vec{u}}$ engendrée par $\vec{u}$, le sous-ensemble de $\mathfrak{W}$ constitué des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $k\vec{u}$ où k est un nombre réel.
$(\vec{u})$ est une base de $D_{\vec{u}}$.

Remarques.

- Dans $\mathfrak{W}$ aussi on montre que
- si deux vecteurs appartiennent à une droite vectorielle toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs appartient à cette droite :
  - tout vecteur $k\vec{u}$ avec k non nul forme une base de $D_{\vec{u}}$.
  - Deux droites vectorielles $D_{\vec{u}}$ et $D_{\vec{v}}$ sont égales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - L'intersection de deux droites vectorielles distinctes est réduite au vecteur nul.
- Comme dans $\mathfrak{F}$, trois points A, B et C de $\mathfrak{E}$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Ainsi, étant donnés deux points distincts A et B de $\mathfrak{E}$, la droite (AB) est l'ensemble des points M de $\mathfrak{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$:

$$(AB) = \{ M \in \mathfrak{E}, \quad \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \}$$
$$= \{ M \in \mathfrak{E}, \ \overrightarrow{AM} \in D_{\overrightarrow{AB}} \}.$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur de $\mathfrak{W}$ de représentant (A, B), $\vec{u}$ est non nul car A et B sont distincts, et on a :

$$(AB) = \{ M \in \mathfrak{E}, \quad \overrightarrow{AM} \in D_{\vec{u}} \}.$$

Ainsi une droite est déterminée de façon unique par un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$, on note $D(A, \vec{u})$ cette droite on dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de cette droite. On a :

$$D(A, \vec{u}) = \{ M \in \mathfrak{E}, \quad \overrightarrow{AM} \in D_{\vec{u}} \}$$
$$= \{ M \in \mathfrak{E}, \quad \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \}.$$

On dit que $D_{\vec{u}}$ est la **droite vectorielle associée** à $D(A, \vec{u})$.
Comme dans le plan, étant donnés deux points distincts A et B, un point M de la droite (AB) est repéré de façon unique par son abscisse dans le **repère affine** (A, B) de cette droite (ou le **repère cartésien** $(A, \overrightarrow{AB})$) c'est-à-dire le nombre réel t tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$$

Les droites de $\mathfrak{E}$ sont aussi dites **droites affines,** ce sont des ensembles de points alors qu'une droite vectorielle est un ensemble de vecteurs.
Étant donnés deux points distincts A et B de $\mathfrak{E}$, le segment $[AB]$ est l'ensemble des points de la droite (AB) d'abscisse comprise entre 0 et 1 dans le repère (A, B), c'est-à-dire :

$$[AB] = \{ M \in \mathfrak{E}, \quad \exists t \in [0, 1] \quad \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \}.$$

La demi-droite $[AB)$ est l'ensemble des points de la droite (AB) d'abscisses positives dans le repère (A, B) c'est-à-dire :

$$[AB) = \{ M \in \mathcal{E}, \quad \exists t \in \mathbb{R}_+ \quad \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \}.$$

Question 20 *Soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$ tels que A et B soient distincts et C et D soient distincts.*
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, en notant $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{CD}$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème

Deux droites affines de $\mathcal{E}$ sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

Exercice 16 Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1) Démontrer que l'image d'une droite affine (D) par $t_{\vec{u}}$ est une droite affine parallèle à (D).

2) Déterminer les droites affines globalement invariantes par $t_{\vec{u}}$ (on distinguera les cas $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$).

3) Soient (D_1) et (D_2) deux droites affines coplanaires de $\mathcal{E}$, (D'_1) et (D'_2) les images respectives de (D_1) et (D_2) par $t_{\vec{u}}$.
Montrer que si (D_1) est parallèle à (D_2) alors (D'_1) est parallèle à (D'_2). On dit qu'une translation conserve le parallélisme des droites affines.

4) Vérifier que l'image par $t_{\vec{u}}$ d'un segment est un segment.

Exercice 17 Soient O un point de $\mathcal{E}$, k un nombre réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

1) Démontrer que l'image d'une droite affine par h est une droite affine parallèle.

2) Déterminer les droites affines globalement invariantes par h.

3) Montrer que h conserve le parallélisme des droites affines.

4) Vérifier que l'image d'un segment par h est un segment.

4 Vecteurs et plans

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$. On appelle **plan vectoriel** $P_{\vec{u},\vec{v}}$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le sous-ensemble de $\mathcal{W}$ constitué de toutes les combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$P_{\vec{u},\vec{v}} = \{ a\vec{u} + b\vec{v}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R} \}$. On dit alors que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $P_{\vec{u},\vec{v}}$.

Question 21 *Soit $P_{\vec{u},\vec{v}}$ un plan vectoriel de base $(\vec{u}, \vec{v})$.*

1) Démontrer que si deux vecteurs appartiennent à $P_{\vec{u},\vec{v}}$ alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient à $P_{\vec{u},\vec{v}}$.

2) Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ deux vecteurs de $P_{\vec{u},\vec{v}}$, non colinéaires. Pourquoi le plan vectoriel de base $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ est-il $P_{\vec{u},\vec{v}}$?

Deux vecteurs de $\mathcal{W}$ sont colinéaires si et seulement si ils appartiennent à la même droite vectorielle. On a de même la notion de vecteurs coplanaires (deux vecteurs de $\mathcal{W}$ sont toujours situé dans un même plan vectoriel, pour trois vecteurs ou plus, cela dépend de leurs « positions relatives »).

Définition

Des vecteurs de $\mathcal{W}$ sont dits **coplanaires** si et seulement si ils appartiennent à un même plan vectoriel.

On a immédiatement le résultat :

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$, $P_{\vec{u},\vec{v}}$ le plan vectoriel de base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $\vec{w}$ un vecteur de $\mathcal{W}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ appartient à $P_{\vec{u},\vec{v}}$. Ainsi on a $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (a et b sont uniques).

Remarque.
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors, quel que soit le vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Question 22 *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.*

1) Montrer que s'il existe trois nombres réels α, β et γ non tous les trois nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2) Montrer que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires alors il existe (α, β, γ) dans $\mathbb{R}^3$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ et $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

Ainsi on a le résultat suivant :

Théorème

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.
Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois nombres réels α, β et γ non tous les trois nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Remarque.
On en déduit immédiatement que :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si quels que soient les nombres réels α, β et γ, si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ alors α, β et γ sont tous les trois nuls.
Ou encore, si et seulement si :

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma)\in\mathbb{R}^3 \quad [\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \iff (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)].$$

Exercice 18 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.

1) Déterminer le nombre réel k tel que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $2\vec{u} + 3\vec{v} + k\vec{w}$ soient coplanaires.

2) Soient a un nombre réel et $\vec{z}$ le vecteur tel que :

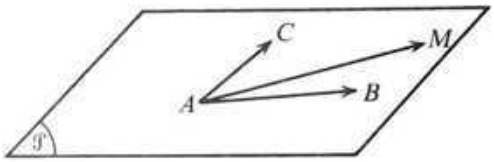
$$\vec{z} = a\vec{u} + 2\vec{v} + (a + 1)\vec{w}.$$

Déterminer a de façon que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{z}$ soient coplanaires.

Question 23 *Soient $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ deux plans vectoriels de bases respectives $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$. Démontrer que ces plans vectoriels sont égaux si et seulement si :*

$$\begin{cases} \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont coplanaires} \\ \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont coplanaires} \end{cases}$$

On sait qu'un plan est défini par trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$. Soient A, B et C trois points non alignés et $\mathcal{P}$ le plan défini par ces trois points.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère cartésien de $\mathcal{P}$. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, il existe un unique couple (k, k') de nombres réels tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$.
k et k' sont les coordonnées de M dans le **repère cartésien** $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\mathcal{P}$ (ou le **repère affine** (A, B, C) de $\mathcal{P}$).
Ainsi on a :

$$\mathcal{P} = \{ M\in\mathcal{E}, \quad \exists(t, t')\in\mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \}.$$

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et notons $P_{\vec{u},\vec{v}}$ le plan vectoriel de base $(\vec{u}, \vec{v})$. On a :

$$\mathcal{P} = \{ M\in\mathcal{E}, \quad \exists(t, t')\in\mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \}$$

or : $\quad P_{\vec{u},\vec{v}} = \{ \vec{w}\in\mathcal{W}, \quad \exists(t, t')\in\mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = t\vec{u} + t'\vec{v} \}$

d'où : $\quad \mathcal{P} = \{ M\in\mathcal{E}, \quad \overrightarrow{AM}\in P_{\vec{u},\vec{v}} \}.$

On dit que le plan vectoriel $P_{\vec{u},\vec{v}}$ est le **plan vectoriel associé au plan** $\mathcal{P}$; on dit aussi que $\mathcal{P}$ est un **plan affine** : c'est un ensemble de points, alors qu'un plan vectoriel est un ensemble de vecteurs.

Un plan affine est donc déterminé de façon unique par un point A et un plan vectoriel $P_{\vec{u},\vec{v}}$ c'est-à-dire par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ ce plan. On a :

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{ M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{AM} \in P_{\vec{u},\vec{v}} \}$$
$$= \{ M \in \mathcal{E}, \quad \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \}.$$

Question 24 *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u}$ soit non nul et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne soient pas colinéaires, $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base $(\vec{u})$ et $P_{\vec{v},\vec{w}}$ le plan vectoriel de base $(\vec{v}, \vec{w})$.*

1) Montrer que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires alors $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$.

2) Montrer que si $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$ alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

3) Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$, (D) la droite $D(A, \vec{u})$, et $\mathcal{F}$ le plan $P(B, \vec{v}, \vec{w})$.
Démontrer que si (D) est parallèle à $\mathcal{F}$ alors $\vec{u} \in P_{\vec{v},\vec{w}}$ (c'est-à-dire $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$).
Démontrer que si $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$ alors (D) est parallèle à $\mathcal{F}$.

On a ainsi montré que :

Théorème

Soient (D) une droite affine de droite vectorielle associée $D_{\vec{u}}$ de base $(\vec{u})$ et $\mathcal{F}$ un plan affine de plan vectoriel associé $P_{\vec{v},\vec{w}}$ de base $(\vec{v}, \vec{w})$.

(D) est parallèle à $\mathcal{F}$ si et seulement si $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$ c'est-à-dire :

(D) est parallèle à $\mathcal{F}$ si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Méthode pratique

Pour montrer, grâce aux vecteurs qu'une droite affine (D) est parallèle à un plan affine $\mathcal{F}$:

- on choisit deux points distincts A et B de (D)
- on choisit trois points non alignés C, D et E du plan $\mathcal{F}$
- on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont coplanaires.

Ainsi par exemple si l'on sait que, par une homothétie h, les points A et B sont transformés respectivement en A' et B' et que A' et B' sont dans le plan $\mathcal{F}$ alors :

$\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont coplanaires donc (AB) est parallèle à $\mathcal{F}$.

Question 25 *Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ quatre vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires, et, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ ne soient pas colinéaires. On note $\mathcal{F}$ le plan affine passant par A et de plan vectoriel associé $P_{\vec{u},\vec{v}}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $\mathcal{F}'$ le plan passant par B et de plan vectoriel associé $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ de base $(\vec{u}', \vec{v}')$.*
Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont parallèles si et seulement si les plans vectoriels $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ sont égaux.

En utilisant la question 23 on a donc le résultat :

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine de plan vectoriel associé $P_{\vec{u},\vec{v}}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}'$ un plan affine de plan vectoriel associé $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ de base $(\vec{u}', \vec{v}')$.
$\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ sont égaux c'est-à-dire :

$\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si $\begin{cases} \vec{u}, \vec{v}, \text{ et } \vec{u}' \text{ sont coplanaires} \\ \vec{u}, \vec{v}, \text{ et } \vec{v}' \text{ sont coplanaires.} \end{cases}$

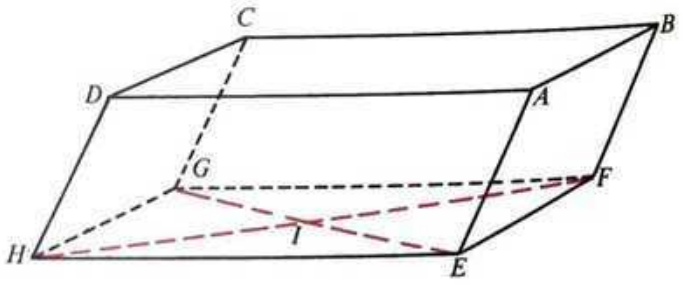
Méthode pratique

Pour démontrer le parallélisme de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

On considère trois points A, B et C non alignés de $\mathcal{P}$ et trois points A', B' et C' non alignés de $\mathcal{P}'$.
On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont coplanaires, et que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont aussi coplanaires.

Remarque.
Pour démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas colinéaires; ou encore il suffit de prouver qu'il existe un point D appartenant à la fois à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$, et un point E appartenant à $\mathcal{P}'$ sans appartenir à $\mathcal{P}$.

Exercice 19 Soient $ABCDEFGH$ un parallélépipède (on a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$) et I le centre de symétrie du parallélogramme $EFGH$. On note $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs respectifs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.



1) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FC}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$.
Montrer que la droite (ID) est parallèle au plan (AFC).

2) Montrer que les plans (BEG) et (AFC) sont sécants.

3) Montrer que les plans (FAC) et (DEG) sont parallèles.

Exercice 20 Soit t une translation de $\mathcal{E}$, de vecteur $\vec{u}$.

1) Démontrer que le translaté d'un plan $\mathcal{P}$ passant par un point A est le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le translaté A' de A.

2) Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de translatés respectifs $\mathcal{P}'_1$ et $\mathcal{P}'_2$ par t.
Démontrer que si $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$ alors $\mathcal{P}'_1$ est parallèle à $\mathcal{P}'_2$.
On dit qu'une translation conserve le parallélisme des plans.

3) Soient (D) une droite et $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$, de translatés respectifs par t, (D') et $\mathcal{P}'$.
Vérifier que si (D) et $\mathcal{P}$ sont disjoints alors (D') et $\mathcal{P}'$ le sont.
Vérifier que si (D) est incluse dans $\mathcal{P}$ alors (D') est incluse dans $\mathcal{P}'$.
En déduire que si (D) est parallèle à $\mathcal{P}$ alors (D') est parallèle à $\mathcal{P}'$.
On dit qu'une translation conserve le parallélisme des droites et plans.

Exercice 21

Soit h une homothétie, de centre O et de rapport k.

1) Démontrer que l'image d'un plan $\mathcal{P}$ est un plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P}'$ passe par l'homothétique d'un point de $\mathcal{P}$.

2) Démontrer que les homothétiques de deux plans parallèles sont deux plans parallèles entre eux.

3) Démontrer que les homothétiques d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une droite (D) parallèle à $\mathcal{P}$ sont respectivement un plan $\mathcal{P}'$ et une droite (D') avec (D') parallèle à $\mathcal{P}'$.
Ainsi une homothétie conserve le parallélisme des plans, et des droites et plans.

IV. Étude analytique de $\mathcal{E}$

1 Repère de $\mathcal{E}$. Base de $\mathcal{V}$

Question 26

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$.

1) Vérifier que les points A, B et C sont non alignés et que les points A et D sont distincts.
Soient $\mathcal{P}$ *le plan défini par les points A, B et C,* (Δ) *la droite* (AD), *vérifier que* (Δ) *n'est pas parallèle à* $\mathcal{P}$.
On note p la projection sur $\mathcal{P}$ *parallèlement à* (Δ).

2) Soit M un point de $\mathcal{E}$ de projeté m par p.
Prouver l'existence de deux nombres réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{Am} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Prouver l'existence d'un nombre réel z tel que :

$$\overrightarrow{mM} = z\overrightarrow{AD}.$$

En déduire que, pour tout M de $\mathcal{E}$ il existe un triplet (x, y, z) de nombres réels tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}.$$

Vérifier l'unicité de ce triplet.

3) Réciproquement montrer que, pour tout triplet (x, y, z) de nombres réels, il existe un et un seul point M de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}.$$

On obtient ainsi le résultat suivant :

Définition et théorème

Quatre points non coplanaires A, B, C et D définissent un **repère affine** de l'espace $\mathcal{E}$. L'application qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$$

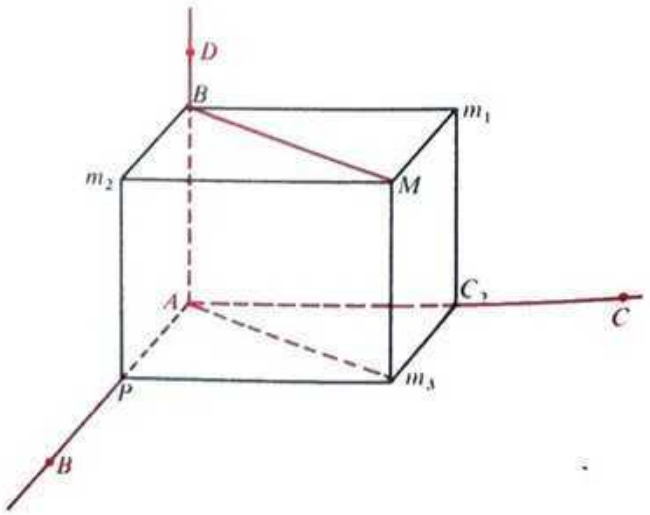
est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.

Le nombre réel x est appelé l'**abscisse** du point M dans le repère (A, B, C, D)
Le nombre réel y est appelé l'**ordonnée** du point M dans le repère (A, B, C, D)
Le nombre réel z est appelé la **cote** du point M dans le repère (A, B, C, D).

les nombres x, y et z sont appelés les coordonnées du point M dans ce repère, on note $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On dit aussi que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un **repère cartésien** de $\mathcal{E}$.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées x, y et z dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.



On considère les projections p_1, p_2 et p_3 sur les **plans de coordonnées** parallèlement aux **droites de coordonnées** :

p_1 : projection sur (ACD) parallèlement à (AB) :

$$p_1(M) = m_1 \quad \text{avec} \quad m_1\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}$$

p_2 : projection sur (ABD) parallèlement à (AC) :

$$p_2(M) = m_2 \quad \text{avec} \quad m_2\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}$$

p_3 : projection sur (ABC) parallèlement à (AD) :

$$p_3(M) = m_3 \quad \text{avec} \quad m_3\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}.$$

On considère aussi les projections q_1, q_2, et q_3 sur les droites de coordonnées parallèlement aux plans de coordonnées :

q_1 : projection sur (AB) parallèlement à (ACD) :

$$q_1(M) = P \quad \text{avec} \quad P\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$$

q_2 : projection sur (AC) parallèlement à (ABD) :

$$q_2(M) = Q \quad \text{avec} \quad Q\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}$$

q_3 : projection sur (AD) parallèlement à (ABC) :

$$q_3(M) = R \quad \text{avec} \quad R\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}.$$

Question 27 *Montrer que q_1 est la composée de p_3 et p_2.*
Pourquoi $p_2 \circ p_3 = p_3 \circ p_2$?
Décomposer de même q_2 et q_3 grâce à p_1, p_2 et p_3.

Méthode pratique

Pour placer un point M de coordonnées données x, y et z dans un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ donné en perspective cavalière :

On place le point P de la droite (AB) défini par $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$
On place le point Q de la droite (AC) défini par $\overrightarrow{AQ} = y\overrightarrow{AC}$
On place le point R de la droite (AD) défini par $\overrightarrow{AR} = z\overrightarrow{AD}$.

On trace alors la droite parallèle à (AB) passant par Q, et la droite parallèle à (AC) passant par P : elles sont contenues dans le plan (ABC) et parallèles respectivement à deux droites sécantes, donc elles sont sécantes en un point m_3 du plan (ABC) (on a $\overrightarrow{Am_3} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$).

On place alors le point M tel que $\overrightarrow{m_3M} = \overrightarrow{AR}$, en traçant, si m_3 est distinct de A le parallélogramme m_3ARM, en prenant $M = R$ dans le cas où $m_3 = A$ (on a $\overrightarrow{m_3M} = z\overrightarrow{AD}$ d'où, par Chasles, $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$).

Ainsi par exemple le point M de l'espace $\mathcal{E}$ de coordonnées 2, -2 et 3 est placé sur la figure ci-dessous grâce aux points P, Q et R définis par :

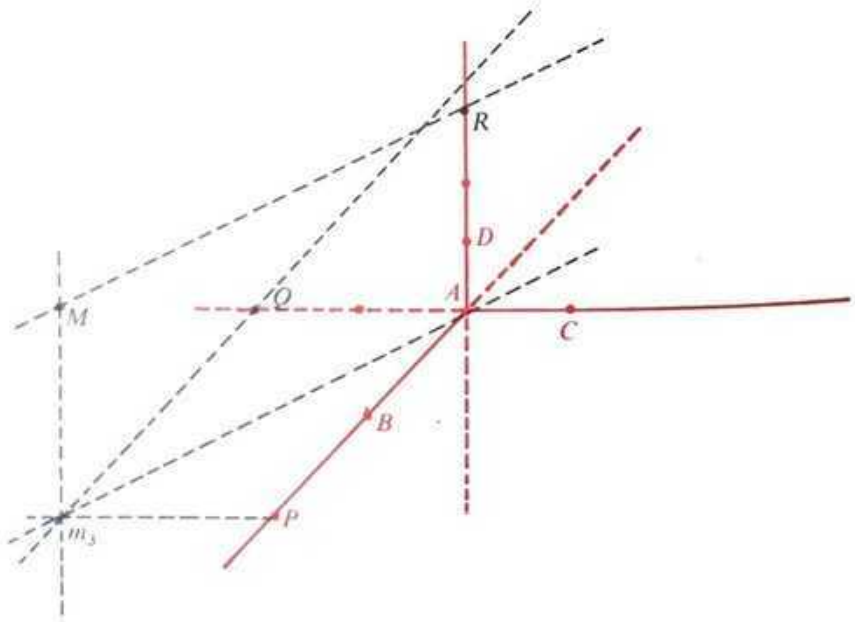
$$\overline{AP} = 2\overline{AB}$$

(on reporte au compas 2 fois la distance AB en tenant compte du sens) :

$$\overline{AQ} = -2\overline{AC}.$$

(On reporte au compas 2 fois la distance AC en tenant compte du sens).

$\overline{AR} = 3\overline{AD}$ (on reporte 3 fois la distance AD).



On place alors le point m_3 : point d'intersection de la parallèle à (AB) par Q et de la parallèle à (AC) par P.

On place enfin le point M : point d'intersection de la parallèle à (Am_3) par R et de la parallèle à (AD) par m_3 (ou, sur la parallèle à (AD) par m_3, on reporte la distance AR en tenant compte du sens).

Posons $\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \vec{j} = \overrightarrow{AC}, \vec{k} = \overrightarrow{AD}$. Ces trois vecteurs sont non coplanaires car les points A, B, C et D sont non coplanaires.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$; il existe un point M et un seul de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. Donc il existe un triplet et un seul (x, y, z) de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Définition et théorème

On appelle **base** de $\mathcal{W}$ tout triplet de vecteurs non coplanaires.
$(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère cartésien de $\mathcal{E}$. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelée **la base de $\mathcal{W}$ associée à ce repère d'origine A.**
Étant donnée une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$, quel que soit le vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels, appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Question 28 *Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$, $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ deux points de $\mathcal{E}$.*
Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 22 Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
1) Placer les points suivants :

A de coordonnées 0, 0 et 4 dans ce repère
B de coordonnées 1, 2 et 3 dans ce repère
C de coordonnées 2, 4 et 2 dans ce repère
D de coordonnées 0, 3 et 5 dans ce repère
E de coordonnées 6, 1 et 6 dans ce repère.

2) Vérifier que les points A, B et C sont alignés.
Vérifier que les points A, B et D ne sont pas alignés.
Vérifier que les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires.

Exercice 23 Soient (O, I, J, K) un repère affine de $\mathcal{E}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ où α est un nombre réel.
Déterminer α pour que les points A, B et C soient alignés.

Exercice 24 Soient (O, I, J, K) un repère affine de $\mathcal{E}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ où k est un nombre réel.
Déterminer l'ensemble des nombres réels k tels que A, B, C et D soient coplanaires.

Exercice 25 Soient (O, I, J, K) un repère affine de $\mathcal{E}$, $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}3\alpha+4\\\alpha-4\\-2\alpha+1\end{pmatrix}$ où α est un nombre réel.

1) Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.

2) Déterminer le nombre réel α pour que A, B, C et D soient coplanaires. Exprimer alors les coordonnées de D dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC).

3) Pour quelles valeurs de α, (A, B, C, D) est-il un repère affine de $\mathcal{E}$?

Exercice 26 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$, $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}a\\-4a+1\\-a+2\end{pmatrix}$ quatre points de $\mathcal{E}$, où a est un nombre réel.

Déterminer les valeurs de a pour que (A, B, C, D) soit un repère affine de $\mathcal{E}$.

Question 29 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$ et $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$.*
On note $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ les plans vectoriels de bases respectives $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$.
Démontrer que si $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ ne sont pas égaux alors leur intersection est une droite vectorielle.

Ainsi, puisque deux plans affines sont parallèles si et seulement si leurs plans vectoriels associés sont égaux, deux plans affines $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants ont leurs plans vectoriels associés distincts, donc l'intersection de ces derniers est une droite vectorielle, qui est la droite vectorielle associée à la droite affine intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Question 30 *Soient $A\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{W}$, et $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$. On note (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.*
Caractériser vectoriellement l'appartenance de M à la droite (D) (on utilisera un nombre réel t).
En déduire les expressions de x, y et z en fonction de t, qui caractérisent cette appartenance.

Plus généralement, soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{W}$, et (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On considère un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$. On a :

$$M \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \quad (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k} = ta\vec{i} + tb\vec{j} + tc\vec{k}$$

Comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$, l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base de $\mathcal{W}$ permet d'écrire :

$$M \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \\ z = tc + z_A \end{cases}.$$

On remarque que dans ce système on a :

$$\begin{array}{|c|} x \\ y \\ z \end{array} = t \begin{array}{|c|} a \\ b \\ c \end{array} + \begin{array}{|c|} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array}$$

coordonnées de M — coordonnées de $\vec{u}$ — coordonnées de A

Définition

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient A un point de $\mathcal{E}$, x_A, y_A et z_A ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$, a, b et c ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On dit que l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^3$, qui, à tout nombre réel t, associe le triplet $(ta + x_A, tb + y_A, tc + z_A)$, est une **représentation paramétrique** de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Le système (S) $\begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \\ z = tc + z_A \end{cases}$ est appelé **système de la représentation paramétrique** f de (D), et, par abus (S) est la représentation paramétrique de (D).

On a :

$$\forall M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \quad [M \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad f(t) = (x, y, z)]$$

c'est-à-dire :

$$\forall M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \quad [M \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad (S)].$$

Remarques.

1) Étant donné un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$, s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = (x, y, z)$ alors ce nombre réel t est unique. On a donc :

$M \in (D) \iff (x, y, z)$ a un unique antécédent par f
$M \notin (D) \iff (x, y, z)$ n'a pas d'antécédent par f.

2) Une droite a plusieurs représentations paramétriques : il suffit de prendre un autre point B de la droite ou un autre vecteur directeur $\vec{v}$ de cette droite.

Par exemple : $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ définissent la droite (D). Quel que soit le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$ on a :

$$M \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + 1. \end{cases}$$

En prenant $t = 3$ on prouve que le point B de coordonnées -2, 6 et 4 est un point de (D). Le vecteur $\vec{v}$, égal à $-2\vec{u}$, donc de coordonnées 2, -4 et -2 est un vecteur directeur de (D).

Ainsi, quel que soit le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$, on a :

$$M \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -4t + 6 \\ z = -2t + 4. \end{cases}$$

Dans cet exemple le point B est obtenu pour la valeur 3 du paramètre dans la 1re représentation et la valeur 0 du paramètre dans la 2e représentation : on a mis la même lettre pour représenter le paramètre : ceci n'est pas obligatoire, c'est en fait la variable pour l'application f, on sait que son nom n'a pas d'importance.

Exercice 27 Donner une représentation paramétrique de la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$, $(D) = D(A, \vec{u})$

2) $A'\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $(D) = D(A', \vec{u}')$

3) $B\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ $(D) = D(B, \vec{v})$

4) $C\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ $(D) = (CE)$.

Exercice 28 Soit $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -3t + 4 \\ z = t - 2 \end{cases}$ un système de représentation paramétrique d'une droite (D).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D') passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et parallèle à (D).

Méthode pratique

Pour déterminer les positions respectives de deux droites (D) et (D') données par une représentation paramétrique, et connaître leur intersection :

A partir des représentations paramétriques respectives f et f' de (D) et (D') on détermine des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des droites (D) et (D') et on examine la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

- si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires alors les droites (D) et (D') sont parallèles. On choisit alors un point A de (D) :

si $A \in (D')$ alors $(D) = (D')$
si $A \notin (D')$ alors (D) et (D') sont disjointes.

- si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires alors les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles : elles sont soit sécantes soit non coplanaires.

On cherche alors l'intersection des deux droites, pour cela on considère un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$. On a :

$$M \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = f(t)$$

et :

$$M \in (D') \iff \exists t' \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = f'(t')$$

d'où :

$$\begin{aligned} M \in (D) \cap (D') &\iff ([\exists t \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = f(t)] \text{ et } [\exists t' \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = f'(t')]) \\ &\iff (\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) = f(t) \text{ et } (x, y, z) = f'(t')) \\ &\iff (\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) = f(t) \text{ et } f(t) = f'(t')). \end{aligned}$$

On est donc amené à résoudre le système (Σ) de trois équations en t et t' qui traduit l'égalité : $f(t) = f'(t')$.

* Si (Σ) n'a pas de solutions alors (D) et (D') sont non coplanaires.

* Si (Σ) a une solution (et nécessairement une seule) (t_0, t'_0) alors (D) et (D') sont sécantes et on a $(D) \cap (D') = \{ M_0 \}$ où M_0 est le point de coordonnées $f(t_0)$ (ou $f'(t'_0)$).

Ainsi par exemple, soient (D) et (D') les droites définies par les systèmes de représentation paramétrique ci-dessous :

$$(D) : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 5t - 3 \\ z = -t + 4 \end{cases} \qquad (D') : \begin{cases} x = -2t' + 3 \\ y = t' + 3 \\ z = -3t' \end{cases}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

$\vec{u'}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D') :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \left(\vec{u'} = k\vec{u} \iff \begin{cases} -2 = 3k \\ 1 = 5k \\ -3 = -k \end{cases} \right)$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires; les droites (D) et (D') sont soit non coplanaires soit sécantes.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$:

$$M \in (D) \cap (D') \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 5t - 3 \\ z = -t + 4 \\ x = -2t' + 3 \\ y = t' + 3 \\ z = -3t' \end{cases}$$

$$\iff \left[\exists (t, r') \in \mathbb{R}^2 \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} 3t + 2 = -2t' + 3 \\ 5t - 3 = t' + 3 \\ -t + 4 = -3t' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 5t - 2 \\ z = -t + 4 \end{cases} \right].$$

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} 3t = -2t' + 1 \\ t' = 5t - 6 \\ t = 4 + 3(5t - 6) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t = -2t' + 1 \\ t' = 5t - 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3 = 3 \\ t' = -1. \\ t = 1 \end{cases}$$

Ainsi on a : $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (D) \cap (D') \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \\ z = 3 \end{cases}$

Donc (D) et (D') sont sécantes et leur intersection est $\{A\}$ avec $A\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 29 Déterminer les positions respectives des droites (D) et (D') dans chacun des cas suivants, où les droites sont données par un système de représentation paramétrique.

1) $(D) : \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 3\lambda + 2 \end{cases}$ $(D') : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = \mu - 1 \\ z = \mu - 1 \end{cases}$

2) $(D) : \begin{cases} x = -\lambda + 2 \\ y = 2\lambda \\ z = \dfrac{3}{2}\lambda + 1 \end{cases}$ $(D') : \begin{cases} x = 2a \\ y = -4a + 1 \\ z = -3a + 2 \end{cases}$

3) $(D) : \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = 3\lambda \end{cases}$ $(D') : \begin{cases} x = 4\lambda - 3 \\ y = -3\lambda + 2 \\ z = 2\lambda + 1 \end{cases}$

4) $(D) : \begin{cases} x = 3a + 2 \\ y = -a + 4 \\ z = 2a + 2 \end{cases}$ $(D') : \begin{cases} x = 6a + 11 \\ y = -2a + 1 \\ z = 4a + 8. \end{cases}$

3 Représentation paramétrique d'un plan. Équation cartésienne d'un plan de l'espace

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Question 31 *Soient* $A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ *un point de* $\mathcal{E}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ *deux vecteurs de* $\mathcal{W}$.

Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont non colinéaires.*

On note $\mathcal{S}$ *le plan défini par le point* A *et les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$. *On considère un point* $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *de* $\mathcal{E}$.

Caractériser vectoriellement, à l'aide de deux nombres réels t *et* t', *l'appartenance de* M *au plan* $\mathcal{S}$.

En déduire les expressions de x, y *et* z *en fonction de* t *et de* t' *qui caractérisent cette appartenance.*

Plus généralement, soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$, et $\mathcal{S}$ le plan défini par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On considère le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$. On a :

$$M \in \mathcal{S} \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$$

d'où :

$$M \in \mathcal{S} \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k} = ta\vec{i} + tb\vec{j} + tc\vec{k} + t'a'\vec{i} + t'b'\vec{j} + t'c'\vec{k}$$

Comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$, on a :

$$M \in \mathcal{S} \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c' \end{cases}$$

$$\iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = ta + t'a' + x_A \\ y = tb + t'b' + y_A \\ z = tc + t'c' + z_A. \end{cases}$$

Dans ce système on a :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t'\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}$$

coordonnées de M — coordonnées de $\vec{u}$ — coordonnées de $\vec{v}$ — coordonnées de A

Définition

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient A un point de $\mathcal{E}$, x_A, y_A et z_A ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$, a, b et c les coordonnées de $\vec{u}$, et a', b' et c' celles de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On dit que l'application f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$, qui, à tout couple (t, t') de réels associe le triplet :

$(ta + t'a' + x_A, tb + t'b' + y_A, tc + t'c' + z_A)$

est une **représentation paramétrique** du plan $\mathcal{S}$ défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le système $(S)\begin{cases} x = ta + t'a' + x_A \\ y = tb + t'b' + y_A \\ z = tc + t'c' + z_A \end{cases}$ est appelé **système de la représentation paramétrique** f de $\mathcal{S}$, et par abus représentation paramétrique du plan $\mathcal{S}$.

On a :

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}\quad [M\in\mathcal{S}\iff\exists(t,t')\in\mathbb{R}^2\quad f(t,t')=(x,y,z)]$$

c'est-à-dire :

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}\quad [M\in\mathcal{S}\iff\exists(t,t')\in\mathbb{R}^2\quad (S)].$$

Remarque

1. Étant donné un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$, s'il existe t et t' réels tels que $f(t,t')=(x,y,z)$ alors ce couple (t,t') est unique.
On a donc :

$M\in\mathcal{S}\iff(x,y,z)$ a un unique antécédent par f
$M\notin\mathcal{S}\iff(x,y,z)$ n'a pas d'antécédent par f.

2. Un plan a plusieurs représentations paramétriques : il suffit de prendre un autre point B du plan et un autre couple de vecteurs : $(\vec{u}',\vec{v}')$ tel que $P_{\vec{u},\vec{v}}=P_{\vec{u}',\vec{v}'}$.
Ainsi par exemple :

$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ définissent un plan affine $\mathcal{S}$, et on a :

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}\quad\left[M\in\mathcal{S}\iff\exists(t,t')\in\mathbb{R}^2\quad\begin{cases}x=t+2t'+1\\y=2t+t'+2\\z=2t+3t'+3\end{cases}\right].$$

En prenant $t=1$ et $t'=2$, on prouve que le point B de coordonnées 6, 6 et 11 est un point de $\mathcal{S}$.
Le vecteur $\vec{u}'$, égal à $2\vec{u}+\vec{v}$, donc de coordonnées 4, 5 et 7 est un vecteur du plan vectoriel $P_{\vec{u},\vec{v}}$.
Le vecteur $\vec{v}'$, égal à $-\vec{u}+\vec{v}$, donc de coordonnées 1, -1 et 1 est aussi un vecteur du plan vectoriel $P_{\vec{u},\vec{v}}$; de plus ces vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de ce plan vectoriel $P_{\vec{u},\vec{v}}$.

Ainsi B, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ définissent le même plan affine $\mathcal{S}$, et on a :

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}\quad\left[M\in\mathcal{S}\iff\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\begin{cases}x=4\alpha+\beta+6\\y=5\alpha-\beta+6\\z=7\alpha+\beta+11\end{cases}\right].$$

Exercice 30 Donner une représentation paramétrique du plan affine $\mathcal{P}$ dans chacun des cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\mathcal{P} = P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

2) $B\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}'\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ $\mathcal{P} = P(B, \vec{u}', \vec{v}')$.

3) $C\begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ $\mathcal{P} = (CDE)$.

Exercice 31 Soit $\begin{cases} x = 5t + 3t' + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 2t' \end{cases}$ un système de représentation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$.

Donner une base du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}'$ passant par le point $A\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ et parallèle à $\mathcal{P}$.

Question 32 *Soient* $A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ *et* $C\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}$ *trois points de* $\mathcal{E}$.

1) Vérifier que A, B et C sont non alignés.

Utiliser les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *et le point A pour déterminer une représentation paramétrique f du plan (ABC).*

2) Calculer les coordonnées du point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Vérifier que M appartient au plan (ABC) en cherchant l'antécédent par f du triplet des coordonnées de M.

3) Soient x, y et z trois nombres réels.
Vérifier qu'il existe un (unique) couple (t, t') de $\mathbb{R}^2$ *tel que* $f(t, t') = (x, y, z)$ *si et seulement si :*

$$10x - 13y + 15z - 53 = 0.$$

Cette dernière égalité est appelée ***équation cartésienne du plan*** *(ABC) ; elle caractérise l'appartenance à ce plan, du point de coordonnées x, y et z.*
Elle a été obtenue en « éliminant les paramètres t et t' entre les équations du système » de f.
Vérifier, grâce à cette équation, que le point M défini au 2), appartient au plan (ABC).

Plus généralement, soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$, et $\mathcal{T}$ le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$. On considère un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$. On a :

$$M \in \mathcal{T} \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c'. \end{cases}$$

Question 33 *Vérifier que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont non colinéaires si et seulement si les nombres $bc' - b'c$, $ca' - c'a$ et $ab' - a'b$ ne sont pas simultanément nuls.*

Étant donnés les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, on note D_1 le nombre $bc' - b'c$ obtenu comme déterminant à partir du tableau $\begin{matrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{matrix}$ où l'on barre la 1re ligne :

$$\begin{matrix} \cancel{a} & \cancel{a'} \\ b & b' \\ c & c' \end{matrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c$$

D_2 est obtenu en barrant la 2e ligne après avoir réécrit la 1re en dessous :

$$\begin{matrix} a & a' \\ \cancel{b} & \cancel{b'} \\ c & c' \\ a & a' \end{matrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} = ca' - c'a.$$

Et D_3 est obtenu en barrant la 3e ligne :

$$\begin{matrix} a & a' \\ b & b' \\ \cancel{c} & \cancel{c'} \end{matrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

La question 33 se traduit alors par le résultat suivant :

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, on note D_1, D_2 et D_3 les déterminants respectifs $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si D_1, D_2 et D_3 ne sont pas nuls simultanément.

Remarque.

Avec ces notations, le résultat de la question 33 s'écrit :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires $\iff (D_1, D_2, D_3) \neq (0, 0, 0)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff D_1$, D_2 et D_3 sont nuls

Méthodes pratiques

Pour montrer que deux vecteurs ne sont pas colinéaires : **il suffit** de montrer qu'un déterminant obtenu à partir du tableau de leurs coordonnées est non nul.

Ainsi par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

donc D_3 est non nul.

Pour montrer que deux vecteurs sont colinéaires : **il faut** montrer que les trois déterminants sont nuls ou la proportionnalité des trois coordonnées (par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$). Ainsi par exemple, a étant un nombre réel, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ 4 \\ a+4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $a = 2$ car :

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(a+4) - 12 = 0 \\ 3a - (a+4) = 0 \\ 4 - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a = 4 \\ 2a = 4 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

$$\iff a = 2.$$

Question 34 *A partir du système précédant la question 33, vérifier que l'on a :*

$$M \in \mathcal{P} \iff D_1(x - x_A) + D_2(y - y_A) + D_3(z - z_A) = 0.$$

Ainsi on a :

$$M \in \mathcal{P} \iff D_1 x + D_2 y + D_3 z - (D_1 x_A + D_2 y_A + D_3 z_A) = 0.$$

Cette équation est de la forme :

$$px + qy + rz + s = 0$$

avec $p = D_1, q = D_2, r = D_3, s = -(D_1 x_A + D_2 y_A + D_3 z_A)$ donc les 3 nombres réels p, q et r ne sont pas simultanément nuls.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$.

Théorème

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $\mathcal{P}$ un plan affine.
Il existe quatre nombres réels p, q, r et s avec p, q et r non tous les trois nuls tels que :

un point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées x, y et z appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $px + qy + rz + s = 0$.
L'équation :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad px + qy + rz + s = 0$$

est une **équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les nombres réels p, q et r sont respectivement les déterminants D_1, D_2 et D_3 obtenus à partir de deux vecteurs formant une base du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Remarque.

On dit **une** équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ car il n'y a pas unicité, en effet si $px + qy + rz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, alors pour tout nombre réel k non nul, $kpx + kqy + krz + kd = 0$ en est une autre.
On a vu dans le théorème précédent qu'une équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad px + qy + rz + s = 0 \qquad (1)$$

avec p, q et r non nuls simultanément.
Étudions maintenant l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées vérifient (1).
Puisque p, q et r ne sont pas nuls simultanément supposons p non nul. L'équation (1) est alors équivalente à :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = -\frac{q}{p} y - \frac{r}{p} z - \frac{s}{p}.$$

Posons $t = \frac{y}{p}$ et $t' = \frac{z}{p}$.

On a alors :

$$(x, y, z) \text{ est solution de (1)} \iff \left[\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = -qt - rt' - \dfrac{s}{p} \\ y = pt \\ z = pt' \end{cases} \right].$$

Question 35 *Vérifier que les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$ *sont non colinéaires.*

Vérifier que le système ci-dessus est celui d'une représentation paramétrique d'un plan affine $\mathcal{P}$ *défini par les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et un certain point* A *que l'on précisera.*

Théorème

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient p, q, r et s quatre nombres réels tels que p, q et r ne soient pas nuls simultanément. L'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad px + qy + rz + s = 0$$

est un plan affine.

Méthode pratique

Pour trouver une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ *de* $\mathcal{E}$ *:*

1) Soit on connaît une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.
Dans le système de cette représentation paramétrique on « élimine les deux paramètres entre les trois équations » c'est-à-dire que l'on trouve les expressions des deux nombres réels t et t' en fonction de deux coordonnées, x et y par exemple si possible, et en remplaçant dans la troisième équation. On a alors une équation en x, y et z qui est l'équation cartésienne cherchée.
Voir l'exemple traité à la question 32.

2) Soit on connaît deux vecteurs non colinéaires du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et un point A de $\mathcal{P}$ (on se ramène à ce cas quand $\mathcal{P}$ est déterminé par deux droites sécantes ou deux droites parallèles et distinctes).
On calcule alors les trois déterminants D_1, D_2 et D_3 obtenus à partir des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Alors $D_1(x - x_A) + D_2(y - y_A) + D_3(z - z_A) = 0$ est l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ cherchée.

Ainsi par exemple, soit $\mathcal{P}$ le plan défini par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de l'espace $\mathcal{E}$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$6(x-1)-2(y-2)+1(z-3)=0$$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$6x-2y+z-5=0.$$

3) Soit on connaît trois points de $\mathcal{P}$ par leurs coordonnées. On écrit alors qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \quad px+qy+rz+s=0$$

et on traduit ensuite que les trois points appartiennent au plan $\mathcal{P}$ en écrivant que leurs coordonnées respectives vérifient cette équation. On a alors un système de 3 équations à une inconnue (p, q, r, s) dans $\mathbb{R}^4$. De ce système on tire l'expression de 3 des nombres p, q, r et s en fonction du quatrième (s par exemple, si possible) en donnant alors une valeur à s on trouve une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. D'après le théorème précédent, une autre valeur de s conduira à une autre équation cartésienne de ce même plan $\mathcal{P}$. Ainsi par exemple, le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme :

$$px+qy+rz+s=0$$

$$\begin{cases}A\in\mathcal{P}\\B\in\mathcal{P}\\C\in\mathcal{P}\end{cases}\iff\begin{cases}p+q+s=0\\2p+q+s=0\\p+3r+s=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}p=0\\q=-s\\r=-\dfrac{s}{3}.\end{cases}$$

Prenons $s=-3$.
$\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$3y+z-3=0.$$

Exercice 32 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ dans chacun des cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad\mathcal{P}=P(A,\vec{u},\vec{v})$.

2) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\iff\exists(t,t')\in\mathbb{R}^2\begin{cases}x=3t-t'+1\\y=2t-t'+4\\z=t+3t'-2.\end{cases}$

3) $A\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad\mathcal{P}=(ABC)$.

4) $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, (D) est la droite définie par

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{E} \quad M\in(D) \iff \exists a\in\mathbb{R}\begin{cases}x=2a-3\\y=a+4\\z=3\end{cases}$$

$\mathcal{S}$ contient A et B et (D) est parallèle à $\mathcal{S}$.

Méthode pratique

Pour trouver, à partir d'une équation cartésienne du plan $\mathcal{S}$, deux vecteurs formant une base du plan vectoriel associé :

1) Soit on tire de l'équation l'expression d'un des nombres x, y, z en fonction des deux autres, et considérant ces dernières (ou des multiples) comme des paramètres, on obtient une représentation paramétrique du plan, dont on déduit les vecteurs.
Ainsi, par exemple, le plan $\mathcal{S}$ a pour équation $2x + y - 3z + 4 = 0$. On a, pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$:

$$M\in\mathcal{S} \iff y = -2x + 3z - 4$$
$$\iff \exists(t, t')\in\mathbb{R}^2\begin{cases}x=t\\y=-2t+3t'-4\\z=t'\end{cases}$$

donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ forment une base (ils sont non colinéaires) du plan vectoriel associé à $\mathcal{S}$.

2) Soit on trouve un point A du plan $\mathcal{S}$ et on écrit l'équivalence pour un point M de l'espace entre :

M appartient à $\mathcal{S}$

et $\overrightarrow{AM}$ appartient au plan vectoriel associé P

pour avoir une équation du plan vectoriel P.
On traduit alors sur les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathfrak{W}$, son appartenance à P, pour en déduire une base de P.

Ainsi par exemple, le plan $\mathcal{S}$ a pour équation $3x + 2y - 4z - 1 = 0$. Le point $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$ car $3 + 2 - 4 - 1 = 0$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$, les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $x-1$, $y-1$ et $z-1$.

$$M \in \mathcal{P} \iff 3x + 2y - 4z - 1 = 0$$
$$\iff 3(x-1) + 2(y-1) - 4(z-1) = 0.$$

Soient X, Y et Z les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$. Puisque

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix} \in P,$$

on a :

$$\vec{u} \in P \iff 3X + 2Y - 4Z = 0$$
$$\vec{u} \in P \iff X = \frac{1}{3}(-2Y + 4Z)$$
$$\iff \vec{u} = \frac{1}{3}(-2Y + 4Z)\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$
$$\iff \vec{u} = \frac{Y}{3}(-2\vec{i} + 3\vec{j}) + \frac{Z}{3}(4\vec{i} + 3\vec{k}).$$

Ainsi les vecteurs $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $4\vec{i} + 3\vec{k}$ (qui sont non colinéaires) forment une base de P. On remarque d'ailleurs que si un plan affine $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, alors le plan vectoriel P associé est caractérisé par l'équation $aX + bY + cZ = 0$; c'est-à-dire :

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{E} \quad [M \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0]$$

$$\forall \vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \in \mathcal{W} \quad [\vec{u} \in P \iff aX + bY + cZ = 0]$$

$\left(\text{il suffit de prendre un point } A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{P} \text{ et d'écrire } \vec{u} = \overrightarrow{AM}\right)$.

Exercice 33 Donner une équation cartésienne du plan passant par les points $A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$.

Le point $D\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartient-il à ce plan?

Exercice 34 $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Donner une équation du plan vectoriel P associé au plan affine $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et tel que la droite $D(C, \vec{u})$ soit parallèle à $\mathcal{P}$, où $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$.

Donner une base $(\vec{v}, \vec{w})$ de P telle que $\vec{v}$ a pour 1re coordonnée 0 et $\vec{w}$ a pour 2e coordonnée 0, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$.

Exercice 35 Soient (D) et (D') les droites passant respectivement par les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs respectifs $2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Vérifier que (D) et (D') définissent un plan unique $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation cartésienne. Prouver que le plan $\mathcal{P}'$ d'équation :

$$2x + 4y + 7z - 10 = 0$$

est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Méthode pratique

Pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan :
lorsqu'on a une représentation paramétrique de la droite (D) et une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$: il suffit, dans l'équation de $\mathcal{P}$, de remplacer x, y et z par leurs expressions en fonction du paramètre t.
La nature de l'ensemble S des solutions de l'équation en t obtenue permet de déterminer la position relative de (D) et de $\mathcal{P}$:

si S est vide alors (D) est parallèle et disjointe à $\mathcal{P}$

si S est égal à $\mathbb{R}$ alors (D) est incluse dans $\mathcal{P}$

si S est un singleton $\{t_0\}$, alors (D) est sécante à $\mathcal{P}$ au point dont on trouve les coordonnées en remplaçant le paramètre t par t_0 dans la représentation paramétrique de (D).

Ainsi par exemple, la droite (D) est caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 4 \\ z = t - 3 \end{cases}$$

et le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$2x - 3y + z + 5 = 0.$$

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$:

$$M \in (D) \cap \mathcal{T} \iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 4 \\ z = t - 3 \\ 2x - 3y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 4 \\ z = t - 3 \\ 2(3t - 1) - 3(2t + 4) + (t - 3) + 5 - 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} t = 12 \\ x = 3(12) - 1 \\ y = 2(12) + 4 \\ z = (12) - 3. \end{cases}$$

Ainsi $(D) \cap \mathcal{T} = \{ A \}$ où $A\begin{pmatrix}35\\28\\9\end{pmatrix}$.

Exercice 36 Trouver l'intersection de la droite (D) et du plan $\mathcal{T}$ dans chacun des cas suivants :

1) $(D) = D(A, \vec{u})$ avec $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$

$\mathcal{T}$ a pour équation : $5x - y + 2 = 0$.

2) $(D) = (AB)$ avec $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\mathcal{T} = P(C, \vec{u}, \vec{v})$ avec $C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

3) (D) passe par $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et est parallèle à la droite (D') de représentation paramétrique $[t \longrightarrow (x, y, z)]$ avec :

$$\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = t + 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

$\mathcal{T} = (BCD)$ avec $B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

Remarque.

Une droite de l'espace n'est pas caractérisée par une équation du premier degré en x, y et z, mais par deux équations du type $ax + by + cz + d = 0$. En effet une droite peut toujours être définie comme étant l'intersection de deux plans, mais il y a une infinité de couples de plans qui ont la même intersection. Par exemple, les deux équations :

$$3x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3y - 2z + 4 = 0$$

définissent une droite (D) caractérisée par le système :

$$(S) \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y = 3x + z \\ 2x + 3(3x + z) - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 3x + z \\ z = -11x - 4 \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = t \\ y = -8t - 4 \\ z = -11t - 4 \end{cases}$$

(D) est donc la droite passant par $A\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{i} - 8\vec{j} - 11\vec{k}$.

Question 36 *Vérifier que cette droite (D) est aussi l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives :*

$22x - 11y + 10z - 4 = 0$ et $19x + y + z + 8 = 0$.

V. Distance dans $\mathcal{E}$. Repère orthonormé

1 Distance dans $\mathcal{E}$

Dans les classes précédentes, on a défini une distance sur le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire une application d de $\mathcal{P}^2$ dans $\mathbb{R}+$ qui, à chaque bipoint (M, N) associe le nombre réel $d(M, N)$ égal à la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$; d possède les propriétés suivantes :

quels que soient les points M, N et P du plan $\mathcal{P}$:

$d(M, N) \geqslant 0$

$d(M, N) = 0$ si et seulement si $M = N$

$d(M, N) = d(N, M)$

$d(M, N) \leqslant d(M, P) + d(P, N)$.

De plus, dans le plan $\mathcal{P}$, le théorème de Pythagore permet d'affirmer que :

le triangle MNP est rectangle en M si et seulement si :

$$d^2(M, N) + d^2(M, P) = d^2(N, P).$$

Nous admettrons ici qu'on peut définir, dans l'espace $\mathcal{E}$, une distance d (application de $\mathcal{E}^2$ dans $\mathbb{R}_+$), qui, dans chaque plan, possède les propriétés ci-dessus et on aura encore, quels que soient les points M et N de $\mathcal{E}$, $d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$, noté encore MN.

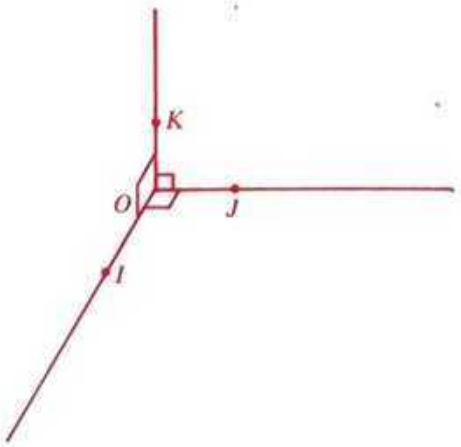
Exercice 37 Soient t la translation de vecteur $\vec{u}$, A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$ d'images respectives A' et B' par t.
Vérifier que le point B' appartient à un plan contenant les points A, B et A'.
Démontrer que $d(A, B) = d(A', B')$.
Dans l'espace, comme dans le plan, toute translation conserve la distance.

Exercice 38 Soient h l'homothétie de centre O et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$), A et B deux points de $\mathcal{E}$ d'images respectives A' et B' par h.
Vérifier que les points O, A, B, A' et B' sont coplanaires.
Démontrer que $d(A', B') = |k|\, d(A, B)$.
Dans l'espace, comme dans le plan, toute homothétie multiplie la distance par la valeur absolue de son rapport.

2 Repère orthonormé de $\mathcal{E}$

Un repère (O, I, J, K) de $\mathcal{E}$ est dit **orthogonal** (ou **rectangulaire**) si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

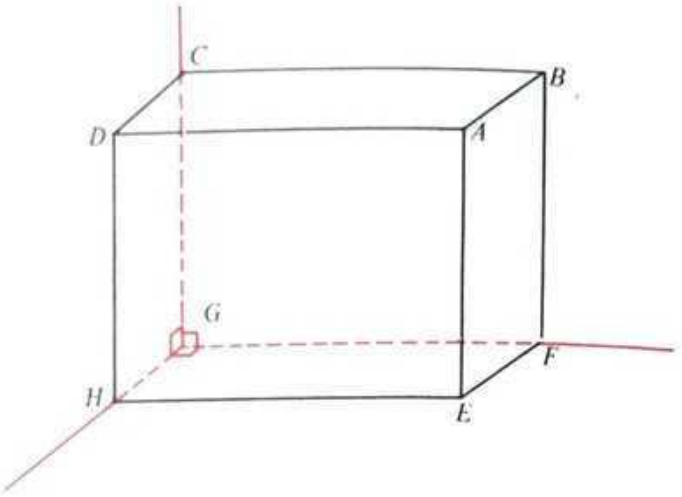
- les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires dans le plan (OIJ)
- les droites (OJ) et (OK) sont perpendiculaires dans le plan (OJK)
- les droites (OK) et (OI) sont perpendiculaires dans le plan (OIK).



Ainsi, soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle. Puisque les faces $GHEF$, $GFBC$, $GCDH$ sont des rectangles :

- les droites (GH) et (GF) sont perpendiculaires dans le plan $(GHEF)$

- les droites (GF) et (GC) sont perpendiculaires dans le plan $(GFBC)$
- les droites (GC) et (GH) sont perpendiculaires dans le plan $(GCDH)$.



Donc (G, H, F, C) est un repère orthogonal.
Dans le plan $\mathcal{P}$, un repère orthonormé est un triplet (O, I, J) de points (non alignés) tels que les droites (OI) et (OJ) soient perpendiculaires, et que $\|\overrightarrow{OI}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{OJ}\| = 1$, de même :

Définition

Un **repère affine** (O, I, J, K) de $\mathcal{E}$ est **orthonormé** si et seulement si il est orthogonal et $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = \|\overrightarrow{OK}\| = 1$.

Cette distance des points O et I (ou J, ou K) est l'unité de longueur choisie pour mesurer les longueurs dans $\mathcal{E}$.
Posons $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. Le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors orthonormé; il est associé à une base unique de $\mathcal{V}$: $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui est dite aussi orthonormée.

Définition

Une **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{V}$ est **orthonormée** si et seulement si quel que soit le point O de $\mathcal{E}$, le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ est orthonormé c'est-à-dire : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, les droites $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{j})$ sont perpendiculaires, les droites $D(O, \vec{j})$ et $D(O, \vec{k})$ sont perpendiculaires, et les droites $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{k})$ sont perpendiculaires.

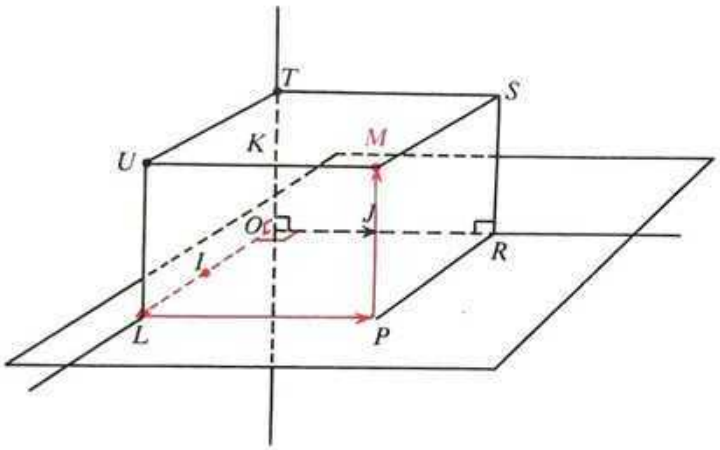
Soit (O, I, J, K) un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. L'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, à chaque point de $\mathcal{E}$ associe le triplet de ses coordonnées est une bijection.
On considère un point M de l'espace $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à l'un des plans de coordonnées et les points P R S T U et L tels que $PROLMSTU$ soit un parallélépipède rectangle avec $L \in (OI)$, $R \in (OJ)$ et $T \in (OK)$.

Soient x, y et z respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote de M dans le repère (O, I, J, K) on a :

$$\overrightarrow{OL} = x\overrightarrow{OI}$$
$$\overrightarrow{OR} = y\overrightarrow{OJ}$$
$$\overrightarrow{OT} = z\overrightarrow{OK}.$$

La figure ci-contre est une représentation en perspective cavalière.

PROLMSTU est un parallélépipède rectangle.
$L \in (OI)$, $R \in (OJ)$ et $T \in (OK)$.



Question 37 *1) Montrer que la distance du point O au point P est égale à la distance du point R au point L.*
Comparer, sur la figure ci-dessus en perspective cavalière, les mesures (en cm par exemple) des longueurs des segments $[OP]$ *et* $[RL]$.
2) Mêmes questions avec les segments $[PR]$ *et* $[UT]$.

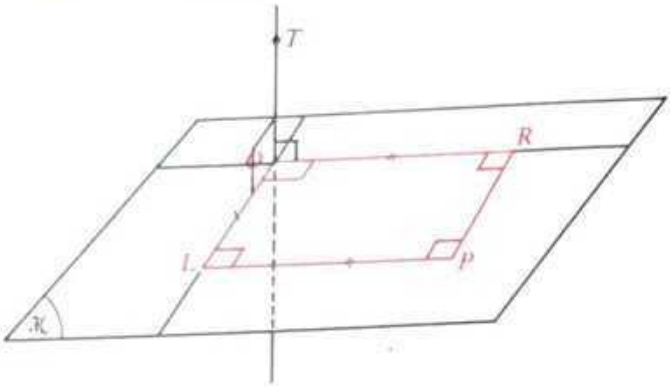
Plus généralement, dans une figure en perspective cavalière,

- sur deux droites parallèles, deux segments de même longueur sont représentés par deux segments de même longueur.
- sur deux droites de directions différentes, ce n'est pas toujours le cas.

En conséquence un angle droit n'est en général pas représenté par un angle droit puisque les longueurs ℓ, m et n mesurées sur le dessin des trois côtés d'un triangle rectangle ne vérifient généralement pas $\ell^2 = m^2 + n^2$; par exemple sur la figure ci-dessus les droites (TS) et (RS) du plan (OJK) sont perpendiculaires mais les droites (UM) et (MS) ne le sont pas alors que *PROLMSTU* est un parallélépipède rectangle.
Ainsi la perspective cavalière ne conserve ni la distance de deux points ni l'orthogonalité de deux droites situées dans un même plan.

Pour utiliser une perspective cavalière il faudra donc prendre certaines précautions, par exemple repérer les segments de même longueur, et dessiner un petit carré en perspective cavalière, en utilisant les droites perpendiculaires pour indiquer que ces droites sont perpendiculaires.

Ainsi par exemple la figure ci-contre représente un rectangle $OLPR$ inclus dans le plan $\mathcal{K}$.



rectangle $OLPR$ inclus dans $\mathcal{K}$

Ces signes évitent de préciser dans la légende du dessin que :

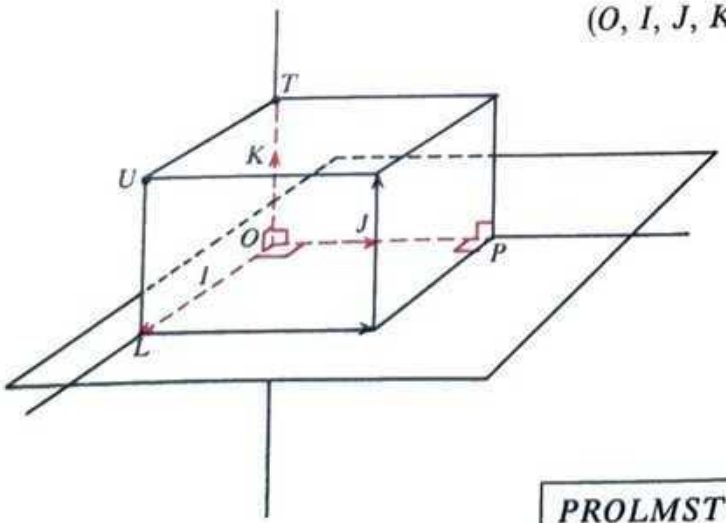
$$d(O, L) = d(P, R), \qquad d(O, R) = d(L, P),$$
$$(OL) \perp (LP),\ (LP) \perp (PR),\ (OR) \perp (PR),\ (OL) \perp (OR),$$
$$(OT) \perp (OR) \quad \text{et} \quad (OT) \perp (OL).$$

Puisque la perspective cavalière, représentation de $\mathcal{E}$ employée jusqu'à présent, ne permet pas de vérifier sur la figure des notions simples telles que l'égalité de deux longueurs de l'orthogonalité de deux droites sécantes, ni même le fait que deux droites soient sécantes, on va utiliser une représentation nouvelle de l'espace que l'on appelle la **géométrie descriptive.**

VI. Épure d'un point

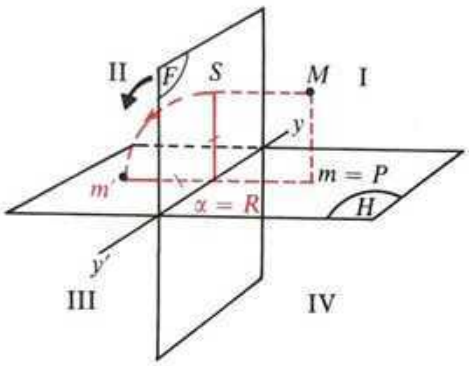
Reprenons la figure où (O, I, J, K) est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ et $PROLMSTU$ un parallélépipède rectangle avec $L \in (OI)$, $R \in (OJ)$ et $T \in (OK)$:

(O, I, J, K) est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$



PROLMSTU est un parallélépipède rectangle
$L \in (OI)$, $R \in (OJ)$ et $T \in (OK)$

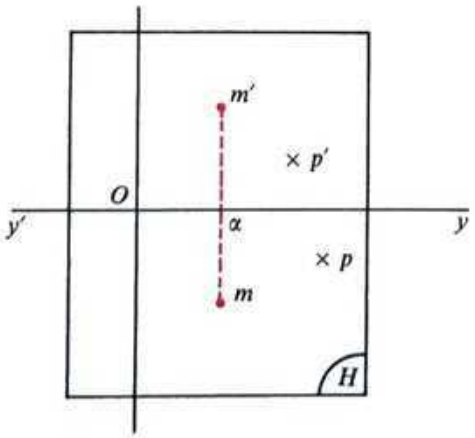
Le point M est parfaitement déterminé si l'on connaît les points P et S. En effet
l'abscisse de M est celle de P
l'ordonnée de M est celle de P (et celle de S)
la cote de M est celle de S.
Le point P est le projeté de M par la projection p_1 de $\mathcal{E}$ sur le plan (OIJ) parallèlement à la droite (OK).
Le plan (OIJ) est appelé **plan horizontal** et noté (H).
Le point P est appelé **projeté horizontal** de M.
Le point S est le projeté de M par la projection p_2 de $\mathcal{E}$ sur le plan (OJK) parallèlement à la droite (OI).
Le plan (OJK) est appelé **plan frontal** et noté (F).
Le point S est appelé **projeté frontal** de M.
On considère la droite (OJ) que l'on note $(y'y)$ comme un axe autour duquel on fait tourner, dans le sens de la flèche, le plan (F) :



On applique ainsi, par une « rotation » le plan (F) sur le plan (H).
Dans cette « rotation » le point R a pour image le point α (comme R est sur la droite $(y'y)$ on a $\alpha = R$) et le point S a pour image le point m' et on a $d(R, S) = d(\alpha, m')$.

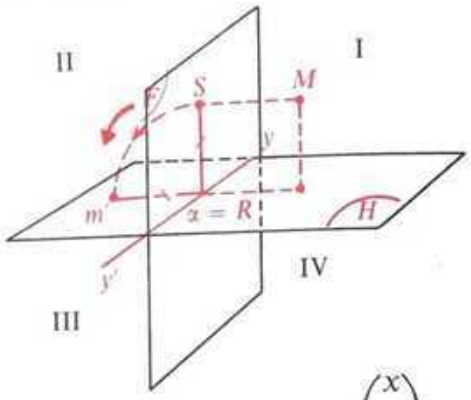
a) Description de l'épure

On note alors, pour harmoniser, m le point P et on obtient alors le schéma ci-dessous dans le plan (H) appelé **épure.**



La droite $(y'y)$ est appelée **ligne de terre.**
La droite perpendiculaire à la ligne de terre $(y'y)$, passant par m, est appelée **ligne de rappel** de m; elle contient le point m'.
La droite notée (Ox) représente la droite (OI).

Tout point M de l'espace est déterminé par un couple (m, m') de deux points de l'épure situés sur une même ligne de rappel.
Ainsi le couple (p, p') du schéma précédent, ne représente pas un point de $\mathcal{E}$ car les points p et p' ne sont pas sur une même ligne de rappel.
Le plan horizontal (H) et le plan frontal (F) partagent l'espace $\mathcal{E}$ en quatre régions notées I, II, III et IV sur la figure ci-dessous :

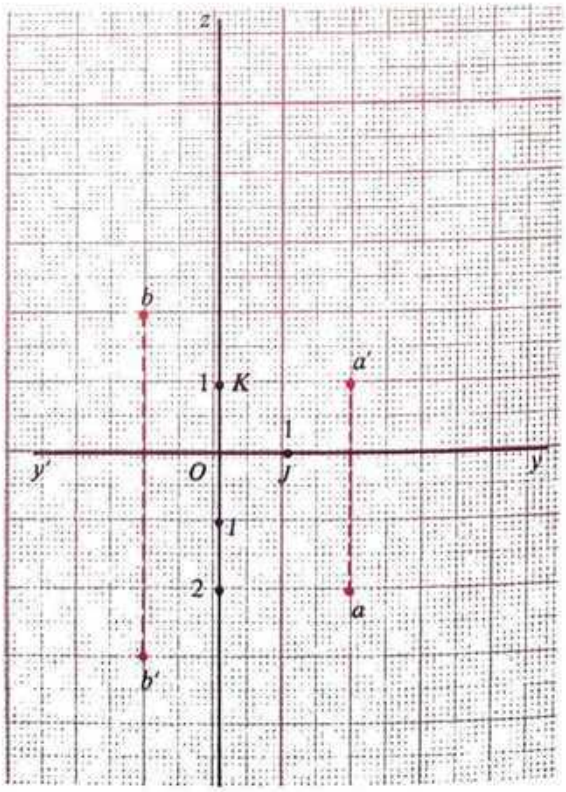


Dans le repère orthonormé (O, I, J, K) le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est :

dans la région I si et seulement si $(x > 0$ et $z > 0)$
dans la région II si et seulement si $(x < 0$ et $z > 0)$
dans la région III si et seulement si $(x < 0$ et $z < 0)$
dans la région IV si et seulement si $(x > 0$ et $z < 0)$.

b) **Construction de l'épure d'un point**

Le point A dont le triplet des coordonnées dans le repère (O, I, J, K) est (2, 2, 1), va être représenté sur l'épure, par le couple de points : (a, a') appelé **épure du point** A.



a est le ***projeté horizontal*** *de A.*
On fait un abus de langage en disant que :

a' est le ***projeté frontal*** *de A*

c'est en réalité l'image du projeté frontal a_1 de A par la « rotation autour de la ligne de terre $y'y$ ». Sur l'épure on convient de représenter la droite (OK) des cotes par la droite (Oz). Sur cette droite on place l'image du point K par cette « rotation » que l'on note encore, par abus, K.

Puisque, dans le repère (O, I, J, K) de $\mathcal{E}$, on a $A\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, les coordonnées de a dans le repère (O, I, J) du plan (H) soit $(2, 2)$. On place donc le point $a\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ dans le repère (O, I, J) de l'épure.

Les deux dernières coordonnées du point $A\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ dans le repère (O, I, J, K) sont les coordonnées de a_1 dans le repère (O, J, K) du plan (F) d'où la construction de $a'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dans le repère, encore noté, improprement, (O, J, K) de l'épure.

Remarque.
Les lettres majuscules sont utilisées pour les points de l'espace (exemples : M, I, K). Les lettres minuscules sont utilisées pour les projetés (exemples : m sur (H), m' sur (F)).
Plus généralement un point M de l'espace de triplet de coordonnées (x, y, z) dans (O, I, J, K), a pour épure le couple (m, m') avec : l'abscisse et l'ordonnée de m dans le repère (O, I, J) sont respectivement égales à l'abscisse x et à l'ordonnée y de M.
L'abscisse et l'ordonnée de m' dans le repère (O, J, K) sont respectivement égales à l'ordonnée y et à la cote z de M.

Exercice 39

Vérifier que le point B, représenté par (b, b') sur l'épure ci-dessus a pour triplet de coordonnées $(-2, -1, -3)$ et que ce point est situé dans la région III.

- Placer les points suivants sur l'épure :

$$C\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} \quad E\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

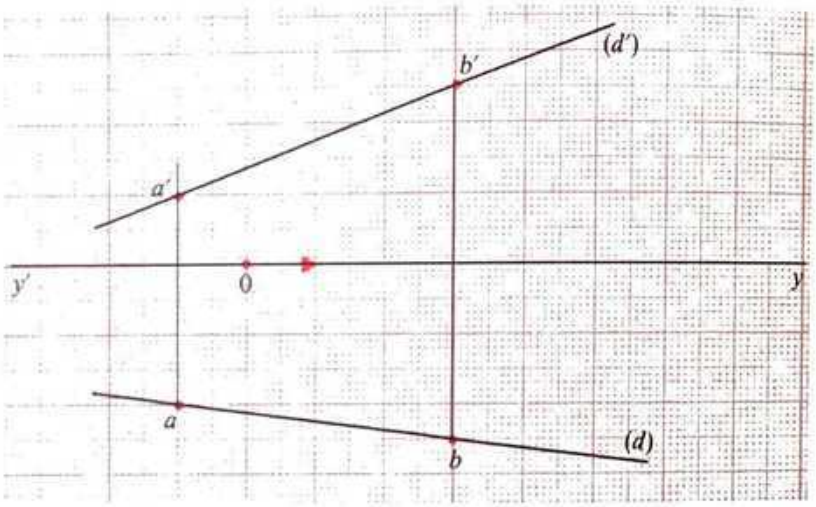
- Préciser la position de chacun de ces points : région ou plan particulier.
- Déterminer le milieu M du segment $[CD]$.
- Tracer l'épure (l, l') du point L défini par :

$\overrightarrow{AL} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

VII. Épure d'une droite

1 Tracé de l'épure d'une droite

Soit (D) une droite de l'espace $\mathcal{E}$.
Puisqu'une droite est déterminée par deux de ses points A et B, distincts, tracer l'épure de la droite (D) revient à chercher les épures des points A et B.
Notons (a, a') et (b, b') les épures respectives des points A et B. Si (D) n'est pas parallèle à (OK), les points a et b sont alors distincts, on note (d) la droite (ab).
De même si (D) n'est pas parallèle à (OI), les points a' et b' sont alors distincts, et on note (d') la droite $(a'b')$.



a) Épure d'une droite parallèle ni à (OI) ni à (OK)

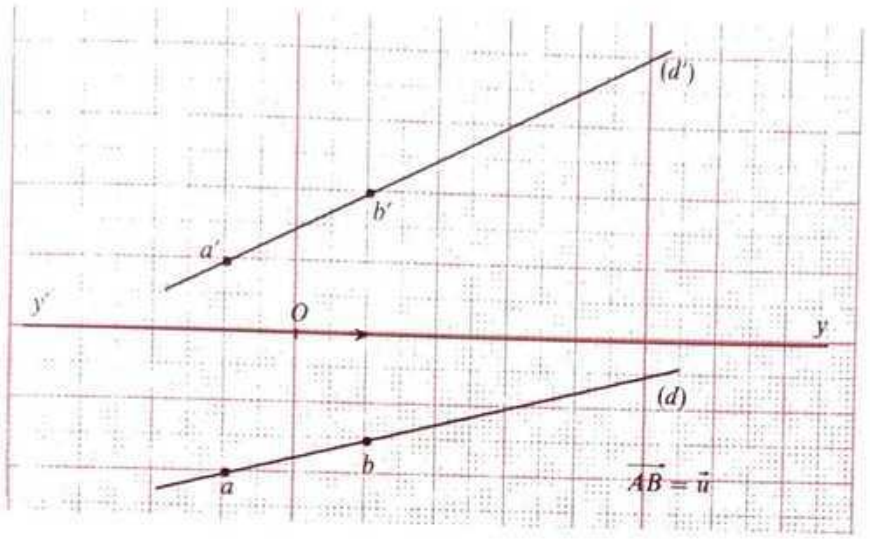
Supposons que (D) n'est parallèle ni à (OI) ni à (OK).

Question 38 *Démontrer que la droite (d) ainsi définie est le projeté de la droite (D) parallèlement à la droite (OK) sur le plan horizontal (H).*
Démontrer que la droite (d') ainsi définie est l'image, par la « rotation autour de la ligne de terre » de la droite (d_1), elle-même projeté de la droite (D) parallèlement à la droite (OI) sur le plan frontal (F).

Par exemple sur l'épure ci-dessus nous avons représenté la droite (D), égale à (AB), avec $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5/2\\3\\5/2\end{pmatrix}$.
Une droite peut aussi être déterminée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, ou une représentation paramétrique (d'où l'on déduit A et $\vec{u}$).
On trace l'épure (a, a') du point A et celle (b, b') du point B tel que $\overrightarrow{AB}$ est égal à $\vec{u}$.

Par exemple sur l'épure ci-dessous nous avons représenté (D) :

avec $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1/2\\2\\1\end{pmatrix}$



On calcule les coordonnées de B : $\left(\frac{3}{2}, 1, 2\right)$ et on place b et b'.

Là encore dans le cas où (D) n'est parallèle ni à (OI) ni à (OK) (c'est-à-dire $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{i}$ ou à $\vec{k}$), on obtient deux droites sur l'épure : $(d) = (ab)$ et $(d') = (a'b')$.
D'après la question 38, les deux droites (d) et (d') sont uniques, on dit que (d) est **le projeté horizontal de la droite** (D) et (d') est **le projeté frontal de la droite** (D).
On note (d, d') [et non $((d), (d'))$] le couple représentant la droite (D) sur l'épure, et on l'appelle l'**épure de la droite** (D).

Exercice 40 Tracer l'épure de la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1) (D) est déterminée par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

2) (D) est déterminée par $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ et le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.

3) (D) est déterminée par le système de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -3t \\ z = t - 2. \end{cases}$$

b) Épure d'une droite parallèle à (OI) ou à (OK)

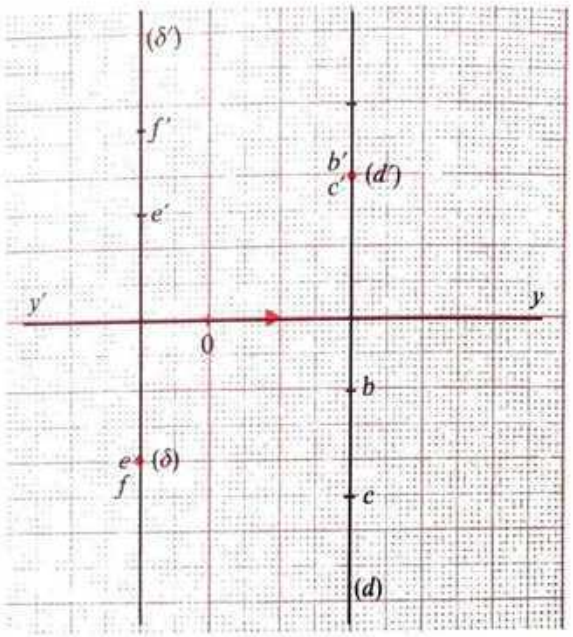
Une droite (D) parallèle à (OI) est dite **droite de bout.**
Tout point de (D) a pour projeté sur le plan frontal (F) parallèlement à (OI), le point d'intersection de (D) et de (F).

Question 39 *Soient B et C deux points distincts de (D) d'épures respectives (b, b') et (c, c').*
Pourquoi b' = c' ? Pourquoi b et c sont distincts?
Vérifier que la droite (bc) est le projeté de la droite (D) sur le plan horizontal (H) parallèlement à (OK).
Démontrer que la droite (bc) est perpendiculaire à la ligne de terre (y'y).

Ainsi on obtient l'épure ci-contre de la droite (D) formée des ensembles :

$$(d) \text{ et } (d') \quad \text{où} \quad (d) = (bc) \quad \text{et} \quad (d') = \{b'\} = \{c'\}$$

on note encore (d, d') l'épure de (D).



Une droite (Δ) parallèle à la droite (OK) est dite **droite verticale.** Sur l'épure ci-dessus on a tracé l'épure (δ, δ') de (Δ) en utilisant celles (e, e') et (f, f') de deux points distincts E et F de (Δ). Là encore on a $(\delta) = \{e\} = \{f\}$ et (δ'), qui est égale à $(e'f')$, est perpendiculaire à la ligne de terre $(y'y)$.

Exercice 41 Représenter l'épure de la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad (D) = D(A, \vec{u})$.

2) $B\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad (D) = D(B, \vec{v})$.

3) $C\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad E\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad (D) = (CE)$.

4) $F\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ $\quad G\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$ $\quad (D) = (FG)$.

Exercice 42 Représenter les épures respectives (d_1, d'_1) et (d_2, d'_2) des droites (D_1) et (D_2) définies par :

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -3t + 4 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de (D_1).

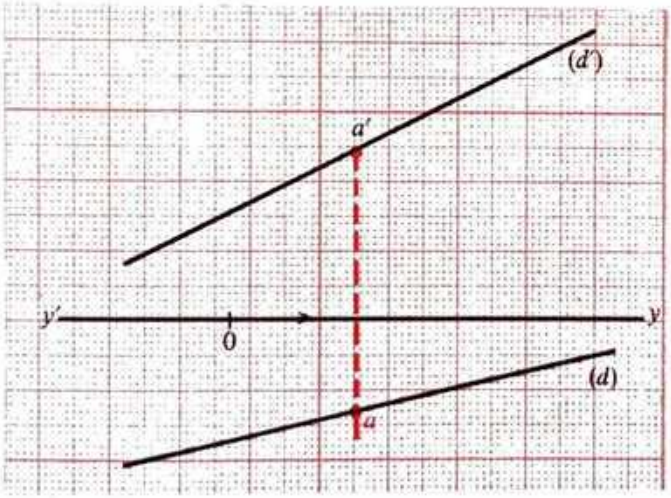
(D_2) passe par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et est parallèle à (D_1).

Vérifier que les projetés horizontaux (d_1) et (d_2) sont parallèles et que les projetés frontaux (d'_1) et (d'_2) sont parallèles.

Méthode pratique

Pour trouver, connaissant un des projetés d'un point A, l'autre projeté, sachant que A appartient à une droite (D), ni debout ni verticale et dont on connaît l'épure :

Il suffit de tracer la ligne de rappel (perpendiculaire à $(y'y)$) passant par le projeté connu de A par exemple a'. Puisque (D) est ni debout ni verticale, cette ligne de rappel coupe le deuxième projeté de (D), sur l'exemple (d), en un unique point a qui est l'autre projeté (horizontal) de A, en effet A appartient à (D) donc a appartient à (d).



On dit qu'on a **rappelé le point a' en a sur la droite (d).**

Pour rappeler un point sur une droite de l'épure il faut tracer la droite perpendiculaire à la ligne de terre, passant par ce point.

Exercice 43 Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = t - 1. \end{cases}$$

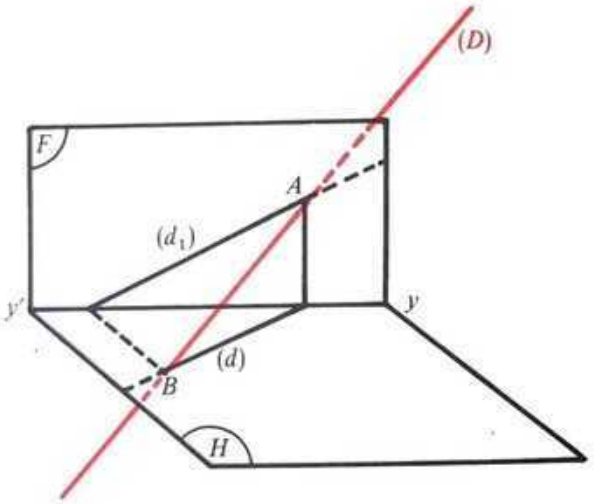
Tracer l'épure (d, d') de (D).
Déterminer graphiquement

- l'abscisse et l'ordonnée du point A de (D) de cote -2.
- l'ordonnée et la cote du point B de (D) d'abscisse -2
- l'abscisse et la cote du point C de (D) d'ordonnée -2.

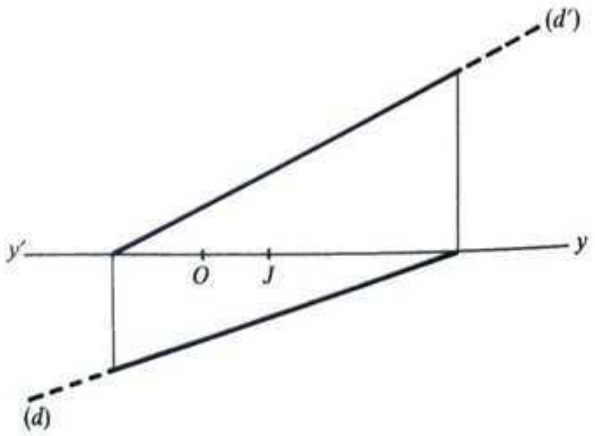
Vérifier ces résultats par le calcul.

2 Trace d'une droite. Ponctuation des projetés d'une droite

Pour une meilleure perception de l'espace $\mathcal{E}$, on peut compléter la représentation d'une droite en distinguant les parties vues et les parties cachées par les plans (H) et (F) pour un observateur dans la partie I de l'espace (abscisses et cotes positives).



Soient A et B les points d'intersection, s'ils existent, de la droite (D) avec les plans de projection (F) et (H) respectivement. Ces points A et B sont appelés les **traces** de la droite (D).
Les parties de (D) correspondant aux points d'abscisse négative ou de cote négative sont « cachées » par le plan (F) ou (H) respectivement pour l'observateur situé dans la région I.
De ce fait les parties des projetés de (D) correspondantes sont **ponctuées** c'est-à-dire tracées en pointillé comme sur la figure ci-dessous correspondant au dessin précédent.



Question 40 *Dans cette question nous utilisons les schémas précédents.*
Quelle est l'épure (b, b') du point B de (D) ayant une cote nulle, c'est-à-dire situé dans le plan horizontal (H)? On placera b' puis b.
Quelle est l'épure (a, a') du point A de (D) ayant une abscisse nulle, c'est-à-dire situé dans le plan frontal (F)? On placera a puis a'.

Le point A existe si et seulement si la droite (D) n'est pas parallèle à (F).
Le point B existe si et seulement si la droite (D) n'est pas parallèle à (H).

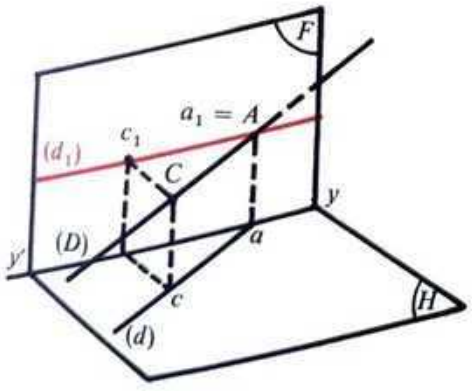
Question 41 *1) Si le point b', intersection du projeté frontal (d') de (D) avec la ligne de terre $(y'y)$, n'existe pas, que peut-on dire alors des cotes des points de la droite (D)? Montrer que (D) est parallèle au plan horizontal (H). On dit que la droite (D) est une* ***horizontale.***

2) Si le point a, intersection du projeté horizontal (d) de (D) avec la ligne de terre $(y'y)$, n'existe pas, que peut-on dire alors des abscisses des points de la droite (D)? Montrer que (D) est parallèle au plan frontal (F). On dit que la droite (D) est une ***frontale.***

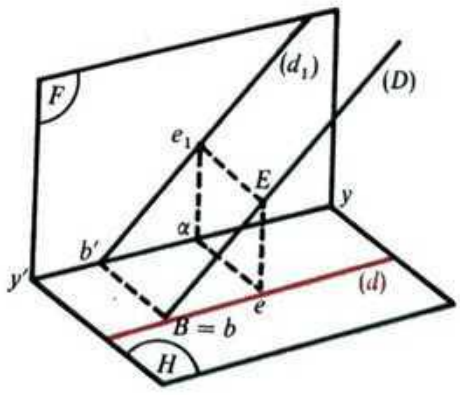
3) Montrer que si a et b' n'existent pas alors (D) est parallèle à la ligne de terre $(y'y)$.

Une droite parallèle au plan frontal est dite **frontale;** si elle n'est pas parallèle à la ligne de terre, alors elle n'admet qu'une trace horizontale.
Une droite parallèle au plan horizontal est dite **horizontale;** si elle n'est pas parallèle à la ligne de terre alors elle n'admet qu'une trace frontale.

(D) n'est pas parallèle à $(y'y)$:



(D) est horizontale



(D) est frontale

Une droite à la fois horizontale et frontale, est parallèle à la ligne de terre : elle n'admet aucune trace.

Méthode pratique

Pour déterminer les traces (éventuelles) *d'une droite (D) dans le cas où (D) n'est pas parallèle au plan (OIK) :*
Soit (d, d') l'épure de (D).

1er cas : (D) est horizontale mais non parallèle à la ligne de terre $(y'y)$: chercher la trace frontale A de (D) revient à chercher sur l'épure le point d'intersection a de (d) et de $(y'y)$, puis à rappeler a en a' sur (d').

2e cas : (D) est frontale mais non parallèle à la ligne de terre $(y'y)$: chercher la trace horizontale B de (D) revient à chercher sur l'épure le point d'intersection b' de (d') et de $(y'y)$, puis à rappeler b' en b sur (d).

3e cas : (D) n'est parallèle à aucun des trois plans de coordonnées : Pour déterminer la trace frontale A de (D) on fait comme dans le 1er cas : trouver a tel que $(d) \cap (y'y) = \{a\}$ et rappeler a en a' sur (d'). Pour déterminer la trace horizontale B de (D) on fait comme dans le 2e cas : trouver b' tel que $(d') \cap (y'y) = \{b'\}$ et rappeler b' en b sur (d).

Exercice 44 Déterminer les épures de la droite (D) dans chacun des cas suivants en précisant les traces éventuelles et en ponctuant les projetés de (D) :

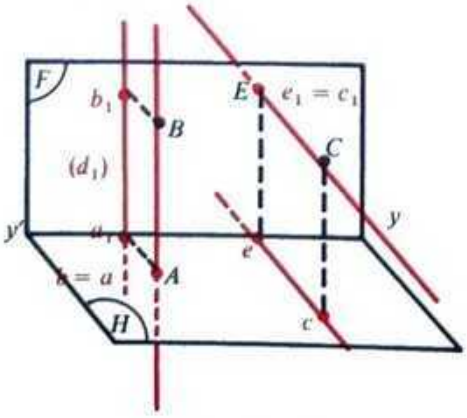
1) $A\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $(D) = D(A, \vec{u})$

2) $B\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad C\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$ et $(D) = (BC)$.

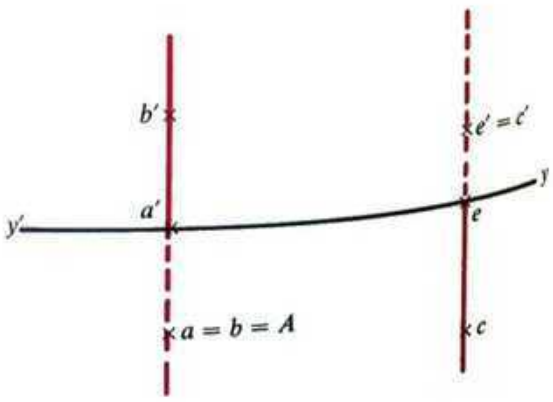
3) (D) est définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = -1. \end{cases}$$

Étudions maintenant le cas où (D) est parallèle au plan (OIK).
On a déjà vu deux cas particuliers :



(AB) est verticale

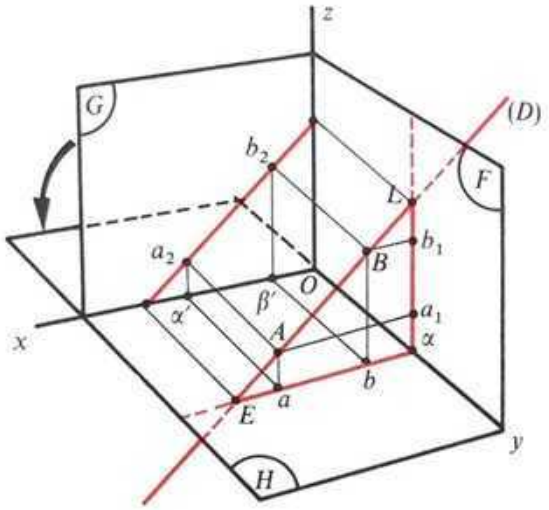


(EC) est de bout

• (D) est une droite de bout c'est-à-dire parallèle à (OI). (D) n'admet alors qu'une trace frontale confondue avec son projeté frontal.

• (D) est une droite verticale c'est-à-dire parallèle à (OK). (D) n'admet alors qu'une trace horizontale confondue avec son projeté horizontal.

Une droite (D) parallèle au plan (OIK) est appelée une **droite de profil.** Ainsi une droite de bout ou verticale est une droite de profil particulière. Dans ce cas les projetés : horizontal (d) et frontal (d') de la droite (D) sont confondus et on ne peut pas utiliser la méthode pratique ci-dessus car la ligne de rappel serait confondue avec le projeté.



Pour « voir quelque chose » on utilise alors le plan (OIK) que nous noterons ici (G) et la projection sur (G) parallèlement à (OJ).
On remarquera que ce plan (G) (comme gauche) est utilisé en dessin industriel pour dessiner la « vue de côté » d'un objet après avoir déjà la « vue de dessus » qui correspond à la projection sur (H) et la « vue de face » qui correspond à la projection sur (F).

Question 42 *Soient A et B deux points distincts de la droite (D), a et b les projetés respectifs de A et B sur (H) parallèlement à (OK) a_1 et b_1 les projetés respectifs de A et B sur (F) parallèlement à (OI) et, a_2 et b_2 les projetés respectifs de A et B sur (G) parallèlement à (OJ) (voir figure ci-dessus).*

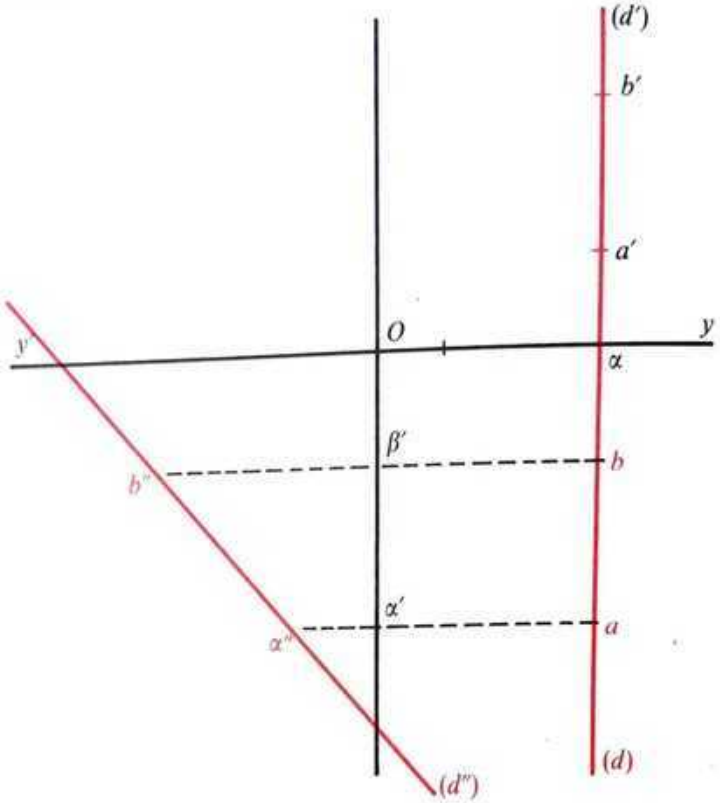
1) Montrer que les droites (AB) et (a_2b_2) sont parallèles et que les segments $[AB]$ et $[a_2b_2]$ ont même longueur.

2) Soient α le projeté de a (et de b) sur (F) parallèlement à (OI), α' et β' les projetés respectifs de a et b sur (G) parallèlement à (OJ).
Montrer que α est aussi le projeté de a_1 et b_1 sur (H) parallèlement à (OK), et que α' et β' sont aussi les projetés respectifs de a_2 et b_2 sur (H) parallèlement à (OK).

3) Montrer que $Aa = a_2\alpha' = a_1\alpha$ et que $Bb = b_2\beta' = b_1\alpha$.

On effectue, cette fois-ci, une « rotation autour de (OI) amenant (G) sur (H) ».
On note a'' et b'' les images respectives de a_2 et b_2 par cette « rotation ». On admet que les points a, α' et a'' sont alignés, et de même que les points b, β' et b'' sont alignés.

On obtient ainsi l'épure de la droite (D) définie par la droite (d), égale à (ab), projeté horizontal de (D), et la droite (d''), égale à $(a''b'')$, « projeté gauche » de (D).

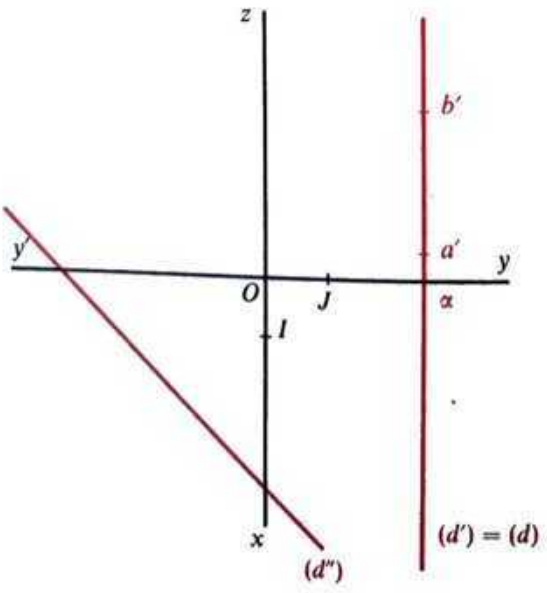


Puisque $a_2\alpha' = a_1\alpha$ c'est-à-dire $a''\alpha' = a'\alpha$, on reporte la distance $a''\alpha'$ à partir de α en respectant le signe de la cote, pour placer le point a'. On fait de même pour placer le point b' en utilisant $b''\beta' = b'\alpha$. Le projeté frontal (d') de (D) est la droite $(a'b')$, qui est confondue sur l'épure avec (d).

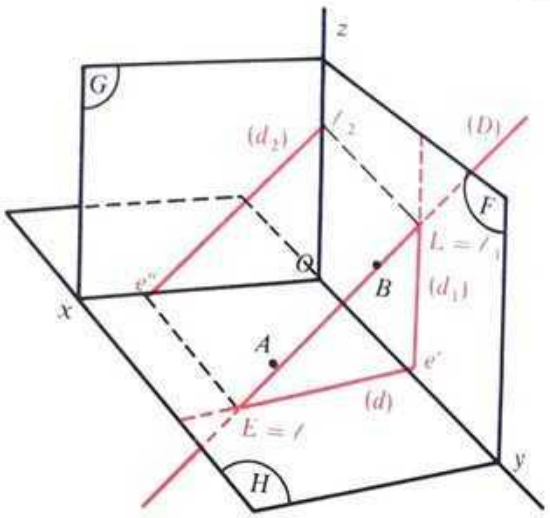
Question 43 *Étant donnée l'épure ci-contre de la droite (D) définie par :*

$$(d') = (a'b') \quad \text{et} \quad (d'')$$

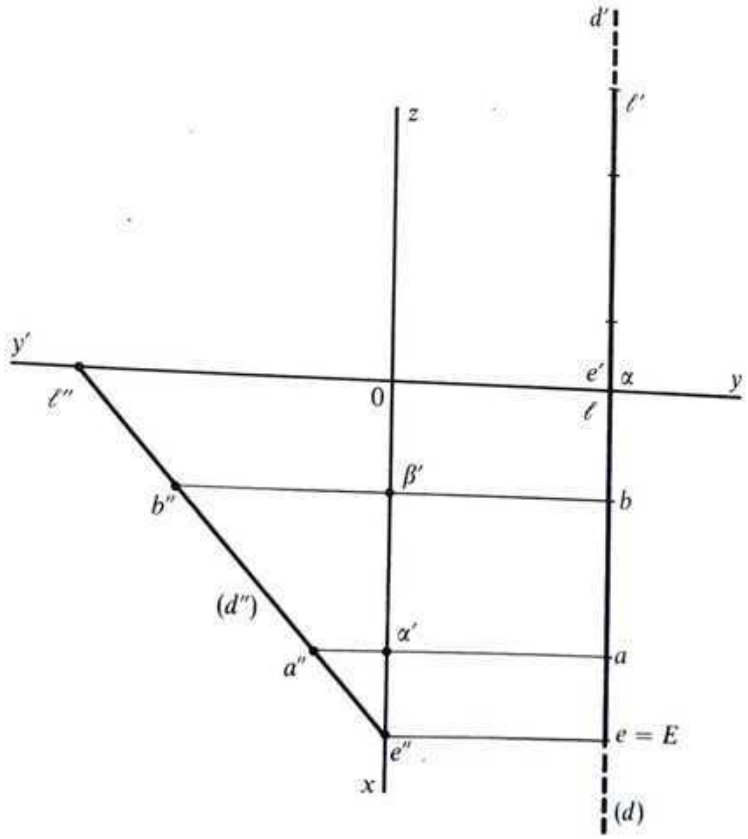
déterminer les projetés horizontaux respectifs a et b des points A et B.



Cherchons à placer les traces de la droite (D) de profil : soit E le point d'intersection de (D) et du plan horizontal (H) c'est-à-dire la trace horizontale de (D).



On note e le projeté horizontal de E ($e = E$), e' son projeté frontal (e' est confondu avec α), e'' le « projeté gauche » de E c'est-à-dire, puisque E appartient à (H), le projeté de E sur (G) parallèlement à (OJ). Le point e'' est ainsi l'intersection de (d'') et de (OI). On rappelle e'' en e sur la droite (d), en traçant la ligne de rappel perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre (OI). On a ainsi le point E sur l'épure car $E = e$ (l'épure de E est (e, e')).



Soit L la trace frontale de la droite (D). On a $\{L\} = (D) \cap (F)$. On note (ℓ, ℓ') l'épure de L. Puisque L appartient à (F), $\ell' = \alpha$. Le point ℓ'', « projeté gauche » de L est le point d'intersection de (OJ) et de la droite (d''). On place alors ℓ' en reportant sur (d') la distance $O\ell''$ à partir de α, et en respectant le signe de la cote.

On peut alors ponctuer les droites (d) et (d') (voir la figure ci-dessus) car, ici, seul le segment $[EL]$ est visible donc seules les parties $[e\ell]$ de (d), et $[e'\ell']$ de (d') sont en trait continu.

Exercice 45

1) Tracer l'épure de la droite (AB) : $(ab, a'b')$ avec :

$$A\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

Dans quelle partie de $\mathcal{E}$ est la droite (AB)? Est-ce une droite particulière?
Ponctuer (AB).
Déterminer les coordonnées du point C appartenant à la droite (AB) et d'ordonnée 2, graphiquement.

2) Trouver une détermination paramétrique de la droite (AB).
Calculer les coordonnées du point C.

Exercice 46

1) Tracer l'épure $(ab, a'b')$ de la droite (AB) avec :

$$A\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Chercher la (ou les) trace(s) de (AB).

Ponctuer cette droite (AB).
Chercher les coordonnées du point C appartenant à (AB) dont l'ordonnée est égale à 3/2.

2) Trouver une détermination paramétrique de la droite (AB).
Calculer les coordonnées du point C.

Exercice 47

1) Tracer l'épure $(ab, a'b')$ de la droite (AB) avec $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$.

Ponctuer l'épure de cette droite.
Chercher les coordonnées du point C appartenant à (AB) sachant que son ordonnée est égale à 3.

2) Trouver une détermination paramétrique de (AB) et calculer les coordonnées de C.

Exercice 48

Tracer l'épure de la droite (AB) avec $A\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

Ponctuer l'épure (d, d') de cette droite.
Chercher les coordonnées du point C de la droite (AB) sachant que l'abscisse de C est égale à 3.

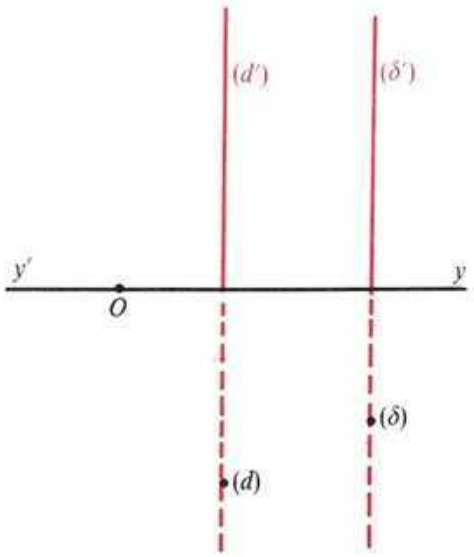
Est-ce que le point $E\begin{pmatrix}2{,}5\\2\\2{,}5\end{pmatrix}$ appartient à (AB)?

3 Positions relatives de deux droites en géométrie descriptive

a) Droites parallèles

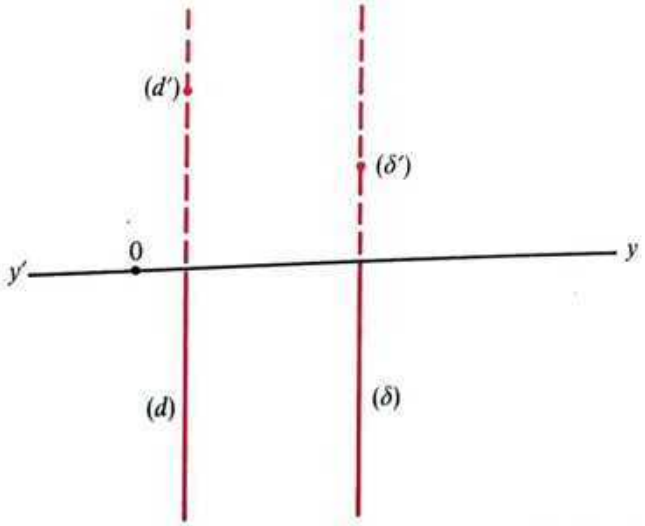
Soient (D) et (Δ) deux droites de l'espace d'épures respectives (d, d') et (δ, δ').

1er cas (D) et (Δ) sont verticales :



(D) et (Δ) sont parallèles (car parallèles à (OK)) et leurs projetés frontaux (d') et (δ') sont parallèles.

2e cas : (D) et (Δ) sont de bout

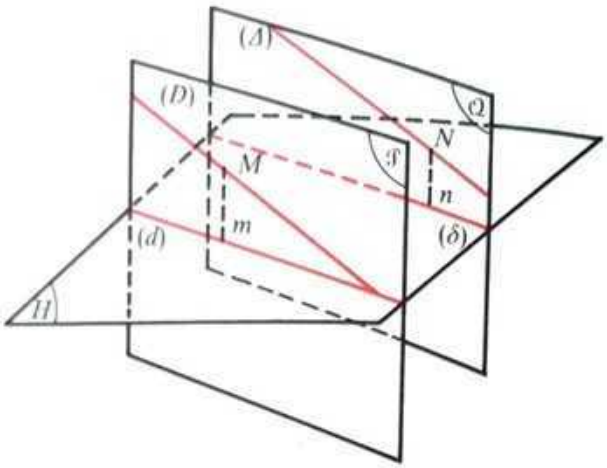


(D) et (Δ) sont parallèles (car parallèles à (OI)) et leurs projetés horizontaux (d) et (δ) sont parallèles.

3e cas : (D) et (Δ) ne sont ni verticales ni de bout

Question 44 *On suppose que (D) est parallèle à (Δ). Puisque (D) et (Δ) ne sont pas parallèles à (OK), on considère l'unique plan $\mathcal{P}$ contenant (D) et tel que (OK) est parallèle à $\mathcal{P}$, et l'unique plan $\mathcal{Q}$ contenant (Δ) et tel que (OK) est parallèle à $\mathcal{Q}$.*

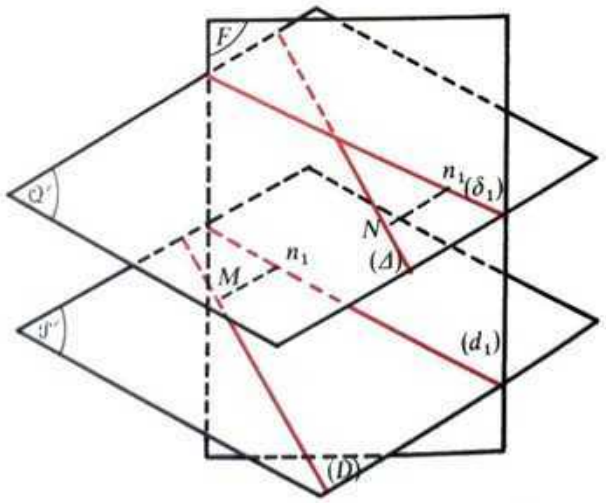
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.
Vérifier que $\mathcal{P} \cap (H) = (d)$ et que $\mathcal{Q} \cap (H) = (\delta)$.



$(\delta) = (H) \cap \mathcal{Q}$	$(\Delta) \subset \mathcal{Q}$
$(d) = (H) \cap \mathcal{P}$	$(D) \subset \mathcal{P}$
$M \in (D)$, $N \in (\Delta)$,	$(D) \parallel (\Delta)$

Démontrer que (d) est parallèle à (δ).

De même, puisque (D) et (Δ) ne sont pas parallèles à (OI), on considère l'unique plan $\mathcal{P}'$ contenant (D) et tel que (OI) est parallèle à $\mathcal{P}'$, et l'unique plan $\mathcal{Q}'$ contenant (Δ) et tel que (OI) est parallèle à $\mathcal{Q}'$.
Vérifier que $\mathcal{P}' \cap (F) = (d_1)$ et que $\mathcal{Q}' \cap (F) = (\delta_1)$.



$(d_1) = (F) \cap \mathcal{P}'$	$(\Delta) \subset \mathcal{Q}'$
$(\delta_1) = (F) \cap \mathcal{Q}'$	$(D) \subset \mathcal{P}'$
$(D) \parallel (\Delta)$, $M \in (D)$,	$N \in (\Delta)$

Démontrer que (d_1) est parallèle à (δ_1). On admettra alors que (d') est parallèle à (δ') puisque la « rotation » applique (d_1) sur (d') et (δ_1) sur (δ').

On a aussi montré que :
Si (D) est parallèle à (Δ) alors (d) est parallèle à (δ) et (d') est parallèle à (δ').

Question 45 *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}'$ les plans définis comme à la question précédente.*

1) Montrer que si (d) est parallèle à (δ) et (d_1) est parallèle à (δ_1) alors $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{Q}'$.

2) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus si et seulement si (D) est de profil.

3) On suppose que ni (D) ni (Δ) sont de profil. Montrer que : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (D)$, $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = (\Delta)$ et que $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants. On note (D_1) la droite d'intersection de $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}$.
Montrer que (D) et (Δ) sont parallèles à (D_1), donc parallèles entre elles.

Ainsi on a le résultat suivant :

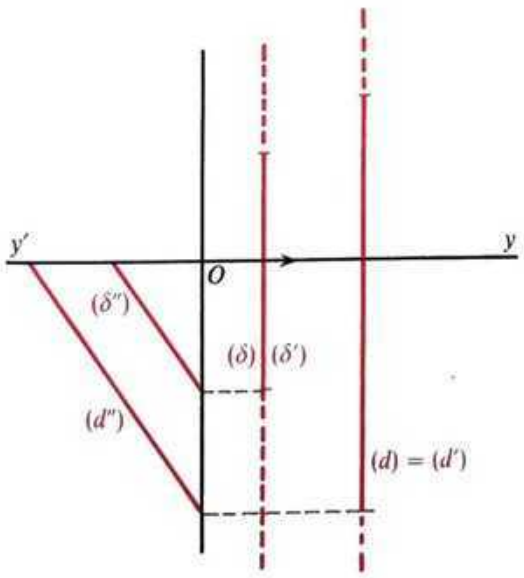
Théorème

Soient (D) et (Δ) deux droites non de profil, d'épures respectives (d, d') et (δ, δ'). On a :

$$(D) \parallel (\Delta) \iff [(d) \parallel (\delta) \quad \text{et} \quad (d') \parallel (\delta')].$$

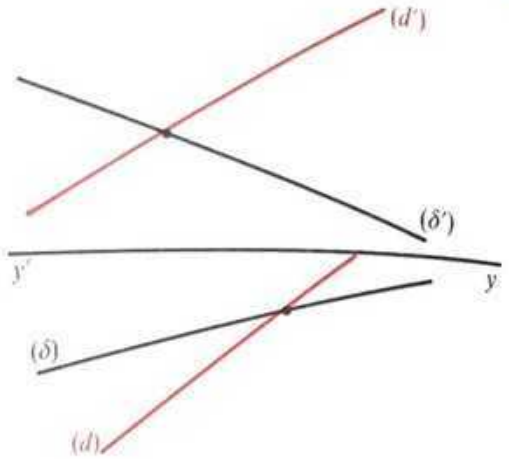
Dans le cas ou (D) et (Δ) sont de profil mais ni verticales ni de bout. Elles sont projetées en (d_2) et (δ_2) sur (G). On note (d'') et $(\delta''$ les images respectives de (d_2) et (δ_2) par la « rotation autour de (OI) qui amène (G) sur (H) ». Et on a :

$$(D) \parallel (\Delta) \iff (d'') \parallel (\delta'').$$



b) Droites non parallèles

Question 46 *Sur l'épure ci-contre on définit la droite (D) par (d, d') et la droite (Δ) par (δ, δ').*



Est-ce que $(D) \parallel (\Delta)$*?*
Soient a et a' les points de l'épure définis par :

$$\{a\} = (d) \cap (\delta) \quad \text{et} \quad \{a'\} = (d') \cap (\delta').$$

Les droites (D) *et* (Δ) *sont-elles sécantes?*

Plus généralement, on a :

Théorème

Soient (D) et (Δ) deux droites de l'espace d'épures respectives (d, d') et (δ, δ'). Les deux droites (D) et (Δ) sont sécantes si et seulement si l'intersection de (d) et (δ) d'une part, de (d') et (δ') d'autre part, sont sur une même ligne de rappel.

Remarques

- (D) et (Δ) sont non coplanaires si et seulement si les droites (d), (d'), (δ) et (δ') vérifient : (d) non parallèles à (d') ou (δ) non parallèles à (δ') ou les intersections de (d) et (δ) d'une part, de (d') et (δ') d'autre part ne sont pas sur une même ligne de rappel.
- Si deux projetés sur un même plan sont confondus alors les droites (D) et (Δ) sont coplanaires, on étudie alors la position des autres projetés.

Exercice 49 $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère orthonormé, soient :

$$A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \quad \text{quatre points de } \mathcal{E}.$$

1) Vérifier sur une épure si ces points sont coplanaires. (On peut étudier les positions relatives des droites (AB) et (CE)).

2) Déterminer une équation cartésienne d'un plan défini par 3 de ces points et vérifier si le quatrième point appartient au plan défini par les trois autres.

Exercice 50 $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soient (D) la droite définie par les points $A\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}$, J un point de (D) d'ordonnée égale à 2, $I\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$.

1) Tracer l'épure de la droite (IJ).

2) Déterminer le point d'intersection T de la droite (IJ) avec le plan frontal (F).

3) Vérifier que (D) et I déterminent un plan $\mathcal{T}$. Est-ce que le point $C\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{T}$?

4) Soit E un point de $\mathcal{T}$ tel que son abscisse et son ordonnée sont respectivement égales à -1 et à 5. Déterminer la cote de E.

5) Résoudre analytiquement les questions précédentes.

Remarque

La résolution des exercices est souvent plus rapide en utilisant la géométrie descriptive dans la mesure où on accepte des valeurs approchées des résultats, ce que fait le technicien. Une étude analytique a l'avantage de donner des résultats exacts. La géométrie descriptive permet de conjecturer certains résultats et améliore, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants, la perception des objets géométriques dans l'espace. Elle donne un support concret à certains problèmes de géométrie dans l'espace.

VIII. Épure d'un plan

1 Tracé d'une épure d'un plan

Un plan est déterminé par trois points non alignés. L'épure de ces trois points donne l'épure du plan.

Exercice 51 $\mathcal{E}$ étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soient $A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ trois points de $\mathcal{E}$.

Construire l'épure de ces trois points. Pourquoi ces points sont-ils non alignés?

Soit M le point de $\mathcal{E}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

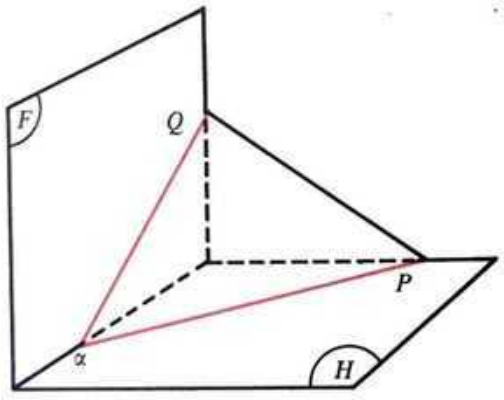
Construire l'épure du point M.
Vérifier que M appartient au plan (ABC).

L'épure d'un plan est obtenue par l'épure de 3 points non alignés et aussi par l'épure :

- de 1 point et d'une droite ne contenant pas ce point,
- de 2 droites sécantes
- de 2 droites parallèles et distinctes.

2 Traces d'un plan

Pour une meilleure perception d'un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace, on peut définir ce plan par ses traces sur le plan horizontal et sur le plan frontal :
On appelle **trace frontale** de $\mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{P} \cap (F)$ c'est-à-dire l'ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ ayant une abscisse nulle.
On appelle **trace horizontale** de $\mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{P} \cap (H)$ c'est-à-dire l'ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ ayant une cote nulle.
Si $\mathcal{P}$ est sécant à (F) alors sa trace frontale est une droite (αQ) avec $\alpha \in (OJ)$, $Q \in (F)$. Si $\mathcal{P}$ est sécant à (H) alors sa trace horizontale est une droite (αP) avec $\alpha \in (OJ)$, $P \in (H)$.



Question 48 *Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne :*

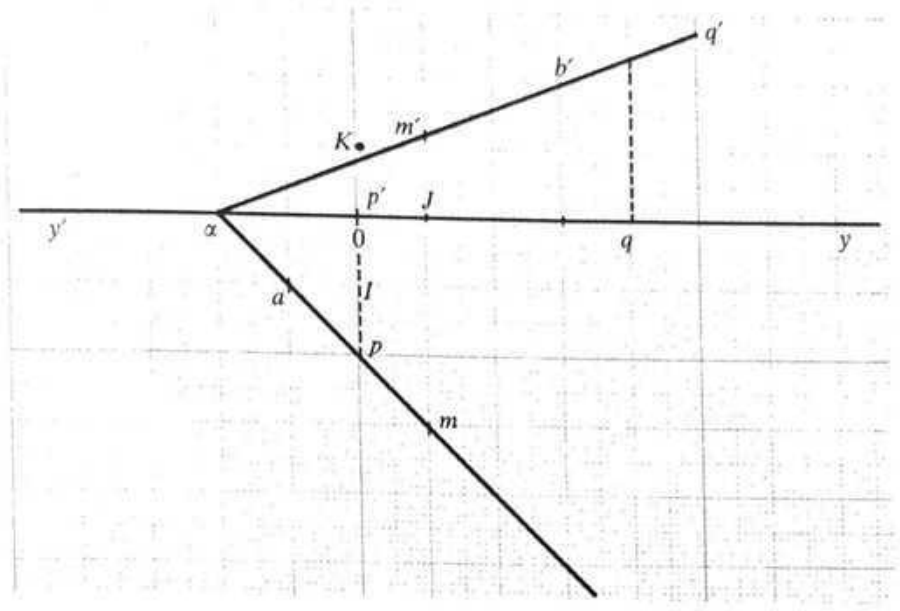
$$-2x + 2y - 5z + 4 = 0$$

dans le repère orthonormé (O, I, J, K) de $\mathcal{E}$.

1) Montrer que la droite d'équation cartésienne dans (O, I, J) :

$$-x + y + 2 = 0$$

représente la trace horizontale de $\mathcal{P}$.
Vérifier sur l'épure ci-contre que cette droite a pour épure $(\alpha p, \alpha p')$.



2) Montrer que la droite d'équation cartésienne dans (O, J, K) :

$$2y - 5z + 4 = 0,$$

représente la trace frontale du plan $\mathfrak{T}$.
Vérifier sur l'épure que cette droite est déterminée par $(\alpha q, \alpha q')$.

3) Est-ce que le point d'épure (m, m') appartient au plan $\mathfrak{T}$?
Soit A le point d'épure (a, a') appartenant à la trace horizontale de $\mathfrak{T}$, défini par a. Construire a'.
Soit B le point d'épure (b, b') appartenant à la trace frontale de $\mathfrak{T}$ défini par b'. Construire b.

Méthode pratique

Pour tracer l'épure des traces d'un plan :

a) Quand on connaît une équation cartésienne du plan $\mathfrak{T}$.

• On annule x dans cette équation et on obtient une équation cartésienne de la trace frontale représentée par $(\alpha q')$ dans le repère (O, J, K). (αq) est confondue avec $(y'y)$. La trace frontale est définie par $(\alpha q, \alpha q')$.

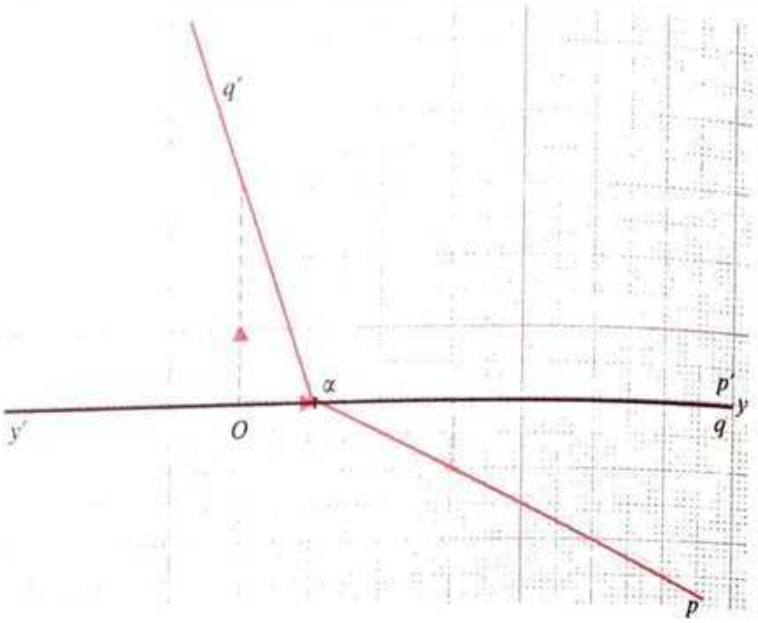
• On annule z dans l'équation cartésienne du plan $\mathfrak{T}$ et on obtient une équation cartésienne de la trace horizontale représentée par (αp) dans le repère (O, I, J). $(\alpha p')$ est confondue avec $(y'y)$. La trace horizontale est définie par $(\alpha p, \alpha p')$.
Ainsi par exemple cherchons la trace du plan $\mathfrak{T}$ d'équation cartésienne :

$$-6x + 3y + z - 3 = 0.$$

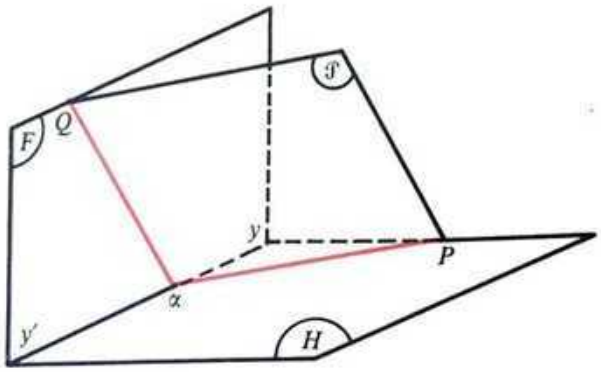
• Une équation cartésienne de (αp) dans (O, I, J) est :

$$-6x + 3y - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + y - 1 = 0$$

d'où $(\alpha p, \alpha p')$ sur l'épure ci-contre.

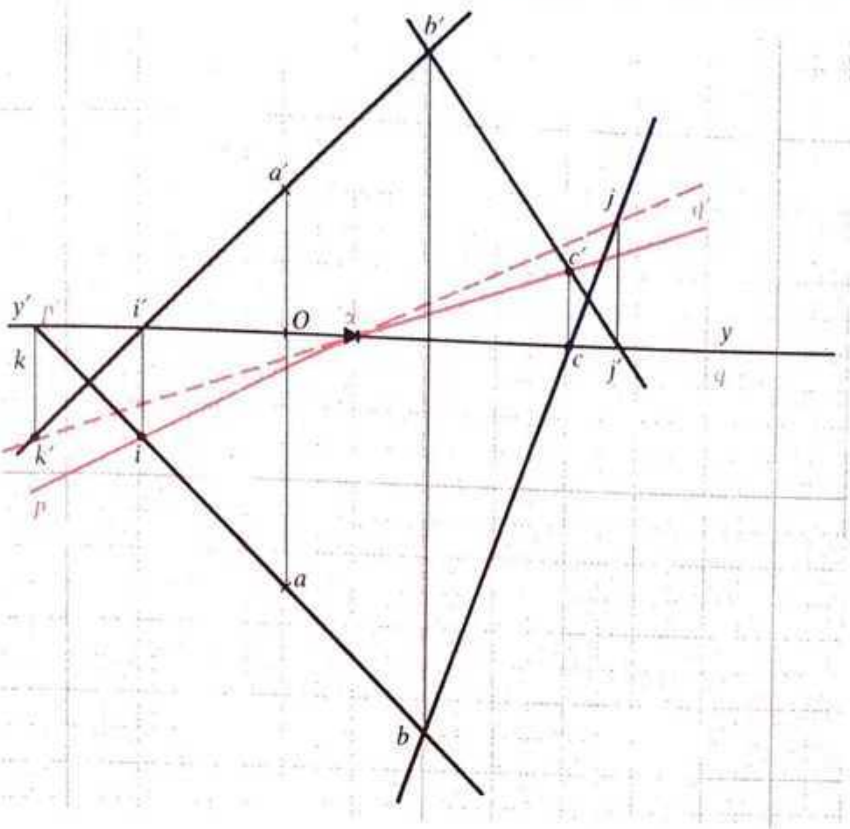


• Une équation cartésienne de $(\alpha q')$ dans le repère (O, J, K) est : $3y + z - 3 = 0$ d'où $(\alpha q, \alpha q')$ sur l'épure.
En pliant la feuille de papier millimétré autour de $(y'y)$ (figure ci-dessus) on a une très bonne vision du plan $\mathcal{P}$.



b) Si on connaît l'épure du plan $\mathcal{P}$, on cherche les traces horizontales de deux droites du plan $\mathcal{P}$. La droite (αp) contient ces deux points.
On cherche ensuite les traces frontales de deux droites de $\mathcal{P}$. La droite $(\alpha q')$ contient ces deux points.
Ainsi par exemple : le plan $\mathcal{P}$ est défini par trois points A, B et C non alignés d'épures respectives (a, a'), (b, b') et (c, c').
On trace l'épure des droites (AB) et (BC) respectivement $(ab, a'b')$ et $(bc, b'c')$.

• Recherche des traces horizontales des droites (AB) et (BC) :
La droite $(a'b')$ coupe $(y'y)$ en i' on rappelle i' en i sur (ab),
La trace de (AB) est le point d'épure (i, i').
La droite $(b'c')$ coupe $(y'y)$ en j' que l'on rappelle en j sur (bc). La trace de (BC) est le point d'épure (j, j').
On a : $(\alpha p) = (ij)$. On trace seulement la partie de (αp) correspondant aux abscisses positives avec α sur $(y'y)$.



• Recherche des traces frontales des droites (AB) et (CD) :
$(ab) \cap (y'y) = \{k\}$ donne l'épure de la trace frontale de (AB) : (k, k')
$(bc) \cap (y'y) = \{c\}$ donne l'épure de la trace frontale de (BC) : (c, c')
et $(\alpha q') = (k'c')$. On trace seulement la partie de $(\alpha q')$ correspondant aux ordonnées positives.

Exercice 52 Trouver l'épure des traces du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $3x + 2y - 2 = 0$ (on remarquera que la trace frontale est une verticale).

Exercice 53 Trouver l'épure des traces du plan $\mathcal{P}$ défini par les trois points non alignés $A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
On pourra utiliser les traces horizontales des droites (AB) et (BC) et la trace frontale de (AC).

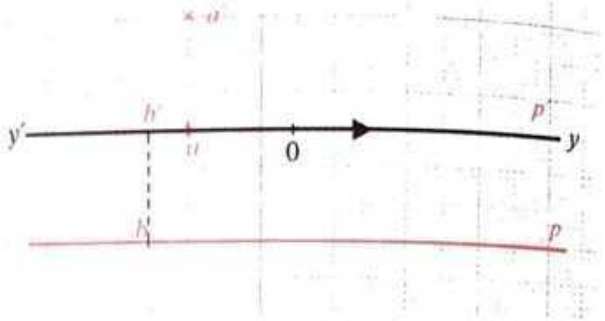
Exercice 54 Trouver l'épure des traces du plan $\mathcal{P}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $z = 2$. Un tel plan est dit **horizontal.** Toutes ses droites sont des horizontales. (H) est le plan horizontal de cote nulle.

2) $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $x = 1$. Un tel plan est dit **frontal.** Toutes ses droites sont des frontales. (F) est le plan frontal d'abscisse nulle.

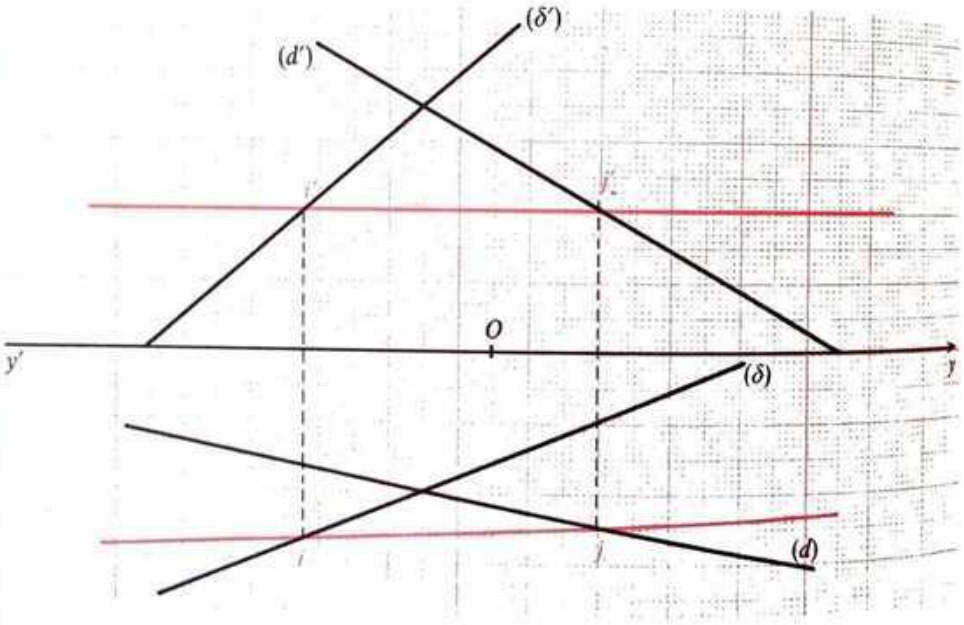
3) $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $y = 3$. Un tel plan est dit de **profil.** Toutes ses droites sont de profil. (G), égal au plan (OIK), est le plan de profil d'ordonnée nulle.

Exercice 55 Le plan $\mathcal{S}$ est déterminé par le point A d'épure (a, a') et par sa trace horizontale $(bp, b'p')$. Trouver la trace frontale de $\mathcal{S}$.



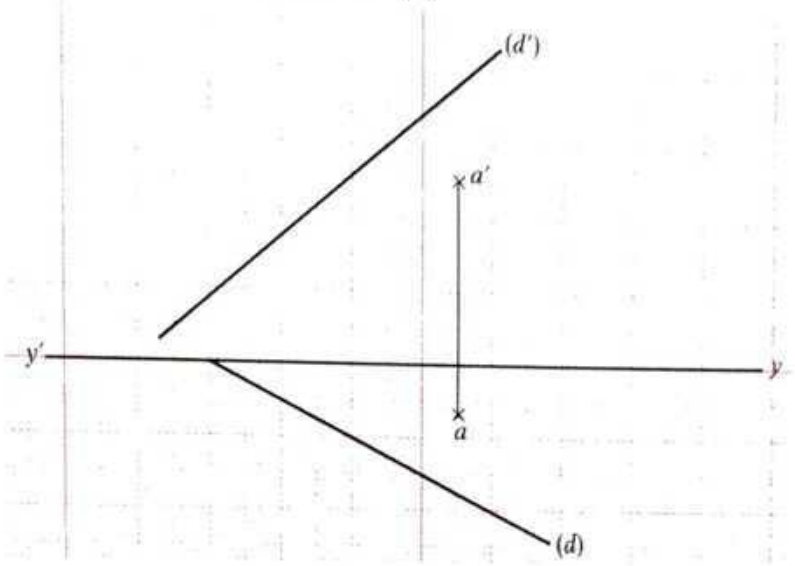
3 Horizontales et frontales d'un plan

Question 49 *Soient (D) et (Δ) deux droites de $\mathcal{E}$ définies sur l'épure respectivement par (d, d') et (δ, δ').*
Vérifier que ces droites déterminent un plan $\mathcal{P}$.



Soient I et J deux points situés respectivement sur (Δ) et (D), de cote 2, représentés sur l'épure par (i, i') et (j, j').
Vérifier que la droite (IJ) est horizontale et qu'elle appartient au plan $\mathcal{P}$. On dit que (IJ) est une ***horizontale du plan*** *$\mathcal{P}$. Montrer que (IJ) est la seule droite horizontale de $\mathcal{P}$ passant par I.*
Tous les points de (IJ) ont la même cote : 2. On dit que (IJ) est l'horizontale de $\mathcal{P}$ de cote 2.
Tracer l'épure de l'horizontale de $\mathcal{P}$ de cote 1. Quelle remarque peut-on faire au sujet des positions relatives des horizontales d'un plan?
La trace horizontale de $\mathcal{P}$ correspond à la cote nulle. Penser à cette remarque pour trouver la trace horizontale d'un plan.

Question 50 *Soit (D) une droite et A un point de $\mathcal{S}$ représentés sur l'épure ci-dessous par (d, d') et (a, a') respectivement. Pourquoi A n'appartient-il pas à (D)?*
Soit $\mathcal{S}$ le plan déterminé par (D) et A.
Tracer une droite frontale de $\mathcal{S}$ passant par A.
Montrer que cette droite est unique.
Déterminer la trace frontale de $\mathcal{S}$.
On peut utiliser la trace frontale de (D).

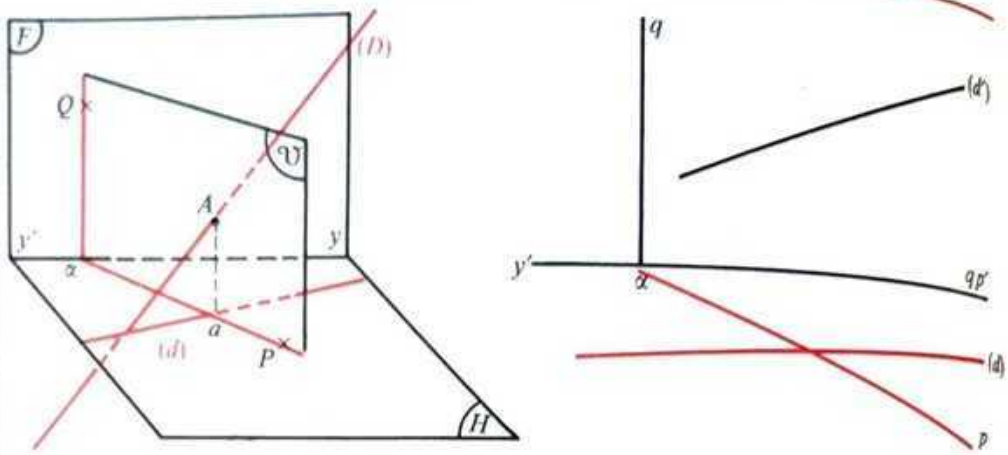


Exercice 56 Dans cet exercice l'origine *O* de l'épure est situé à au moins 3 centimètres du bord gauche de la feuille de papier millimétré, et à au moins 7 centimètres du bord supérieur. Soit le plan $\mathcal{S}$ défini par $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3{,}5\\5\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$.
Construire l'épure des traces de $\mathcal{S}$.
(On peut montrer que (*AB*) est une horizontale du plan $\mathcal{S}$ et chercher la trace horizontale *I* de (*AC*) puis montrer que (*AC*) est une frontale du plan $\mathcal{S}$ et chercher la trace frontale de la droite (*AB*).)

4 Intersection d'une droite et d'un plan

a) Intersection d'une droite et d'un plan vertical ou de bout

Question 51 *Soient un plan $\mathcal{U}$ tel que sa trace frontale (αQ) soit une droite verticale, (D) une droite sécante à $\mathcal{U}$, A le point d'intersection de (D) et de $\mathcal{U}$, a et (d) les projetés horizontaux respectifs de A et (D). On note (αP) la trace horizontale de $\mathcal{U}$, (αp, $\alpha p'$) son épure et (αq, $\alpha q'$) celle de (αQ).*



$$\begin{aligned}(D) \cap \mathfrak{U} &= (A)\\ \mathfrak{U} \cap (H) &= (\alpha P)\\ \mathfrak{U} \cap (F) &= (\alpha Q).\end{aligned}$$

En analysant la figure ci-dessus déterminer le point A d'épure (a, a') (en justifiant).

Ainsi on a déterminé l'épure du point d'intersection d'une droite avec un plan dit **vertical**.

Définition

Un **plan** est dit **vertical** si et seulement si sa trace frontale est verticale.

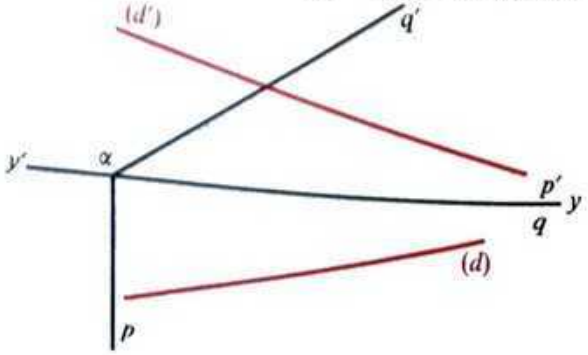
Comme une droite verticale est une droite parallèle à (OK), si un plan contient une verticale alors son intersection avec (F) est une verticale. On a ainsi :

Théorème

Tout plan contenant une droite verticale est un plan vertical.

Toutes les droites non verticales d'un plan vertical ont même projeté horizontal.

Question 52 *Soit $\mathcal{B}$ un plan tel que sa trace horizontale (αP) soit une droite de bout. Un tel plan est appelé plan* **de bout.** *Soient (D) une droite sécante avec $\mathcal{B}$, A le point d'intersection de la droite (D) avec le plan $\mathcal{B}$. Déterminer, en justifiant la réponse, l'épure (a, a') du point A sur l'épure ci-contre où (d, d') est l'épure de (D), $(\alpha p, \alpha p')$ l'épure de (αP) et $(\alpha q, \alpha q')$ l'épure de la trace frontale de $\mathcal{B}$.*



Définition

Un **plan** est **de bout** si et seulement si sa trace horizontale est de bout.

Comme une droite de bout est une droite parallèle à (OI), si un plan contient une droite de bout alors son intersection avec le plan horizontal (H) est une droite de bout. Ainsi on a :

Théorème

Un plan est de bout si et seulement si il contient une droite de bout.

Méthode pratique

Pour déterminer l'épure (a, a') du point A, s'il existe, d'intersection d'une droite (D) : d'épure (d, d')

avec un plan vertical $\mathcal{V}$ il faut :

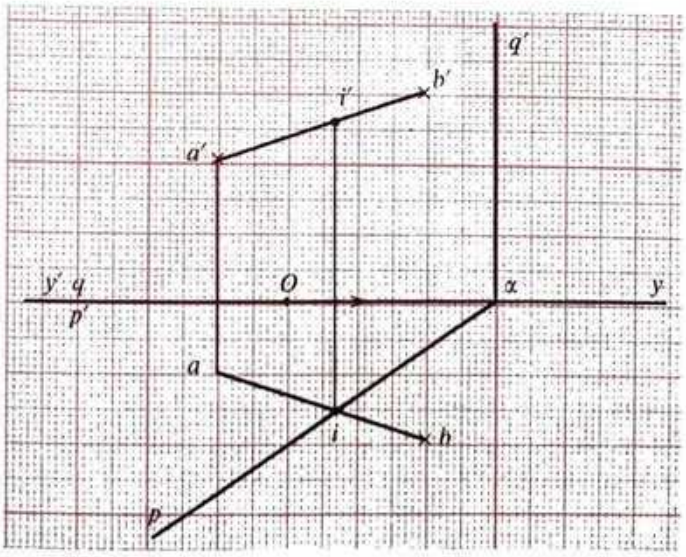
- déterminer l'intersection a de la trace horizontale de $\mathcal{V}$ avec le projeté horizontal (d) de (D)
- rappeler a en a' sur (d')

avec un plan de bout $\mathcal{B}$ il faut :

- déterminer l'intersection a' de la trace frontale de $\mathcal{B}$ avec le projeté frontal (d') de (D)
- rappeler a' en a sur (d)

Ainsi par exemple, cherchons l'intersection I de la droite (AB), avec $A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$, avec le plan $\mathcal{V}$ d'équation cartésienne :

$$3x + 2y - 6 = 0.$$

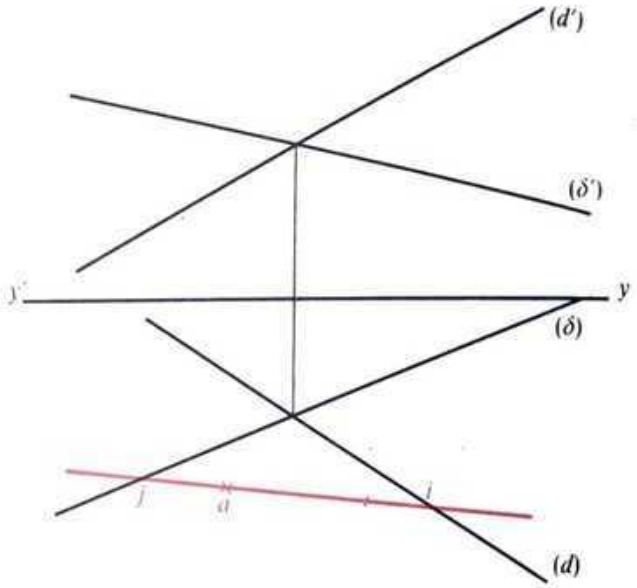


On construit la trace (αP) de $\mathcal{V}$, d'épure $(\alpha p, \alpha p')$, puis la trace frontale $(\alpha\Omega)$ de $\mathcal{V}$ d'épure $(\alpha q, \alpha q')$ ((αp) a pour équation $3x + 2y - 6 = 0$ dans le repère (O, I, J), et (αq) est perpendiculaire à $(y'y)$ car $\mathcal{V}$ est vertical).
Les droites (αp) et (ab) sont sécantes en i, on rappelle i en i' $(a'b')$.

Exercice 57 Soient $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $y - 2z + 1 = 0$, A et B deux points de $\mathcal{E}$ de triplets de coordonnées respectifs $(1, 2, 1)$ et $(-1, 4, -1)$.
Vérifier que la droite (AB) est sécante au plan $\mathcal{P}$ en un point I.
Tracer l'épure (f, f') de la frontale de $\mathcal{P}$ passant par I, et l'épure (h, h') de l'horizontale de $\mathcal{P}$ passant par I.

b) Intersection d'un plan avec une droite verticale ou de bout

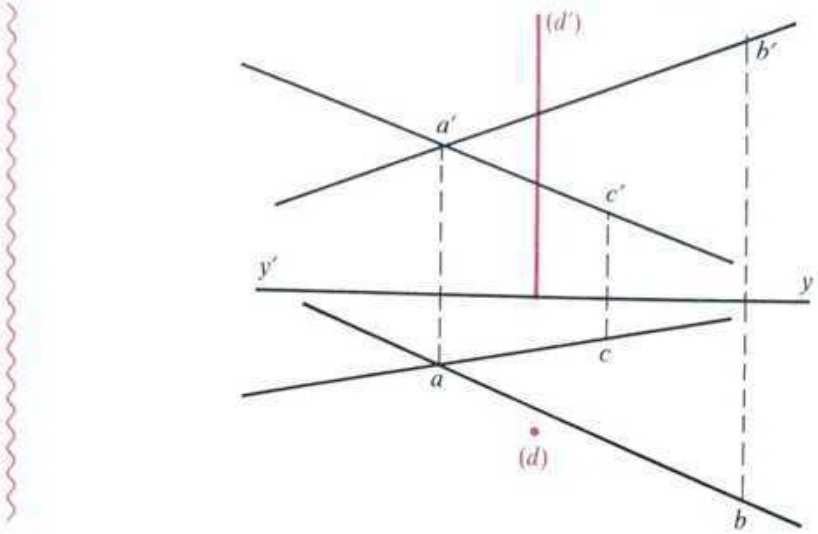
Question 53 *Soient (D) et (Δ) les deux droites dont les épures respectives (d, d') et (δ, δ') sont données ci-contre. Puisque ces deux droites (D) et (Δ) sont sécantes elles déterminent un plan $\mathcal{R}$.*



Soit A un point de ce plan $\mathcal{R}$ dont on ne connaît que le projeté horizontal a.
On cherche à placer son projeté frontal a'.
On considère une droite du plan $\mathcal{R}$ sécante à (D) et à (Δ) respectivement en I et J (avec I et J distincts) donnée par son projeté horizontal (ij).
Déterminer le projeté frontal $(i'j')$ de la droite (IJ). En déduire la position du point a' sur l'épure.

La méthode utilisée dans la question précédente permet de déterminer le deuxième projeté d'un point A d'un plan $\mathcal{R}$ déterminé par deux droites sécantes, lorsqu'on connaît un projeté de A : on dit que l'on a effectué le **rappel du point A dans le plan $\mathcal{R}$.**

Question 54 *Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par les trois points A, B et C non alignés dont les épures respectives (a, a'), (b, b') et (c, c') sont représentées ci-contre.*
Soit (D) une droite verticale définie par (d, d') sur la figure ci-contre (remarquer que (d) est un singleton).
On note E le point d'intersection de (D) et de $\mathcal{P}$ (s'il existe) et (e, e') son épure.
Vérifier que $(d) = \{e\}$.
Déterminer e' en rappelant le point E dans le plan $\mathcal{P}$.



Si le plan $\mathcal{P}$ est vertical alors la droite verticale (D) est soit incluse dans $\mathcal{P}$ soit disjointe à $\mathcal{P}$. On le verra sur la figure car les points a et b, par exemple, sont confondus (si (AB) est verticale) ou les droites (ab) et (ac) sont confondues (si (AB) et (AC) ne sont pas verticales) alors on ne pourra pas tracer de droite (ij) comme ci-dessus.

Méthode pratique

Pour déterminer l'intersection I d'un plan $\mathcal{P}$ avec une droite verticale ou une droite de bout (si cette droite est sécante à $\mathcal{P}$) il faut utiliser une droite auxiliaire (Δ) de $\mathcal{P}$ définie sur l'épure par (δ, δ').

pour la droite verticale

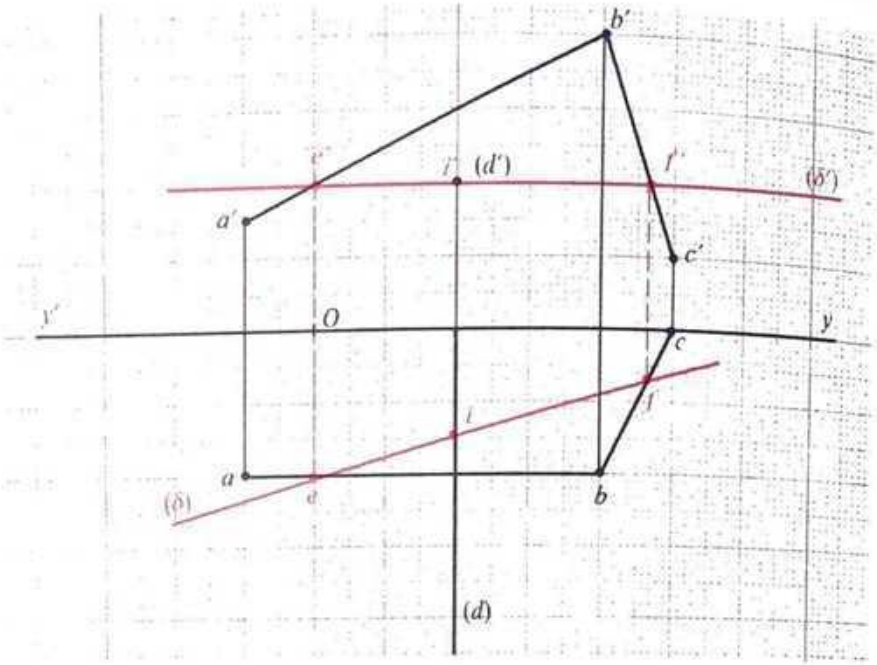
- tracer (δ) passant par la trace (d) de la verticale,
- en déduire (δ')
- l'intersection de (d') avec (δ') donne i'
- i est confondu avec (d)

pour la droite de bout

- tracer (δ') passant par la trace (d') de la droite de bout,
- en déduire (δ)
- l'intersection de (d) avec (δ) donne i
- i' est confondu avec (d')

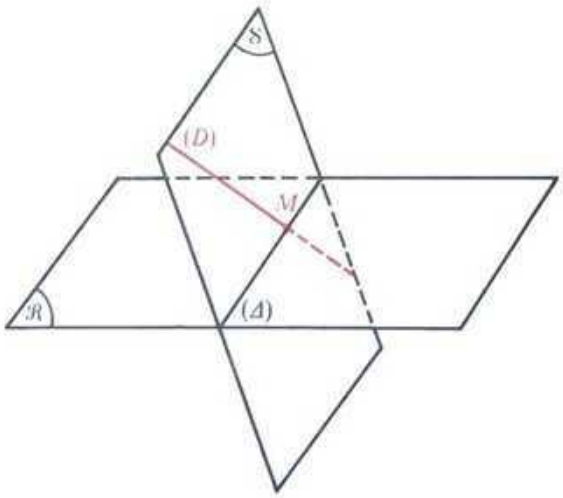
Ainsi par exemple : soient $\mathcal{P}$ le plan défini par $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1{,}5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$, et (D) la droite définie par la représentation paramétrique $\begin{cases}x=\lambda\\y=2.\\z=2\end{cases}$

On place les épures (a, a'), (b, b') et (c, c') des points A, B et C et l'épure (d, d') de (D).
On remarque que la droite (D) est une droite de bout. On considère une droite (Δ) de $\mathcal{P}$, par exemple une horizontale, qui coupe (AB) et (BC) respectivement en E et F.
Le projeté frontal (δ') de (Δ) est parallèle à $(y'y)$. (δ') coupe $(a'b')$ en e' et $(b'c')$ en f'. On rappelle e' en e sur (ab) et f' en f sur (bc). Le projeté horizontal (δ) de (Δ) est donc la droite (ef).
Les droites (δ) et (d) sont sécantes en i. Le point i' est confondu avec (d').
Sur l'épure on lit donc les coordonnées du point I d'intersection de (D) et $\mathcal{P}$: (1,5; 2; 2).



c) Intersection d'une droite et d'un plan quelconque

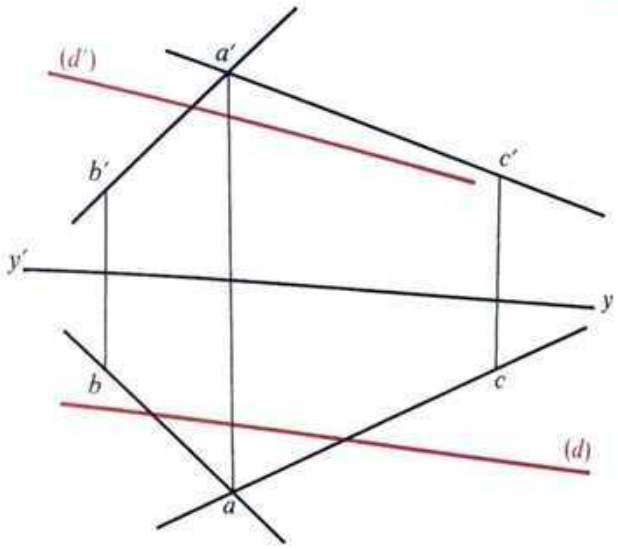
Pour trouver le point d'intersection M d'un plan $\mathcal{R}$ avec une droite (D), non parallèle à ce plan, on utilise le plan auxiliaire $\mathcal{S}$ contenant (D) et sécant à $\mathcal{R}$ suivant la droite (Δ).



$(D) \subset (S)$
$(R) \cap (S) = (\Delta)$
$(D) \cap (\Delta) = \{ M \}$.

Dans le plan $\mathcal{S}$ on a : $(D) \cap (\Delta) = \{ M \}$.
Dans la pratique on utilise, pour plan $\mathcal{S}$, un plan vertical, ou un plan de bout, contenant la droite (D). Et pour déterminer M, il faut déterminer la droite (Δ) d'intersection de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

Question 55 *Le plan (ABC) est déterminé sur l'épure ci-contre par : (AB) définie par $(ab, a'b')$ et (AC) définie par $(ac, a'c')$.*
La droite (D) est définie par (d, d').
Le plan auxiliaire est le plan vectoriel $\mathcal{V}$ qui contient (D).



Pourquoi la trace horizontale de $\mathfrak{V}$ *est-elle confondue avec* (d)*?*
Déterminer le point J *tel que :* $\mathfrak{V} \cap (AB) = \{J\}$*, puis* le point K *tel que :* $\mathfrak{V} \cap (AC) = \{K\}$.
Pourquoi cette droite (KJ) *est-elle la droite* (Δ) *d'intersection des plans* (ABC) *et* $\mathfrak{V}$?
Déterminer sur l'épure le point M *tel que* $(D) \cap (\Delta) = \{M\}$.

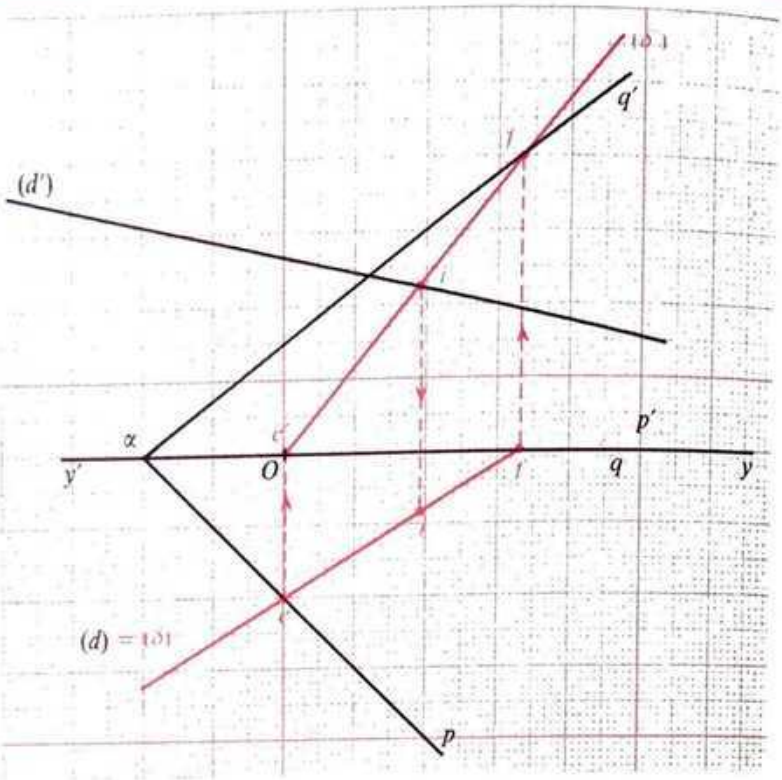
Méthode pratique

Pour déterminer le point d'intersection d'une droite (D) *avec un plan* $\mathfrak{F}$, quand il existe, il faut :

• Utiliser un plan auxiliaire $\mathcal{S}$ vertical (ou de bout) contenant (D). Sa trace horizontale (respectivement frontale) est confondue avec le projeté horizontal (d) (respectivement frontal (d')) de la droite (D).

• Déterminer les points d'intersection E et F de ce plan $\mathcal{S}$ avec deux droites qui déterminent le plan $\mathfrak{F}$ en utilisant l'intersection de (d) (respectivement (d')) avec les projetés de ces deux droites. La droite (EF) est l'intersection (Δ) de $\mathfrak{F}$ et de $\mathcal{S}$: on a $(\delta') = (e'f')$ et $(\delta) = (d)$ (respectivement $(\delta) = (ef)$ et $(\delta') = (d')$).

• Chercher l'intersection I de (Δ) avec (D) : on a $\{i'\} = (d') \cap (\delta')$ et on rappelle i' en i sur (d) (respectivement $\{i\} = (d) \cap (\delta)$ et on rappelle i en i' sur (d')).
Ainsi par exemple, soient $\mathfrak{F}$ le plan défini par ses traces (αP) et (αQ) d'épures respectives $(\alpha p, \alpha p')$ et $(\alpha q, \alpha q')$, et (D) la droite définie par (d, d') sur l'épure ci-dessous.
Le plan auxiliaire est le plan vertical $\mathfrak{V}$ dont la trace horizontale est confondue avec (d) ($\mathfrak{V}$ contient (D)).
Soit E et F les points d'intersections respectifs de $\mathfrak{V}$ avec la trace horizontale (αP) et la trace frontale (αQ) du plan $\mathfrak{F}$.
L'intersection de (d) avec (αp) donne e que l'on rappelle en e' sur $(\alpha p')$ (qui est $(y'y)$).
L'intersection de (d) avec (αq), c'est-à-dire $(y'y)$, donne f que l'on rappelle en f' sur $(\alpha q')$.
On a ainsi l'intersection (Δ) de $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{V}$, d'épure (δ, δ') avec : $(\delta) = (d)$ et $(\delta') = (e'f')$.
L'intersection de (δ') et (d') donne i' que l'on rappelle en i sur (d).
On a ainsi le point I d'intersection de (D) et de $\mathfrak{F}$.



Exercice 58 Soient $\mathcal{S}$ le plan défini par les points $A\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, et (D) la droite définie par : $x = \lambda$, $y = 2\lambda$ et $z = \frac{1}{4}\lambda + 1$. Tracer l'épure de ces points et de cette droite, puis déterminer celle du point I d'intersection de (D) et de $\mathcal{S}$.

Réponses aux questions

Q 1

• Si (D) et (D') sont sécantes, alors elles déterminent un unique plan $\mathcal{P}$ qui contient (D), et (D') est parallèle à $\mathcal{P}$ car $(D') \subset \mathcal{P}$.

• Si (D) et (D') ne sont pas coplanaires, alors elles ne sont pas parallèles. Par un point A de (D) on trace la droite (D'') parallèle à (D'). Les droites (D) et (D'') sont sécantes en A car (D) et (D') ne sont pas parallèles. Ainsi (D) et (D'') déterminent un unique plan $\mathcal{P}$ qui contient (D) et tel que (D') est parallèle à $\mathcal{P}$.
Montrons l'unicité de ce plan : soit $\mathcal{Q}$ un plan contenant (D) et tel que (D') est parallèle à $\mathcal{Q}$. La droite (D'') est parallèle à (D') et passe par A, qui est un point de $\mathcal{Q}$ (car $A \in (D)$ et $(D) \subset \mathcal{Q}$) donc $(D'') \subset \mathcal{Q}$. Ce qui prouve que : $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Q 2

(D) et (D') sont coplanaires car incluses dans $\mathcal{P}_2$.

• Si $(D) \subset \mathcal{P}_1$ alors $(D) = (D')$.

• Si $(D) \cap \mathcal{P}_1 = \varnothing$ alors, comme $(D') \subset \mathcal{P}_1$, on a : $(D) \cap (D') = \varnothing$.
Dans les deux cas les droites (D) et (D') sont parallèles.

Q 3

Par un point A de (Δ) on trace la droite (D') parallèle à (D). Puisque (D) est parallèle à $\mathcal{P}_1$ et que A appartient à $\mathcal{P}_1$, la droite (D') est incluse dans $\mathcal{P}_1$. De même puisque (D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$ et que A appartient à $\mathcal{P}_2$, la droite (D') est incluse dans $\mathcal{P}_2$.
Ainsi $(D') \subset \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, c'est-à-dire $(D') = (\Delta)$.
Comme (D') est parallèle à (D), (Δ) est parallèle à (D).

Q 4

1) (D) est parallèle à $\mathcal{P}_1$ si et seulement si $(D) \subset \mathcal{P}_1$ ou $(D) \cap \mathcal{P}_1 = \varnothing$.

• Si $(D) \subset \mathcal{P}_1$ alors, puisque $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$, tout plan sécant à $\mathcal{P}_1$ suivant (D) est sécant à $\mathcal{P}_2$ suivant une droite parallèle à (D). Ainsi (D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$.

• Si $(D) \cap \mathcal{P}_1 \neq \varnothing$:

1re méthode

Alors la direction de (D) est représentée dans $\mathcal{P}_1$, puisque $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$, toute direction représentée dans $\mathcal{P}_1$ l'est dans $\mathcal{P}_2$; ainsi (D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$.

2e méthode

Supposons (D) sécante à $\mathcal{P}_2$ en un point A; considérons une droite (Δ_2) de $\mathcal{P}_2$ passant par A, les droites (Δ_2) et (D) sont sécantes en A, elles définissent un unique plan $\mathcal{R}$ sécant à $\mathcal{P}_2$ suivant (Δ_2).
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles donc $\mathcal{R}$ est sécant à $\mathcal{P}_1$ suivant une droite (Δ_1) parallèle à (Δ_2).
Puisque (D) est une droite de $\mathcal{R}$ parallèle à $\mathcal{P}_1$, l'intersection (Δ_1) de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{R}$ est parallèle à (D).
(Δ_2) est parallèle à (Δ_1) et (Δ_1) est parallèle à (D) donc (Δ_2) est parallèle à (D).
Ainsi le plan $\mathcal{P}_2$ contient une droite (Δ_2) parallèle à (D) : (D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$.
Ainsi (D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$.

2) Si (D) est parallèle à $\mathcal{P}_2$ alors d'après la 1re question, puisque $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$, (D) est parallèle à $\mathcal{P}_1$: ceci contredit l'hypothèse (D) est sécante à $\mathcal{P}_1$ donc (D) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}_2$: (D) est sécante à $\mathcal{P}_2$.

Q 5

Supposons (Δ) parallèle à $\mathcal{P}$: il existe une droite (D') de $\mathcal{P}$ parallèle à (Δ).
Puisque (Δ) est parallèle à (D), (D') est aussi parallèle à (D).
Dire qu'il existe une droite (D') de $\mathcal{P}$ parallèle à (D) c'est dire que (D) est parallèle à $\mathcal{P}$.
Or (D) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$ donc (Δ) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$: (Δ) est sécante à $\mathcal{P}$.

Q 6

Pour trouver le projeté M' d'un point quelconque M de (Δ), on trace la parallèle (D_M) à (D) passant par M. Comme (Δ) est parallèle à (D) et M appartient à (Δ), on a :

$$(\Delta) = (D_M).$$

Ainsi, quelque soit le point M de (Δ) son projeté M' est le point d'intersection A de (Δ) et du plan $\mathcal{P}$:

$$p((\Delta)) = \{A\}.$$

2) Soit $\mathcal{R}$ le plan contenant (Δ) et tel que (D) lui soit parallèle. Puisque (D) est parallèle à $\mathcal{R}$, si $\mathcal{R}$ était parallèle à $\mathcal{P}$ alors (D) serait parallèle à $\mathcal{P}$, (cf. **Q 4**), ce qui est impossible; donc $\mathcal{R}$ est sécant à $\mathcal{P}$ en une droite (Δ').

• Si $(\Delta) \subset \mathcal{P}$ alors $p((\Delta)) = (\Delta)$ et puisque $(\Delta) \subset \mathcal{R}$, $(\Delta) = (\Delta')$ d'où $p((\Delta)) = (\Delta')$.

• Si (Δ) n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$ alors il existe un point A de (Δ) n'appartenant pas à $\mathcal{P}$, son projeté A' par p est distinct de A. La droite (AA') est parallèle à (D) et comme $A \in \mathcal{R}$, (AA') est incluse dans $\mathcal{R}$.

Rechercher le projeté de (Δ) sur $\mathcal{P}$ parallèlement à (D) revient alors à rechercher le projeté, dans le plan $\mathcal{R}$ (qui contient (Δ), (Δ') et (AA')), de (Δ) sur (Δ') parallèlement à (AA').
Ainsi, d'après le cours de géométrie plane, $p((\Delta)) = (\Delta')$; et $p([AB]) = [A'B']$ pour tout B de (Δ) de projeté B' (ce résultat est encore vrai si A est dans $\mathcal{P}$, donc sur (Δ') et alors on considère la parallèle à (D) passant par A au lieu de la droite (AA')).

Q 7

Puisque A et B sont distincts et que (AB) n'est pas parallèle à (D), les droites (D_A) et (D_B) parallèles à (D) passant respectivement par A et B sont parallèles et disjointes; on a : $\{A'\} = (D_A) \cap \mathcal{P}$ et $\{B'\} = (D_B) \cap \mathcal{P}$, donc $A' \neq B'$. Les droites (D_A) et (D_B) déterminent un unique plan $\mathcal{R}$, qui, puisqu'il contient A et B, contient la droite (AB) et en particulier le point C.
La droite (D_C) parallèle à (D) et passant par C est parallèle à (D_A) et contient un point de $\mathcal{R}$, donc est contenu dans $\mathcal{R}$: ainsi, puisque C' appartient à (D_C), C' appartient à $\mathcal{R}$.
Les points A, B, C, A', B' et C' sont coplanaires.
En utilisant l'axiome de Thalès dans le plan $\mathcal{R}$ et la projection sur la droite $(A'B')$ parallèlement à (D_A) on obtient $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

Q 8

Soient p la projection sur un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une droite (D) (où (D) est sécante à $\mathcal{P}$), A et B deux points de $\mathcal{E}$, et M le milieu de $[AB]$. On note A', B' et M' les projetés respectifs de A, B et M par p.

- Si $A = B$ alors $M = A$ et $A' = B' = M'$ donc M' est le milieu de $[A'B']$.
- Si A et B sont distincts, alors $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$.

Grâce au théorème de Thales, on en déduit :

$$\frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{2}$$

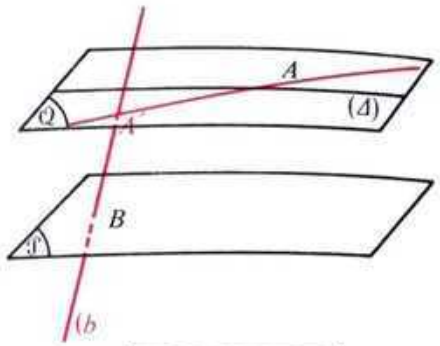
c'est-à-dire que M' est le milieu de $[A'B']$.

Q 9

Puisque les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles et que (D) est sécante à $\mathcal{P}$, (D) est sécante à $\mathcal{Q}$.

Q 10

1) Soit A un point de (Δ) :



$(\Delta) \parallel \mathcal{P}$
$\mathcal{Q} \parallel \mathcal{P}$
$(D) \cap \mathcal{P} = \{B\}$
$(D) \cap \mathcal{Q} = \{A'\}$
$(\Delta) \subset \mathcal{Q}$.

Notons $\mathcal{Q}$ le plan parallèle à $\mathcal{P}$ et contenant A; puisque (Δ) est parallèle à $\mathcal{P}$, et $A \in (\Delta) \cap \mathcal{Q}$, (Δ) est incluse dans $\mathcal{Q}$.
Puisque $\mathcal{Q}$ est parallèle à $\mathcal{P}$, et (D) est sécante à $\mathcal{P}$, (D) est sécante à $\mathcal{Q}$ au point A'. Tous les points de $\mathcal{Q}$, et en particulier ceux de (Δ), se projettent par q en A' :

$$q((\Delta)) = \{A'\}.$$

2) • $q((\Delta)) \subset (D)$ car l'ensemble image de $\mathcal{E}$ par q est (D).

• Soit M' un point de (D), tous les points du plan $\mathcal{P}_{M'}$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par M', se projettent en M'. (Δ) est sécante à $\mathcal{P}$ donc aussi à $\mathcal{P}_{M'}$ en un unique point M et $M' = q(M)$.
Ainsi $(D) \subset q((\Delta))$.
Le projeté de (Δ) est donc la droite (D).

Q 11

1) Puisque (Δ') est parallèle à (Δ) qui est sécante à $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$), (Δ') est aussi sécante à $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$) au point A' (car $A' \in (\Delta') \cap \mathcal{P}$) (resp. B'' et C''). Et $B'' \neq A'$ et $C'' \neq A'$.

2) Puisque (Δ) et (Δ') sont parallèles et distinctes $(A \neq A')$, elles déterminent un unique plan $\mathcal{S}$. On a
$\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = (AA')$,
$\mathcal{Q} \cap \mathcal{S} = (B''B)$.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles donc leurs droites d'intersection avec $\mathcal{S}$ sont parallèles :
$(AA') \parallel (B''B)$.
De plus :

$$(A'B'') = (\Delta') \quad \text{et} \quad (AB) = (\Delta)$$

donc : $(A'B'') \parallel (AB)$.
Ainsi $AA'B''B$ est un parallélogramme.

De même, toujours avec S mais avec les plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$, on montre que $AA'C''C$ est un parallélogramme.

3) Les droites (D) et (Δ') sont sécantes, en A', car (D) et (Δ) ne sont pas parallèles et (Δ') est parallèle à (Δ). Soit $\mathcal{C}$ le plan défini par (D) et (Δ'), dans lequel on considère la projection plane f sur (Δ') parallèlement à $(B'B'')$ (on a $B' \neq B''$ car $(D) \cap (\Delta') = \{A'\}$, de même $C' \neq C''$) :

$$\begin{array}{c|c} \overset{f}{\curvearrowright} & \\ \hline A' & A' \\ B' & B'' \\ C' & C'' \end{array}$$

car $(C'C'')$ et $(B'B'')$ sont parallèles car ce sont les droites d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les deux plans parallèles $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.
D'après l'axiome de Thalès, dans $\mathcal{C}$, on a :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{A'C''}} \qquad (1)$$

Puisque (question 2) $AA'B''B$ et $AA'C''C$ sont des parallélogrammes on a :

$$A'B'' = AB \quad \text{et} \quad A'C'' = AC.$$

Les points A, B, C d'une part, A', B'', C'' d'autre part sont dans le même ordre sur les droites (Δ) et (Δ') donc :

$$\frac{\overline{A'B''}}{\overline{A'C''}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Q 12

La figure est celle de la question 11 avec $C = M$, et $C' = M'$.
M' est le projeté de M sur (D) parallèlement à $\mathcal{T}$ car M' est le point d'intersection de (D) et du plan $\mathcal{R}$ parallèle à $\mathcal{T}$ et passant par M.
D'après la question 11 on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'M'}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$$

d'où : $\overline{A'M'} = \overline{A'M''}$
Ainsi : $M' = M''$.

Q 13

1) Si (AB) est parallèle à $\mathcal{T}$ alors $q((AB))$ est le singleton $\{A'\}$ intersection de (D) et du plan parallèle à $\mathcal{T}$ passant par A; on a $q(A) = A'$ et $q(B) = A'$ ainsi puisque $[AB] \subset (AB)$ on a :

$$q([AB]) = \{A'\} = [A'A'].$$

2) Si (AB) est sécante à $\mathcal{T}$ alors $q((AB)) = (D)$ donc $q([AB]) \subset (D)$.
Soit M un point de $[AB]$: il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$; d'après Thalès on a aussi, en notant M' l'image de M par q : $\overline{A'M'} = \lambda\overline{A'B'}$ donc :

$$M' \in [A'B'] : q([AB]) \subset [A'B']$$

Réciproquement : soit M' un point de $[A'B']$: il existe un nombre réel μ de $[0, 1]$ tel que $\overline{A'M'} = \mu\overline{A'B'}$.
Soit M le point de (AB) défini par $\overline{AM} = \mu\overline{AB}$: $M \in [AB]$ et d'après la réciproque du théorème de Thalès on a $q(M) = M'$, donc M est un antécédent de M' :

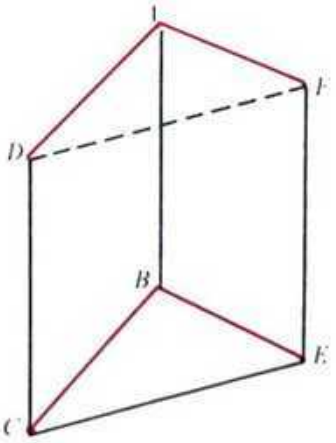
$$[A'B'] \subset q([AB]).$$

Ainsi on a : $q([AB]) = [A'B']$.

Q 14

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les points A, B et C ne sont pas alignés; ils déterminent donc un unique plan $\mathcal{T}$.
Or la droite (CD) est parallèle à la droite (AB); comme cette dernière est incluse dans $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ contient les points distincts A et B), la droite (CD) est parallèle à $\mathcal{T}$.
De plus le point C de (CD) appartient à $\mathcal{T}$ donc (CD) est incluse dans $\mathcal{T}$. Ainsi D appartient à $\mathcal{T}$, et les points A, B, C et D sont coplanaires.

Q 15



Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
De même (AB) est parallèle à (EF) car $ABEF$ est un parallélogramme.
(CD) est donc parallèle à (EF).
De plus C, D et E ne sont pas alignés donc ces droites sont disjointes et déterminent un plan $\mathcal{T}$.
Les droites (AD) et (AF) ont le point A en commun : elles sont confondues ou sécantes en A.

• Si (AD) et (AF) sont confondues alors les six points A, B, C, D, E et F sont dans un même plan; d'après le cours sur la géométrie plane, $CDFE$ est un parallélogramme.

• Si (AD) et (AF) sont sécantes alors elles définissent un plan $\mathcal{Q}$.
De plus comme (BC) est parallèle à (AD) et (BE) est parallèle à (AF), les droites (BC) et (BE) sont sécantes et déterminent un plan $\mathcal{Q}'$ parallèle à $\mathcal{Q}$.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ contiennent D et A appartient à $\mathcal{Q}$ mais pas à $\mathcal{P}$ car A, D et F sont non alignés.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant la droite (DF).
Puisque $\mathcal{Q}'$ est parallèle à $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ est sécant à $\mathcal{P}$, suivant la droite (CE). Donc (CE) est parallèle à (DF).
Ainsi (CD) est parallèle à (EF), et (CE) est parallèle à (DF), donc $CDFE$ est un parallélogramme.

Q 16

Par définition de la translation de vecteur $\vec{u}$, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$$

d'où : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

ce qui est équivalent à :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$$

Q 17

1) Soient t une translation de vecteur $\vec{u}$ et M un point de $\mathcal{E}$. On a :

$$M \text{ est invariant par } t \iff \overrightarrow{MM} = \vec{u}$$

or : $\forall M \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{MM} = \vec{0}$
donc :

• si $\vec{u} = \vec{0}$ alors l'ensemble des points invariants est $\mathcal{E}$

• si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors l'ensemble des points invariants est vide.

2) Puisque, quels que soient les points M et M' de $\mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$$

et que, quel que soient le point M' de $\mathcal{E}$ et le vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ (égal à $-\vec{u}$) il existe un seul point M de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{M'M} = \vec{v}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui-même et sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$:

$$(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}.$$

3) Soient $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et M un point de $\mathcal{E}$.
Le translaté M' de M par $t_{\vec{u}}$ est défini par : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
Le translaté M'' de M' par $t_{\vec{v}}$ est défini par : $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$.

D'après Chasles on a :

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$$
$$= \vec{u} + \vec{v}$$

donc $\overrightarrow{M''}$ est le translaté de M par la translation $t_{\vec{u}+\vec{v}}$ de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$:

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}.$$

4) Puisque l'addition des vecteurs est commutative on a :

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$$
$$= t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}.$$

Ainsi la composition des applications est une loi de composition interne commutative dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des translations de $\mathcal{E}$.
L'associativité de cette loi étant vérifiée, elle l'est en particulier dans $\mathcal{C}$.
Puisque la translation $t_{\vec{0}}$ de vecteur nul est $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, la bi ∘ admet pour élément neutre un élément de $\mathcal{C}$: $t_{\vec{0}}$.
D'après le 2) tout élément de $\mathcal{C}$ a un symétrique pour la loi ∘ (son application réciproque) dans $\mathcal{C}$.
Ainsi $(\mathcal{C}, \circ)$ est un groupe commutatif.

Q 18

Par définition de h on a :

$$\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM},$$

ou encore $\overrightarrow{M'O} = k\overrightarrow{MO}$. D'après Chasles, on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'}$$

d'où : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MO} + k\overrightarrow{ON}$
$= k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON})$
$= k\overrightarrow{MN}.$

Q 19

1) L'homothétie h de centre O de rapport 1 est définie par : $h : M \longmapsto M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = 1 \cdot \overrightarrow{OM}$. Ainsi $M' = M$ et $h = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

2) Soient M et M' deux points de $\mathcal{E}$, on a :

O est le milieu de $[MM'] \iff \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

c'est-à-dire :

M' est l'image de M par la symétrie centrale S_0 de centre O $\Big\} \iff \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}.$

Ainsi S_O est l'homothétie de centre O et de rapport -1.

3) L'ensemble $\mathcal{I}$ des points invariants de $\mathcal{E}$ par l'homothétie h de centre O et de rapport k est défini par :

$$\mathcal{I} = \{ M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM} \}$$

c'est-à-dire :

$$\mathfrak{I} = \{ M \in \mathcal{E},\ (1-k)\overrightarrow{OM} = \vec{0} \}.$$

Or on a :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

$$(\alpha \vec{u} = \vec{0} \iff [\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}])$$

d'où :

- si $k = 1$ alors $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$
- si $k \neq 1$ alors $\mathfrak{I} = \{ M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{OM} = \vec{0} \}$
  $= \{ O \}$.

4) Soit, h_k l'homothétie de centre O et de rapport k. Puisque k est non nul, quels que soient les points M et M' de $\mathcal{E}$ on a :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}.$$

Or, quel que soit le vecteur $\vec{u}$ $\left(\text{égal à } \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}\right)$ il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, donc h_k est bijective et sa bijection réciproque h_k^{-1} est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$:

$$(h_k)^{-1} = h_{\frac{1}{k}}.$$

5) Soient h_{k_1} et h_{k_2} deux homothéties de même centre O et de rapports respectifs k_1 et k_2, et M un point de $\mathcal{E}$.
L'image M_1 de M par h_{k_1} est définie par : $\overrightarrow{OM_1} = k_1\overrightarrow{OM}$.
L'image M_2 de M_1 par h_{k_2} est définie par : $\overrightarrow{OM_2} = k_2\overrightarrow{OM_1}$.
D'où : $\overrightarrow{OM_2} = k_2(k_1\overrightarrow{OM})$
$= k_2k_1\overrightarrow{OM}$.

Ainsi $h_2 \circ h_1$, qui à M associe M_2, est l'homothétie $h_{k_2k_1}$ de centre O et de rapport k_2k_1 :

$$h_{k_2} \circ h_{k_1} = h_{k_2k_1}.$$

De ces propriétés on déduit que l'ensemble des homothéties de centre O est un groupe commutatif pour la composition des applications.

Q 20

Soit E le point de $\mathcal{E}$ défini par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.
Puisque $A \neq B$, on a $C \neq E$, les droites (AB) et (CE) sont parallèles.
On a donc :

$$(AB) \parallel (CD) \iff (CE) \parallel (CD)$$
$$\iff D \in (CE)$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{R}\ \ \overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{CE}$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{R}\ \ \overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}.$$

Q 21

1) Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ deux vecteurs de $P_{\vec{u},\vec{v}}$: il existe 4 nombres réels a, b, c et d tels que :

$$\vec{u}_1 = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v}_1 = c\vec{u} + d\vec{v}.$$

Soient α et β deux nombres réels et $\vec{w}$ le vecteur égal à $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1$. On a :

$$\vec{w} = \alpha(a\vec{u} + b\vec{v}) + \beta(c\vec{u} + d\vec{v})$$
$$= (\alpha a + \beta c)\vec{u} + (\alpha b + \beta d)\vec{v}$$

donc : $\vec{w} \in P_{\vec{u},\vec{v}}$.

2) Le plan vectoriel $P_{\vec{u}_1,\vec{v}_1}$ de base $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$. D'après le 1) :

$$P_{\vec{u}_1,\vec{v}_1} \subset P_{\vec{u},\vec{v}}.$$

Montrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à $P_{\vec{u}_1,\vec{v}_1}$, ce qui prouvera l'inclusion : $P_{\vec{u},\vec{v}} \subset P_{\vec{u}_1,\vec{v}_1}$ d'après le 1), d'où l'égalité de ces deux plans vectoriels.
Puisque $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ ne sont pas colinéaires ils sont tous deux non nuls; $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ se traduit par $a\vec{u} + b\vec{v} \neq \vec{0}$, d'où : a ou b est non nul.
Supposons par exemple que a est non nul. On a :

$$\vec{u}_1 = a\vec{u} + b\vec{v}$$

d'où : $\vec{u} = \frac{1}{a}(\vec{u}_1 - b\vec{v})$

d'où : $\vec{v}_1 = \frac{c}{a}(\vec{u}_1 - b\vec{v}) + d\vec{v}$

ou encore :

$$\vec{v}_1 = \frac{c}{a}\vec{u}_1 + \frac{ad - bc}{a}\vec{v} \quad (1)$$

Par ailleurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ ne sont pas colinéaires donc, quel que soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1 = \vec{0} \implies (\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0).$$

Or, d'après le 1) :

$$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1 = (\alpha a + \beta c)\vec{u} + (\alpha b + \beta d)\vec{v}$$

comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :

$$(\alpha a + \beta c)\vec{u} + (\alpha b + \beta d)\vec{v} = \vec{0}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \alpha b + \beta d = 0. \end{cases}$$

d'où l'équivalence des systèmes :

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \alpha b + \beta d = 0 \end{cases}$$

et :

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0. \end{cases}$$

D'après Cramer cette équivalence est vérifie si et seulement si le déterminant du 1er système est non nul : $ad - bc \neq 0$.

Ainsi de (1) on déduit :

$$\vec{v} = \frac{1}{ad - bc}(a\vec{v}_1 - c\vec{u}_1)$$

donc $\vec{v} \in P_{\vec{u}_1, \vec{v}_1}$, on a alors :

$$\vec{u} = \frac{1}{a}\vec{u}_1 - \frac{b}{ad - bc}(a\vec{v}_1 - c\vec{u}_1)$$

donc : $\vec{u} \in P_{\vec{u}_1, \vec{v}_1}$.
Ainsi : $P_{\vec{u}_1, \vec{v}_1} = P_{\vec{u}, \vec{v}}$.

Q 22

1) Puisque α, β et γ sont non tous les trois nuls, supposons par exemple α non nul. On a :

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}$$

$\vec{u}$ appartient à un plan vectoriel contenant $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant coplanaires examinons les deux cas selon que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ou ne sont pas colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe deux nombres réels α et β non tous les deux nuls tels que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ en prenant $\gamma = 0$ on a :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0},$$

et : $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors ils sont la base du plan vectoriel $P_{\vec{u},\vec{v}}$; comme $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, $\vec{w} \in P_{\vec{u},\vec{v}}$ c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

ou encore : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + (-1)\vec{w} = \vec{0}$.
En prenant : $\gamma = -1$ on a :

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Q 23

- Si $P_{\vec{u}',\vec{v}'} = P_{\vec{u},\vec{v}}$ alors toute combinaison linéaire de $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$, et en particulier $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$, appartiennent à $P_{\vec{u},\vec{v}}$; ainsi :

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ d'une part, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$ d'autre part sont coplanaires.

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ sont coplanaires et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ aussi, alors $\vec{u}' \in P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $\vec{v}' \in P_{\vec{u},\vec{v}}$.
D'après la question 21 puisque $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont deux vecteurs non colinéaires de $P_{\vec{u},\vec{v}}$, le plan vectoriel de base $(\vec{u}', \vec{v}')$ est $P_{\vec{u},\vec{v}}$ autrement dit $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ sont égaux

Q 24

1) Puisque $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de $P_{\vec{v},\vec{w}}$, et que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires on a : $\vec{u} \in P_{\vec{v},\vec{w}}$.
Donc toute combinaison linéaire de $\vec{u}$, c'est-à-dire tout élément de $D_{\vec{u}}$, appartient à $P_{\vec{v},\vec{w}}$.
Ainsi : $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$.

2) Si $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$ alors, en particulier $\vec{u} \in P_{\vec{v},\vec{w}}$, donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

3) Soit C le point $\mathcal{E}$ défini par $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$.
$\vec{u}$ est non nul donc les points B et C sont distincts.
Les droites (D) et (BC) qui ont même vecteur directeur, sont parallèles.

- Si (D) est parallèle à $\mathcal{P}$ alors (BC) est aussi parallèle à $\mathcal{P}$.
Comme $B \in \mathcal{P}$, la droite (BC) est donc incluse dans $\mathcal{P}$; en particulier $C \in \mathcal{P}$. Comme on a :

$$C \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{BC} \in P_{\vec{v},\vec{w}}$$

on en déduit : $\vec{u} \in P_{\vec{v},\vec{w}}$.

- Si $D_{\vec{u}} \subset P_{\vec{v},\vec{w}}$, alors d'après le 2) :

$\vec{u} \in P_{\vec{v},\vec{w}}$, c'est-à-dire $C \in \mathcal{P}$,

d'où : $(BC) \subset \mathcal{P}$.
La droite (D) est parallèle à la droite (BC) incluse dans $\mathcal{P}$ donc (D) est parallèle à $\mathcal{P}$.

Q 25

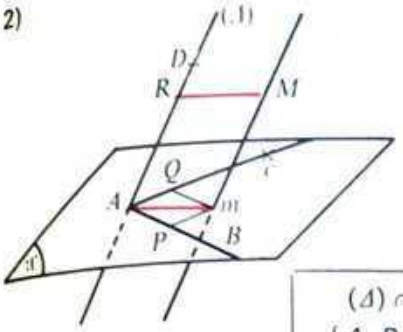
On sait que deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites affines parallèles à l'autre et sécantes entre elles.
Or, puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites $D(A, \vec{u})$ et $D(A, \vec{v})$ sont deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$. Ainsi on a :
$\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si les droites $D(A, \vec{u})$ et $D(A, \vec{v})$ sont parallèles à $\mathcal{P}'$.
D'après la question 24, on a donc :
$\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent au plan vectoriel $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$.
Or d'après la question 21, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ alors $P_{\vec{u},\vec{v}} = P_{\vec{u}',\vec{v}'}$.
La réciproque de ceci étant évidente, on a donc :
$\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si :

$$P_{\vec{u},\vec{v}} = P_{\vec{u}',\vec{v}'}.$$

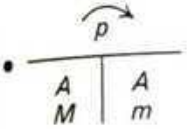
Q 26

1) Si A, B et C sont alignés sur une droite (Δ_1), alors (Δ_1) et le point D sont situés dans un même plan ce qui contredit l'hypothèse : A, B, C et D sont non coplanaires.
De même si $A = D$ alors, comme 3 points A, B et C sont dans un plan, les 4 points seraient coplanaires.
Donc A, B et C déterminent un unique plan : $\mathcal{P}$.
A et D déterminent une unique droite (Δ).
(Δ) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$ sinon, puisque $A \in (\Delta) \cap \mathcal{P}$, (Δ) serait incluse dans $\mathcal{P}$ et les points A, B, C et D coplanaires.
On a donc (Δ) est sécante à $\mathcal{P}$ en A.

2)



$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}$
$\{A, B, C, m\} \subset \mathcal{P}$
$D \in (\Delta) \quad (Mm) \parallel (\Delta)$



A et m appartiennent à $\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{Am}$ appartient au plan vectoriel $P_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$ associé à $\mathcal{P}$: ainsi il existe deux nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{Am} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

• De même M et m sont sur la parallèle à (Δ) passant par M donc puisque $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur directeur de (Δ), $\overrightarrow{mM}$ appartient à la droite vectorielle de base $\overrightarrow{AD}$ c'est-à-dire : il existe un nombre réel z tel que :

$$\overrightarrow{mM} = z\overrightarrow{AD}.$$

• D'après Chasles :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Am} + \overrightarrow{mM}$$

d'où le résultat.

• Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux triplets de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$$

ainsi on a :

$$(x-x')\overrightarrow{AB} + (y-y')\overrightarrow{AC} + (z-z')\overrightarrow{AD} = \vec{0}. \quad (1)$$

Comme (Δ) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires donc l'égalité (1) entraîne :

$$(x-x', y-y', z-z') = (0, 0, 0)$$

c'est-à-dire que les triplets (x, y, z) et (x', y', z') sont égaux.
Ainsi on a montré que : quel que soit le point M de $\mathcal{E}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de membres réels tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}.$$

3) Le vecteur $\vec{u}$, égal à $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ est donné, donc il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Q 27

Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z).
$q_1(M)$ est le point P de coordonnées $(x, 0, 0)$.
$p_2(M)$ est le point m_2 de coordonnées $(x, 0, z)$.
$p_3(m_2)$, c'est-à-dire $p_3 \circ p_2(M)$ est le point de coordonnées $(x, 0, 0)$ c'est donc le point P.
Ainsi $p_3 \circ p_2(M) = q_1(M)$.
Comme ceci est vrai pour tout M de $\mathcal{E}$, on a : $p_3 \circ p_2 = q_1$.
Avec les mêmes notations :
$p_3(M)$ est le point m_3 de coordonnées $(x, y, 0)$.
$p_2(m_3)$, c'est-à-dire $p_2 \circ p_3(M)$ est le point de coordonnées $(x, 0, 0)$ c'est donc encore $q_1(M)$, d'où :

$$p_2 \circ p_3 = p_3 \circ p_2.$$

De même puisque $p_1(m_3) = Q$ et $p_3(m_1) = Q$ on a :

$$q_2 = p_1 \circ p_3 = p_3 \circ p_1$$

et, puisque $p_1(m_2) = R$ et $p_2(m_1) = R$, on a :

$$q_3 = p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1.$$

Q 28

I est défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\iff \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

d'où :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$
$$= \frac{1}{2}[(x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_Ak) + (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_Bk)]$$
$$= \frac{x_A + x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\vec{j} + \frac{z_A + z_B}{2}\vec{k}.$$

Ainsi les coordonnées de I dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\frac{x_A + x_B}{2}, \quad \frac{y_A + y_B}{2} \quad \text{et} \quad \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, puisque :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB},$$

on a :

$$\overrightarrow{AB} = -(x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) + (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k})$$
$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Q 29

On sait (question 21 et sa réciproque) que les deux plans vectoriels $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ sont égaux si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$, c'est-à-dire :

$$P_{\vec{u},\vec{v}} = P_{\vec{u}',\vec{v}'}$$

si et seulement si ($\vec{u}'$, $\vec{v}'$ et $\vec{u}$ sont coplanaires et $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ et $\vec{v}$ sont coplanaires).
D'où $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$ ne sont pas égaux si et seulement si ($\vec{u}'$, $\vec{v}'$ et $\vec{u}$ sont non coplanaires ou $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ et $\vec{v}$ sont non coplanaires).
Supposons, par exemple, que $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ et $\vec{u}$ soient non coplanaires, alors, par définition, ($\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{u}$) est une base de $\mathcal{W}$.
Tout vecteur de $\mathcal{W}$, et en particulier $\vec{v}$ est une combinaison linéaire unique de ces trois vecteurs : il existe un unique triplet (a, b, c) de nombres réels tels que :

$$\vec{v} = a\vec{u}' + b\vec{v}' + c\vec{u}.$$

Soit $\vec{w}$ un vecteur de l'intersection des plans vectoriels $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$.
Il existe donc quatre nombres réels x, y, x' et y' tels que :

$$\vec{w} = x\vec{u} = y\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{w} = x'\vec{u}' + y'\vec{v}'$$

d'où : $x\vec{u} + y\vec{v} = x'\vec{u}' + y'\vec{v}'$

et en remplaçant $\vec{v}$ par $a\vec{u}' + b\vec{v}' + c\vec{u}$ on obtient :

$$(x + cy)\vec{u} + (ay - x')\vec{u}' + (by - y')\vec{v}' = \vec{0}$$

or $\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont non coplanaires, d'où :

$$\begin{cases} x + cy = 0 \\ ay - x' = 0 \\ by - y' = 0. \end{cases}$$

Ainsi $x = -cy$, d'où :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= -cy\vec{u} + y\vec{v} \\ &= y(-c\vec{u} + \vec{v}). \end{aligned}$$

Notons $\vec{u}_0$ le vecteur $(-c\vec{u} + \vec{v})$ (parfaitement déterminé par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$) et $D_{\vec{u}_0}$ la droite vectorielle de base $\vec{u}_0$.
On a :

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{W} \quad (\vec{w} \in P_{\vec{u},\vec{v}} \cap P_{\vec{u}',\vec{v}'} \Longrightarrow \vec{w} \in D_{\vec{u}_0})$$

car on a :

$$\vec{w} \in D_{\vec{u}_0} \Longleftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R} \quad \vec{w} = y\vec{u}_0).$$

Par ailleurs tout élément de la droite vectorielle $D_{\vec{u}_0}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc appartient à $P_{\vec{u},\vec{v}}$. De plus :

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 &= -c\vec{u} + \vec{v} \\ &= a\vec{u}' + b\vec{v}' \end{aligned}$$

d'où, tout élément de $D_{\vec{u}_0}$ est aussi élément de $P_{\vec{u}',\vec{v}'}$.
Ainsi on a :

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{W} \quad (\vec{w} \in D_{\vec{u}_0} \Longrightarrow \vec{w} \in P_{\vec{u},\vec{v}} \cap P_{\vec{u}',\vec{v}'}).$$

Autrement dit :

$$P_{\vec{u},\vec{v}} \cap P_{\vec{u}',\vec{v}'} = D_{\vec{u}_0}.$$

Q 30

On a : $M \in (D) \Longleftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u})$.
Or, on a :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k} = \\ t(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 1 = -t \\ z - 1 = 3t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = 3t + 1. \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$M \in (D) \Longleftrightarrow \left[\exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases}\right].$$

Q 31

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui sont non nuls, sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$\text{Or :} \quad \vec{u} = k\vec{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 = -k \\ 1 = 2k \\ -3 = k \end{cases}$$

puisque que ce système n'a pas de solution, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
En notant $P_{\vec{u},\vec{v}}$ le plan vectoriel de base ($\vec{u}$, $\vec{v}$) (donc associé à $\mathcal{S}$), on a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in P_{\vec{u},\vec{v}} \\ &\Longleftrightarrow \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}. \end{aligned}$$

Puisque :

$$\overrightarrow{AM} = (x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-2)\vec{k}$$

et :

$$t\vec{u} + t'\vec{v} = (2t - t')\vec{i} + (t + 2t')\vec{j} + (-3t + t')\vec{k}.$$

On a :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2t - t' \\ y + 1 = t + 2t' \\ z - 2 = -3t + t' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2t - t' + 1 \\ y = t + 2t' - 1 \\ z = -3t + t' + 2. \end{cases}$$

Ainsi on a :

$M \in \mathcal{E}$ équivaut à

$$\Leftrightarrow \left[\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = 2t - t' + 1 \\ y = t + 2t' - 1 \\ z = -3t + t' + 2 \end{cases} \right].$$

Q 32

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, les coordonnées, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$.

On a :

$M \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$$

et :

$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 2t - 3t' + 1 \\ y = 5t - 1 \\ z = 3t + 2t' + 2. \end{cases}$$

Ainsi la représentation paramétrique f du plan (ABC) est :

$$f : (t, t') \longmapsto (x, y, z)$$

avec : $\begin{cases} x = 2t - 3t' + 1 \\ y = 5t - 1 \\ z = 3t + 2t' + 2. \end{cases}$

2) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}) - (-3\vec{i} + 2\vec{k})$$

$$\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(4\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}\right) + (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= 5\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}.$$

Donc les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $5, \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

On a :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

$$f(t, t') = \left(5, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

et :

$$f(t, t') = \left(5, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3t' + 1 = 5 \\ 5t - 1 = \frac{3}{2} \\ 3t + 2t' + 2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ce dernier système est équivalent à :

$$\begin{cases} -3t' = 4 - 2t \\ t = \frac{1}{2} \\ 2t' = -\frac{1}{2} - 3t \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} -3t' = 3 \\ t = \frac{1}{2} \\ 2t' = -2 \end{cases}$

ou encore : $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t' = -1. \end{cases}$

Ainsi M est un point du plan (ABC).

3) On a :

$$f(t, t') = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 3t' + 1 \\ y = 5t - 1 \\ z = 3t + 2t' + 2 \end{cases}$$

et : $\begin{cases} x = 2t - 3t' + 1 \\ y = 5t - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t' = 2\left(\frac{y+1}{5}\right) - x + 1 \\ t = \frac{y+1}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{2y - 5x + 7}{15} \\ t = \frac{y+1}{5}. \end{cases}$$

Ainsi :

$$[\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad f(t, t') = (x, y, z)]$$

est équivalente à l'existence d'un couple (t, t') de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left[\begin{cases} t = \frac{y+1}{5} \\ t' = \frac{2y - 5x + 7}{15} \\ z = 3\left(\frac{y+1}{5}\right) + 2\left(\frac{2y - 5x + 7}{15}\right) + 2 \end{cases} \right]$$

Or la proposition :

$$\left[\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} t = \dfrac{y+1}{5} \\ t' = \dfrac{2y - 5x + 7}{15} \end{cases}\right]$$

est vraie quelles que soient les valeurs des nombres réels x et y.
Ainsi on a :

$$[\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad f(t, t') = (x, y, z)]$$

est équivalente à :

$$z = \frac{3y+3}{5} + \frac{4y - 10x + 14}{15} + 2$$

c'est-à-dire :

$$15z = 9y + 9 + 4y - 10x + 14 + 30$$

ou encore :

$$10x - 13y + 15z - 53 = 0.$$

Puisque les coordonnées de M sont 5, $\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$, calculons α où :

$$\alpha = 10 \cdot 5 - 13 \cdot \frac{3}{2} + 15 \cdot \frac{3}{2} - 53$$

$$\alpha = 50 - \frac{39}{2} + \frac{45}{2} - 53$$

$$= -3 + \frac{6}{2}$$

$$= 0.$$

Ainsi les coordonnées de M vérifient l'équation cartésienne trouvée du plan (ABC) : $M \in (ABC)$.

Q 33

Pour cela vérifions plutôt l'équivalence entre : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

et : $\begin{cases} bc' - b'c = 0 \\ ca' - c'a = 0 \\ ab' - a'b = 0. \end{cases}$

On a :

[$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires] est équivalent à :

$[\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad (\alpha, \beta) \text{ œ } (0, 0) \quad \text{et :} \quad \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}]$

or : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{cases} \alpha a + \beta a' = 0 \\ \alpha b + \beta b' = 0 \\ \alpha c + \beta c' = 0. \end{cases}$

Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si le système (S) :

$$(S) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \alpha a + \beta a' = 0 \\ \alpha b + \beta b' = 0 \\ \alpha c + \beta c' = 0 \end{cases}$$

a au moins une autre solution que $(0, 0)$.
Or ceci est vérifié si et seulement si chacun des systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) ci-dessous a au moins une autre solution que $(0, 0)$:

$$(S_1) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \alpha b + \beta b' = 0 \\ \alpha c + \beta c' = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \alpha c + \beta c' = 0 \\ \alpha a + \beta a' = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \alpha a + \beta a' = 0 \\ \alpha b + \beta b' = 0. \end{cases}$$

Et on sait que chacun de ces trois systèmes a au moins une autre solution que $(0, 0)$, si et seulement si, son déterminant est nul.
Ainsi on a :

[$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires] est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} bc' - b'c = 0 \quad \text{et} \quad ca' - ca' = 0 \\ \text{et} \quad ab' - a'b = 0 \end{bmatrix}.$$

On en déduit alors aisément le résultat demandé en passant à la négation.

Q 34

On a, avec les notations données :

$$M \in \mathcal{S} \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c' \end{cases}.$$

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires D_1 ou D_2 ou D_3 est non nul, supposons par exemple que D_3 soit différent de 0, alors on a :

$$\begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{b'(x - x_A) - a'(y - y_A)}{D_3} \\ t' = \dfrac{a(y - y_A) - b(x - x_A)}{D_3} \end{cases}$$

d'où, puisque :

$$\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} t = \dfrac{b'(x - x_A) - a'(y - y_A)}{D_3} \\ t' = \dfrac{a(y - y_A) - b(x - x_A)}{D_3} \end{cases}$$

est vraie quels que soient les membres réels a, b, c, a', b', c', x et y, on a (en remplaçant t et t' dans la 3e égalité) :

$M \in \mathcal{S}$ équivaut à

$$z - z_A = \frac{b'(x - x_A) - a'(y - y_A)}{D_3} c + \frac{a(y - y_A) - b(x - x_A)}{D_3} c'$$

c'est-à-dire :

$$M \in \mathcal{S} \iff D_3(z - z_A) = (b'c - bc')(x - x_A) + (ac' - a'c)(y - y_A)$$

ou encore, avec les notations utilisées :

$$M \in \mathcal{S} \iff D_1(x - x_A) + D_2(y - y_A) + D_3(z - z_A) = 0$$

on ferait de même si $D_1 \neq 0$ ou si $D_2 \neq 0$ en calculant t et t' en fonction respectivement de y et z, ou x et z.

Q 35

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} = p^2$$

or p est supposé non nul donc $D_1 \neq 0$; de ce fait $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x = -qt + (-r)t' + (-s) \\ y = pt + 0t' + 0 \\ z = 0t + pt' + 0 \end{cases}$$

donc c'est une représentation paramétrique du plan défini par les vecteurs de coordonnées $(-q, p, 0)$ et $(-r, 0, p)$ (c'est-à-dire $\vec{u}$ et $\vec{v}$) et le point A de triplet de coordonnées $(-s, 0, 0)$.

Q 36

Les plans vectoriels associés respectivement à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$ ont pour équations dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$22x - 11y + 10z = 0$$

et

$$19x + y + z = 0.$$

Ils ne sont donc pas égaux car ces équations ne sont pas équivalentes (par exemple (1, 2, 0) est solution de la première mais pas de la deuxième).
Les plans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles. Il suffit donc de vérifier que deux points distincts de (D) appartiennent à la fois à $\mathcal{S}$ et à $\mathcal{Q}$ pour conclure : $(D) = \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$.

On vérifie facilement que $A\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ (obtenue pour $t = -1$) sont dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$.

Q 37

Le quadrilatère $OLPR$ est un rectangle, les diagonales $[RL]$ et $[OP]$ sont donc isométriques.
Autre méthode : dans le plan (OIJ) le triangle ROL est rectangle en O et comme $\overrightarrow{OL} = x\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OR} = y\overrightarrow{OJ}$ et que le repère (O, I, J) est orthonormé, on a :

$$RL = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(de même $\overrightarrow{LP} = y\overrightarrow{OJ}$ et OLP rectangle en L, d'où $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$).
Ainsi on a : $OP = RL$.
Sur la figure le segment représentant $[OP]$ est de 1,9 cm, celui représentant $[RL]$ est de 5,2 cm, ils ne sont donc pas de même longueur.

2) On a : $PR = LO$ (car $OLPR$ rectangle).
De même : $UT = LO$ (car $UTOL$ est un rectangle) et :

$$LO = \|-x\overrightarrow{OI}\| = |x|$$

d'où : $PR = UT = |x|$.

Sur le dessin les deux segments représentés ont la même longueur de 2,1 cm.

Q 38

On sait que par une projection sur un plan $\mathcal{S}$ parallèlement à une droite (Δ), une droite non parallèle à (Δ) est transformée en une droite de $\mathcal{S}$; ainsi le projeté de (D) sur (H) parallèlement à (OK) est une droite de (H) qui contient les projetés des points de (D), en particulier a et b, c'est donc (d).
De même, puisque (D) n'est pas parallèle à (OI), son projeté sur (F) parallèlement à (OI) est une droite (d_1) de (F) qui contient les projetés a_1 et b_1 de A et B. L'image de (d_1) par la « rotation » est une droite qui contient les images de a_1 et b_1 c'est-à-dire a' et b', c'est donc (d').

Q 39

b' et c' sont en fait l'image par la « rotation » du point d'intersection de (D) et de (F).
Notons p la projection sur (H) parallèlement à (OK). On a :

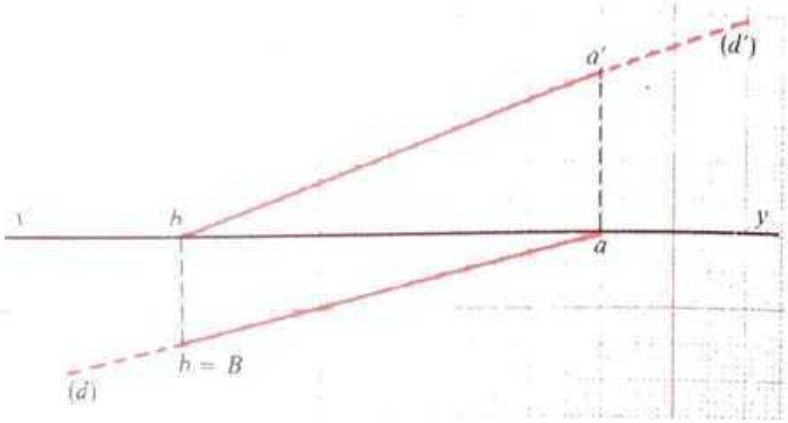
$$p(B) = b, \quad p(C) = c.$$

Puisque B et C sont distincts les droites (D_B) et (D_C) parallèles à (OK) et qui contiennent respectivement B et C sont parallèles et distinctes.
Leurs intersections respectives avec (H) sont b et c, qui sont donc distincts, et la droite (bc) est l'image par p de (BC) c'est-à-dire de (D). De plus ces deux droites (D_B) et (D_C) définissent un unique plan $\mathcal{S}$, qui, puisqu'il contient B et C contient (D).
L'intersection de $\mathcal{S}$ et de (H) est la droite (bc).
Or ce plan $\mathcal{S}$, qui contient les deux droites (D_B) et (D) sécantes en B et parallèles respectivement à (OK) et (OI), est parallèle au plan (OIK); les intersections avec le plan horizontal (H) de ces deux plans $\mathcal{S}$ et (OIK) sont donc deux droites parallèles, ainsi (bc) est parallèle à (OI).
On en déduit que (bc) est perpendiculaire à $(y'y)$, car dans le plan (H), les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculairès et (bc) est parallèle à (OI) donc perpendiculaire à (OJ); de plus (OJ) et $(y'y)$ sont deux notations de la même droite.

Q 40

Puisque B a pour cote 0, $B \in (H)$, ainsi $\{b\} = (yy) \cap (d')$ et b est le point de (d') situé sur la même ligne de rappel que b.
On a $b = B$ car B appartient à (H).

Puisque A a pour abscisse 0, $A \in (F)$ et son projeté horizontal a appartient à la fois à la ligne de terre $(y'y)$ et au projeté horizontal (d) de (D). Ainsi $\{a\} = (y'y) \cap (d)$.
On place alors a' : intersection du projeté frontal (d') de (D) et de la ligne de rappel de a.



Q 41

1) Dire que b' n'existe pas c'est dire que (d') est parallèle et disjointe à $(y'y)$, autrement dit tous les points de (D) ont la même cote (égale à l'ordonnée commune des points de (d') dans le repère (O, J, K) de l'épure).
Soient M et N deux points distincts de (D) de projetés horizontaux respectifs m et n, on a alors $Mm = Nn$ (= valeur absolue de la cote commune).

• Si (D) n'est pas incluse dans (H), alors $M \neq m$ et $N \neq n$, et les droites (Mm) et (Nn) sont parallèles à (OK) donc parallèles entre elles.
Ainsi le quadrilatère $MNnm$ est un parallélogramme donc (MN) est parallèle à (mn) autrement dit : (D) est parallèle à (d).

• Si (D) est incluse dans (H) alors on a : $(D) = (d)$.
Ainsi (D) est parallèle à (d) ; puisque (d) est incluse dans (H), (D) est parallèle à (H).

2) On fait le même principe : a n'existe pas revient à dire : (d) est parallèle à $(y'y)$, ou encore : tous les points de (D) ont même abscisse.
Notant m_1 et n_1 les projetés respectifs de M et N sur (F) parallèlement à (OI), on a : $Mm_1 = Nn_1$.

• Si (D) n'est pas incluse dans (F) alors les droites (Mm_1) et (Nn_1) sont parallèles, et MNn_1m_1 est un parallélogramme donc (D) est parallèle à son projeté (d_1) sur (F) parallèlement à (OI).

• Si (D) est incluse dans (F) alors $(D) = (d_1)$.
De (D) est parallèle à (d_1), on déduit que (D) est parallèle à (F).

3) Si a et b' n'existent pas alors (D) est parallèle à (F) et à (H) donc (D) est parallèle à la droite d'intersection de ces deux plans, qui est $(y'y)$.

Q 42

1) Puisque (D) est parallèle à (OIK) tous les points de (D) ont même ordonnée donc $a_2A = b_2B$ (égale à la valeur absolue de cette ordonnée commune).

• Si (D) est incluse dans (G) alors $A = a_2$ et $B = b_2$, le résultat est donc immédiat.

• Si (D) n'est pas incluse dans (G) alors $A \neq a_2$ et $B \neq b_2$; les droites (Aa_2) et (Bb_2) sont parallèles à (OJ) donc parallèles entre elles et distinctes.
Le quadrilatère ABb_2a_2 est un parallélogramme donc :

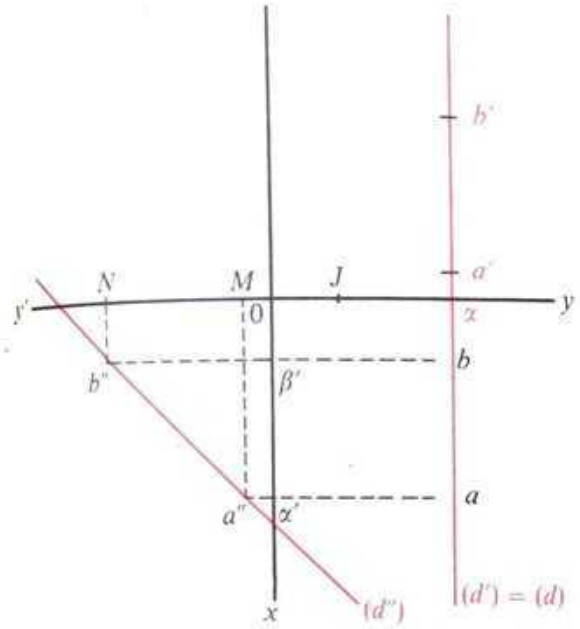
$$(AB) \parallel (a_2b_2) \quad \text{et} \quad AB = a_2b_2.$$

2) Le point α est l'intersection de la parallèle (δ) à (OI) contenant a et b, et de (F), c'est-à-dire, puisque a et b sont dans (H), $\{\alpha\} = (\delta) \cap (y'y)$.
Les droites (D) et (δ) sont dans un même plan $\mathcal{P}$ parallèle à (G), et la parallèle à (OK) passant par α est incluse dans $\mathcal{P}$, or elle contient a_1 et b_1 donc α est le projeté de a_1 et de b_1 sur (H) parallèlement à (OK).
• Si (D) est incluse dans (G) alors $A = a_2$ et $a = \alpha'$ donc α' est le projeté de a_2 sur (H) (de même β' est le projeté de b_2 sur (H)) parallèlement à (OK).
• Si (D) n'est pas incluse dans (G) alors (Aa_2) et $(a\alpha')$ sont parallèles à (OJ) donc entre elles et, comme $Aa_2 = a\alpha'$, $Aa\alpha'a_2$ est un parallélogramme donc α' est le projeté de a_2 sur (H) parallèlement à (OK). De même β' est le projeté de b_2 sur (H) parallèlement à (OH).

3) Là encore si (D) est incluse dans (G) le résultat est immédiat, sinon on considère le parallélogramme $Aa\alpha'a_2$ et on obtient $Aa = a_2\alpha'$ (de même $Bb = b_2\beta'$).

En travaillant dans le plan $\mathfrak{T}$, de même, sauf le cas particulier où A appartient à (F) où le résultat est évident. $Aa_1\alpha a$ est un parallélogramme d'où $Aa = a_1\alpha$ (de même $Bb = b_1\alpha$).

Q 43



A partir du point O on reporte les distances $\alpha a'$ et $\alpha b'$ en tenant compte du signe, sur la ligne de terre : on obtient les points M et N : en notant z_1 et z_2 les cotes respectives de a' et b', les points M et N sont les points de $(y'y)$ tels que $\overline{OM} = z_1$ et $\overline{ON} = z_2$, les points a'' et b'' de (d'') sont sur les parallèles à (Ox) passant par M et N :

$$(\overline{OM} = \overline{\alpha' a''} \quad \text{et} \quad \overline{ON} = \overline{\beta' b''}).$$

Les points a et b de (d) sont sur les parallèles à $(y'y)$ passant respectivement par a'' et b''.

Q 44

Soient M un point de (D) de projeté horizontal m, et N un point de (Δ) de projeté horizontal n. On note (D_M) et (D_N) les parallèles à (OK) menées respectivement par M et N.
On a, par définition, $\{m\} = (D_M) \cap (H)$ et $\{n\} = (D_N) \cap (H)$. Les droites (D_M) et (D_N) sont parallèles à (OK) donc parallèles entre elles et incluses respectivement dans $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}$, par définition de ces plans.
Le plan $\mathfrak{T}$ contient les deux droites (D) et (D_M) sécantes en M car (D) n'est pas verticale.
De même le plan $\mathfrak{Q}$ contient les deux droites (Δ) et (D_N) sécantes en N.
Puisque $(D) \parallel (\Delta)$ et $(D_M) \parallel (D_N)$ on a : $\mathfrak{T} \parallel \mathfrak{Q}$.
Le projeté horizontal (d) de (D) est l'ensemble des projetés des points de (D) sur (H) parallèlement à (OK), donc (d) contient m, et en considérant un autre point A de (D), (d) contient le projeté horizontal a de A, on a : $(d) = (am)$.

Or $\mathfrak{T}$ contient A et la droite parallèle à (OK) passant par A donc le point a, ainsi (d) est incluse dans $\mathfrak{T}$; comme (d) est aussi incluse dans le plan (H) et que $\mathfrak{T}$ et (H) sont distincts, on a :

$$\mathfrak{T} \cap (H) = (d).$$

De même on montre que :

$$\mathfrak{Q} \cap (H) = (\delta).$$

Ainsi (d) et (δ) sont les intersections des deux plans parallèles $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}$, avec (H) ; de ce fait on a : (d) est parallèle à (δ).
En utilisant la projection sur (F) parallèlement à (OI) et les projetantes respectives (D'_M) et (D'_N) de M et N, on montre aussi que les plans $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{Q}'$ sont parallèles, que (d_1) est incluse dans $\mathfrak{T}'$, puis $(d_1) = \mathfrak{T}' \cap (F)$, de même, que $(\delta_1) = \mathfrak{Q}' \cap (F)$.
Les droites (d_1) et (δ_1), intersection de deux plans parallèles avec (F), sont parallèles entre elles.

Q 45

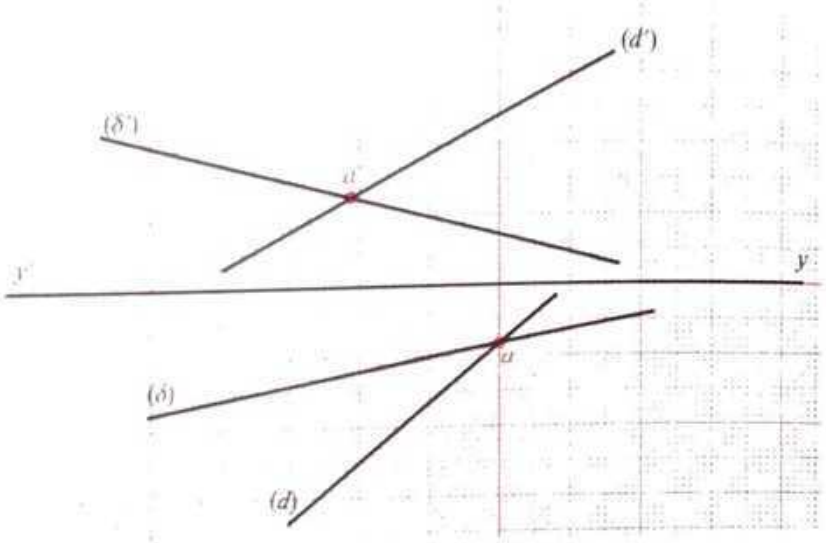
1) Avec les mêmes notations que dans la question 44, les droites (D_M) et (D_N) sont parallèles entre elles car à (OK), et contiennent respectivement les points m de (d) et n de (δ).
Le plan $\mathfrak{T}$ contient (d) (car $\mathfrak{T} \cap (H) = (d)$) et (D_M) (car $M \in (D)$ et $m \in (d)$) qui sont sécantes en m.
De même $\mathfrak{Q}$ contient (δ) et (D_N) qui sont sécantes en n.
Comme (d) est parallèle à (δ) et (D_M) est parallèle à (D_N), on a $\mathfrak{T}$ est parallèle à $\mathfrak{Q}$.
Le parallélisme de (d_1) et (δ_1), et de (D'_M) et $D'_N)$ entraîne, de même, le parallélisme de $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{Q}'$.

2) Puisque $(D) \subset \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}'$ les plans $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont soit sécants soit confondus. Ces deux plans sont définis par la droite (D) et, respectivement les droites (D_M) et (D'_M) qui sont parallèles à (OK) et (OI) respectivement, donc toutes deux parallèles à (OIK).
Ainsi $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont confondus, c'est-à-dire, ils sont parallèles, si et seulement si (D) aussi est parallèle à (OIK) c'est-à-dire si et seulement si (D) est de profil.
On a de même $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$ si et seulement si (Δ) est de profil.

3) Puisque (D) n'est pas de profil, les plans $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ ne sont pas confondus, ils sont donc sécants, or $(D) \subset \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}'$ d'où $(D) = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}'$.
De même puisque (Δ) n'est pas de profil, les plans $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ sont sécants selon (Δ).
Ainsi le plan $\mathfrak{T}'$, qui est parallèle à $\mathfrak{Q}'$, est sécant à $\mathfrak{Q}$.
Si $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{Q}$ sont sécants suivant la droite (D_1), alors puisque $\mathfrak{T}$ est parallèle à $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{T}'$ est sécant à $\mathfrak{T}$ suivant une droite parallèle à (D_1), or $\mathfrak{T}' \cap \mathfrak{T} = (D)$ d'où (D) est parallèle à (D_1). De même le plan $\mathfrak{Q}$ coupe les plans parallèles $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{Q}'$ suivants deux droites parallèles, ainsi (D_1) est parallèle à (Δ) (car $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Q}') = (\Delta)$).
Les droites (D) et (Δ), qui sont parallèles à (D_1), sont parallèles entre elles.

Q 46

D'après le théorème précédent (D) n'est pas parallèle à (Δ) en effet (d) n'est pas parallèle à (δ) (et (d') non parallèle à (δ') non plus).
On place les points a et a' sur l'épure.
Si les droites (D) et (Δ) sont sécantes, alors leur point d'intersection, A, a son projeté horizontal dans $(d) \cap (\delta)$ (c'est donc a) et son projeté frontal dans $(d') \cap (\delta')$ (c'est donc a') alors a et a' sont sur la même ligne de rappel.
Sur l'épure ce dernier résultat est faux, donc les droites (D) et (Δ) ne sont pas sécantes.
Ainsi les droites (D) et (Δ), qui sont ni parallèles, ni sécantes, sont non coplanaires.



Q 47

1) Un point M de coordonnées (x, y, z) de l'espace appartient à la trace horizontale de $\mathcal{S}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -2x + 2y - 5z + 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$-2x + 2y + 4 = 0 \quad \text{et} \quad z = 0$$

ou encore :

$$-x + y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad z = 0.$$

Ainsi la droite de (H) d'équation cartésienne $-x + y + 2 = 0$ est la trace horizontale de $\mathcal{S}$ (car $z = 0$ est une équation de (H)).
Le projeté horizontal de cette trace est la droite elle-même, et puisque son équation dans le repère (O, I, J) est $-x + y + 2 = 0$, il suffit de placer le point $\alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, commun avec $(y'y)$ et un autre point par exemple $p\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (et on rappelle p en p' sur $(y'y)$ c'est-à-dire en O).
Le projeté frontal de cette trace est $(y'y)$ car elle n'est pas parallèle à (OI), c'est donc $(\alpha p')$ tracée sur l'épure.

Ainsi la trace horizontale de $\mathcal{S}$ est la droite (αP) d'épure $(\alpha p, \alpha p')$. On remarque qu'en fait $(\alpha P) = (\alpha p)$.

2) De même on a :

$$M \in \mathcal{S} \cap (F)$$
$$\iff \begin{cases} -2x + 2y - 5z + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

Ainsi la trace frontale de $\mathcal{S}$ a pour équation dans (O, J, K) :

$$2y - 5z + 4 = 0.$$

De même en prenant α et un autre point Q de cette trace, on vérifie que $(\alpha q, \alpha q')$ est l'épure de la trace frontale (αQ) de $\mathcal{S}$.

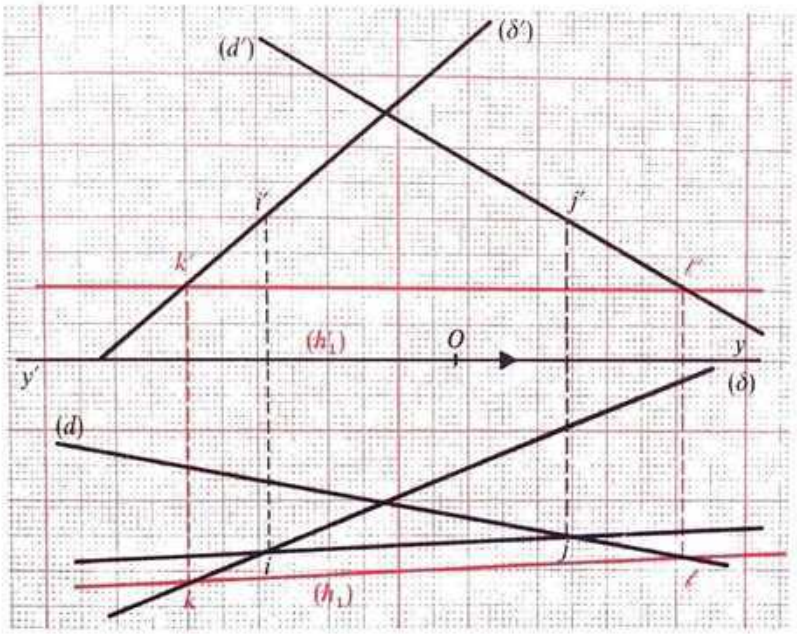
3) Sur l'épure on lit les coordonnées du point M d'épure (m, m'), à savoir 3, 1 et (environ) 1,2.
Or :

$$-2 \times 3 + 2 \times 1 - 5 \times 1{,}2 + 4 = -6$$

(ce qui est « très loin » de 0), le point M n'appartient pas à $\mathcal{S}$. Puisque A appartient à (αP) il suffit de rappeler a en a' sur $(\alpha p')$ (c'est-à-dire $(y'y)$).
Puisque B appartient à (αQ) il suffit de rappeler b' en b sur (αq) (c'est-à-dire $(y'y)$).

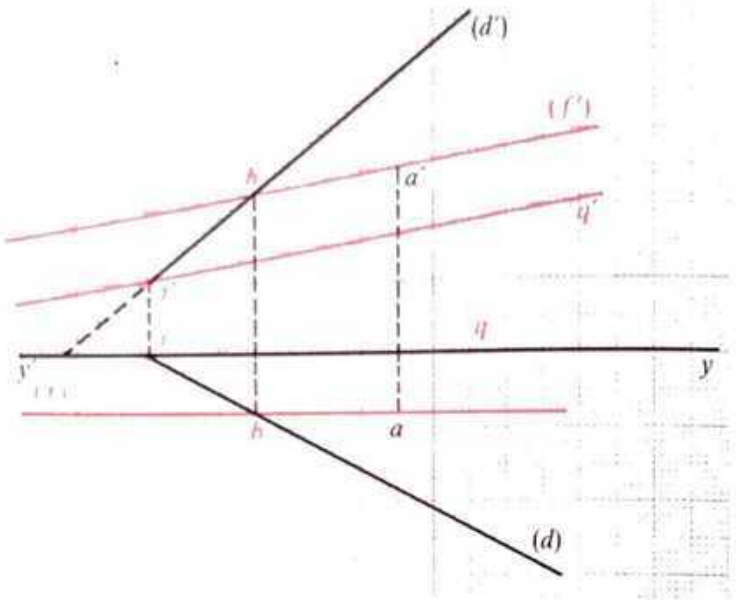
Q 48

Puisque les points d'intersection de (d) et (δ) d'une part, de (d') et (δ') d'autre part, sont sur la même ligne de rappel, les droites (D) et (Δ) sont sécantes. Ainsi (D) et (Δ) déterminent un plan.
Puisque sur l'épure la droite $(i'j')$ est parallèle à $(y'y)$ (elle a pour équation $z = 2$ dans (O, J, K)) la droite (IJ) est parallèle au plan (H) c'est-à-dire horizontale car contenue dans le plan d'équation $z = 2$, qui est parallèle à (H). I est un élément de (Δ), elle-même incluse dans $\mathcal{T}$ donc I appartient à $\mathcal{T}$. J est un élément de (D) elle-même incluse dans $\mathcal{T}$ donc J appartient à $\mathcal{T}$. Le plan $\mathcal{T}$, qui contient les deux points I et J, contient donc la droite (IJ).
Une horizontale du plan $\mathcal{T}$, est parallèle au plan (H), donc elle est parallèle à l'intersection de ces deux plans qui est la trace horizontale de $\mathcal{T}$.
En appliquant l'axiome d'Euclide dans le plan $\mathcal{T}$, on en déduit donc l'unicité de l'horizontale de $\mathcal{T}$ qui passe par I.
L'horizontale de cote 1 de $\mathcal{T}$ est la droite de projeté frontale (h'_1) (parallèle à $(y'y)$, d'équation $z = 1$ dans le repère (O, J, K)) (h'_1) coupe (d') et (δ') en l' et k' respectivement. On rappelle l' en l sur (d), et k' en k sur (δ), la droite (kl) est le projeté horizontal (h_1) de l'horizontale de cote 1. On remarque : $(h_1) \,/\!/\, (ij)$. Toutes les horizontales d'un plan sont parallèles entre elles car elles sont parallèles à la trace horizontale de ce plan.

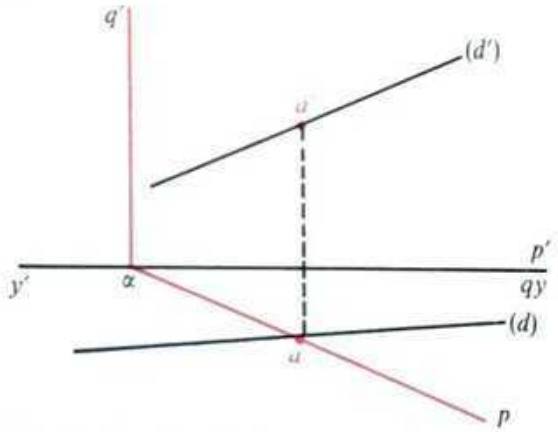


Q 49

A n'appartient pas à (D) car sinon on aurait : $a \in (d)$ et $a' \in (d')$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi le plan $\mathcal{T}$ est bien déterminé.
Soit (f, f') l'épure d'une droite frontale (Δ) de $\mathcal{T}$ passant par A.
Puisque cette droite (Δ) est parallèle au plan frontal, tous ses points ont même abscisse : celle de A; donc son projeté horizontal (f) est la droite parallèle à $(y'y)$ passant par a.
La droite (D) n'est pas frontale, et les droites (d) et (f) sont sécantes en un point b, que l'on rappelle en b' sur (d'). Le point B d'épure (b, b') est le point d'intersection de (D) et (Δ).
Le projeté frontal (f') de (Δ) est donc la droite $(a'b')$.
Cette droite frontale de $\mathcal{T}$ passant par A est unique, d'après le tracé que l'on vient de faire de son épure, d'ailleurs c'est l'unique droite passant par A et parallèle à la droite d'intersection de $\mathcal{T}$ et du plan frontal (F), c'est-à-dire à la trace frontale (αQ) du plan $\mathcal{T}$.
Pour tracer cette trace frontale (αQ), il suffit donc de tracer la parallèle à la droite frontale (Δ) passant par un point connu de cette trace. Or (αQ) contient le point T trace frontale de la droite (D), plaçons donc l'épure (t, t') de ce point T.
Puisque T est le point d'intersection de (D) et du plan frontal, le point t est donné par l'intersection de (d) et de $(y'y)$. On rappelle alors t en t' sur (d'), et on obtient l'épure $(\alpha q, \alpha q')$ de (αQ) en traçant respectivement la parallèle à (f) par t (c'est-à-dire $(y'y)$) et la parallèle à (f') passant par t' (le point α d'intersection de $(t'q')$ et $(y'y)$ n'apparaît pas sur la figure : il est en-dehors de l'épure).

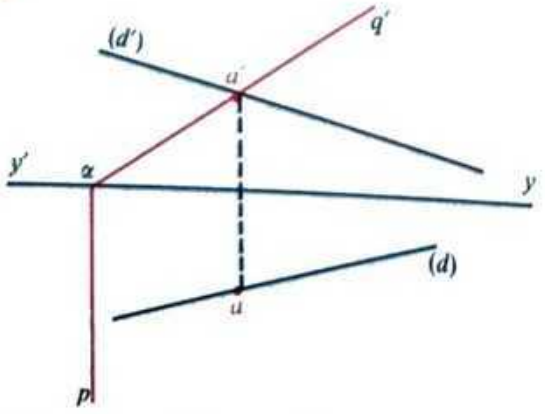


Q 50



Puisque $(\alpha P) = \mathfrak{V} \cap (H)$, tous les points de $\mathfrak{V}$ ont leurs projetés horizontaux sur la droite (αP) ; en particulier le point *a*, projeté horizontal de *A*, appartient à $(d) \cap (\alpha P)$ car *A* appartient à (D) et $\mathfrak{V}$. Comme on a : $(\alpha P) = (\alpha p)$, on place le point *a* d'intersection de (d) et (αp), et on rappelle *a* en *a'* sur (d').

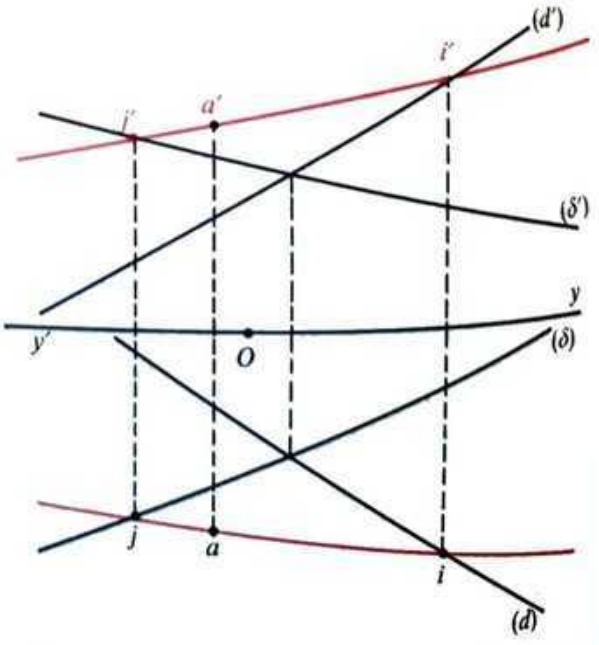
Q 51



Puisque $(\alpha Q) = \mathfrak{B} \cap (F)$, tous les points de $\mathfrak{B}$ ont leurs projetés frontaux sur la droite (αQ). En particulier le point *A* qui appartient à $\mathfrak{B}$, et à (D), a son projeté frontal *a'*, à la fois sur $(\alpha q')$ et (d'). On rappelle alors *a'* en *a* sur (d).

Q 52

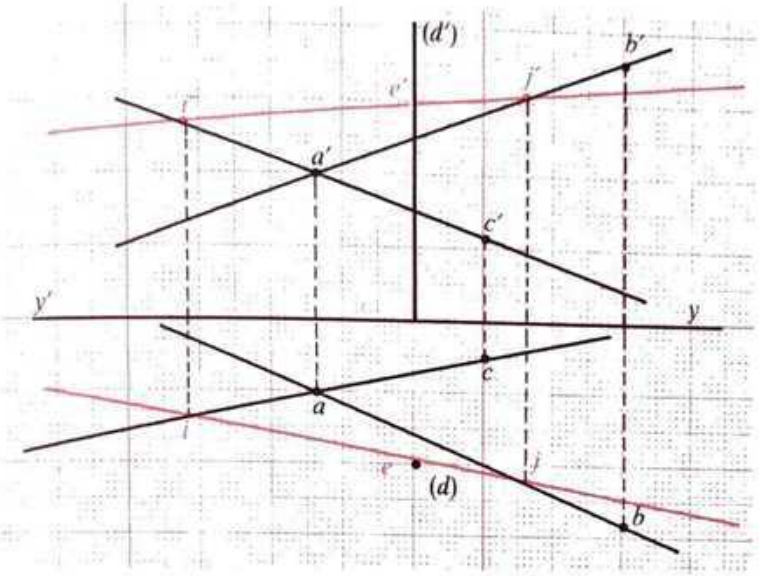
Les points *i* et *j* appartenant respectivement à (d) et (δ), on obtient *i'* et *j'* en rappelant respectivement *i* sur (d') et *j* sur (δ'). La droite (IJ) est ainsi définie par $(ij, i'j')$. Le point *A* appartient à (IJ) donc *a'* appartient à $(i'j')$. Il suffit de rappeler *a* sur cette droite.



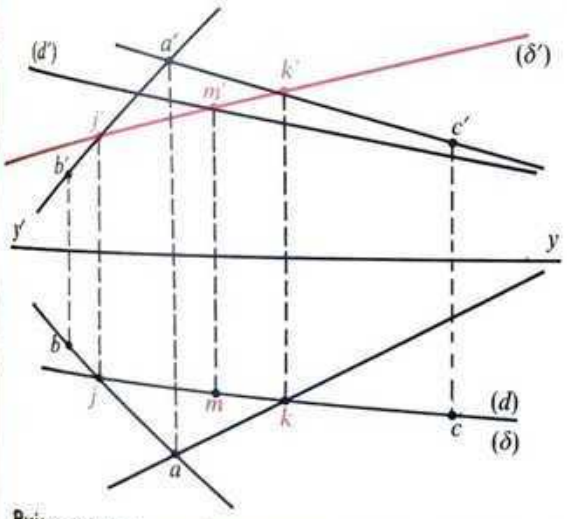
Q 53

On a $(d) = \{e\}$ car (D) est verticale donc tous ses points, et en particulier E, sont projetés sur la trace horizontale de (D), qui est confondue avec le projeté horizontal (d) de (D).

On utilise une droite auxiliaire (IJ) du plan (ABC) qui coupe (D) en E : on trace donc une droite (ij) qui passe par e et sécante en i à (ac) et en j à (ab). On rappelle i en i' sur $(a'c')$ et j en j' sur $(a'b')$. Puisque E appartient à (IJ) et (D), e' est le point d'intersection de $(i'j')$ et (d') (ou bien on rappelle e en e' sur $(i'j')$.



Q 54



Puisque $\mathcal{U}$ est un plan vertical, tous ses points ont leurs projetés horizontaux sur une même droite qui est sa trace horizontale. Or (D) est incluse dans $\mathcal{U}$ donc ses points ont leurs projetés sur la trace horizontale de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire : (d) est la trace horizontale de $\mathcal{U}$.

Le point J, d'intersection de (AB) avec $\mathcal{U}$, a pour projetés j et j' avec : j appartient à (ab) et j appartient à (d). On rappelle alors j en j' sur $(a'b')$.

Le point K appartient à (AC) et $\mathcal{U}$ donc son projeté horizontal k appartient à (ac) et (d). On rappelle alors k sur $(a'c')$ pour obtenir le projeté frontal k' de K. Puisque J appartient à (AB), il appartient au plan (ABC), de même K appartient au plan (ABC) car il est sur la droite (AC). Or ces deux points sont distincts et ils appartiennent à la fois à (ABC) et à $\mathcal{U}$ donc :

$$(\Delta) = (KJ).$$

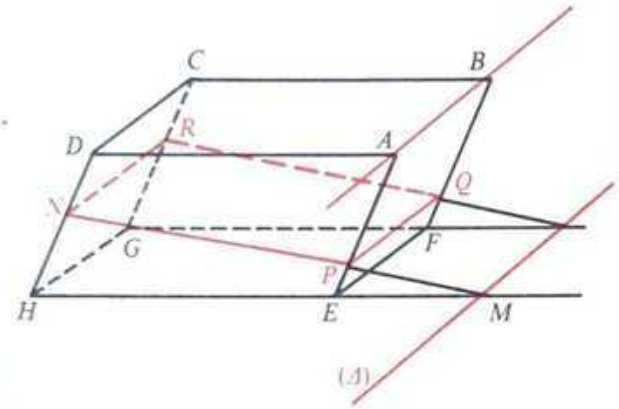
Ainsi les projetés de (Δ) sont (δ) et (δ') où $(\delta') = (h'j')$ et $(\delta) = (kj) = (d)$. Le projeté frontal m' de M est le point d'intersection de (d') et (δ') ; le projeté horizontal m de M, s'obtient alors en rappelant m' sur (δ).

Résultats ou indications des exercices

E 1

1) Montrer que si (AB) et (D') sont coplanaires, alors B appartient à $\mathcal{P}$.

2) Raisonnement de géométrie plane.

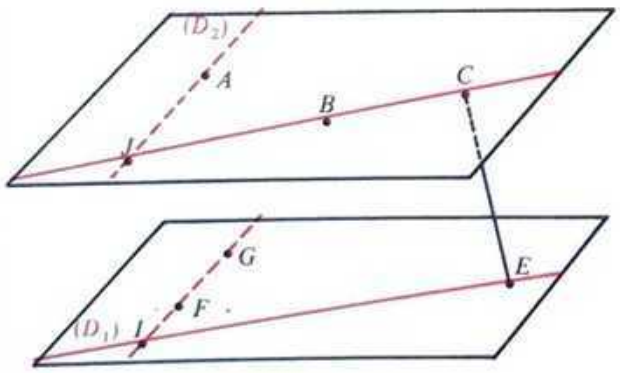


E 3

1) Montrer que l'intersection (Δ) de $\mathcal{P}$ et de (HEF) est parallèle à (AB).

2) Pour trouver P : travailler dans le plan (AHM). Pour trouver Q montrer que : $(PQ) \parallel (AB)$. Pour trouver R travailler dans le plan (BCG).
Pour prouver que $NPQR$ est un parallélogramme montrer que les côtés $[NR]$ et $[PQ]$ sont de même longueur et de supports parallèles.

E 4



1) Montrer que (D_1) est parallèle à (BC) et passe par E.

2) Même raisonnement que pour la première question ici : $(D_2) \parallel (FG)$.

3) $(AFG) \cap (EBC) = (IJ)$ ne pas oublier de remarquer que : $(EBC) \neq (AFG)$.

E 5

Les droites parallèles et distinctes (D_1) et (D_2) déterminent un plan $\mathcal{R}$.
Montrer que les droites $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{R}$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{R}$ sont parallèles.

E 6

Utiliser les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (D_1) et (D_2) et tels que (D) leur soit parallèle :
$(D'_1) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}$, $(D'_2) = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}$.

E 7

1) Montrer que I est le milieu de $[BH]$. Montrer avec l'énoncé de Thalès que I' est le milieu de $[BC]$.

2) Même raisonnement avec I milieu de $[AG]$.

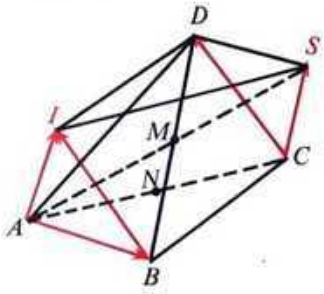
E 9

1) Étudier les intersections respectives des plans (ABE) et $(ABCD)$ avec les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.

2) Utiliser les projetés de bipoints équipollents.

E 12

1) Utiliser par exemple le point I tel que : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CD}$.



E 19

1) $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AF} = \vec{i} + \vec{k}$ $\overrightarrow{FC} = \vec{j} - \vec{k}$

$\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$.

2) Utiliser $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires pour montrer que : $\overrightarrow{BE} \notin P_{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{FC}}$.

3) Choisir deux vecteurs de $P_{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EG}}$ n'appartenant pas à $P_{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{FC}}$.

E 20

Utiliser le théorème du translaté d'un bipoint, des égalités de plans vectoriels et de droites vectorielles.

E 21

Utiliser le résultat de la question 18 (comme pour E 20).

E 22 : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

E 23 : $\alpha = 1$.

E 24 : $S = \mathbb{R}$.

E 25 : $\alpha = 0$.

E 26 : $S = \mathbb{R}$.

E 29

1) $(0, -1, -1)$.

2) Droites parallèles et distinctes.
3) Droites non coplanaires.
4) Droites confondues.

E 35

Montrer que (D) et (D'), dont on déterminera une représentation paramétrique sont sécantes en $I\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

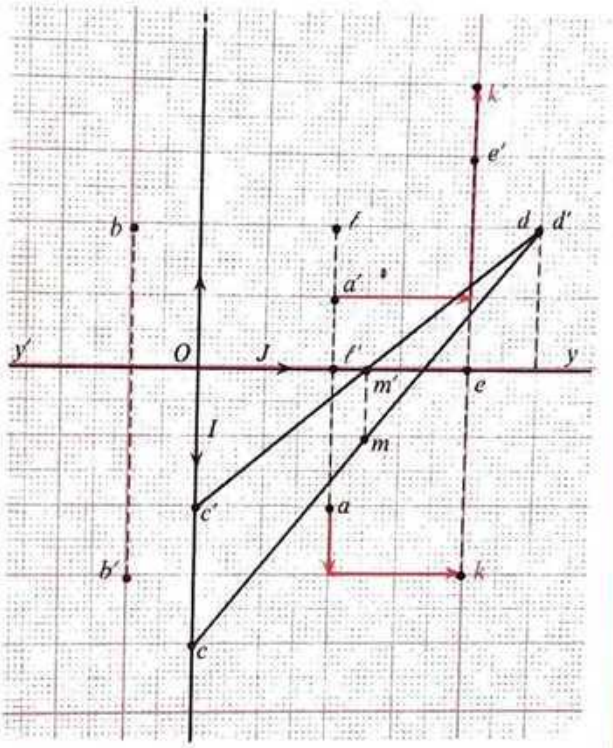
Équation des plans vectoriels associés.

E 39

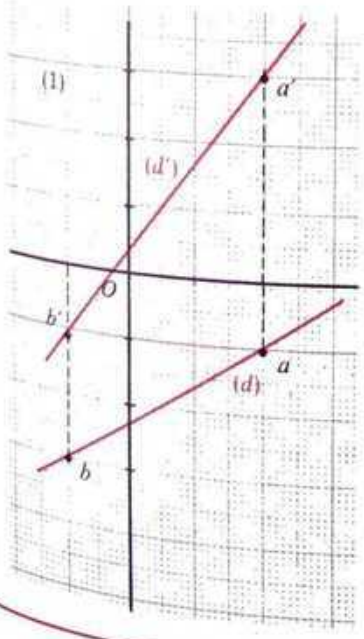
$C \in IV$, $D \in II$, $E \in (F)$, $L \in (H)$

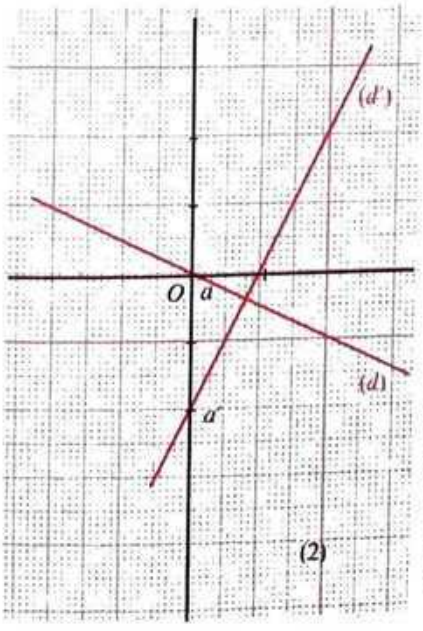
$M\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

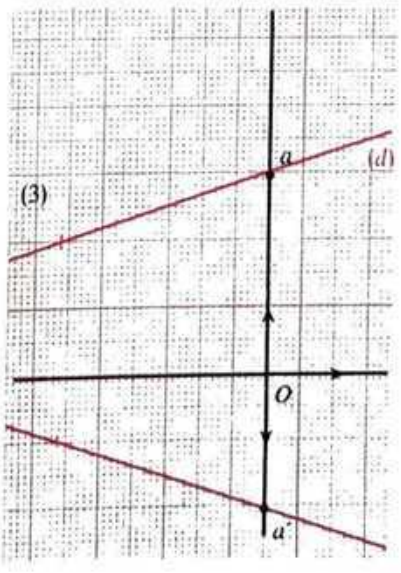
m est le milieu de $[dc]$, m' est le milieu de $[d'c']$.



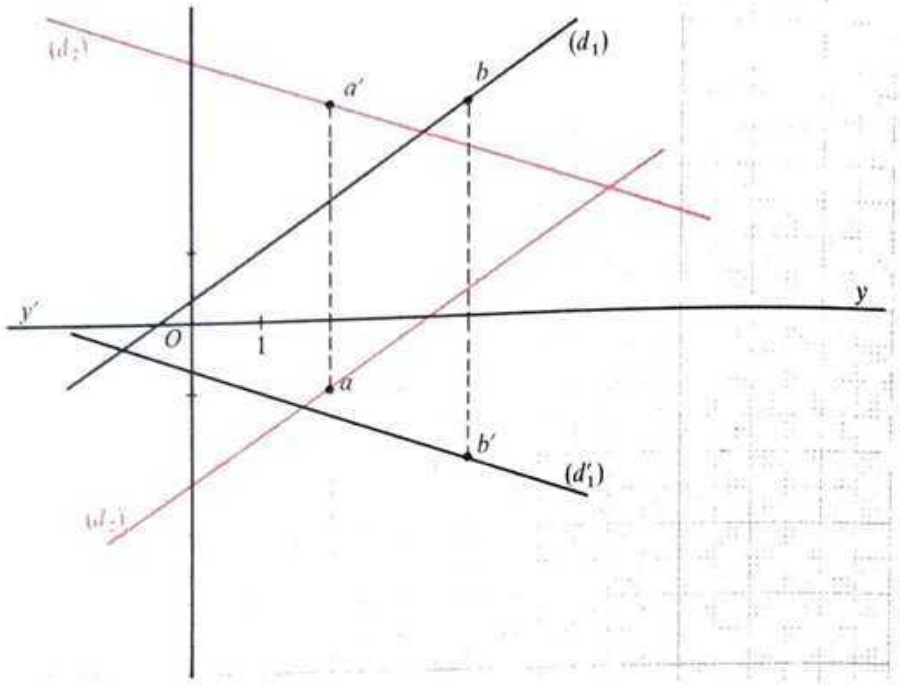
E 40



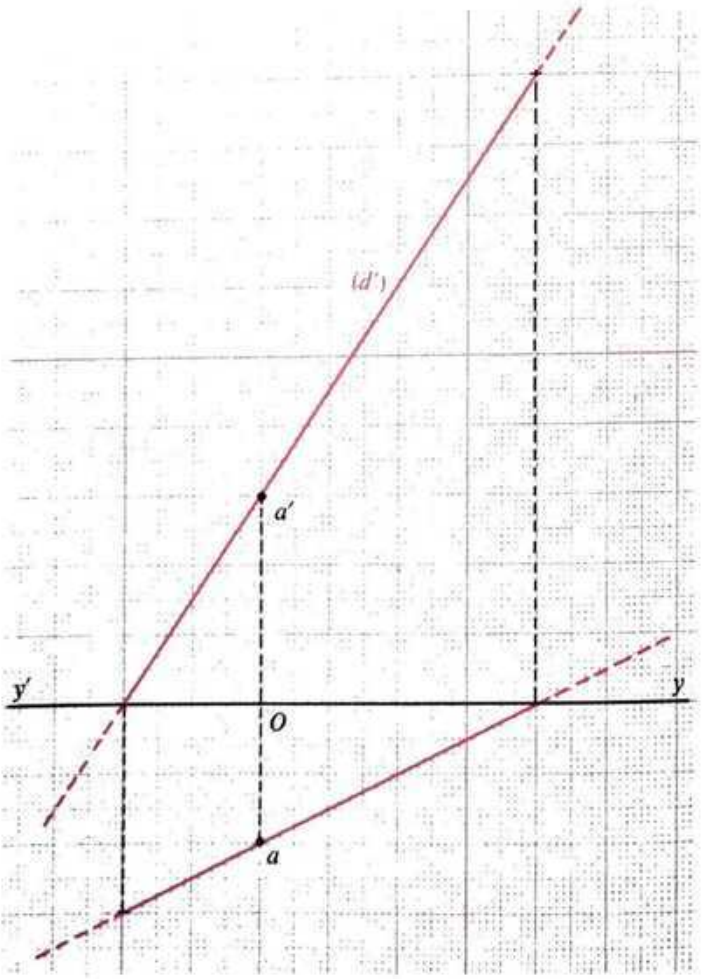


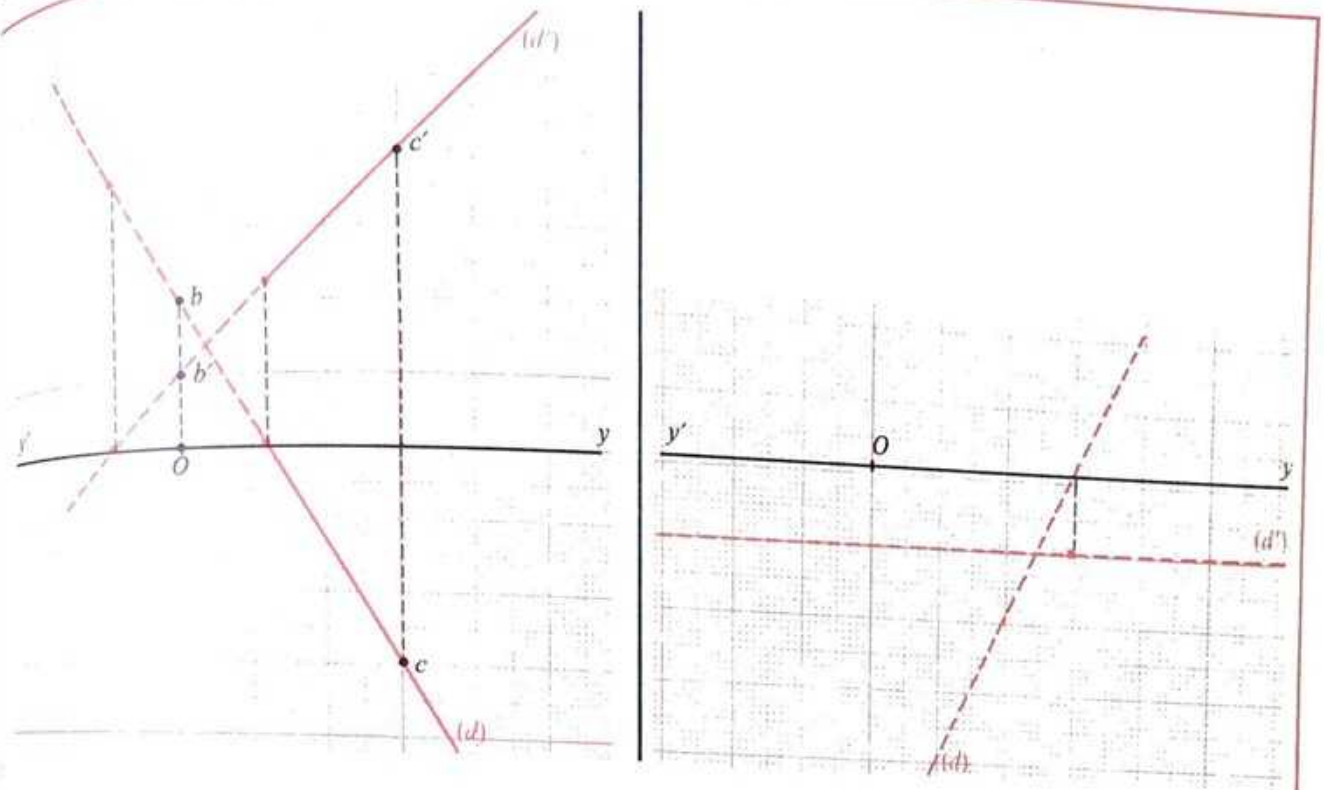


E 42

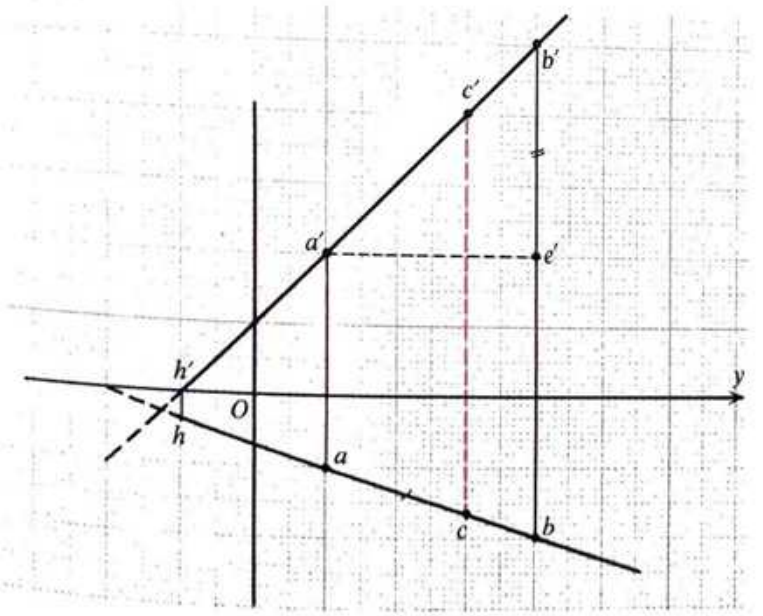


E 44



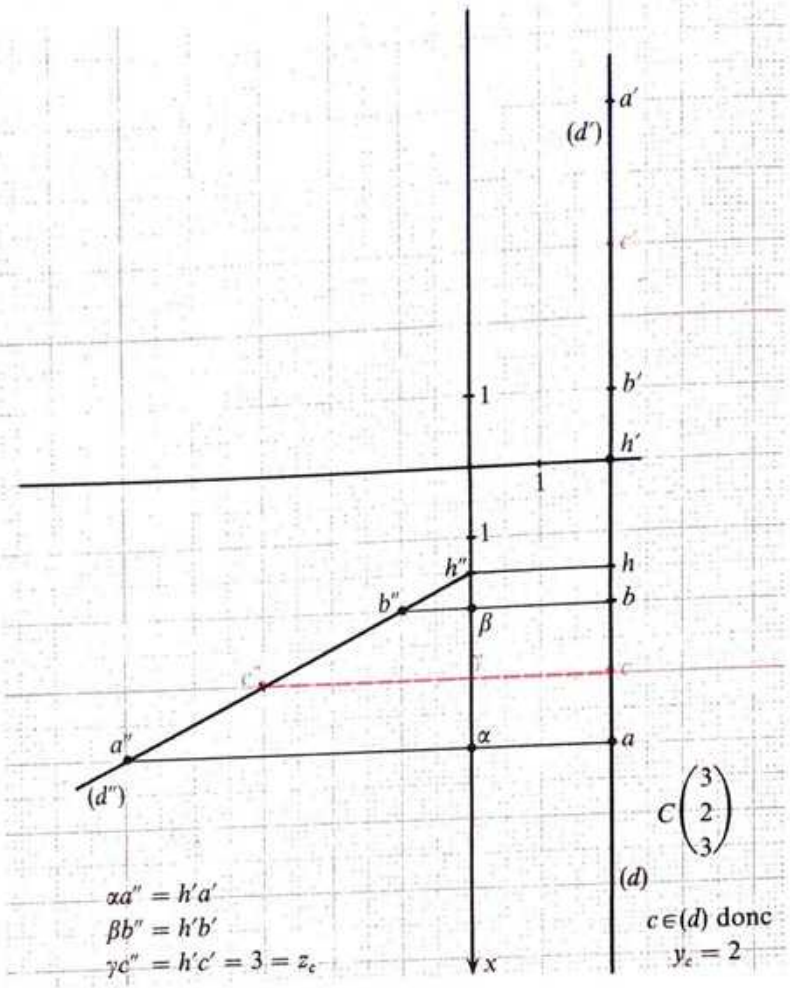


E 47



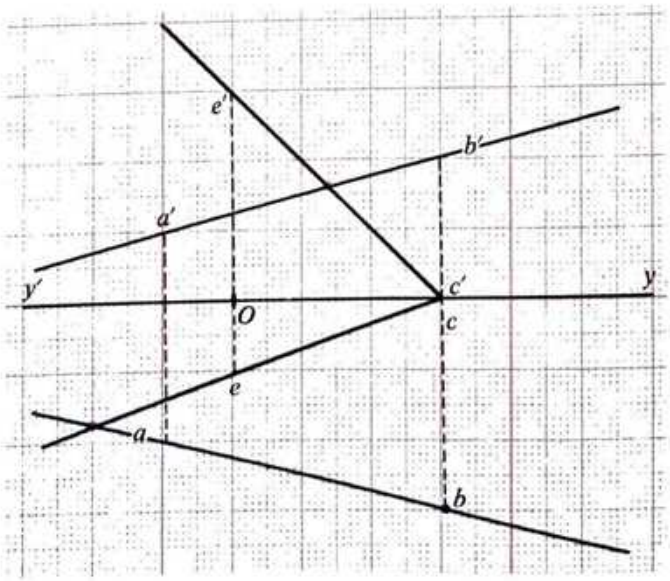
$C\begin{pmatrix}5/3\\3\\4\end{pmatrix}$, sur l'épure $x_c \simeq 1{,}7$, $y_c = 3$ et $z_c = 4$.

E 48

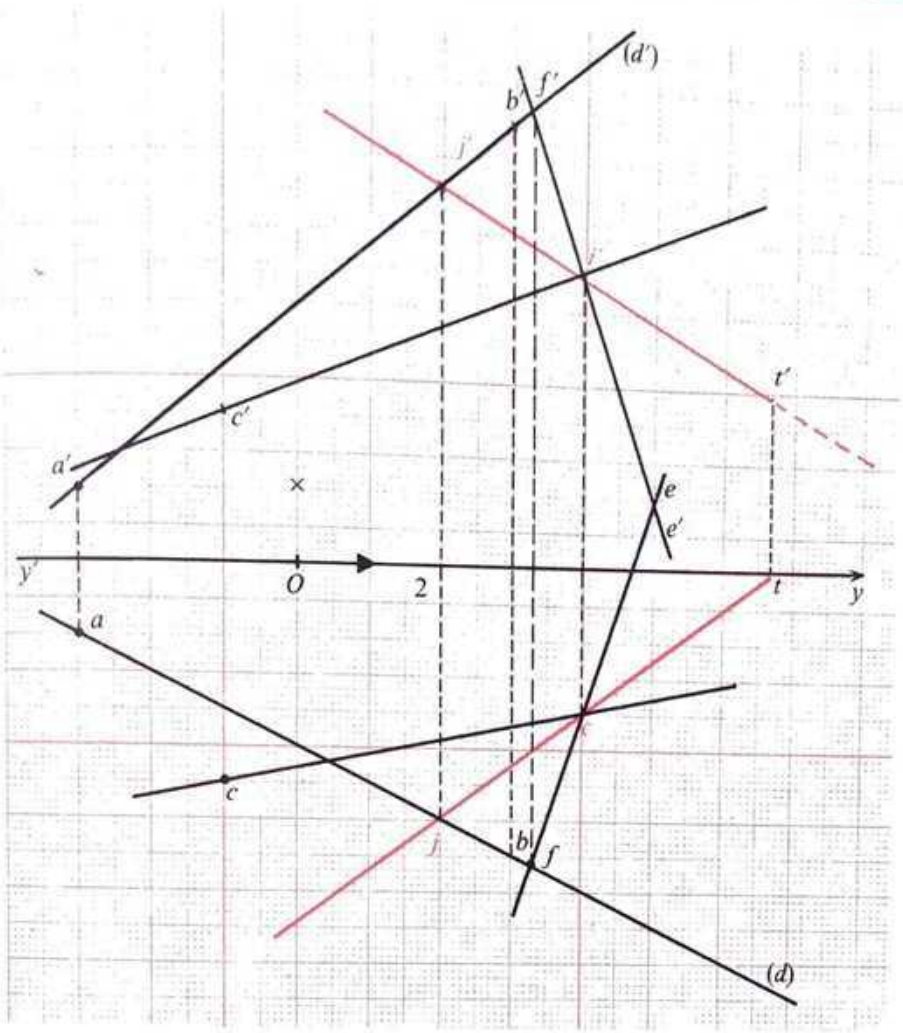


E 49

Les points *A*, *B*, *C* et *E* ne sont pas coplanaires d'après l'épure ci-dessous :



E 50

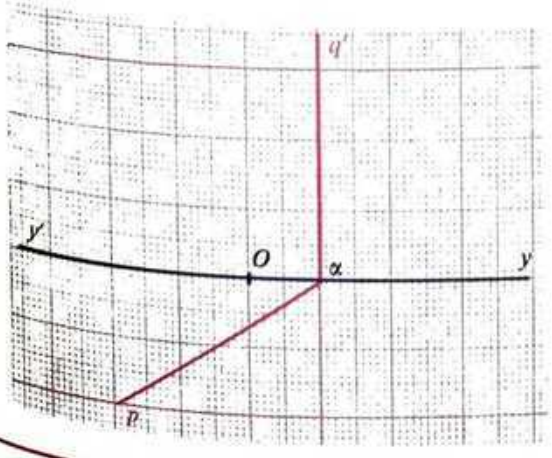


$x_T = 0 \quad y_T \simeq 6{,}6 \quad z_T \simeq 2{,}5 \quad z_E \simeq 0{,}8.$

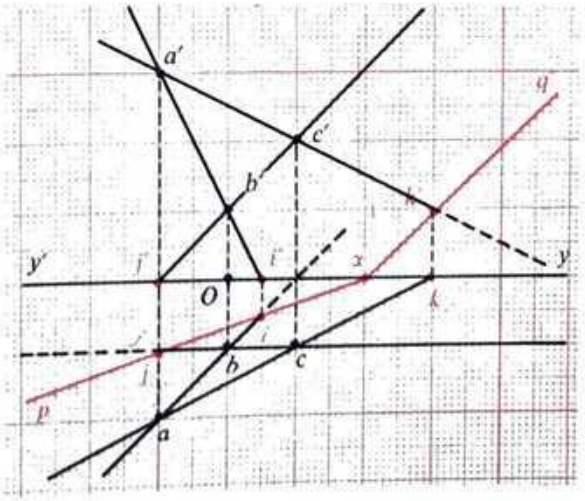
Résultats par la géométrie analytique :

$$y_T = \frac{20}{3} \quad z_T = \frac{22}{9} \quad z_E = \frac{13}{15}.$$

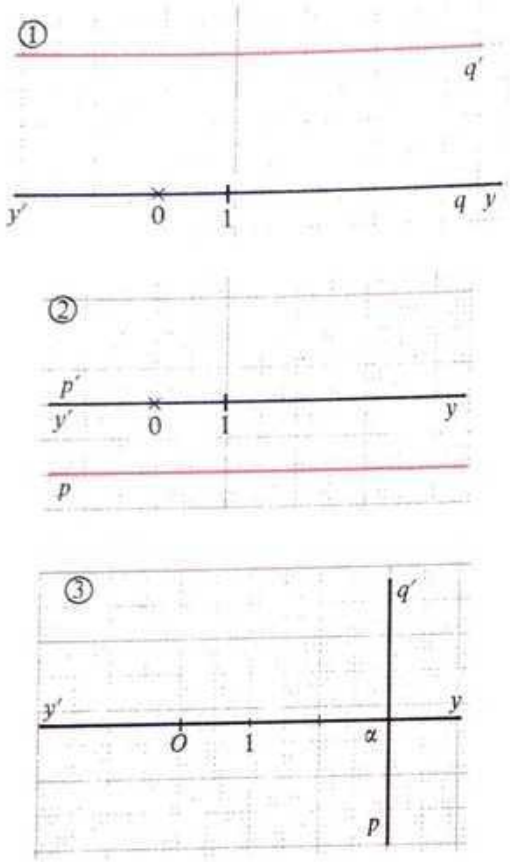
E 52



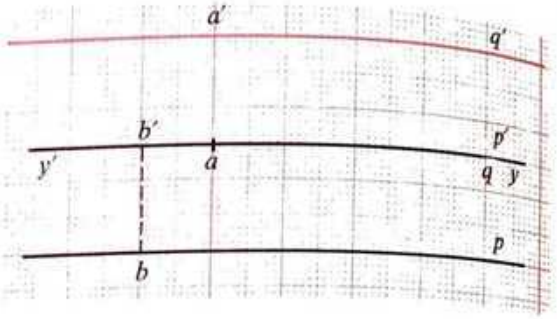
E 53



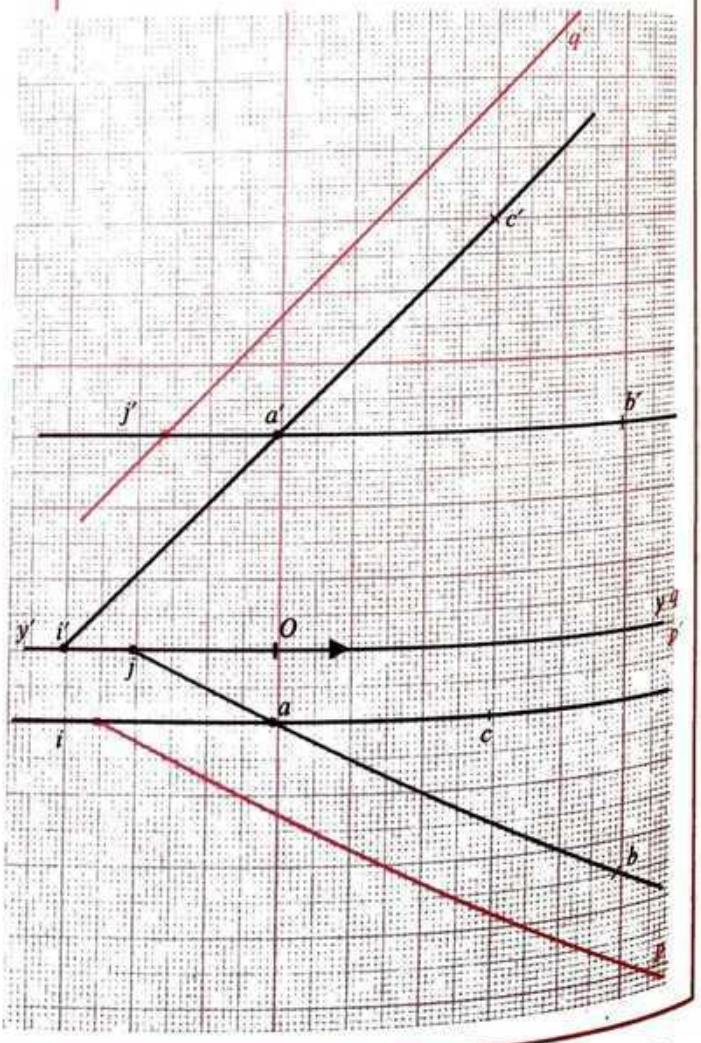
E 54



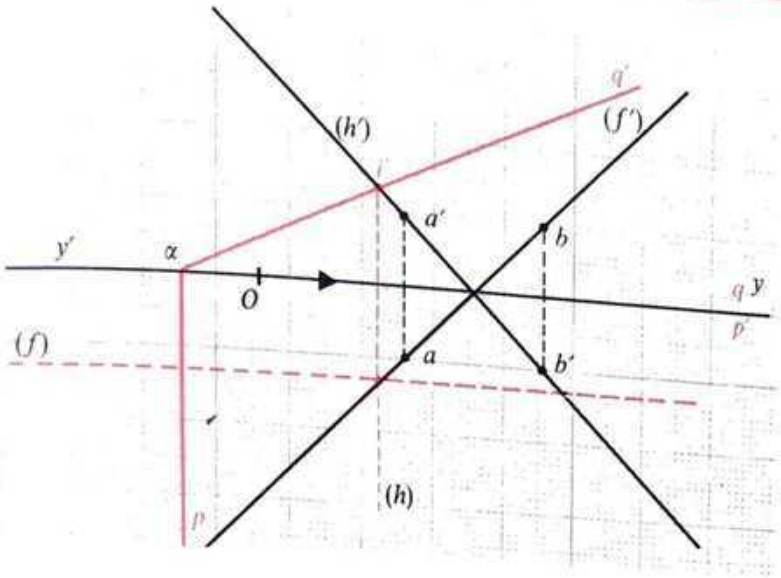
E 55



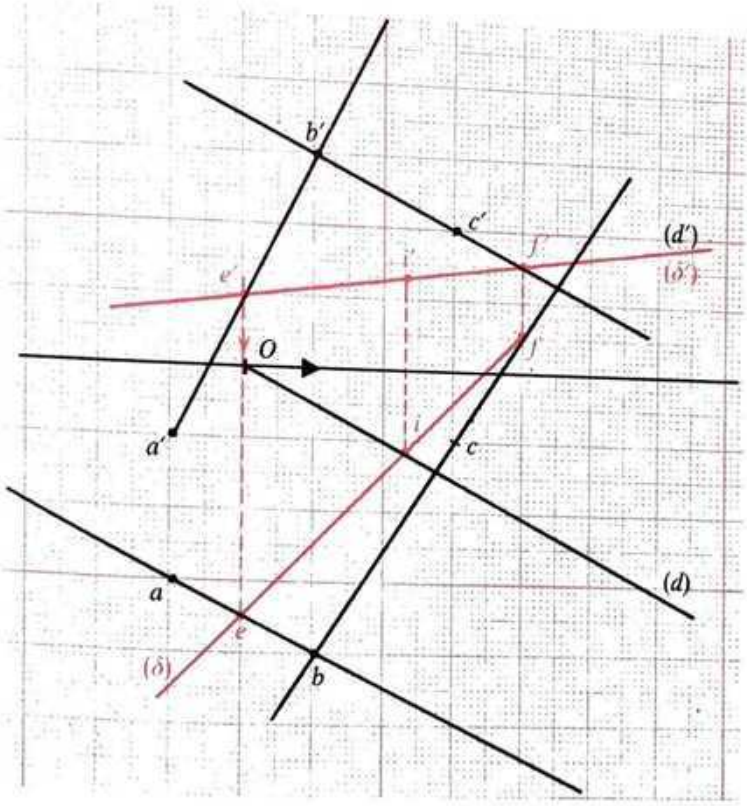
E 56



E 57



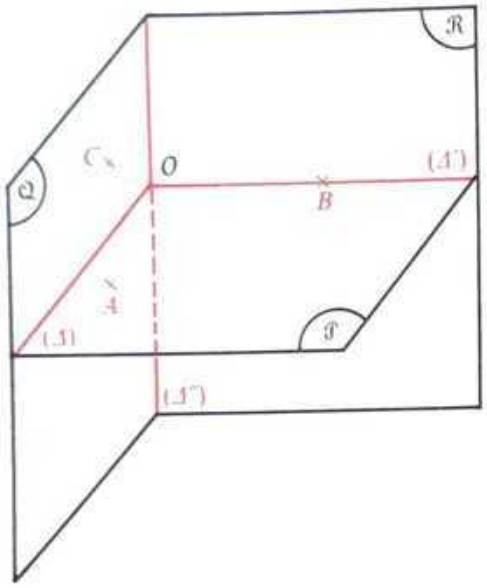
E 58



$x_I \simeq 1{,}2 \quad y_I \simeq 2{,}3 \quad z_I \simeq 1{,}3.$

Exercices

59.



$\mathcal{T} \cap \mathcal{Q} = (\Delta)$ $\quad \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = (\Delta')$
$\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = (\Delta'')$ $\quad A \in \mathcal{T}$ $\quad B \in (\Delta')$
$C \in \mathcal{Q}$

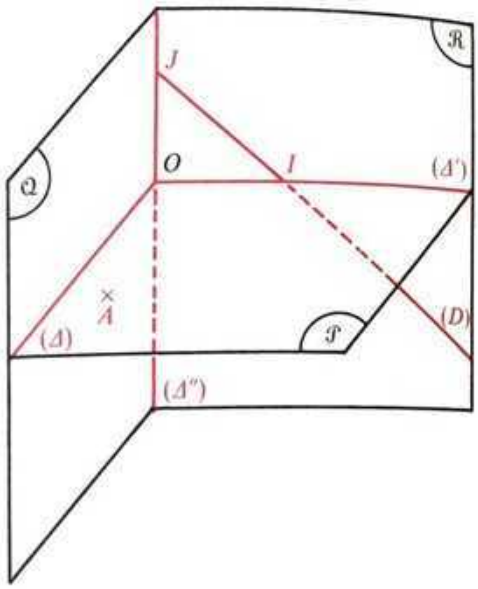
Soient $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois plans sécants deux à deux, O le point commun à ces trois plans, (Δ), (Δ') et (Δ'') les droites d'intersection respectivement des plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Q}$, des plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ et des plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, A, B et C trois points appartenant respectivement à $\mathcal{T} - (\Delta')$, (Δ') et $\mathcal{Q} - (\Delta)$.

1) Vérifier que A, B et C sont non alignés.
On note $\mathcal{S}$ le plan déterminé par ces trois points.

2) Déterminer les intersections du plan $\mathcal{S}$ avec les plans $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

3) Étudier l'existence de l'intersection de la droite (AC) avec le plan $\mathcal{R}$. Placer ce point d'intersection sur la figure ci-dessus.

60.



$\mathcal{T} \cap \mathcal{Q} = (\Delta)$, $\quad \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \Delta'$
$\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = (\Delta'')$, $\quad A \in \mathcal{T}$, $\quad B \in \mathcal{Q}$
$(D) \cap (\Delta') = \{I\}$, $\quad (D) \cap (\Delta'') = \{J\}$

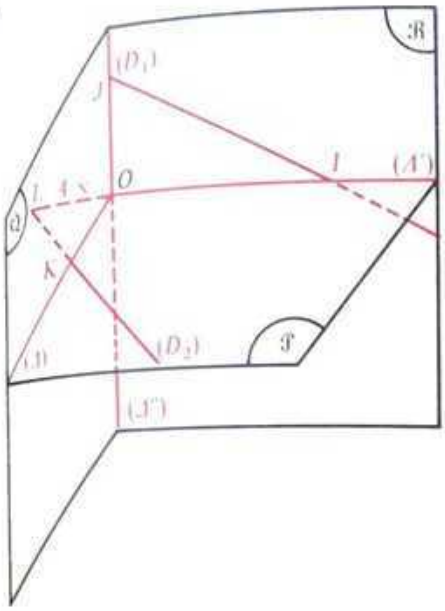
Les plans $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ et les droites (Δ), (Δ'), (Δ'') sont définis comme dans l'exercice précédent. Soient (D) une droite incluse dans $\mathcal{R}$ et coupant (Δ') en I et (Δ'') en J, et A un point de $\mathcal{T}$ n'appartenant ni à (Δ) ni à (Δ').

1) Construire sur la figure ci-dessus la droite (D') passant par A, incluse dans $\mathcal{T}$ et coplanaire avec (D).

2) Soit B un point de $\mathcal{Q}$. Pourquoi A et B sont-ils distincts?
Dans le cas où la droite (D') est sécante à (Δ) au point K, à quelle condition nécessaire et suffisante sur B, la droite (AB) est-elle coplanaire avec (D)? Étudier alors l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{R}$. Donner le programme de construction du point d'intersection quand il existe.

3) Dans le cas où (D) et (AB) ne sont pas coplanaires, étudier l'intersection de (AB) avec $\mathcal{R}$. Donner le programme de la construction du point d'intersection quand il existe.

61.



$\mathcal{T} \cap \mathcal{Q} = (\Delta)$;	$\mathcal{T} \cap \mathcal{R} = (\Delta')$
$\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = (\Delta'')$	$A \in \mathcal{Q}$
$(D_1) \cap (\Delta') = \{I\}$	$(D_1) \cap (\Delta'') = \{J\}$
$(D_2) \cap (\Delta) = \{K\}$	$(D_2) \cap (\Delta') = \{L\}$

Les plans $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ et les droites (Δ), (Δ'), (Δ'') sont définies comme dans l'exercice 59. Soient (D_1) une droite de $\mathcal{R}$ sécante à (Δ') en I et à (Δ'') en J, et (D_2) une droite de $\mathcal{T}$ sécante à (Δ) en K et à (Δ') en L.

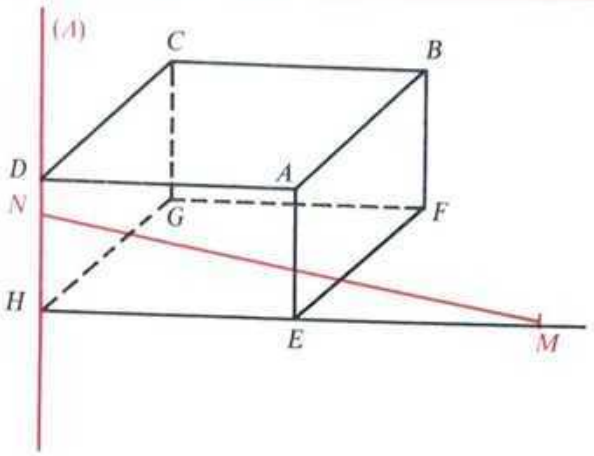
1) Montrer que (D_1) n'est pas parallèle à (D_2). A quelle condition (D_1) et (D_2) sont-elles sécantes?

2) Soit A un point de $\mathcal{Q}$ n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2).

a) Dans le cas où (D_1) et (D_2) sont coplanaires, combien peut-on tracer de droites passant par A et sécantes à (D_1) et à (D_2) selon la position du point A?

b) Dans le cas où (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires, montrer que s'il existe une droite (D) passant par A et sécante à (D_1) et à (D_2), alors cette droite est l'intersection des plans définis respectivement par A et (D_1), A et (D_2).
On note (D'_1) et (D'_2) les droites passant par A et parallèles respectivement à (D_1) et (D_2).
Montrer que si (D'_1) et (D_2) sont sécantes ou (D'_2) et (D_1) sont sécantes alors (D) n'existe pas.
Montrer que si (D'_1) n'est pas sécante à (D_2) et (D'_2) n'est pas sécante à (D_1) alors (D) existe et est unique. Construire (D) dans le cas de la figure ci-dessus.

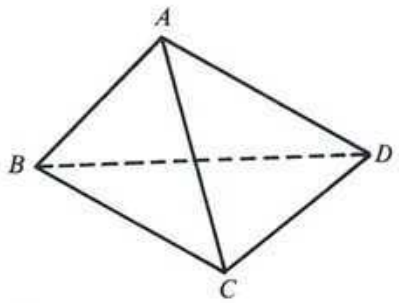
62. Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle de base $ABCD$ carrée et tel que $AE = \dfrac{AB}{2}$.



$N \in (\Delta) \quad M \in (HE)$

On note (Δ) la droite contenant le segment $[HD]$, M le point de (HE) tel que E est le milieu du segment $[HM]$ et N un point de (Δ). Soit $\mathcal{T}$ le plan contenant la droite (MN) et tel que la droite (BD) lui soit parallèle.
On note I le point tel que D soit le milieu de $[HI]$. Discuter selon que N appartient à $[DI)$, à $[DH]$ ou n'appartient pas à $]HI)$, le nombre de côtés du polygône obtenu comme intersection du plan $\mathcal{T}$ avec les faces du parallélépipède (noter x la distance NH et trouver les valeurs de x pour lesquelles on a 5 côtés).

63.



Soient $ABCD$ un tétraèdre et I un point du segment $[AB]$ différent de A et de B. Soit $\mathcal{T}$ un plan passant par I et tel que les droites (BD) et (AC) sont parallèles à $\mathcal{T}$.

1) Construire les points d'intersection J, K et L de $\mathcal{T}$ avec les segments $[AD]$, $[BC]$ et $[CD]$.

2) Montrer que $IJLK$ est un parallélogramme.

64. Soient a, b et c trois nombres réels tels que ni $a + b$ ni $a + b + c$ ne soit nul, A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{E}$, $\mathcal{T}$ un plan et (D) une droite sécante à $\mathcal{T}$. On considère la projection p sur $\mathcal{T}$ parallèlement à (D). Soient A', B' et C' les images respectives de A, B et C par cette projection p, G_1 le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), G le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) défini dans le plan (ABC), G'_1 et G' les images respectives de G_1 et G par la projection p.

1) Montrer que G'_1 est le barycentre des points pondérés (A', a) et (B', b).

2) Montrer que : $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$. Quelle conclusion peut-on en déduire pour le point G'?

3) Montrer que :

$$a.\overrightarrow{AA'} + b.\overrightarrow{BB'} + c.\overrightarrow{CC'} = (a+b+c)\overrightarrow{GG'}.$$

65. 1) Soient $\vec{v}$ un vecteur de $\mathfrak{W}$, A et B deux points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, $\mathcal{P}$ un plan et t la translation de vecteur $\vec{v}$.
Montrer que l'image du plan $\mathcal{P}$ est un plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}$.

2) Supposons A et B distincts.
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux plans sécants suivant la droite (Δ) tels que (Δ) ne soit pas parallèle à (AB).
Déterminer l'ensemble (E') des points de $\mathcal{S}$, images d'un élément de $\mathcal{R}$ par t. En déduire l'ensemble (E) des points M de $\mathcal{R}$ tels qu'il existe M' dans $\mathcal{S}$ vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

66. Soient A, I et J trois points de $\mathcal{E}$ non alignés.

1) Quel est l'ensemble (E) des points Ω centres des homothéties transformant I en J.

2) Quel est l'ensemble (E') des points A' image de A quand Ω décrit (E).

3) Soient B et C deux points de $\mathcal{E}$ non alignés avec A. Déterminer l'ensemble (G) des points de $\mathcal{E}$ ne pouvant être les images des points de $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ quand Ω décrit (E).

67. Soient ABC un triangle, M un point de $\mathcal{E}$ et h une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par $[h : M \longmapsto M']$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que h est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport. On pourra utiliser la notion de barycentre dans le plan (ABC).

68. Soient ABC un triangle, (Δ) une droite de $\mathcal{E}$ et M un point de $\mathcal{E}$. Trouver l'ensemble (E) des points P de $\mathcal{E}$ quand M décrit (Δ) sachant que :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

(On pourra utiliser un point auxiliaire G du plan (ABC) tel que $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MG}$). Construire cet ensemble (E).

69. L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathfrak{W}$.
Soient $\mathcal{P}$ un plan rapporté au repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et (D) l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ de coordonnées X et Y dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ qui sont telles que :

$$X + 2Y - 4 = 0.$$

Déterminer une représentation paramétrique de (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

70. L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient x et z deux nombres réels. On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\z\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}x\\2\\-3\end{pmatrix}$ et les deux vecteurs de $\mathfrak{W}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés par :

$$\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$$
$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

On note $\mathcal{P}$ le plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$

1) Calculer x et z pour que la droite (BC) soit incluse dans $\mathcal{P}$.

2) Déterminer alors une équation cartésienne de la droite (BC) dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

71. L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient (D) et (D') deux droites définies respectivement par leurs représentations paramétriques :

$$(D)\ \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = -2\lambda + 1 \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad (D') : \begin{cases} x = 2\mu - 1 \\ y = \mu + 1 \\ z = \mu - 2. \end{cases}$$

On considère deux points M et M' situés respectivement sur (D) et (D') et I le milieu du segment $[MM']$.

1) Montrer que le point I appartient à un plan $\mathcal{P}$ que l'on déterminera.

2) Vérifier que (D) et (D') sont parallèles à $\mathcal{P}$.

3) Montrer que quel que soit le point M de (D) et quel que soit le point M' de (D'), le plan $\mathcal{P}$ passe par le milieu du segment $[MM']$.

72. L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Pour tout membre réel m, on désigne par $\mathcal{P}_m$ le plan affine passant par le point A_m de triplet de coordonnées $(1, -2, m)$, et parallèle au plan d'équation $z = 2$.
On note (D) la droite affine passant par le point $B\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, et (D') la droite affine passant par le point $B'\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ (les vecteurs sont donnés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathfrak{W}$).
Montrer que, pour tout nombre réel m, $\mathcal{P}_m$ est sécant à (D) et à (D').

Trouver, en fonction de m, les coordonnées des points C_m et C'_m définis par :

$$\{C_m\} = \mathcal{P}_m \cap (D)$$
$$\{C'_m\} = \mathcal{P}_m \cap (D').$$

et :

73. Soit (O, I, J, K) un repère affine de $\mathcal{E}$.

1) Déterminer les points d'intersection A et B des droites (OJ) et (OK) respectivement, avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y + 3z = 3$.
On note $\vec{i}$ et $\vec{u}$ les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2) Vérifier que $(A, \vec{i}, \vec{u})$ est un repère de $\mathcal{P}$.
Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (X, Y) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{u})$ et (x, y, z) dans le repère (O, I, J, K).
Donner les expressions de x, y et z en fonction de X et Y.

3) Vérifier que le point C de coordonnées $(5, 6, -1)$ dans (O, I, J, K) est un point du plan $\mathcal{P}$.
Quelles sont ses coordonnées dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{u})$?
Donner dans ce repère une équation cartésienne de la droite (BC) et dans le repère (O, I, J, K) une représentation paramétrique de cette même droite.

74. 1) Soient k un nombre réel et f_k une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ vérifiant la propriété (p) suivante :

(p) $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2 \quad \forall (M', N') \in \mathcal{E}^2$
$[(M' = f_k(M) \text{ et } N' = f_k(N)) \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}]$.

a) Quelle est l'application f_k si $k = 0$?

b) Vérifier que si $k = 1$ alors f_k est une translation dont on précisera le vecteur.

c) Dans le cas où $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, vérifier qu'il existe un unique point O de $\mathcal{E}$ tel que $f_k(O) = O$.
Démontrer alors que f_k est l'homothétie de centre O de rapport k.

2) Soient A et A' deux points de $\mathcal{E}$, a et a' deux nombres réels non nuls, h et h' les homothéties de centres A et A' et de rapports a et a' respectivement.

a) Démontrer que $h' \circ h = f_k$ avec $k = aa'$.

b) En déduire la nature de $h' \circ h$ selon a et a'.
A-t-on $h \circ h' = h' \circ h$?

c) Dans les cas où $h' \circ h$ est une translation, déterminer son vecteur caractéristique.

d) Dans les cas où $h' \circ h$ est une homothétie, déterminer son centre et son rapport.

Dans les exercices qui suivent $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

75. 1) Placer les points suivants sur l'épure et préciser la région de $\mathcal{E}$ dans laquelle ils se trouvent.

	A	B	C	D	E	F	G	H
x	3	1	-1	0	-3	4	-2	0
y	2	-3	-2	4	3	5/2	5	0
z	0	2	-1	0	0	-4	-1	-4

Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Déterminer l'épure et les coordonnées du point K (du plan (ABC)), isobarycentre des points A, B et C. (Déterminer graphiquement les coordonnées puis vérifier par le calcul.)

3) Déterminer le barycentre I des points pondérés $(E, -3)$ et $(G, 2)$.

76. 1) Soient I et M deux points de $\mathcal{E}$ définis respectivement sur l'épure par (i, i') et (m, m').
Montrer que si un point M_1 d'épure (m_1, m'_1) est tel que :

$$\overrightarrow{IM_1} = t \cdot \overrightarrow{IM}$$

(où t est un nombre réel donné) alors on a aussi les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{im_1} = t \cdot \overrightarrow{im}$$
et :
$$\overrightarrow{i'm'_1} = t \cdot \overrightarrow{i'm'}.$$

2° Soient $A\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ quatre points de $\mathcal{E}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note A_1, B_1 et C_1 les images respectives des points A, B et C par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$.
Construire les épures (a_1, a'_1), (b_1, b'_1) et (c_1, c'_1) respectives des points A_1, B_1 et C_1.

77. Dans chacun des cas ci-dessous tracer l'épure des droites (D) et (Δ), étudier les positions relatives de ces deux droites, donner éventuellement les coordonnées des points d'intersection et vérifier analytiquement les résultats.

1) (D) contient le point $A\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$.
(Δ) contient le point A et a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

2) (D) contient le point $A\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ et a pour vecteur

directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$:

$(\Delta) = (BC)$ avec $B\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\6\\-1\end{pmatrix}$.

3) (D) est définie par :

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -3t + 4 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

et $(\Delta) = (AB)$ avec :

$A\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$.

4) (D) est définie par :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

et $(\Delta) = (AB)$ avec :

$A\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

5) (D) et (Δ) sont respectivement définies par :

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t - 8 \\ z = t + 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2t' + 1 \\ y = t' + 4 \\ z = -3t' - 3. \end{cases}$$

78. Soient A le point de triplet de coordonnées $(1, 2, 3)$ et (D) la droite de représentation paramétrique :

$$t \longmapsto (2t - 3, -3t + 4, t - 2).$$

On note (Δ) la droite passant par A et parallèle à (D).
Déterminer les épures respectives (d, d'), (a, a') et (δ, δ') de la droite (D), du point A et de la droite (Δ).
Déterminer les traces des droites (D) et (Δ).
Trouver une représentation paramétrique de (Δ).

79. Dans chacun des cas suivants, déterminer les traces du plan $\mathcal{P}$ et éventuellement les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les droites des coordonnées.

1) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$:

$$M \in \mathcal{P} \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t + 2t' + 1 \\ y = 2t + t' + 2 \\ z = 2t + 6t' + 3. \end{cases}$$

2) $\mathcal{P} = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec :

$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

3) $\mathcal{P} = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec :

$A\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

4) $\mathcal{P} = (CDE)$ avec :

$C\begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

5) $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$6x + 2y + z - 5 = 0.$$

6) $\mathcal{P}$ contient l'origine et deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

80. Soient a, b et c trois nombres réels non nuls, $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

1) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les droites de coordonnées.

2) Utiliser ce résultat pour trouver les traces du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$2x + 3y + 4z - 12 = 0$$

puis celles du plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne :

$$2x + 6y - 3z = 6.$$

3) Donner une méthode pour déterminer les traces d'un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0$$

dans le cas où a, b, c et d sont des nombres réels non nuls.

81. But de l'exercice : Étant donnés deux droites non coplanaires (D) et (Δ) et A un point situé sur aucune de ces deux droites, mener, par A, une droite sécante à (D) et à (Δ).
Soient $A\begin{pmatrix}1,5\\1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-2\\0,5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4\\1,5\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}7\\2\\4\end{pmatrix}$ cinq points de $\mathcal{E}$. On note (D) la droite passant par B et C, (Δ) la droite passant par E et G.

1) Tracer les épures de ces points et de ces droites sur une figure.

2) Vérifier que A n'appartient pas à (D).
On note $\mathcal{S}$ le plan déterminé par la droite (D) et le point A.
Déterminer graphiquement le point d'intersection K de $\mathcal{S}$ avec la droite (Δ).

3) Démontrer que la droite (AK) est sécante à la droite (D) et que la droite (AK) est l'unique droite passant par A et sécante à (D) et à (Δ).

4) Résoudre analytiquement ce problème.

82. But de l'exercice : Étant données une droite (E) et deux droites (D) et (Δ) non coplanaires et non parallèles à (E), mener une droite (G) parallèle à (E) et sécante à (D) et (Δ).

1) Montrer que si (D), (Δ) et (E) sont parallèles à un même plan alors le tracé d'une telle droite (G) n'est pas possible.

2) On suppose que (D), (Δ) et (E) ne sont pas parallèles à un même plan.
Soient $\mathcal{S}$ le plan contenant (D) et tel que (E) est parallèle à $\mathcal{S}$, et $\mathcal{Q}$ le plan contenant (Δ) et tel que (E) est parallèle à $\mathcal{Q}$.
Montrer que si (G) existe alors (G) est la droite d'intersection des plans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$.
En déduire que le problème se ramène à la recherche du point d'intersection de la droite (D) et du plan $\mathcal{Q}$ ou de la droite (Δ) avec le plan $\mathcal{S}$.

3) Soient $A\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3\\7\\0,5\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}2,5\\5\\5\end{pmatrix}$ quatre points de $\mathcal{E}$, et $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{W}$.
On note (D) la droite passant par A et B, (Δ) la droite passant par C et G, et (E) la droite définie par A et $\vec{u}$.
Donner les épures de (D), (Δ) et (E), et vérifier que (D) et (Δ) sont non coplanaires puis qu'elles ne sont pas parallèles à (E).
Tracer l'épure (d_1, d'_1) de la droite (D_1) passant par C et parallèle à la droite (E) pour déterminer l'épure du plan $\mathcal{S}$ de la question 2).
Chercher l'épure (k, k') de l'intersection K de la droite (Δ) avec le plan $\mathcal{S}$.
Construire l'épure de la droite (G).
Vérifier que cette droite est sécante à (D).

83. But de l'exercice : Étant donnés un plan $\mathcal{S}$, une droite (D) sécante à $\mathcal{S}$ et un point A n'appartenant pas à (D), trouver le projeté B du point A sur la droite (D) parallèlement au plan $\mathcal{S}$.

1) Soient le plan $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne :

$$3x - 3y + 2z - 6 = 0,$$

$A\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}$ trois points de $\mathcal{E}$, et (D) la droite passant pas C et E.
Tracer les épures (a, a') et (d, d') du point A et de la droite (D) puis les épures $(\alpha p, \alpha p')$ et $(\alpha q, \alpha q')$ des traces (αP) et (αQ) du plan $\mathcal{S}$.

2) Soit $\mathcal{Q}$ le plan parallèle au plan $\mathcal{S}$, passant par A. Tracer une épure du plan $\mathcal{Q}$ en utilisant l'horizontale et la frontale de $\mathcal{Q}$, passant par A.

3) Chercher l'épure (b, b') de l'intersection B de la droite (D) avec le plan $\mathcal{Q}$.

84. But de l'exercice : Trouver l'intersection (Δ) de deux plans sécants $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$.
Soient $A\begin{pmatrix}4\\-3\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1,5\\9\\7\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$ six points de $\mathcal{E}$.

1) Tracer l'épure de ces points et des droites (AB), (AC), (DE) et (DG).

2) Vérifier que les points A, B et C sont non alignés. On note $\mathcal{S}$ le plan défini par ces trois points. Vérifier que les points D, E et G ne sont pas alignés. On note $\mathcal{Q}$ le plan défini par ces trois points.

3) Chercher l'épure (m, m') de l'intersection M de la droite (DE) avec le plan $\mathcal{S}$ (on pourra utiliser le plan auxiliaire vertical projetant (DE) en (de)).

4) De même déterminer l'épure (n, n') du point N d'intersection de la droite (EG) et du plan $\mathcal{S}$.

5) Préciser l'épure de (Δ).

85. Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux plans d'équations cartésiennes respectives :

$$-2x + y - z + 2 = 0$$

et :

$$5x + 2y + 3z - 12 = 0.$$

1) Déterminer les épures $(\alpha_1 p_1, \alpha_1 p'_1)$ et $(\alpha_1 q_1, \alpha_1 q'_1)$ des traces $(\alpha_1 P_1)$ et $(\alpha_1 Q_1)$ de $\mathcal{S}_1$.

2) Déterminer les épures $(\alpha_2 p_2, \alpha_2 p'_2)$ et $(\alpha_2 q_2, \alpha_2 q'_2)$ des traces $(\alpha_2 P_2)$ et (αQ_2) de $\mathcal{S}_2$.

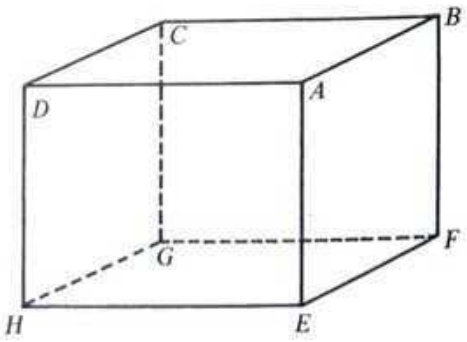
3) Déterminer l'épure de l'intersection des deux plans.

5 Orthogonalité dans l'espace

I. DROITES ORTHOGONALES
II. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX
III. PLANS PERPENDICULAIRES
IV. PRODUIT SCALAIRE
V. PROJECTION DE L'ANGLE DROIT
VI. DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN EN ANALYTIQUE ET EN DESCRIPTIVE
VII. LIEUX GÉOMÉTRIQUES

I. Droites orthogonales

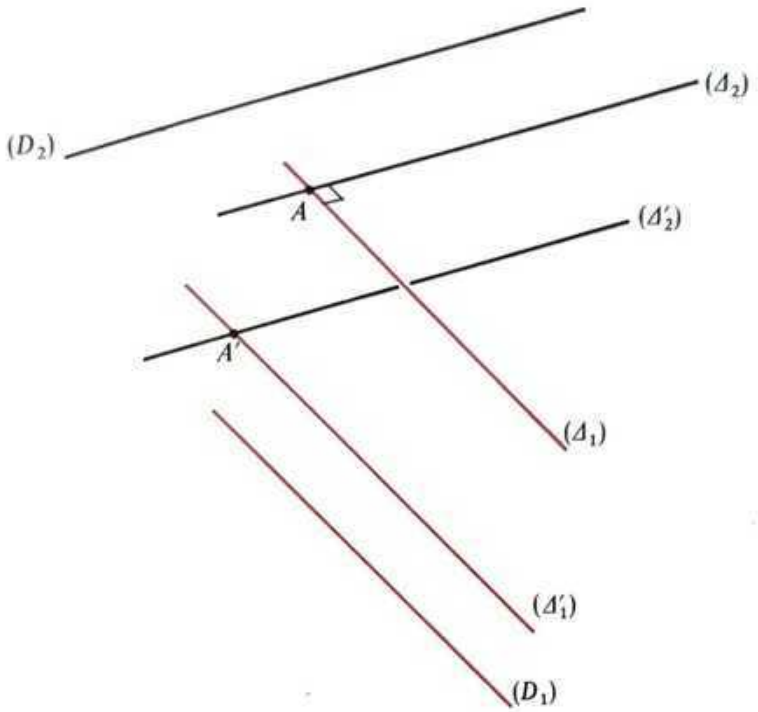
Question 1 *Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle. Nommer les droites contenant les arêtes de ce parallélépipède rectangle qui sont perpendiculaires à (AE) (une telle droite est sécante à (AE) et dans le plan qu'elle forme avec (AE), perpendiculaire à cette droite).*



Question 2 *Soient (D_1) et (D_2) deux droites non coplanaires, A un point de δ n'appartenant à aucune de ces deux droites.*

1) Par A, on trace la droite (Δ_1) parallèle à la droite (D_1), et la droite (Δ_2) parallèle à la droite (D_2).

Montrer que les droites (Δ_1) et (Δ_2) déterminent un unique plan $\mathcal{P}$.



(D_1) *et* (D_2) *non coplanaires*
$A \notin (D_1) \cup (D_2)$
$(\Delta_1) \parallel (D_1)$
$(\Delta_2) \parallel (D_2)$
$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{A\}$

2) Soient A' un point de $\mathcal{E}$ distinct de A, (Δ'_1) et (Δ'_2) les deux droites passant par A' et parallèles respectivement à (D_1) et (D_2).
Montrer que si (Δ_1) est perpendiculaire à (Δ_2), dans $\mathcal{P}$, alors (Δ'_1) est perpendiculaire à (Δ'_2), dans le plan déterminé par ces deux droites. (On utilisera le théorème de Pythagore dans les plans.)

Ce résultat permet d'étendre à $\mathcal{E}$, la notion d'orthogonalité de deux droites vue dans un plan affine.

Définition

Soient (D_1) et (D_2) deux droites de l'espace $\mathcal{E}$.
La droite (D_1) est **orthogonale à la droite** (D_2) et on note $(D_1) \perp (D_2)$ si et seulement si les parallèles respectives à (D_1) et (D_2) menées par un point quelconque de $\mathcal{E}$ sont des droites sécantes et perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

Remarques

• La relation d'orthogonalité $\perp$ définie dans l'ensemble des droites de $\mathcal{E}$ est une relation symétrique; on dit donc que deux droites de $\mathcal{E}$ sont orthogonales.
Il est bien évident que cette relation n'est pas réflexive.

• Dans un plan, deux droites sont orthogonales si et seulement si elles sont perpendiculaires.
Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes, c'est-à-dire si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires.

Question 3 *Soient (D), (Δ) et (D') trois droites de $\mathcal{E}$.*

1) Montrer que si (D) est parallèle à (D') et (Δ) est orthogonale à (D') alors (Δ) est orthogonale à (D).

2) Est-ce que si (D) est orthogonale à (Δ) et (D') est orthogonale à (Δ) alors (D) est parallèle à (D')?

On a ainsi montré le résultat suivant :

Théorème

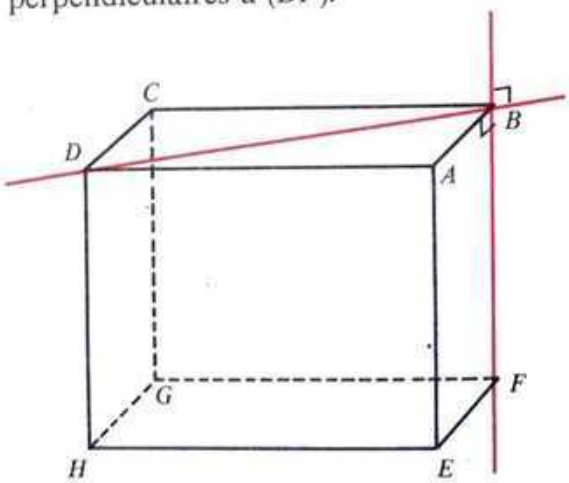
Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre. C'est-à-dire :

Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Exercice 1 Nommer toutes les droites contenant une arête du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ qui sont orthogonales à (AE). Donner un exemple de deux droites orthogonales à (AE) qui ne sont pas coplanaires.

II. Droites et plans orthogonaux

Sur un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ on constate que les droites (AB) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à (BF).



De même (BD) est perpendiculaire à (BF) et, plus généralement, toute droite du plan (ABC) passant par B est perpendiculaire à (BF).

Question 4 *Prouver que toute droite incluse dans le plan (ABC) est orthogonale à (BF).*

Puisque (*BF*) est orthogonale à toute droite du plan (*ABC*), on dit que (*BF*) est orthogonale au plan (*ABC*).

Définition

Une droite est **orthogonale à un plan** si et seulement si elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.
On note $(D) \perp \mathcal{P}$ pour exprimer que la droite (*D*) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

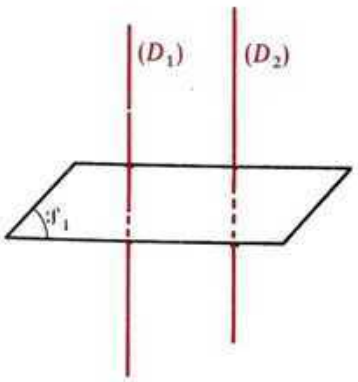
Remarque.

On évitera de dire qu'un plan est orthogonal à une droite, ou qu'une droite et un plan sont orthogonaux, car on n'a pas ici une relation d'un ensemble dans lui-même.

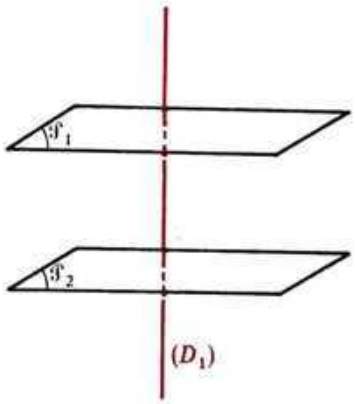
Question 5 *Vérifier que si une droite (D) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ alors (D) est sécante à $\mathcal{P}$ en un point.*
On dit que (D) est ***orthogonale au plan $\mathcal{P}$ en ce point.***

Question 6 *Soient (D_1) et (D_2) deux droites, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace.*

1) Montrer que si (D_1) est orthogonale à $\mathcal{P}_1$ et (D_1) est parallèle à (D_2) alors (D_2) est orthogonale à $\mathcal{P}_1$.



$(D_1) \perp \mathcal{P}_1$
$(D_1) \parallel (D_2)$



$(D_1) \perp \mathcal{P}_1$
$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$

2) Montrer que si (D_1) est orthogonale à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$ alors (D_1) est orthogonale à $\mathcal{P}_2$.

On a aussi les résultats suivants :

Si une droite (*D*) est orthogonale à un plan, alors toute droite parallèle à (*D*) est orthogonale à ce plan.
Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

On admet que, pour toute droite (D) de l'espace, il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}$.

Question 7

1) Soient (D) une droite et A un point de l'espace $\mathcal{E}$.
Montrer qu'il existe un plan $\mathcal{P}$ passant par A et tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}$ (On utilisera un plan $\mathcal{P}_1$ tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}_1$.)

2) Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A et $\mathcal{P}$ un plan passant par A et tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}$.

a) Vérifier que si (Δ) est incluse dans $\mathcal{P}$ alors (Δ) est perpendiculaire en A à (D).

b) Démontrer que si (Δ) est perpendiculaire en A à (D) alors (Δ) est incluse dans $\mathcal{P}$. (On utilisera le plan $\mathcal{Q}$ défini par les droites (D) et (Δ) et on montrera que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants selon une droite qui est justement (Δ)).

3) Soient $\mathcal{P}$ un plan défini par deux droites sécantes (D_1) et (D_2) et (D) une droite sécante au plan $\mathcal{P}$ en un point O.
On veut montrer que si (D) est orthogonale à (D_1) et (D_2) alors (D) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$: on considère les deux droites (D'_1) et (D'_2) parallèles respectives à (D_1) et (D_2) passant par O.
Pourquoi (D'_1) et (D'_2) sont-elles incluses dans $\mathcal{P}$?
On considère un plan $\mathcal{Q}$ passant par O et tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{Q}$.
Utiliser le 2) b) pour prouver que (D'_1) et (D'_2) sont incluses dans $\mathcal{Q}$.
Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ et conclure.

On a ainsi les deux résultats suivants :

Théorème

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en A et $\mathcal{P}$ un plan contenant A et tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}$.
(Δ) est perpendiculaire à (D) en A si et seulement si (Δ) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Théorème

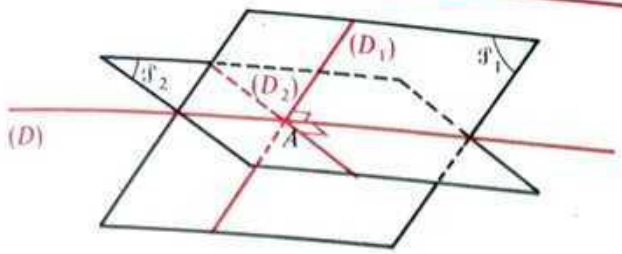
Si une droite (D) est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ alors (D) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire (D) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$).

Méthode pratique

Pour déterminer un plan $\mathcal{P}$ contenant un point A donné et tel qu'une droite (D) donnée lui soit orthogonale :

1) Si le point A appartient à la droite (D) :

On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants en (D).
Dans $\mathcal{P}_1$ on trace la droite (D_1) perpendiculaire à (D) en A.
Dans $\mathcal{P}_2$ on trace la droite (D_2) perpendiculaire à (D) en A.



$(D) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$; $(D_1) \subset \mathcal{P}_1$; $(D_1) \perp (D)$;
$(D_1) \cap (D) = \{A\}$; $(D_2) \subset \mathcal{P}_2$; $(D_2) \perp (D)$;
$(D_2) \cap (D) = \{A\}$

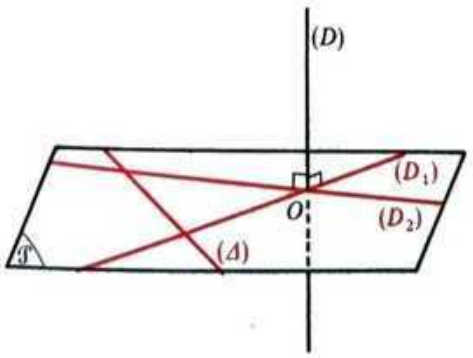
Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en A et définissent un plan $\mathcal{P}$ qui contient A, et contient deux droites orthogonales (et même perpendiculaires) à (D) donc (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

2) Si le point A n'appartient pas à la droite (D) :

On trace la droite (D') parallèle à (D) menée par A, et on utilise la méthode ci-dessus pour déterminer un plan $\mathcal{P}$ contenant A et tel que (D') est orthogonale à $\mathcal{P}$.
Le plan $\mathcal{P}$ est aussi orthogonal à (D) car (D) et (D') sont parallèles.

Méthode pratique

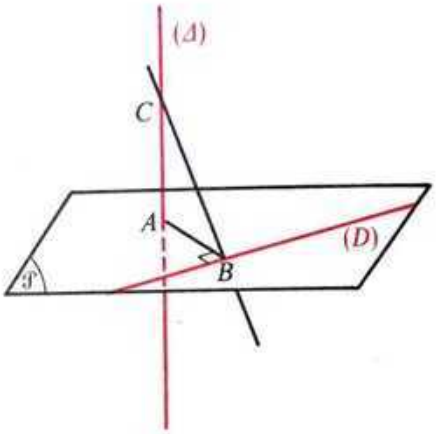
Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de montrer que l'une est orthogonale à un plan contenant l'autre.
Ainsi par exemple soient (D), (D_1) et (D_2) trois droites concourantes au point O et telles que (D) et (D_1) soient perpendiculaires, et (D) et (D_2) soient perpendiculaires en O.
Les droites (D_1) et (D_2) définissent un plan unique $\mathcal{P}$, et comme (D) est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$, (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$.
Ainsi, quelle que soit la droite (Δ) incluse dans le plan $\mathcal{P}$, les droites (D) et (Δ) sont orthogonales.



$(D_1) \cap (D_2) = \{0\}$, $(D) \cap (D_1) = \{0\}$
$(D) \cap (D_2) = \{0\}$, $(D_1) \subset \mathcal{P}$
$(D_2) \subset \mathcal{P}$, $(\Delta) \subset \mathcal{P}$

Exercice 2

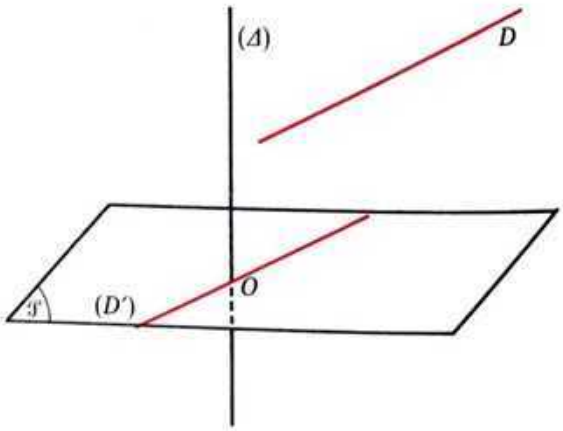
Soient $\mathcal{P}$ un plan, (Δ) une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ au point A, (D) une droite incluse dans $\mathcal{P}$ ne contenant pas A. Dans le plan $\mathcal{P}$, on note B le projeté orthogonal de A sur la droite (D), et on considère un point C de (Δ) distinct de A.
Montrer que les droites (BC) et (D) sont perpendiculaires.



$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}, \quad C \in (\Delta) - \{A\}$
$(\Delta) \perp \mathcal{P}, \quad (D) \subset \mathcal{P}$
$B \in (D), \quad (AB) \perp (D)$

Question 8

Soient $\mathcal{P}$ un plan, (Δ) une droite orthogonale à ce plan au point O et (D) une droite orthogonale à (Δ). On note (D') la droite parallèle à (D) menée par O. Montrer que (D) est parallèle au plan $\mathcal{P}$ (on pourra utiliser le plan défini par (Δ) et (D')).



$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{O\}$
$(\Delta) \perp \mathcal{P}$
$(D) \perp (\Delta)$

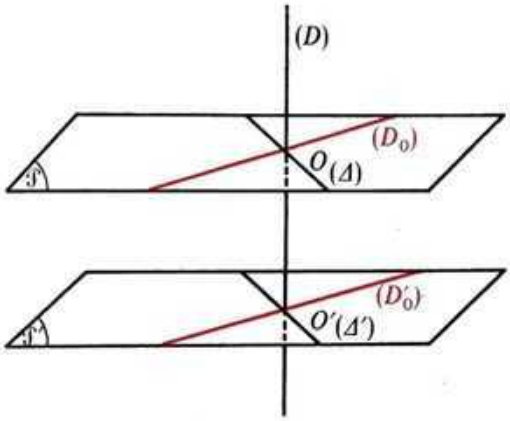
On a ainsi montré que :

Théorème

Si une droite est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ et à une droite (D), alors la droite (D) est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

En particulier si la droite (Δ) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, alors toute droite orthogonale à (Δ), ayant un point commun avec $\mathcal{P}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

Question 9 *Soit (D) une droite orthogonale à deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en O et O' respectivement. On considère deux droites (D_0) et (Δ) sécantes en O et incluses dans $\mathcal{P}$. Démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.*



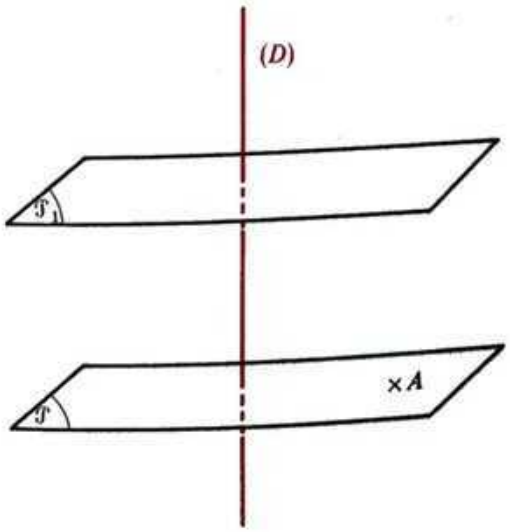
$(D) \perp \mathcal{P}$, $(D) \perp \mathcal{P}'$, $(D_0) \subset \mathcal{P}$, $O \in (D_0)$
$(\Delta) \subset \mathcal{P}$, $O \in (\Delta)$, $(D'_0) \parallel (D_0)$
$O' \in (D'_0)$, $(\Delta') \parallel (\Delta)$, $O' \in (\Delta')$

On a déjà montré (question 6) la réciproque de ce résultat, ainsi on a :

Théorème

Deux plans sont parallèles si et seulement si toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

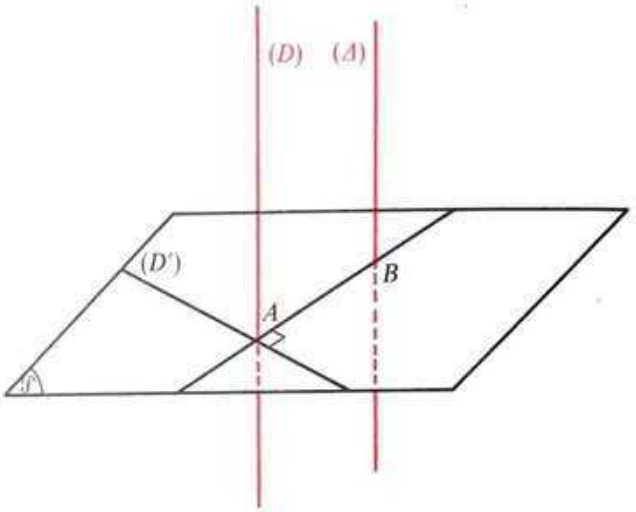
Question 10 *Soient (D) une droite et A un point de $\mathcal{E}$. Construire un plan tel que (D) lui soit orthogonal. Démontrer qu'il existe un plan et un seul $\mathcal{P}$ passant par A et tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}$.*



$(D) \perp \mathcal{P}_1$
$(D) \perp \mathcal{P}$
$A \in \mathcal{P}$.

Dorénavant on dira donc : soient (D) une droite, O un point de (D) *et* $\mathcal{P}$ **le plan orthogonal à** (D) **en** O.

Question 11 *Soient $\mathcal{P}$ un plan, (D) et (Δ) deux droites orthogonales à $\mathcal{P}$ respectivement en A et B avec A et B distincts.*
Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère la droite (D') perpendiculaire à la droite (AB) en A.
Montrer que (Δ) est incluse dans le plan déterminé par la droite (D) et le point B.
Montrer que (D) et (Δ) sont parallèles.

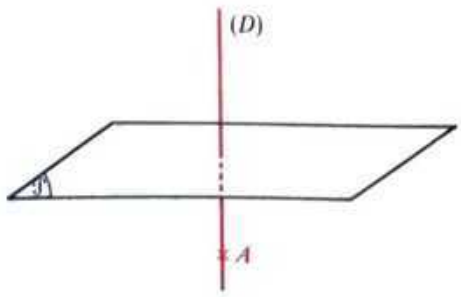


$(D) \perp \mathcal{P}$, $(D) \cap \mathcal{P} = \{A\}$
$(\Delta) \perp \mathcal{P}$, $(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{B\}$
$(D') \subset \mathcal{P}$, $(D') \perp (AB)$, $(D') \cap (AB) = \{A\}$.

On a montré (question 6) la réciproque de ce résultat, ainsi on a :

Théorème
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont orthogonales à un même plan.

Question 12 *Soient $\mathcal{P}$ un plan et A un point de $\mathcal{E}$. On admet qu'il existe une droite orthogonale à $\mathcal{P}$, démontrer qu'il existe une et une seule droite (D) orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par A.*



$(D) \perp \mathcal{P}$
$A \in (D)$.

L'existence d'une droite orthogonale à un plan est démontrée à la question 28. Dorénavant on dira donc :

- soient $\mathcal{P}$ un plan, O un point de $\mathcal{P}$ et (D) **la** droite orthogonale à $\mathcal{P}$ en O;
- soient $\mathcal{P}$ un plan, A un point de $\mathcal{E}$ et (D) **la** droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A.

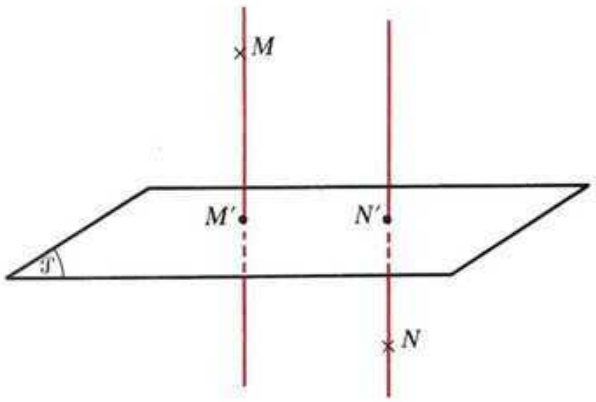
Exercice 3

Soient $\mathcal{P}$ un plan, A et B deux points distincts de ce plan, $(\mathcal{C})$ le cercle de $\mathcal{P}$ de diamètre $[AB]$, M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B, et (D) la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ en M.
Démontrer que la droite (MA) est orthogonale au plan déterminé par la droite (D) et le point B.
Soit C un point de la droite (D) distinct de M.
Démontrer que les droites (MA) et (BC) sont orthogonales.

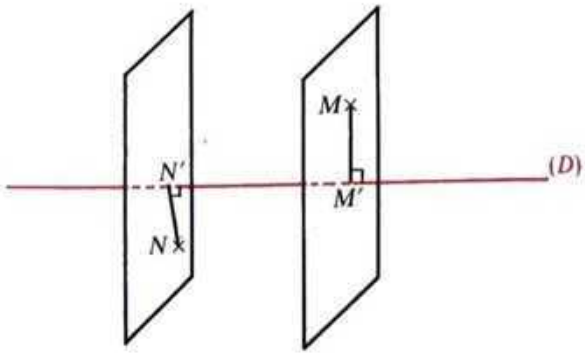
Exercice 4

Soient $ABCD$ un tétraèdre tel que $AC = BC$ et $AD = BD$. Utiliser le plan (CDI) où I est le milieu de $[AB]$ pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

On connaît la définition d'une projection sur un plan $\mathcal{P}$, parallèlement à une droite donnée (D), on dit que cette projection est orthogonale lorsque (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$. Ainsi la **projection orthogonale sur le plan** $\mathcal{P}$ est l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à un point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par M.



De même une projection sur une droite (D) parallèlement à un plan $\mathcal{P}$ est dite orthogonale lorsque (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$. Ainsi la **projection orthogonale sur la droite** (D) est l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à un point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' intersection de la droite (D) et du plan orthogonal à (D) et passant par M.



Exercice 5

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires et A un point de $\mathcal{E}$.
On considère les points B, C et D de $\mathcal{E}$ définis par :

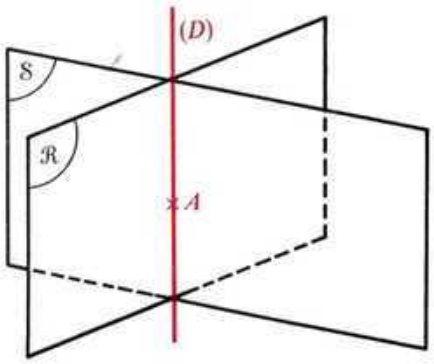
$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{v}, \qquad \overrightarrow{AD} = \vec{w}.$$

Vérifier que les points A et B sont distincts, que les points A, B et C sont non alignés, et que les points A, B et D sont aussi non alignés.
Dans le plan (ABC) on note C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
Dans le plan (ABD) on note D' le projeté orthogonal de D sur (AB).
Montrer que C' et D' sont les images respectives de C et D par la projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur la droite (AB).

III. Plans perpendiculaires

Question 13

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux plans sécants, d'intersection la droite (D), et A un point de (D).
Déterminer le plan $\mathcal{T}$ orthogonal à (D) en A : pour cela on construira les droites (Δ_1) et (Δ_2) intersections respectives de $\mathcal{T}$ avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ et on montrera que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires à (D) en A.

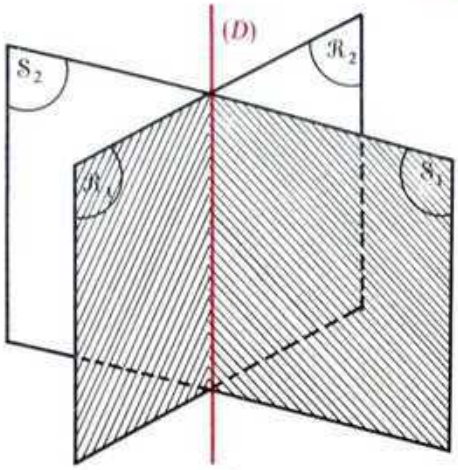


$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = (D), \quad A \in (D).$

Définition

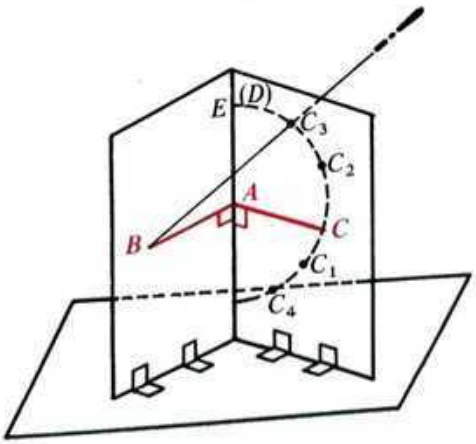
Soit (D) une droite de $\mathcal{E}$.
Un **dièdre d'arête** (D) est la réunion de deux demi plans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{S}_1$ de frontière (D).

Remarque.
Deux plans sécants $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ en (D) déterminent quatre dièdres : $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}_1$, $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}_2$, $\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}_1$ et $\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}_2$ où $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont les deux demi-plans, de $\mathcal{R}$, de frontières (D), et $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ les deux demi-plans, de $\mathcal{S}$, de frontière (D).



$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2;$$
$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2; \quad \mathcal{R} \cap \mathcal{S} = (D).$$

Question 14 *Prendre un carton sur lequel on trace une droite (D) et placer un point A sur cette droite (D). Dessiner le segment [BC] de longueur 10 cm et tel que C soit le symétrique de B par rapport à A, placer un point E de (D) tel que la longueur de [AE] soit 5 cm* puis, dans le demi-plan [(D), C), *des segments* $[AC_1]$, $[AC_2]$, $[AC_3]$, $[AC_4]$ *non confondus et de longueur 5 cm. Percer le carton aux points C,* C_1, C_2, C_3 *et* C_4 *et E.*
Plier le carton suivant la droite (D) *et le fixer dans une position déterminée. Passer par chacun des trous effectués une tige fine rigide (brochette, rayon de vélo...) et placer l'extrémité de cette tige en B. Mesurer ainsi dans chaque cas (reporter sur une règle) la longueur de la tige représentant chacun des segments* [BC], $[BC_1]$, $[BC_2]$, $[BC_3]$, $[BC_4]$ *et* [BE].



Vérifier le résultat ci-dessous :
Dans un triangle ABM isocèle de sommet A tel que $AB = AM = 5$, *on a :*

$$\cos \widehat{BAM} = 1 - \frac{BM^2}{50}.$$

Utiliser cette formule pour remplir, avec les mesures trouvées expérimentalement, le tableau ci-dessous :

M	C	C_1	C_2	C_3	C_4	E
BM						
$\cos \widehat{BAM}$						
mes° $\widehat{BAM}$						

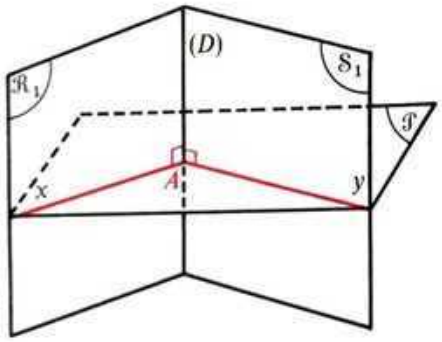
Vérifier que, pour tout M appartenant à $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ mes° $\widehat{BAM}$ est comprise entre mes° $\widehat{BAC}$ et 90°. Peut-on avoir, pour tout M de $\{C, C_1, C_2, C_3, C_4, E\}$, mes° $\widehat{BAM} = 90°$?

D'après cette question, de tous les plans sécants (ABM) au dièdre formé par les deux demi-plans de frontière (D), celui correspondant à $M = C$, correspond à un extremum de la mesure de $\widehat{BAM}$.

Ce plan (BAC) est le plan orthogonal à (D) passant par A car il contient les deux droites (AB) et (AC) perpendiculaires à (D) en A et sécantes (quand le carton est plié!).

Considérons le dièdre $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}_1$ obtenu à partir des plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sécants suivant la droite (D), et A un point de (D).

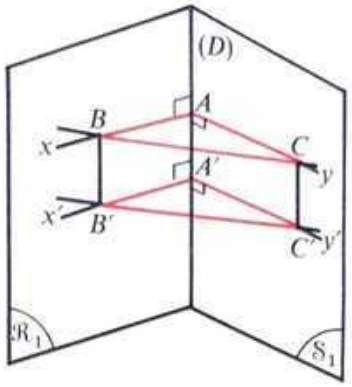
On note $\mathcal{T}$ le plan orthogonal à (D) en A.



L'intersection du dièdre $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}_1$ avec le plan $\mathcal{T}$ est la réunion de deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ (de supports respectifs (Δ_1) et (Δ_2) dessinées dans la question 13).

Ainsi on obtient dans le plan $\mathcal{T}$, l'angle $\widehat{xAy}$, intersection de $\mathcal{T}$ et du dièdre $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}_1$.

Question 15 *Soient B un point de $[Ax)$ distinct de A, C un point de $[Ay)$ distinct de A et A' un point de (D) distinct de A.*
On considère les demi-droites $[A'x')$ et $[A'y')$, intersections respectives des demi-plans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{S}_1$ avec le plan $\mathcal{T}'$ orthogonal à (D) en A'.
Soient B' le point d'intersection de $[A'x')$ et de la droite parallèle à (D) menée par B, et C' le point d'intersection de $[A'y')$ et de la droite parallèle à (D) menée par C.



Démontrer que $AA'B'B$, $AA'C'C$ et $BB'C'C$ sont des parallélogrammes.
En déduire que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C}$ ont même mesure (utiliser les relations métriques dans les triangles).

Définition

On appelle **rectiligne d'un dièdre** $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}_1$ tout angle $\widehat{xAy}$ où les demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ sont les intersections respectives de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{S}_1$ avec le plan orthogonal à $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{S}_1$ passant par A, et A est un point de la droite $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{S}_1$.

Remarque.
D'après la question 14 la mesure d'un quelconque rectiligne d'un dièdre est une caractéristique de ce dièdre.
On montre que si un dièdre formé à partir de deux plans a pour mesure d'un rectiligne 90° alors les trois autres dièdres ont aussi même mesure de rectiligne.

Définition

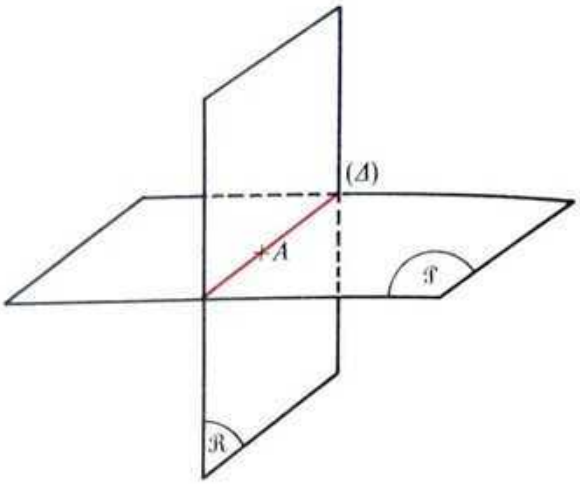
Deux plans sécants sont **perpendiculaires** si et seulement si l'un des dièdres formés par ces plans est **droit** c'est-à-dire de mesure de rectiligne 90°.

Remarque.
Cette relation, notée $\perp$, dans l'ensemble des plans de l'espace, est une relation symétrique.

Exercice 6 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans perpendiculaires. (D) une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ et (Δ) une droite orthogonale à $\mathcal{R}$.
Montrer que (D) est orthogonale à (Δ).

Exercice 7 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans sécants, (D) une droite orthogonale à $\mathcal{P}$, et (Δ) une droite orthogonale à $\mathcal{R}$.
Montrer que si (D) est orthogonale à (Δ) alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

Question 16 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans sécants en la droite (Δ) et A un point de (Δ).*
Tracer le rectiligne de sommet A de l'un des dièdres formés par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.



$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = (\Delta)$
$A \in (\Delta)$

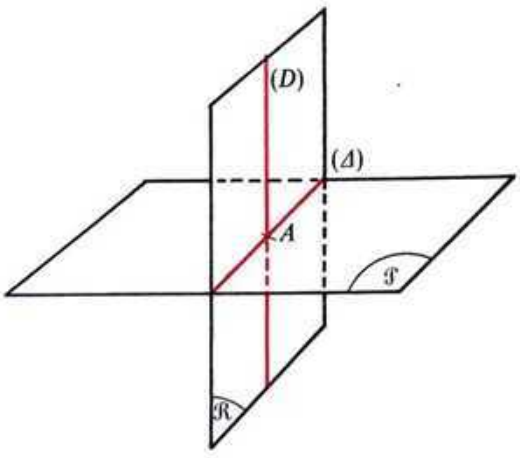
On note (D_1) et (D_2) les droites incluses respectivement dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ et contenant un côté du rectiligne.
Montrer que si $\mathcal{S}$ est perpendiculaire à $\mathcal{R}$ alors :

- *(D_1) est orthogonale à $\mathcal{R}$*

et

- *(D_2) est orthogonale à $\mathcal{S}$.*

Question 17 *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ deux plans sécants en la droite (Δ), (D) une droite de $\mathcal{R}$ sécante à (Δ) au point A.*
Montrer que si (D) est orthogonale à $\mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.



$\mathcal{S} \cap \mathcal{R} = (\Delta)$
$(D) \subset \mathcal{R}$
$(D) \cap \mathcal{S} = \{A\}$

Ces deux questions permettent d'exhiber une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires.

Théorème

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

Remarques.

• Si deux plans sont perpendiculaires, alors on ne peut pas en déduire que toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre. Ainsi par exemple la droite d'intersection (Δ) de ces deux plans n'est pas orthogonale à elle-même.

• Par contre, si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires alors une droite de $\mathcal{R}$, est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est perpendiculaire à l'intersection (Δ) de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ comme on le démontrera à l'exercice ci-dessous.

Exercice 8

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans perpendiculaires, d'intersection (Δ), et (D) une droite de l'espace.

1) Montrer que si (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$, alors (D) est parallèle à $\mathcal{R}$. En déduire que si (D) a un point commun avec $\mathcal{R}$ et est orthogonale à $\mathcal{P}$ alors (D) est incluse dans $\mathcal{R}$ et perpendiculaire à (Δ).

2) Montrer que si (D) est incluse dans le plan $\mathcal{R}$ et perpendiculaire à (Δ), alors (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ (on construira la droite (D_A) orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par un point A de (D) et on montrera $(D_A) = (D)$).

On retiendra le résultat ainsi montré :

Théorème

Si deux plans sont perpendiculaires alors toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.

Exercice 9

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans perpendiculaires et (D) une droite parallèle à $\mathcal{R}$. Est-ce que (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$?
Soient (Δ) la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ et (D') une droite incluse dans $\mathcal{R}$.
Montrer que si (D') est orthogonale à (Δ) alors (D') est orthogonale à $\mathcal{P}$.
En déduire que si (D) est orthogonale à (Δ) alors (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

On retiendra le résultat ainsi montré :

Théorème

Si deux plans sont perpendiculaires alors toute droite parallèle à l'un et orthogonale à leur intersection, est orthogonale à l'autre.

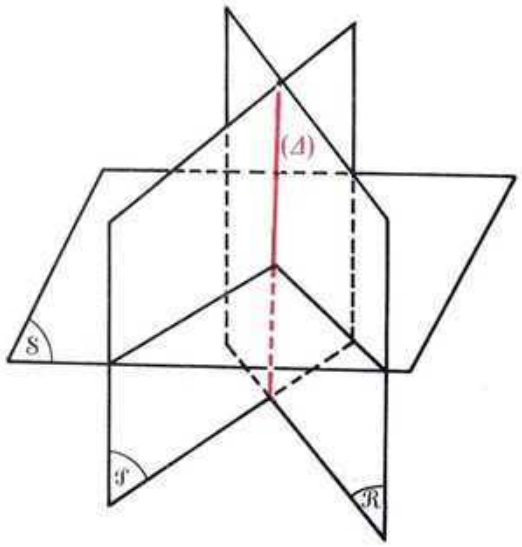
Question 18 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans parallèles et $\mathcal{S}$ un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est perpendiculaire à $\mathcal{R}$.*
La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire, étant donnés deux plans $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{R}'$ perpendiculaires à $\mathcal{S}$, est-ce que $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{R}'$ sont parallèles?

Ainsi on a le résultat suivant :

Théorème

Si deux plans sont parallèles alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Question 19 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans sécants en la droite (Δ), et $\mathcal{S}$ un plan perpendiculaire à la fois à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{R}$.*
Montrer que (Δ) est orthogonale au plan $\mathcal{S}$ (caractériser les conditions $\mathcal{P} \perp \mathcal{S}$ et $\mathcal{R} \perp \mathcal{S}$).



$(\Delta) = \mathcal{P} \cap \mathcal{R}, \quad \mathcal{S} \perp \mathcal{P}, \quad \mathcal{S} \perp \mathcal{R}$.

On a ainsi montré que :

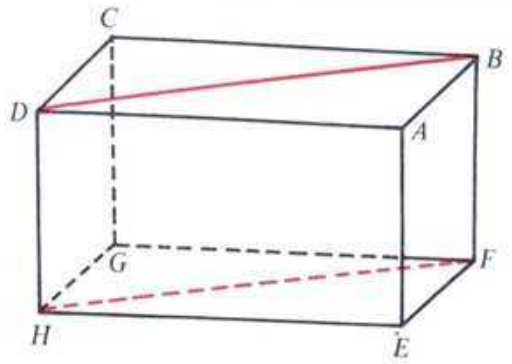
Théorème

Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un plan $\mathcal{S}$ alors leur droite d'intersection est orthogonale à $\mathcal{S}$.

Méthode pratique

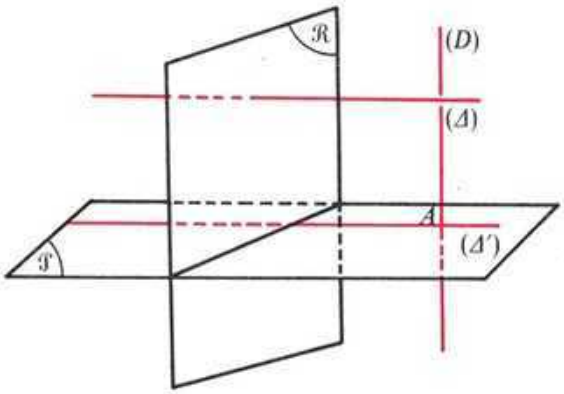
Pour montrer que deux plans sont perpendiculaires :

1) Il suffit d'exhiber une droite de l'un qui soit orthogonale à l'autre. Ainsi par exemple dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, la droite (BF) est orthogonale au plan (ABC).



Comme (BF) est incluse dans le plan (BFD), les plans (ABC) et (BFD) sont perpendiculaires.

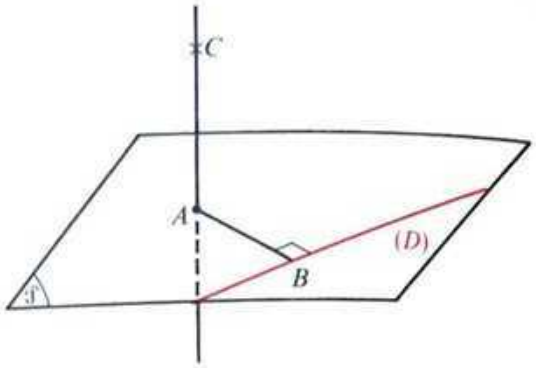
2) Il suffit d'exhiber deux droites orthogonales entre elles et orthogonales respectivement à chacun des deux plans (sécants) :



$$(\Delta) \perp \mathcal{R}, \quad (\Delta) \perp (D), \quad (D) \perp \mathcal{S},$$
$$(D) \cap \mathcal{S} = \{A\},$$
$$(\Delta') \parallel (\Delta), \quad A \in (\Delta').$$

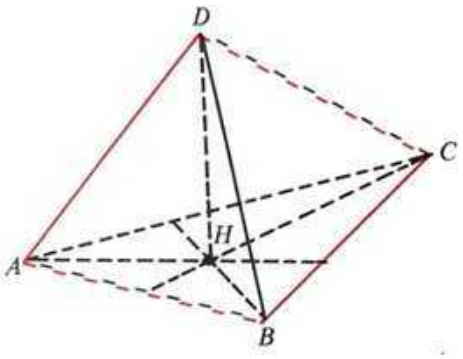
(Δ') étant la parallèle à (Δ) menée par le point A d'intersection de (D) et de $\mathcal{S}$, puisque (Δ) est orthogonale à (D), (Δ') est aussi orthogonale à (D).
(Δ') est orthogonale à (D), $\mathcal{S}$ est orthogonal à (D) donc (Δ') est parallèle à $\mathcal{S}$, et puisque le point A est commun à (Δ') et $\mathcal{S}$, la droite (Δ') est incluse dans le plan $\mathcal{S}$.
De plus (Δ') est parallèle à (Δ) qui est orthogonale à $\mathcal{R}$ donc (Δ') est orthogonale à $\mathcal{R}$.
Ainsi le plan $\mathcal{S}$ contient la droite (Δ') orthogonale à $\mathcal{R}$: les plans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

Exercice 10 Soient $\mathcal{S}$ un plan, A un point de $\mathcal{S}$ et C un point de $\mathcal{E}$ distinct de A tel que la droite (AC) soit orthogonale à $\mathcal{S}$. On considère une droite (D) incluse dans $\mathcal{S}$ et ne contenant pas A, et B le projeté orthogonal de A sur (D).
Vérifier que C n'appartient pas à (D).
On note $\mathcal{R}$ le plan défini par le point C et la droite (D).
Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
Montrer que les plans $\mathcal{R}$ et (ABC) sont perpendiculaires.



$(D) \subset \mathcal{P}$ $B \in (D)$
$A \in \mathcal{P}$ $(AC) \perp \mathcal{P}$.

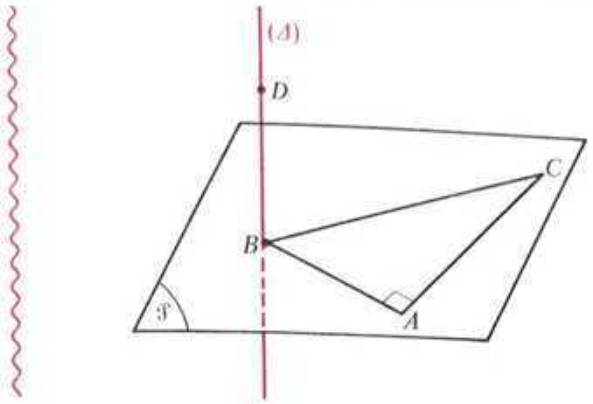
Exercice 11 Soient $ABCD$ un tétraèdre tel que les droites (AD) et (BC) d'une part, et les droites (AB) et (DC) d'autre part, sont orthogonales, H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), $\mathcal{P}_C$ le plan orthogonal à la droite (AB) passant par C et $\mathcal{P}_A$ le plan orthogonal à la droite (BC) passant par A.



Montrer que D appartient au plan $\mathcal{P}_C$, puis que la droite (DH) est contenue dans $\mathcal{P}_C$.
Montrer de même que (DH) est contenue dans $\mathcal{P}_A$.
Que représente le point H pour le triangle ABC?
En déduire que (DB) et (AC) sont orthogonales. Un tel tétraèdre dont les trois couples d'arêtes opposées sont orthogonales est dit **orthocentrique.**

Exercice 12 Soient $ABCD$ un tétraèdre tel que le projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC) soit l'orthocentre du triangle ABC.
Montrer que le plan (ADH) est orthogonal à la droite (BC).
En déduire que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.
Montrer de même que les droites (DC) et (AB), ainsi que (DB) et (AC), sont orthogonales.
Le tétraèdre est dit **orthocentrique.**

Exercice 13 Soient ABC un triangle de $\mathcal{E}$ rectangle en A, (Δ) la droite orthogonale au plan (ABC) menée par B, et D un point de (Δ) distinct de B.
Montrer que les triangles DBA, DBC et DAC sont rectangles.



$\{A, B, C\} \subset \mathfrak{I}$
$(\Delta) \perp \mathfrak{I}$
$(\Delta) \cap \mathfrak{I} = \{B\}$
$D \in (\Delta)$
$D \notin \mathfrak{I}$

IV. Produit scalaire

1 Généralités

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathfrak{W}$ et A un point de $\mathfrak{E}$. On considère les points B et C de $\mathfrak{E}$ définis par :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}.$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors les points A, B et C appartiennent à une même droite.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors les points A, B et C déterminent un plan unique.
Ainsi dans ces deux cas, puisque les trois points A, B et C sont dans un plan $\mathfrak{I}$, on peut parler du produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en les considérant dans le plan vectoriel associé à $\mathfrak{I}$. On admet (voir exercice 61) que si on change de représentants (de même origine) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on obtient dans les deux plans vectoriels associés le même nombre, produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathfrak{W}$, A un point quelconque de $\mathfrak{E}$, et B et C les points de $\mathfrak{E}$ définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
On appelle **produit scalaire des deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan vectoriel associé à un plan affine qui contient A, B et C. On note encore $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ce produit scalaire.
On définit ainsi la **multiplication scalaire** sur $\mathfrak{W}$: application de $\mathfrak{W}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui, au couple $(\vec{u}, \vec{v})$, associe le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Remarque

- Si $\vec{u}$ est nul ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, étant donné un point A de $\mathfrak{E}$, le point B défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ est distinct de A. Le point C défini par $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ a pour projeté orthogonal, dans un plan $\mathfrak{I}$ contenant A, B et C, sur la droite (AB), le point H; et on a dans $\mathfrak{I}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$
$$= AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC}).$$

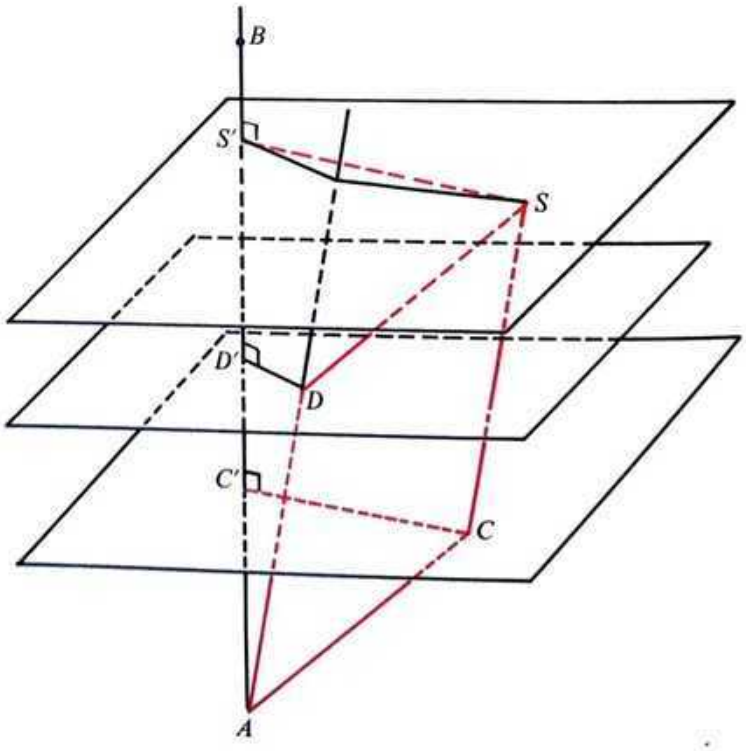
Puisque le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace est défini à partir du produit scalaire de deux vecteurs coplanaires, toutes les propriétés du produit scalaire dans $\mathfrak{V}$, ne faisant intervenir qu'un ou deux vecteurs, seront étendues au produit scalaire dans $\mathfrak{W}$.
Ainsi on a :

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{W}^2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{W}^2 \quad (x\vec{u}) \cdot \vec{v} = x(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (x\vec{v})$
- $\forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0 \quad$ et $\quad \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- $\forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$
- $\forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 \quad \|\overrightarrow{AB}\| = AB = d(A, B)$
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{W}^2 \quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ (Cauchy-Schwartz)
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathfrak{W}^2 \quad |\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,| \leqslant \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Minkowski)
- $\forall \vec{u} \in \mathfrak{W} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \|t\vec{u}\| = |t| \, \|\vec{u}\|$.

Nous savons depuis la classe de seconde, que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires, on a :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Étudions maintenant le cas où $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. On a, de ce fait $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls.
Soit A un point de $\mathcal{E}$. On note B, C et D les points définis par : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.



On désigne par C' le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) ($\vec{u}$ est non nul donc A et B sont distincts), par D' le projeté orthogonal de D sur (AB). On note S le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AS} = \vec{u} + \vec{v}$, et S' le projeté orthogonal de S sur (AB).

Ainsi on a :

$ACSD$ est un parallélogramme et la projection p sur (AB) parallèlement au plan orthogonal à (AB) en A vérifie :

	p
A	A
C	C'
D	D'
S	S'
I	I'

où I est le milieu de $[AS]$

Question 20 *Montrer que I' est le milieu de $[AS']$ et de $[C'D']$.*
En déduire que $\overrightarrow{AS'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$.

Comme on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AS} \\ &= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AS'}\end{aligned}$$

et, comme $\overrightarrow{AS'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) \\ &= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD'} \\ &= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD} \\ &= \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{u} \,.\, \vec{w}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré le résultat suivant :

Théorème

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, on a :

$$\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{u} \,.\, \vec{w}.$$

Produit scalaire et orthogonalité

a) Orthogonalité de deux vecteurs de $\mathcal{W}$, base orthogonale de $\mathcal{W}$

Comme dans le plan, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont orthogonaux, si et seulement si $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$.

Et on a : si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont orthogonaux alors tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

Question 21 *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. Démontrer que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.*

Comme, dans le plan vectoriel $\mathcal{V}$, une base orthogonale était un couple de vecteurs non nuls orthogonaux, on pose :

Définition

Une **base orthogonale** de $\mathcal{W}$ est un triplet de trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux.

On admet (voir exercice 63) l'existence d'une base orthogonale de $\mathcal{W}$.

Exercice 14 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthogonale de $\mathcal{W}$ telle que :

$$\vec{i}^2 = 2, \quad \vec{j}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \vec{k}^2 = 3.$$

Dans chacun des cas suivants le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-il une base orthogonale de $\mathcal{W}$? Sinon est-ce une base de $\mathcal{W}$?

1) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\quad \vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j}$, $\quad \vec{w} = 5\vec{k}$

2) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\quad \vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\quad \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{k}$

3) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\quad \vec{v} = 3\vec{i} + \vec{k}$, $\quad \vec{w} = 3\vec{j} - k$.

Exercice 15 Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthogonale de $\mathcal{W}$ telle que $\vec{i}^2 = 5$, $\vec{j}^2 = 6$ et $\vec{k}^2 = 3$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs définis par :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}.$$

Vérifier que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.
Un vecteur de première coordonnée 1 et de troisième coordonnée 2 peut-il être orthogonal à $\vec{u}$? à $\vec{v}$? à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$?
Quelles valeurs doit-on donner aux première et troisième coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ de deuxième coordonnée 1 pour que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthogonale?

b) Vecteurs unitaires – base orthonormée de $\mathcal{W}$

Comme dans le plan un **vecteur** est dit **unitaire** ou **normé** si et seulement si sa norme est égale à 1.

Question 22 *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Démontrer qu'il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$ et les déterminer.*

Un vecteur unitaire est nécessairement non nul ($\|\vec{u}\| \neq 0 \iff \vec{u} \neq \vec{0}$). Comme dans $\mathcal{V}$, une **base orthonormée** de $\mathcal{W}$ est une base orthogonale de $\mathcal{W}$ formée de vecteurs unitaires. Ainsi on a :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base orthonormée de } \mathcal{W} \iff \left[\begin{array}{c} \vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1, \vec{k}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \end{array}\right].$$

Question 21 *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. Démontrer que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.*

Comme, dans le plan vectoriel $\mathcal{V}$, une base orthogonale était un couple de vecteurs non nuls orthogonaux, on pose :

Définition

Une **base orthogonale** de $\mathcal{W}$ est un triplet de trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux.

On admet (voir exercice 63) l'existence d'une base orthogonale de $\mathcal{W}$.

Exercice 14 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthogonale de $\mathcal{W}$ telle que :

$$\vec{i}^2 = 2, \quad \vec{j}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \vec{k}^2 = 3.$$

Dans chacun des cas suivants le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-il une base orthogonale de $\mathcal{W}$? Sinon est-ce une base de $\mathcal{W}$?

1) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\quad \vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j}$, $\quad \vec{w} = 5\vec{k}$

2) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\quad \vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\quad \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{k}$

3) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\quad \vec{v} = 3\vec{i} + \vec{k}$, $\quad \vec{w} = 3\vec{j} - k$.

Exercice 15 Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthogonale de $\mathcal{W}$ telle que $\vec{i}^2 = 5$, $\vec{j}^2 = 6$ et $\vec{k}^2 = 3$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs définis par :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}.$$

Vérifier que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.
Un vecteur de première coordonnée 1 et de troisième coordonnée 2 peut-il être orthogonal à $\vec{u}$? à $\vec{v}$? à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$?
Quelles valeurs doit-on donner aux première et troisième coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ de deuxième coordonnée 1 pour que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthogonale?

b) **Vecteurs unitaires – base orthonormée de $\mathcal{W}$**

Comme dans le plan un **vecteur** est dit **unitaire** ou **normé** si et seulement si sa norme est égale à 1.

Question 22 *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Démontrer qu'il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$ et les déterminer.*

Un vecteur unitaire est nécessairement non nul ($\|\vec{u}\| \neq 0 \iff \vec{u} \neq \vec{0}$). Comme dans $\mathcal{V}$, une **base orthonormée** de $\mathcal{W}$ est une base orthogonale de $\mathcal{W}$ formée de vecteurs unitaires. Ainsi on a :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base orthonormée de } \mathcal{W} \iff \left[\begin{array}{l} \vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1, \vec{k}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \end{array}\right].$$

Question 23 *Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathfrak{W}$.*
Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de triplets de coordonnées respectifs (x, y, z) et (x', y', z') en fonction des nombres x, y, z, x', y' et z'.
Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ en fonction de x, y et z.
Puisque deux vecteurs de $\mathfrak{W}$ sont coplanaires, calculer en fonction de leurs coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le cosinus de l'angle des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le cas où ces derniers sont non nuls.

On retiendra les résultats :

Théorème

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathfrak{W}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathfrak{W}$ de triplets de coordonnées respectifs (x, y, z) et (x', y', z').
Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

La norme du vecteur $\vec{u}$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

c) Droites affines orthogonales. Repère orthonormé de $\mathcal{E}$

Soient (D) et (Δ) deux droites coplanaires de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En se plaçant dans un (ou le) plan affine contenant (D) et (Δ), on a :
(D) est perpendiculaire à (Δ) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Question 24 *Soient (D') et (Δ') deux droites non coplanaires de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*
Montrer que les droites (D') et (Δ') sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Théorème

Soient (D) et (Δ) deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(D) est orthogonale à (Δ) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$, c'est-à-dire, si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercice 16 Soient $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux points de $\mathcal{E}$ et (D) la droite définie par :
$k \longmapsto (2k, k + 1, 5k - 1)$.
Montrer que les droites (AB) et (D) sont orthogonales.

Un **repère** cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ est **orthogonal** si et seulement si la base associée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthogonale de $\mathfrak{W}$. On retrouve grâce au théorème précédent la notion déjà

donnée de repère orthogonal de $\mathcal{E}$ caractérisée par le fait que les droites $D(O, \vec{i})$, $D(O, \vec{j})$ et $D(O, \vec{k})$ soient perpendiculaires deux à deux.
De même, on a : un **repère** cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ est **orthonormé** si et seulement si la base associée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}$.
En appliquant le résultat donnant la norme d'un vecteur dans une base orthonormée de $\mathcal{W}$ et le fait que la distance de deux points A et B de $\mathcal{E}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on obtient :

Théorème

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, A et B deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B).
La distance $d(A, B)$, souvent notée AB, est égale à :

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exercice 17 Soient, dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$, les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $d(A, B)$, $d(A, C)$ puis déterminer une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

d) Droite affine orthogonale à un plan affine. Vecteur normal à un plan affine

Question 25 *1) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.*
Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{w}$ alors toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est orthogonale à $\vec{w}$.

2) Retrouver ainsi le résultat suivant :
Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes et (D) une droite de $\mathcal{E}$. Si (D) est orthogonale à (D_1) et à (D_2) alors (D) est orthogonale à toute droite (Δ) incluse dans le plan déterminé par (D_1) et (D_2).

Question 26 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$, A un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$ le plan déterminé par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*
Soient $\vec{w}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$, B un point de $\mathcal{E}$ et (D) la droite déterminée par B et $\vec{w}$.

1) Montrer que (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

2) Montrer que si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, sont orthogonaux à un vecteur non nul $\vec{w}$ alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Ainsi on a :

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et (D) une droite affine de repère $(B, \vec{w})$. (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{w}$, c'est-à-dire, si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Exercice 18

1) En utilisant les vecteurs retrouver les résultats suivants :

- Deux droites affines sont parallèles si et seulement si elles sont orthogonales à un même plan.
- Deux plans affines sont parallèles si et seulement si il existe une droite affine orthogonale à ces deux plans.

2) Utiliser l'orthogonalité des vecteurs pour démontrer que :

- Deux droites affines sont parallèles si et seulement si elles sont orthogonales respectivement à deux plans affines parallèles.
- Deux plans affines sont parallèles si et seulement si il existe deux droites affines parallèles entre elles, orthogonales respectivement à chacun de ces deux plans.

Exercice 19

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et (D) une droite affine de repère $(B, \vec{w})$.
Montrer en utilisant les vecteurs que si (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ alors toute droite (Δ) orthogonale à (D) est parallèle à $\mathcal{P}$.
En déduire que si (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$, (Δ) orthogonale à (D) et (Δ) contient un point de $\mathcal{P}$ alors (Δ) est incluse dans $\mathcal{P}$.

Question 27

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Montrer que si un vecteur $\vec{w}$ non nul de $\mathcal{W}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors tout vecteur de la droite vectorielle de base $\vec{w}$ est aussi orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1) Montrer qu'une droite (D) de $\mathcal{E}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si elle a pour vecteur directeur $\vec{w}$.

3) Montrer qu'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{W}$ orthogonal à $\vec{w}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Définition

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine et $\vec{n}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ non nul. Le vecteur $\vec{n}$ est un **vecteur normal** au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si toute droite affine de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Remarques

- Une droite (D) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle a pour vecteur directeur un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors un vecteur $\vec{u}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.
- Un plan $\mathcal{P}$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, et on a :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}.$$

Exercice 20 Prouver qu'un plan affine n'admet que deux vecteurs normaux unitaires.

Question 28 *1) Soient $\mathcal{P}$ un plan affine de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et B un point de $\mathcal{E}$.*
Démontrer grâce aux vecteurs l'existence et l'unicité de la droite affine (D) orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par B.
Caractériser par deux égalités portant sur des vecteurs l'appartenance d'un point M de $\mathcal{E}$ à cette droite (D).
2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et orthogonaux de $\mathcal{W}$, $\vec{w}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$, A et B deux points de $\mathcal{E}$.
Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $\mathcal{W}$ si et seulement si la droite $D(B, \vec{w})$ est orthogonale au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Question 29 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans affines de repères respectifs $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $(A', \vec{u}', \vec{v}')$ et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ deux vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*
Montrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{n}'$.

Exercice 21 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ le plan défini par le point $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, et $\mathcal{P}'$ le plan défini par $A'\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}'\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

e) Plans perpendiculaires

Question 30 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans affines de repères respectifs $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $(A', \vec{u}', \vec{v}')$.*
1) Traduire sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ le fait que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
2) Soient $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ deux vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Montrer que $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}'$ si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

Ainsi on a les résultats suivants :

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans dont $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont respectivement des vecteurs normaux. On a :

$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \iff \vec{n}$ est colinéaire à $\vec{n}'$

$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \iff \vec{n} \perp \vec{n}'$.

Exercice 22 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 4y - 2z + 3 = 0$.

1) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

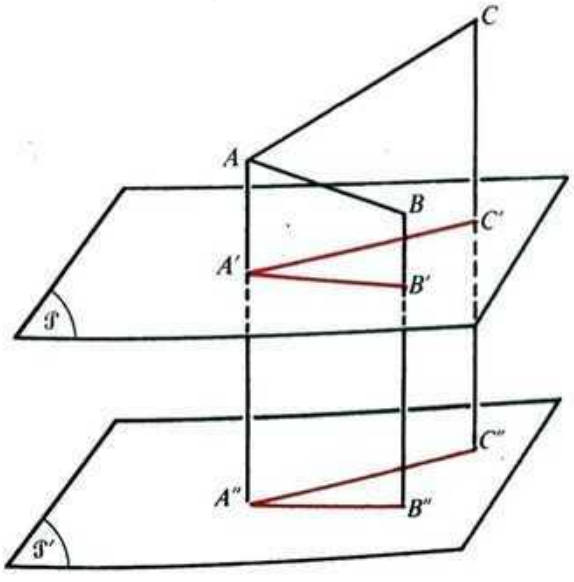
2) On note $\mathcal{Q}$ le plan défini par le point $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{Q}$.

3) On note $\mathcal{R}$ le plan défini par A, $\vec{n}$ et $\vec{u}$.
Montrer que $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à $\mathcal{R}$.

V. Projection orthogonale de l'angle droit

Question 31 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles de $\mathcal{E}$, A, B et C trois points distincts deux à deux de $\mathcal{E}$ et tels que les droites (AB) et (AC) ne soient pas orthogonales à $\mathcal{P}$.*



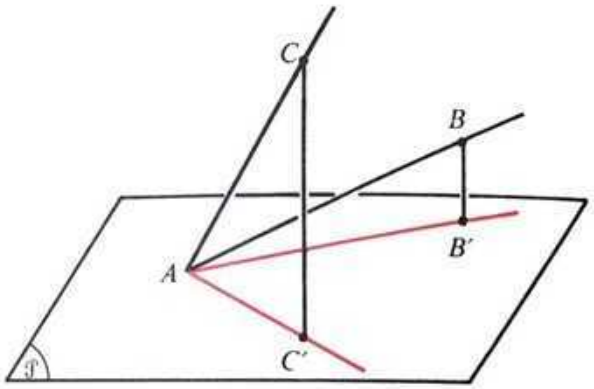
$\{A', B', C'\} \subset \mathcal{P}$
$\{A'', B'', C''\} \subset \mathcal{P}'$
$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$

On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur $\mathcal{P}$, A'', B'', et C'' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur $\mathcal{P}'$.
Montrer que les angles $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{B''A''C''}$ ont même mesure.

On a ainsi montré que les projetés orthogonaux d'un angle sur deux plans parallèles sont des angles de même mesure. Pour simplifier nous pouvons donc étudier la projection orthogonale d'un angle $\widehat{BAC}$ sur un plan passant par A, B ou C. Dans la suite du cours nous utiliserons un plan passant par le sommet de l'angle.

Question 32 *Soient $\mathcal{P}$ un plan, A, B et C trois points distincts deux à deux de $\mathcal{E}$ tels que $A \in \mathcal{P}$ et que les droites (AB) et (AC) ne sont pas orthogonales à $\mathcal{P}$, B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur $\mathcal{P}$.*
Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C}.$$



$$\{A, B', C'\} \subset \mathcal{P}$$

Question 33 *Soient A, B et C trois points distincts deux à deux de $\mathcal{E}$.*

1) On considère un plan $\mathcal{P}$ contenant A et B et tel que la droite (AC) n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$.
On note p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, C_1 l'image de C par p.
Montrer que si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit alors son projeté orthogonal *$\widehat{BAC_1}$ par p, est droit.*

2) Soit $\mathcal{R}$ un plan parallèle à $\mathcal{P}$.
Pourquoi la droite (AB) est-elle parallèle à $\mathcal{R}$?
On note p' la projection orthogonale sur $\mathcal{R}$, A', B' et C' les projetés respectifs de A, B et C par p'.

Montrer que si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit alors son projeté orthogonal $\widehat{B'A'C'}$ par p', est droit.

Dans cette question on a pris en fait $\mathcal{R}$ tel que (AB) soit parallèle à $\mathcal{R}$, et utilisé le « plan auxiliaire » $\mathcal{P}$. La condition (AC) n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$ se traduit par (AC) n'est pas orthogonale à $\mathcal{R}$; elle est nécessaire pour que C' soit distinct de A' c'est-à-dire pour que l'angle $\widehat{BAC}$ ait pour projeté un angle.

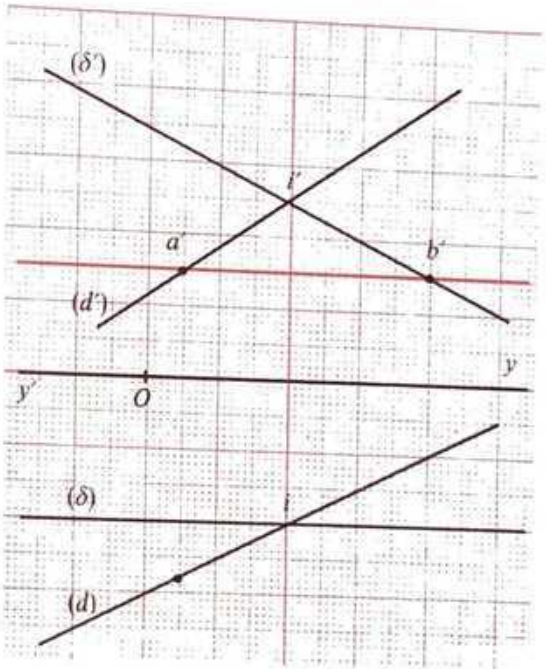
On ferait de même avec le côté $[AC)$ de l'angle $\widehat{BAC}$ en utilisant un plan contenant A et C et tel que (AB) ne soit pas orthogonale à ce plan.

Théorème

Soient $\mathcal{R}$ un plan, A, B et C trois points distincts deux à deux tels que les droites (AB) et (AC) sont non orthogonales au plan $\mathcal{R}$.
Les projetés orthogonaux respectifs A', B' et C' des points A, B et C sur $\mathcal{R}$ sont distincts deux à deux.
Si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit et si un de ses côtés a un support parallèle au plan $\mathcal{R}$, alors le projeté orthogonal $\widehat{B'A'C'}$ de cet angle sur $\mathcal{R}$, est un angle droit.

Exercice 23

Soient (D) et (Δ) deux droites de $\mathcal{E}$ sécantes en un point I, et $\mathcal{P}$ le plan déterminé par ces deux droites.
Sur l'épure ci-contre, on a représenté (D) par (d, d')
(Δ) par (δ, δ')
et I par (i, i').



Soit (AB) une droite du plan $\mathcal{P}$ dont on a représenté sur l'épure le projeté frontal $(a'b')$. Pourquoi, d'après ce dessin, la droite (AB) est-elle une horizontale du plan $\mathcal{P}$?
Déterminer le projeté horizontal (ab) de cette droite (AB).
Soit (N) la droite orthogonale en I au plan $\mathcal{P}$. On note (n, n') l'épure de la droite (N).
Montrer que la droite (n) est perpendiculaire à la droite (ab).
Tracer (n) sur l'épure.
Vérifier que (Δ) est une frontale du plan $\mathcal{P}$.
Montrer que la droite (n') est perpendiculaire à la droite (δ').
Tracer (n') sur l'épure.

Question 34

Soient A, B et C trois points de $\mathcal{E}$ distincts deux à deux.

1) On considère un plan $\mathcal{P}$ contenant A et B et tel que la droite (AC) n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$. On note p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, C_1 l'image de C par p.

Montrer que si l'angle $\widehat{BAC_1}$ est droit alors l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

2) Soit $\mathcal{R}$ un plan parallèle à $\mathcal{P}$. On note p' la projection orthogonale sur $\mathcal{R}$, A', B' et C' les images de A, B et C par p'.

Montrer que si l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est droit alors l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

On aurait le même résultat en changeant les points B et C. On a ainsi le résultat :

Théorème

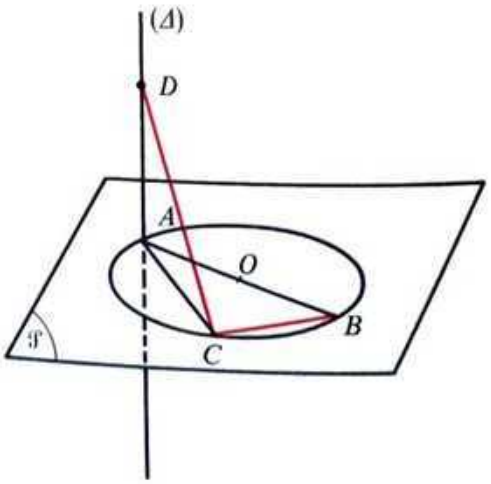
Soient $\mathcal{R}$ un plan et A, B, et C trois points distincts deux à deux tels que les droites (AB) et (AC) sont non orthogonales au plan $\mathcal{R}$; ainsi les projetés orthogonaux respectifs A', B' et C' des points A, B et C sur $\mathcal{R}$, sont distincts deux à deux.

Si l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est droit et si une des droites (AB) et (AC) est parallèle à $\mathcal{R}$, alors l'angle $\widehat{BAC}$ lui-même est droit.

Exercice 24

Soient $\mathcal{P}$ un plan, $(\mathcal{C})$ un cercle de $\mathcal{P}$ de diamètre $[AB]$, C un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et de B, (Δ) la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ en A.

Montrer que l'angle $\widehat{ACB}$ est le projeté orthogonal de l'angle $\widehat{DCB}$ sur $\mathcal{P}$ puis que l'angle $\widehat{ACB}$ est droit. En déduire que l'angle $\widehat{DCB}$ est droit.
(Cet exercice démontre le même résultat que l'exercice 3 mais la méthode est totalement différente.)



$(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}$
$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}$

Question 35 *Soient A, B et C trois points de $\mathcal{E}$ distincts deux à deux.*

1) On considère un plan $\mathcal{P}$ contenant A et tel que les droites (AB) et (AC) ne sont pas orthogonales à $\mathcal{P}$. On note p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, B_1 et C_1 les images respectives de B et C par p.

Montrer que si les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B_1AC_1}$ sont droits alors B ou C appartient à $\mathcal{P}$.

2) Soit $\mathcal{R}$ un plan parallèle à $\mathcal{P}$. On note p' la projection orthogonale sur $\mathcal{R}$, A', B' et C' les images respectives de A, B et C par p'.

Montrer que si les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont droits alors (AB) ou (AC) est parallèle à $\mathcal{R}$.

On a ainsi :

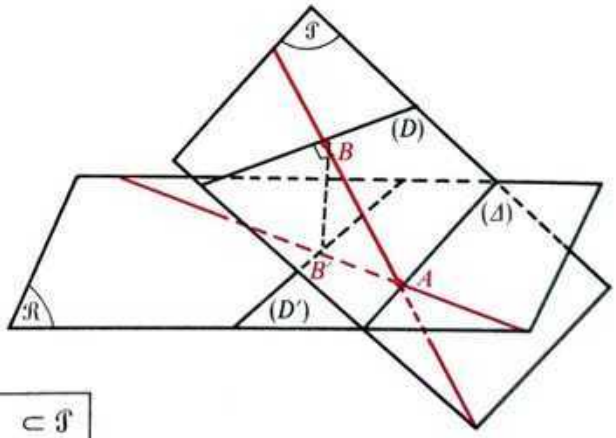
Théorème

Soient $\mathcal{R}$ un plan et A, B et C trois points distincts deux à deux tels que les droites (AB) et (AC) sont non orthogonales au plan $\mathcal{R}$; ainsi les projetés orthogonaux respectifs A', B' et C' des points A, B et C sur le plan $\mathcal{R}$ sont distincts deux à deux.

Si l'angle $\widehat{BAC}$ et son projeté orthogonal sur $\mathcal{R}$, $\widehat{B'A'C'}$ sont tous deux droits alors l'une au moins des droites (AB) et (AC) est parallèle à $\mathcal{R}$.

Exercice 25 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans sécants suivant la droite (Δ), A un point de (Δ), B un point du plan $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à (Δ), et (D) une droite de $\mathcal{P}$ perpendiculaire à la droite (AB) en B.

On note B' le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{R}$ et (D') le projeté orthogonal de la droite (D) sur le plan $\mathcal{R}$.

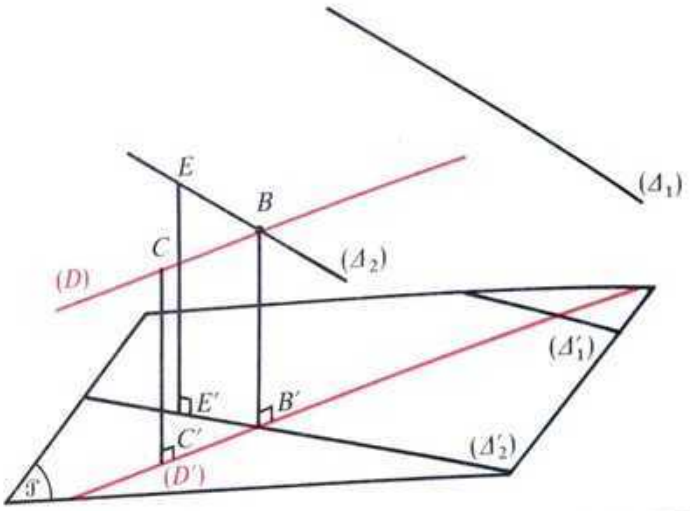


$\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = (\Delta)$ $\quad (D) \subset \mathcal{P}$
$A \in (\Delta)$ $\quad (AB) \subset \mathcal{P}$
$B \in (D)$

Montrer que si B' est confondu avec A alors le plan $\mathcal{R}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Montrer, dans le cas où les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ ne sont pas perpendiculaires, que si la droite (D') est perpendiculaire à la droite (AB') alors la droite (D) est parallèle à la droite (Δ).

Question 36 *Soient $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$, (Δ_1) une droite non orthogonale à $\mathcal{P}$, et (D) une droite parallèle à $\mathcal{P}$ et orthogonale à (Δ_1).*
On considère un point B de (D) et la droite (Δ_2) parallèle à (Δ_1) menée par B.



$$(D) \parallel \mathcal{P};\quad (\Delta_2) \parallel (\Delta_1);\quad (\Delta'_1) \subset \mathcal{P}$$
$$(D) \perp (\Delta_1);\quad \{B', C', E'\} \subset \mathcal{P};\quad (D') \subset \mathcal{P};\quad (\Delta'_2) \subset \mathcal{P}$$

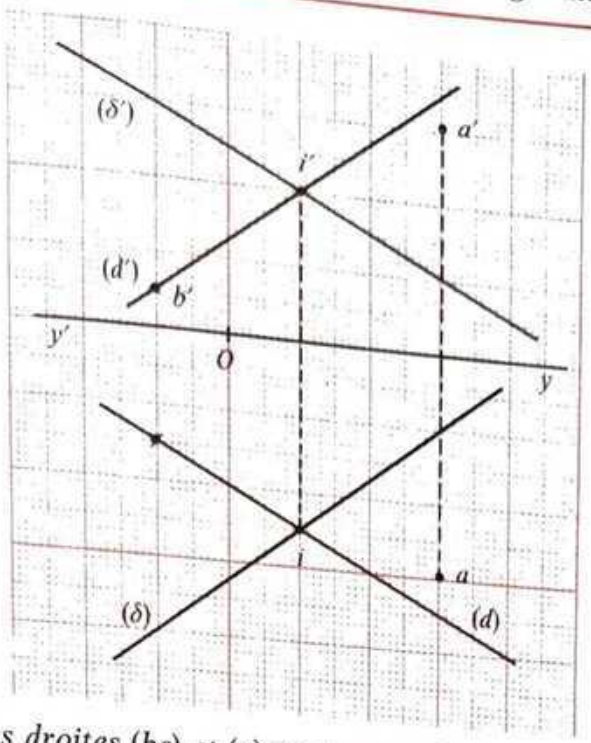
On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$, B', (D'), (Δ'_1) et (Δ'_2) les images respectives par p de B, (D), (Δ_1) et (Δ_2).
Montrer que la droite (D') est perpendiculaire à la droite (Δ'_2) (on pourra prendre des points C sur (D) et E sur (Δ_2) pour avoir $\widehat{CBE}$ droit).
En déduire que la droite (D') est perpendiculaire à la droite (Δ'_1).

Ainsi on a :

Théorème

Soient (D) et (Δ) deux droites de projetés orthogonaux respectifs sur un plan $\mathcal{P}$, (D') et (Δ').
Si les droites (D) et (Δ) sont orthogonales et si l'une (au moins) de ces deux droites est parallèle au plan $\mathcal{P}$, alors leurs projetés (D') et (Δ') sont des droites perpendiculaires de $\mathcal{P}$.

Question 37 *Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en I qui déterminent un plan $\mathcal{P}$.*
Sur l'épure ci-dessous (D), (Δ) et I sont représentés respectivement par (d, d'), (δ, δ') et (i, i').
Soit B le point de (D) dont le projeté frontal b' est placé sur l'épure.
Placer le projeté horizontal b de B, puis l'épure (c, c') du point C de la droite (Δ) tel que la droite (BC) soit une horizontale du plan $\mathcal{P}$.
Soient A un point déterminé par son épure (a, a') et (N) la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$. On note (n, n') l'épure de la droite (N).



Montrer que les droites (bc) et (n) sont perpendiculaires.
Construire (n).
Soit E le point de (Δ) tel que la droite (BE) soit une droite frontale du plan $\mathcal{P}$.
Placer l'épure (e, e') du point E.
Montrer que les droites (n') et (b'e') sont perpendiculaires.
Construire (n').

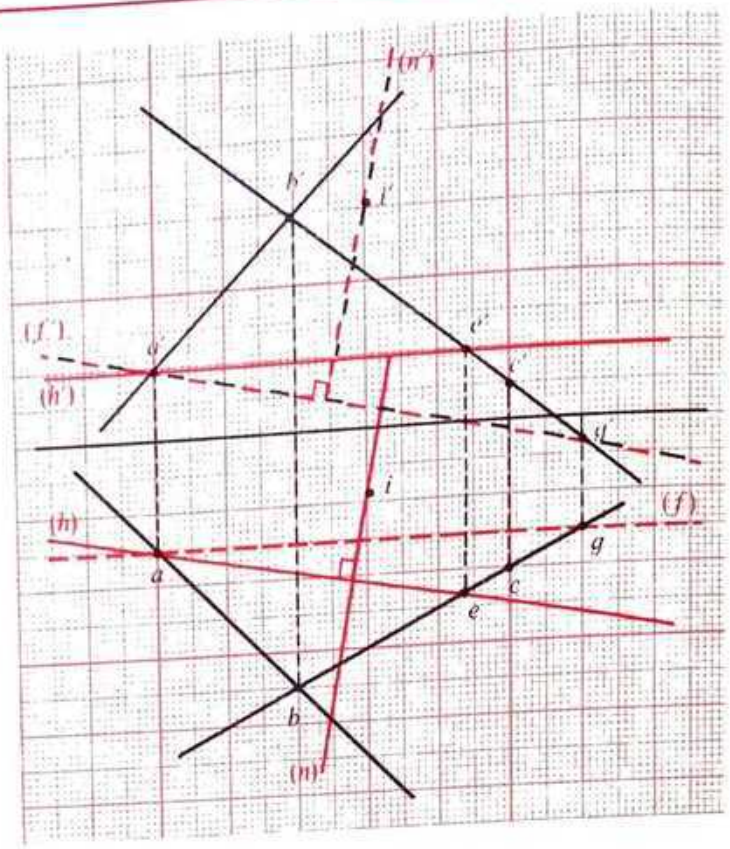
Méthode pratique

Pour construire l'épure d'une droite (N) passant par un point donné A et orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ donné

• On trace l'épure (h, h') d'une droite horizontale du plan $\mathcal{P}$.
La droite (N) est orthogonale à cette horizontale donc son projeté horizontal (n) est perpendiculaire à (h). Ainsi (n) est la perpendiculaire à (h) menée par a.

• On trace l'épure (f, f') d'une frontale du plan $\mathcal{P}$.
La droite (N) est orthogonale à cette frontale donc son projeté frontal (n') est perpendiculaire à (f'). Ainsi (n') est la perpendiculaire à (f') menée par a'.
Ainsi par exemple les points A, B et C, donnés par leurs épures (a, a'), (b, b') et (c, c') sur le dessin ci-contre définissent le plan (ABC).
On veut tracer l'épure (n, n') de la droite (N) orthogonale à (ABC) et passant par le point I d'épure (i, i').

• On détermine l'épure (h, h') de l'horizontale passant par A qui coupe (BC) en E : on trace la parallèle à la ligne de terre passant par a'; elle coupe $(b'c')$ en e', on rappelle e' en e sur (bc); on a $(h') = (a'e')$ et $(h) = (ae)$.
On trace la perpendiculaire à (h) passant par i : c'est (n).

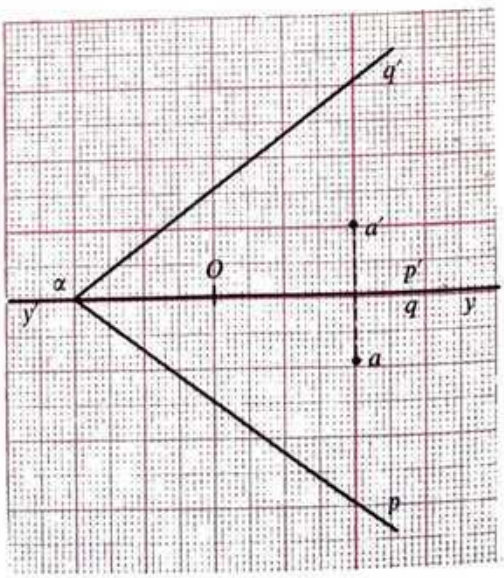


• On détermine l'épure $(f,\ f')$ de la frontale passant par A qui coupe (BC) en G : on trace la parallèle à la ligne de terre passant par a : elle coupe (bc) en g, on rappelle g en g' sur $(b'c')$; on a :

$$(f) = (ag) \quad \text{et} \quad (f') = (a'g').$$

On trace la perpendiculaire à (f') passant par i' : c'est (n').

Exercice 26 Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par ses traces (αP) et (αQ) dont les épures respectives $(\alpha p,\ \alpha p')$ et $(\alpha q,\ \alpha q')$ sont données sur la figure ci-contre.
Tracer l'épure $(\delta,\ \delta')$ de la droite (Δ) orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point A donné par son épure $(a,\ a')$.



Exercice 27 L'espace $\mathcal{E}$ étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

1) Placer ces points sur une épure. Vérifier qu'ils ne sont pas alignés.
On note $\mathcal{P}$ le plan défini par A, B et C.
Soit E le point de triplet de coordonnées (2, 1, 4).
Tracer l'épure de la droite (N) orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par E.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
Retrouver une équation du projeté frontal (respectivement horizontal) de l'horizontale (respectivement la frontale) de $\mathcal{P}$ tracée au 1).
Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ (en écrivant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (N). Comparer avec l'épure trouvée au 1).

Exercice 28 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, A le point de coordonnées (1, 4, 2) et (D) la droite définie par la représentation paramétrique :

$$\lambda \longmapsto \left(-\lambda - 1, \lambda, \frac{1}{2}\lambda + 2\right).$$

Tracer l'épure (δ, δ') de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (D).
(On pourra utiliser le plan défini par le point A et la droite (D).)

VI. Distance d'un point à un plan en analytique en descriptive

Dans tout le paragraphe, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé

Question 38 *1) Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ (où a, b, c et d sont des nombres réels avec a, b et c non tous les trois nuls).*
Exhiber deux vecteurs non colinéaires du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ en supposant a non nul.
Vérifier que le vecteur $\vec{v}$, égal à $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

2) Soient $\mathcal{Q}$ un plan, $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{Q}$, et $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{Q}$.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{Q}$.

Ainsi on a :

Théorème

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Si un plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$ac + by + cz + d = 0$$

alors le vecteur de triplet de coordonnées (a, b, c) est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

- Si un plan $\mathcal{P}$ est défini par un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et un vecteur normal de coordonnées (a, b, c) alors $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Exercice 29 Soient A le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées 1, 2 et 3
$\vec{n}$ le vecteur de $\mathcal{V}$ de coordonnées 1, -1 et 2.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Exercice 30 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ de triplets respectifs de coordonnées (1, 2, 0) et (4, -6, -2).
Déterminer une équation du plan orthogonal à la droite (AB) et passant par le milieu I de $[AB]$. Ce plan est appelé **plan médiateur du segment** $[AB]$.

Exercice 31 Comme dans l'exercice 29, on considère $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.
Placer sur une figure l'épure (a, a') du point A et l'épure (b, b') du point B défini par : $\overrightarrow{OB} = \vec{n}$.
Tracer l'épure (n, n') de la droite (N) passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
On veut déterminer les traces du plan $\mathcal{P}$ passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal.
Tracer les épures (h, h') et (f, f') respectives de l'horizontale et de la frontale de $\mathcal{P}$ contenant A.
Ponctuer ces droites : on note E le point d'intersection de l'horizontale avec le plan frontal et C le point d'intersection de la frontale avec le plan horizontal.
Construire les épures respectives $(\alpha p, \alpha p')$ et $(\alpha q, \alpha q')$ des traces (αP) et (αQ) du plan $\mathcal{P}$.

Exercice 32 Comme dans l'exercice 30, on considère $A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\-6\\-2\end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{P}$ le plan médiateur de $[AB]$, et I le milieu de $[AB]$.
On veut déterminer, en descriptive, les traces du plan $\mathcal{P}$.
Placer les épures des points A, B, puis I.
Tracer les épures de l'horizontale et de la frontale de $\mathcal{P}$ passant par I.
Ponctuer ces droites.
Construire les épures des traces (αP) et (αQ) du plan $\mathcal{P}$.

Il résulte de façon évidente, d'après le théorème précédent, l'expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée et le fait que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur de l'autre, le résultat suivant :

Théorème

Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives dans un repère orthonormé de l'espace : $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.
$\mathcal{P}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}'$ si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

Exercice 33

Soient m un nombre réel et $\mathcal{P}_m$ le plan d'équation cartésienne :

$$(m + 1)x + (m - 1)y + 2z - 3 = 0.$$

1) Soit (D) la droite de $\mathcal{E}$ de représentation paramétrique :

$$t \longmapsto (t + 3, t - 4, t + 1).$$

Quel est l'ensemble des plans $\mathcal{P}_m$ tels que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}_m$?

2) Existe-t-il un plan $\mathcal{P}_m$ parallèle au plan $\mathcal{R}$ d'équation :

$$x + 2y - z + 1 = 0?$$

3) Quel est l'ensemble des plans $\mathcal{P}_m$ perpendiculaires au plan $\mathcal{R}$?

2 Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Méthode pratique

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal A' d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$.

A partir de l'équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0$$

du plan $\mathcal{P}$ et des coordonnées de A, on détermine une représentation paramétrique de la droite (D_A) passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$: elle a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées (a, b, c).
On détermine alors, analytiquement, les coordonnées de A' : point d'intersection de (D_A) avec $\mathcal{P}$.
Ainsi par exemple soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation :

$$x - y + z - 3 = 0$$

et A le point de coordonnées 1, 2 et 3.
La droite (D_A) orthogonale à $\mathcal{P}$, passant par A, a pour représentation paramétrique :

$$\lambda \longmapsto (\lambda + 1, -\lambda + 2, \lambda + 3).$$

Soit $A'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$. On a :

$$A' \in (D_A) \cap \mathcal{P} \iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \text{ et } x - y + z - 3 = 0 \right]$$

$$\iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \text{ et } (\lambda + 1) - (-\lambda + 2) + (\lambda + 3) - 3 = 0 \right]$$

$$\iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \text{ et } \lambda = \frac{1}{3} \right]$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 1 \\ y = -\frac{1}{3} + 2 \\ z = \frac{1}{3} + 3. \end{cases}$$

Ainsi le projeté orthogonal A' de A sur $\mathcal{P}$ a pour coordonnées : $\frac{4}{5}, \frac{5}{3}$ et $\frac{10}{3}$.

Remarque.

Si on connaît le plan $\mathcal{P}$, non pas par une équation cartésienne, mais par un point B et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors il est inutile de chercher une équation cartésienne de $\mathcal{P}$; en effet A' appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{BA'} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

D'où : A' est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{BA'} = a\vec{u} + b\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{v} = 0$.

On est amené ainsi à résoudre un système de deux équations à une inconnue (a, b) dans $\mathbb{R}^2$.

Puis, ayant a et b, on détermine les coordonnées de A'.

Exercice 34

Vérifier que les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas alignés.

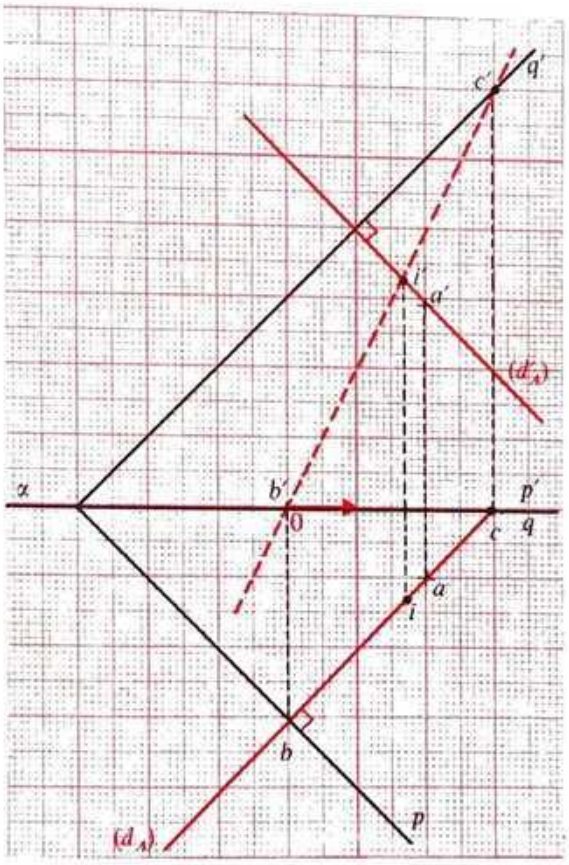
On considère le point $M\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal I du point M sur le plan (ABC).

Ces problèmes peuvent être traités en géométrie descriptive : on obtiendra alors graphiquement, une valeur approchée des coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan.

Méthode pratique

Pour évaluer les coordonnées du projeté orthogonal A' d'un point A sur un plan $\mathcal{T}$ en utilisant une épure il faut déterminer une horizontale et une frontale de $\mathcal{T}$ (on utilise souvent les traces du plan $\mathcal{T}$).
Utiliser leurs épures pour tracer la droite (D_A) passant par A et orthogonale à $\mathcal{T}$.
Déterminer le point d'intersection de la droite (D_A) et du plan $\mathcal{T}$, grâce à un plan auxiliaire (vertical par exemple).
Ainsi par exemple pour le plan $\mathcal{T}$ d'équation cartésienne : $x - y + z - 3 = 0$ et le point A de coordonnées 1, 2 et 3.
On place l'épure (a, a') du point A; puis l'épure $(\alpha p, \alpha p')$ de la trace (αP) du plan $\mathcal{T}$ sur le plan horizontal (H) : (αP) a pour équation $x - y - 3 = 0$ dans (H); enfin l'épure $(\alpha q, \alpha q')$ de la trace (αQ) de $\mathcal{T}$ sur (F) qui a pour équation : $-y + z - 3 = 0$.



On construit alors l'épure (d_A, d'_A) de la droite (D_A) en sachant que (d_A) est la perpendiculaire à (αp) menée par a et (d'_A) est la perpendiculaire à $(\alpha q')$ menée par a'.
On cherche alors à placer l'épure (i, i') du point I d'intersection de (D_A) avec $\mathcal{T}$.
Le plan vertical $\mathcal{U}$ contenant (D_A) sera le plan auxiliaire utilisé : sa trace horizontale a pour épure $(d_A, y'y)$.
On note b et c les points d'intersection respectifs de (d_A) avec (αp) et (αq). On rappelle b et c, en b' et c' respectivement sur $(\alpha p')$ et $(\alpha q')$. La droite (BC) d'épure $(bc, b'c')$ est l'intersection des plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$.
On obtient alors le point i' comme intersection des droites $(b'c')$ et (d'_A) et on rappelle i' en i sur (d_A).

On évalue alors les coordonnées du point I (l'unité sur l'épure étant 1 cm, l'incertitude sera de 0,05, car on lit « au demi-millimètre près ») :

$$x_I \simeq 1{,}3 \qquad y_I \simeq 1{,}7 \qquad z_I \simeq 3{,}35.$$

Exercice 35 Comme dans l'exercice 34, on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$.

Constater sur l'épure que ces trois points définissent un plan.
Tracer l'épure (h, h') de l'horizontale du plan (ABC) passant par B.
Tracer l'épure (f, f') de la frontale du plan (ABC) passant par B.

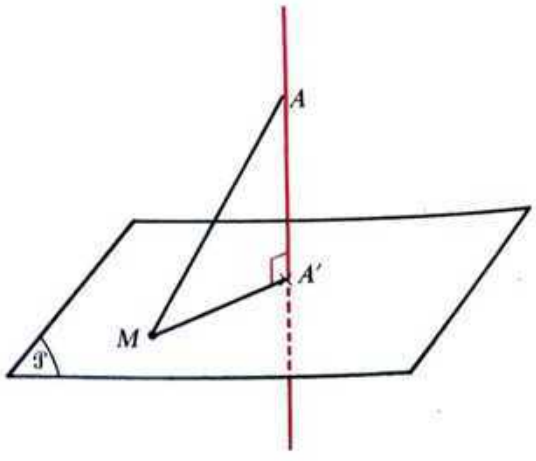
Construire l'épure (n, n') de la droite (N) passant par le point $M\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ et orthogonale au plan (ABC).
Déterminer le projeté orthogonal I du point M sur le plan (ABC) et évaluer ses coordonnées.

3 Distance d'un point à un plan

Question 39 *Soient $\mathcal{S}$ un plan, A un point n'appartenant pas à $\mathcal{S}$ et A' le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}$.*
Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad AM \geqslant AA'.$$

Ce résultat est-il encore vrai si A appartient à $\mathcal{S}$?



$$\begin{gathered}(AA') \perp \mathcal{S} \quad (AA') \cap \mathcal{S} = \{A'\} \\ M \in \mathcal{S}\end{gathered}$$

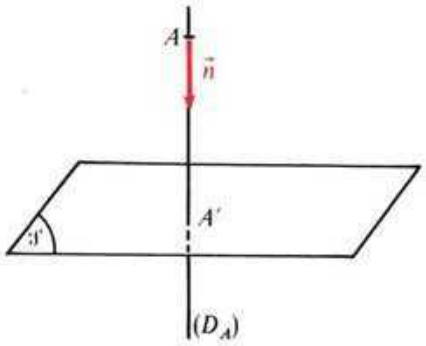
Définition

Soient $\mathcal{P}$ un plan et A un point de $\mathcal{E}$.
La **distance du point A au plan $\mathcal{P}$** est la distance de A à A' où A' est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Question 40 *L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*
Soient $\mathcal{P}$ un plan affine d'équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0$$

et A un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées (α, β, γ). On note A' le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, $\vec{n}$ le vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, égal à $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, et (D_A) la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ menée par A : $(A, \vec{n})$ est un repère de (D_A).



$$(D_A) \cap \mathcal{P} = \{A'\}$$

Donner la représentation paramétrique de (D_A) où le paramètre est l'abscisse du point de (D_A) dans le repère $(A, \vec{n})$.
Déterminer la valeur t_0 du paramètre pour le point A', qui est l'intersection de (D_A) et $\mathcal{P}$.
Pourquoi a-t-on $AA' = |t_0| \, \|\vec{n}\|$?
En déduire que $AA' = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Ainsi on a :

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ un plan d'équation : $ax + by + cz + d = 0$ et A un point de triplet de coordonnées (α, β, γ) dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.
La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est : $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exercice 36 Soient a, b et c trois nombres réels non nuls et A, B et C les points de $\mathcal{E}$ de triplets de coordonnées respectifs dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ et $(0, 0, c)$.

Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés et que : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ est une équation du plan (ABC).
Montrer que la distance d du point O au plan (ABC) vérifie l'égalité : $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Exercice 37 L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$, $\mathcal{T}$ un plan d'équation cartésienne :

$$-x+2y-3z-3=0.$$

Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{T}$.

Exercice 38 L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives :

$$x+y-z+1=0 \quad \text{et} \quad -x+2y+z-2=0.$$

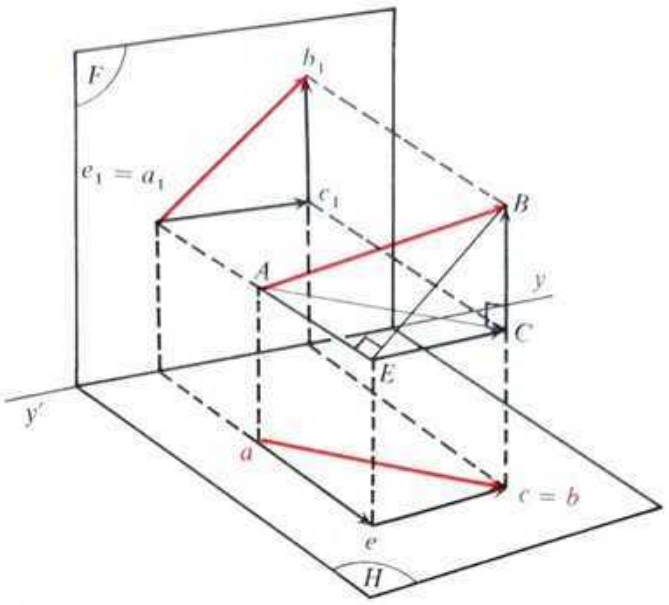
Montrer que l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ est égal à la réunion de deux plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ dont on donnera des équations cartésiennes.
Montrer que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ sont perpendiculaires.

On peut utiliser la géométrie descriptive pour avoir une valeur approchée de la distance d'un point A à un plan $\mathcal{T}$. Cette méthode est parfois avantageuse quand on ne connaît pas une équation cartésienne du plan. On recherche le projeté orthogonal A' de A sur $\mathcal{T}$ (voir méthode pratique page 364) et on évalue la distance AA' comme on va le voir maintenant.

4 Distance en descriptive

Question 41 *Soient $\mathcal{T}$ un plan, A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, et (D) une droite sécante à $\mathcal{T}$.*
On note p la projection sur $\mathcal{T}$ parallèlement à (D), A_1 le projeté de A et B_1 le projeté de B par p.
Montrer que si la droite (AB) est parallèle au plan $\mathcal{T}$ alors $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$.
2) Soient (a, a') et (b, b') les épures respectives des deux points distincts A et B.
Montrer que si la droite (AB) est frontale, alors $AB = a'b'$.
Montrer que si la droite (AB) est horizontale, alors $AB = ab$.

Question 42 *Dans cette question la droite (AB) est ni frontale ni horizontale.*
Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, associée au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées x, y et z. On considère les points E et C de $\mathcal{E}$ définis par : $\overrightarrow{AE}=x\vec{i}$, et $\overrightarrow{EC}=y\vec{j}$.

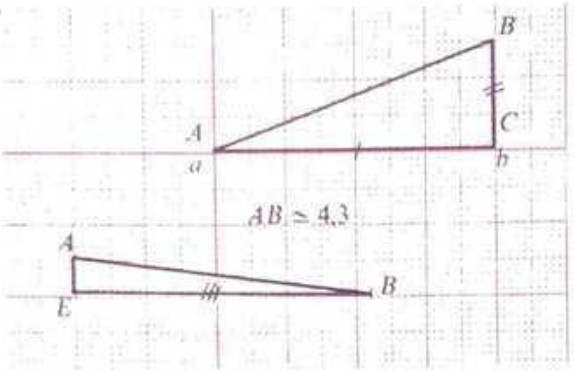


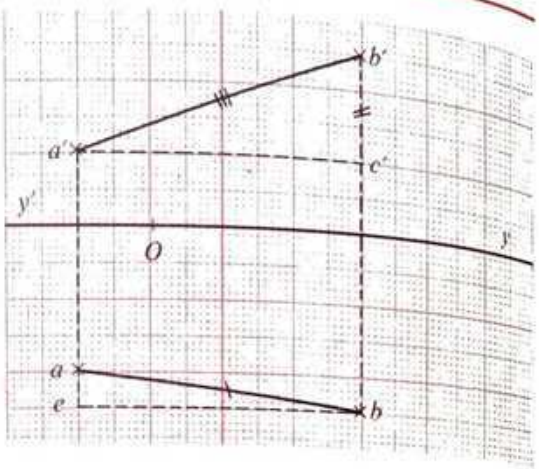
Vérifier que $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$, *que les points A, B et C d'une part, A, B et E d'autre part, sont non alignés.*
On note e et c les projetés horizontaux de E et C, a_1, b_1, c_1 *et* e_1 *les projetés frontaux respectifs de A, B, C et E.*
Pourquoi a-t-on $b = c$? $e_1 = a_1$?
Vérifier que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ae}$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ec} = \overrightarrow{e_1c_1} = \overrightarrow{a_1c_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b_1c_1}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab}$, et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{b_1e_1} = \overrightarrow{b_1a_1}$.
Démontrer que les triangles ABC et ABE sont rectangles, respectivement en C et E.

Mais pour déterminer AB sur l'épure lorsque (AB) est ni frontale ni horizontale, on utilisera le triangle rectangle ABC et les égalités $AC = ab$ et $BC = b'c'$ (car dans la « rotation » on aura $b_1c_1 = b'c'$) en notant (c, c') l'épure du point C; on peut aussi utiliser le triangle rectangle ABE et les égalités : $BE = b'a'$ (car $b_1a_1 = b'a'$) et $AE = ae$.

Méthode pratique

Pour déterminer, grâce à une épure la distance de deux points distincts A et B lorsque (AB) est ni frontale ni horizontale, il faut construire un triangle rectangle ayant un côté de l'angle droit isométrique au projeté horizontal $[ab]$ (ou frontal $[a'b']$) du segment $[AB]$, et dont la longueur de l'autre côté de l'angle droit a pour mesure la valeur absolue de la différence des cotes de A et B (ou celle des abscisses de A et de B).
La distance AB est alors la mesure de la longueur de l'hypoténuse de ce triangle.
On remarque que si A et B ont même cote alors AB est égal à $a'b'$ et si A et B ont même abscisse alors AB est égal à ab où (a, a') et (b, b') sont les épures de A et B.
Ainsi par exemple soient A et B les points de $\mathcal{E}$ de triplets de coordonnées respectifs $(2, -1, 1)$ et $\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$. Sur la figure on a représenté les épures (a, a') et (b, b') de ces deux points. On place alors le point c' sur la figure : sur la ligne de rappel de b et la parallèle à





$(y'y)$ par a' : $a'b'c'$ est rectangle en c' et $b'c'$ est la valeur absolue de la différence des cotes de A et B et le point C d'épure (c, c') avec $c = b$, est tel que le triangle ABC est rectangle en C et $AC = ab$ et $BC = b'c'$.
On reporte alors sur une autre figure ce triangle ABC avec ces égalités et on mesure alors la distance de A à B : ici on trouve une valeur approchée de AB, égale à 4,3 à 0,05 près.
On peut aussi construire le triangle ABE rectangle en E avec $BE = a'b'$ et $AE = ae$ où e est le point d'intersection de la ligne de rappel de a et de la parallèle à $(y'y)$ par b : ae est la valeur absolue de la différence des abscisses de A et B et le point E a pour épure (e, e') avec $e' = a'$; là encore on a : $AB \simeq 4{,}3$.

Exercice 39 Tracer l'épure de la droite (AB) définie par $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$.

Déterminer la distance AB en utilisant l'épure.
Calculer directement la longueur AB et comparer les résultats.

Exercice 40 L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ quatre points de $\mathcal{E}$.

Placer les épures respectives (a, a'), (b, b'), (c, c') et (m, m') des points A, B, C et M, puis tracer l'épure (δ, δ') de la droite (Δ) passant par M et orthogonale au plan (ABC).
Déterminer le projeté orthogonal I de M sur (ABC). Évaluer la distance de M au plan (ABC) (incertitude : 0,05).
Résoudre analytiquement le problème de la distance de M au plan (ABC).
Comparer les résultats obtenus.

Exercice 41 Nous reprenons l'exercice 37 où $A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\mathcal{S}$ a pour équation cartésienne :

$$-x + 2y - 3z - 3 = 0.$$

Représenter les épures des traces de $\mathcal{S}$: $(\alpha p, \alpha p')$ et $(\alpha q, \alpha q')$.
Déterminer le projeté orthogonal I de A sur $\mathcal{S}$.
Évaluer la distance de A au plan $\mathcal{S}$.
Comparer avec le résultat de l'exercice 37.

VII. Lieux géométriques

1 Ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k$

Soient O un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ et k un nombre réel.
On note E_k l'ensemble $\{ M \in \mathcal{E}, \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k \}$.

Question 43 *Déterminer E_k dans les cas suivants :*

1) $\vec{u} = \vec{0}$ *et* $k = 0$

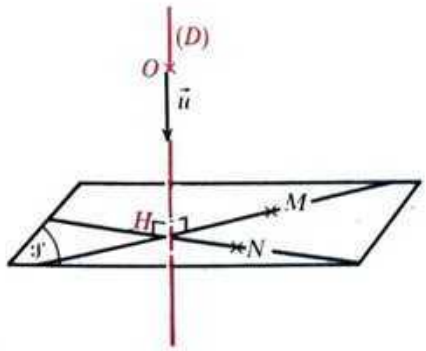
2) $\vec{u} = \vec{0}$ *et* $k \neq 0$

3) $\vec{u} \neq \vec{0}$ *et* $k = 0$.

Vérifier que si $\vec{u}$ est non nul alors E_k est non vide.

On suppose maintenant que $\vec{u}$ est non nul.

Question 44 *On note (D) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit M un point de E_k.*
On considère le plan $\mathcal{S}$ contenant M et tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{S}$ et on note H le point d'intersection de la droite (D) et du plan $\mathcal{S}$.



$$M \in \mathcal{S} \quad (D) \perp \mathcal{S} \quad \{H\} = (D) \cap \mathcal{S}$$
$$N \in \mathcal{S} \quad O \in (D)$$

Pourquoi a-t-on :

$$\forall N \in \mathcal{E} \quad [N \in \mathcal{S} \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0] ?$$

En déduire que $\mathcal{S}$ est égal à E_k.

Montrer que : $\overrightarrow{OH} = \dfrac{k}{\|\vec{u}\|^2} = \vec{u}$.

Ainsi on a :

Théorème :

Soient O un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$ et k un nombre réel.
L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k$ est le plan orthogonal à la droite $D(O, \vec{u})$ au point H défini par $\overrightarrow{OH} = \frac{k}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$.

Exercice 42

1) Soient O un point de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ de norme 3. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = -6.$$

2) Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathcal{W}$ et $\vec{u}$ le vecteur égal à $2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
Calculer la norme de $\vec{u}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées x, y et z d'un point M de $\mathcal{E}$ pour qu'il vérifie $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = -6$.
Comparer les deux résultats obtenus.

2 Ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$

Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et k un nombre réel.
On note F_k l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $MA^2 - MB^2 = k$.

Question 45 *Dans le cas où $A = B$, résoudre l'équation :*

$$M \in \mathcal{E}, \quad MA^2 - MB^2 = k.$$

Dans la suite on considère que A et B sont distincts

Question 46 *On note O le milieu de $[AB]$.*
Montrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$ on a :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Ainsi F_k est $\left\{ M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{k}{2} \right\}$.

D'après le paragraphe précédent, en notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, l'ensemble F_k est le plan orthogonal à la droite (AB) au point H défini par $\overrightarrow{OH} = \frac{k}{2AB^2} \overrightarrow{AB}$.

Ainsi on a :

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$ et k un nombre réel. L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $MA^2 - MB^2 = k$, est le plan orthogonal à la droite (AB) au point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \frac{k}{2AB^2} \overrightarrow{AB}$ où O est le milieu de $[AB]$.

Question 47 ⟨ *Déterminer l'ensemble* F_0.

Le résultat trouvé à cette question est le suivant :

Théorème

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $MA = MB$, c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de A et B, est le plan orthogonal à la droite (AB) en le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire le plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice 43 ⟨ 1) Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ tels que $AB = 5$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $MA^2 - MB^2 = 20$.

2) $\mathcal{E}$ étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix}$.
Calculer AB.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées d'un point M pour qu'il vérifie $MA^2 - MB^2 = 20$.

Exercice 44 ⟨ Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans médiateurs respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
Montrer que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivant une droite (Δ).
Montrer que (Δ) est orthogonale au plan (ABC).
Déterminer l'intersection de (Δ) avec le plan (ABC).

Exercice 45 ⟨ Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$.
Montrer qu'il existe un point et un seul équidistant des points A, B, C et D.

3 Sphère

Définition

Soient O un point de $\mathcal{E}$ et R un nombre réel positif.
On appelle **sphère de centre O, de rayon R** l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $OM = R$.

Question 48 *L'espace $\mathcal{E}$ étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient A le point de triplet de coordonnées (a, b, c), R un nombre réel positif et $\mathcal{S}$ la sphère de centre A et de rayon R.*
Soit M un point de $\mathcal{E}$ de triplet de coordonnées (x, y, z).
Montrer que M appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

où : $$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2.$$

Ainsi on a :

Théorème

Dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, une sphère dont le centre a pour triplet de coordonnées (a, b, c) est caractérisée par une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

(où d est un nombre réel) appelée équation cartésienne de la sphère.

Exercice 46 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et passant par $B\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

Question 49 *Soient a, b, c et d quatre nombres réels et, $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère orthonormé, E l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ de triplet de coordonnées (x, y, z) tels que :*

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Démontrer que :
si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$, alors E est vide
si $a^2 + b^2 + c^2 = 4d$, alors E est un singleton que l'on déterminera
si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$, alors E est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

En remarquant qu'un singleton est une sphère de rayon nul, on a :

Théorème

L'espace étant apporté à un repère orthonormé, l'ensemble :

$$\left\{ M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \right\}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels, est soit vide soit une sphère.

Exercice 47 Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\8\\0\end{pmatrix}$.

Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Déterminer une équation cartésienne de la sphère passant par A, B, C et D.

Exercice 48 Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{S}$ une sphère de centre O et de rayon le nombre réel strictement positif R.

On note H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$ et $\vec{k}$ le vecteur de $\mathcal{W}$ tel que $\overrightarrow{OH} = d\vec{k}$ où d est la distance de O à $\mathcal{P}$.

On considère une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Vérifier que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.

Déterminer dans ce repère les équations cartésiennes de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$.

Démontrer que :

1) si $R < d$, alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est vide

2) si $R = d$, alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{H\}$

3) si $R > d$, alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

L'intersection d'une sphère et d'un plan est : soit vide soit un cercle qui peut être réduit à un point, dans ce dernier cas on dit que le **plan** est **tangent à la sphère.**

Exercice 49 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$, k un nombre réel et E l'ensemble $\{M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\}$.

1) Déterminer E lorsque $A = B$ (discuter selon les valeurs de k).

2) On considère A et B distincts et I le milieu de $[AB]$.

Vérifier que :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \left[M \in E \iff IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}\right].$$

En déduire la nature de E selon les valeurs de k.

Exercice 50 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et k un nombre réel. Déterminer, selon les valeurs du nombre réel k par rapport à AB, l'ensemble $\{M \in \mathcal{E},\ MA^2 + MB^2 = k\}$ (on fera intervenir le milieu de $[AB]$).

Réponses aux questions

Q 1

Les droites perpendiculaires à (AE) qui contiennent une arête sont :

(AB), (AD), (EF) et (EH).

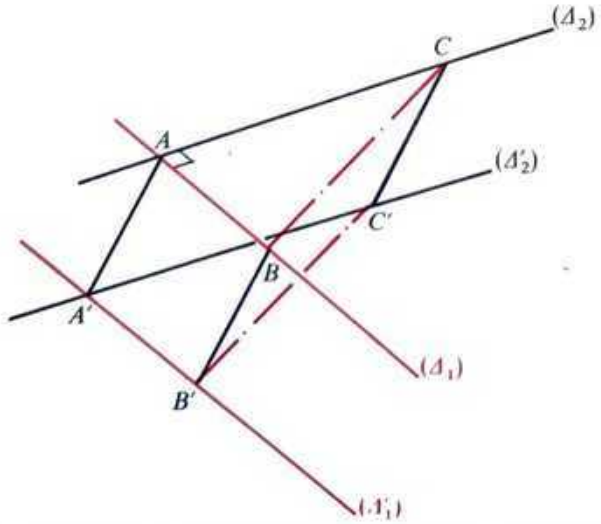
Q 2

1) Le point A, par définition, appartient à (Δ_1) et (Δ_2), donc ces deux droites sont, soit sécantes, soit confondues.
Si (Δ_1) était confondue avec (Δ_2) alors (Δ_2) serait, comme (Δ_1), parallèle à (D_1). Comme (D_2) est parallèle à (Δ_2), (D_2) serait aussi parallèle à (D_1). Ce qui est en contradiction avec : (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.
Ainsi (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes en A, et déterminent un unique plan $\mathcal{P}$.

2) Soient B un point de (Δ_1) distinct de A, C un point de (Δ_2) distinct de A.
Puisque (Δ_1) est perpendiculaire à (Δ_2), d'après le théorème de Pythagore dans le plan $\mathcal{P}$, on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Comme, ci-dessus pour (Δ_1) et (Δ_2), on montre que les droites (Δ'_1) et (Δ'_2), parallèles respectives par A' à (D_1) et (D_2), sont sécantes en A' et définissent un unique plan $\mathcal{P}'$.
Par ailleurs, puisque (Δ_1) et (Δ'_1) sont parallèles à (D_1), la droite (Δ_1) est parallèle à (Δ'_1). De même (Δ_2) est parallèle à (Δ'_2).

- Si A' appartient à (Δ_1) on a (Δ_2) alors on a : $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ et dans ce plan le résultat demandé est connu.

- Si A' n'appartient ni à (Δ_1) ni à (Δ_2) alors (Δ_1) et (Δ'_1) sont parallèles et disjointes, de même (Δ_2) et (Δ'_2) sont parallèles et disjointes. Ainsi il existe un unique point B' de (Δ'_1) tel que $AA'B'B$ soit un parallélogramme (tracer la parallèle à (AA') par B), et il existe un unique point C' de (Δ'_2) tel que $AA'C'C$ soit un parallélogramme.



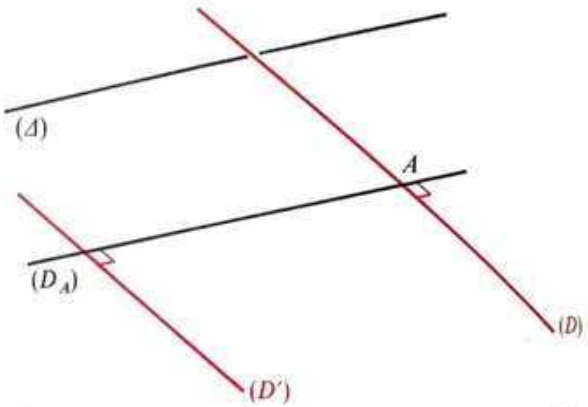
On a alors : $A'B' = AB$ et $A'C' = AC$. De plus les droites (BB') et (CC') sont parallèles entre elles, car parallèles à (AA'), et $BB' = CC'$ car égaux tous deux à AA'. Ainsi $BCC'B'$ est aussi un parallélogramme, on en déduit :

$$B'C' = BC.$$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ se traduit alors par $A'B'^2 + A'C'^2 = B'C'^2$.
Comme les points A', B' et C' sont trois points du plan $\mathcal{P}'$, d'après le théorème de Pythagore, le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A', c'est-à-dire (Δ'_1) est perpendiculaire à (Δ'_2).

Q 3

1)



Soit A un point de (D) et (D_A) la parallèle à (Δ) passant par A.
La droite (D) est la parallèle à (D') passant par A.
Ainsi, puisque (Δ) est orthogonale à (D'), les deux parallèles respectives (D_A) et (D) à (Δ) et (D') menées par A sont sécantes et perpendiculaires : (D_A) est sécante à (D) en A, et (D_A) est perpendiculaire à (D) dans le plan $P((D), (D_A))$. De ce fait puisque (D_A) est parallèle à (Δ), (D) et (Δ) sont orthogonales.

2) On peut très bien avoir deux droites (D) et (D') orthogonales à la même droite (Δ) sans que (D) et (D') soient parallèles. En effet dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ on a vu, à la question 1 que (DA) et (AB) sont orthogonales (et même perpendiculaires) à (AE). Pourtant les droites (DA) et (AB) ne sont pas parallèles.

Q 4

Soit (Δ) une droite incluse dans le plan (ABC). On note (Δ') la droite parallèle à (Δ) et passant par B. D'après ce qui précède, puisque (Δ') est incluse dans le plan (ABC) et passe par B, (Δ') est perpendiculaire à (BF).
Donc, par définition de l'orthogonalité de deux droites, (Δ) est orthogonale à (BF).

Q 5

Supposons que (D) est parallèle à $\mathcal{F}$.
Il existe alors une droite (Δ) incluse dans $\mathcal{F}$ et parallèle à (D).
(Δ) n'est alors pas orthogonale à (D) (car une droite parallèle à (D) passant par un point de (Δ) sera confondue avec (Δ) et non perpendiculaire). Ce qui contredit le fait que (D) est orthogonale à $\mathcal{F}$.
Donc (D) n'est pas parallèle à $\mathcal{F}$ c'est-à-dire (D) est sécante à $\mathcal{F}$.

Q 6

1) Soit (Δ_1) une droite incluse dans $\mathcal{F}_1$.
Puisque (D_1) est orthogonale à $\mathcal{F}_1$, (D_1) est orthogonale à (Δ_1).
Or on sait que :

$$[(D_1) /\!/ (D_2) \quad \text{et} \quad (D_1) \perp (\Delta_1)] \Longrightarrow (D_2) \perp (\Delta_1)$$

donc (D_2) est orthogonale à toute droite (Δ_1) de $\mathcal{F}_1$, c'est-à-dire (D_2) est orthogonale à $\mathcal{F}_1$.

2) Soit (Δ_2) une droite incluse dans $\mathcal{F}_2$.
Puisque $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_2$, il existe une droite (Δ_1) incluse dans $\mathcal{F}_1$, parallèle à (Δ_2).
Puisque (D_1) est orthogonale à $\mathcal{F}_1$, (D_1) est orthogonale à (Δ_1).
Or on sait que :

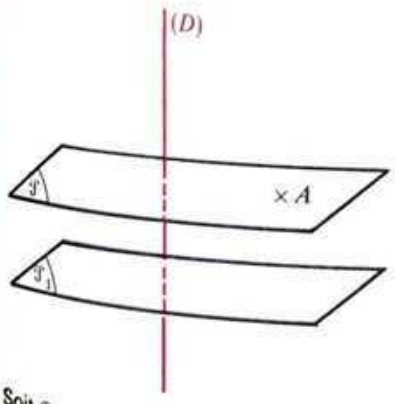
$$[(\Delta_2) /\!/ (\Delta_1) \quad \text{et} \quad (D_1) \perp (\Delta_1)] \Longrightarrow (D_1) \perp (\Delta_2)$$

donc (D_1) est orthogonale à toute droite (Δ_2) incluse dans $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire (D_1) est orthogonale à $\mathcal{F}_2$.

Q 7

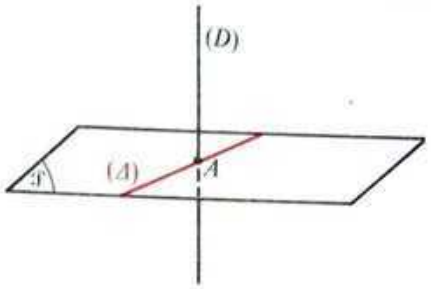
1)

$$\begin{array}{l} (D) \perp \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F} \ /\!/ \ \mathcal{F}_1 \\ A \ \in \mathcal{F} \end{array}$$



Soit $\mathcal{F}_1$ un plan tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{F}_1$.
On note $\mathcal{F}$ l'unique plan parallèle à $\mathcal{F}_1$ passant par A.
D'après le résultat précédent, puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ sont parallèles, et que (D) est orthogonale à $\mathcal{F}_1$, la droite (D) est orthogonale aussi à $\mathcal{F}$.
Ainsi $\mathcal{F}$ passe par A et (D) est orthogonale à $\mathcal{F}$.

2)



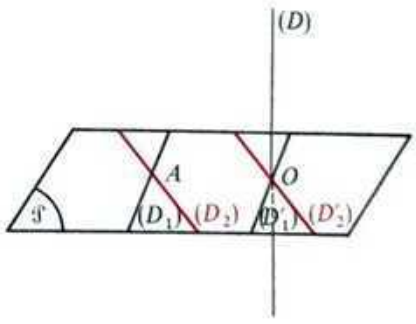
$$\begin{array}{l} (\Delta) \cap (D) = \{A\} \\ A \ \in \mathcal{F} \\ (D) \perp \mathcal{F} \end{array}$$

a) Si (Δ) est incluse dans $\mathcal{F}$ alors (Δ) est orthogonale à (D) (définition de droite orthogonale à un plan) or (D) et (Δ) sont sécantes en A donc elles sont perpendiculaires en A.
b) Si (Δ) est perpendiculaire en A à (D), alors les droites (D) et (Δ) définissent un unique plan $\mathcal{Q}$ qui contient A et un point B de (Δ) distinct de A, or (D) est orthogonale à $\mathcal{F}$ donc B n'appartient pas à $\mathcal{F}$, or A appartient à $\mathcal{F}$, les plans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$ sont donc sécants.
Notons (Δ') la droite d'intersection de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$.
$A \in (\Delta')$ et comme (D) est orthogonale à $\mathcal{F}$ et que (Δ') est incluse dans $\mathcal{F}$, (Δ') est orthogonale à (D) donc (Δ') est perpendiculaire à (D) en A.
Or (Δ') est incluse dans $\mathcal{Q}$; dans ce plan, les droites (Δ) et (Δ') sont toutes deux perpendiculaires à (D) en A; ainsi (géométrie plane) (Δ) et (Δ') sont confondues.
(Δ') est incluse dans $\mathcal{F}$ donc (Δ) est incluse dans $\mathcal{F}$.

Remarques. On a ainsi :

$(\Delta) \subset \mathcal{F} \Longleftrightarrow (\Delta)$ perpendiculaire à (D) en A. De plus $\{A\} = (\Delta) \cap (D)$ et A appartient à $\mathcal{F}$ donc $\{A\} = (D) \cap \mathcal{F}$.

3)



$$\begin{array}{c} (D) \cap \mathcal{F} = \{0\}, \quad (D_1) \subset \mathcal{F}, \\ (D_2) \subset \mathcal{F}, \quad (D_1) \cap (D_2) = \{A\}, \\ (D'_1) /\!/ (D_1), \quad O \in (D'_1) \\ (D'_2) /\!/ (D_2), \quad O \in (D'_2) \end{array}$$

Puisque O appartient à $\mathcal{F}$ et (D_1) est parallèle à $\mathcal{F}$ (est incluse dans $\mathcal{F}$) (D'_1), qui est la parallèle à (D_1) par O, est incluse dans $\mathcal{F}$. De même (D'_2) est incluse

dans $\mathcal{P}$ car O appartient à $\mathcal{P}$ et (D_2) est incluse dans $\mathcal{P}$.
Puisque (D_1) est orthogonale à (D) et que (D'_1) est la parallèle à (D_1) passant par le point O de (D), la droite (D_1) est perpendiculaire à (D). D'après le 2) *b*), (D_1) est perpendiculaire à (D) en O avec (D) est orthogonale à $\mathcal{Q}$ en O, donc (D'_1) est incluse dans $\mathcal{Q}$.
On montre de même que (D'_2) est incluse dans $\mathcal{Q}$.
Les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ contiennent les deux droites sécantes (D_1) et (D_2) donc ils sont égaux ((D'_1) est sécante à (D'_2) car leurs parallèles respectives (D_1) et (D_2) le sont).
Puisque (D) est orthogonale à $\mathcal{Q}$, (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Q 8

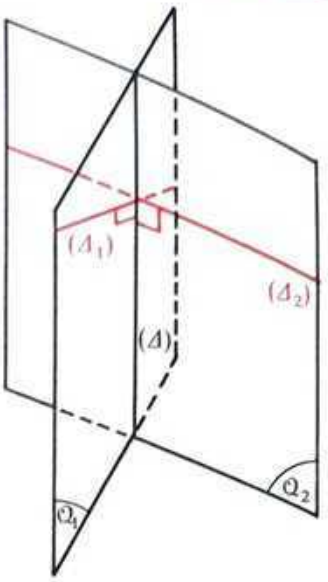
Puisque (D') est parallèle à (D) et passe par le point O de (Δ), et que (D) est orthogonale à (Δ), (D') est perpendiculaire à (Δ) en O.
Les droites (Δ) et (D') sont sécantes en O donc elles définissent un plan $\mathcal{Q}$.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont le point O en commun mais (Δ) est incluse dans $\mathcal{Q}$ et non dans $\mathcal{P}$ donc ces deux plans sont sécants. Soit (D'') leur droite d'intersection. (D'') contient O et, puisque (Δ) est orthogonale à $\mathcal{P}$, (D'') est orthogonale à (Δ), et même perpendiculaire à (Δ) en O. (D'') appartient aussi à $\mathcal{Q}$ donc (D'') est la droite de $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à (Δ) en O.
Comme (D') est aussi la droite de $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à (Δ) en O, on a : $(D') = (D'')$. Ainsi (D') est incluse dans $\mathcal{P}$, donc (D) est parallèle à $\mathcal{P}$.

Q 9

Puisque (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ et que (D_0) est incluse dans $\mathcal{P}$, (D_0) est orthogonale à (D).
Soit (D'_0) la droite parallèle à (D_0) passant par O'. (D'_0) est ainsi orthogonale à (D).
Or (D'_0) a en commun avec $\mathcal{P}'$ le point O' et (D) est orthogonale à $\mathcal{P}'$ donc (D'_0) est incluse dans $\mathcal{P}'$.
De même la droite (Δ'), parallèle à (Δ) menée par O', est incluse dans $\mathcal{P}'$.
Ainsi le plan $\mathcal{P}'$ contient les deux droites (D'_0) et (Δ') parallèles respectives aux deux droites (D_0) et (Δ) sécantes et incluses dans $\mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

Q 10

Il suffit de prendre deux plans $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sécants suivant (Δ) de tracer dans chacun de ces plans la perpendiculaire à (Δ) passant par un point fixé O de (Δ). Ces deux droites sont sécantes en O et perpendiculaires à (Δ), elles définissent un plan $\mathcal{Q}$ qui est tel que (D) lui soit orthogonal.
Puisque (D) est orthogonale à $\mathcal{Q}$, tout plan parallèle à $\mathcal{Q}$ est tel que (D) lui soit orthogonale en particulier l'unique plan $\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{Q}$ passant par A est tel que (D) soit orthogonal à $\mathcal{P}$.

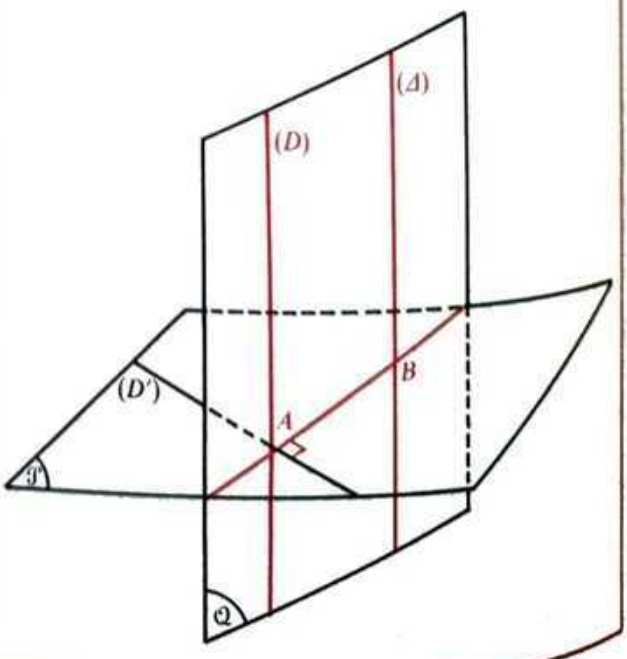


$$(\Delta) = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$$
$$(\Delta_1) \subset \mathcal{Q}_1, \quad (\Delta_1) \perp (\Delta),$$
$$\{0\} = (\Delta_1) \cap (\Delta)$$
$$(\Delta_2) \subset \mathcal{Q}_2, \quad (\Delta_2) \perp (\Delta),$$
$$\{0\} = (\Delta_2) \cap (\Delta)$$

S'il existe un autre plan $\mathcal{P}'$ passant par A et tel que (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}'$, alors, d'après le théorème précédent les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ seraient parallèles.
Comme A appartient à ces deux plans, on a : $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.
Ainsi on a l'unicité du plan passant par A et tel que (D) lui soit orthogonal.

Q 11

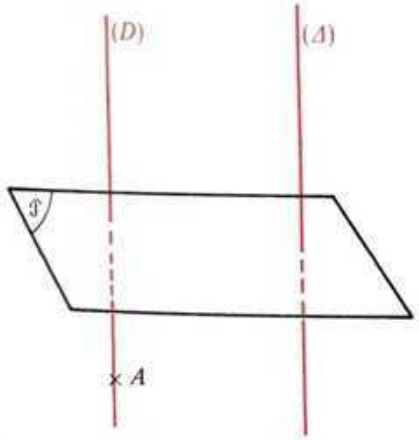
Puisque B est distinct de A et que, (D) est sécante à $\mathcal{P}$ en A, le point B n'appartient pas à (D). On note $\mathcal{Q}$ le plan déterminé par B et (D).



$(D) \perp \mathcal{T}$ $(D) \cap \mathcal{T} = \{A\}$
$(\Delta) \perp \mathcal{T}$ $(\Delta) \cap \mathcal{T} = \{B\}$
$(D') \subset \mathcal{T}$ $(D') \perp (AB)$
$(D') \cap (AB) = \{A\}$

Puisque (Δ) est orthogonale à $\mathcal{T}$, (Δ) est orthogonale à (D') qui est incluse dans $\mathcal{T}$. (D) est orthogonale à $\mathcal{T}$ donc (D) est orthogonale à (D'). Comme (D') est aussi perpendiculaire à (AB) qui est incluse dans $\mathcal{Q}$, la droite (D') est orthogonale aux deux droites (D) et (AB) sécantes et incluses dans $\mathcal{Q}$: (D') est orthogonale à $\mathcal{Q}$.
Puisque (D') est orthogonale à la droite (Δ) qui a le point B en commun avec $\mathcal{Q}$, (Δ) est incluse dans le plan $\mathcal{Q}$.
Les droites (D) et (Δ) sont deux droites du plan $\mathcal{Q}$, perpendiculaires à (AB) qui est elle-même incluse dans $\mathcal{Q}$ (car $B \in \mathcal{Q}$ et $A \in (D)$, $(D) \subset \mathcal{Q}$ d'où $A \in \mathcal{Q}$), donc, d'après la géométrie plane (D) et (Δ) sont parallèles.

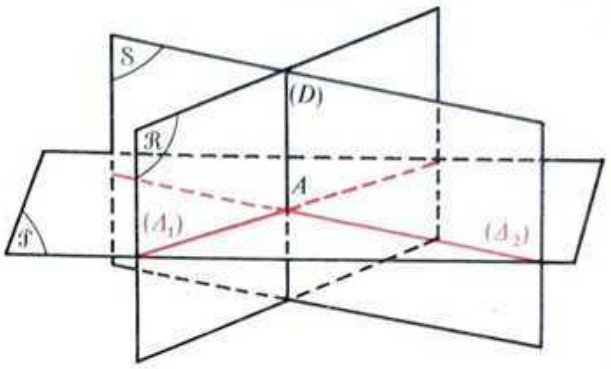
Q 12



Soit (Δ) une droite orthogonale à $\mathcal{T}$.
La droite (D) parallèle à (Δ) passant par A est orthogonale à $\mathcal{T}$ d'après le théorème précédent.
Supposons qu'il existe deux droites : (Δ_1) et (Δ_2) orthogonale à $\mathcal{T}$ et passant par A. Puisqu'elles sont orthogonales à un même plan, ces droites (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles entre elles. Or elles ont le point A en commun donc elles sont confondues.
Ainsi on a l'existence et l'unicité d'une droite orthogonale à $\mathcal{T}$ et passant par A.

Q 13

Soit $\mathcal{T}$ le plan orthogonal à (D) en A. Puisque (D) est incluse dans $\mathcal{R}$ et que (D) est sécante à $\mathcal{T}$, les plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ sont sécants, suivant une droite (Δ_1). De même les plans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont sécants suivant une droite (Δ_2).
Puisque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont sécants et contiennent (D), donc A, les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes en A, elles déterminent le plan $\mathcal{T}$.



Puisque (D) est orthogonale à $\mathcal{T}$, (D) est orthogonale à (Δ_1) et (Δ_2), et même, puisque A appartient à ces trois droites, (D) est perpendiculaire à (Δ_1) et (Δ_2) en A.
Ainsi pour déterminer $\mathcal{T}$ il suffit de tracer dans les plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ respectivement les uniques droites (Δ_1) et (Δ_2) perpendiculaires en A à (D).

Q 14

Soit ABM un triangle isocèle de sommet A, avec : $AB = AM = 5$. On sait (relations métriques dans un triangle) que :

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cos \widehat{BAM}$$

d'où :

$$BM^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos \widehat{BAM}$$

c'est-à-dire :

$$50 \cos \widehat{BAM} = 50 - BM^2$$

donc :

$$\cos \widehat{BAM} = 1 - \frac{BM^2}{50}.$$

Oui, si (BA) est orthogonale à $\mathcal{S}_1$.

Q 15

Puisque (D) est orthogonale à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, et que A' est distinct de A, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont parallèles et disjoints. Ainsi leurs intersections respectives avec le plan $\mathcal{R}$ sont deux droites parallèles : or ces droites sont (AB) et $(A'B')$ (puisque $B \neq A$, la droite parallèle à (D) par B est distincte de (D), d'où $B' \neq A'$).
Ainsi (AB) est parallèle à $(A'B')$. De plus, par définition, B' est distinct de B car $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont disjoints, et (BB') est parallèle à (D) c'est-à-dire à (AA'). Donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.
De la même manière on montre que $AA'C'C$ est un parallélogramme.
On a alors :

(BB') parallèle à (AA') et (CC') parallèle à (AA') d'où : (BB') est parallèle à (CC').

De plus :

$BB' = AA'$ et : $CC' = AA'$
d'où : $BB' = CC'$.

Ainsi $BB'C'C$ est un parallélogramme.
Puisque $AA'B'B$, $AA'C'C$ et $BB'C'C$ sont des parallélogrammes, on a :

$$AB = A'B', \quad AC = A'C'$$

et $$BC = B'C'.$$

En utilisant la relation métrique :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}$$

dans un triangle ABC où :

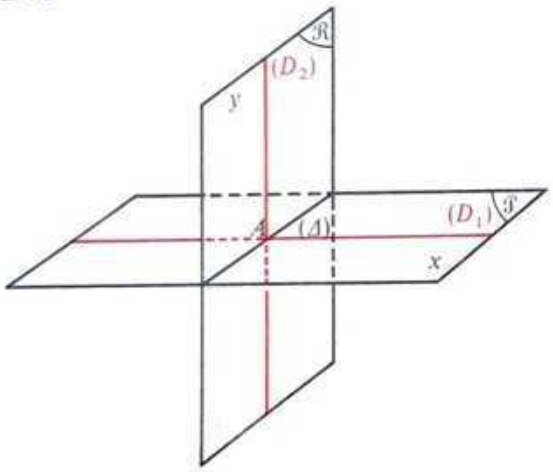
$$BC = a, \quad AC = c \quad \text{et} \quad AB = c,$$

on en déduit que :

$$\cos \widehat{BAC} = \cos \widehat{B'A'C'}$$

puis : $$\widehat{BAC} \text{ iso } \widehat{B'A'C'}$$

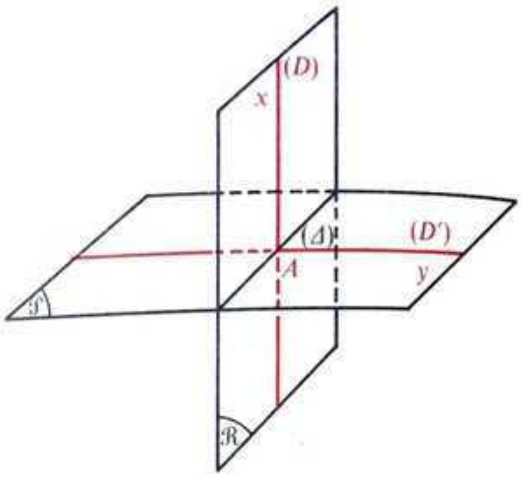
Q 16



Notons $\widehat{xAy}$ le rectiligne de sommet A d'un des dièdres formés par les plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$. $[Ax)$ est incluse dans (D_1) et $[Ay)$ est incluse dans (D_2).
On note $\mathcal{Q}$ le plan orthogonal à (D) en A : $\mathcal{Q} \cap \mathcal{T} = (D_1)$ et $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = (D_2)$. Les droites (D_1) et (D_2) sont donc perpendiculaires à (Δ) en A.
Puisque $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires, mes° $\widehat{xAy} = 90$, donc (D_1) est perpendiculaire à (D_2) (dans le plan $\mathcal{Q}$).
Ainsi (D_2) est perpendiculaire aux deux droites (Δ) et (D_1) du plan $\mathcal{T}$, sécantes en A; donc (D_2) est orthogonale à $\mathcal{T}$.
De même (D_1) est perpendiculaire à (Δ) et (D_2), qui sont deux droites sécantes de $\mathcal{R}$, donc (D_1) est orthogonale à $\mathcal{R}$.

Q 17

Soit (D') la droite de $\mathcal{T}$ perpendiculaire à (Δ) en A.
Puisque (D) est orthogonale à $\mathcal{T}$ en A, (D) est perpendiculaire à (Δ) et à (D') en A (car elles sont incluses dans $\mathcal{T}$ et contiennent A).



Les droites (D) et (D') incluses respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$, et perpendiculaires à l'intersection (Δ) de ces plans, sont les supports d'un rectiligne d'un dièdre formé par ces deux plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$.
Or (D) est perpendiculaire à (D') donc ce rectiligne est droit. Par définition les plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

Q 18

Puisque $\mathcal{S}$ est perpendiculaire à $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ contient une droite (D) orthogonale à $\mathcal{T}$.
Puisque $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ sont parallèles, la droite (D), orthogonale à $\mathcal{T}$, est orthogonale à $\mathcal{R}$.
Ainsi $\mathcal{S}$ contient une droite orthogonale à $\mathcal{R}$. Donc $\mathcal{S}$ est perpendiculaire à $\mathcal{R}$.
Non, par exemple, soient 2 plans $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{R}'$ dont un rectiligne a une mesure de 60°, qui ont pour intersection la droite (Δ) (voir figure de la question 19), et A un point de (Δ).
Le plan $\mathcal{S}$ orthogonal en A à (Δ) est perpendiculaire à $\mathcal{T}'$ car $\mathcal{T}'$ contient (Δ) qui est orthogonale à $\mathcal{S}$; de même $\mathcal{S}$ est perpendiculaire à $\mathcal{R}'$.
Pourtant $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{R}'$ ne sont ni perpendiculaires ni parallèles.

Q 19

Puisque $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ sont perpendiculaires, il existe une droite (Δ_1) de $\mathcal{T}$ orthogonale à $\mathcal{S}$.
Puisque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont perpendiculaires, il existe une droite (Δ_2) de $\mathcal{R}$ orthogonale à $\mathcal{S}$.
Les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) sont orthogonales à $\mathcal{S}$ donc (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles.
Le plan $\mathcal{T}$ contient donc la droite (Δ_1) parallèle à $\mathcal{R}$ (car parallèle à la droite (Δ_2) de $\mathcal{R}$) de ce fait (Δ_1) est parallèle à la droite (Δ) d'intersection de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{R}$.
Puisque (Δ) est parallèle à (Δ_1) et que (Δ_1) est orthogonale à $\mathcal{S}$, (Δ) est orthogonale à $\mathcal{S}$.

Q 20

Puisque le projeté du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté, I' est le milieu de $[AS']$ car $p(A) = A$ et $p(S) = S'$.
Mais I est aussi le milieu de $[CD]$ car $ACSD$ est un parallélogramme, donc I' est le milieu de $[C'D']$ car $p(C) = C'$ et $p(D) = D'$.
On a :

$$\overrightarrow{AS'} = 2\overrightarrow{AI'}$$

et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} &= \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'D'} \\ &= 2\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{C'I'} \\ &= 2(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'I'}) \\ &= 2\overrightarrow{AI'}\end{aligned}$$

d'où : $\overrightarrow{AS'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$.

Q 21

Soient α, β et γ trois nombres réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \quad (1)$$

Alors :

$$\begin{aligned}\vec{u}.(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) &= \vec{u}.\vec{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

or :

$$\vec{u}.(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \alpha\vec{u}^2$$

car $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u}.\vec{w} = 0$, ainsi on a :

$$\alpha\vec{u}^2 = 0$$

or $\vec{u}$ est non nul d'où $\vec{u}^2 \neq 0$ donc $\alpha = 0$.
(1) s'écrit alors :

$$\beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \quad (2)$$

de même on a :

$$\begin{aligned}\vec{v}.(\beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) &= \vec{v}.\vec{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

et : $\vec{v}.(\beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \beta\vec{v}^2$

or $\vec{v}$ est non nul
d'où :

$$\beta = 0.$$

(2) s'écrit alors :

$$\gamma\vec{w} = \vec{0}$$

or $\vec{w}$ est non nul donc $\gamma = 0$.
Ainsi on a : $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

Q 22

Un vecteur $\vec{v}$ de $\mathfrak{V}$ est colinéaire à $\vec{u}$ si et seulement si il existe un nombre réel t tel que :

$$\vec{v} = t\vec{u}.$$

On a alors :

$$\|\vec{v}\| = |t|\ \|\vec{u}\|.$$

Or $\vec{u}$ est non nul

d'où : $$|t| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$\vec{v}$ est alors unitaire si et seulement si $\|\vec{v}\| = 1$.

C'est-à-dire si et seulement si $|t| = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}$. Ainsi il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$ ce sont les vecteurs :

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}.$$

Q 23

$$\begin{aligned}\vec{u} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} &= x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i}.\vec{j} + xz'\vec{i}.\vec{k} \\ &\quad + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}^2 \\ &\quad + yz'\vec{j}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{i} \\ &\quad + zy'\vec{k}.\vec{j} + zz'\vec{k}^2 \\ &= xx' + yy' + zz'.\end{aligned}$$

En faisant $\vec{v} = \vec{u}$, on obtient :

$$\vec{u}^2 = xx + yy + zz$$

d'où : $$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

On a vu en géométrie plane que :

$$\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$$

d'où :

$$\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Q 24

Soit A un point de $\mathcal{E}$. On note (D) et (Δ) les droites passant par A et parallèles respectivement à (D') et (Δ').
On a :

(D') est orthogonale à (Δ') si et seulement si (D) est perpendiculaire à (Δ).

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs respectivement de (D) et (Δ), on a, en utilisant le résultat précédent la question : (D') est orthogonale à (Δ') si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

Q 25

1) Soient a et b deux nombres réels :

$$(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a\vec{u} \cdot \vec{w} + b\vec{v} \cdot \vec{w}$$
$$= 0$$

car $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ d'où le résultat demandé.

2) Notons $\vec{w}$ un vecteur directeur de (D), $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D_1) et $\vec{v}$ un vecteur directeur de (D_2).
Dire que (D_1) et (D_2) sont sécantes c'est dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires; ces deux vecteurs forment donc, avec le point A d'intersection de (D_1) et (D_2) un repère du plan $\mathcal{P}$ déterminé par (D_1) et (D_2).
Puisque (D) est orthogonale à (D_1) et à (D_2), $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
D'après le 1), $\vec{w}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Or une droite (Δ) de $\mathcal{P}$ a pour vecteur directeur une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ car $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de $\mathcal{P}$ donc (D) est orthogonale à (Δ).

Q 26

1) (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Si $\vec{w}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors, en particulier $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
D'après la question 25, on a la réciproque de cette implication d'où :

(D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
C'est-à-dire si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

2) Soient α, β et γ trois nombres réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \quad (1)$$
$$\vec{w} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{0}$$
$$= 0$$
$$\vec{w} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \alpha\vec{w} \cdot \vec{u} + \beta\vec{w} \cdot \vec{v} + \gamma\vec{w}^2$$
$$= \gamma\vec{w}^2$$

car $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$.
Ainsi on a :

$$\gamma\vec{w}^2 = 0$$

or $\vec{w}$ est non nul d'où $\gamma = 0$ (1) est alors équivalente à :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$$

qui, puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, est équivalente à $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
Ainsi $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathcal{W}$ non coplanaires : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Q 27

1) Tout vecteur de la droite vectorielle de base $\vec{w}$ s'écrit $t\vec{w}$ où t est un nombre réel.
Puisque $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, $(t\vec{w}) \cdot \vec{u} = 0$.
Puisque $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, $(t\vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$.
Ainsi $t\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Donc toute droite de vecteur directeur $\vec{w}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.
Soit $\vec{x}$ un vecteur directeur de (D).
On considère un vecteur $\vec{u}'$ du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$, orthogonal à $\vec{u}$. Alors $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ est un repère orthogonal de $\mathcal{P}$.
Et $\vec{w}$, qui est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est orthogonal à $\vec{u}'$ d'après la question 25.
Puisque $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux au vecteur non nul $\vec{w}$, d'après la question 26, $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Ainsi il existe trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{w}.$$

Puisque (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$, $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ d'après le théorème précédent.
Ainsi :

$$(a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{w}) \cdot \vec{u} = 0.$$

Comme $\vec{u}' \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, on a : $a\vec{u}^2 = 0$. D'où $a = 0$ car $\vec{u}$ est non nul. De même :

$$(a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{w}) \cdot \vec{u}' = 0.$$

Or $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{u}' = 0$, d'où $b\vec{u}'^2 = 0$ donc $b = 0$ car $\vec{u}'$ est non nul.
Ainsi on a : $\vec{x} = c\vec{w}$, autrement dit $\vec{w}$ est un vecteur directeur de (D).

3) Puisque $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$, il existe trois nombres réels a, b et c tels que $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{w}$.
Puisque $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{w}$, on a :

$$(a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

c'est-à-dire $c\vec{w}^2 = 0$ d'où $c = 0$ car $\vec{w} \neq \vec{0}$: ainsi $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{u}'$ donc $\vec{x}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Q 28

Soit $P_{\vec{u},\vec{v}}$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$. On sait qu'il existe au moins un vecteur $\vec{u}'$ de $P_{\vec{u},\vec{v}}$ tel que $\vec{u}'$ soit orthogonal à $\vec{u}$; ainsi $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ est un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.
On sait par ailleurs qu'il existe au moins un vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{W}$ n'appartenant pas à $P_{\vec{u},\vec{v}}$ et donc tel que $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{x})$ soit une base de $\mathcal{W}$.
Montrons qu'il existe un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{u}'$. Soient a et b deux nombres réels. Le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{x} + a\vec{u} + b\vec{u}'$ est non nul, car $(\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}')$ est une base de $\mathcal{W}$.
$\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ si et seulement si :

$$(\vec{x} + a\vec{u} + b\vec{u}') \cdot \vec{u} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\vec{x} \cdot \vec{u} + a\vec{u}^2 = 0$$

car $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$.
Comme $\vec{u}$ est non nul, on a :

$\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u} \iff a = -\dfrac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$.

De même, on obtient :

$\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u'} \iff b = -\dfrac{\vec{x} \cdot \vec{u'}}{\vec{u'}^2}$.

Ainsi le vecteur :

$$\vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}\vec{u} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{u'}}{\vec{u'}^2}\vec{u'}$$

est un vecteur normal à $\mathcal{T}$. Notons le, pour la suite, $\vec{w}$.
La droite $D(B, \vec{w})$ est orthogonale à $\mathcal{T}$ et passe par B.
On sait que deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles donc si deux droites sont orthogonales à $\mathcal{T}$ et passent par B, elles sont confondues.
On a ainsi montré l'existence et l'unicité de la droite (D) orthogonale à $\mathcal{T}$ et passant par B : on a :

$$(D) = D(B, \vec{w}).$$

Soit M un point de $\mathcal{E}$.
M appartient à (D) si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ appartient à la droite vectorielle $D_{\vec{w}}$ de base $\vec{w}$.
D'après la question 27 on a :

$\overrightarrow{BM}$ appartient à $D_{\vec{w}}$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Ainsi on a :

$$M \in (D) \iff [\overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et } \overrightarrow{BM} \cdot \vec{v} = 0].$$

2) Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux et que $\vec{w}$ est non nul, on a :

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $\mathcal{W}$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on a vu que : $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $D(B, \vec{w})$ est orthogonale à $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ d'où le résultat demandé.

Q 29

On sait que $\mathcal{T}$ est parallèle à $\mathcal{T}'$ si et seulement si il existe une droite (D) orhtogonale à la fois à $\mathcal{T}$ et à $\mathcal{T}'$. Or toute droite orthogonale à $\mathcal{T}$ a pour vecteur directeur $\vec{n}$ et toute droite orthogonale à $\mathcal{T}'$ a pour vecteur directeur $\vec{n'}$ donc $\mathcal{T}$ est parallèle à $\mathcal{T}'$ si et seulement si $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{n'}$.

Q 30

1) $\mathcal{T}$ est perpendiculaire à $\mathcal{T}'$ si et seulement si il existe une droite de $\mathcal{T}'$ orthogonale à $\mathcal{T}$ c'est-à-dire si et seulement si il existe une combinaison linéaire de $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ orthogonale à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Puisque une droite (D) est orthogonale à $\mathcal{T}$ si et seulement si (D) a pour vecteur directeur $\vec{n}$, les plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont perpendiculaires si et seulement si il existe une droite (D) incluse dans $\mathcal{T}'$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{n}$.
Ainsi $\mathcal{T}$ est perpendiculaire à $\mathcal{T}'$ si et seulement si $\vec{n}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{T}'$.
Or, $\vec{n'}$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}'$ donc : $\vec{n}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{T}'$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{n'}$. D'où le résultat demandé.

Q 31

Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ alors le résultat est évident. On suppose donc $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ distincts et on note (D) la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{T}$ (donc à $\mathcal{T}'$ qui lui est parallèle).
Par définition de A' et A'', on a $A' \in (D)$ et $A'' \in (D)$.
Les plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont distincts donc A' est différent de A'' et la droite $(A'A'')$ est la droite (D).
De même B' est distinct de B'' et la droite orthogonale à $\mathcal{T}$ passant par B contient B' et B'', celle-ci est parallèle à (D) donc la droite $(B'B'')$ est parallèle à (D).
Puisque (AB) n'est pas orthogonale à $\mathcal{T}$, les droites (D) et (AB) sont sécantes en A et déterminent un plan $\mathcal{Q}$. $\mathcal{Q}$ contient (D) et B donc la droite parallèle à (D) passant par B; il contient donc B' et B''. Il contient aussi A'' (car $A'' \in (D)$). $\mathcal{Q}$ est sécant à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement en $(A'B')$ et $(A''B'')$ qui sont donc deux droites parallèles.
Ainsi $A'B'B''A''$ est un parallélogramme.
On démontrerait de même que $A'C'C''A''$ est un parallélogramme.
On a donc :

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B''A''} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A''C''}$$

On en déduit que $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B''C''}$ en faisant la somme.
On a donc :

$$B'A' = B''A'', \quad A'C' = A''C'' \text{ et } B'C' = B''C''.$$

Les deux triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ ont des côtés de même longueur, d'après les relations métriques dans un triangle, on en déduit que les angles $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{B''A''C''}$ ont même mesure.

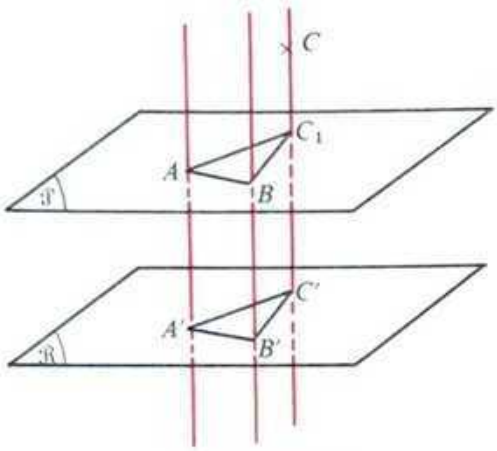
Q 32

Puisque B' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de B et C, les vecteurs $\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{C'C}$ sont orthogonaux à tout vecteur du plan vectoriel associé à $\mathcal{T}$, en particulier à $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AC'}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B}) \cdot (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}) \\ &= \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{AC'} \\ &\qquad + \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C} \\ &= \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C}\end{aligned}$$

d'après la remarque précédente.

Q 33



$\{A, B, C_1\} \subset \mathcal{P}$
$\{A', B', C'\} \subset \mathcal{R}$

1) D'après la question 32 on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1}$$

car ici :

$$p(B) = B \quad \text{et} \quad p(C) = C_1$$

donc si $\widehat{BAC}$ est droit, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$ c'est-à-dire $\widehat{BAC_1}$ est droit (puisque (AC) n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$, B_1 est distinct de A).

2) (AB) est contenue dans le plan $\mathcal{P}$ qui est parallèle à $\mathcal{R}$ donc (AB) est parallèle à $\mathcal{R}$.
D'après la question 31, puisque $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{R}$ et que (AB) et (AC) ne sont pas orthogonales à $\mathcal{P}$, les angles $\widehat{BAC_1}$ et $\widehat{B'A'C'}$ ont même mesure donc ici $\widehat{B'A'C'}$ est droit.

Q 34

La figure est celle de la question 33.

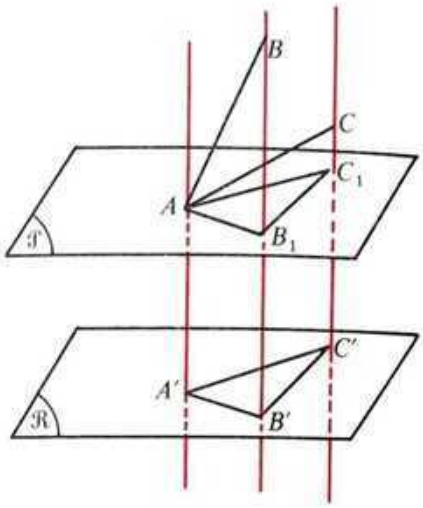
1) Là encore puisque $p(B) = B$ et $p(C) = C_1$, l'égalité de la question 32 s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1}$$

donc si $\widehat{BAC_1}$ est droit, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1}$ est nul, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ aussi, donc $\widehat{BAC}$ est droit.

2) Ici encore d'après la question 31, puisque $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{R}$ et que les droites (AB) et (AC) ne sont pas orthogonales à $\mathcal{P}$, les angles $\widehat{BAC_1}$ et $\widehat{B'A'C'}$ ont même mesure donc si $\widehat{B'A'C'}$ est droit, $\widehat{BAC_1}$ l'est, et d'après le 1) $\widehat{BAC}$ est droit aussi.
On remarque encore que (AB), qui est incluse dans $\mathcal{P}$, est parallèle à $\mathcal{R}$.

Q 35



$\{A, B_1, C_1\} \subset \mathcal{P}$
$\{A', B', C'\} \subset \mathcal{P}$

1) D'après la question 32 on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{C_1C}.$$

Dire que $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B_1AC_1}$ sont droits c'est dire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$.

D'où : $\overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0.$

Or, par définition de la projection orthogonale les points B et B_1, (respectivement C et C_1) sont situés sur la droite passant par B (respectivement C) et orthogonale à $\mathcal{P}$.
Ces deux droites orthogonales à $\mathcal{P}$ sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{B_1B}$ et $\overrightarrow{C_1C}$ sont colinéaires.
Comme leur produit scalaire est nul on a : $\overrightarrow{B_1B} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$, c'est-à-dire B appartient à $\mathcal{P}$ ou C appartient à $\mathcal{P}$.
Donc B ou C appartient à $\mathcal{P}$.

2) D'après la question 31, puisque $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{R}$ et que les droites (AB) et (AC) ne sont pas orthogonales à $\mathcal{P}$, les angles $\widehat{B_1AC_1}$ et $\widehat{B'A'C'}$ ont même mesure.

Ainsi si $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{BAC}$ sont droits, alors $\widehat{B_1AC_1}$ et $\widehat{BAC}$ sont droits, d'où d'après le 1), B ou C appartient à $\mathcal{P}$.
Or $\mathcal{P}$ contient A et est parallèle à $\mathcal{R}$ donc si B (ou C) appartient à $\mathcal{P}$ alors (AB) (ou (AC)) est parallèle à $\mathcal{R}$.

Q 36

Soient C un point de (D) distinct de B, et E un point de (Δ_2) distinct de B. Puisque (D) est orthogonale à (Δ_1), et que (Δ_2) est la parallèle à (Δ_1) menée par

B, les droites (D) et (Δ_2) sont perpendiculaires donc $\widehat{CBE}$ est droit. Comme (Δ_1) n'est pas orthogonale à $\mathfrak{P}$, (BE), qui est parallèle à (Δ_1) n'est pas orthogonale à $\mathfrak{P}$. Comme (D) est parallèle à $\mathfrak{P}$, la droite (BC), qui est confondue avec (D), est parallèle à $\mathfrak{P}$.
On note C' et E' les images respectives de C et E par p.
Puisque (BC) est parallèle à $\mathfrak{P}$ et que $\widehat{CBE}$ est droit, l'angle $\widehat{C'B'E'}$ est droit.
Or :

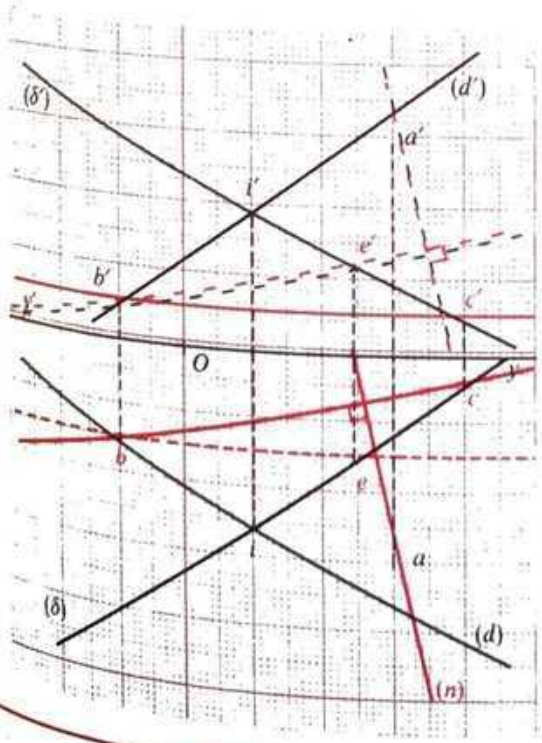
$$C \in (D) \quad \text{donc} \quad C' \in (D')$$
$$E \in (\Delta_2) \quad \text{donc} \quad E' \in (\Delta'_2)$$
$$\{B\} = (D) \cap (\Delta_2)$$

donc :
$$\{B'\} = (D') \cap (\Delta'_2).$$

On a donc : (D') est perpendiculaire à (Δ'_2) en B'.
Puisque toute projection sur un plan conserve le parallélisme, et que (Δ_1) est parallèle à (Δ_2), leurs projetés (Δ'_1) et (Δ'_2) sont parallèles.
Les trois droites (D'), (Δ'_1) et (Δ'_2) sont incluses dans $\mathfrak{P}$, donc puisque (Δ'_2) est parallèle à (Δ'_1) et (D') est perpendiculaire à (Δ'_2), (D') est perpendiculaire à (Δ'_1).

Q 37

On rappelle b' en b sur (d).
Puisque (BC) est une horizontale du plan $\mathfrak{P}$, $(b'c')$ est parallèle à $(y'y)$ et c' appartient à (δ').
On rappelle c' en c sur (δ).
On trace alors (bc).



Le plan $\mathfrak{P}$ n'est pas horizontal car (D) n'est pas une horizontale. Donc la droite (N) n'est pas orthogonale à (H) : (N) n'est pas verticale.
(N) est orthogonale au plan $\mathfrak{P}$ donc elle est orthogonale à l'horizontale (BC) qui est incluse dans $\mathfrak{P}$.
D'après le théorème qui suit la question 36, on a donc : le projeté orthogonal (n) de (N) sur (H), est perpendiculaire au projeté orthogonal (bc) de (BC) sur (H).
On construit donc (n) en traçant sur l'épure la perpendiculaire à (bc) qui passe par a.
De même $\mathfrak{P}$ n'est pas frontal car (D) n'est pas une frontale. Donc la droite (N) n'est pas orthogonale au plan (F) : (N) n'est pas de bout.
(N) est orthogonale à $\mathfrak{P}$, donc (N) est orthogonale à la frontale (BE) qui est incluse dans $\mathfrak{P}$.
D'après le même théorème les projetés orthogonaux (n_1) et (b_1e_1) respectifs de (N) et (BE) sur (F) sont perpendiculaires. La « rotation » applique ces droites sur (n') et $(b'e')$ qui sont encore perpendiculaires.
On construit (n') en traçant sur l'épure la perpendiculaire à $(b'e')$ qui passe par a'.

Q 38

1) Une équation du plan vectoriel P associé à $\mathfrak{P}$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$ax + by + cz = 0.$$

Notons :

$$\vec{u} = c\vec{i} - a\vec{k}$$

et :
$$\vec{v} = b\vec{i} - a\vec{j}.$$

On voit tout de suite que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux éléments de P.

De plus $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = -a^2$ donc D_1 est non nul car $a \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathfrak{P}$.

De plus :
$$\vec{u} \cdot \vec{n} = ca - ac = 0$$
$$\vec{v} \cdot \vec{n} = ba - ab = 0$$

le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et non nul donc il est normal à $\mathfrak{P}$.

2) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathfrak{E}$.

Puisque :

$$M \in \Omega \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

on a :

$$M \in \Omega \iff \alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) = 0.$$

Q 39

Puisque (AA') est orthogonale à $\mathcal{T}$, toute droite incluse dans $\mathcal{T}$ est orthogonale à (AA'), en particulier quel que soit le point M distinct de A', la droite $(A'M)$ est perpendiculaire à la droite $(A'A)$. Dans le triangle $AA'M$, rectangle en A', on a donc :

$$AM^2 = AA'^2 + A'M^2$$

d'où :

$$AM^2 \geqslant AA'^2$$

ou encore :

$$AM \geqslant AA'.$$

Pour $M = A'$, on a : $AM = AA'$ donc encore : $AM \geqslant AA'$.
Si A appartient à $\mathcal{T}$, alors $A' = A$ donc, puisque :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad AM \geqslant 0$$

la propriété annoncée est encore vraie.

Q 40

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$.

M appartient à (D_A) si et seulement si il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{n}$ (et t est alors l'abscisse de M dans le repère $(A, \vec{n})$ de (D_A)). D'où la représentation paramétrique demandée de (D_A) :

$$\begin{cases} x = ta + \alpha \\ y = tb + \beta \\ z = tc + \gamma. \end{cases}$$

La valeur t_0 associée à A' est caractérisée par :

$$a(t_0 a + \alpha) + b(t_0 b + \beta) + c(t_0 c + \gamma) + d = 0$$

d'où :

$$(a^2 + b^2 + c^2)t_0 = -a\alpha - b\beta - c\gamma - d.$$

Or a, b et c ne sont pas simultanément nuls donc $a^2 + b^2 + c^2$ est non nul. Ainsi on a :

$$t_0 = \frac{-a\alpha - b\beta - c\gamma - d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Par définition de t_0, on a :

$$\overrightarrow{AA'} = t_0\vec{n}$$

d'où :

$$\|\overrightarrow{AA'}\| = |t_0| \, \|\vec{n}\|$$

ou encore :

$$AA' = |t_0|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

vu la valeur de t_0, on en déduit :

$$AA' = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Q 41

1) Si A ou B appartient à $\mathcal{T}$ alors (AB), qui est parallèle à $\mathcal{T}$, est incluse dans $\mathcal{T}_1$ et on a : $A_1 = A$, $B_1 = B$ donc $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$. Si ni A ni B n'appartient à $\mathcal{T}$ alors les points A, A_1, B et B_1 ne sont pas alignés car (AB) est parallèle à $\mathcal{T}$ et (D) est sécante à $\mathcal{T}$ donc (AB) n'est pas parallèle à (D).
Les droites (AA_1) et (BB_1) sont parallèles entre elles car toutes deux parallèles à (D), et distinctes car A et B sont distincts.
Notons $\mathcal{Q}$ le plan défini par ces deux droites : $\mathcal{Q}$ contient les points A, B, A_1 et B_1 donc les droites (AB) et (A_1B_1).
Puisque $\mathcal{T}$ contient aussi (A_1B_1) mais pas (AB), les plans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant (A_1B_1). La droite parallèle à (AB) passant par A_1 est incluse dans $\mathcal{T}$ car (AB) est parallèle à $\mathcal{T}$ et A_1 appartient à $\mathcal{T}$, elle est aussi incluse dans $\mathcal{Q}$ qui contient A, B et A_1, c'est donc la droite (A_1B_1). Ainsi ABB_1A_1 est un parallélogramme, et on a : $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$.

2) Si (AB) est frontale alors (AB) est parallèle à (F), en notant a_1 et b_1 les projetés orthogonaux de A et B sur (F), d'après le 1) on a : $\overrightarrow{a_1b_1} = \overrightarrow{AB}$ d'où $a_1b_1 = AB$, grâce à la «rotation» on a $a'b' = a_1b_1$ d'où : $AB = a'b'$.
Si (AB) est horizontale alors elle est parallèle à (H) et d'après le 1) on a :
$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{AB}$ d'où : $AB = ab$.

Q 42

Puisque $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$, les points B et C sont sur la même droite orthogonale à (H) donc ils ont mêmes projetés sur (H) : $b = c$.
De même $\overrightarrow{AE}$ est colinéaire à $\vec{i}$ donc A et E sont sur la même droite orthogonale à (F) : ils ont mêmes projetés frontaux : $a_1 = e_1$. Puisque A et E sont sur une même droite parallèle à (H), leurs projetés horizontaux a et e vérifient $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ae}$.
De même puisque E et e sont sur une même droite parallèle à $(y'y)$, donc à (H) et à (F), leurs projetés vérifient :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ec} = \overrightarrow{e_1c_1}$$

B et C sont sur une même parallèle à (F) (car $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$) d'où :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b_1c_1}.$$

Puisque $\overrightarrow{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$, A et C sont sur une même parallèle à (H) d'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ac}$, de plus $b = c$ d'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ab}$.

Puisque $\overrightarrow{EB} = y\vec{j} + z\vec{k}$, E et B sont sur une même droite parallèle à (F) donc :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{b_1 e_1}$$
$$= \overrightarrow{b_1 a_1} \quad \text{car} \quad e_1 = a_1.$$

Puisque $\overrightarrow{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$, que $\vec{k}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$: le triangle ABC (si les points sont non alignés c'est-à-dire $z \neq 0$ ou $(x, y) = (0, 0)$) est rectangle en C.
De même $\overrightarrow{AE} = x\vec{i}$ et $\overrightarrow{EB} = y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{i}$ st orthogonal à $\vec{j}$ et $\vec{k}$ d'où $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EB}$. Dans le cas où x est non nul ou $(y, z) \neq (0, 0)$, les points A, B et E sont non alignés et ABE est un triangle rectangle en E.

Q 43

1) $E_k = \{ M \in \mathcal{E},\ 0 = 0 \}$
$= \mathcal{E}$.

2) $E_k = \{ M \in \mathcal{E},\ O = k \}$ avec $k \neq 0$ d'où $E_k = \varnothing$.

3) $E_k = \{ M \in \mathcal{E},\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \}$

E_k est le plan $\mathcal{P}$ contenant O et tel que $\vec{u}$ (qui est non nul) est normal à $\mathcal{P}$.
Si $\vec{u}$ est non nul, alors le point K défini par : $\overrightarrow{OK} = \dfrac{k}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ appartient à E_k en effet :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OK} = \frac{k}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \cdot \vec{u}$$
$$= k$$

donc E_k est non vide.

Q 44

Puisque M appartient à $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ est normal à $\mathcal{P}$ on a l'équivalence demandée.
Soit N un point de $\mathcal{E}$.
On a :

$$N \in \mathcal{P} \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$
$$\iff \vec{u} \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = 0$$
$$\iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{ON}$$

or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k$ car M est un point de E_k (d'après Q 44, est non vide).
D'où :

$$N \in \mathcal{P} \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{ON} = k$$

Ainsi :
$$\iff N \in E_k.$$
$$\mathcal{P} = E_k$$
$$\{H\} = (D) \cap \mathcal{P}$$
$$= (D) \cap E_k$$

d'où : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OH} = k$ et il existe t dans $\mathbb{R}$: $\overrightarrow{O} = t\vec{u}$ d'où :

$$\vec{u} \cdot t\vec{u} = k$$
$$t = \frac{k}{\vec{u}^2} \quad \text{(on sait } \vec{u} \neq \vec{0}\text{)}.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{OH} = \frac{k}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Q 45

Soit M un point de $\mathcal{E}$. Puisque $A = B$, on a :

$$MA^2 - MB^2 = k \iff O = k$$

donc l'ensemble solution de l'équation est :

- $\mathcal{E}$ si $k = 0$.
- $\varnothing$ si $k \neq 0$.

Q 46

Soit M un point de $\mathcal{E}$, on a :

$$MA^2 - MB^2$$
$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2$$
$$= (MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA})$$
$$- (MO^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB})$$
$$= 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$

car $OA = OB$ d'où :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$$
$$= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Q 47

Dans le cas où $k = 0$, l'ensemble F_0 est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$MA^2 - MB^2 = 0$$

c'est-à-dire $MA = MB$.
D'après le théorème qui précède, F_0 est le plan orthogonal à (AB) en H défini par $\overrightarrow{OH} = \dfrac{O}{2AB^2}\overrightarrow{AB}$
d'où $H = 0$.
Ainsi F_0 est le plan passant par le milieu O de $[AB]$ et tel que (AB) est orthogonal à ce plan : F_0 est le plan médiateur de $[AB]$.

Q 48

On a :

$$M \in \mathcal{S} \iff AM = R$$
$$\iff AM^2 = R^2$$
$$\iff (x - a)^2 + (y - b)^2$$
$$+ (z - c)^2 = R^2$$

$$\iff x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 - R^2 = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

où :

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2.$$

Q 49

Notons (1) l'équation :

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0.$$

Puisque :

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 + by = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

et :

$$z^2 + cz = \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4}.$$

On a :

$$(1) \iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}.$$

Notons A le point de triplet de coordonnées $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$. Un point M appartient à E si et seulement si ses coordonnées vérifient (1) d'où :

$$M \in E \iff AM^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}$$

- si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$, alors E est vide (car $AM^2 \geqslant 0$)
- si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$, alors :

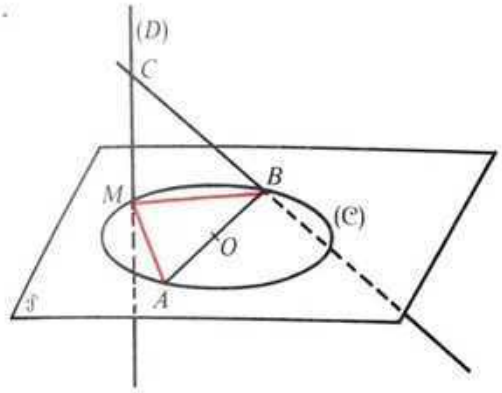
  $E = \{A\}$ (car $AM^2 = 0 \iff M = A$)
- si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$ alors E est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}}$.

Résultats ou indications des exercices

E 2

Montrer que (D) est orthogonale au plan (ABC).

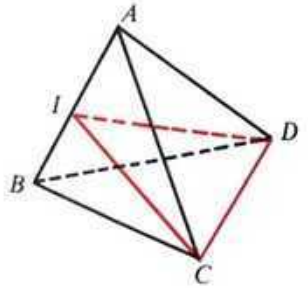
E 3



$(D) \cap \mathcal{P} = \{M\}$
$(M, A, B) \subset (\mathcal{C})$
$(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P} \quad C \in (D)$

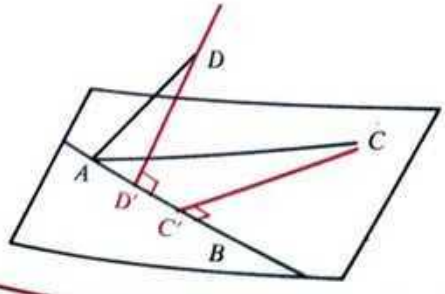
Utiliser l'orthogonalité de (D) et $\mathcal{P}$ et la nature du triangle MAB.

E 4



Utiliser une propriété de la médiane issue du sommet d'un triangle isocèle.

E 5

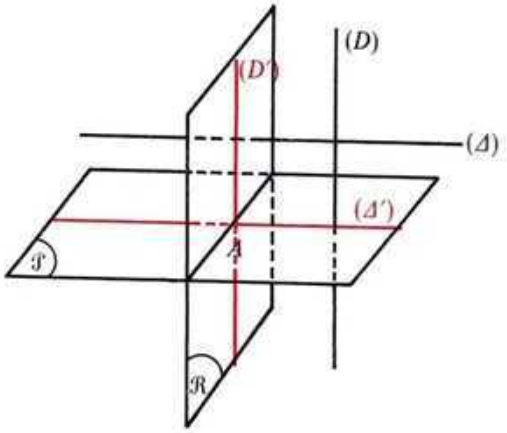


Montrer que (DD') et (CC') sont parallèles à un plan orthogonal à (AB).

E 6

Tracer par un point A de $\mathcal{P}$, la parallèle à (Δ).

E 7



Par un point A de l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, tracer les droites (D') et (Δ') respectivement parallèles à (D) et à (Δ) et montrer qu'elles sont respectivement incluses dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$.

E 9

Utiliser l'existence d'une droite de $\mathcal{P}$ orthogonale à $\mathcal{R}$.

E 13

Montrer que (AC) est orthogonale à (DBA).

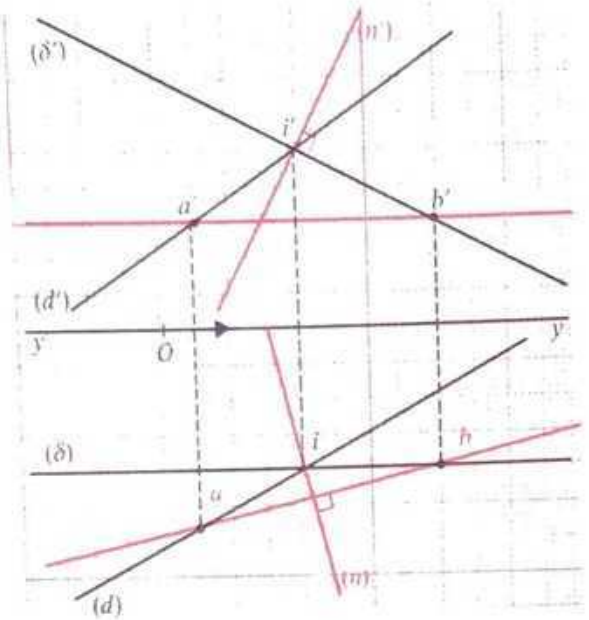
E 18

1) (Deuxième partie) $\vec{u}$ étant un vecteur directeur de la droite, démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$. Exprimer $\vec{v}'$ dans cette base et utiliser : $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$ pour montrer que $\vec{v}' \in P_{\vec{v},\vec{w}}$ (idem pour $\vec{w}'$) d'où $P_{\vec{v}',\vec{w}'} = P_{\vec{v},\vec{w}}$.

E 19

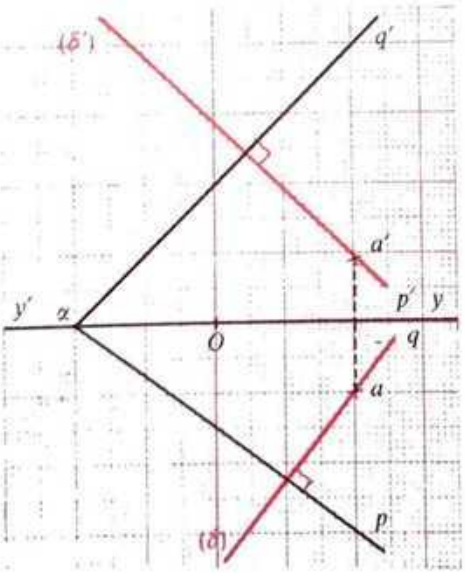
Même méthode que pour l'exercice 18.

E 23

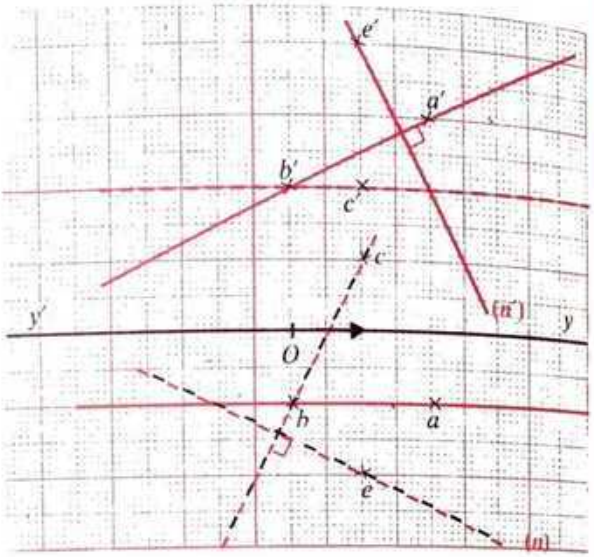


E 26

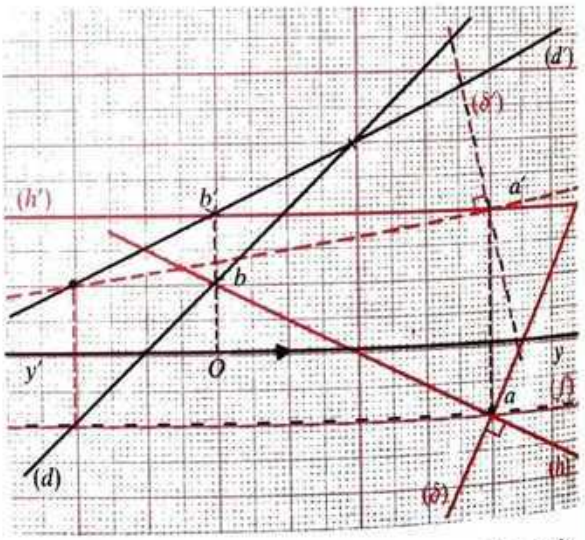
L'horizontale est déterminée par $(\alpha p, \alpha p')$. La frontale du plan est déterminée par $(\alpha q, \alpha q')$.



E 27

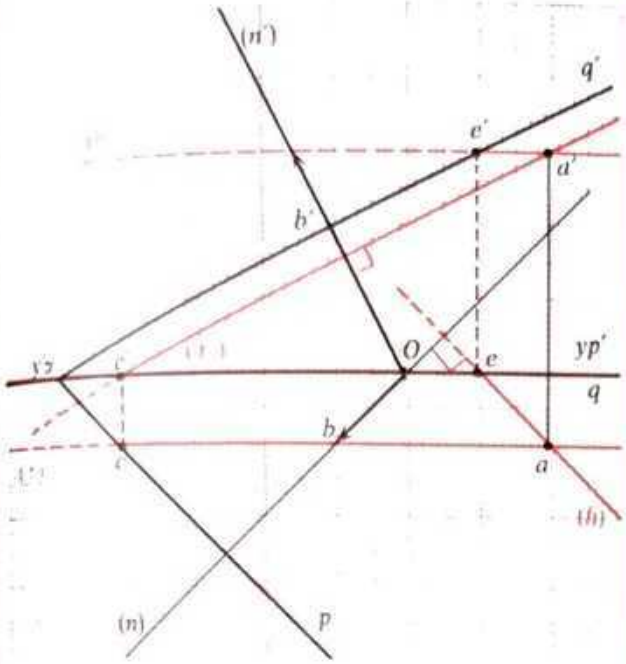


E 28

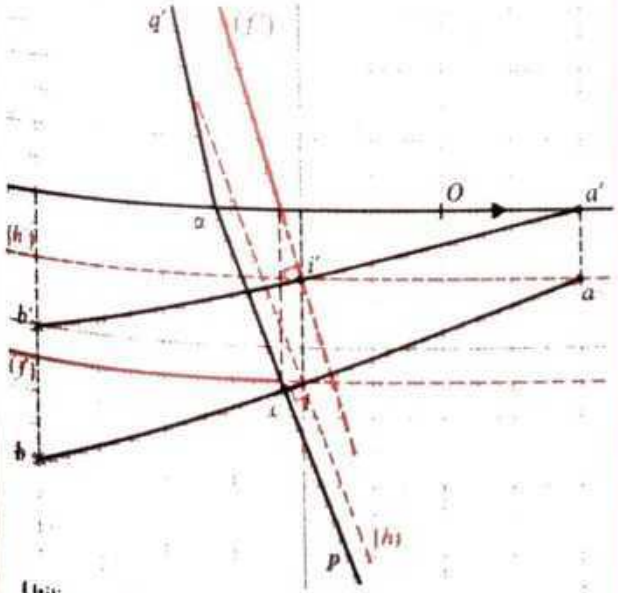


On a utilisé l'horizontale d'épure (h, h') et la frontale d'épure (f, f') de $P(A, (D))$ passant par A.

E 31



E 32



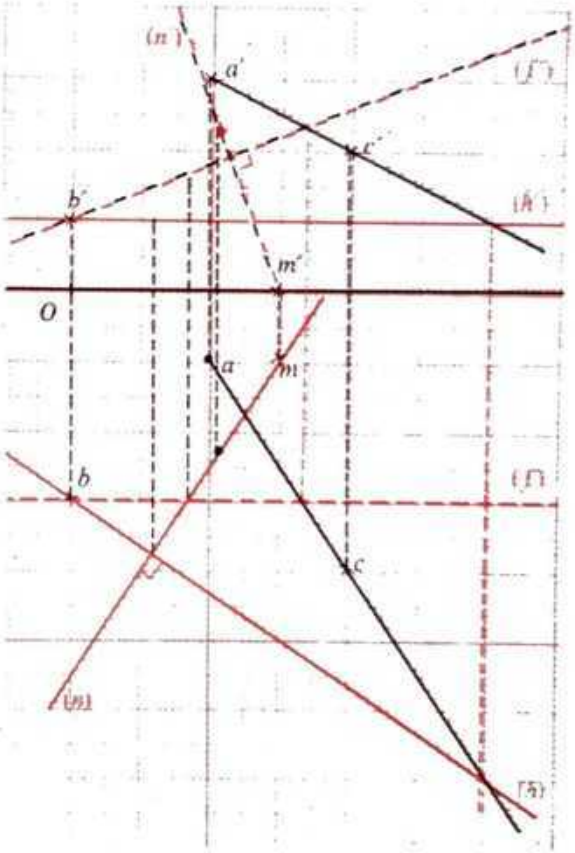
Utiliser le fait que (AB) est orthogonale au plan médiateur.

E 33

1) $\varnothing$. 2) $m = -3$. 3) $m = 1$.

E 34-35

$\frac{89}{38}$, $\frac{40}{19}$, $\frac{85}{38}$.



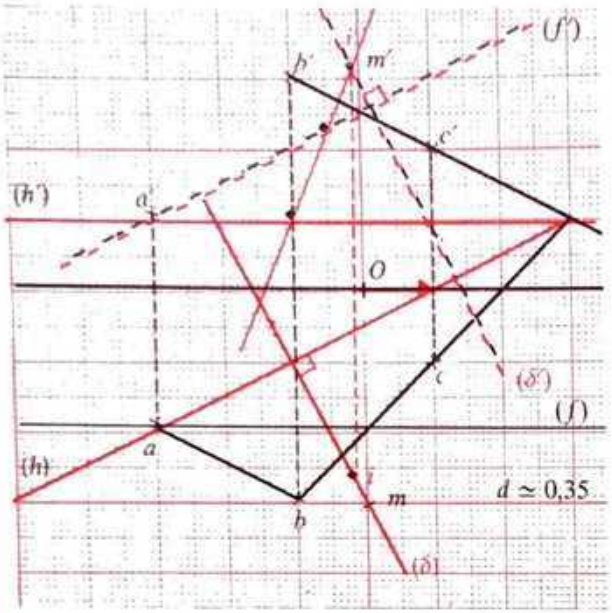
E 38

$(\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}-2)y - (\sqrt{2}+1)z + \sqrt{2} + 2 = 0$

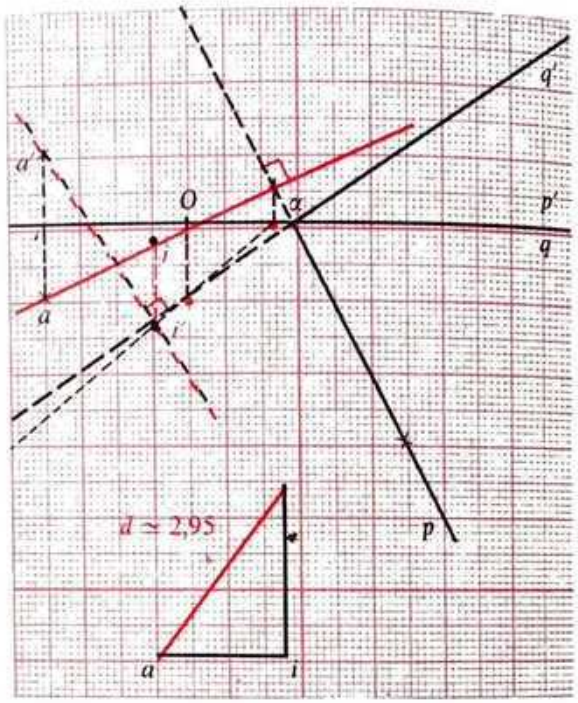
et :

$(\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}+2)y + (1-\sqrt{2})z + \sqrt{2} - 2 = 0.$

E 40



E 41



E 43

$$8y + 6z - 79 = 0.$$

E 45

Utiliser les résultats de l'exercice 44.

E 47

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{13}{4}x - \frac{39}{4}y - \frac{5}{2}z + \frac{39}{4} = 0.$$

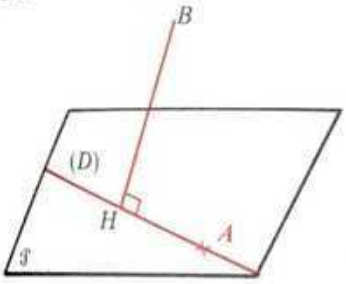
Exercices

51. Soient $\mathcal{P}$ un plan, ABC un triangle rectangle en A inclus dans $\mathcal{P}$, (Δ) la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ en A, D un point de (Δ) différent de A.
On veut tracer la droite (Δ') passant par A et orthogonale au plan (DBC) en H.

1) Pourquoi H n'appartient pas à (Δ) ? Montrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADH).

2) En déduire un programme de construction de la droite (Δ').

52.



$(D) \subset \mathcal{P}$
$A \in (D) \quad B \notin \mathcal{P}$
$H \in (D)$

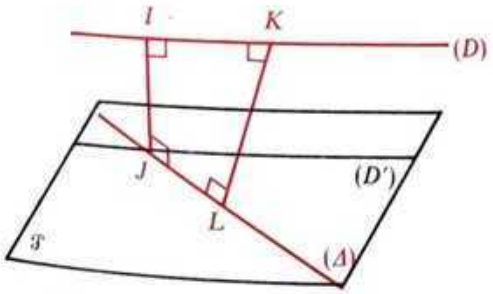
Soient $\mathcal{P}$ un plan, A un point appartenant à $\mathcal{P}$ et B un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$.
Montrer que, quelle que soit la droite (D) de $\mathcal{P}$ passant par A, le point H, projeté orthogonal de B sur (D) appartient à un cercle que l'on déterminera. (On pourra utiliser le projeté orthogonal B' de B sur $\mathcal{P}$.)

53. Soient (D) et (Δ) deux droites non coplanaires, $\mathcal{P}$ le plan contenant (Δ) et tel que (D) est parallèle à $\mathcal{P}$.

1) Donner un programme de construction de la droite passant par un point A donné de $\mathcal{E}$, et orthogonale à (D) et à (Δ).

2) Donner le programme de construction d'une perpendiculaire à (D) et à (Δ) (on pourra utiliser le projeté orthogonal (D') de (D) sur $\mathcal{P}$).

3) Peut-on avoir une situation illustrée par le schéma ci-dessous?

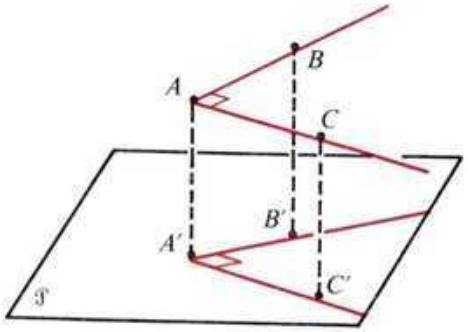


$(IJ) \perp (JL) \quad (JL) \perp (LK)$
$(LK) \perp (IK) \quad (IK) \perp IJ)$
$(\Delta) \subset \mathcal{P} \quad (D) \parallel \mathcal{P}$

(On peut utiliser le point K' projeté orthogonal de K sur $\mathcal{P}$.)

4) Montrer l'unicité de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.

54.



$(AC) \parallel \mathcal{P}$

p

A	A'
B	B'
C	C'

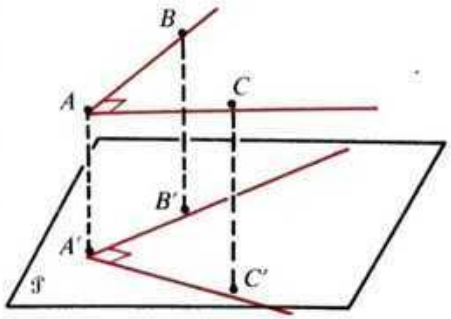
Soient $\mathcal{P}$ un plan, p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, $\widehat{BAC}$ un angle droit tel que la droite (AC) et le plan $\mathcal{P}$ sont disjoints et la droite (AB) est non orthogonale à $\mathcal{P}$, A', B' et C' les projetés respectifs de A, B et C par p.

1) Montrer que A, A' et B définissent un plan et que (AC) est orthogonale à ce plan.

2) En déduire que la droite $(A'C')$ est perpendiculaire à la droite $(A'B')$.

3) Montrer que, réciproquement, si les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles et si $(A'B')$ et $(A'C')$ sont perpendiculaires alors (AB) et (AC) sont aussi perpendiculaires.

55.



p

A	A'
B	B'
C	C'

Soient $\mathcal{P}$ un plan, p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, B un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$, $\widehat{BAC}$ un angle

droit tel que ni la droite (AB) ni la droite (AC) est orthogonale à $\mathcal{P}$. A', B' et C' les projetés respectifs par p de A, B et C.

1) Par A, tracer la droite parallèle à $(A'B')$. Montrer qu'elle est sécante à (BB') en B_1.

2) Supposons de plus que $\widehat{B'A'C'}$ est droit. En étudiant les deux cas $B_1 = B$ et $B_1 \neq B$, montrer que la droite (AB) ou la droite (AC) est parallèle à $\mathcal{P}$.

56. Soient $ABCD$ un tétraèdre tel que $(AB = CD$ et $AC = BD)$. I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$ et $[BD]$.

1) Montrer que $MLNJ$ et $IJKL$ sont des losanges.

2) Montrer que la droite (JL) est orthogonale au plan (IKM).

3) Montrer que (JL) est orthogonale aux droites (BC) et (AD).

57. Soient $\mathcal{P}$ un plan, A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$ inclus dans $\mathcal{P}$, C un point du cercle $(\mathcal{C})$ distinct de A et de B, (Δ) la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ en A, D un point de (Δ) distinct de A.

1) Montrer que les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires.

2) Montrer que les plans (DAC) et (DBC) sont perpendiculaires.

3) Soit I le projeté orthogonal de A sur (DC). Montrer que la droite (AI) est orthogonale au plan (BCD).

4) Soit J le projeté orthogonal de A sur (DB). Montrer que le triangle AIJ est rectangle.

5) Montrer que les points B, C, I et J appartiennent à un même cercle que l'on définira.

58. Soient $\mathcal{P}$ un plan et (D) une droite non orthogonale à $\mathcal{P}$, montrer qu'il existe un plan et un seul contenant (D) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

59. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux plans sécants. Montrer qu'il existe un plan et un seul perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{R}$ et passant par un point donné.

60. Soient $\mathcal{P}$ un plan et A un point de $\mathcal{E}$.

1) Est-ce qu'il existe un seul plan $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et contenant A?

2) Soit (D) une droite de $\mathcal{E}$.
Existe-t-il un plan $\mathcal{Q}$ unique perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et contenant la droite (D)?
(Discuter suivant la position de (D) par rapport à $\mathcal{P}$.)

61. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$, A, B et C des points de $\mathcal{E}$ tels que les bipoints (A, B) et (A, C) représentent respectivement les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Nous avons vu en classe de seconde que le produit scalaire ne dépend pas des représentants choisis dans $\mathcal{P}$. Examinons le cas où A', B' et C' trois points de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas au plan (ABC) sont tels que les bipoints (A', B') et (A', C') représentent respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soient H le projeté orthogonal de C sur (AB), H' le projeté orthogonal de C' sur $(A'B')$. Montrer que :

$$\overrightarrow{A'H'} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

62. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

1) Montrer que :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

2) Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède. Démontrer que la somme des carrés des longueurs des diagonales $[AG]$, $[BH]$, $[CE]$ et $[DF]$ est égale à la somme des carrés des longueurs des 12 côtés du parallélépipède.

63. Dans cet exercice on montre l'existence d'une base orthogonale, et par suite l'existence d'une base orthonormée de $\mathcal{W}$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$.

1) Soit $\vec{u}'$ un vecteur de $\mathcal{W}$ non colinéaire à $\vec{u}$ (justifier l'existence). Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul, de la forme $\vec{u}' + a\vec{u}$ avec a appartenant à $\mathbb{R}$, orthogonal à $\vec{u}$ (déterminer a).

2) Pourquoi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires?
On note $P_{\vec{u},\vec{v}}$ le plan vectoriel de base (orthogonale) $(\vec{u}, \vec{v})$.
On considère un vecteur $\vec{v}'$ n'appartenant pas à $P_{\vec{u},\vec{v}}$ (justifier l'existence de $\vec{v}'$).
Montrer qu'il existe deux nombres réels b et c que l'on déterminera tels que le vecteur $\vec{v}' + b\vec{u} + c\vec{v}$ soit non nul et orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

3) On note alors $\vec{w}$ le vecteur $\vec{v}' + b\vec{u} + c\vec{v}$.
Pourquoi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $\mathcal{W}$?

4) En déduire une base orthonormée de $\mathcal{W}$.

64. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (ses côtés sont de même longueur de mesure a).

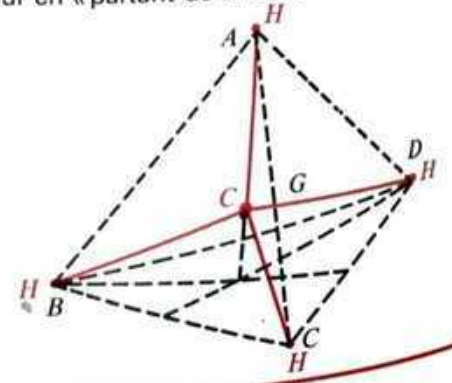
1) Calculer la distance d'un sommet du tétraèdre à la face opposée (hauteur) en fonction de a.

2) Montrer le point G défini par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

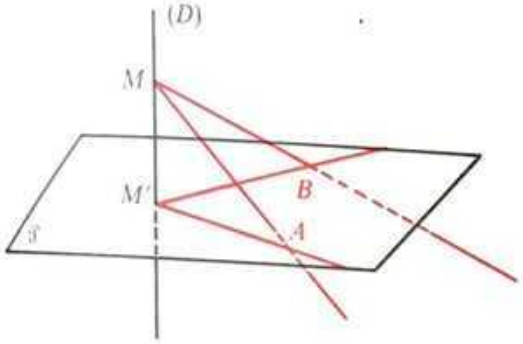
(isobarycentre du tétraèdre) est situé au quart de la hauteur en « partant de la base » correspondante.

3)



Une molécule de méthane CH_4 est constituée d'un atome de carbone C situé en G, l'isobarycentre du tétraèdre régulier qui a ses sommets occupés par des atomes d'hydrogène H. Montrer que l'atome de carbone C est équidistant des atomes d'hydrogène. On a représenté les liaisons C – H par des segments en rouge sur la figure.
Montrer que les angles formés par les différentes liaisons C – H : $\widehat{AGB}$, $\widehat{AGC}$, $\widehat{AGD}$, $\widehat{BGC}$, $\widehat{BGD}$ et $\widehat{CGD}$ ont même mesure. Calculer cette mesure en degrés et minutes.

65.



$(D) \perp \mathcal{P}$ $\quad (D) \cap \mathcal{P} = \{M'\}$
$M \in (D)$, $\quad A \in \mathcal{P}$, $\quad B \in \mathcal{P}$

Soient $\mathcal{P}$ un plan, (D) une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ et sécante à $\mathcal{P}$ en M', M un point de (D), A et B deux points de $\mathcal{E}$ distincts et différents de M'.

1) Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}^2 + \overrightarrow{M'A} \cdot \overrightarrow{M'B}.$$

2) Montrer que si l'angle $\widehat{AMB}$ est droit alors l'angle $\widehat{AM'B}$ est obtus ou droit.

3) Montrer que si l'angle $\widehat{AM'B}$ est droit alors la mesure de $\widehat{AM'B}$ représente un maximum pour la mesure de $\widehat{AMB}$ quand M décrit (D).

66. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(M) = aMA^2 + bMB^2$$

où a et b sont des nombres réels dont la somme est non nulle.

1) Dans le cas où : $a = -5$ et $b = 3$ montrer que $f(M)$ est maximum pour un point G que l'on déterminera.

2) Dans le cas où $a = 3$ et $b = -1$, montrer que $f(M)$ est minimum pour un point G' que l'on déterminera.

3) Étudier les variations de f dans les deux cas :

$a + b > 0$ puis $a + b < 0$.

67. On considère, dans une base orthonormée de $\mathcal{W}$ les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

1) Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux?

2) Soient x et y deux nombres réels et $\vec{w}$ le vecteur de coordonnées 1, x et y. Déterminer une condition sur x et y pour que :

a) $\vec{w}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

b) $\vec{w}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
Existe-t-il un tel vecteur $\vec{w}$ orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$?

68. Soient A, B, C et M quatre points de $\mathcal{E}$.

1) Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

2) Soit $ABCD$ un tétraèdre. Montrer que si les droites (AD) et (BC) d'une part et (AC) et (BD) d'autre part sont orthogonales alors les droites (AB) et (CD) sont aussi orthogonales.
Nous avons alors un tétraèdre **orthocentrique.**

69. Soient $\mathcal{P}$ un plan et $ABCD$ un carré non situé dans un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $ABCD$ se projette orthogonalement suivant un rectangle.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $ABCD$ se projette orthogonalement suivant un losange.

70. Soient ABC un triangle, $\mathcal{P}$ un plan non perpendiculaire au plan (ABC), A', B' et C' les projetés orthogonaux de A, B et C sur $\mathcal{P}$, H et H' les orthocentres respectifs des triangles ABC et $A'B'C'$.
Montrer que H' est le projeté de H si et seulement si les plans (ABC) et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

71. Soient $ABCD$ un tétraèdre régulier (arêtes de même longueur), I, J, K, L les milieux respectifs de segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1) Tracer l'épure $(abcd, a'b'c'd')$ du tétraèdre $ABCD$ ayant sa base BCD dans le plan horizontal (H), B et D ayant respectivement pour triplets de coordonnées (1, 0, 0) et (5, 0, 0).

2) Tracer les épures (i, i'), (j, j'), (k, k') et (ℓ, ℓ') des points I, J, K et L.
Montrer, en utilisant l'épure, que $IJKL$ est un carré.

Dans les exercices qui suivent l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé.

72. Soient (D) et (Δ) deux droites de déterminations paramétriques respectives.

$$[t \longmapsto (t + 3; 3t + 1; 4)]$$

et :

$$[t \longmapsto (-t+2;\ 2t;\ 1)].$$

1) Tracer les épures (d, d') et (δ, δ') des droites (D) et (Δ).

2) Tracer l'épure de la droite perpendiculaire à (D) et à (Δ). On note A et B les points d'intersection respectifs de cette droite avec (D) et (Δ).

3) Soient $\mathcal{P}$ le plan médiateur du segment $[AB]$ et M un point quelconque de $\mathcal{P}$ d'épure (m, m'). Tracer les épures $(mh, m'h')$ et $(mk, m'k')$ des droites (MH) et (MK) où H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (D) et (Δ).

4) Montrer que : MH est égal à MK si et seulement si les longueurs des segments $[mh]$ et $[mk]$ sont égales. En déduire l'épure de l'ensemble des points équidistants de (D) et de (Δ).

73. On considère le point $A\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ et la droite (D) de détermination paramétrique :

$$\left[t \longmapsto \left(t+1;\ t+2;\ \frac{1}{2}t+3\right)\right].$$

1) Construire les épures (a, a') et (d, d') du point A et de la droite (D).

2) Tracer une épure du plan $\mathcal{P}$ passant par A et tel que (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$ (on tracera l'horizontale et la frontale de $\mathcal{P}$ passant par A).

3) Déterminer le projeté I de A sur la droite (D) parallèlement à $\mathcal{P}$.
En déduire une valeur approchée de la distance de A à la droite (D).

4) Déterminer analytiquement le projeté orthogonal I de A sur (D) et chercher la distance AI.

74. On considère les quatre points $A\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$.

1) Tracer une épure du plan $\mathcal{P}$ passant par A et tel que la droite (BC) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ (on tracera l'horizontale et la frontale de $\mathcal{P}$ passant par A).

2) Tracer l'épure (g, g') du point G, projeté de E sur la droite (AB) parallèlement au plan $\mathcal{P}$.
Donner une valeur approchée des coordonnées de G.

3) Déterminer analytiquement les coordonnées de G.

75. On considère les deux points de $\mathcal{E}$ $A\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ de $\mathcal{W}$ et (D) la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) Construire les épures (a, a') et (d, d') du point A et de la droite (D). Vérifier que B n'appartient pas à (D).

2) Construire l'épure (δ, δ') de la droite (Δ) orthogonale au plan $P(B, (D))$ en A.

3) Déterminer le projeté orthogonal E de $C\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ sur $P(B, (D))$ en utilisant l'épure et donner une valeur approchée des coordonnées de E.

4) Déterminer analytiquement les coordonnées de E.

76. On considère le point $M\begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$3x + 4z + 3y - 12 = 0.$$

1) Représenter les traces (αP) et (αQ) du plan $\mathcal{P}$ d'épures respectives $(\alpha p, \alpha p')$ et $(\alpha q, \alpha q')$.

2) Déterminer l'épure (i, i') du point I, projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ et donner une valeur approchée de ses coordonnées puis une valeur approchée de la distance de M au plan $\mathcal{P}$.

3) Résoudre analytiquement le problème.

77. Mêmes questions que dans l'exercice 76 avec pour équation cartésienne de $\mathcal{P}$:

$$2x + y - z + 3 = 0$$

et pour coordonnées du point M : 1, 2 et 3.

78. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de $\mathcal{W}$, les points $A\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}6\\5\\0\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$, (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ le plan contenant droite (D) et le point B (justifier).
1) Déterminer l'épure (i, i') du projeté orthogonal I de M sur $\mathcal{P}$.
Donner une valeur approchée de ses coordonnées et de la distance de M à $\mathcal{P}$.

2) Traiter analytiquement le problème.

79. Soient $ABCD$ un tétraèdre, O_1 le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et (D_1) la droite orthogonale au plan (ABC) en O_1.

1) Montrer que (D_1) est la droite d'intersection des plans médiateurs (Π_A), (Π_B) et (Π_C) respectivement des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

2) Soient O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle DBC et (D_2) la droite orthogonale au plan (BCD) en O_2.
Montrer que (D_1) et (D_2) sont sécantes en I.
Que représente le point I pour le tétraèdre $ABCD$?

80. Soient (D) et (Δ) deux droites définies respectivement par :

$$[t \longmapsto (t+1,\ -t+2,\ 2t-2)]$$

et :

$$[t \longmapsto (-t+1,\ 2t,\ t+2)].$$

1) Vérifier que (D) et (Δ) sont non coplanaires.

2) Déterminer les paramètres t et t' associés respectivement aux points M situé sur (D) et N situé sur (Δ) tels que (MN) soit perpendiculaire à (D) et à (Δ).

3) Calculer la longueur MN appelée **distance des deux droites** (D) et (Δ).

81. Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux de $\mathcal{E}$.

1) A tout point M de $\mathcal{E}$, on associe le point S défini par :

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}.$$

Peut-on avoir $S = M$? Montrer que toutes les droites (MS), pour M différent de S, ont un point commun G que l'on déterminera.

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = 0.$$

82. Soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0.$$

83. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$, et k un nombre réel. On note d la distance de A à B.

1) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$MA^2 + MB^2 = k^2.$$

2) Chercher l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

3) Soient α et β deux nombres réels. Chercher alors l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k^2.$$

4) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\dfrac{MA}{MB} = k^2$.

84. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$ et k un nombre réel.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k.$$

85. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{E}$ et k un nombre réel.
Déterminer les ensembles des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$

b) $\|\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$

c) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$.

86. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ distincts et (D) une droite non orthogonale à (AB).

1) Montrer qu'il existe une unique sphère passant par A et B et ayant son centre sur (D).

2) $\mathcal{E}$ étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la droite (D) est définie par le point $C\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ passant par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ et ayant son centre appartenant à (D).

87. Déterminer une équation de la sphère $(\mathcal{S})$ dans chacun des cas suivants :

a) Le centre de $(\mathcal{S})$ appartient au plan $\mathcal{P}$ d'équation $(z = 0)$, l'intersection de (S) avec $\mathcal{P}$ est le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation dans $\mathcal{P}$:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

$(\mathcal{C})$ est un **grand cercle** de la sphère : son centre est le centre de $(\mathcal{S})$.

b) Une équation de l'intersection de $(\mathcal{S})$ avec le plan $(z = 0)$ est :

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

et le plan d'équation $(z = 2)$ est tangent à $(\mathcal{S})$.

c) Une équation de l'intersection de (S) avec le plan $(z = 0)$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

et le plan d'équation $(3x - 4y - 19 = 0)$ est tangent à (S).

d) Le centre de la sphère a pour coordonnées 0, 1 et 2. La sphère (S) est tangente au plan d'équation :

$$2x + y - 2z - 3 = 0.$$

88. Soient r et d deux nombres réels strictement positifs, (S) une sphère de centre O et de rayon r et un point M de $\mathcal{E}$ situé à une distance d de O.

1) A et B étant deux points de (S) tels que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = d^2 - r^2.$$

2) Si une droite passant par M coupe la sphère (S) en A et A' montrer qu'alors on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = d^2 - r^2 \quad \text{(utiliser le moint } B\text{)}.$$

Si une droite passant par M est tangente à (S) en T, montrer alors que :

$$\overrightarrow{MT}^2 = d^2 - r^2.$$

La quantité : $d^2 - r^2$ est appelée **puissance du point M** par rapport à la sphère (S).

3) Soit (S') une sphère de centre O' et de rayon r'. Étudier l'ensemble (E) des points M ayant même puissance par rapport aux deux sphères (S) et (S').

6 Probabilités et statistiques

I. DÉNOMBREMENT
II. PROBABILITÉS
III. CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION D'UNE SÉRIE STATISTIQUE
IV. AJUSTEMENT LINÉAIRE

I. Dénombrement

1 Ensembles finis

Question 1 *Soient I_2, I_3, I_4 et I_5 les ensembles définis par :*

$$I_2 = \{1; 2\}, \quad I_3 = \{1; 2; 3\}, \quad I_4 = \{1; 2; 3; 4\}$$

et : $I_5 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

1) Pour chacun des ensembles ci-dessous, déterminer s'il existe au moins une bijection de l'ensemble sur un des quatre ci-dessus, en précisant lequel.

$E = \{a, b, c, d, e\}$ $\quad F = \{\square, \square, \triangle\}$ $\quad G = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$H = \{?, !\}$ $\quad I = \{x \in \mathbb{N},\ x \text{ divise } 15\}$

$J = \{A, B, C, D\}$.

2) Parmi les ensembles E, F, G, H, I, J, quels sont ceux qui sont tels qu'il existe une bijection de l'un sur l'autre? Que peut-on dire alors du nombre d'éléments de ces ensembles?

On a déjà vu au premier chapitre du tome d'analyse (question 6) que, E et F étant deux ensembles finis il existe au moins une bijection de E sur F si et seulement si E et F ont même nombre d'éléments.

Question 2 *Soient E un ensemble non vide, m et n deux entiers naturels non nuls. Démontrer que s'il existe une bijection de E sur* $\{1, 2, \ldots m\}$ *et une bijection de E sur* $\{1, 2, \ldots n\}$ *alors* $m = n$.

Ainsi à un ensemble fini E non vide on associe un seul entier naturel n tel que E soit en bijection avec $\{1, 2, \ldots n\}$: cet entier n est le nombre d'éléments de E ou encore le cardinal de E et on le note card E. Par convention card $\varnothing = 0$.

Question 3 *Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs les entiers naturels n et p.*

1) Vérifier que si E et F sont disjoints alors $E \cup F$ est fini et de cardinal $n + p$.

2) Supposons maintenant E et F non disjoints; on note E' l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F : on écrit : $E' = E - F$.
Montrer que :

$$Card\ E = Card\ E' + Card\ (E \cap F).$$

3) Montrer que si F est inclus dans E alors :

$$Card\ F \leqslant Card\ E.$$

4) Montrer que :

$$Card\ (E \cup F) = Card\ E + Card\ F - Card\ (E \cap F).$$

Ainsi on a :

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis.
On a :

$$\text{Card}\ (E \cup F) = \text{Card}\ E + \text{Card}\ F - \text{Card}\ (E \cap F).$$

On a aussi, en traçant le diagramme cartésien de $E \times F$, le résultat :

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis.
Le produit cartésien $E \times F$ de ces deux ensembles est fini, et on a :

$$\text{Card}\ (E \times F) = \text{Card}\ E \times \text{Card}\ F.$$

Exercice 1 Dans un club de sports, les adhérents paient leur carte du club puis une cotisation pour chaque sport auxquels ils s'inscrivent.

1) La première année le club propose deux sports : le football et le tennis. Le trésorier du club constate très vite qu'il a vendu 58 cartes d'adhérent au club mais qu'il n'a que 35 cotisations au football et 25 au tennis, parmi ceux-ci, 10 adhérents se sont inscrits dans les deux disciplines. Combien d'adhérents n'ont pas encore cotisé ni au football ni au tennis?

2) La deuxième année, le club dispose en plus d'une piscine.
Cette fois-ci le trésorier note 172 adhérents, 78 cotisations au football, 55 au tennis et 60 à la piscine, et remarque que 5 adhérents sont inscrits dans

les trois disciplines, 15 sont inscrits au tennis et à la piscine (et peut-être au football) de même 11 font football et piscine et 12 football et tennis.
Combien d'adhérents :

a) ne font que du football?

b) ne font que du tennis?

c) ne font que de la natation?

d) ne se sont encore inscrits dans aucune discipline?

Exercice2

On dispose de deux sacs A et B contenant des jetons portant un numéro : 1, 2, 3, 4 dans A, 1, 2, 3, 4 et 5 dans B.
On tire un jeton du sac A puis un jeton du sac B, en les mettant dans cet ordre sur la table on forme un nombre de deux chiffres.

1) Combien de nombres peut-on obtenir?

2) Combien de nombres divisibles par 11 peut-on obtenir?

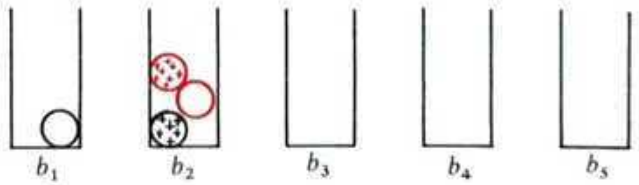
3) Combien de nombres pairs peut-on obtenir?

4) Combien de nombres divisibles par 3 peut-on obtenir?

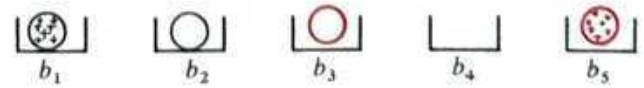
Question 4

On dispose de cinq boîtes dans lesquelles on range 4 boules.
On se propose de compter les différentes façons de ranger ces boules dans ces boîtes.
Avant de compter ou ***dénombrer,*** *il faut que soient précisées les conditions de l'expérience (conditions données par la disposition et la taille des boîtes et les boules elles-mêmes). Ainsi on peut avoir des boîtes qui ne peuvent contenir qu'une boule. On peut aussi travailler avec quatre boules identiques (ou* ***indiscernables****) et ne s'intéresser qu'au nombre de boules contenues dans chaque boîte.*
Parmi les schémas suivants, déterminer ceux qui se rapportent à un même *« type de rangement » c'est-à-dire que les conditions imposées par les objets sont les mêmes (les boîtes sont numérotées :* b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5*).*

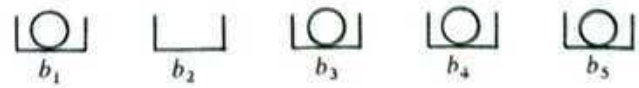
a)



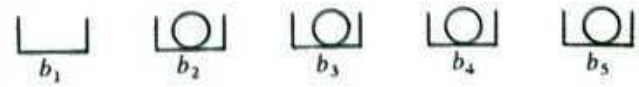
b)



c)



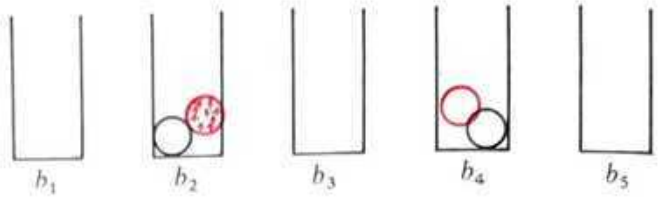
d)



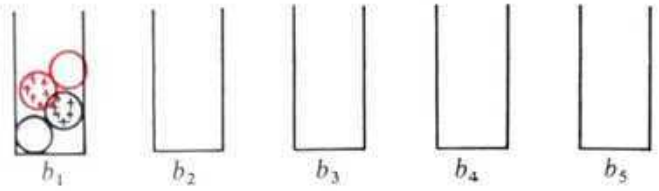
e)



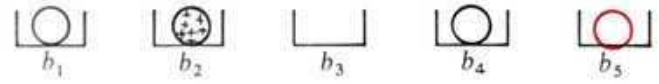
f)



g)



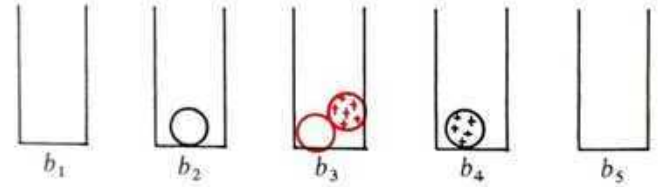
h)



i)



j)



Y a-t-il d'autres types de rangements faisant intervenir les mêmes considérations sur les boules ou la taille des boîtes que celles qui ont précédemment guidé le choix des regroupements précédents?
Dans le cas où les boîtes ne sont pas discernables, on s'intéresse seulement au nombre de boîtes qui contiennent des boules et combien?
Combien a-t-on alors de types de rangement selon les boules et les tailles des boîtes?

Dans ce paragraphe on n'étudiera que les trois cas présentés c'est-à-dire que les boîtes sont discernables (numérotées, chacune sa couleur ou sa lettre ou sa place bien précise...) et que l'on distingue trois cas :

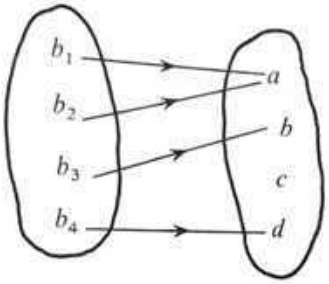
Premier cas : les boules sont discernables (couleurs, numéro...).
Chaque boîte peut contenir au moins autant de boules qu'il y en a de données (on peut mettre dans chaque boîte 0, 1, 2, 3 ou 4 boules dans notre exemple).

Deuxième cas : les boules sont discernables.
Chaque boîte ne peut contenir au plus qu'une boule (on peut mettre dans chaque boîte soit aucune boule soit une boule mais pas plus).

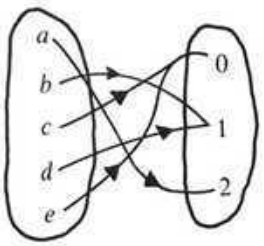
Troisième cas : les boules sont indiscernables (même couleur).
Chaque boîte ne peut contenir au plus qu'une boule.

Le fait que les boules soient discernables ou pas correspond aux mathématisations suivantes :

• Si les boules sont discernables deux à deux alors un rangement de ces boules dans les boîtes est une application de l'ensemble des boules dans l'ensemble des boîtes. Par exemple les boules b_1, b_2 dans la boîte a la boule b_3 dans la boîte b et b_4 dans la boîte d :



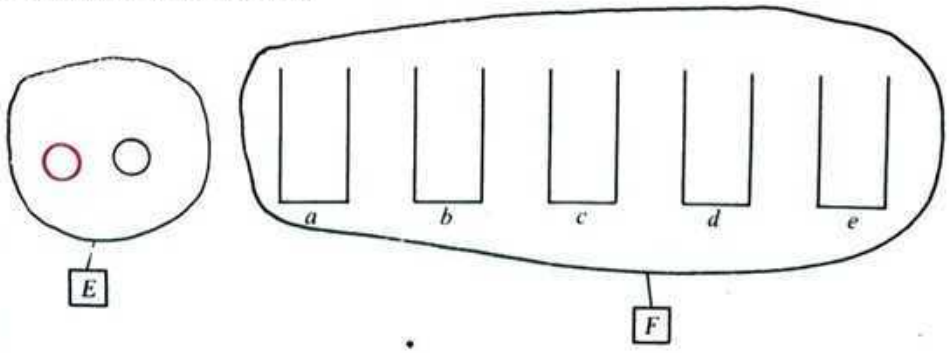
• Si les boules sont indiscernables toutes identiques alors un rangement de ces boules dans les boîtes est une distribution statistique c'est-à-dire une application de l'ensemble des boîtes dans $\mathbb{N}$.
Par exemple la boîte a en contient 2, la boîte b une et la boîte d une :



2 Étude du premier cas. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Le modèle du cas est, ici : des boules discernables à ranger dans des boîtes discernables qui peuvent contenir au moins autant de boules qu'il y en a de données.

Question 5 *On dispose de deux boules : une rouge ○ et une noire ○, et de cinq boîtes marquées respectivement des lettres a, b, c, d et e qui chacune peuvent contenir les deux boules.*



De combien de façon possibles peut-on ranger la boule rouge dans ces boîtes? Une fois la boule rouge rangée de combien de façon peut-on ranger la boule noire dans ces boîtes? Faire un « arbre de choix » indiquant toutes les possibilités trouvées en utilisant la notion intuitive de choix. Quel est le nombre de dispositions possibles de ces deux boules dans ces cinq boîtes? Constater qu'à chacune de ces dispositions est associée, de façon unique une application de l'ensemble E formé des deux boules ○ et ○, dans l'ensemble F formé des cinq boîtes a, b, c, d et e.
Quel est le nombre des applications de E dans F?

Question 6 *Montrer que chacune des situations suivantes conduit à résoudre le même problème c'est-à-dire à déterminer le nombre d'applications d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F ; et dans chaque cas dénombrer ces applications en faisant un arbre de choix, éventuellement partiel.*

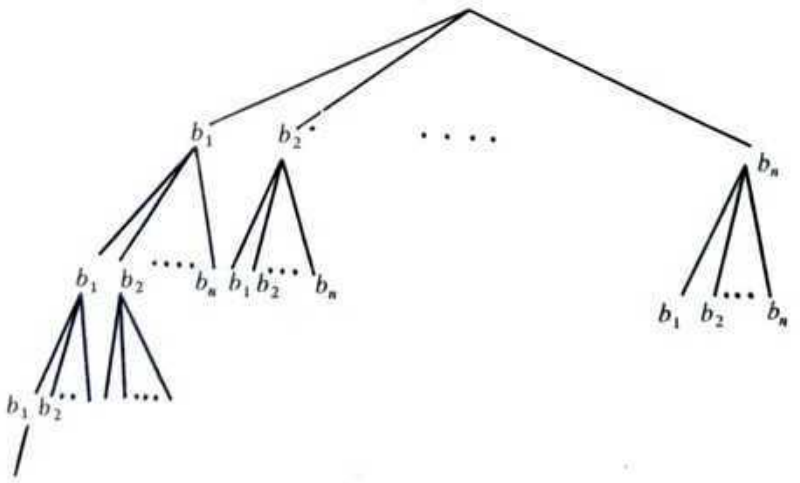
1) Combien de numéros de six chiffres peut-on former sur le cadran d'un téléphone?

*2) Combien de mots de trois lettres, ayant un sens ou non (un mot est en fait une association de lettres dans un ordre précis), peut-on écrire avec les six voyelles de l'alphabet français? (*aau *est un exemple).*

3) Combien de nombres à quatre chiffres un enfant peut-il écrire dès qu'il connaît les neuf chiffres de 1 à 9 du système décimal?

Plus généralement, soient E_p un ensemble fini de cardinal p et F_n un ensemble fini de cardinal n. On note $a_1, a_2, \ldots a_p$ les éléments de E_p et $b_1, b_2, \ldots b_n$ les éléments de F_n.
Pour « fabriquer » une application de E_p dans F_n, il faut :

- choisir l'image de a_1 : on a n possibilités : $b_1, b_2 \ldots b_n$
- choisir alors l'image de a_2 : on a, dans chaque cas encore n possibilités
- choisir dans chaque cas l'image de a_3 : encore n choix à chaque fois
- etc.



Quand on aura ainsi choisi les images des p éléments de E_p, on aura obtenu $\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{p \text{ facteurs}}$ cas possibles, c'est-à-dire n^p applications de E_p dans F_n.

On a ainsi le résultat suivant :

Théorème

Soient E_p un ensemble fini de cardinal p et F_n un ensemble fini de cardinal n.
L'ensemble $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ des applications de E_p dans F_n est fini et de cardinal n^p.
On a Card $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ = Card $F_n^{\text{Card } E_p}$.

Soit E un ensemble on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Par exemple si $E = \{a, b\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Question 7

1) Soit E_3 l'ensemble $\{a, b, c\}$.
Écrire en extension l'ensemble $\mathcal{P}(E_3)$ des parties de E_3.

2) a) *Soit E_4 l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.*
Écrire en extension l'ensemble $\mathcal{P}(E_4)$ des parties de E_4.

b) *De combien de manières peut-on choisir des personnes (pas, une ou plusieurs) dans un groupe de quatre personnes?*

3) Soit E_p un ensemble fini de cardinal p.
Vérifier que former une partie de E_p revient à définir une application de E_p dans $\{0, 1\}$.
En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}(E_p)$ des parties de E_p est fini et a pour cardinal 2^p.

Ainsi on a :

L'ensemble des parties d'un ensemble fini de cardinal p est fini et de cardinal 2^p; autrement dit :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}.$$

Exercice 3

Dans le système de numération décimale, dénombrer l'ensemble des nombres à cinq chiffres (un nombre ne pouvant commencer par zéro).
Combien existe-t-il de nombres pairs à cinq chiffres?

Exercice 4

Combien de «mots» de trois lettres peut-on former dans l'alphabet français?
Combien de «mots» de trois lettres commençant et finissant par une voyelle peut-on former?

3 Étude du deuxième cas. Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

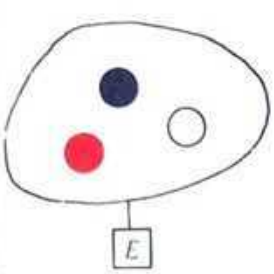
Le modèle du cas est le suivant : on doit ranger des boules discernables dans des boîtes discernables qui, chacune, ne peuvent contenir au plus qu'une boule.

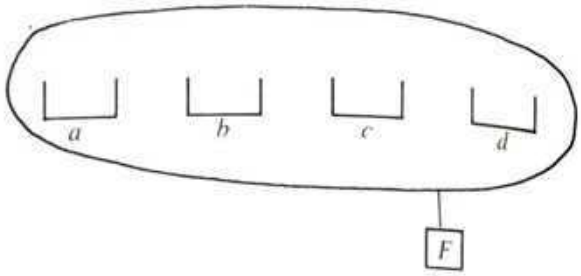
Question 8

Combien y-a-t-il de dispositions possibles s'il y a strictement plus de boules que de boîtes? s'il y a seulement une boule?

Question 9

On dispose de trois boules : une noire ●, une blanche ○ et une rouge ● et de quatre boîtes marquées respectivement des lettres a, b, c et d, qui chacune ne peuvent pas contenir plus d'une boule :





De combien de façons peut-on ranger la boule ● *dans une de ces boîtes? Une fois la boule* ● *rangée, combien a-t-on de choix pour ranger la boule* ○ *? Une fois ces deux boules rangées, chacune dans sa boîte, combien a-t-on de possibilités pour ranger la boule* ● *?*

Faire un arbre de choix où seront indiquées toutes les possibilités de rangement des trois boules de l'ensemble E dans les quatre boîtes de l'ensemble F.

Quel est le nombre de dispositions des trois boules dans les quatre boîtes? Constater qu'à chaque disposition des trois boules de E dans les quatre boîtes de F, est associée de façon unique, une application injective de E dans F. Quel est le nombre d'applications injectives de E dans F?

Question 10

Montrer que chacune des situations suivantes conduit à résoudre le même problème, c'est-à-dire à dénombrer l'ensemble des applications injectives d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F ; et dans chaque cas dénombrer ces injections en faisant un arbre de choix, éventuellement partiel.

1) Un sac contient neuf jetons numérotés de 1 à 9.
On tire successivement cinq jetons de ce sac sans remettre le jeton tiré à chaque fois, et on place ces jetons sur la table dans l'ordre dans lequel on les a tirés. Combien y a-t-il de nombres possibles ainsi écrits sur la table avec les jetons tirés?

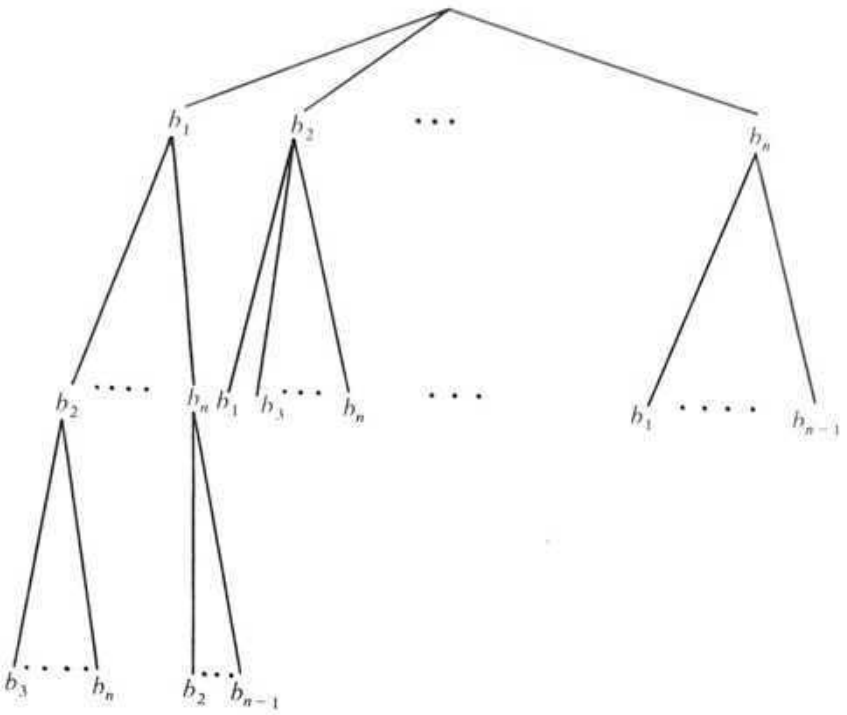
2) Combien peut-on écrire de mots distincts de trois lettres si l'on ne dispose que d'un seul jeu de six cartons sur chacun desquels est écrite une des voyelles de l'alphabet français?

Plus généralement, soient E_p un ensemble fini de cardinal p et F_n un ensemble fini de cardinal n. On note $a_1, a_2 \ldots a_p$ les éléments de E_p et $b_1, b_2 \ldots b_n$ les éléments de F_n.
Si p est strictement supérieur à n alors il n'existe aucune application injective de E_p dans F_n.
Supposons donc $p \leqslant n$.
Pour « fabriquer » une injection de E_p dans F_n, il faut :

- choisir l'image de a_1 : on a n possibilités : $b_1, b_2 \ldots b_n$
- choisir alors dans chaque cas l'image de a_2 : on a alors $n - 1$ possibilités car l'image de a_1 est déjà prise

• choisir alors l'image de a_3 : dans chaque cas on a $n - 2$ possibilités (les images de a_1 et a_2 ne sont plus « disponibles »)

• etc.



Quand on aura ainsi choisi les images des p éléments de E_p, on aura obtenu $\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ cas possibles.

On remarquera la valeur du dernier facteur $n - p + 1$: en effet le produit ci-dessus est formé de p facteurs consécutifs « en descendant d'une unité à chaque fois » à partir de n :

le premier est n, c'est-à-dire $n - 0$
le deuxième est $n - 1$
le troisième est $n - 2$
⋮
le $k^{\text{ième}}$ est $n - (k - 1)$
⋮
le $p^{\text{ième}}$ et dernier facteur est donc $n - (p - 1)$ c'est-à-dire $n - p + 1$.

Dans la pratique on écrit les p entiers naturels consécutifs décroissants à partir de n. Ainsi on a :

Théorème

Soient E_p un ensemble fini de cardinal p et F_n un ensemble fini de cardinal n avec n supérieur ou égal à p.
L'ensemble $\mathfrak{I}(E_p, F_n)$ des applications injectives de E_p dans F_n est fini et de cardinal $n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$.

Exercice 5 Une file de sept enfants comprend trois filles et quatre garçons. De combien de manières différentes, en tenant compte de leur place dans la file, peut-on disposer ces sept enfants en file indienne sachant que le premier et le dernier sont des filles? (On tient compte des personnes et pas seulement des sexes.)

Exercice 6 Dans une classe de quarante élèves, combien y-a-t-il de façon de choisir un chef de classe, un sous-chef de classe et un responsable de cahier de texte (dans le cas où ces trois fonctions doivent être confiées à trois élèves différents)?

Définition

Soient n et p deux entiers naturels avec $p \leqslant$ n, et E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **arrangement** (sans répétition) d'ordre p des n éléments de E, toute application injective d'un ensemble à p éléments (souvent $\{1, 2, \ldots p\}$) dans E.

Le théorème précédent s'écrit alors :
Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
Le nombre des arrangements d'ordre p des éléments d'un ensemble fini de cardinal n est noté A_n^p, et on a : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.
Ainsi A_n^p est le produit de p entiers naturels consécutifs décroissant, le premier étant n.
On rappelle qu'une **permutation** d'un ensemble E est une bijection de E dans lui-même.

Question 11 *Soit E un ensemble fini de n éléments.*
Montrer qu'une application injective de E dans lui-même est une permutation de E.
Plus généralement montrer qu'un arrangement d'ordre n des n éléments de E est une application bijective d'un ensemble à n éléments sur E.
Calculer A_n^n.

Ainsi on a :

Théorème

Le nombre des permutations d'un ensemble fini de cardinal n (et plus généralement le nombre de bijection d'un ensemble fini sur un ensemble fini ayant tous deux même nombre d'éléments n) est égal au produit des n premiers entiers naturels non nuls.
On note ce produit $n!$ et on lit **factorielle** n.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

et, par convention, $0! = 1$.

Question 12 *Montrer que quels que soient les entiers naturels n et p avec $p \leqslant n$ on a :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercice 7 Combien peut-on former d'anagrammes du mot table? (Un anagramme est un mot formé avec toutes les lettres du mot donné).

Exercice 8 De combien de façons différentes peut-on placer six convives autour d'une table de six places, chaque place étant numérotée?
Autour de cette même table, on doit placer trois couples en alternant les sexes. Combien a-t-on de choix?

Exercice 9 De combien de façons, vingt élèves peuvent-ils se placer en file indienne?

4 Étude du troisième cas. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble fini

Le modèle du cas est le suivant : on doit ranger des boules indiscernables dans des boîtes discernables sachant que chaque boîte peut contenir au plus une boule. Ici on ne s'intéresse donc plus aux boules mais aux boîtes qui sont dans deux états possibles : vide ou pleine.

Question 13 *Combien y-a-t-il de dispositions possibles s'il y a strictement plus de boules que de boîtes? s'il y a autant de boules que de boîtes?*

Question 14 *On dispose de trois boules identiques et de quatre boîtes marquées respectivement des lettres a, b, c et d, qui, chacune, ne peuvent pas contenir plus d'une boule.*

1) Constater qu'à toute disposition de ces trois boules dans ces quatre boîtes (1 boule ou pas de boule dans chaque boîte) est associée de façon unique une partie de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ formée de trois éléments.

2) On note *E l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.*
Dénombrer les parties de cardinal 3 de E.
On note C_4^3 cet entier naturel.

3) Une partie F de E à trois éléments étant choisie, déterminer le nombre d'injections de $\{1, 2, 3\}$ dans E ayant cette partie F pour image.

4) Déduire des deux questions précédentes une égalité avec les entiers naturels A_4^3 et C_4^3.

Question 15 *Montrer que les situations suivantes conduisent à résoudre le même problème, c'est-à-dire à dénombrer l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble E fini (où p est un entier naturel avec $p \leqslant$ Card E).*

1) Combien d'équipes différentes de volley-ball peut-on constituer dans un groupe de vingt personnes? (Une équipe de volley est constituée de six joueurs et leurs places changent).

2) Un tiroir contient quatre ceintures noires, trois ceintures blanches, deux ceintures bleues et une ceinture verte.
On tire simultanément trois ceintures de ce tiroir.
Quel est le nombre de possibilités de tirer trois ceintures noires? trois ceintures blanches? trois ceintures bleues?

Plus généralement, soient E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel inférieur ou égal à n.
« Fabriquer » une injection de $\{1, 2, \ldots p\}$ dans E revient à choisir la partie à p éléments de E qui sera l'ensemble image, puis à faire une permutation de ces p éléments donc le nombre d'injection de $\{1, 2, \ldots p\}$ dans E est le produit du nombre de parties à p éléments de E par le nombre des permutations de ces p éléments (c'est-à-dire $p!$).
Ainsi on a :

Théorème

Soient E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel inférieur ou égal à n.
Le nombre de parties à p éléments de l'ensemble E est égal à :

$$\frac{A_n^p}{p!}.$$

Exercice 10 Combien peut-on former de sous-ensembles de 6 éléments dans un ensemble de 11 éléments?

Exercice 11 Parmi 40 professeurs et 500 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comprenant 4 professeurs et 3 élèves. De combien de façons peut-on former cette commission?

Définition

Soient E un ensemble fini de cardinal n, et p un entier naturel, $p \leqslant n$. On appelle **combinaison** (sans répétition) d'ordre p des n éléments de E, toute partie à p éléments de E.

Le théorème précédent s'écrit alors :

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
Le nombre de combinaisons d'ordre p des éléments d'un ensemble fini de cardinal n est noté C_n^p et on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

c'est-à-dire :

$$C_n^p = \frac{n(n-1) \ldots (n-p+1)}{p!}$$

ou encore :

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.}$$

Exercice 12 Combien un polygone convexe de n côtés a-t-il de diagonales? (droite passant par deux sommets non consécutifs). Quel est le nombre de côtés d'un polygone convexe qui a vingt diagonales?

Exercice 13 Combien de mots différents peut-on écrire avec p lettres A et q lettres B?

Question 16 *1) En utilisant la définition des combinaisons d'ordre p (et n − p) de n éléments démontrer que : quels que soient les entiers naturels n et p avec $p \leqslant n$ on a :*

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

2) Retrouver ce résultat en utilisant le calcul.

3) Calculer C_{123}^{119} *et* C_{47}^{42}.

4) Calculer C_n^0, C_n^1 *et* C_n^n *où n est un entier naturel non nul.*

Question 17 *1) Soient E un ensemble non vide fini de cardinal n, a un élément de E et p un entier inférieur ou égal à n et strictement positif.*
Dénombrer les parties de E ayant p éléments en distinguant celles qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a.

2) Retrouver par le calcul que :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

3) Calculer C_9^1 *puis* C_9^2; *en déduire* C_{10}^2.

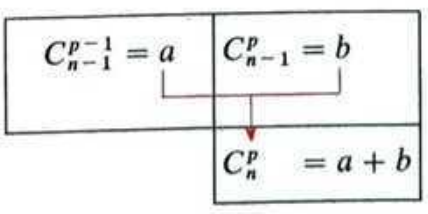
On retiendra les formules suivantes sur les C_n^p :

Théorème

Quels que soient les entiers naturels n et p tels que n soit non nul, et p soit non nul et inférieur ou égal à n, on a :

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$$
$$C_n^p = C_n^{n-p}$$
$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Question 18 *Utiliser ces propriétés et la disposition suivante :*



pour compléter le tableau suivant :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	$C_0^0 = 1$						
1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$					
2	$C_2^0 = 1$	$C_2^1 = 2$	$C_2^2 = 1$				
3	$C_3^0 =$	$C_3^1 =$	$C_3^2 =$	$C_3^3 =$			
4							
5							
6							

On retiendra la façon de remplir ce tableau pour avoir rapidement les valeurs de C_n^p pour « n petit ». Mais en fait ce tableau est plus souvent schématisé comme ci-dessous :

0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

où, à la ligne i, on a les C_i^k avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots i\}$.
Ce schéma est appelé le **triangle de Pascal.**

Question 19 *Soient a et b deux nombres réels.*

1) Vérifier que :

a) $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1$

b) $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2$

c) $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$.

2) Calculer $(a+b)^4$ et l'écrire avec les C_4^k (où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

3) Plus généralement, calculer, pour n entier naturel strictement positif, $(a+b)^n$ en explicitant comment on trouve le terme $a^k b^{n-k}$ où $k \in \{0, 1, \ldots n\}$.

Ainsi on a :

Théorème

Quels que soient les nombres réels a et b et l'entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

ou encore, en utilisant le symbole $\sum$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Exercice 14 Retrouver le résultat du théorème ci-dessus par un raisonnement par récurrence.

Exercice 15 1) Calculer, pour tout nombre réel x, le nombre $\left(2x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^5$.

2) Calculer le terme en x^3 dans le développement de $\left(4x + \frac{1}{x^2}\right)^{11}$.

Exercice 16 Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

a) $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

II. Probabilités

La théorie des probabilités est un modèle permettant l'étude de phénomènes dont la réalisation est due au hasard, c'est-à-dire des phénomènes fortuits par exemple le côté visible d'une pièce lorsqu'elle retombe, le chiffre inscrit sur le dé lorsqu'il s'arrête sur la table, le « tirage au sort » d'une personne d'un groupe, d'une carte d'un jeu, des billets gagnants d'une loterie, etc.

Dans ce paragraphe nous chercherons à mathématiser de telles situations dans le cas où l'ensemble des résultats possibles du phénomène ou **épreuves,** est un ensemble fini.

Question 20 *On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on lance ce dé sur la table. On lit, lorsqu'il est arrêté, le chiffre inscrit sur la face supérieure.*
*Quel est l'ensemble des résultats possibles appelé l'**univers** de l'épreuve?*

Question 21 *On lance, dans les mêmes conditions, deux fois de suite ce dé et on considère le nombre obtenu en prenant pour chiffre des dizaines le premier chiffre obtenu et pour chiffre des unités le deuxième chiffre obtenu. Donner le nombre d'éléments de l'univers, c'est-à-dire le nombre de résultats possibles de cette épreuve, appelés encore **éventualités.***

Question 22 *Dans l'épreuve qui consiste à observer le numéro inscrit sur la face supérieure du dé après le lancer, déterminer :*

*1) l'**événement** associé à la phrase « le chiffre marqué est pair », c'est-à-dire l'ensemble des résultats correspondant à cette phrase;*

2) l'événement correspondant à « le chiffre marqué est divisible par 3 »;

3) l'événement correspondant à « le chiffre marqué est supérieur ou égal à 3 »;

4) l'événement correspondant à « le chiffre marqué est 6 »;

5) l'événement correspondant à « le chiffre marqué est strictement supérieur à 6 ».

Attention au vocabulaire :

une éventualité est un résultat possible c'est-à-dire un élément de l'univers Ω. Alors que :

un événement est un ensemble de résultats possibles c'est-à-dire une partie de l'univers Ω, ou encore un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de l'univers Ω.
Lorsqu'un événement ne contient qu'une éventualité :

l'événement est alors un singleton ou **événement élémentaire.**
L'ensemble vide, qui est une partie de Ω, est appelé **événement impossible** : il n'est pas réalisable.
L'ensemble Ω, qui est une partie de Ω, est toujours réalisé on dit que c'est l'**événement certain.**
On dit qu'un **événement** est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience est une éventualité appartenant à cet événement.

Question 23 *On lance trois fois de suite, une pièce non truquée (un côté face et un côté pile) et on note le côté visible à chaque fois : on obtient ainsi comme éventualité un triplet, par exemple le résultat : « le 1er lancer fait apparaître pile, le 2e face et le 3e face », sera représenté par le triplet (P, F, F) que l'on notera plus simplement PFF.*
Dénombrer l'univers.
Écrire en extension les événements suivants :

A : on a eu exactement deux fois face

B : le côté pile est sorti exactement une fois

C : le côté face est sorti en premier

D : on a obtenu au moins une fois pile

G : face est sorti trois fois.

*Déterminer, pour chacun de ces événements, l'**événement contraire** c'est-à-dire le complémentaire dans Ω de cet événement : l'événement contraire $\overline{H}$ de H est l'événement réalisé si et seulement si H ne l'est pas.*
Quel est l'événement contraire de l'événement certain? de l'événement impossible?

Soit H un événement, quel est l'événement contraire de $\overline{H}$ où $\overline{H}$ est l'événement contraire de H?

Question 24

Un jeu de 32 cartes est constitué de quatre « couleurs » notées pique, carreau, cœur et trèfle représentées respectivement par les signes : ♠, ♦, ♥ et ♣. Et chacune de ces couleurs contient 8 cartes (ainsi on en a bien 32) marquées chacune d'un nombre : 7, 8, 9 ou 10, ou bien d'une lettre : V pour le valet, D pour la dame, R pour le roi et A pour l'as. Les quatre cartes de chaque couleur, marquées d'une lettre sont appelées « têtes » : on a ainsi 16 têtes dans un jeu de 32 cartes.
On représente chaque carte par sa « valeur » et sa couleur, par exemple la dame de cœur est D♥, le roi de trèfle est R♣.
L'épreuve consiste à tirer une carte d'un jeu de 32 dont on ne voit pas les signes.
Décrire les événements suivants :

A : obtenir une carte de cœur

B : obtenir une dame

C : obtenir un valet ou un roi

D : obtenir un nombre pair

E : obtenir une tête noire (pique ou trèfle).

*Les événements A et B peuvent-ils être réalisés en même temps : décrire l'événement « A et B ». Pourquoi les événements A et E ne peuvent pas être réalisés simultanément? On dit que A et E sont des **événements incompatibles.** L'événement A est-il incompatible avec D?*
Les événements B et C sont-ils incompatibles?
Déterminer des événements incompatibles avec D.

Exercice 17

Pourquoi un événement et son contraire sont-ils incompatibles?
Est-ce que deux événements incompatibles sont contraires?

Exercice 18

Dans chacun des cas suivants donner en extension l'univers Ω de l'épreuve, les événements *A* et *B* et préciser s'ils sont incompatibles.

1) On lance simultanément un dé blanc et un dé rouge marqués tous deux des chiffres de 1 à 6 et on note les deux chiffres lisibles : le blanc puis le rouge.

A : avoir deux chiffres identiques

B : avoir au moins un chiffre pair.

2) Mêmes gestes mais on note la somme des chiffres.

A : avoir une somme divisible par 5

B : avoir une somme inférieure ou égale à 4.

3) On tire au hasard deux lettres du mot MATHÉMATIQUE.

A : avoir deux lettres identiques

B : avoir deux voyelles.

4) On sort en même temps deux T-shirts d'un tiroir qui en contient trois rouges, deux verts, 4 noirs et 1 bleu.

A : avoir deux T-shirts de même couleur

B : avoir au moins un T-shirt bleu.

5) Du même tiroir on sort un T-shirt, on le remet dans le tiroir, et on en sort à nouveau un; on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on a obtenu les couleurs. Même *A*, et même *B*.

Question 25 *Awa dispose d'une pièce non truquée : on a « autant de chances » d'obtenir face que pile dans un lancer. Par quelle fraction traduira-t-on la « probabilité d'avoir pile »? « d'avoir face » ?*
On dit que toutes les éventualités sont ***équiprobables*** *ou que l'on est dans une situation d'****équiprobabilité.*** *Awa propose à Eva le jeu suivant :*

tu lances deux fois la pièce, si tu obtiens deux fois face, je te donne 10 F, sinon tu me donnes 10 F. Eva répond, alors que son jeu n'est pas équitable et propose le suivant :

tu lances deux fois la pièce, si tu obtiens le même côté aux deux fois, je te donne 10 F, sinon tu me donnes 10 F.
Qui a raison?

Question 26 *On dispose de huit cartons sur lesquels figurent les huit lettres du mot PREMIÈRE, on retourne ces cartons (côté de la lettre contre la table) on les mélange et on en tire deux au hasard.*
Combien a-t-on de « chances » de tirer deux lettres identiques :

1) si l'accent est marqué?

2) si l'accent n'est pas marqué?

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité lorsque chaque éventualité a « le même nombre de chances » de se réaliser, dans ce cas si l'univers a *n* éléments, on dit que la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

Par exemple un dé cubique non pipé, c'est-à-dire parfait, est lancé sur la table : chaque face a la même probabilité d'apparition qui est $\frac{1}{6}$.

Plus généralement le « nombre de chances » d'obtenir la réalisation d'un événement dans une épreuve se traduit toujours par une fraction : « deux chances sur trois » donnera $\frac{2}{3}$ par exemple, on dit alors que la probabilité de l'événement donné est $\frac{2}{3}$.

Plus généralement une probabilité est une application p, qui, à tout événement associé à l'épreuve donnée, fait correspondre un nombre compris entre 0 et 1 que l'on exprime sous forme de fraction irréductible ou sous forme de pourcentage. Ainsi on a $p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$. Et cette application vérifie les propriétés suivantes :

- puisque l'événement certain est toujours réalisé , sa probabilité est 1 : $p(\Omega) = 1$
- si deux événements A, et B, sont incompatibles alors l'événement « A ou B » est réalisé si et seulement si soit A l'est soit B l'est, c'est-à-dire si et seulement si le résultat de l'épreuve est une éventualité élément de A ou de B. Ainsi « A ou B » est l'ensemble $A \cup B$, et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega) \quad [A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)].$$

Question 27 *Soit A un événement.*
Montrer que la probabilité $p(\overline{A})$ de son événement contraire $\overline{A}$ est égale à $1 - p(A)$.
En déduire la probabilité de l'événement impossible.

Question 28 *Soient A et B deux événements.*
Décomposer l'événement « A ou B » en une réunion de trois événements incompatibles deux à deux. En déduire que :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Revenons au cas d'une épreuve avec équiprobabilité et dont l'univers est constitué de n éléments.
Soit A un événement constitué de k éléments ($0 \leqslant k \leqslant n$) que l'on note $a_1, a_2 \ldots a_k$.

On a : $$A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_k\}.$$

Ces événements élémentaires $\{a_i\}$ sont incompatibles deux à deux donc :

$$p(A) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \ldots + p(\{a_k\}).$$

Or il y a équiprobabilité donc pour tout i de $\{1, 2, \ldots k\}$ $p(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$

d'où : $$p(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k \text{ termes}}.$$

c'est-à-dire : $$p(A) = \frac{k}{n}.$$

Ce résultat se traduit par :

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est le quotient du nombre de cas favorables, c'est-à-dire le nombre d'éléments de A, par le nombre de cas

possibles, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'univers Ω.
C'est ce résultat que l'on utilise dans le langage courant pour dire par exemple que l'on a cinq chances sur six d'obtenir un autre chiffre que 6 sur un dé;
ou que l'on a trois chances sur cinq d'obtenir une boule verte en extrayant une boule d'une boîte qui en contient une orange, une blanche et trois vertes.
Ainsi le calcul d'une probabilité, dans le cas d'équiprobabilité, se ramène à deux questions de dénombrement.

Exercice 19

On note sur 10 cartons aux dos indiscernables les lettres du mot PROBATOIRE, on les retourne et les mélange puis on en tire un certain nombre :

1) *a*) Quelle est la probabilité, lorsqu'on prend cinq cartons l'un après l'autre d'obtenir, dans l'ordre, les lettre du mot BATIR? du mot POIRE?

b) Est-ce la même si on choisit simultanément cinq cartons, que l'on peut ranger ensuite dans l'ordre que l'on veut?

2) Quelle est la probabilité, lorsqu'on prend sept cartons d'obtenir le mot ABRITER :

a) dans l'ordre si on les tire l'un après l'autre?

b) si on les tire simultanément (avec possibilité de les ranger ultérieurement)?

Exercice 20

Le jeu de pois le plus simple, en Côte d'Ivoire est le suivant : chaque joueur reçoit un tas de graines d'une seule couleur (chacun ayant sa couleur), chacun donne au meneur de jeu sa mise qui se compose d'un nombre, qu'il choisit, de ses graines (de même couleur). Le meneur mélange bien les mises dans un verre et renverse le tout sur la calebasse pourvue au centre d'une tige sur laquelle une graine (et une seule) peut se loger (on recommence l'opération si elle n'est pas réussie jusqu'à ce qu'une graine soit sélectionnée). La couleur de cette graine indique le gagnant qui empoche toutes les mises de la calebasse.

Considérons un « mini-jeu » à trois joueurs, où le nombre de graines misées est de trois au maximum. La probabilité p d'un joueur de gagner dépend de sa mise s et du total t des mises des deux autres : ici on a $s \in \{1, 2, 3\}$ et $t \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Donner dans un tableau les différentes valeurs de p selon s et t.

Quelle est la meilleure stratégie pour un joueur? Pourquoi le jeu est-il équitable si les trois joueurs adoptent cette meilleure stratégie?

Un lien entre les probabilités et les statistiques

Dans ce qui précède on a étudié le lancer d'une pièce et on a supposé que chaque côté de la pièce jetée avait autant de chance d'apparaître. Pourtant si on lance quatre fois la pièce, on n'aura pas forcément deux fois pile et deux fois face mais dans les différentes possibilités c'est celle-ci qui a le plus de chances d'être réalisée. Par contre si on lance un très grand nombre de fois la pièce, par exemple 1 000 fois et si on note à chaque fois le côté obtenu, on

obtient une série statistique avec deux valeurs possibles du caractère : P pour pile et F pour face. Chaque lancer représente un individu de l'ensemble de la population des 1 000 lancers. Soient n_1 et n_2 les nombres d'individus possédant respectivement les caractères F et P c'est-à-dire le nombre de lancers dont le résultat est F, et P respectivement.

Question 29 *Que vaut $n_1 + n_2$?*
Quelles sont les fréquences f_1 et f_2 des modalités respectives F et P?
Si la pièce est parfaite, de quelles valeurs les fréquences f_1 et f_2 ont-elles le plus de chance de s'approcher?

On admet que, si le nombre de lancers est grand et que la pièce est parfaite alors f_1 et f_2 sont voisins de $\frac{1}{2}$.

Ainsi le modèle théorique des probabilités permet de prévoir les résultats d'une expérience. On peut utiliser ce principe pour vérifier qu'une pièce est parfaitement équilibrée ou qu'un dé n'est pas pipé par exemple en prenant les résultats d'un certain nombre d'expériences (lancers) : on prend un échantillon, plus cet échantillon est grand plus les résultats sont probants. Si pour la pièce la fréquence d'apparition de face est proche de 0,5, alors il est vraisemblable que la pièce n'est pas truquée; si pour le dé, la fréquence d'apparition de chaque face est proche de $\frac{1}{6}$, alors le dé n'est pas pipé.

Prenons ici un autre exemple : en Afrique on utilise souvent les cauris dans les jeux de hasard. Si on lance un cauri, l'un ou l'autre des côtés ci-dessous peut se présenter.



la fente, noté F



le dos, noté D

Les propriétés physiques d'un cauri ne permettent pas de savoir si on a autant de chance, comme pour la pièce, d'obtenir le dos ou la fente.
Pour évaluer la probabilité d'obtenir l'un ou l'autre des résultats F et D, on effectue une « enquête statistique » : on lance un certain nombre de fois (assez grand) le cauri en notant à chaque fois si c'est F ou D qui apparaît. Souvent dans ce genre d'enquête on prend un échantillon de 1 000 individus, ici 1 000 lancers. Et on détermine ainsi les fréquences f_1 et f_2 des modalités F et D du caractère face visible du cauri après le lancer.
La probabilité d'obtenir F lors d'un lancer est alors voisine de f_1, tandis que celle d'obtenir D est voisine de f_2.
Ainsi lors d'une expérience réalisée par des chercheurs de l'IRMA avec quatre cauris numérotés 1, 2, 3 et 4, on a obtenu, pour mille lancers :

Numéro du cauri	Nombre n_1 d'apparitions de la face F	Nombre n_2 d'apparitions de la face D	Fréquence f_1 de F	Fréquence f_2 de D
1	390	610	0,39	0,61
2	430	570	0,43	0,57
3	383	617	0,383	0,617
4	422	578	0,422	0,578

On peut donc, raisonnablement, estimer que, lorsqu'on lance l'un des quatre cauris, la probabilité d'obtenir F est 0,4 et celle d'obtenir D est 0,6 : on n'est pas dans une situation d'équiprobabilité.
A partir de là on peut prévoir les chances de gagner pour quelqu'un qui participe à un jeu avec ces cauris. Mais, attention, le gain réel ne sera, en général, voisin du gain théorique que si l'on fait un grand nombre de parties!
Examinons l'exemple du Nigki : jeu pratiqué chez les Bétés dans l'ouest de la Côte d'Ivoire.
Il faut être deux joueurs et posséder quatre cauris. Chaque joueur lance, à son tour, les quatre cauris.
S'il obtient deux F et deux D, il marque deux points,
s'il obtient quatre F, il marque cinq points,
s'il obtient quatre D, il marque dix points,
sinon il marque zéro points.

Question 30 *Sachant que lorsqu'on lance un cauri la probabilité d'obtenir F est* 0,4 $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{2}{5}\right)$ *et celle d'obtenir D est* 0,6 $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{3}{5}\right)$, *déterminer la probabilité pour le premier joueur de marquer 10 points, 5 points, 2 points ou aucun point : on considèrera en fait le lancer d'un cauri comme un tirage au hasard d'une boule d'un canari contenant 2 boules marquées F et 3 boules marquées D, et ceci en situation d'équiprobabilité.*

III. Caractéristiques de dispersion d'une série statistique

Question 31 *Dans une classe de première on a fait une enquête sur la durée totale des trajets journaliers de chacun des 30 élèves. Voici leurs réponses en minutes (on a arrondi à 5 mn près) c'est-à-dire les* ***valeurs observées*** *:*

20 – 60 – 40 – 90 – 75 – 90 – 60 – 100 – 40 – 60 – 20 – 80 – 90 – 60 – 110 – 70 – 80 – 30 – 50 – 70 – 20 – 65 – 90 – 40 – 60 – 40 – 50 – 70 – 90 – 60.

Préciser la population et le caractère de la série statistique étudiée.
Quelles sont les modalités de cette série? Dresser le tableau recensé de la distribution statistique, où l'on lit les effectifs de chaque modalité.
Quelle est la fréquence de la modalité 70?
Déterminer le mode et la moyenne de cette série. Préciser la médiane.

Question 32 *Dans « Perspectives décennales de développement d'Abidjan » on trouve le tableau suivant :*

Activités	*1976*	*1985*	*1990*
Emplois sédentaires	*49 730*	*106 440*	*144 930*
Emplois sur les marchés	*38 640*	*83 230*	*113 500*
Emplois de la rue	*25 000*	*53 850*	*73 430*
Total	*113 370*	*243 520*	*331 860*

Dresser les tableaux des fréquences des trois séries qui donnent les emplois à Abidjan en 76, 85 et 90. Les « proportions » d'emplois restent-elles sensiblement les mêmes?

Question 33 *Le professeur de mathématiques compare les notes de Koffi et Ouattara aux cinq premiers devoirs de l'année. Les notes de Koffi sont 9, 10, 9, 11 et 8,5 celles de Ouattara sont 3, 9, 18, 9 et 8,5.*
Déterminer pour chacun d'eux le mode, la médiane et la moyenne de leurs notes. Est-ce que l'appréciation sera la même sur le bulletin?
Cette série peut être représentée graphiquement de deux façons :

- *en abscisse chaque note (caractère) et en ordonnée l'effectif*
- *sous forme chronologique : en abscisse le numéro du devoir, en ordonnée la note.*

Ainsi les caractéristiques de position vues en seconde (mode, médiane et moyenne) sont insuffisantes pour décrire une distribution statistique.
Cette année, on va donc étudier d'autres caractéristiques d'une série statistique : les caractéristiques de dispersion.

1 Étendue

Question 34 *Pour chacune des séries de la question 33 sur les notes de Koffi et Ouattara, préciser l'amplitude de l'intervalle de variation c'est-à-dire la différence entre la meilleure note et la plus mauvaise.*

Plus généralement :

Définition

On appelle **étendue** d'une distribution statistique associée à un caractère quantitatif, la différence entre la plus grande et la plus petite valeur observée.

L'étendue d'une distribution statistique est facile à calculer, on l'utilise pour tracer les diagrammes et dans les contrôles de fabrication mais elle ne tient compte que des valeurs extrêmes, dont l'une peut être « un accident » : elle ne décrit donc pas assez bien « l'étalement » de la série.

Si l'étendue est faible, alors les valeurs observées sont concentrées autour de la moyenne de la série.
Mais si l'étendue est grande, on ne peut pas conclure que les valeurs observées sont « dispersées » : il faut faire une étude des valeurs situées entre les deux extrêmes exhibés.
Par exemple les notes de N'Guessan au premier trimestre en mathématique sont :

$$9 - 11 - 3 - 12 - 8 - 11 - 19 - 10 - 10.$$

L'étendue de cette série est $19 - 3$ c'est-à-dire 16 mais à part les notes 3 et 19, les résultats sont proches de la moyenne 10,3. Il faut savoir que, avant l'interrogation où il a eu 3 il était absent, et que les deux exercices posés au devoir où il a eu 19, il les avait travaillés la veille avec son père!
Lorsque les valeurs nécessitent un regroupement des données par classe, naturellement on introduit l'étendue de la série pour déterminer l'amplitude des classes en divisant l'étendue par le nombre de classes. Dans le cas d'une distribution discrète, dans un diagramme en bâtons portant les modalités en abscisse et les effectifs en ordonnée, l'étendue est le nombre qui mesure le segment du « pied du 1er bâton au pied du dernier ».

2 Écart moyen

Question 35 *Pour les séries de notes de Koffi et Ouattara calculer, pour chacune de ces séries, la différence de chaque note à la moyenne de la série.*
Quelles sont les moyennes de ces différences dans chaque série de notes.
Puisque les différences positives et les différences négatives se compensent, ceci ne permet pas de comparer les dispersions des deux séries.
Calculer, pour chaque série, l'écart à la moyenne de chaque note, c'est-à-dire la distance de la note à la moyenne, autrement dit la valeur absolue de la différence entre la note et la moyenne.
Calculer, dans chaque cas, la moyenne de ces écarts.

Plus généralement, on pose :

Définition

On appelle **écart moyen** (ou **écart absolu moyen**) d'une série statistique associée à un caractère quantitatif, la moyenne de la série statistique obtenue en remplaçant chaque modalité par sa distance à la moyenne, l'effectif correspondant restant le même.

Ainsi pour une série statistique dont les éléments sont les couples (x_i, n_i) pour i entier naturel compris entre 1 et k (n_i est l'effectif de la modalité x_i), on note N l'effectif total, égal à $\sum_{i=1}^{k} n_i$, et $\bar{x}$ la moyenne de cette série, égale à $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{N}$, alors l'écart moyen de cette série est le nombre $\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \bar{x}|}{N}$.

Exercice 21 On a relevé les diamètres, en cm, d'objets sortant d'une usine en 1984 et en 1985; sur un échantillon de 10 objets pris au hasard, on a obtenu :

en 1984 :

diamètre en cm	57,5	57,7	58
nombre d'objets	3	2	5

en 1985 :

diamètre en cm	57,5	57,6	57,8	57,9	58
nombre d'objets	1	2	3	2	2

Vérifier que ces deux séries ont même moyenne 57,79.
Calculer les écarts moyens e_1 et e_2 de ces deux séries. Quelle est la série la plus dispersée autour de la valeur moyenne commune?
Déterminer le nombre d'objets observés dont le diamètre est situé respectivement dans les intervalles :

$$]57{,}79 - e_1,\ 57{,}59 + e_1[\quad \text{et} \quad]57{,}79 - e_2,\ 57{,}79 + e_2[$$

pour les séries des années 84 et 85.

L'écart moyen permet de comparer la dispersion de deux séries statistiques; il a l'avantage, par rapport à l'étendue, de faire intervenir tous les éléments de la série mais sa détermination n'est pas aisée à cause des valeurs absolues, avec une calculatrice, et longue à la main.
Par ailleurs, ayant par exemple deux séries de notes du même élève (premier et second semestre) dont on connaît les écarts moyens e_1 et e_2, on ne pourra pas directement en déduire l'écart moyen de la série de ses notes de l'année, alors que si les moyennes respectives sont m_1 et m_2 et les effectifs (nombre de notes) respectifs n_1 et n_2, la moyenne sur l'année est $\dfrac{m_1 n_1 + m_2 n_2}{n_1 + n_2}$. Il en est de même lorsque l'on fait la réunion de deux échantillons dans une enquête statistique. Dans le paragraphe ci-dessous, on va étudier une nouvelle caractéristique de dispersion qui permettra de « réunir » deux séries statistiques et d'utiliser plus efficacement la calculatrice.

3 Variance et écart type

Question 36 *Calculer pour les séries des notes de Koffi et Ouattara le carré de l'écart de chaque valeur à la moyenne (ou le carré de la différence (valeur-moyenne)). En déduire, pour chaque série, la moyenne de la série associée à ces carrés.*

Définition

On appelle **variance** d'une distribution statistique la moyenne de la série obtenue en remplaçant chaque modalité par le carré de son écart à la moyenne, et on la note $\mathcal{V}$.

Cette caractéristique permet d'apprécier la dispersion des valeurs observées autour de la moyenne : la variance pour Ouattara est plus grande que celle pour Koffi : les notes de Koffi s'écartent moins de la moyenne 9,5 que celles de Ouattara.
Souvent les modalités s'expriment dans une certaine unité (cm, kg, F, ...) alors la variance n'a pas la même unité (respectivement cm^2, kg^2 et F^2...) ce qui n'a plus de sens! On obtient une caractéristique de dispersion s'exprimant avec la même unité que les modalités, en prenant la racine carrée de la variance. (Par définition la variance est un nombre réel positif ou nul.)

Définition

On appelle **écart-type** d'une distribution statistique la racine carrée de sa variance et on la note σ.

Question 37 *1) Donner les écarts-type des distributions des notes de Koffi et de Ouattara.*
2) Que peut-on dire des valeurs observées si l'écart-type est nul?

Soient $y_1, y_2, \ldots y_N$ les N valeurs observées d'une distribution statistique. Notons $x_1, x_2, \ldots x_k$ les k modalités :

x_1 a pour effectif n_1, x_2 a pour effectif n_2, ... x_k a pour effectif n_k. Ainsi les éléments du N-uplet $(y_1, y_2 \ldots y_N)$ sont : n_1 éléments x_1, n_2 éléments x_2, ... n_k éléments x_k.
On note $\bar{x}$ la moyenne de cette distribution, $\mathcal{V}$ sa variance et σ (lire sigma) son écart-type :

On a :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \qquad \mathcal{V} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} \text{ et } N = \sum_{i=1}^{k} n_i \qquad \mathcal{V} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\text{et } \sigma = \sqrt{\mathcal{V}}$$

Pour la présentation pratique du calcul de la variance et de l'écart type d'une distribution statistique donnée par ses modalités et ses effectifs :

On écrit dans un tableau les colonnes : modalités (x_i), effectifs (n_i), les produits $n_i x_i$ (ceci permet de calculer en dessous la moyenne en calculant $\sum_{i=1}^{k} n_i$ puis $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$, on a $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$), les différences $x_i - \bar{x}$, les carrés de ces différences $(x_i - \bar{x})^2$, les produits

$n_i(x_i - \bar{x})^2$; puis de calculer la variance $\mathcal{V}$ et enfin l'écart-type σ. Ainsi par exemple pour la série des notes de la classe de première C au dernier devoir :

Note	3	6	6,5	8	9	10	10,5	11	12	13	14	15	18
Nombre d'élèves	3	2	1	3	3	2	1	4	5	3	2	2	1

On obtient la moyenne : $\bar{x} \simeq 10{,}25$, l'écart type : $\sigma \simeq 3{,}54$ grâce au tableau ci-dessous.

x_i	n_i	$n_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
3	3	9	− 7,25	52,562 5	157,687 5
6	2	12	− 4,25	18,062 5	36,125 0
6,5	1	6,5	− 3,75	14,062 5	14,062 5
8	3	24	− 2,25	5,062 5	15,187 5
9	3	27	− 1,25	1,562 5	4,687 5
10	2	20	− 0,25	0,062 5	0,125 0
10,5	1	10,5	0,25	0,062 5	0,062 5
11	4	44	0,75	0,562 5	2,250 0
12	5	60	1,75	3,062 5	15,312 5
13	3	39	2,75	7,562 5	22,687 5
14	2	28	3,75	14,062 5	28,125 0
15	2	30	4,75	22,562 5	45,125 0
18	1	18	7,75	60,062 5	60,062 5
	32	328			401,5
$\bar{x} = \frac{328}{32} = 10{,}25$			$\mathcal{V} = \frac{401{,}5}{32} \simeq 12{,}55$		
$N = 32$			$\sigma = 3{,}54$		

Exercice 22 On considère deux distributions statistiques de même nature (par exemple les notes de deux classes pour un devoir commun) ayant même moyenne $\bar{x}$, d'effectifs totaux respectifs N_1 et N_2, de variances respectives $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$. Montrer que la distribution ainsi associée à la réunion des deux populations (les notes de l'ensemble des élèves des deux classes) a pour variance $\dfrac{N_1\mathcal{V}_1 + N_2\mathcal{V}_2}{N_1 + N_2}$.

Question 38 *Avec les notations ci-dessus, développer* $\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{x})^2$ *utiliser le fait que* $\sum_{i=1}^{N} y_i = N\bar{x}$, *pour montrer que* $\mathcal{V} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{x}^2$.

Plus généralement si les valeurs observées sont regroupées, et que la série statistique est $\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots (x_k, n_k)\}$ et que la moyenne est $\bar{x}$, on a :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

En prenant cette nouvelle écriture le calcul de V se fait plus simplement.

Méthode pratique

Pour calculer la variance, et l'écart type d'une distribution statistique dont les valeurs observées sont regroupées en modalités dont on connaît l'effectif.
On construit un tableau de cinq colonnes. On remplit les colonnes : modalités x_i, effectifs n_i, produits $n_i x_i$. En bas des deux dernières colonnes, on calcule N $\left(\text{avec } N = \sum_{i=1}^{k} n_i\right)$ et $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ respectivement, puis, en dessous $\bar{x}$ avec $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N}$. Puis on remplit les colonnes x_i^2 et $n_i x_i^2$ en bas de laquelle on calcule $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$. Il reste alors à calculer $\mathcal{V}$ avec la formule ci-dessus puis σ avec $\sigma = \sqrt{\mathcal{V}}$.
Ainsi par exemple pour la série des notes de la classe de première C au dernier devoir, on a le tableau ci-dessous :

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
3	3	9	9	27
6	2	12	36	72
6,5	1	6,5	42,25	42,25
8	3	24	64	192
9	3	27	81	243
10	2	20	100	200
10,5	1	10,5	110,25	110,25
11	4	44	121	484
12	5	60	144	720
13	3	39	169	507
14	2	28	196	392
15	2	30	225	450
18	1	18	324	324
	32	328		3 763,5
$\overline{X} = \frac{328}{32} = 10{,}25$ $N = 32$			$\mathcal{V} = \frac{3\,763{,}5}{32} - (10{,}25)^2$ $\mathcal{V} \simeq 12{,}55$ $\sigma \simeq 3{,}54$	

Exercice 23 Déterminer les écarts type des distributions données à l'exercice 21 sur les échantillons de 10 objets dont on a mesuré les diamètres, et conclure en comparant les résultats.

Un inconvénient certain des formules précédentes donnant la variance est l'obligation de calculer les carrés de $x_i - \bar{x}$ ou des x_i, or lorsque les modalités sont des très grands nombres, par exemple des chiffres d'affaire d'usines ou des dettes extérieures de pays, le calcul lui-même à la calculatrice est infaisable. C'est pourquoi souvent on utilise le principe du changement de variables.
On considère un nombre fixé A, que l'on prend en général « à l'estime » c'est-à-dire proche de la médiane ou de la moyenne, même avant de les calculer.
Et pour tout i de $\{1, ..., k\}$, on pose $u_i = x_i - A$.
On obtient ainsi une nouvelle série statistique formée des couples (u_i, n_i) avec des modalités « plus simples ».

Question 39 *Montrer que la moyenne $\bar{u}$ de la série (u_i, n_i) vérifie $\bar{u} = \bar{x} - A$.*
Montrer que la variance de la série donnée en x peut s'écrire :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - \bar{u}^2 \quad \text{où} \quad N = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Ainsi, notant $\mathcal{V}_x$ et $\mathcal{V}_u$ les variances des séries en x et en u respectivement, on a $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_u$.

Ainsi pour la série des notes de la classe de première C au dernier devoir on obtient le tableau suivant :

	x_i	$u_i = x_i - A$	n_i	$n_i u_i$	u_i^2	$n_i u_i^2$
	3	− 8	3	− 24	64	192
	6	− 5	2	− 10	25	50
	6,5	− 4,5	1	− 4,5	20,25	20,25
	8	− 3	3	− 9	9	27
	9	− 2	3	− 6	4	12
	10	− 1	2	− 2	1	2
	10,5	− 0,5	1	− 0,5	0,25	0,25
$A \rightarrow$	11	0	4	0	0	0
	12	1	5	5	1	5
	13	2	3	6	4	12
	14	3	2	6	9	18
	15	4	2	8	16	32
	18	7	1	7	49	49
			32	− 24		419,5

$$\overline{U} = \frac{-24}{32} = -0{,}75 \qquad N = 32$$

$$\mathcal{V} = \frac{419{,}5}{32} - (0{,}75)^2 \qquad \mathcal{V} \simeq 12{,}55 \qquad \sigma \simeq 3{,}54$$

Exercice 24 On a recensé, dans un quartier, les montants des loyers. En arrondissant les tarifs, on a eu les 25 valeurs observées suivantes :

158 000, 215 000, 352 000, 198 000, 173 000, 150 000, 208 000, 78 000, 127 000, 112 000, 247 000, 130 000, 134 000, 90 000, 135 000, 215 000, 208 000, 150 000, 112 000, 130 000, 198 000, 112 000, 208 000, 130 000, 150 000.

Dresser le tableau recensé et calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution (on pourra utiliser un changement de variable judicieux, et prendre même pour unité 1 000 F).

Dans le cas où les modalités sont regroupées par classe on utilise alors pour le calcul, la modalité égale au centre de chaque classe, et on utilise une des formules précédentes. Souvent lorsque les classes ont même amplitude C on utilise un changement de variable, en posant pour tout i $u_i = \dfrac{x_i - A}{c}$, où x_i est le centre d'une classe et A est un nombre fixé arbitrairement (de façon « adéquate » pour simplifier les calculs).

Question 40 *Montrer que, en notant $\bar{x}$ et $\bar{u}$ les moyennes respectives des séries (x_i, n_i) et (u_i, n_i), on a : $\bar{u} = \dfrac{1}{c}(\bar{x} - A)$ et que la variance de la distribution en x_i est donnée par : $\mathcal{V}_x = c^2\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - \bar{u}^2\right)$ où $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Ainsi $\mathcal{V}_u = \dfrac{1}{c^2}\mathcal{V}_x$ avec les notations habituelles.*

En utilisant un tel changement de variable, les calculs sont simplifiés pour le calcul de la variance V, et de l'écart type σ. Ainsi par exemple, dans la série des notes de la classe de première C au dernier devoir, qui regroupe les notes par classes d'amplitude 5 on obtient :

Classe	[0, 5[	[5, 10[	[10, 15[	[15, 20]
Effectif	3	9	17	3

Les centres des classes sont les modalités x_i, ce sont : 2,5; 7,5; 12,5 et 17,5.
Prenons $A = 12{,}5$ puisque c'est dans la classe [10, 15[qu'il y a le plus de notes (on aurait pu aussi prendre 10, ou 7,5 ... l'avantage de prendre une des valeurs x_i, sera d'annuler un des u_i).

On pose : $u_i = \dfrac{x_i - A}{c}$ avec $c = 5$ (amplitude des classes).

On aura donc $v_x = c^2\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_i u_i^2 - \bar{u}^2\right) = c^2 v_u$.

Les calculs sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Centre des classes x_i	Nouvelle modalité $u_i = \frac{x_i - A}{c} = \frac{x_i - 12{,}5}{5}$	Effectif n_i	$n_i u_i$	u_i^2	$n_i u_i^2$
2,5	− 2	3	− 6	4	12
7,5	− 1	9	− 9	1	9
12,5	0	17	0	0	0
17,5	1	3	3	1	3
		32	− 12		24
$N = 32,\ \bar{u} = -\frac{12}{32} = -0{,}375$		$v_x = 5^2\left[\frac{24}{32} - (-0{,}375)^2\right] \simeq 15{,}23 \quad \sigma \simeq 3{,}9$			

On remarque que l'écart-type (comme l'était la moyenne) n'est pas le même en examinant toutes les modalités ou en regroupant par classe et en examinant les centres des classes. De même, ces deux caractéristiques dépendent du choix des classes.

Exercice 25

Analyse de Johannsen sur des haricots (1973):

A partir d'un lot de graines achetées dans le commerce et pesées au centigramme près, il obtient les résultats suivants :

Masse en cg	20 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60	61 à 65	66 à 70	71 à 75	76 à 80	81 à 85	86 à 90
Nombre de graines	4	27	65	179	364	587	533	418	260	132	52	34	19	2

Construire un histogramme représentant cette distribution.
Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette distribution.

Exercice 26 On a relevé les masses de 450 ananas arrivant dans une conserverie; on a présenté les résultats dans le tableau suivant :

Masse en grammes	Nombre d'ananas
De 250 (inclus) à 750 (exclu)	18
De 750 (inclus) à 1 000 (exclu)	26
De 1 000 (inclus) à 1 250 (exclu)	52
De 1 250 (inclus) à 1 500 (exclu)	74
De 1 500 (inclus) à 1 750 (exclu)	94
De 1 750 (inclus) à 2 000 (exclu)	82
De 2 000 (inclus) à 2 250 (exclu)	52
De 2 250 (inclus) à 2 500 (exclu)	35
De 2 500 (inclus) à 3 000 (exclu)	17

Construire un histogramme représentant cette distribution.
Calculer sa moyenne et son écart-type.

Comme on l'a vu sur les exemples le calcul des caractéristiques, essentiellement moyenne et écart-type, conduit à des calculs importants.
Là encore on utilisera la calculatrice : déjà en sachant utiliser la mémoire (pour faire la somme en même temps que le calcul des $n_i x_i$ en $n_i x_i^2$ par exemple) mais aussi en utilisant les touches statistiques : $\bar{x}$ pour la moyenne et, selon les marques, s ou σ pour l'écart-type (voir le mode d'emploi de chaque calculatrice pour l'emploi de ces touches). Cependant il faut se méfier car selon les cas, la touche écart-type fournit :

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{x})^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{x})^2$$

où les N valeurs y_i sont les valeurs observées. Il faut donc dans le premier cas corriger en multipliant le résultat par $\frac{N-1}{N}$ (si N est « très grand » ce nombre est très proche de 1 donc les résultats très proches l'un de l'autre).
Souvent les séries statistiques, notamment en économie et géographie, sont des séries chronologiques où on donne, en fonction de l'heure, le jour, le mois, l'année, ... la valeur du caractère. Dans ce cas, on peut représenter la série avec en abscisse le temps (ou intervalles de temps et en ordonnée la valeur du caractère (voir en géographie les courbes de température et de pluviosité pour l'étude du climat dans une région donnée).
Pour la partie calcul de l'étude d'une suite chronologique, les valeurs observées sont alors la plupart du temps des modalités d'effectif 1, on peut alors calculer la moyenne, l'écart-type...

Exercice 27 En 1981, on a effectué les relevés des précipitations (en mm) à Sassandra et Dimbokro

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Hauteur en mm à Sassandra	6	17	32	109	181	278	113	29	34	93	42	28
Hauteur en mm à Dimbokro	0	19	161	99	123	135	148	78	96	153	4	4

Déterminer pour chacune de ces deux séries (à Sassandra et à Dimbokro) la moyenne, l'étendue, l'écart-moyen et l'écart-type.

Exercice 28 Une marchande de légumes sur le marché voudrait savoir sur combien elle peut environ compter chaque mois : elle note son bénéfice chaque mois pendant un an (en août elle est retournée au village et n'a presque rien gagné, en mars elle était malade et à dû se faire remplacer) :

Mois	J	F	M	A	M	J
Bénéfice	327 000	171 000	28 000	168 000	157 000	183 000
Mois	J	A	S	O	N	D
Bénéfice	173 000	10 000	192 000	233 000	212 000	409 000

Calculer pour elle la moyenne de ses bénéfices et l'écart-type, pour lui donner « une fourchette » de bénéfice très probable.

IV. Ajustement linéaire

1 Série statistique double

Jusqu'à présent on a étudié des séries statistiques simples c'est-à-dire que l'on a étudié un seul caractère, le plus souvent quantitatif, d'une population donnée. En fait souvent quand on fait une enquête statistique, on obtient plusieurs mesures, il est alors naturel de se poser la question : y a-t-il un lien entre les différentes mesures.
On dit que l'on cherche s'il y a une corrélation entre les deux mesures.

Question 41 *Dans une classe de première on a relevé les poids et les tailles des vingt garçons, et on a obtenu les résultats suivants où p est le numéro d'ordre du garçon, x_p son poids en kg et y_p sa taille en cm :*

x_p	54	63	60	58	62	83	86	82	72	68	64
y_p	165	183	178	168	175	180	173	195	172	179	175
x_p	71	66	69	71	67	91	78	76	68		
y_p	180	168	171	173	178	181	169	173	178		

Déterminer les poids minimum et maximum
les tailles minimum et maximum.
Placer sur une figure où on portera en abscisse les poids, et en ordonnée les tailles (choisir judicieusement l'unité et le point origine) les points de couple de coordonnées (x_p, y_p) pour tout p de $\{1, 2, \ldots 20\}$.

On a une **série statistique double** lorsque le caractère est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire qu'à un individu on associe un couple de nombres réels, par exemple (son poids, sa taille). On dit en fait que l'on étudie deux caractères : x à valeurs dans $\{x_1, \ldots x_n\}$, y à valeurs dans $\{y_1, \ldots y_p\}$. Les éléments de la série statistique double associée à ce caractère (x, y) sont les $((x_i, y_j), n_{ij})$, qu'on notera par abus (x_i, y_j, n_{ij}), où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_j).
L'ensemble des couples (x_i, y_j) est l'ensemble des modalités de la série statistique double.
Lorsque les effectifs valent tous 1, on représente, comme dans la question précédente les points M_p du plan de coordonnées (x_p, y_p), couple associé à l'individu p. L'ensemble de ces points est appelé un **nuage de points.**
Dans le cas général on regroupe les résultats dans un tableau cartésien ou on lit l'effectif n_{ij} de la modalité (x_i, y_j). Ainsi, par exemple, à une élection de miss d'une ville de Côte d'Ivoire, deux membres du jury proposent pour chacune des 100 candidates une note comprise entre 0 et 5 (inclus). L'ensemble des modalités du caractère x, note attribuée par Monsieur Fadika, est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, et l'ensemble des modalités du caractère y, note attribuée par Monsieur Sangaré, est aussi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous appelé :

Tableau de corrélation

y \ x	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	0	0	0
1	2	4	5	10	0	0
2	0	3	12	16	0	0
3	0	2	11	15	2	1
4	0	0	0	3	1	2
5	0	0	0	2	2	1

Ainsi 11 candidates ont eu pour « couple de notes » (2, 3) c'est-à-dire que pour ces 11 candidates, M. Fadika a mis 3 et M. Sangaré 2 tandis que aucune candidate n'a eu pour couple de notes (0, 5), ce qui paraît normal sinon M. Fadika l'aurait trouvée laide et M. Sangaré l'aurait trouvée très très belle...
On dit que 11 est l'**effectif du couple** (2, 3)
et 0 est l'effectif du couple (0, 5).

Question 42 *Quel est l'effectif de chacun des couples suivants :*

$$(2,1),\ (1,4),\ (2,4),\ (5,3),\ (3,3),\ (2,2)?$$

Combien de fois M. Fadika a-t-il attribué la note 3?
Combien de fois M. Sangaré a-t-il attribué la note 2?

A partir du tableau à double entrée représentant la série statistique double on peut obtenir la série statistique des notes attribuées par M. Fadika, et la série statistique des notes attribuées par M. Sangaré :
Ainsi par exemple, puisque le nombre de couples dont le premier terme est 0, est 1 + 2 + 3 c'est-à-dire 6, l'effectif de la modalité 1 du caractère x est 6.
On présente ces deux **séries** dites **marginales** en complément du tableau de corrélation comme ci-dessous :

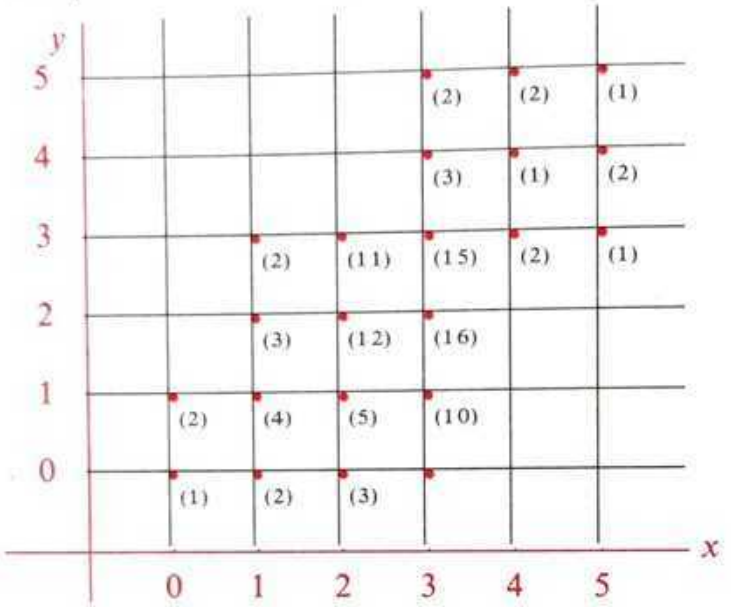
y \ x	0	1	2	3	4	5	← effectifs des modalités de y
0	1	2	3	0	0	0	6
1	2	4	5	10	0	0	21
2	0	3	12	16	0	0	31
3	0	2	11	15	2	1	31
4	0	0	0	3	1	2	6
5	0	0	0	2	2	1	5
	3	11	31	46	5	4	← effectif des modalités de x

en calculant les sommes par ligne (pour y), par colonne (pour x)

Lorsqu'on représente sur un graphique les points associés aux couples (x_i, y_j) d'une série statistique double pour avoir un nuage de points, alors, dans le cas où les effectifs sont 0 ou 1 on place effectivement N points où N est l'effectif de la population, mais dans le cas où certaines modalités ont des effectifs strictement supérieurs à 1, alors le nuage de points représenté par tous les points de couple de coordonnées (x_i, y_j) n'est pas représentatif de la série double; ainsi dans l'exemple de l'élection de la miss le point $\binom{5}{3}$ a pour « poids » 1 qui est l'effectif du couple (5, 3), mais le point $\binom{3}{2}$ a pour « poids » 15 car l'effectif du couple

(3, 2) est 15. Pour représenter efficacement la série double en indiquant sur la figure le « poids » de chaque point, on a deux possibilités :

• Placer les points et indiquer près de chacun d'eux l'effectif de son couple de coordonnées : on dit que l'on fait une **représentation par points pondérés**



• Chaque point du nuage est le centre d'un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif du couple de ses coordonnées : on dit que l'on fait une **représentation par tâches.**

Méthode pratique

Pour déterminer le rayon de chaque disque de la représentation par tâches.
On choisit une longueur R pour le rayon du disque centré au point associé au mode de la série double c'est-à-dire dont le couple de coordonnées à l'effectif maximum : c.
L'aire de ce disque est πR^2. Puisque les aires sont proportionnelles à l'effectif du couple, la longueur r du rayon du disque centré au point dont le couple de coordonnées à l'effectif n est définie par : $\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = \dfrac{n}{e}$

d'où : $$r = \sqrt{\frac{nR^2}{e}}$$

c'est-à-dire : $$r = R\sqrt{\frac{n}{e}}.$$

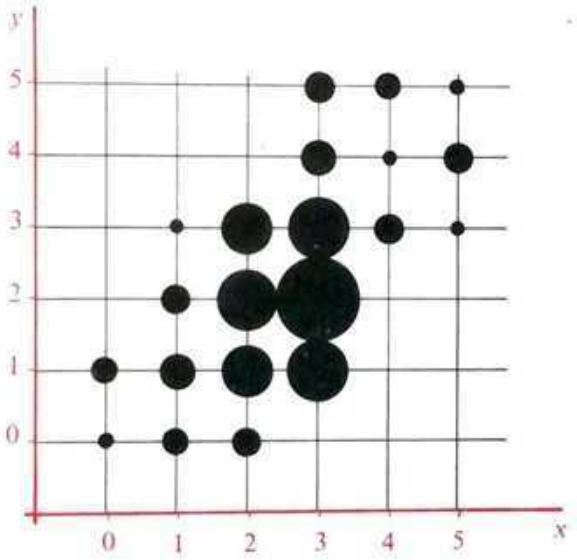
Ainsi sur l'exemple ci-dessus de l'élection de miss, l'effectif le plus élevé e est 16, associé au point $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, prenons comme rayon R du disque centré en ce point 0,5 cm car c'est la moitié de la distance entre deux points « voisins ».

On a alors $$r = 0{,}5\sqrt{\frac{n}{16}}$$
$$= \frac{0{,}5}{4}\sqrt{n}$$

On obtient ainsi le tableau :

effectif du couple n	0	1	2	3	4	5	10	11	12	15	16
rayon r du disque centré au point associé cm	0	0,125	0,177	0,217	0,25	0,28	0,395	0,415	0,433	0,484	0,5

Remarque.
Pour choisir la longueur du rayon du disque le plus grand (centré au point dont le couple de coordonnée a l'effectif le plus élevé) on fait en sorte que la plupart des disques soient disjoints deux à deux; ici l'unité du graphique étant 1 cm, on a pris 0,5 puisque les points ont des coordonnées entières.
On obtient alors la représentation par tâches :



En réalité la représentation devrait se faire dans l'espace $\mathcal{E}$ en plaçant les points de triplet de coordonnées (x_i, y_i, u_{ij}) c'est-à-dire dont la cote est l'effectif du couple modalité.

Exercice 29 A partir des données de la question 41 dresser le tableau de corrélation de la série statistique double dont les modalités sont regroupées en classes :

en classes d'amplitude de 5 kg pour le poids à partir de 50 kg
en classes d'amplitude de 5 cm pour la taille à partir de 165 cm.
Compléter ce tableau par une colonne et une ligne (respectivement à gauche et au dessus) où on indiquera le centre de chaque classe considérée.
Compléter encore ce tableau par une colonne à droite et une ligne au-dessous où on indiquera les séries statistiques marginales associées respectivement aux caractères taille et poids.
Combien d'individus ont une taille inférieure strictement à 175 cm?
Combien de garçons pèsent au moins 80 kg?
Combien de garçons ont un poids supérieur ou égal à 80 kg pour une taille inférieure à 175 cm?
Tracer la représentation par tâches de la série en prenant pour modalités les centres des classes.

Exercice 30 On dispose du tableau suivant où sont donnés le nombre de voitures d'occasion d'un même modèle selon le prix de vente et le kilométrage :

Kilométrage x (km) / Prix de vente y (CFA)	Moins de 20 000	De 20 000 à 40 000	De 40 000 à 60 000	De 60 000 à 80 000	Plus de 80 000
Moins de 1 000 000	0	0	0	3	11
De 1 000 000 à 2 000 000	0	0	2	5	18
De 2 000 000 à 3 000 000	0	3	8	15	9
De 3 000 000 à 4 000 000	3	10	6	1	1
Plus de 4 000 000	9	4	2	0	0

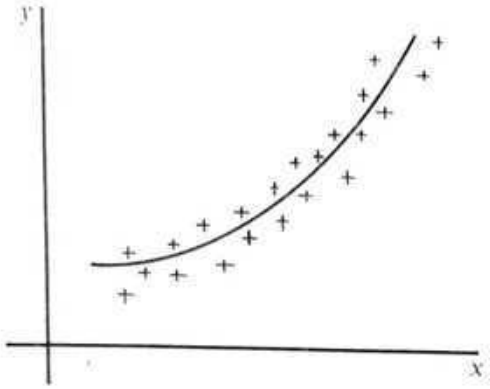
Compléter ce tableau pour obtenir les séries du kilométrage x et du prix de vente y.
Calculer la moyenne $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de ces séries (pour « centre » de la classe plus de 80 000, on prendra 90 000, et centre de la classe plus de 4 000 000 on prendra 4 500 000.
Tracer la représentation par tâches de la série double et placer le point G de couple de coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ appelé **point moyen.**

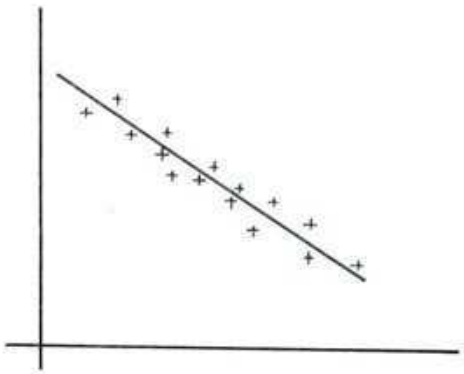
Souvent lorsque la 1re classe est intitulée « moins de ... » ou la dernière est intitulée « plus de ... » on imagine une classe de même amplitude que les autres et on prend le centre de ces classes pour les calculs.

2 Ajustement linéaire

Dans le cas de séries statistiques doubles, on est souvent amené à se demander s'il y a un lien entre les deux caractères étudiés.
Par exemple est-ce que le poids des élèves est proportionnel à leur taille? Dans le cas de séries chronologiques, pour lesquelles l'un des caractères étudiés est le temps, la question est alors : quelle est la tendance du phénomène en fonction du temps?
Ceci permet de conjecturer de façon empirique des résultats physiques tels que le refroidissement d'un objet au contact d'une grande masse froide en fonction du temps, ou l'intensité du courant électrique dans un circuit selon la tension aux bornes du générateur.
Supposons que les effectifs de chaque couple (x, y) soit au plus de un, on représente alors ces couples par un nuage de points. Graphiquement on trace une courbe aussi régulière

que possible, qui passe entre les points du nuage en laissant de part et d'autre à peu près le même nombre de points et à des « distances » à peu près égales. La courbe (C) ainsi tracée (de façon personnelle!) s'appelle la **courbe d'estimation** de y en x.
Ici on va surtout s'intéresser aux cas où une droite précise est représentative du nuage de points et aux méthodes pour déterminer cette droite qui passe « le plus près possible » de tous les points du nuage.





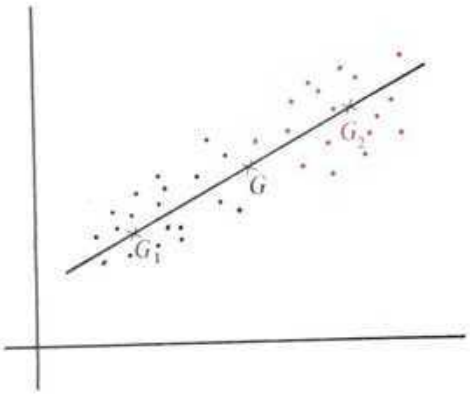
Question 43 *Les « chiffres » en millions de dollars du commerce extérieur des principaux pays en 1980, d'après l'ONU*, sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Pays	*Importations*	*Exportations*	*Pays*	*Importations*	*Exportations*
Allemagne fédérale	*192 930*	*188 000*	*France*	*134 912*	*111 251*
Arabie Séoudite	*24 462*	*63 428*	*Grande-Bretagne*	*120 095*	*115 350*
Belgique-Luxembourg	*60 410*	*56 258*	*Italie*	*77 970*	*72 242*
Brésil	*19 804*	*15 244*	*Japon*	*140 524*	*129 812*
Canada	*58 652*	*64 361*	*Pays-Bas*	*76 889*	*73 871*
Corée du Sud	*20 339*	*15 055*	*Suède*	*32 983*	*30 680*
Espagne	*34 080*	*20 721*	*Suisse*	*36 356*	*29 634*
États-Unis	*217 664*	*216 497*	*URSS*	*57 744*	*64 762*

Tracer le nuage de points de cette série double.
Déterminer l'isobarycentre de ces points c'est-à-dire le point moyen dont les coordonnées sont la moyenne $\bar{x}$ des importations de ces pays, et la moyenne $\bar{y}$ de leurs exportations.

A l'aide d'une règle transparente, ou mieux d'un calque sur lequel on a tracé une droite, déterminer la direction de la droite qui semble le mieux ajuster ce nuage de points et qui passe par le point moyen.
Déterminer alors graphiquement un autre point de cette droite, et en déduire une équation.

Souvent on partage le nuage de points en « deux petits nuages », dont on détermine les points moyens G_1 et G_2. On prend alors pour droite d'estimation la droite $(G_1 G_2)$.



Question 44 *1) Refaire un tableau T_2 avec les données de la question précédente en classant les valeurs des importations (x) par ordre de grandeur croissante après avoir arrondi en millions de dollars.*

2) Établir alors un nouveau tableau T_3 en remplaçant deux valeurs consécutives par leur moyenne.
Placer alors sur un graphique les 15 points obtenus et tracer la droite d'estimation de ces points.

3) Établir encore un nouveau tableau T_4 où on regroupe par trois les valeurs consécutives du tableau T_2, de la façon suivante : pour regrouper (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) on prend le couple (x_2, y) où x est la valeur intermédiaire x_2 et y est la moyenne des trois valeurs y_1, y_2 et y_3 (c'est-à-dire $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$).
Représenter ce tableau T_4 par un nuage de points et tracer la droite d'estimation.
*La **méthode** est dite **des moyennes partielles.***

Question 45 *A partir du tableau de la question 41 donnant les poids et les tailles des garçons de la classe, dresser le tableau en regroupant les modalités par classes d'amplitude 5 kg et 5 cm respectivement et en remplaçant les classes par leur centre :*

pour les poids : 55, 60, 65, ...
pour les tailles : 165, 170, 175, ...

et marquer ainsi l'effectif de chaque couple dans le tableau.

L'ajustement linéaire n'étant pas facile sous cette forme, dresser un tableau, à partir du précédent, où dans chaque colonne on place le poids (55, 60, ...) et, en dessous la moyenne des tailles correspondantes; par exemple en dessous de 70, on indique 175,8, car :

$$175{,}8 = \frac{2\,.\,170 + 1.175 + 3\,.\,180}{6}.$$

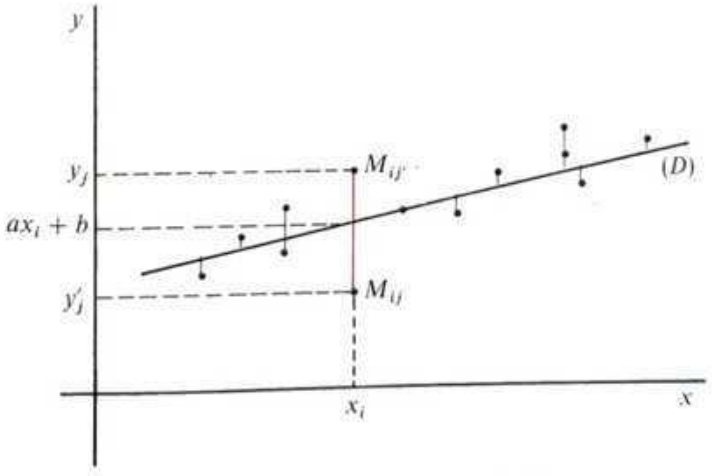
Tracer alors le nuage de points (simplifié!) obtenu et faire un ajustement linéaire.

Le procédé qu'on a ici utilisé est appelé la ***méthode des moyennes discontinues.***

Les méthodes vues jusqu'à présent sont essentiellement graphiques, voyons maintenant une méthode analytique pour déterminer une droite d'estimation d'un nuage de points (pondérés ou non). Cette droite « calculée » est alors dite **droite d'ajustement.**

3 Méthode des moindres carrés

On considère une série statistique double dont les caractères sont x et y, caractérisée par les triplets (x_i, y_j, n_{ij}) où x_i est une modalité du caractère x, y_j une modalité du caractère y et n_{ij} l'effectif du couple (x_i, y_j).
Soit (D) une droite d'équation : $y = ax + b$.
On place les points M_{ij} de couple de coordonnées (x_i, y_j) tel que l'effectif n_{ij} de ce couple soit non nul.
Les distances des points M_{ij} à la droite (D) sont difficiles à utiliser car les calculs seraient trop compliqués par contre les « distances verticales », distances des points M_{ij} au point de (D) d'abscisse x_i sont facilement exploitables.



La « distance verticale » du point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}$, non situé sur (D), au point $\begin{pmatrix} x_i \\ ax_i + b \end{pmatrix}$ est $|y_j - (ax_i + b)|$, elle n'est pas nulle.
Pour mesurer l'efficacité de l'ajustement du nuage de point par (D), on utilise la somme de tous les nombres $n_{ij}[y_j(ax_i + b)]^2$, ou (x_i, y_j) est un couple de coordonnées d'un point du nuage, d'effectif n_{ij}.

La **droite d'ajustement de y en x** par la **méthode des moindres carrés** est la droite (D) pour laquelle la somme des $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$ est minimale.
On va démontrer ici qu'il existe effectivement une telle droite.
Avec les notations ci-dessus on appelle A_{ij} le terme $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$.
On cherche a et b pour que la somme, notée ΣA_{ij}, de tous les termes A_{ij} pour tous les n_{ij} non nuls, soit minimale.
Appelons N l'effectif total de la population étudiée c'est-à-dire la somme de tous les n_{ij}. On a, en développant et en ordonnant suivant les puissances décroissantes de b :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= n_{ij}[(y_j - ax_i) - b]^2 \\ &= n_{ij}[b^2 - 2b(y_j - ax_i) + (y_j - ax_i)^2] \\ &= n_{ij}b^2 - 2bn_{ij}(y_j - ax_i) + n_{ij}(y_j - ax_i)^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\Sigma A_{ij} = Nb^2 - 2b[\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)] + [\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)^2]$$

où encore le symbole Σ désigne la somme des termes avec n_{ij} non nul. Puisque les x_i, y_j, n_{ij} sont des constantes données, prenons a comme paramètre et considérons fonction f qui au nombre réel b associe :

$$Nb^2 - 2b[\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)] + [\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)^2].$$

Cette fonction polynôme f de degré deux (car $N > 0$) admet un minimum pour :

$$b = \frac{2\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)}{2N}$$

c'est-à-dire :

$$b = \frac{\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)}{N}.$$

On note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives des séries statistiques de caractères x et y.

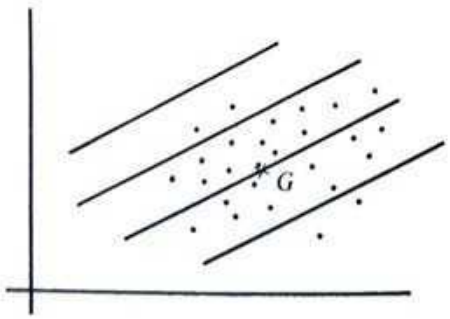
On a :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma n_{ij}x_i}{N} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma n_{ij}y_j}{N}.$$

Ainsi le minimum de f est en b tel que :

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad (1)$$

c'est-à-dire $\bar{y} = a\bar{x} + b$.



Autrement dit pour un coefficient directeur donné, la meilleure droite est celle qui passe par le point G.

Pour savoir, parmi les droites passant par G, quelle est la meilleure, on cherche après avoir remplacé b par $\bar{y} - a\bar{x}$, le nombre réel a tel que ΣA_{ij} soit minimale.
Calculons A_{ij} en ordonnant suivant les puissances décroissantes de a :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= n_{ij}[y_j - (ax_i + \bar{y} - a\bar{x})]^2 \\ &= n_{ij}[(y_j - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})]^2 \\ &= a^2 n_{ij}(x_i - \bar{x})^2 - 2an_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) + n_{ij}(y_j - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\Sigma A_{ij} = a^2[\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})^2] - 2a[\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})] + [\Sigma n_{ij}(y_j - \bar{y})^2].$$

Cette fonction polynôme de degré deux, en a, admet un minimum pour :

$$a = \frac{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})^2}. \qquad (2)$$

Question 46 *Montrer que (2) s'écrit :*

$$a = \frac{\dfrac{\Sigma n_{ij} x_i y_j}{N} - \bar{x}\,\bar{y}}{\dfrac{\Sigma n_{ij} x_i^2}{N} - \bar{x}^2}.$$

On remarque que dans cette expression de a, le dénominateur est la variance de la série de caractère x.

Définition

Soit (x, y) un caractère double : $x_1, x_2 \ldots x_p$ les valeurs prises par x, $y_1, y_2 \ldots y_q$ les valeurs prises par y, et $\{(x_i, y_j, n_{ij}),\quad i \in \{1, 2 - p\},\quad j \in \{1, 2 \ldots q\}\}$ la série statistique associée.
On appelle **covariance de la distribution statistique double** associée à (x, y), et par abus de langage **covariance entre les variables** x et y, le nombre réel, noté cov (x, y), défini par :

$$\text{cov}\,(x, y) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}},$$

et, par abus :

$$\text{cov}\,(x, y) = \frac{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{N}$$

où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes respectives des séries de caractère x et y respectivement et N l'effectif total de la population de la série double.

D'après le calcul effectué dans la question précédente on a :

$$\text{cov}\,(x, y) = \frac{\Sigma n_{ij} x_i y_j}{N} - \bar{x}\,\bar{y}$$

et on a alors :

$$a = \frac{\cos(x, y)}{v_x}$$

où v_x est la variance de la série de caractère x.

Théorème

La droite d'ajustement du nuage de points représentant la série double (x_i, y_j, n_{ij}) obtenue par la méthode des moindres carrés est appelée **droite de régression** de x en y :

elle a pour coefficient directeur $\dfrac{\text{cov}(x, y)}{v_x}$

et elle passe par le point moyen $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ du nuage.

Méthode pratique

Pour déterminer la droite de régression de x en y d'une série double.

1) Lorsque l'effectif de chaque modalité est 1.
On présente dans un tableau les colonnes suivantes : x_i, y_j, $x_i y_j$ et x_i^2. En bas de chacune de ces colonnes on calcule les sommes : Σx_i, Σy_j, $\Sigma x_i y_j$ et Σx_i^2, qui, une fois divisées par N, donnent respectivement $\bar{x}$, $\bar{y}$, cov (x, y) et v_x on a alors :

$$a = \frac{\cos(x, y)}{v_x} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

La droite a pour équation : $y = ax + b$.
Ainsi par exemple dans un concours interne on examine les notes x_i (sur 100) et le nombre d'année de travail y_i de chaque candidat. On obtient le tableau suivant :

Note	28	45	49	20	44	30	38	22	50	35	42	53
Années d'expériences	4	7	8	1	6	3	5	2	9	6	7	10

Pour déterminer les nombres réels a et b on dresse le tableau suivant :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
4	28	112	16
7	45	315	49
8	49	392	64
1	20	20	1
6	44	264	36
3	30	90	9
5	38	190	25
2	22	44	4
9	50	450	81
6	35	210	36
7	42	294	49
10	53	530	100
68	456	2911	470

$N = 12$

$\bar{x} = \dfrac{68}{12} = \dfrac{17}{3} = 5{,}67$

$\bar{y} = \dfrac{456}{12} = 38$

$\text{cov}(x, y) = \dfrac{2911}{12} - \dfrac{17}{3}(38) \simeq 27{,}25$

$v_x = \dfrac{470}{12} - \left(\dfrac{17}{3}\right)^2 \simeq 7{,}05$

$a = \dfrac{22{,}25}{7{,}05} = 3{,}865$

$b = 38 - (3{,}865)\left(\dfrac{17}{3}\right) \simeq 16{,}097$

La droite qui donne le meilleur ajustement du nuage de points a donc pour équation :

$$y = 3{,}87\ x + 16{,}1$$

c'est la droite de régression de x en y de cette série.
On la représente avec le nuage de points :

Question 47 *Refaire le tableau en utilisant le changement de variables :*

$$u = x - 5 \quad et \quad v = y - 40.$$

Retrouver l'équation de la droite de régression de x en y.
Dans un repère orthogonal en portant en abscisse le nombre d'années d'expérience (1 an pour 1 cm) et en ordonnée la note au concours (10 pour 1 cm) placer les points (x_i, y_i) *et tracer la droite de régression trouvée.*

2) Lorsque les effectifs sont donnés : n_{ij} pour le couple (x_i, y_j).
On examine la série associée au caractère x et on en déduit la moyenne $\bar{x}$ et la variance v_x.
On examine la série associée au caractère y et on en déduit la moyenne $\bar{y}$.
On établit un tableau avec les colonnes x_i, y_j, n_{ij} puis $n_{ij}x_i y_j$ (on procède par ordre : tous les couples de 1er terme x_1 d'effectif non nul, puis tous les (x_2, y_j) avec n_{2j} non nul etc.). On calcule alors la somme de la dernière colonne et on en déduit cov (x, y), puis a, puis b avec les mêmes formules.

Ainsi par exemple au probatoire on examine les résultats de 100 candidats de section C, on note x_i les notes en mathématiques et y_j les notes en physique.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous après avoir été regroupés en classes :

Phys. (sur 20) \ Math. (sur 20)	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20[
[0, 4[	2	5	2	0	0
[4, 8[	1	12	10	3	0
[8, 12[	0	3	28	12	1
[12, 16[	0	1	5	10	2
[16, 20[	0	0	0	1	2

Comme d'habitude, pour effectuer les calculs on remplace chaque classe par son centre, on définit ainsi une nouvelle distribution statistique dont on calcule les éléments. Pour la variable x, note en maths, les valeurs sont donc 2, 6, 10, 14 et 18. Faisons le changement de variable : $u = x - 10$ pour simplifier les calculs, on a, avec les notations déjà vues $\bar{x} = \bar{u} + 10$ et $v_x = v_u$. Calculons donc $\bar{u}$ et v_u dans le tableau ci-dessous :

u_i	n_i	$n_i u_i$	u_i^2	$n_i u_i^2$
− 8	3	− 24	64	192
− 4	21	− 84	16	336
0	45	0	0	0
4	26	104	16	416
8	5	40	64	320
	100	144 − 108		1 264

$\bar{u} = \dfrac{36}{100} = 0{,}36$ $\qquad$ $v_u = 12{,}64 - 0{,}129\,6 = 12{,}510\,4$

d'où $\bar{x} = 10{,}36$
et $v_x = 12{,}510\,4$

De même on calcule $\bar{y}$ en utilisant le changement de variable : $v = y - 10$

v_i	n_i	$n_i v_i$
− 8	9	− 72
− 4	26	− 104
0	44	0
4	18	72
8	3	24
	100	− 80

d'où $\bar{v} = -0{,}8$

donc $\bar{y} = 9{,}2$

Calcul de la covariance :

x_i	y_j	n_{ij}	$n_{ij}x_iy_j$
2	2	2	8
2	6	1	12
6	2	5	60
6	6	12	432
6	10	3	180
6	14	1	84
10	2	2	40
10	6	10	600
10	10	28	2 800
10	14	5	700
14	6	3	252
14	10	12	1 680
14	14	10	1 960
14	18	1	252
18	10	1	180
18	14	2	504
18	18	2	648
			10 392

$$\text{cov}\ (x,\ y) = \frac{10\,392}{100} - (10{,}36)(9{,}2) = 8{,}608.$$

Autre manière de calculer la covariance, en utilisant les variables u et v et en plaçant dans la case (i, j) le nombre $n_{ij}u_iv_j$ (on démontre que cov (x, y) = cov (u, v))

v \ u	-8	-4	0	4	8	Somme de la ligne
-8	128	160	0	0	0	288
-4	32	192	0	-48	0	176
0	0	0	0	0	0	0
4	0	-16	0	160	64	208
8	0	0	0	32	128	160

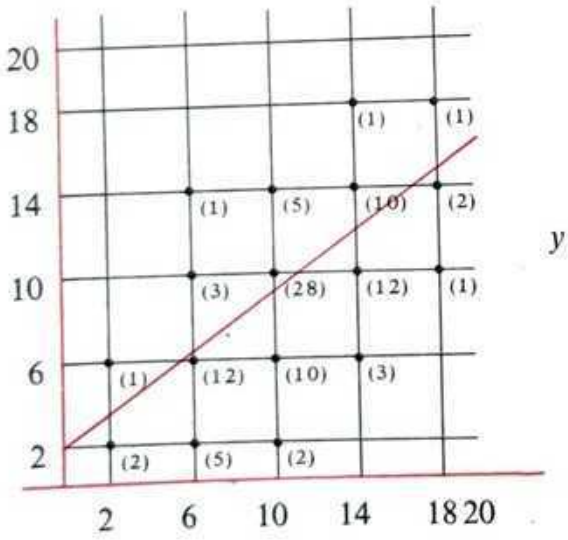
$832 = \Sigma n_{ij} u_i v_j$

d'où $\text{cov}(x, y) = 8{,}32 - (0{,}36)(-0{,}8)$
$= 8{,}608$

puis on calcule a et b :

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{v_x} \simeq \frac{8{,}608}{12{,}510\,4} \simeq 0{,}688\,1 \simeq 0{,}69$$

$$b \simeq 9{,}2 - (0{,}688\,1)(10{,}36) = 2{,}071\,3 \simeq 2{,}07$$



$y = 0{,}69x + 2{,}07$

Exercice 31 Soit la série statistique :

x	3	4	5	8	10	13	14	15
y	35	40	35	65	65	85	90	105

1° Représenter le nuage de points.

2° Déterminer une équation de la droite (*D*) de régression de x en y. Construire (*D*).

4 Droite de régression de y en x

De même que, pour la droite de régression de x en y on a utilisé une « distance verticale » des points à la droite, on utilise maintenant la « distance horizontale » pour trouver, a priori, une deuxième droite appelée **droite de régression de y en x.**
Un calcul analogue à celui du paragraphe précédent, par la méthode des moindres carrés nous donnerait la droite (D') définis par :

$$x = a'y + b'$$

avec $a' = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{v_y}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$.

Ainsi cette droite (D') de régression de y en x a le point moyen $\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}$ en commun avec la droite (D).

Question 48 *Dans l'exemple utilisé à la méthode pratique page 438 on a trouvé (D) : $y = 3{,}87x + 16{,}1$.*
Montrer que (D') a pour équation : $y = 4{,}12x + 14{,}7$.
Représenter les deux droites (D) et (D') sur un même graphique.

Exercice 32 En utilisant les données de l'exercice 31 déterminer une équation de la droite (D') de régression de y en x.

5 Coefficient de corrélation linéaire

Dans l'exemple des notes en mathématiques et physiques, on a trouvé comme droites de régression :

$$(D) : y = 3{,}87x + 16{,}1$$
$$(D') : y = 4{,}12x + 14{,}7.$$

On remarque que ces deux droites n'ont pas le même coefficient directeur : elles sont sécantes au point moyen $\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}$.

Question 49 *Déterminer les ordonnées des points de (D) et de (D') d'abscisses 10.*
les ordonnées des points de (D) et (D') d'abscisses 15.
Donner un sens à ces calculs.

Plus généralement étant donnée une série statistique double $\{(x_i, y_i), i \in (1, 2, \ldots N)\}$ on peut toujours déterminer, et tracer, une droite de régression de x en y. Et on peut utiliser cette droite pour faire une interpolation, ou extrapolation, qui permette de trouver, à partir d'une valeur de x, la valeur de y associée par la fonction affine représentée par cette droite de régression.
Mais ces interpolations en extrapolations n'auront un sens que dans la mesure où il y a effectivement une « bonne corrélation linéaire » c'est-à-dire que les points de couple de coordonnées (x_i, y_i) ne sont pas situés « trop loin » de la droite de régression.

Soit $y = ax + b$ une équation de la droite de régression (D) (de x en y) pour tout i de $\{1, \ldots N\}$ on note $\hat{y}_i$ le nombre réel $ax_i + b$.

Ainsi le point $\begin{pmatrix} x_i \\ \hat{y}_i \end{pmatrix}$ est un point de (D), les nombres $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, ... $\hat{y}_N$ sont appelées **valeurs estimées.**

Pour qu'il y ait une bonne corrélation linéaire les $\hat{y}_i$ ne doivent pas être trop différentes des valeurs observées y_i.

Ainsi on est amené à évaluer les écarts si entre les valeurs observées y_i et les valeurs estimées $\hat{y}_i$: on introduit alors une nouvelle série statistique de caractère e dont les valeurs sont e_i avec $e_i = y_i - \hat{y}_i$.

Question 50 *1) Calculer la moyenne $\bar{e}$ de la série statistique de caractère e.*

2) Montrer que la variance de cette série : v_e vérifie, avec les notations déjà utilisées,

$$v_e = v_y + a^2 v_x - 2a\ cov\ (x, y).$$

3) Montrer que $v_e = v_y - a^2 v_x$

puis que $v_e = v_y - v_{\hat{y}}$.

En déduire que les écarts-types $\sigma_y, \sigma_e, \sigma_{\hat{y}}$ des séries en y, e et $\hat{y}$ respectivement, vérifient :

$$\sigma_y^2 = \sigma_e^2 + \sigma_{\hat{y}}^2.$$

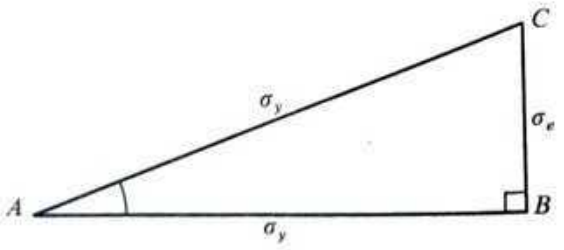
L'égalité $v_y = v_i + v_{\hat{y}}$ est équivalente à $\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$.

$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2$ est la variation totale, $\sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ est la variation expliquée et $\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{N} e_i^2$, est la variation non expliquée ou résiduelle.

Le résultat de la question précédente nous suggère la construction d'un triangle ABC rectangle en B avec :

$$AC = \sigma_y. \qquad AB = \sigma_{\hat{y}} \quad \text{et} \quad BC = \sigma_e.$$

$$\sigma_{\hat{y}} = |a|\ \sigma_x$$



On peut alors évaluer la dispersion des points de couple de coordonnées (x_i, y_i) par le rapport $\frac{\sigma_{\hat{y}}}{\sigma_y}$ qui est le cosinus de l'angle $\widehat{CAB}$. En réalité, pour éviter les signes radicaux, on s'intéresse plutôt au rapport $\frac{v_{\hat{y}}}{v_y}$ qui est le carré de celui-ci.

Question 51 *Dans l'exemple des notes en mathématique et physique les deux droites de régressions sont :*

$$(D) : \quad y = 3{,}27x + 16{,}1$$
$$(D') : \quad y = 4{,}12x + 14{,}68.$$

Calculer le quotient du coefficient directeur de (D) par celui de (D').

Calculer, avec les notations ci-dessus, $\frac{v_{\hat{y}}}{v_y}$.

Plus généralement soient a, b, a' et b' les nombres réels tels que $y = ax + b$ soit une équation de la droite (D) de régression de x en y et $x = a'y + b'$ soit une équation de la droite (D') de régression de y en x.

On a : $a = \dfrac{\text{cov}\ (x, y)}{v_x}$ et $a' = \dfrac{\text{cov}\ (x, y)}{v_y}$.

Puisque le coefficient directeur (lorsque a' est non nul) de la droite (D') est $\dfrac{1}{a'}$, le quotient du coefficient directeur de (D) par celui de (D') est $\dfrac{a}{\frac{1}{a'}}$ c'est-à-dire aa'.

Or $aa' = \dfrac{[\text{cov}\ (x, y)]^2}{v_x v_y}$ qui est le carré de $\dfrac{\text{cov}\ (x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

Définition

Soit une série statistique double dont les caractères sont x et y.
On note σ_x l'écart-type de la série de caractère x
On note σ_y l'écart-type de la série de caractère y
On note cov (x, y) la covariance de la série double.

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** entre les caractères x et y le nombre réel r défini par :

$$r = \frac{\text{cov}\ (x, y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Ainsi on a $r^2 = aa'$.

Question 52 *Montrer que* $r^2 = \dfrac{v_{\hat{y}}}{v_y}$.

La valeur du coefficient de corrélation permet d'apprécier le « lien » entre les deux séries c'est-à-dire de savoir si on peut « raisonnablement » dire que les points $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ sont « presque alignés » et utiliser la fonction affine représentant la droite de régression de x en y pour avoir une valeur estimée de y_i, à partir de x_i (ou de y en x pour avoir une valeur estimée de x_i, à partir de y_i).

Question 53 *Montrer que* $v_e = (1 - r^2)v_y$.
Montrer que $r^2 \leqslant 1$.

La corrélation est d'autant « meilleure » que σ_e est « petit devant σ_y ». On fixe habituellement le « seuil de confiance » ainsi :

La corrélation est « bonne » lorsque les e_i sont au moins « deux fois moins dispersés » que les y_i, c'est-à-dire lorsque : $\sigma_e \leqslant \frac{1}{2}\sigma_y$.

Question 54 *Montrer que la corrélation est bonne si et seulement si* $r^2 \geqslant \frac{3}{4}$.

Ainsi la corrélation est bonne lorsque $|r| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire $|r| \geqslant 0{,}87$, autrement dit, puisque $|r|$ est égal à $\frac{\sigma_{\hat{y}}}{\sigma_y}$ qui est le cosinus de l'angle $\widehat{CAB}$, lorsque l'angle $\widehat{CAB}$ a une mesure inférieure ou égale à 30°.

Lorsque $|r| = 1$, d'après la question 53, v_e est nul donc tous les e_i sont nuls c'est-à-dire que les points de couple de coordonnées (x_i, y_i) sont situés sur la droite de régression de x en y : les valeurs y_i sont alors les images de x_i par la fonction affine représentée par cette droite. Ainsi lorsque $|r|$ est compris entre 0,87 et 1, les deux séries en x et en y sont dites linéairement correllées et on utilise la fonction affine représentée par la droite de régression pour trouver une valeur connaissant l'autre valeur du caractère (x, y) et on peut effectivement faire des interpolations ou extrapolation.

Question 55 *Soit la série statistique double en* (x, y) *donnée par le tableau :*

x_i	0	2	4	6	8	10	12
y_i	2	22	34	38	34	22	2

1) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire est nul.
2) Représenter le nuage de points.

Nous remarquons ici que les séries en x et en y dépendent l'une de l'autre (il existe un lien fonctionnel passant de x à y) : elles sont correllées mais la corrélation n'est pas linéaire.

Question 56 *Calculer le coefficient de corrélation linéaire et tracer le nuage de points pour les deux séries ci-dessous :*

1)

x_i	0	2	3	5	6	7
y_i	7	7	7	7	7	7

2)

x_i	0	1	1	3	4	5	7
y_i	7	6	7	8	7	8	6

Dans le 1er cas de cette question les séries en x et y sont indépendantes, on peut estimer y (toujours 7) sans tenir compte des valeurs prises par x.
Ainsi lorsque $r = 0$, il n'y a sûrement pas corrélation linéaire, mais les caractères peuvent être indépendants ou en corrélation grâce à une fonction non affine.

Exercice 33

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double donnée à l'exercice 31.
Y a-t-il une bonne corrélation linéaire?

Exercice 34

On a noté, pour huit personnes, l'intensité du travail fourni (x_i), exprimée en kilojoules par minute, et la fréquence cardiaque (y_i), c'est-à-dire le nombre de battements par minute :

x_i	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

Représenter le nuage de points de cette série statistique double.
Dresser un tableau pour calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et les écarts-types σ_x et σ_y des séries en x et en y, et la covariance cov (x, y) entre x et y.
Déterminer les droites de régression et les tracer.
Y a-t-il une bonne corrélation entre le travail et le rythme cardiaque?
Estimer la fréquence cardiaque lorque l'intensité du travail fourni est 65 kJ/mn.
Estimer l'intensité du travail fourni lorsque la fréquence cardiaque est de 100 battements par minute.

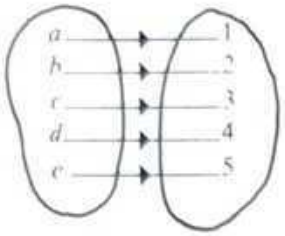
Exercice 35

Avec les données de la question 41 sur les poids et tailles des garçons d'une classe de première, calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série double. Peut-on faire une estimation d'un poids connaissant une taille?

Réponses aux questions

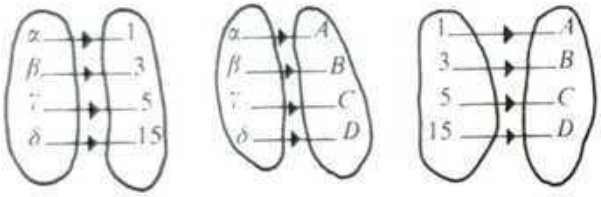
Q 1

1) • E est en bijection avec I_5 :



- F est en bijection avec I_3
- G est en bijection avec I_4
- H est en bijection avec I_2
- $I = \{1, 3, 5, 15\}$; I est en bijection avec I_4
- J est en bijection avec I_4.

2) G, I et J sont tels que deux d'entre eux sont en bijection :



Ils ont tous le même nombre d'éléments : 4.
Mais entre les autres il n'existe pas de bijection.

Q 2

Soient f la bijection de E sur $\{1, 2, \ldots m\}$ et g la bijection de E sur $\{1, 2 \ldots n\}$ alors g^{-1} est une bijection de $\{1, 2, \ldots n\}$ sur E, donc $f \circ g^{-1}$ est une bijection de $\{1, 2 \ldots n\}$ sur $\{1, 2 \ldots m\}$.
Ces deux ensembles ont donc le même nombre d'éléments : $m = n$.

Q 3

1) Si E et F sont disjoints, $E \cup F$ est formé des n éléments de E et des p éléments de F, qui sont distincts deux à deux : ainsi $E \cup F$ a $n + p$ éléments : card $(E \cup F) = n + p$.
Autre vérification : soit f une bijection de $\{1, 2 \ldots n\}$ sur E et g une bijection de $\{1, 2 \ldots p\}$ sur F. On note h la bijection de $\{n + 1, \ldots n + p\}$ dans $(1, \ldots p\}$ qui à $n + k$ associe k.
L'application i de $\{1, 2 \ldots n + p\}$ dans $E \cup F$ qui coincide avec f sur $\{1, 2 \ldots n\}$ et avec $g \circ h$ sur $\{n + 1, \ldots n + p\}$ est une bijection, d'où card $(E \cup F) = n + p$.

2) E' et $E \cap F$ sont disjoints car :

$$E' = \{x \in E ;\ x \notin F\}$$

et :

$$E \cap F = \{x \in E ;\ x \in F\}$$

Par ailleurs $E = E' \cup (E \cap F)$ d'où le résultat d'après le 1).
3) Si F est inclus dans E alors $E \cap F = F$.
Comme card $E' \geqslant 0$, d'après l'égalité :

$$\text{card } F + \text{card } E' = \text{card } E$$

on a :

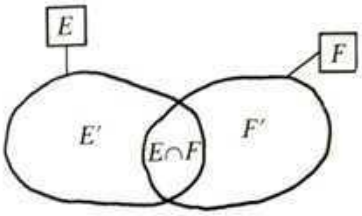
$$\text{card } F \leqslant \text{card } E.$$

4) Posons : $F' = F - E$.
On a : $F = F' \cup (E \cap F)$
et F' et $E \cap F$ sont disjoints d'où :

$$\text{card } F = \text{card } F' + \text{card } (E \cap F)$$

donc, en utilisant aussi le 2) :

$$\text{card } E + \text{card } F = \text{card } E' + \text{card } (E \cap F) + \text{card } F' + \text{card } (E \cap F)$$



or : $E \cup F$ est la réunion des trois ensembles disjoints deux à deux E', F' et $E \cap F$ donc, en généralisant le 1) on a :

$$\text{card } (E \cup F) = \text{card } E' + \text{card } F' + \text{card } (E \cap F).$$

Ainsi :

$$\text{card } E + \text{card } F = \text{card } (E \cup F) + \text{card } (E \cap F)$$

d'où le résultat demandé.

Q 4

Tout d'abord on examine la taille des boîtes : dans les cas b - c - d - h et i, elles ne peuvent contenir qu'une boule alors que dans les autres cas on peut y mettre les quatre si on veut.

- Dans ces cas b - c - d - h et i, on différencie les cas c et d des trois autres car les 4 boules sont identiques : on cherche en fait quelle est la boîte vide dans ces deux cas.
Les cas b et i sont du même genre : les quatre boules sont bien distinctes deux à deux.
Le cas h est tout seul de son genre car il y a deux boules identiques et les deux autres sont différentes et différentes entre elles.

- Dans les cas a - e - f - g et j, les boules sont différentes deux à deux et les boîtes sont assez grandes pour pouvoir les contenir toutes les quatre : ces cas sont du même type de rangement.
Oui, il y a d'autres types de rangements :

• des petites boîtes (ne contenant qu'une boule) avec 3 boules identiques et la quatrième différente :

○ ○ ○ ⊕

ou bien 2 boules identiques et les 2 autres différentes mais identiques entre elles ⊕ ⊕ ○ ○

• des grandes boîtes (pouvant contenir les 4 boules) avec

4 boules identiques ○ ○ ○ ○

3 boules identiques ○ ○ ○ ⊕

2 boules identiques et les autres différentes ○ ○ ⊕ ⊕

2 groupes de 2 boules identiques

○ ○ ⊕ ⊕

Quand les boîtes sont indiscernables :

• si elles sont petites et ne contiennent qu'une boule, tous les rangements sont identiques : une boîte vide et les autres remplies d'une boule

• si elles sont grandes et peuvent contenir les 4 boules, alors il faut différencier les cas :

les quatre boules sont identiques

○ ○ ○ ○

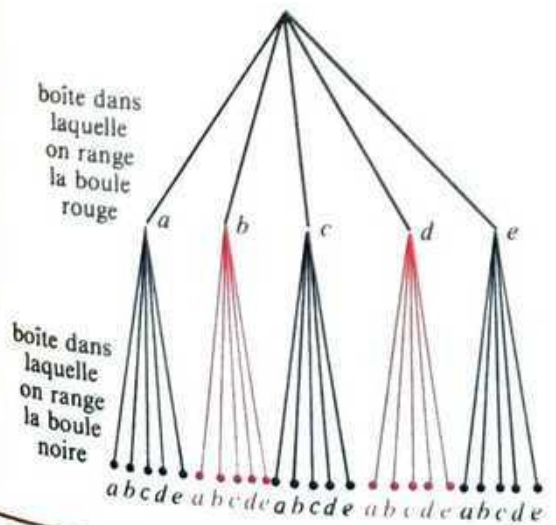
trois boules sont identiques ○ ○ ○ ⊕

deux boules sont identiques et les autres différentes ○ ○ ⊕ ⊕

on a deux groupes de deux boules identiques ○ ○ ⊕ ⊕.

Q 5

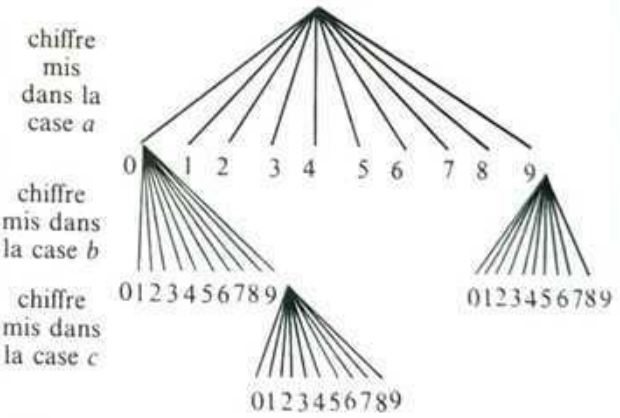
La boule rouge peut être rangée dans n'importe laquelle des boîtes; on a donc 5 façons possibles. On a encore 5 façons de ranger la boule noire car les cinq boîtes peuvent la contenir.



Ainsi on a en tout 25 possibilités pour ranger ces deux boules dans les cinq boîtes.
Faire une disposition de ces deux boules dans ces cinq boîtes revient à choisir dans quelle boîte on range la boule rouge et dans quelle boîte on range la boule noire c'est-à-dire choisir l'application de l'ensemble E de ces deux boules dans l'ensemble F des cinq boîtes.
Ainsi le nombre des applications de E dans F est 25.

Q 6

1) Former un numéro de téléphone c'est choisir quels chiffres on met dans les 6 cases vacantes; notons a, b, c, d, e et f ces six cases qu'il faut remplir et $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et F l'ensemble des 10 chiffres : $\{0, 1, \ldots 9\}$.
Former un numéro de téléphone c'est faire une application de E dans F.



etc.

Pour chaque case, on a 10 choix donc il existe 10^6 c'est-à-dire 1 000 000 de numéros de téléphone.

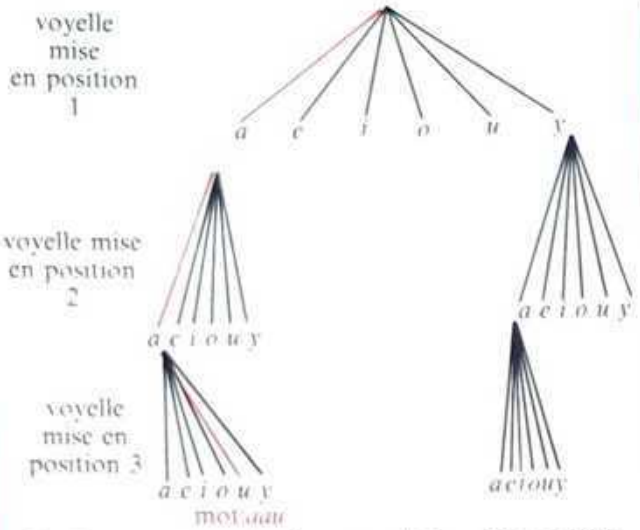
2) Former un mot de trois lettres consiste à choisir quelles lettres on met en 1re position, 2e position et 3e position. Soient E l'ensemble des trois places où on va mettre les lettres :

$$E = \{1, 2, 3\}$$

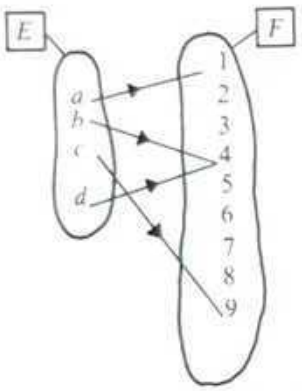
et F l'ensemble des six voyelles :

$$F = \{a, e, i, o, u, y\}.$$

Former un mot de trois lettres avec les six voyelles c'est choisir une application de E dans F.
A chaque position on a le choix entre les six voyelles : en tout on a : $6 \times 6 \times 6$ c'est-à-dire 216 mots.



3) Former un nombre à quatre chiffres c'est choisir quels chiffres on met aux places notées *a*, *b*, *c*, *d* par exemple le nombre 1 494 correspond à :

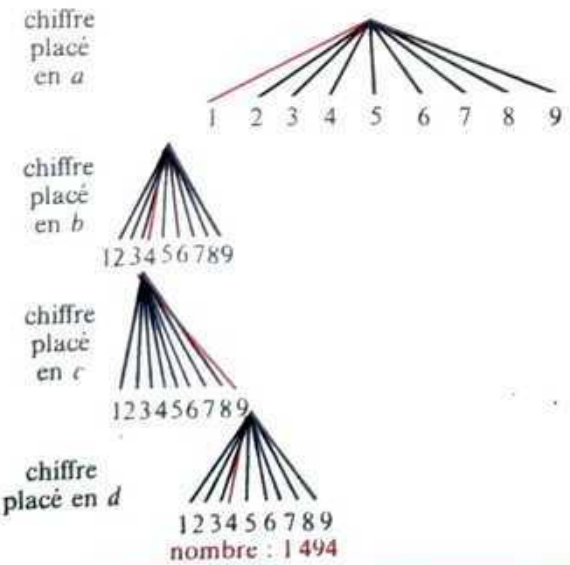


Donc former un nombre de quatre chiffres avec les chiffres 1, 2 ... 9, c'est choisir une application de E dans F où

$$E = \{a, b, c, d\}$$

et :

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$



A chaque place l'enfant a le choix entre les neuf chiffres donc en tout il peut «fabriquer» $9 \times 9 \times 9 \times 9$ c'est-à-dire 9^4 ou encore 6 561 nombres de quatre chiffres.

Q 7

1) $\mathcal{P}(E_3) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. card $\mathcal{P}(E_3) = 8$.

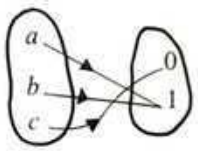
2) *a*) $\mathcal{P}(E_4) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

card $\mathcal{P}(E_4) = 16$.

b) Choisir des personnes dans un groupe de quatre personnes appelées *a*, *b*, *c* et *d* c'est choisir une partie de E_4 autrement dit choisir un élément de $\mathcal{P}(E_4)$: on a donc 16 manières différentes.

3) Pour former une partie de E_p, on prend un par un les éléments de E_p et on se pose la question : est-ce qu'on le prend? On lui associe ainsi le nombre 0 si la réponse est non, et le nombre 1 si la réponse est oui. Ainsi on a défini une application de E_p dans $\{0, 1\}$.

Par exemple $E_3 = \{a, b, c\}$, la partie $\{a, b\}$ de E_3 correspond à l'application :



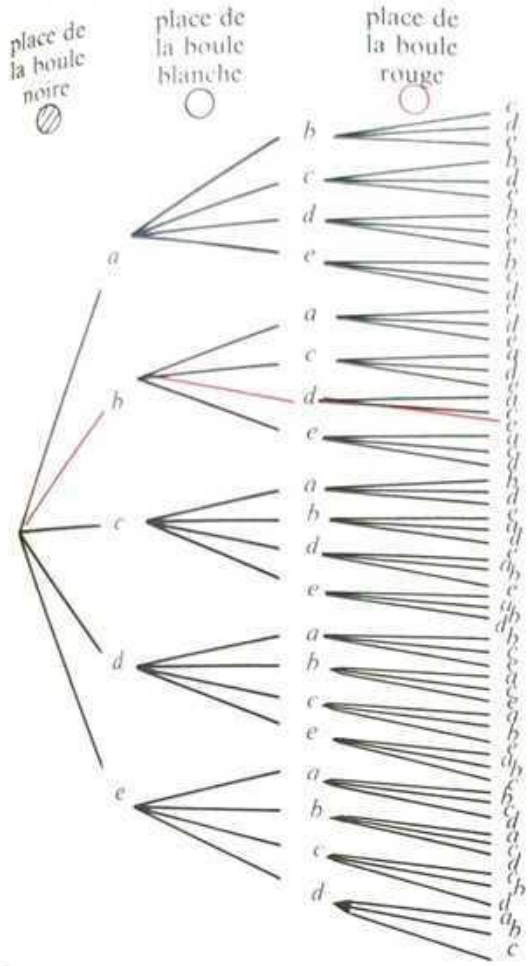
On a ainsi : card $\mathcal{P}(E_p)$ est le nombre d'applications de E_p dans $\{0, 1\}$, comme card $\{0, 1\} = 2$, on a card $\mathcal{P}(E_p) = 2^p$.

Q 8

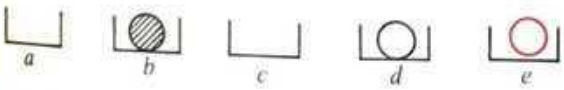
Il n'y a pas de rangement possible s'il y a plus de boules que de boîtes, car une fois remplies les boîtes, il restera des boules qu'on ne pourra pas ranger : les boîtes sont trop petites.
S'il y a une boule à ranger et que l'on dispose de n boîtes, alors on a n choix pour ranger la boule.

Q 9

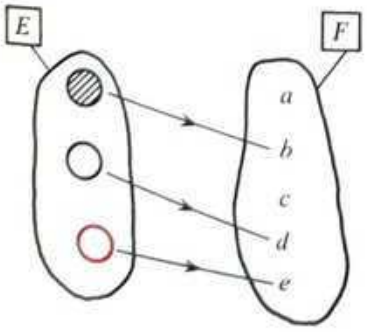
Pour ranger la boule noire ●, on a cinq choix : *a*, *b*, *c*, *d* ou *e*.
La boule noire ● étant rangée il ne reste alors que quatre boîtes disponibles donc pour ranger la boule blanche ○, on a alors quatre choix.
Il ne reste alors que trois boîtes libres donc trois possibilités pour ranger la boule rouge ●



On a en tout $5 \times 4 \times 3$ c'est-à-dire 60 possibilités. Une disposition des trois boules dans les quatre boîtes revient au choix des boîtes où on met chacune de ces boules, sachant que deux boules distinctes ne vont pas dans la même boîte, ainsi la disposition :



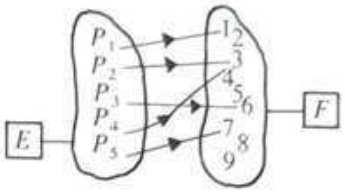
correspond à l'application :

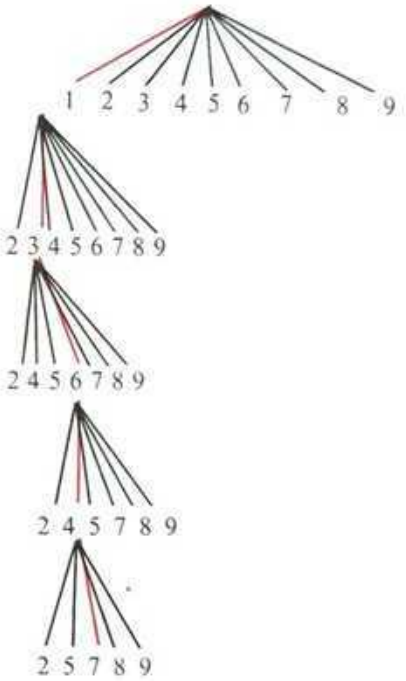


qui est une injection de E dans F.
Le nombre d'applications injectives de E dans F est donc : 60.

Q 10

1) Former un nombre c'est associer à chacune des cinq places sur la table un jeton tiré du sac; sachant que, puisqu'on ne remet pas le jeton tiré, on ne peut pas avoir deux fois le même jeton à des places différentes, on forme ainsi une application injective de l'ensemble E des cinq places $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ dans l'ensemble F des neuf jetons $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Exemple :

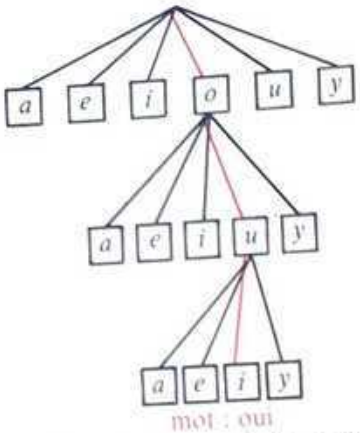




En tout, on a : $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ c'est-à-dire 15120 nombres ainsi formés.

2) Former un mot de trois lettres c'est choisir le carton portant la voyelle à mettre en premier, puis dans les cinq cartons restant, choisir celui à mettre en deuxième position et enfin, parmi les quatre qui restent, choisir celui qui occupe la troisième place. On construit ainsi une application injective (pas deux fois le même carton) de l'ensemble E des trois places P_1, P_2 et P_3 dans l'ensemble F des six cartons.





En tout on a : $6 \times 5 \times 4$ c'est-à-dire 120 mots ainsi formés.

Q 11

Soit f une application injective de E dans lui-même. L'image directe de E, $f(E)$, est donc un sous-ensemble de E formé de n éléments, donc $f(E) = E$; ce qui prouve que f est surjective. Ainsi f est une permutation de E.
Même principe, une injection f de F dans E, vérifie $f(F)$ est une partie de E et card $f(F) =$ card F, donc si card $F =$ card E alors $f(F) = E$, ce qui prouve que f est une bijection de F sur E :

$$A_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-n+1)$$
$$= n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

A_n^n est le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

Q 12

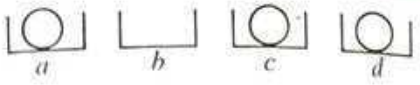
$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)\ldots 2 \times 1}{(n-p)\ldots 2 \times 1}$$
$$= \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Q 13

Puisque chaque boîte ne peut contenir qu'une boule, s'il y a plus de boules que de boîtes un tel rangement n'est pas possible (le nombre est 0).
S'il y a autant de boules que de boîtes, chaque boîte contient une boule : il n'y a ainsi qu'une seule disposition.

Q 14

1) Choisir une disposition de ces trois boules dans ces quatre boîtes revient à décider quelles sont les trois boîtes qui vont être pleines (d'une boule) c'est-à-dire à choisir une partie à trois éléments de l'ensemble des quatre boîtes. Par exemple la disposition correspond à la partie $\{a, b, d\}$ de $\{a, b, c, d\}$.



2) Les parties à trois éléments de E sont : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, et $\{b, c, d\}$ (ceci revient à éliminer la 4e boîte qui est vide)

$$C_4^3 = 4.$$

3) Une injection de $\{1, 2, 3\}$ dans E ayant F pour image est en fait, puisque card $F = 3$, une bijection de $\{1, 2, 3\}$ sur F.
On a ainsi 3!, c'est-à-dire 6, injections de $\{1, 2, 3\}$ dans E d'image F.
Le nombre d'arrangements d'ordre 3 des quatre éléments de E est A_4^3.
A chaque injection de $\{1, 2, 3\}$ dans E on associe une partie de E à trois éléments : l'image de $\{1, 2, 3\}$ par cette injection; toute partie F de E à trois éléments est obtenue de cette manière, mais il existe 6 injections d'image F; donc le nombre d'injections de $\{1, 2, 3\}$ dans E, qui est A_4^3, est le produit du nombre de parties de E à trois éléments, C_4^3, par 6.
Par le calcul ce résultat est évident :

$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2$$
$$C_4^3 \times 3! = 4 \times (3 \times 2 \times 1)$$

d'où $A_4^3 = C_4^3 \times 3!$

Q 15

1) Constituer une équipe de volley revient à choisir un groupe de six personnes dans les vingt présentes (il n'y a aucune notion de place ou d'ordre).

2) Tirer trois ceintures noires c'est choisir une partie de trois éléments de l'ensemble des quatre ceintures noires (en les notant a, b, c et d on retrouve le nombre 4 de la question précédente).
Puisqu'il y a trois ceintures blanches, on les prend toutes les trois : on a une seule possibilité.
Puisqu'il n'y a que deux ceintures bleues il n'y a aucune possibilité d'en tirer trois.
En général le tirage de trois ceintures de ce tiroir revient à choisir une partie à trois éléments de l'ensemble E des dix ceintures de ce tiroir.

Q 16

1) Choisir une partie F à p éléments d'un ensemble E à n éléments revient à choisir les éléments qu'on ne prend pas, c'est-à-dire le complémentaire $\overline{F}$ de F dans E. Comme $F \cap \overline{F} = \varnothing$ et $F \cup \overline{F} = E$ on a :

$$\text{card } \overline{F} = n - p$$

d'où l'égalité demandée.

2) $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,(n-[n-p])!}$
$= \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$
$= C_n^p.$

3) $C_{123}^{119} = C_{123}^{123-119}$
$= C_{123}^{4}$
$= \dfrac{123 \cdot 122 \cdot 121 \cdot 120}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
$= 123 \cdot \dfrac{122}{2} \cdot 121 \cdot \dfrac{120}{12}$
$= 123 \cdot 61 \cdot 121 \cdot 10$
$= 9\,078\,630$

$C_{48}^{42} = C_{47}^{5}$
$= \dfrac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
$= 47 \cdot \dfrac{46}{2} \cdot \dfrac{45}{5 \cdot 3} \cdot \dfrac{44}{4} \cdot 43$
$= 47 \cdot 23 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43$
$= 1\,533\,939.$

4) C_n^0 est le nombre de parties vides d'un ensemble E de n éléments : c'est 1. Par le calcul, $C_n^0 = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$ car $0! = 1$.

C_n^1 est le nombre de singletons d'un ensemble E de n éléments : c'est n.
Par le calcul,

$$C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

C_n^n est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble E à n éléments : c'est 1 car il n'y a que E.
Par le calcul, $C_n^n = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$ car $0! = 1$.

Q 17

1) Choisir une partie de E à p éléments contenant a, revient à choisir les $p-1$ autres éléments dans $E - \{a\}$ qui a $n-1$ éléments : on a donc C_{n-1}^{p-1} possibilités.
Choisir une partie de E à p éléments ne contenant pas a, revient à choisir les p éléments dans $E - \{a\}$: on a donc C_{n-1}^{p} possibilités.
En tout on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$ parties à p éléments de E, d'où :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}.$$

2) $C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!\,[(n-1)-(p-1)]!}$
$= \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$
$C_{n-1}^{p} = \dfrac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}.$

Comme :

$$p! = p(p-1)!$$

et :

$$(n-p)! = (n-p)(n-p-1)!$$

on a :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!\,p + (n-p)(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$
$$= \frac{(p+n-p)(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$
$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$
$$= C_n^p.$$

3) $C_9^1 = 9$; $C_9^2 = \dfrac{9 \times 8}{2!}$
$= 9 \times 4$
$= 36.$

Prenant $n = 10$ et $p = 2$, on a :
$C_{10}^2 = C_9^1 + C_9^2$
$= 9 + 36$
$= 45$

Q 18

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	$C_0^0 = 1$						
1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$					
2	$C_2^0 = 1$	$C_2^1 = 2$	$C_2^2 = 1$				
3	$C_3^0 = 1$	$C_3^1 = 3$	$C_3^2 = 3$	$C_3^3 = 1$			
4	$C_4^0 = 1$	$C_4^1 = 4$	$C_4^2 = 6$	$C_4^3 = 4$	$C_4^4 = 1$		
5	$C_5^0 = 1$	$C_5^1 = 5$	$C_5^2 = 10$	$C_5^3 = 10$	$C_5^4 = 5$	$C_5^5 = 1$	
6	$C_6^0 = 1$	$C_6^1 = 6$	$C_6^2 = 15$	$C_6^3 = 20$	$C_6^4 = 15$	$C_6^5 = 6$	$C_6^6 = 1$

Q 19

1) a) $C_1^0 = 1$, $C_1^1 = 1$ d'où :

$$C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b = (a + b)^1.$$

b) $C_2^0 = 1$, $C_2^1 = 2$ et $C_2^2 = 1$ d'où :

$$C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

c) $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$ et $C_3^3 = 1$ d'où :

$$C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$

2) $$\begin{aligned}(a + b)^4 &= (a + b)^2 (a + b)^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^4 + 2a^3 b + a^2 b^2 \\ &\quad + 2a^3 b + 4a^2 b^2 + 2ab^3 \\ &\quad + b^2 a^2 + 2ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ &= C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 \\ &\quad + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4.\end{aligned}$$

3) Le terme $a^k b^{n-k}$ s'obtient, dans le produit :

$$\underbrace{(a + b)(a + b) \ldots (a + b)}_{n \text{ facteurs}},$$

en prenant dans chaque facteur $(a + b)$, k fois le terme a et $n - k$ fois le terme b; il s'agit donc de choisir les k facteurs, sur les n, où on prend le a : on a C_n^k possibilités. Le terme $a^k b^{n-k}$ a donc comme coefficient C_n^k.
D'où :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Q 20

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Q 21

Un résultat est en fait un élément du produit $E \times E$ où $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donc il y a en tout 36 éventualités.

Q 22

1) « Le chiffre marqué est pair » correspond à l'événement $\{2, 4, 6\}$.

2) « Le chiffre marqué est divisible par 3 » est l'événement $\{3, 6\}$.

3) « Le chiffre marqué est supérieur ou égal à 3 » lorsque le résultat appartient à $\{3, 4, 5, 6\}$.

4) « Le chiffre marqué est 6 » correspond à l'événement $\{6\}$.

5) « Le chiffre marqué est strictement supérieur à 6 » n'est jamais réalisé, c'est l'évènement $\varnothing$.

Q 23

L'univers est le produit cartésien :

$$E \times E \times E \quad \text{où} \quad E = \{P, F\}$$

donc son cardinal est $2 \times 2 \times 2$ c'est-à-dire 8 :

$$A = \{FFP, FPF, PFF\}$$
$$B = \{PFF, FPF, FFP\}$$
$$B = A$$
$$C = \{FFF, FFP, FPF, FPP\}$$
$$D = \{PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$$
$$G = \{FFF\}$$
$$\overline{A} = \overline{B} = \{PPP, FPP, PFP, PPF, FFF\}$$
$$\overline{C} = \{PPP, PPF, PFP, PFF\}.$$

$\overline{C}$ correspond à « pile est sorti en premier » :

$$\overline{D} = G \ , \quad \overline{G} = D$$
$$\overline{\Omega} = \varnothing \quad \text{car} \quad \complement_\Omega \Omega = \varnothing$$
$$\overline{\varnothing} = \Omega \quad \text{car} \quad \complement_\Omega \varnothing = \Omega$$

$\overline{\overline{H}} = H$ par définition du complémentaire de $\overline{H}$ dans Ω.

Q 24

$A = \{7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, A\heartsuit\}$

$B = \{D\spadesuit, D\diamondsuit, D\heartsuit, D\clubsuit\}$

$C = \{V\spadesuit, V\diamondsuit, V\heartsuit, V\clubsuit, R\spadesuit, R\diamondsuit, R\heartsuit, R\clubsuit\}$

$D = \{8\spadesuit, 8\diamondsuit, 8\heartsuit, 8\clubsuit, 10\spadesuit, 10\diamondsuit, 10\heartsuit, 10\clubsuit\}$

$E = \{V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit, A\spadesuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, A\clubsuit\}$

$$\text{« } A \text{ et } B \text{ »} = A \cap B = \{D\heartsuit\}$$

car une carte est à la fois cœur et dame si et seulement si c'est la dame de cœur.
A et E ne peuvent être réalisés simultanément, en effet une carte ne peut être à la fois cœur et noire : $A \cap E = \varnothing$.
A et D ne sont pas incompatibles en effet le $8\heartsuit$ est à la fois dans A et dans D : $A \cap D \neq \varnothing$.
B et C sont incompatibles car une carte ne peut être à la fois une dame et, soit un valet soit un roi : $B \cap C = \varnothing$.
Exemples d'événements incompatibles avec D :

- obtenir un nombre impair
- obtenir une tête
- obtenir une dame ou un as
- obtenir le roi de cœur...

Q 25

L'univers est, puisqu'on effectue deux lancers, $\{PP, PF, FP, FF\}$; de plus on est en situation d'équiprobabilité, la probabilité d'avoir deux fois face est donc $\frac{1}{4}$, autrement dit une chance sur 4 ; alors que la probabilité de perdre 10 F est celle de l'événement contraire (avoir au moins un pile) qui est alors de $\frac{3}{4}$ (les éventualités sont *PF*, *FP* et *PP*).

Dans le jeu d'Éva, la probabilité de gagner 10 F est celle d'obtenir le même côté aux deux lancers : *PP* ou *FF* : c'est donc $\frac{1}{2}$; et la probabilité de perdre 10 F est celle d'obtenir des côtés différents *PF* ou *FP*, qui est encore $\frac{1}{2}$.

Ainsi Éva a raison, c'est vraiment le hasard qui guide son jeu et on a autant de chances de gagner que de perdre, alors que dans le jeu d'Awa on a trois fois plus de « chances » de perdre !

Q 26

1) Les cartons sont :

P R E M I É R E

Pour obtenir deux lettres identiques il faut tirer les deux R ou les deux E on a donc deux chances sur... le nombre total de tirages possibles qui est C_8^2 en effet il s'agit de « tirer » une partie à deux éléments de l'ensemble des huit cartons : on a donc, puisque :

$$C_8^2 = \frac{8.7}{2}$$
$$= 4.7$$
$$= 28,$$

2 chances sur 28, ou encore 1 chance sur 14 d'obtenir deux lettres identiques.

2) Les cartons sont :

P R E M I E R E

Cette fois-ci pour obtenir deux lettres identiques il faut tirer soit les deux R soit deux des trois E : on a ainsi $1 + C_3^2$ c'est-à-dire 4 façons de réaliser cet événement.

Ainsi on a 4 chances sur 28, c'est-à-dire une chance sur sept d'obtenir deux lettres identiques.

Q 27

Puisque $A \cap \overline{A} = \varnothing$, on a :

$$p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$$

or $A \cup \overline{A} = \Omega$ donc $p(A \cup \overline{A}) = 1$ donc :

$$1 = p(A) + p(\overline{A})$$

c'est-à-dire :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Puisque :

$$\varnothing = \overline{\Omega} \quad \text{et} \quad p(\Omega) = 1$$

on a :

$$p(\varnothing) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Q 28

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

et ces trois ensembles $A - B$, $B - A$ et $A \cap B$ sont deux à deux disjoints donc :

(1) $p(A \cup B) = p(A - B)$
$+ p(B - A) + p(A \cap B)$

or :

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

et $(A - B)$ et $(A \cap B)$ sont disjoints donc :

$$p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)$$

d'où :

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$

de même :

$$p(B - A) = p(B) - p(A \cap B).$$

En remplaçant dans (1) on obtient :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

(cette formule est à rapprocher de :

card $(A \cup B)$ = card A
+ card B − card $(A \cap B)$

car, comme on va le voir, dans une situation d'équiprobabilité, on passe de la 2e égalité à la 1re en divisant les deux membres par card Ω.

Q 29

$n_1 + n_2$ est l'effectif total de la population c'est-à-dire 1 000.

$$f_1 = \frac{n_1}{1\,000}, \quad f_2 = \frac{n_2}{1\,000}.$$

De $\frac{1}{2}$ toutes les deux.

Q 30

Pour obtenir 10 points, il faut avoir observé sur chaque cauri le côté D; comme la probabilité d'apparition de D est $\frac{3}{5}$ sur un cauri, la probabilité d'avoir 10 points est : $\frac{3^4}{5^4}$ c'est-à-dire $\frac{81}{625}$.

De même la probabilité d'avoir 5 points est celle d'avoir quatre fois le côté F donc $\frac{2^4}{5^4}$ c'est-à-dire $\frac{16}{625}$.

Pour obtenir 2 points il faut faire apparaître deux F et deux D. Mais il y a en tout C_4^2 façons d'avoir deux F et deux D, selon le choix des deux cauris présentant le côté F. Ainsi la probabilité de marquer 2 points est :

$$\frac{C_4^2 \times 2^2 \times 3^2}{5^4}$$

c'est-à-dire $\frac{216}{625}$.

Pour marquer zéro point il faut obtenir, soit un F et trois D, soit un D et trois F.

Dans les deux cas, on a C_4^1 possibilités : d'après le choix du cauri présentant respectivement la face F ou la face D.

Le numéro du cauri donnant la face F étant fixé, la probabilité est alors $\frac{2 \times 3^3}{5^4}$.

De même pour un D (fixé) et trois F, on aura $\frac{3 \times 2^3}{5^4}$.

Donc, en tout, pour marquer zéro point, la probabilité est :

$$C_4^1 \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3 + C_4^1 \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

c'est-à-dire $\frac{312}{625}$.

Ainsi on a :

Nombre de points marqués	0	2	5	10
Probabilité d'avoir ce nombre	$\frac{312}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{81}{625}$

Q 31

La population est formée des 30 élèves de la classe. Le caractère est la durée des trajets dans une journée d'école.

Modalités	Effectifs
20	3
30	1
40	4
50	2
60	6
65	1
70	3
75	1
80	2
90	5
100	1
110	1
	30 ← effectif total

La fréquence de la modalité 70 est $\frac{3}{30}$ (quotient de l'effectif de la modalité par l'effectif total) c'est-à-dire 0,1.

Le mode est 60 car l'effectif de cette modalité est le plus grand. La moyenne se calcule grâce à la troisième colonne du tableau où l'on calcule $n_i x_i$ où n_i est l'effectif de la modalité x_i :

x_i	n_i	$n_i x_i$
20	3	60
30	1	30
40	4	160
50	2	100
60	6	360
65	1	65
70	3	210
75	1	75
80	2	160
90	5	450
100	1	100
110	1	110
	30	1 880 Total

La moyenne $\bar{x}$ de la série est $\frac{\sum_{i=1}^{12} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{12} n_i}$ c'est-à-dire $\frac{1\,880}{30}$ soit environ 63 mn.

La médiane est la valeur du caractère obtenue en écrivant, dans l'ordre croissant, les 30 valeurs observées et en prenant la moyenne arithmétique (le milieu) des 15e et 16e valeurs : on obtient ici la médiane : 60, car la 15e et la 16e valeurs sont 60. Dans le cas d'un effectif total impair, par exemple 29, on aurait pris la « valeur centrale » c'est-à-dire la 15e, de façon à en avoir autant (14) d'inférieures que de supérieures.

Q 32

Emplois	Fréquence en 1976	Fréquence en 1985	Fréquence en 1990
sédentaires sur les marchés de la rue	0,439 0,341 0,220	0,437 0,342 0,221	0,437 0,342 0,221

Oui, les proportions d'emplois restent sensiblement les mêmes de l'année 76 à l'année 90 avec une très légère diminution des emplois sédentaires au profit (partagé) des emplois sur le marché et dans la rue. Est-ce le résultat de la conjoncture ou la facilité de «l'emploi»?

Q 33

Pour Koffi :

Note	8,5	9	10	11
Effectif	1	2	1	1

Le mode est 9.
La médiane est 9 (la 3e note dans l'ordre croissant).
La moyenne est :

$$\frac{1.8{,}5+2.9+1.10+1.11}{5}$$

c'est-à-dire 9,5.
Pour Ouattara :

Note	3	8,5	9	18
Effectif	1	1	2	1

Le mode est 9.
La médiane est 9 (3e note encore).
La moyenne est :

$$\frac{1.3+1.8{,}5+2.9+18}{5}$$

c'est-à-dire 9,5.
Koffi et Ouattara ont, pour la série de leurs notes aux cinq devoirs, même mode 9, même médiane 9, même moyenne 9,5. Pourtant le professeur mettra à Koffi : «élève moyen, doit faire un effort»; à Ouattara : «élève irrégulier, doit organiser son travail».
En effet les notes de Koffi sont «très ramassées» autour de la moyenne 9,5, alors que celles de Ouattara sont «très dispersées» puisqu'il a eu une très mauvaise note : 3 (la veille il n'avait pas appris sa leçon) et une très bonne note : 18 puisqu'il avait fait un exercice semblable à celui posé au devoir.

Q 34

Pour Koffi :

$$11 - 8{,}5 = 2{,}5.$$

Pour Ouattara :

$$18 - 3 = 15.$$

Q 35

La moyenne de Koffi et de Ouattara est 9,5. Pour Koffi, on a :

Note x_i	8,5	9	10	11
Note moyenne $x_i - \bar{x}$	-1	$-0{,}5$	0,5	1,5
Effectif n_i	1	2	1	1

La moyenne de ces différences est :

$$\frac{1(-1)+2(-0{,}5)+1(0{,}5)+1(1{,}5)}{5}$$

c'est-à-dire 0.
Pour Ouattara, on a :

Note x_i	3	8,5	9	18
Note – moyenne $x_i - \bar{x}$	$-6{,}5$	-1	$-0{,}5$	8,5
Effectif n_i	1	1	2	1

La moyenne de ces différences est :

$$\frac{1(-6{,}5)+1(-1)+2(-0{,}5)+1(8{,}5)}{5}$$

c'est-à-dire, encore 0.
Pour Koffi

Note x_i	Effectif n_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
8,5	1	1	1
9	2	0,5	1
10	1	0,5	0,5
11	1	1,5	1,5
	5		4

La moyenne de ces écarts est $\frac{4}{5}$ c'est-à-dire 0,8.

Pour Ouattara :

Note x_i	Effectif n_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
3	1	6,5	6,5
8,5	1	1	1
9	2	0,5	1
18	1	8,5	8,5
	5		17

La moyenne de ces écarts est $\frac{17}{5}$ c'est-à-dire 3,4.

Cette fois-ci on voit une nette différence entre Koffi et Ouattara : la moyenne des écarts de Koffi est bien plus faible que celle de Ouattara : ses notes sont plus regroupées autour de sa moyenne.

Q 36

Pour Koffi :

Note x_i	Effectif n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
8,5	1	− 1	1	1
9	2	− 0,5	0,25	0,50
10	1	0,5	0,25	0,25
11	1	1,5	2,25	2,25
	5			4

La moyenne est : $\frac{4}{5}$ soit 0,8.

Pour Ouattara :

Note x_i	Effectif n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
3	1	− 6,5	42,25	42,25
8,5	1	− 1	1	1
9	2	− 0,5	0,25	0,50
18	1	8,5	72,25	72,25
	5			116

La moyenne est : $\frac{116}{5}$ soit 23,2.

Q 37

1) Pour Koffi, l'écart type est $\sqrt{0,8}$ c'est-à-dire 0,89.
Pour Ouattara, l'écart type est $\sqrt{23,2}$ c'est-à-dire 4,82.
On retrouve encore, puisque 4,82 est « grand » face à 0,89 que les notes de Ouattara sont bien plus dispersées que celles de Koffi.

2) Dire que l'écart type est nul c'est dire que la variance est nulle. Or la variance est la moyenne d'une série dont toutes les modalités sont des nombres positifs ou nuls (ce sont des carrés) donc toutes les modalités de cette série sont nulles, autrement dit, dans la série donnée toutes les modalités sont égales à la moyenne : toutes les valeurs observées sont identiques.

Q 38

Puisque :

$$(y_i - \bar{x})^2 = y_i^2 - 2y_i\bar{x} + \bar{x}^2$$

on a :

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{N} y_i + N\bar{x}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2\bar{x}(N\bar{x}) + N\bar{x}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\bar{x}^2$$

d'où :

$$V = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\bar{x}^2\right)$$

c'est-à-dire la formule demandée.

Q 39

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i - A \sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$
$$= \bar{x} - A$$

par définition de $\bar{x}$.
On a, par définition de V :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2$$

or : $x_i = u_i + A$
et : $\bar{x} = \bar{u} + A$
d'où : $x_i - \bar{x} = u_i - \bar{u}$

il vient donc :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (u_i - \bar{u})^2$$

et, en utilisant le résultat donné après la question 36, par le même raisonnement, pour la série u, on obtient :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - \bar{u}^2.$$

Q 40

Pour tout i de $\{1, \ldots k\}$ on a : $u_i = \frac{x_i - A}{c}$, d'où, en notant n_i l'effectif de la classe de centre x_i et N la somme des n_i :

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{x_i - A}{c}$$

$$= \frac{1}{Nc} \left[\sum_{i=1}^{k} n_i x_i - A \sum_{i=1}^{k} n_i \right]$$

$$= \frac{1}{c} \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} - A \right]$$

$$= \frac{1}{c} (\bar{x} - A).$$

De même :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2$$

or $x_i = cu_i + A$ et, d'après ce qui précède, $\bar{x} = c\bar{u} + A$ d'où :

$$x_i - \bar{x} = c(u_i - \bar{u})$$

ainsi :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i c^2 (u_i - \bar{u})^2$$

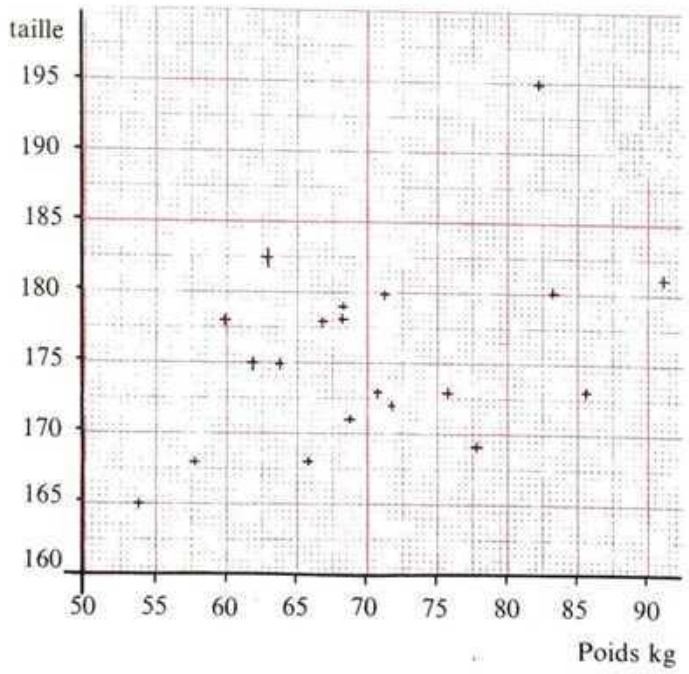
$$= \frac{c^2}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (u_i - \bar{u})^2$$

$$= c^2 \left[\frac{1}{N} n_i u_i^2 - \bar{u}^2 \right]$$

en utilisant toujours la même transformation qu'à la question 36. Ainsi l'écart-type en x est égal au produit de c par l'écart-type en u.

Q 41

Le poids maximum est 91.
Le poids minimum est 54.
La taille minimum est 165.
La taille maximum est 195.



Q 42

Couple	(2, 1)	(1, 4)	(2, 4)	(5, 3)	(3, 3)	(2, 2)
Effectif	5	0	0	1	15	12

Pour connaître le nombre de fois où Mr Fadika a attribué la note 3 il suffit d'additionner les effectifs qui figurent dans la colonne 3 :

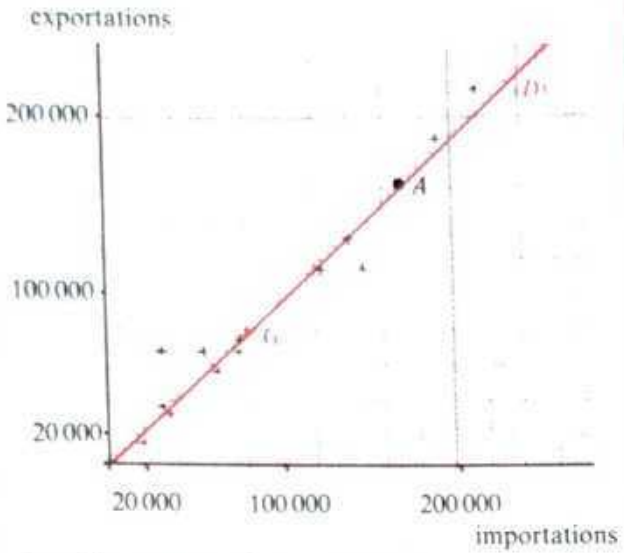
$$0 + 10 + 16 + 15 + 3 + 2$$

c'est-à-dire 46.
De même le nombre de fois où Mr Sangaré a attribué la note 2 est la somme des nombres de la ligne 2 :

$$0 + 3 + 12 + 16 + 0 + 0$$

c'est-à-dire 31.

Q 43



$\bar{x}$ est la somme de toutes les importations du tableau, divisée par 16 (nombre total de pays) c'est-à-dire environ 81 613 millions de dollars.
De même $\bar{y}$ est le quotient de la somme des exportations par 16 c'est-à-dire environ 79 198 millions de dollars. On note G ce point moyen et (D) la droite qui semble le mieux ajuster le nuage. Cette droite (D) passe par G et par A de couple de coordonnées (170 000, 160 000).
Une équation de (D) est donc :

$$y - 160\,000 = \frac{160\,000 - 79\,198}{170\,000 - 81\,613}(x - 170\,000)$$

c'est-à-dire (environ) :

$$y = 0{,}914x + 4\,620.$$

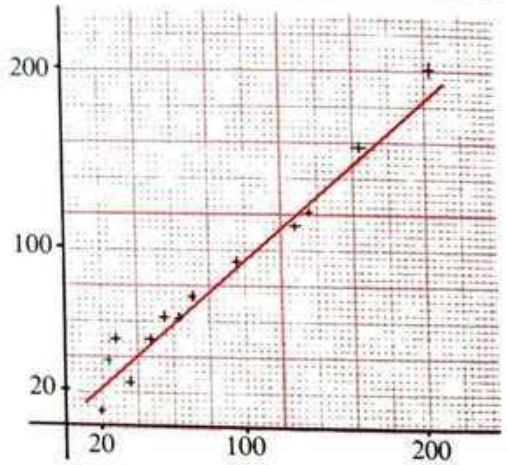
Q 44

1) x et y en milliards de dollars.

Pays	x	y
Brésil	20	15
Corée du Sud	20	15
Arabie Saoudite	24	63
Suède	33	31
Espagne	34	21
Suisse	36	30
URSS	58	65
Canada	59	64
Belgique / Luxembourg	60	56
Pays-Bas	77	74
Italie	78	72
Grande-Bretagne	120	115
France	135	111
Japon	140	130
Allemagne fédérale	193	188
États-Unis	218	216

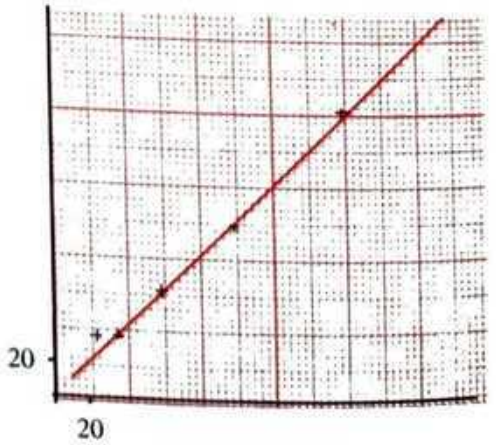
2) Tableau T_3 :

$\frac{x_p + x_{p+1}}{2}$	$\frac{y_p + y_{p+1}}{2}$
20	15
22	39
28,5	47
33,5	26
35	25,5
47	47,5
58,5	64,5
59,5	60
68,5	65
77,5	73
99	93,5
127,5	113
137,5	120,5
166,5	159
205,5	202



3)

x	y
22	33,7
35	33
59,5	63,2
99	93,2
166,5	160,5



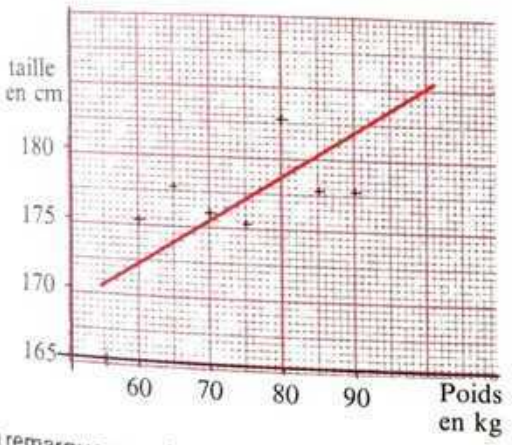
On « voit » là une bonne corrélation entre les deux caractères.

Q 45

Taille \ Poids	55	60	65	70	75	80	85	90
165	1	0	0	0	0	0	0	0
170	0	1	1	2	0	1	0	0
175	0	1	1	1	1	0	1	0
180	0	1	1	3	0	0	1	1
185	0	0	1	0	0	0	0	0
190	0	0	0	0	0	0	0	0
195	0	0	0	0	0	1	0	0

Ce tableau est plus facile à remplir à partir du diagramme que du tableau des valeurs observées.

Poids	55	60	65	70	75	80	85	90
Taille	165	175	177,5	175,8	175	182,5	177,5	180



On remarque que dans cette situation très simplifiée mis à part le point (55; 165) et le point (80; 182,5) tous les autres sont situés dans une bande : $175 \leqslant y \leqslant 178$ ce qui voudrait dire que la plupart des garçons ont leur taille dans cet intervalle, et ceci quel que soit leur poids. Il semble donc qu'il n'y ait pas une bonne corrélation linéaire entre poids et taille.

Q 46

Pour le dénominateur voir le calcul sur la variance, car $\dfrac{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})}{N}$ est la variance $\mathfrak{V}_x$ de la série de caractère x. Calculons le numérateur A de a :

$$\begin{aligned} A &= \Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \\ &= \Sigma n_{ij}x_iy_j - \Sigma n_{ij}y_j\bar{x} - \Sigma n_{ij}x_i\bar{y} + \Sigma n_{ij}\bar{x}\bar{y} \\ &= \Sigma n_{ij}x_iy_j - \bar{x}(\Sigma n_{ij}y_j) - \bar{y}(\Sigma n_{ij}x_i) + \bar{x}\bar{y}(\Sigma n_{ij}) \end{aligned}$$

d'où, puisque $N = \Sigma n_{ij}$:

$$\begin{aligned} \frac{A}{N} &= \frac{\Sigma n_{ij}x_iy_j}{N} - \bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x} + \bar{x}\bar{y}.1 \\ &= \frac{\Sigma n_{ij}x_iy_j}{N} - \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé après avoir écrit :

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\dfrac{A}{n}}{\mathfrak{V}_x}. \end{aligned}$$

Q 47

u_i	v_i	u_iv_i	u_i^2
− 1	− 12	12	1
2	5	10	4
3	9	27	9
− 4	− 20	80	16
1	4	4	1
− 2	− 10	20	4
0	2	0	0
− 3	− 18	54	9
4	10	40	16
1	− 5	− 5	1
2	2	4	4
5	13	65	25
8	− 24	311	90

$$\bar{u} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad \bar{v} = \frac{-24}{12} = -2.$$

On démontre facilement que :

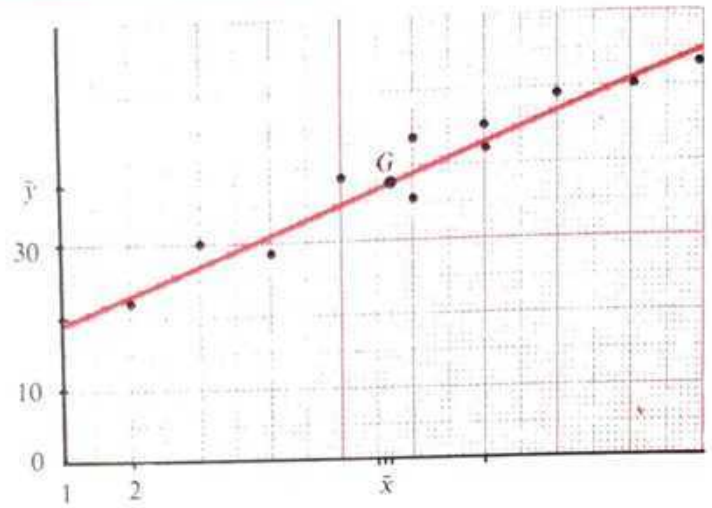
$$\text{Cov}\,(u, v) = \text{Cov}\,(x, y)$$

d'où ici :

$$\begin{aligned} \text{Cov}\,(x, y) &= \frac{311}{12} + \frac{2}{3}.2 \\ &\simeq 27{,}25 \\ \mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_u &= \frac{90}{12} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &\simeq 7{,}05 \\ a &= \frac{27{,}25}{7{,}05} \\ &\simeq 3{,}87 \\ b &= \bar{y} - a\bar{x} \\ &\simeq 38 - 3{,}87 \cdot \frac{17}{3} \\ &\simeq 16{,}1 \end{aligned}$$

d'où, la droite a pour équation :

$$y = 3{,}87x + 16{,}1.$$



Q 48

On avait trouvé :

$$\text{Cov}(x, y) \simeq 27{,}25,$$
$$\bar{x} = \frac{17}{3}, \quad \bar{y} = 38.$$

On calcule V_y en utilisant le changement de variable :

$$v_i = y_i - 40$$

v_i	v_i^2
− 12	144
5	25
9	81
− 20	400
4	16
− 10	100
− 2	4
− 18	324
10	100
− 5	25
2	4
13	169
− 24	1 392

d'où $\bar{v} = \dfrac{-24}{12}$

$= -2$

et $\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_v$

$= \dfrac{1\,392}{12} - (-2)^2$

$\simeq 112$

Ainsi :

$$a' \simeq \frac{27{,}25}{112}$$
$$\simeq 0{,}243$$

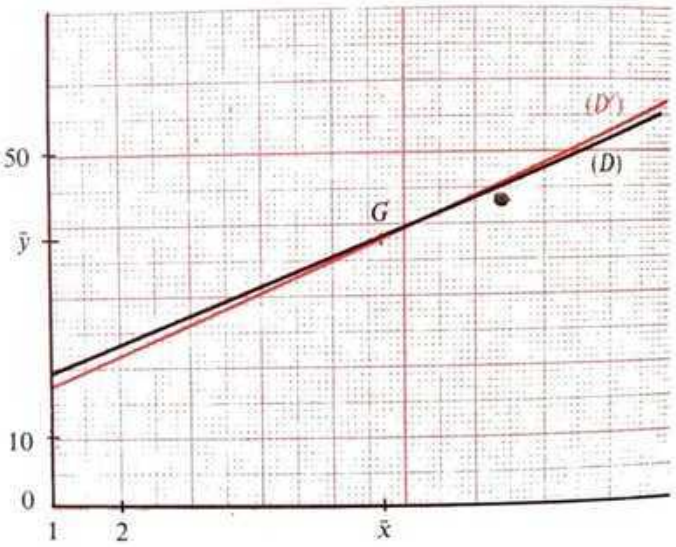
et :
$$b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$
$$\simeq -3{,}57$$
$$x = 0{,}243y - 3{,}57$$

d'où :

$$y = \frac{x + 3{,}57}{0{,}243}$$

c'est-à-dire :

$$y = 4{,}12x + 14{,}68.$$



Q 49

Puisque :

$$(D) : y = 3{,}87x + 16{,}1$$

et :

$$(D') : y = 4{,}12x + 14{,}68.$$

Les points d'abscisse 10 des droites (D) et (D') ont respectivement pour ordonnées y et y' avec :

$$y = 3{,}87 \,.\, 10 + 16{,}1$$
$$= 38{,}7 + 16{,}1$$
$$\simeq 55$$
$$y' = 4{,}12 \,.\, 10 + 14{,}68$$
$$= 41{,}2 + 14{,}68$$
$$\simeq 56.$$

De même lorsque l'abscisse est 15 on a :

$$y = 3{,}86 \,.\, 15 + 16{,}1$$
$$\simeq 75$$

et :

$$y' = 4{,}12 \,.\, 15 + 14{,}68 \simeq 76{,}5.$$

Q 50

1) $N\bar{e} = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)$

$$= \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)$$

or : $b = \bar{y} - a\bar{x}$

d'où :

$$N\bar{e} = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x}))$$

$$= \sum_{i=1}^{N} y_i - N\bar{y} - a\left(\sum_{i=1}^{N} x_i - N\bar{x}\right)$$

or :

$$N\bar{y} = \sum_{i=1}^{N} y_i \quad \text{et} \quad N\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

d'où : $\bar{e} = 0.$

2) $N\mathfrak{V}_e = \sum_{i=1}^{N} (e_i - \bar{e})^2$

$$= \sum_{i=1}^{N} e_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} [y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} [(y_i - \bar{y})^2 + a^2(x_i - \bar{x})^2 - 2a(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 + a^2 \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 - 2a \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}).$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 = N\mathfrak{V}_y$$

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = N\mathfrak{V}_x$$

et :

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = N \operatorname{Cov}(x, y)$$

d'où :

$$\mathfrak{V}_e = \mathfrak{V}_y + a^2\mathfrak{V}_x - 2a \operatorname{Cov}(x, y).$$

3) On sait que $a = \dfrac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\mathfrak{V}_x}$ d'où :

$$a \operatorname{Cov}(x, y) = a^2\mathfrak{V}_x$$

d'où :

$$\mathfrak{V}_e = \mathfrak{V}_y + a^2\mathfrak{V}_x - 2a^2\mathfrak{V}_x$$
$$= \mathfrak{V}_y - a^2\mathfrak{V}_x.$$

Puisque :

$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

on a : $\mathfrak{V}_{\hat{y}} = a^2\mathfrak{V}_x$

d'où : $\mathfrak{V}_e = \mathfrak{V}_y - \mathfrak{V}_{\hat{y}}.$

Comme :

$$\mathfrak{V}_e = \sigma_e^2$$
$$\mathfrak{V}_y = \sigma_y^2$$
$$\mathfrak{V}_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{y}}^2$$

l'égalité :

$$\mathfrak{V}_y = \mathfrak{V}_e + \mathfrak{V}_{\hat{y}}$$

se traduit par :

$$\sigma_y^2 = \sigma_e^2 + \sigma_{\hat{y}}^2.$$

Q 51

Le quotient est $\dfrac{3{,}87}{4{,}12}$ c'est-à-dire 0,94.

On a : $\hat{y}_i = 3{,}87x_i + 16{,}1$

d'où : $\mathfrak{V}_{\hat{y}} = 3{,}87^2\mathfrak{V}_x$

on avait trouvé :

$$\mathfrak{V}_x = 7{,}05$$

et : $\mathfrak{V}_y = 112$ (voir question 48)

d'où :

$$\frac{\mathfrak{V}_{\hat{y}}}{\mathfrak{V}_y} = \frac{3{,}87^2 \,.\, 7{,}05}{112}$$
$$\simeq 0{,}94.$$

On remarque que le quotient des coefficients directeurs est égal au rapport des variances de $\hat{y}$ et y.

Q 52

$$r^2 = \frac{[\operatorname{Cov}(x, y)]^2}{\mathfrak{V}_x\mathfrak{V}_y}$$

$$\operatorname{Cov}(x, y) = a\mathfrak{V}_x$$

$$\frac{[\operatorname{Cov}(x, y)]^2}{\mathfrak{V}_x\mathfrak{V}_y} = \frac{a^2\mathfrak{V}_x^2}{\mathfrak{V}_x\mathfrak{V}_y} = \frac{a^2\mathfrak{V}_x}{\mathfrak{V}_y}$$

or : $a^2\mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_{\hat{y}}$

d'où : $r^2 = \dfrac{\mathfrak{V}_{\hat{y}}}{\mathfrak{V}_y}.$

Q 53

On a, d'après la question 50,

$$\mathfrak{V}_e = \mathfrak{V}_y - \mathfrak{V}_{\hat{y}}$$

or :

$$r^2 = \frac{\mathcal{V}_{\hat{y}}}{\mathcal{V}_y} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{V}_{\hat{y}} = r^2 \mathcal{V}_y.$$

Ainsi on a :

$$\mathcal{V}_e = (1 - r^2)\mathcal{V}_y.$$

• Puisque $\mathcal{V}_e$ et $\mathcal{V}_y$ sont des nombres positifs, le coefficient $1 - r^2$ est aussi positif donc r^2 est inférieur ou égal à 1.

• D'ailleurs $r^2 = \dfrac{\mathcal{V}_{\hat{y}}}{\mathcal{V}_y} = [\cos CAB]^2$

d'où $r^2 \leqslant 1$.

Q 54

$$0 \leqslant \sigma_e \leqslant \frac{1}{2}\sigma_y$$

d'où : $$\sigma_e^2 \leqslant \frac{1}{4}\sigma_y^2$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{V}_e \leqslant \frac{1}{4}\mathcal{V}_y$$

or : $$\mathcal{V}_e = (1 - r^2)\mathcal{V}_y$$

on peut supposer $\mathcal{V}_y$ non nul sinon la série en y est « constante » et présente peu d'intérêt.

D'où : $$1 - r^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire : $r^2 \geqslant \dfrac{3}{4}$.

Q 55

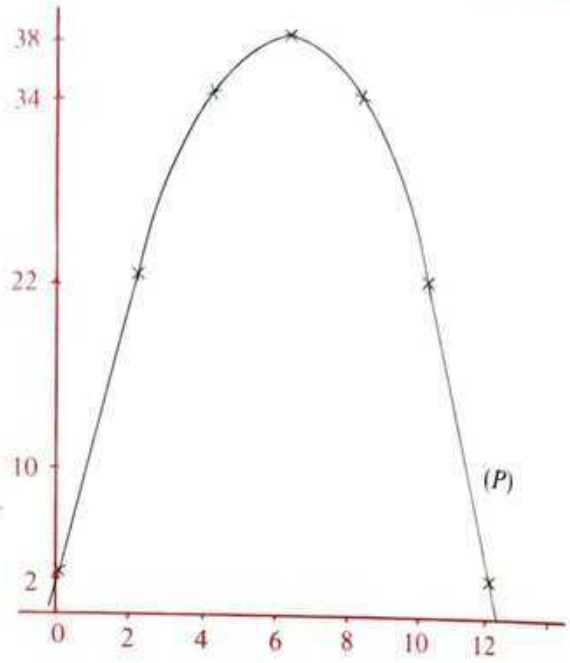
Puisque $r = \dfrac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$, montrons que Cov $(x, y) = 0$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
0	2	− 6	− 20	120
2	22	− 4	0	0
4	34	− 2	12	− 24
6	38	0	16	0
8	34	2	12	24
10	22	4	0	0
12	2	6	− 20	− 120
42	154			0

$$\bar{x} = \frac{42}{7} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{154}{7} = 22$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{0}{7} = 0$$



Nettement les points $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ sont placés sur la parabole (P) de sommet $\begin{pmatrix} 6 \\ 22 \end{pmatrix}$ et passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc d'équation :

$y = k[(x - 6)^2 + 22]$ (voir chapitre A3)

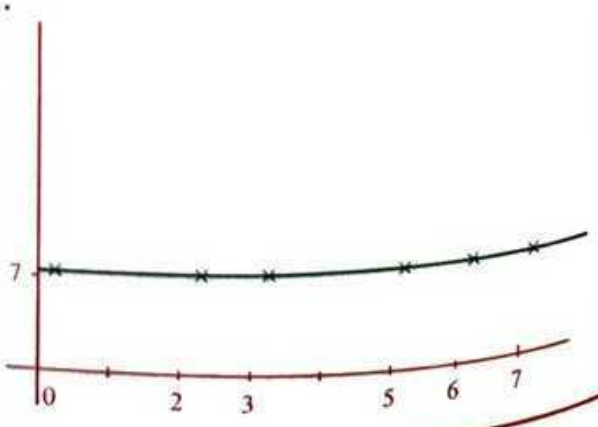
avec : $2 = k(36 + 22)$

donc d'équation :

$$y = \frac{1}{29}(x^2 - 12x + 58).$$

Q 56

1) Puisque, pour tout i de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $y_i = 7$ on aura, pour tout i, $y_i - \bar{y} = 0$ d'où Cov $(x, y) = 0$, et par suite $r = 0$.
Tous les points sont situés sur la droite d'équation $y = 7$



2)

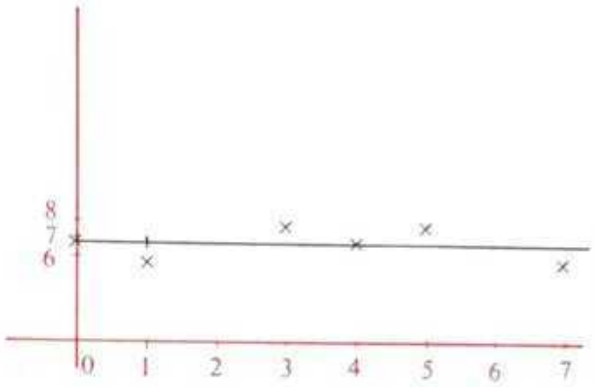
x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
0	7	−3	0	0
1	6	−2	−1	2
1	7	−2	0	0
3	8	0	1	0
4	7	1	0	0
5	8	2	1	2
7	6	4	−1	4
21	49			0

$$\bar{x} = \frac{21}{7} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{49}{7} = 7$$

$$\text{Cov}(x, y) = 0$$

d'où : $r = 0$.

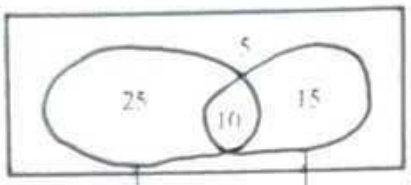


Les points sont presque tous sur la droite d'équation $y = 7$.

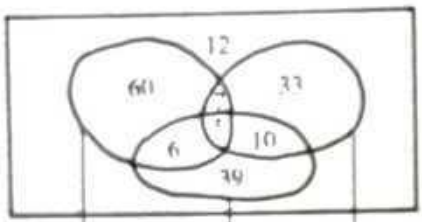
Résultats ou indications des exercices

1)

1)



2)



2)

Écrire les vingt nombres dans un diagramme cartésien et voir !

3)

$9 \cdot 10^4$; $9 \cdot 10^3 \cdot 5$

4)

26^3; $6 \cdot 26 \cdot 6$

5)

$3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

6)

$40 \cdot 39 \cdot 38$

8)

$61 \cdot 6 \cdot 21 \cdot 31$

11)

(Nombre de choix de 4 professeurs dans l'ensemble des 40) × (nombre de choix des 3 élèves dans l'ensemble des 500)

12)

$C_n^2 - n = 20 \quad n = 8$

13)

C_{p+4}^p

14)

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$$

et : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

16)

$(1+1)^n$; $[1+(-1)]^n$.

18)

1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

3) $\Omega = \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ où $\mathcal{E} = \{M, A, T, H, E, I, Q, U\}$.

4) $\Omega = \{\{R, R\}, \{R, V\}, \{R, N\}, \{R, B\}, \{V, V\}, \{V, N\}, \{V, B\}, \{N, N\}, \{N, B\}\}$.

5) $\Omega = \{\{R, R\}, \{R, V\}, \{R, N\}, \{R, B\}, \{V, V\}, \{V, N\}, \{V, B\}, \{N, N\}, \{N, B\}, \{B, B\}\}$.

19)

1) *a*) $\frac{2}{A_{10}^5}$; $\frac{4}{A_{10}^5}$

b) $\frac{2}{C_{10}^5}$; $\frac{2 \times 2}{C_{10}^5}$.

20)

$$p = \frac{s}{t}$$

meilleure stratégie : miser le maximum 3 car $p = \frac{1}{3}$ pour chacun.

21)

$e_1 = 0{,}21$; $e_2 = 0{,}134$.

23)

En 84 : 0,221; en 85 : 0,164.

26)

Attention les classes n'ont pas la même amplitude.

27)

	Sassandra	Dimbokro
Moyenne	80,17	85
Étendue	272	161
Écart-moyen	62,195	53,33
Écart-type	77,52	60,13

30)

$\bar{x} \simeq 61\,100$; $\bar{y} = 2\,482\,000$.

Exercices

36. Dans un sac se trouvent douze enveloppes. Quatre d'entre elles sont vides, cinq renferment un billet de 500 francs, deux renferment un billet de 1 000 francs et la dernière contient un billet de 5 000 francs.
On tire au hasard simultanément deux enveloppes du sac et on note s la somme totale d'argent contenue dans les deux enveloppes tirées.
Donner toutes les valeurs possibles de s et déterminer, pour chacune de ces valeurs, le nombre de tirages qui donne cette somme.

37. Un groupe de n personnes participe à un vote pour lequel chaque personne doit voter soit « oui » soit « non », soit « abstention ».

1) Déterminer, en fonction de n, le nombre de résultats de votes possibles.

2) Calculer ce nombre lorsque $n = 5$.

3) De combien de personnes doit être constitué ce groupe si le nombre de résultats possibles est 6 561 (on décomposera 6 561 en produit de facteurs premiers).

38. On dispose de trois sacs notés S_1, S_2 et S_3. Le sac S_1 contient deux cubes oranges, trois cubes blancs et un cube vert. Le sac S_2 contient trois cubes oranges et deux cubes blancs. Le sac S_3 contient deux cubes blancs et trois cubes verts.
On tire un cube dans S_1 et on le remet dans S_2, puis on tire un cube dans S_2 et on le remet dans S_3, enfin on tire un cube dans S_3. On note pour chaque expérience, dans l'ordre, les couleurs des trois cubes ainsi tirés.

1) Donner la liste de tous les résultats ainsi possibles.

2) De combien de façons peut-on ainsi obtenir un orange, puis un blanc puis un vert?

3) De combien de façons peut-on obtenir la même couleur pour le 1er cube tiré (de S_1) et le 3e cube tiré (de S_3).

39. Chaque jour, pour préparer les repas, un cuisinier a le choix entre vingt menus : parmi ceux-ci dix menus comportent un fromage, huit comportent une pâtisserie et quatre comportent à la fois un fromage et une pâtisserie.
Quel est le nombre de menus :

a) avec un fromage et sans pâtisserie,

b) avec une pâtisserie mais sans fromage,

c) avec un fromage ou une pâtisserie (éventuellement les deux),

d) sans fromage ni pâtisserie.

40. Une jeune fille dispose de cinq corsages et de trois jupes.
Combien de tenues a-t-elle au choix?

41. Dans une famille, il y a quatre filles et trois garçons.

1) Le père décide d'aller faire des achats en ville et d'emmener trois de ses enfants.
De combien de façons distinctes peut-il faire son choix s'il veut être accompagné.

a) de deux filles et d'un garçon?

b) d'au moins une fille?

2) Le père et les trois enfants qui l'accompagnent prennent l'autobus. Dans cet autobus il reste neuf places assises libres. De combien de façons distinctes le père et ses trois enfants peuvent-ils prendre place?

(Probatoire 80.)

42. Un groupe de n voyageurs décident de prendre tous un même taxi-brousse qui a quinze places disponibles.

1) Pour quelles valeurs de n le voyage est-il possible? (chaque personne étant assise!)

2) Cette condition étant vérifiée, de combien de façons distinctes ces n voyageurs peuvent-ils prendre place dans le taxi-brousse?
Applications numériques :

a) $n = 10$ *b*) $n = 15$.

43. Pour un match de football, un sélectionneur peut choisir son équipe parmi n personnes.
Parmi ces n joueurs, trois (Koffi, Konan et Kouakou) ne peuvent être sélectionnés que pour être gardien de but; tandis que chacun des $n - 3$ autres peut être capitaine ou simple joueur.
Le sélectionneur doit choisir neuf joueurs, un gardien de but et un capitaine.

1) Quelle condition doit vérifier l'entier naturel n pour que la sélection soit possible?

2) Une fois le gardien de but choisi, le sélectionneur a-t-il plus de choix, s'il choisit :

a) les neuf joueurs d'abord puis le capitaine

b) le capitaine d'abord puis les neuf joueurs

ou *c*) les dix hommes « de terrain » parmi lesquels il choisira ensuite le capitaine?

44. Une enveloppe contient huit cartes : l'une porte le numéro 0, deux portent le numéro 1, deux portent le numéro 2, et trois portent le numéro 3.
On extrait au hasard deux cartes de l'enveloppe et on note la somme s des numéros marqués sur les deux cartes extraites.
Déterminer toutes les valeurs possibles de s.
Déterminer le nombre total de tirages possibles.
Déterminer pour chaque valeur prise par s, la probabilité d'obtenir cette valeur.

45. Dans un sac se trouvent quatre pièces de 10 francs, trois pièces de 25 francs et une pièce de 50 francs.

1) On tire au hasard simultanément deux pièces du sac.

a) Quel est le nombre de tirages possibles?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux pièces de même valeur?

2) On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, trois pièces de ce sac.

a) Quel est le nombre de tirages possibles?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement la somme de 85 francs?

c) Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une pièce de 10 francs?

46. 1) Pour préparer leur réunion au sommet, cinq chefs d'état décident de se rencontrer deux par deux (réunions bilatérales).
Combien doit-il y avoir de telles réunions préparatoires?

2) Pour cette réunion au sommet, les organisateurs disposent cinq sièges, à égale distance autour d'une table ronde.
De combien de façons différentes les cinq chefs d'état peuvent-ils occuper ces sièges?

3) Parmi les cinq chefs d'état on doit désigner un président de séance, un secrétaire et un rapporteur pour constituer le bureau de la réunion.
Combien y-a-t-il de bureaux possibles?
Le bureau étant choisi, les cinq chefs d'état vont choisir, au hasard, leurs sièges.
Quelle est la probabilité pour que :

a) le secrétaire soit à gauche du président?

b) le rapporteur soit à droite du président et le secrétaire à sa gauche?

c) le secrétaire et le rapporteur soient de chaque côté du président?

47. Dans une salle où un défaut d'éclairage ne permet pas de distinguer les couleurs, se trouve une caisse qui contient, pêle-mêle, dix cubes oranges, vingt cubes blancs et cinq cubes verts tous de même taille.
Quelle est la probabilité de pouvoir faire «le drapeau de Côte d'Ivoire».

a) En prenant simultanément trois cubes?

b) En prenant simultanément 4 cubes?

Quelle est la probabilité en prenant trois cubes l'un après l'autre d'obtenir, dans cet ordre, le drapeau?

48. Aminata revient du marché avec deux ananas, six mangues et cinq oranges. Elle veut offrir à son amie Fatou un panier de cinq fruits choisis parmi ceux qu'elle vient d'acheter.

Quelle est la probabilité pour que Fatou reçoive un panier contenant :

a) aucune mangue?

b) uniquement des mangues?

c) deux mangues à côté d'autres fruits?

d) au moins une mangue?

49. Huit filles et six garçons se présentent à un concours. Seuls les trois premiers sont reçus, mais on ne publie que leurs noms, sans indiquer qui a le plus de points.

1) Combien y-a-t-il de groupes possibles constitués par les trois reçus?

2) Quelle est la probabilité pour que les reçus soient tous des garçons?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un seul garçon soit reçu?

4) Quelle est la probabilité pour que le troisième reçu soit un garçon?

50. Un test de mathématiques comporte trois questions indépendantes. Chacune des questions est suivie de propositions de réponses parmi lesquelles figure la bonne.
Un tel test est appelé QCM : questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des deux premières questions on propose deux réponses, pour la troisième on en propose trois.

A) Le correcteur note de la façon suivante :

• Pour les deux premières questions : cinq points pour la bonne réponse, sinon zéro.

• Pour la troisième question : dix points pour la bonne réponse, sinon zéro.

Un élève n'ayant jamais travaillé ses mathématiques, répond à chaque question au hasard (une seule réponse à chaque question).

1) Quelles sont les valeurs possibles pour la note finale?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il ait cinq points?

3) Quelle est la probabilité pour qu'il ait 10 sur 20?

B) Pour éviter de récompenser un élève paresseux, le correcteur change le barème et avertit que :

• Pour les deux premières questions, il donnera encore cinq points si la réponse est juste mais il enlèvera cinq points si la réponse est fausse.

• Pour la troisième question, il donnera encore dix points si la réponse est juste mais il enlèvera dix points si la réponse est fausse.

• Pour chaque question sans réponse, l'élève aura zéro point.
Quelle est la probabilité pour l'élève paresseux (qui répond au hasard) :

1) d'avoir cinq points après avoir répondu à la première question?

2) d'avoir cinq points après avoir répondu aux deux premières questions?

3) d'avoir cinq points après avoir répondu aux trois questions?

4) d'avoir une note à ce test supérieure ou égale à zéro?

5) d'avoir une note strictement négative à ce test?

6) si la note strictement négative est prise en compte sur la moyenne du semestre, a-t-il intérêt à répondre au hasard ou à ne rien répondre?

51. On dispose de quatre stylos et de quatre capuchons tels que chacun de ces capuchons ne s'adapte qu'à un seul de ces stylos. Dans la suite, on s'intéresse aux couples formés d'un capuchon et d'un stylo dans cet ordre; si le capuchon s'adapte au stylo, on dit que le couple est assorti.

1) De combien de façons peut-on former quatre couples (assortis ou non) avec les quatre capuchons et les quatre stylos?

2) De combien de façons peut-on former quatre couples dont :

a) un seul soit assorti?

b) deux seulement soient assortis?

c) trois seulement soient assortis?

c) aucun ne soit assorti?

(Probatoire 83)

52. Une entreprise qui exploite un parc de taxis a relevé pour cent d'entre eux les distances parcourues au moment de leur vente.
Cette étude donne le résultat suivant :

Classe C_i	Distance parcourue d (milliers de km)	Nombre de Taxis n_i
C_1	$77{,}5 \leqslant d < 82{,}5$	4
C_2	$82{,}5 \leqslant d < 87{,}5$	10
C_3	$87{,}5 \leqslant d < 92{,}5$	14
C_4	$92{,}5 \leqslant d < 97{,}5$	17
C_5	$97{,}5 \leqslant d < 102{,}5$	25
C_6	$102{,}5 \leqslant d < 107{,}5$	16
C_7	$107{,}5 \leqslant d < 112{,}5$	7
C_8	$112{,}5 \leqslant d < 117{,}5$	7

1) *a*) Quels sont la population et le caractère étudiés?

b) Tracer un histogramme représentant cette série statistique.

c) Trouver la classe modale de cette série statistique.

2) Soit $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Pour tout i de I, on désigne par x_i le centre de la classe C_i et par n_i son effectif.
Calculer la moyenne $\bar{x}$ et la variance V de la série statistique (x_i, n_i).

3) On choisit 9 comme valeur approchée de l'écart-type σ de la série statistique (x_i, n_i).
Trouver graphiquement le nombre de taxis ayant parcouru une distance (en milliers de km) comprise entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$.

(Probatoire 84)

53. On a relevé le prix d'un article dans 200 magasins. Voici les résultats :

Prise de l'article (en CFA)	Nombre de magasins
65 000	10
65 500	20
66 000	...
66 500	12
67 000	14
67 500	30
68 000	20
68 500	50
69 000	22
69 500	6

1) Compléter le tableau ci-dessus.

2) *a*) Calculer le prix moyen $\bar{P}$ de l'article.

b) Déterminer le mode et la médiane de cette série.

c) Comparer ces trois nombres.

3) *a*) Calculer l'écart-type σ de la distribution.

b) Combien de magasins vendent-ils l'article à un prix compris entre $\bar{p} - \sigma$ et $\bar{p} + \sigma$?

54. Au terme d'un concours de pêche, les 250 poissons capturés ont été mesurés et leurs tailles ont été regroupées dans le tableau suivant :

Classe de taille (en cm)	Effectifs
[10, 20[	16
[20, 30[	26
[30, 40[	36
[40, 50[	52
[50, 60[	38
[60, 70[	30
[70, 80[	20
[80, 90[	12
[90, 100[	10
[100, 110[	6
[110, 120[	...

1) Compléter le tableau ci-dessus.

2) Quelle est la classe modale de cette distribution?

3) Calculer la médiane, et la moyenne $\overline{T}$ de cette distribution.

4) Calculer l'écart-type σ de cette distribution.

5) Quel est le pourcentage de poissons dont la taille (en cm) appartient à l'intervalle $]\overline{T} - \sigma, \overline{T} + \sigma[$?

55. Une étude statistique portant sur le nombre de kilomètres parcourus par des automobiles fait apparaître la répartition suivante :

Classes en milliers de km	Effectifs
[0, 20[	10
[20, 40[	25
[40, 60[	35
[60, 80[	12
[80, 100[	12
[100, 120[	6

1) Construire l'histogramme des effectifs de cette série.

2) Déterminer la classe modale.

3) Calculer la moyenne $\overline{d}$ et la médiane de cette série statistique.

4) Calculer l'écart-type σ de cette série statistique.

5) Donner le pourcentage de véhicules ayant parcouru une distance (en milliers de km) appartenant à l'intervalle $]\overline{d} - \sigma, \overline{d} + \sigma[$.

56. En prévision d'un défilé de majorettes, le professeur de gymnastique décide d'entraîner 75 jeunes filles de son établissement.

Il commence par mesurer leur taille. Les résultats qu'il relève sont dans le tableau ci-dessous :
On regroupe ces élèves en classes de tailles, de 5 cm d'amplitude.

1) Tracer l'histogramme et le polygone des effectifs correspondants.

2) Tracer la courbe cumulative de la distribution des tailles.
Utiliser cette courbe pour :

a) déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane. Vérifier par le calcul.

b) déterminer graphiquement une valeur approchée du pourcentage des élèves qui ont une taille comprise entre 80 et 95 cm.

3) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de cette distribution.

4) Le professeur de gymnastique décide de choisir les élèves ayant une taille (en cm) comprise entre $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$. Quelle est la proportion des élèves qui défileront?

Taille (en cm)	Effectif
80	1
86	1
88	1
90	2
91	2
92	3
93	4
94	4
95	4
96	5
97	6
98	4
99	3
100	5
101	4
102	3
103	3
104	3
105	3
106	3
107	2
108	2
109	2
110	1
112	1
114	1
116	1
120	1

(Probatoire 84)

57. Les notes obtenues par six élèves, à une épreuve de mathématiques et à une épreuve de physique sont indiquées dans le tableau suivant :

Nom	AKA	BAMBA	COFFI
Maths x_i	4	3	6
Physique y_i	6	7	10
Nom	**DAGO**	**KASSI**	**N'DA**
Maths x_i	13	12	17
Physique y_i	15	11	19

1° Représenter graphiquement cette série par un nuage de points dans un repère orthonormé du plan.

2° Déterminer l'équation de chacune des droites de régression.

3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

4° *a*) Estimer la note de physique qu'aurait un élève ayant eu 10 en mathématiques.

b) Estimer la note de mathématiques qu'aurait un élève ayant eu 10 en physique.

58. Une enquête portant sur 12 entreprises donne pour chaque entreprise le montant annuel des frais de publicité et le chiffre d'affaire annuel (en millions de francs).
Pour une certaine année, le tableau ci-dessous récapitule ces données :

Entreprise	Chiffre d'affaires x_j	Frais de publicité y_i
1	53	4,6
2	42	3
3	40	3,2
4	39	2,5
5	44	3,8
6	38	2,4
7	45	3,5
8	24	1,8
9	42	3
10	40	3,2
11	35	2
12	38	3

1) Déterminer le point moyen des points (x_i, y_i).

2) Déterminer la droite de régression de x en y.

3) Déterminer la droite de régression de y en x.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

5) Représenter sur un même graphique le nuage de points et les deux droites de régression.

6) Estimer le chiffre d'affaires (en millions de francs) d'une entreprise ayant eu cette année-là 2,6 millions de francs de frais de publicité.

59. On a noté, pour un échantillon de 31 élèves d'un collège d'Adjamé, âgés de 11 à 12 ans le poids x en kg et la taille y en cm.
Les résultats des mesures ainsi que les calculs préliminaires sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Poids x	Taille y	x^2	y^2	xy
25,0	129,0	625,00	16 641,00	3 225,00
25,0	129,0	625,00	16 641,00	3 225,00
26,5	132,0	702,25	17 424,00	3 498,00
26,5	131,5	702,25	17 292,25	3 484,75
27,0	140,0	729,00	19 600,00	3 780,00
27,5	140,0	756,25	19 600,00	3 850,00
28,0	131,0	784,00	17 161,00	3 668,00
28,0	137,0	784,00	18 769,00	3 836,00
28,0	135,0	784,00	18 225,00	3 780,00
29,0	135,0	841,00	18 225,00	3 915,00
29,0	132,0	841,00	17 424,00	3 828,00
29,0	143,0	841,00	20 449,00	4 147,00
30,0	139,0	900,00	19 321,00	4 170,00
30,0	134,0	900,00	17 956,00	4 020,00
30,0	142,0	900,00	20 164,00	4 260,00
30,0	137,0	900,00	18 769,00	4 110,00
31,0	142,0	961,00	20 164,00	4 402,00
31,0	136,0	961,00	18 496,00	4 216,00
31,2	136,0	973,44	18 496,00	4 243,20
32,0	146,5	1 024,00	21 462,25	4 668,00
32,0	140,0	1 024,00	19 600,00	4 480,00
32,5	142,5	1 056,25	20 306,25	4 631,25
32,5	141,0	1 056,25	19 881,00	4 582,50
32,5	143,0	1 056,25	20 449,00	4 647,50
33,0	145,0	1 089,00	21 025,00	4 785,00
34,0	141,0	1 156,00	19 881,00	4 794,00
34,0	145,0	1 156,00	21 025,00	4 930,00
34,8	144,0	1 211,04	20 736,00	5 011,20
36,0	142,5	1 296,00	20 306,25	5 130,00
37,0	143,0	1 369,00	20 449,00	5 291,00
45,0	153,0	2 025,00	23 409,00	6 885,00
957,0	4 307,0	30 028,98	599 347,00	133 513,40

1) Quel est, en kg, le «poids médian» de cet échantillon?

2) Calculer, pour chacune des deux variables statistiques x et y, la moyenne arithmétique et la variance.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
Un ajustement linéaire semble-t-il acceptable?

4) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de x en y.

5) Quelle est l'estimation de la taille, en cm, d'un élève pesant 40 kg?

6) Deux élèves présentent une différence de poids de 4 kg. Quelle est l'estimation de la différence de leur taille en cm?

60. Pour des emplois analogues, cinq entreprises proposent les salaires notés x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5. On a vu se présenter pour ces emplois, respectivement le nombre de candidats y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

x_i	220 000	225 000	230 000
y_i	10	13	17

x_i	235 000	240 000
y_i	19	21

1) Représenter graphiquement cette série statistique par un nuage de points.

2) Rechercher une équation de la droite de régression de x en y. Représenter cette droite sur le graphique précédent.

3) Calculer le coefficient de corrélation. Un ajustement linéaire semble-t-il acceptable?

4) Estimer le nombre de candidats si on avait proposé un salaire de 250 000 F.

61. Dans une population composée de 200 ménages, on considère les deux caractères statistiques x et y dont les valeurs sont respectivement le nombre x_i d'enfants d'un ménage et le nombre y_j de pièces d'habitation d'un ménage.
Le tableau ci-dessous donne pour chaque couple (x_i, y_j) l'effectif n_{ij} observé dans cette population.

x \ y	1	2	3	4
0	2	0	1	0
1	2	1	0	0
2	1	3	6	0
3	4	5	6	6
4	15	15	12	3
5	10	11	19	3
6	7	18	10	13
7	3	9	7	8

1) Étudier séparément les deux séries statistiques du nombre d'enfants, du nombre de pièces d'habitation, en traçant les diagrammes en batons et en calculant les moyennes et les médianes de ces deux séries.

2) Représenter la série double par un diagramme par taches.

3) Déterminer une équation de la droite de régression de x en y, et représenter cette droite sur le graphique précédent.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Un ajustement linéaire semble-t-il acceptable pour estimer le nombre de pièces pour une famille ayant 8 enfants?

62. Le tableau ci-dessous donne les productions vivrières disponibles pour la consommation x_i et les pertes au stockage y_i (en tonnes) en 1978 en Côte d'Ivoire.

Produit	Production disponibles x_i (en T)	Pertes au stockage y_i (en T)
Paddy	378 000	76 000
Maïs-grains	208 000	40 000
Mil	39 200	4 500
Sorgho	26 900	3 200
Fonio	1 850	200
Iguane (tubercules)	1 184 000	400 000
Manioc (racines)	1 056 000	0
Taro (tubercules)	192 500	27 000
Plantain (régimes)	1 011 000	112 000
Patates (tubercules)	12 900	600
Arachides (coques)	42 300	2 500

1) Donner le nuage de points de cette série double.

2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Un ajustement linéaire est-il acceptable?

63. On considère la série statistique double dont les caractères x et y sont respectivement les entrées et sorties du port d'Abidjan de 1955 à 1979 données dans le tableau ci-dessous :

Années	Entrées en tonnes	Sorties en tonnes
1955	547 594	399 421
1960	757 112	1 009 597
1961	1 057 538	1 320 827
1962	1 070 360	1 432 744
1963	1 127 222	1 760 062
1964	1 327 320	2 059 381
1965	1 412 278	2 199 908
1966	1 683 241	2 389 970
1967	1 664 237	2 481 429
1968	1 968 612	2 776 397
1969	2 003 672	3 163 993
1970	2 335 100	2 745 591
1971	2 616 370	2 726 343
1972	2 965 027	2 959 987
1973	3 468 232	3 091 445
1974	3 558 094	3 039 296
1975	3 442 796	2 618 724
1976	4 262 161	3 432 189
1977	4 729 093	3 134 241
1978	5 480 176	2 850 630
1979	5 770 338	2 898 187

Y a-t-il une bonne corrélation linéaire entre ces deux variables?

Sujets de recherche

Recherche graphique de moyenne ou de nombres (G_1)

I Méthode pour trouver graphiquement la moyenne géométrique de deux nombres réels positifs.
On appelle **moyenne géométrique** de deux nombres réels positifs a et b, le nombre réel m tel que :

$$m = \sqrt{ab}.$$

• Soient (℮) le cercle de centre I et de rayon R, $[EE']$ un diamètre du cercle, M un point du plan tel que sa distance d au point I soit strictement supérieure à R et C un point de (℮) tel que la droite (MC) est tangente au cercle.

1) Montrer que : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{ME'} = \overrightarrow{MC}^2$.

2) On note A et B les points d'intersection d'une droite (D) passant par M avec le cercle (℮).
Montrer que si a, b et c sont les mesures des longueurs respectivement de $[MA]$, $[MB]$ et $[MC]$ alors on a :

$$ab = c^2.$$

3° En déduire une méthode graphique pour déterminer la moyenne géométrique de deux nombres positifs.

II Méthode pour trouver graphiquement deux nombres réels a et b strictement positifs $(a > b)$ connaissant leur différence d et leur moyenne géométrique m.
On propose le programme de construction suivant :

• Construire le cercle (℮) de diamètre $[AB]$ avec : $AB = d$.

• Placer le point T du plan tel que (BT) est tangente à (℮) en B et $BT = m$.

• Tracer le cercle (℮′) concentrique à (℮) passant par T.

Ce cercle coupe la droite (AB) en C et D.
Montrer que : $a = BD$ et $b = BC$.
Pourquoi a-t-on aussi $a = AC$ et $b = AD$?

III Méthode pour trouver graphiquement deux nombres réels a et b strictement positifs connaissant leur moyenne arithmétique r et leur moyenne géométrique m.
On propose le programme de construction suivant :

• Construire le cercle (℮) de diamètre $[AB]$ avec : $AB = 2r$.

• Placer le point T tel que (BT) est tangente à (℮) en B et $BT = m$.
Montrer que la droite (D) parallèle à (AB) et passant par T coupe toujours le cercle (℮) en deux points P et Q (éventuellement confondus).

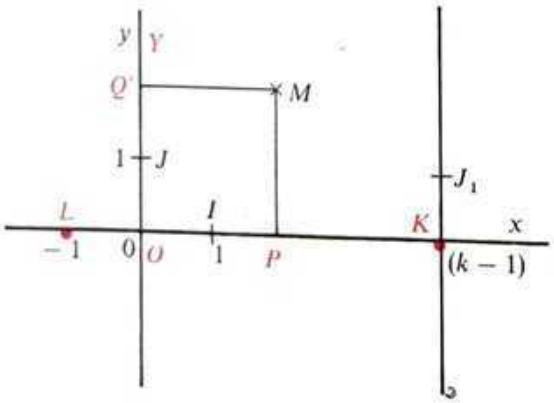
• Projeter orthogonalement Q en H sur (AB).
Montrer que BH et HA sont les nombres cherchés a et b.

Homothétie et changement de repère (G_3)

Nous avons vu, dans les sujets de recherche à la fin du tome d'analyse, une méthode en utilisant la courbe représentative d'une fonction f pour représenter une fonction g « associée », en changeant de repère.
Les problèmes de changements de repère par translation des axes ne présentent pas de grosses difficultés de lecture des nouvelles coordonnées. Il n'en est pas de même pour les changements de repère par changement de graduation du type dit « changement de pas », c'est-à-dire faisant intervenir des fonctions associées à f définies par $[x \mapsto kf(x)]$ ou $[x \mapsto f(kx)]$ où k est un nombre réel non nul. Nous allons voir maintenant une méthode pour lire les nouvelles coordonnées dans les anciennes graduations.

I Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, I et J les points définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
Rappelons le résultat vu en fin du tome d'analyse : Soient k un nombre réel non nul et f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et de courbe représentative (C_f) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in D_f \ g(x) = kf(x)$, est représentée par la courbe (C_f) dans le repère $\left(O; \vec{i}, \frac{1}{k}\vec{j}\right)$:

Un point M de coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour coordonnées x et Y dans le repère $\left(O; \vec{i}; \frac{1}{k}\vec{j}\right)$ avec $Y = ky$.



Considérons les deux points $L\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du plan (dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

1) Vérifier que O est le barycentre des points pondérés $(K, 1)$ et $(L, k-1)$.

2) Soit h l'homothétie de centre L et de rapport k, montrer que l'image de la droite (OJ) par l'homothétie h est la droite $D(K, \vec{j})$: passant par K et de vecteur directeur $\vec{j}$.

3) Soit J_1 le point défini par : $\overrightarrow{KJ_1} = \vec{j}$.
Placer l'antécédent J' de J_1 par l'homothétie h et vérifier que (O, I, J') est le nouveau repère dans lequel (C_f) représentera la fonction g.

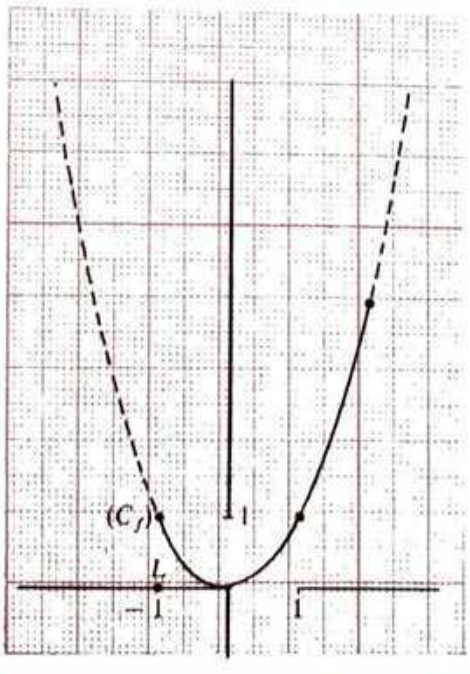
4) Le point M se projette orthogonalement en P et Q' respectivement sur les droites (OI) et (OJ).
Chercher l'image Q_1 de Q' par l'homothétie h.
Q_1 se projette orthogonalement sur (OJ) en Q.
Montrer que : **l'ordonnée de Q' dans le nouveau repère est égale à l'ordonnée de Q dans l'ancien repère.**
Ainsi, pour lire la nouvelle coordonnée en lisant dans l'ancienne graduation, il faut :

- Placer le point $L\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et tracer la droite $D(K, \vec{j})$ d'équation : $x = k - 1$.
- Placer Q', projeté orthogonal de M sur (OJ).
- Déterminer Q_1, image de Q' dans l'homothétie h de centre L et de rapport k.
- Lire l'ordonnée de Q_1 dans l'ancienne graduation, c'est l'ordonnée de M dans la nouvelle graduation.

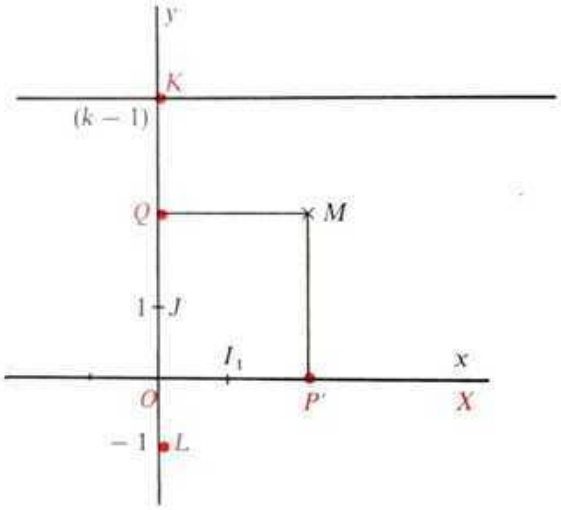
Remarque.
Pour des commodités de construction on peut donner une autre valeur de l'abscisse L mais il faut calculer l'abscisse de K pour que O soit le barycentre de $(K, 1)$ et $(L, k - 1)$.

5) Donner la méthode pour placer le point M connaissant ses coordonnées dans le nouveau repère.

6) Soit la fonction $f : [-1; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$
représentée par $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la fonction :
$g : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2f(x)$.
Trouver graphiquement l'image réciproque de $[3; 5]$ par la fonction g.



II Étudions maintenant le cas du «changement de pas» sur l'axe des abscisses.
Rappelons le résultat : Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, k un nombre réel non nul et g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $[x \longmapsto f(kx)]$ d'ensemble de définition $\{x \in \mathbb{R},\ kx \in D_f\}$.
g est représentée par $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O; k\vec{i}, \vec{j})$.
Un point M de coordonnées x et y dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour coordonnées X et y dans le repère $(O, k\vec{i}, \vec{j})$ avec $X = \dfrac{x}{k}$.



1) On considère dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $L\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{LK} = k\overrightarrow{LO}$.

2) Soit h l'homothétie de centre L et de rapport k, montrer que l'image de la droite (OI) par l'homothétie h est la droite $D(K, \vec{i})$.

3) Déterminer l'image I_1 de I par cette homothétie.
Soit I' le point défini par $\overrightarrow{OI'} = \overrightarrow{KI_1}$.
Montrer que le repère (O, I', J) est le nouveau repère dans lequel C_f représentera la fonction g.

4) Soient P', P_1 et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sue (OI), (KI_1) et (OJ). Construire l'antécédent P de P_1 par l'homothétie g.
Montrer que **l'abscisse de P' dans le nouveau repère est égale à l'abscisse de P dans l'ancien repère.**

5) **Donner une méthode pratique pour lire la nouvelle abscisse dans l'ancienne graduation.**

6) *a*) Donner une méthode pratique pour placer le point M connaissant ses coordonnées dans le nouveau repère.

b) Soit la fonction $g : \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{12}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$$

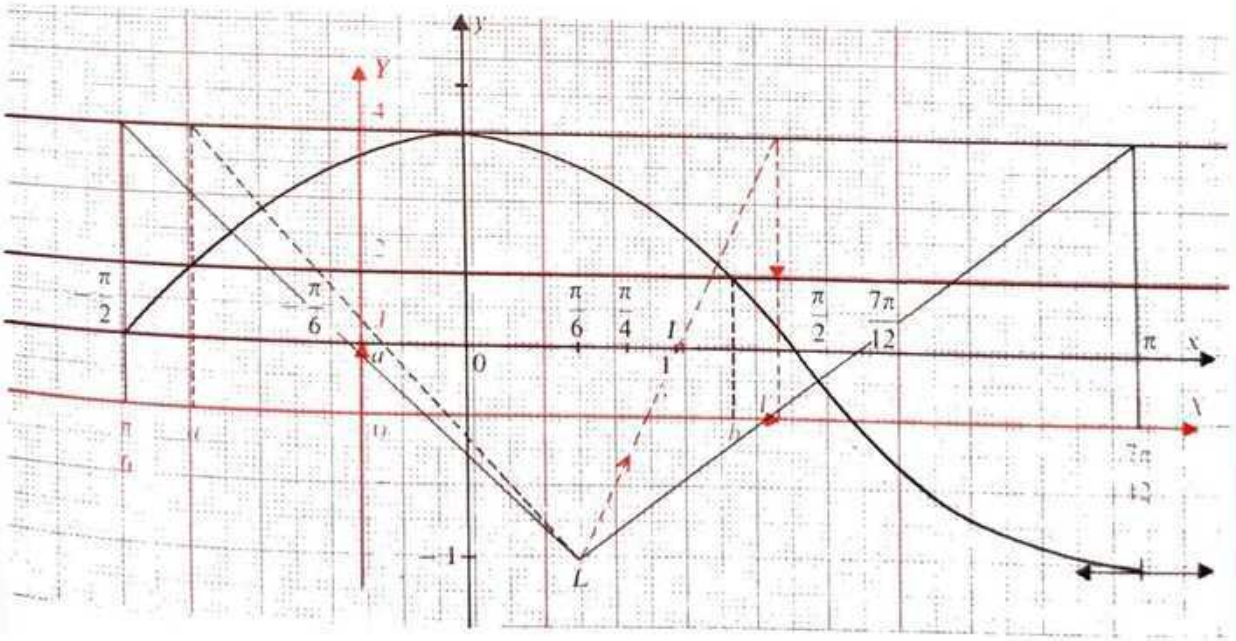
On veut utiliser la représentation (C_f) de la fonction f définie par : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \cos x.$$

Déterminer la restriction de f dont la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représentera la fonction g dans un repère $(O', \vec{i}', \vec{j}')$.
Construire la partie correspondante de (C_f).
Déterminer la nouvelle origine O', le vecteur $\vec{j}'$ et graduer la nouvelle droite des ordonnées.

Construire la droite $D(K, \vec{i})$ et montrer que le choix des coordonnées $\frac{\pi}{6}$ et -1, dans l'ancien repère, de L permet la lecture des nouvelles abscisses dans l'ancien repère $(O; \vec{i})$.
Résoudre graphiquement l'équation :

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{12}\right]; \quad g(x) = 2.$$



III Ainsi dans certains problèmes ne faisant intervenir qu'une seule fonction associée aux fonctions $[x \longmapsto x^2]$ ou $\left[x \longmapsto \frac{1}{x}\right]$ ou $[x \longmapsto \sin x]$ on pourrait se dispenser d'étudier et de représenter ces fonctions.

Il suffirait de disposer d'une parabole représentant $[x \longmapsto x^2]$, d'une hyperbole représentant $\left[x \longmapsto \frac{1}{x}\right]$, et d'une sinusoïde représentant $[x \longmapsto \sin x]$ et de papier calque millimétré.
Après une étude de la restriction on décalquerait la partie de la courbe convenable sur deux feuilles de papier calque. L'une servirait à lire les nouvelles ordonnées et l'autre les nouvelles abscisses.
Soit la fonction $g : [-1; \longrightarrow [\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x+1}{1-x}.$$

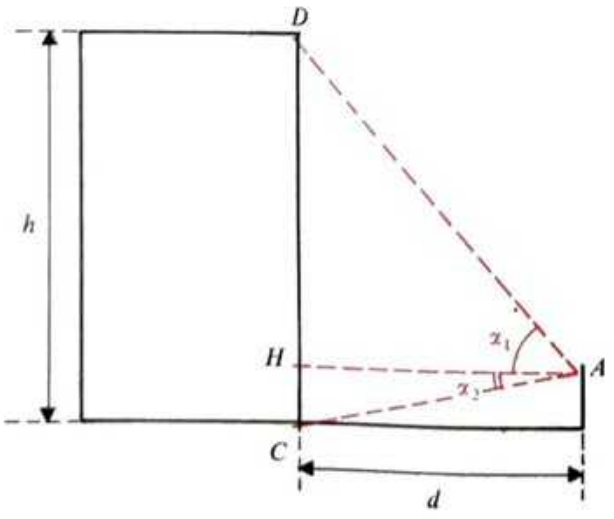
Résoudre graphiquement :

$$x \in D_g; \quad \begin{cases} g(x) \leqslant 3 \\ g(x) > 2 \end{cases}$$

Puis chercher l'image de $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ par la fonction g.

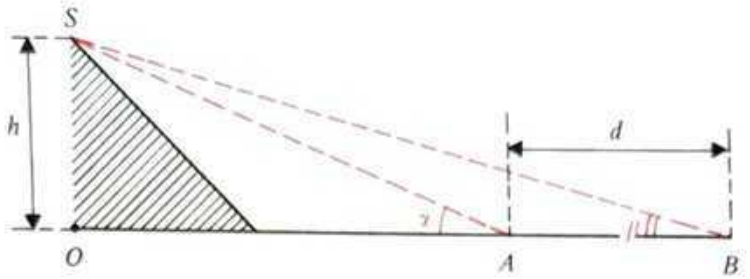
Problèmes pratiques du géomètre (G_3)

a) Un problème classique : Comment mesurer la hauteur h d'un immeuble.
Connaissant la distance d du point A à l'immeuble. Il suffit de mesurer les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{HAD}$.
C désignant le bas de l'immeuble et D le sommet.
(AH) étant une droite « horizontale ». On note α_1 et α_2 les mesures respectives des angles $\widehat{HAD}$ et $\widehat{HAC}$.
Calculer h en fonction de d, α_1 et α_2.



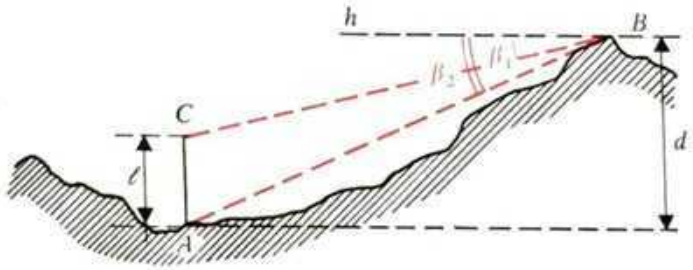
b) Le problème est plus compliqué pour mesurer la hauteur d'un sommet S non situé à la « verticale » du pied de l'immeuble (ou pyramide ou colline).

Montrer que la connaissance de la distance d de A à B, des mesures α et β respectives des angles $\widehat{OAS}$ et $\widehat{OBS}$ permet de trouver la hauteur h du sommet S par rapport à l'horizontale (OA) en calculant h en fonction de d, α et β.



c) Un autre problème classique : calculer une distance en terrain accidenté.

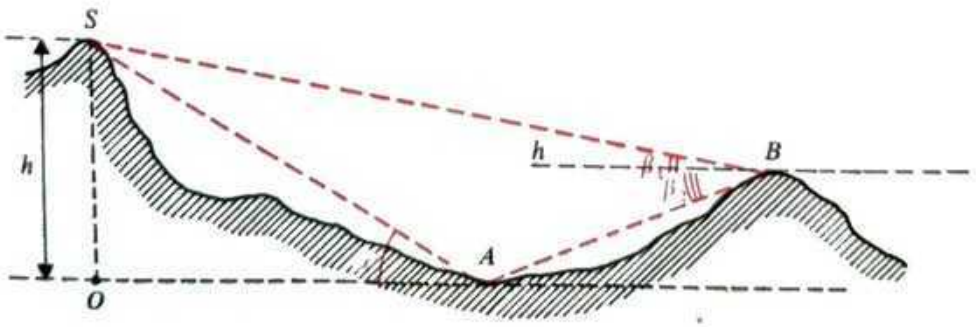
On utilise un piquet $[AC]$ de longueur ℓ connue. On mesure les angles $\widehat{ABh}$ et $\widehat{CBh}$ où (Bh) est horizontale.



• Si β_1 et β_2 sont les mesures respectives des angles $\widehat{CBh}$ et $\widehat{ABh}$ calculer la longueur AB en fonction de ℓ, β_1 et β_2.

• Calculer la « dénivellation » d, c'est-à-dire la différence d'altitude entre A et B en fonction de ℓ, β_1 et β_2.

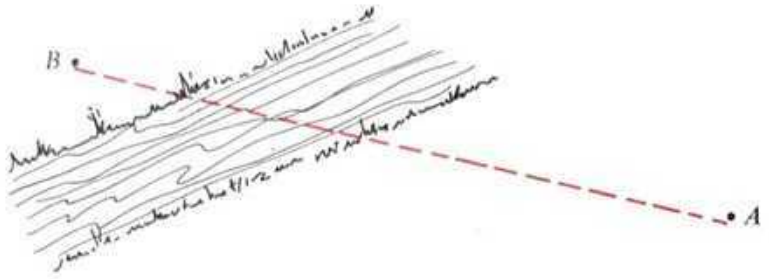
d) Un problème qui semble plus difficile pour le géomètre ne disposant pas d'un terrain plat pour résoudre le problème *b*).



On calcule la longueur AB par la méthode du *c*). On mesure les angles $\widehat{OAS}$, $\widehat{ABh}$ et $\widehat{SBh}$ que forment respectivement les droites (AS), (AB) et (BS) avec l'« horizontale ».

On note α, β_1 et β_2 les mesures respectives des angles $\widehat{OAS}$, $\widehat{SBh}$ et $\widehat{ABh}$. Calculer h en fonction de AB, α, β_1 et β_2.

e) Mesure d'une distance à un point inaccessible.

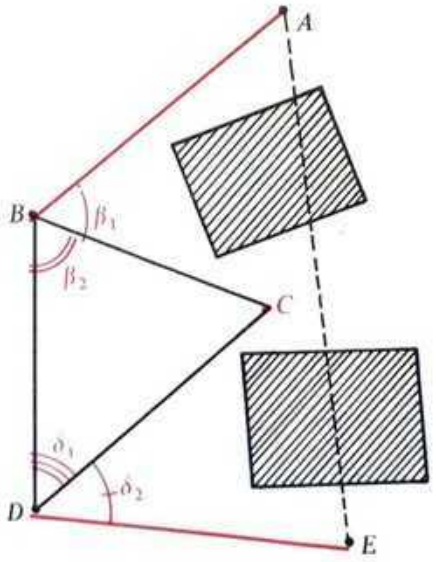


• Imaginez un moyen pour mesurer AB sans traverser la rivière (infranchissable) quand l'observateur est du côté de A et quand il dispose de moyens pour mesurer les longueurs et les angles.

• Mais... le voyage sur la piste a détérioré le matériel de visée, à l'aide de piquets judicieusement placés, d'une chaîne d'arpenteur (instrument du géomètre servant à mesurer des distances au sol) et des propriétés de l'homothétie, vous allez peut être pouvoir calculer AB. (On pourra matérialiser un parallélogramme avec des piquets pour obtenir des parallèles.)

f) Nettement plus difficile : aligner trois piquets avec deux autres qu'on ne peut pas voir.

Le géomètre doit trouver l'emplacement C du poteau de ligne électrique dans l'alignement des poteaux A et E. Le point C devrait être situé entre deux bâtiments cachant les points A et E.



On place deux piquets fixes B et D et on déplace le piquet C. Le géomètre prétend que la connaissance des longueurs AB, BC et DE et des mesures β_1, β_2, δ_1 et δ_2 respectivement des angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBD}$, $\widehat{BDC}$ et $\widehat{CDE}$, lui permettent de vérifier si le point C est bien placé. Justifier son affirmation en :

• traçant les droites (AB) et (DE) pour considérer le triangle AEF où F est le point d'intersection de ces deux droites (dans la pratique (AB) et (DE) sont sécantes)

- montrant que l'on peut calculer AE, AC et CE en fonction des mesures données
- donnant une propriété sur les distances qui caractérise l'alignement des points A, C et E.

Alors, à l'aide d'essais successifs, on pourra placer le poteau C. Le géomètre prétend pouvoir vérifier si le point C est en plus au milieu du segment $[AE]$. A-t-il raison? (justifier). Avec un ordinateur on pourra faire intervenir les sept paramètres fixés par le géomètre et lui dire où placer le poteau C, grâce à des tests successifs que fera l'ordinateur!

Droite et cercle d'Euler (G_3)

Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{P}$ et O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC (isobarycentre des points A, B et C). On désigne par A_1, B_1 et C_1 les pieds des hauteurs du triangle ABC relatives respectivement aux sommets A, B et C, H l'orthocentre du triangle ABC et A_2 le point d'intersection de la hauteur (AA_1) et du cercle $(\mathcal{C})$.

1) Droite d'Euler :

a) Montrer que les points A', B' et C' sont les homothétiques respectifs des points A, B et C par l'homothétie h_1 de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

b) Déterminer l'image Ω du point O par h_1.
Déterminer l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par h_1. Qu'est Ω pour $(\mathcal{C}')$?
Vérifier que A' appartient à $(\mathcal{C}')$. En est-il de même de B' et C'?
Préciser, en utilisant l'image d'une hauteur, l'image par h_1 du point H.

c) Démontrer que les quatre points O, G, Ω et H sont alignés, et que, ayant munie cette droite, appelée **droite d'Euler,** d'un repère, on a : $\overline{\frac{G\Omega}{GO}} = -\overline{\frac{H\Omega}{HO}}$.

d) Préciser l'image du point O et l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par l'homothétie h_2 de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) Points du cercle d'Euler

a) On note D le point tel que la droite (OA) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en A et D. Montrer que $BHCD$ est un parallélogramme.
Quelle est la nature du triangle DHA_2? (Utiliser le triangle ADA_2.) En déduire que A_2 est le symétrique de H par rapport à la droite (BC). (Utiliser le point A'.)
Énoncer le théorème établi.

b) En déduire que A_1 appartient à $(\mathcal{C}')$.
$(\mathcal{C}')$ est appelé le **cercle d'Euler** du triangle ABC.
Énoncer le théorème établi ici sur les pieds des hauteurs d'un triangle.

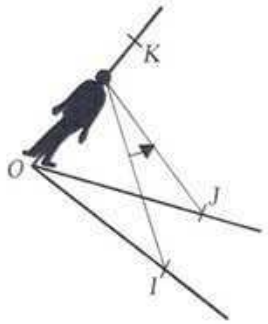
c) Soient A'', B'' et C'' les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.
Vérifier que A'' appartient à $(\mathcal{C}')$.

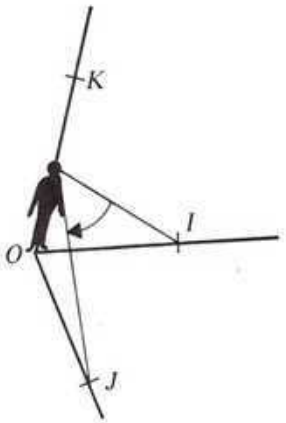
Énoncer de façon générale le théorème établi ici sur les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets du triangle.
Ainsi dans un triangle, la droite d'Euler contient le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle d'Euler; le cercle d'Euler passe par les trois milieux des côtés, les trois pieds des hauteurs et les trois milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets.

Produit vectoriel (G_5)

I Orientation de l'espace

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$, I, J et K les points définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.
Imaginons un observateur placé sur $[OK)$, les pieds en O qui regarde la demi-droite $[OI)$.



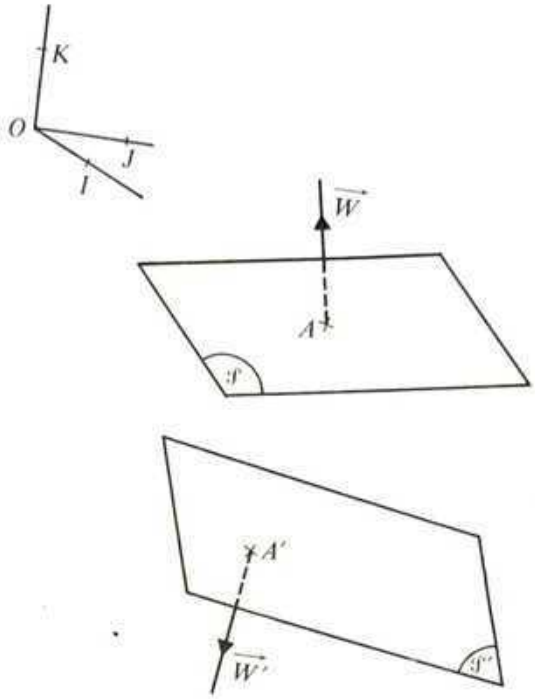


La demi-droite $[OJ)$ est soit sur sa gauche, soit sur sa droite. Ceci permet de partager l'ensemble des repères de l'espace en deux classes. Orienter l'espace, c'est choisir une de ces deux classes et convenir que les repères de cette classe sont directs tandis que ceux de l'autre sont indirects ou rétrogrades.
En général, on choisit pour repères directs ceux pour lesquels l'observateur voit $[OJ)$ sur sa gauche. Les règles du « tire-bouchon », du « bonhomme d'Ampère » ou « des trois doigts de la main droite » sont équivalentes à la règle ci-dessus.
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère direct, donner le « sens » des repères suivants : $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (où $O' \in \mathcal{E}$), $(O, \vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$, $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $(O, \vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$, $(O, \vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$, $(O, -\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(O, \vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$.
Une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathfrak{V}$ est positive ou directe si et seulement si, O étant un point de $\mathcal{E}$, le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est direct; et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est négative ou indirecte si et seulement si $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un repère indirect.
Justifier les règles suivantes :

- On change d'orientation si on permute deux vecteurs de la base.
- On change d'orientation si on remplace un vecteur par son opposé.
- On conserve l'orientation dans une permutation circulaire des vecteurs (c'est-à-dire remplacer $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ ou $(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$).
- Quels que soient les nombres réels strictement positifs a, b et c, les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(a\vec{e}_1, b\vec{e}_2, c\vec{e}_3)$ ont même orientation.

L'espace $\mathcal{E}$ étant orienté par le repère (O, I, J, K), déterminer les orientations des

plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ compatibles avec celle de l'espace c'est-à-dire déterminer un repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ (respectivement $(A', \vec{u}', \vec{v}')$) du plan $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{P}'$) de façon que le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (respectivement $(A', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$) soit direct où $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont des vecteurs normaux respectifs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.



Plus généralement étant donné un vecteur $\vec{w}$ normal à $\mathcal{P}$ et unitaire, il existe une orientation unique de $\mathcal{P}$ telle que, si $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$ alors $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{P}$ est orienté par le vecteur normal $\vec{w}$. Ainsi si A et $\vec{u}$ sont fixes alors $\vec{v}$ est unique tel que $(A, \vec{u}, \vec{v})$ soit un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$ ainsi orienté.

II Produit vectoriel :

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Associons au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique nombre réel α de $]0, \pi[$ tel que α soit la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ où O est un point donné de $\mathcal{E}$, A et B sont définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

Soit C le point défini par $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$. Pourquoi C appartient-il au plan (OAB) et $OACB$ est-il un parallélogramme?
Vérifier que l'aire de ce parallélogramme est $(OA \,.\, OB \,.\, \sin \alpha)$.
On note a ce nombre réel. Pourquoi est-il strictement positif?
Soit (D) la droite orthogonale au plan (OAB) en O. Vérifier qu'il n'existe qu'un point E de (D) tel que $OE = a$ et $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ soit un repère direct de $\mathcal{E}$.
On note $\vec{w} = \overrightarrow{OE}$. Vérifier que $\vec{w}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et non du point O utilisé pour placer le point E.
On appelle **produit vectoriel** d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (lire $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$) défini par :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

• si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors O étant un point de $\mathcal{E}$, les points A et B étant définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, les vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est égal à $\overrightarrow{OE}$ où :

* $\overrightarrow{OE}$ est normal au plan (OAB)
* (O, A, B, E) est un repère direct de $\mathcal{E}$

$OE = OA \,.\, OB \,.\, \sin \widehat{AOB}$.

Autrement dit, $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe de $\mathcal{W}$:

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|.$$

La multiplication vectorielle est l'application qui à un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{W}^2$ associe le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de $\mathcal{W}$.

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

a) Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) Montrer que $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$. On dit que la multiplication vectorielle est antisymétrique.

c) Montrer que, pour tout nombre réel k, $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (séparer les cas $k > 0$, $k = 0$, $k < 0$).
On admet ici la propriété :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathcal{W}_3 \quad \vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2.$$

d) Déterminer, pour $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{v}$ trois vecteurs et k un nombre réel, $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge (k\vec{v})$.

e) Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe, déterminer les vecteurs : $\vec{i} \wedge \vec{j}, \vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i}, \vec{i} \wedge \vec{i}, \vec{j} \wedge \vec{j}, \vec{k} \wedge \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{k}, \left(\frac{3}{2}\vec{i} + 4\vec{j}\right) \wedge (\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})$.

f) Soient O, A et B trois points non alignés.
Déterminer l'ensemble $\{ M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM} \}$.
Démontrer que pour tout point P de la droite (AB), on a :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

3) Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

a) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs définis par $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.
Démontrer que le produit vectoriel $\vec{w}$ de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur $D_1\vec{i} + D_2\vec{j} + D_3\vec{k}$ où $D_1 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

b) Soit O un point de $\mathcal{E}$ et A, B et C les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(1, 2, 3)$, $(3, 0, 2)$ et $(3, \sqrt{3} + 2, 0)$.
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
Déterminer $\sin \widehat{BAC}$ et $\cos \widehat{BAC}$.

c) Montrer que l'aire d'un triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. En déduire celle du triangle ABC de la question précédente.

4) Soient A, B et C trois points de l'espace $\mathcal{E}$ non alignés et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

a) Montrer que pour tout M de la droite (AB) on a : $CM \geqslant CH$.
Ainsi CH est la plus petite distance de C à un point de (AB), on dit que CH est la distance du point C à la droite (AB).

b) Montrer que $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{AB}$.

c) Prouver que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|$.

d) Montrer que $CH = \dfrac{AB}{\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\|}$.

e) $\mathcal{E}$ étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.
Déterminer la distance du point C à la droite (AB).

5) *a*) Soient (D) une droite de vecteur directeur $\vec{F}$ et O un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à (D). Montrer que, pour tout M de (D) le vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est constant.

b) Étant donnée une force $\vec{F}$ appliquée en un point A de l'espace, et un point O de $\mathcal{E}$, on appelle moment de la force $\vec{F}$ par rapport à O le vecteur, noté $\overrightarrow{M_0}$, égal à $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$. On note (D) la droite définie par A et $\vec{F}$ (on suppose $\vec{F}$ non nulle!), H le projeté orthogonal de O sur (D).
Montrer que : $\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}$.

c) On note d la distance de O à (D). Montrer que : $\|\overrightarrow{M_0}\| = \|\vec{F}\| \ . \ d$.

d) Si de plus le point O n'appartient pas à (D), on note $\vec{i}$ un vecteur directeur de (OA) et $\vec{j}$ un vecteur tel que $(A, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé du plan défini par O et (D). On décompose $\vec{F}$ en force utile : $F_u\vec{j}$ et force inutile $F_i\vec{i}$ par : $\vec{F} = F_i\vec{i} + F_u\vec{j}$.
Montrer que $\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_u$.

e) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{M_M} = \vec{0}$.

f) Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.
Montrer que : $\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_M} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.
En déduire que $\overrightarrow{OM} \ . \ \overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OM} \ . \ \overrightarrow{M_M}$.

Projections orthogonales (G_5)

I Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathfrak{W}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathfrak{W}$, $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base $(\vec{u})$ et $P_{\vec{v},\vec{w}}$ le plan vectoriel de base $(\vec{v}, \vec{w})$.

1) Montrer que si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ alors tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathfrak{W}$ s'écrit de manière unique sous la forme : $\vec{x}' + \vec{x}''$ avec $\vec{x}'$ appartenant à $D_{\vec{u}}$ et $\vec{x}''$ appartenant à $P_{\vec{v},\vec{w}}$.

2) Montrer que tout élément de $D_{\vec{u}}$ est orthogonal à tout élément de $P_{\vec{v},\vec{w}}$. On dit que la droite vectorielle $D_{\vec{u}}$ est orthogonale au plan vectoriel $P_{\vec{v},\vec{w}}$.

3) *a*) Soit π' l'application de $\mathfrak{W}$ dans $\mathfrak{W}$ telle que $\pi'(\vec{x}) = \vec{x}'$ avec les notations ci-dessus. Montrer que l'image de $\mathfrak{W}$ par π' est $D_{\vec{u}}$.
L'application π' est appelée **projection vectorielle orthogonale** sur $D_{\vec{u}}$.

b) Soit π'' l'application de $\mathfrak{W}$ dans $\mathfrak{W}$ telle que $\pi''(\vec{x}) = \vec{x}''$ avec les notations ci-dessus. Montrer que l'image de $\mathfrak{W}$ par π'' est $P_{\vec{v},\vec{w}}$.
L'application π'' est appelée **projection vectorielle orthogonale** sur $P_{\vec{v},\vec{w}}$.

c) Une application f de $\mathfrak{W}$ dans $\mathfrak{W}$ est dite **linéaire** si et seulement si :

$$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathfrak{W}^2 \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

et :

$$\forall \vec{x} \in \mathfrak{W} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}).$$

Montrer que π' et π'' sont des applications linéaires.

4) On munit $\mathfrak{W}$ d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée et on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathfrak{W}$.

a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathfrak{W}$ et que la droite vectorielle $D_{\vec{u}}$ est orthogonale au plan vectoriel $P_{\vec{v},\vec{w}}$.

b) Soient a, b et c trois nombres réels et $\vec{x}$ le vecteur de $\mathfrak{W}$ défini par $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Chercher les coordonnées A, B et C du vecteur $\vec{x}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, en fonction de a, b et c.

c) Soient π' et π'' les projections vectorielles orthogonales respectivement sur $D_{\vec{u}}$ et $P_{\vec{v},\vec{w}}$. Exprimer les coordonnées de $\pi'(\vec{x})$ et $\pi''(\vec{x})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de a, b et c.

II Soient O, O' et O'' trois points de $\mathcal{E}$.

1) Montrer que l'on définit une application p' de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ par : $p'(O) = O'$ et, pour tout M de $\mathcal{E}$, $p'(M) = M'$ tel que :

$$\overrightarrow{O'M'} = \pi'(\overrightarrow{OM})$$

et une application p'' de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ par $p''(O) = O''$ et, pour tout M de $\mathcal{E}$, $p''(M) = M''$ tel que :

$$\overrightarrow{O''M''} = \pi''(\overrightarrow{OM}).$$

2) Démontrer qu'il existe un unique point I tel que :

$$p'(I) = I \quad \text{et} \quad p''(I) = I.$$

3) On note (D) la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{F}$ le plan passant par I et de plan vectoriel associé $P_{\vec{v},\vec{w}}$.
Montrer que p' et p'' sont les projections orthogonales respectives sur (D) et sur $\mathcal{F}$.

4) Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, on considère $O'\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $O''\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ de triplet de coordonnées (x, y, z).
Déterminer les coordonnées de $p'(M)$ et $p''(M)$.

III 1) Montrer que : $\pi' \circ \pi' = \pi'$.

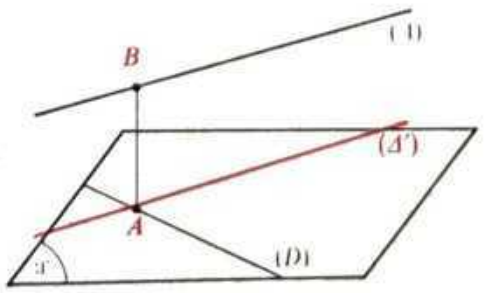
2) Montrer que : $\forall \vec{z} \in \mathcal{W} \quad \vec{z} \perp \vec{u} \Longrightarrow \pi'(\vec{z}) = \vec{0}$.

3) En déduire que : $p' \circ p' = p'$.

4) De même montrer que $\pi'' \circ \pi'' = \pi''$ et $p'' \circ p'' = p''$.

Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.
Distance de deux droites non coplanaires (G_5)

1) Soient (D) et (Δ) deux droites non coplanaires, montrer que la droite perpendiculaire commune à ces droites est orthogonale à un plan $\mathcal{F}$ tel que (D) est parallèle à $\mathcal{F}$ et (Δ) est parallèle à $\mathcal{F}$.



$$(D) \subset \mathcal{F} \quad (\Delta') \subset \mathcal{F}$$
$$(\Delta) \parallel \mathcal{F} \quad (D) \cap (\Delta') = \{A\} \quad B \in (\Delta)$$

2) Choisissons un plan $\mathcal{F}$ contenant une de ces deux droites ((D) par exemple) et tel que (Δ) soit parallèle à $\mathcal{F}$. Soit (Δ') le projeté orthogonal de (Δ) sur $\mathcal{F}$.

a) Montrer que (D) et (Δ') sont sécantes.
On note A le point d'intersection de (D) et (Δ') et B le point de (Δ) qui se projette orthogonalement en A sur $\mathcal{P}$.

b) Montrer que la droite (AB) est la perpendiculaire commune à (D) et à (Δ).

3) Dans l'exercice G5-53, on a montré l'unicité de cette droite. Montrer que, pour tout point M de (D) et pour tout point N de (Δ), on a :

$$MN \geqslant AB.$$

On dit que AB est la distance des droites (D) et (Δ).

4) Étudions le cas où les deux droites sont parallèles à un même plan de projection (H) ou (F).
Soient (D) et (Δ) les deux droites de représentations paramétriques respectives : $[t \longmapsto (3; 3t; t + 2)]$ et $[t \longmapsto (5; t; -t + 6)]$.
a) Quelles sont les positions relatives des droites (D), (Δ) et (AB) par rapport aux plans de projection?

b) Représenter les épures (d, d') et (δ, δ') des droites (D) et (Δ). On note (a, a') et (b, b') les épures respectives des points A et B. Placer dans l'ordre a', b', a et b.

c) Déterminer la distance des droites (D) et (Δ) (grâce à l'épure).

5) Soient (D) et (Δ) les deux droites de représentations paramétriques respectives : $[t \longmapsto (t - 3; -2t - 1; -2t)]$ et $[t \longmapsto (t - 5; -2t - 1; 4t + 6)]$.

a) Soit M un point de (D), montrer qu'il existe un point N appartenant au plan vertical contenant (Δ) tel que (MN) soit perpendiculaire à (D) et orthogonale à (Δ).
Quelle est la position relative de la droite (MN) par rapport aux plans de projection?

b) Tracer les épures respectives (d, d') et (δ, δ') de (D) et (Δ). Puis l'épure $(mn, m'n')$ d'une telle droite (MN).

c) Montrer que pour tout point M de (D) le segment $[m'n']$ a une longueur constante. En déduire la construction de l'épure $(ab, a'b')$ de la droite (AB) (d'abord $[a'b']$). Déterminer le plus court chemin des deux droites (D) et (Δ).

6) Soient (D) et (Δ) les deux droites de représentations paramétriques respectives : $[t \longmapsto (2 + t; 3t; 3t; 3t + 4)]$ et $\left[t \longmapsto \left(8 + t; 4 - t; \frac{1}{2}t + 1\right)\right]$ et d'épures (d, d') et (δ, δ'),

a) Soit M un point de (D) d'épure (m, m'). Tracer l'épure (δ_1, δ'_1) de la droite (Δ_1) parallèle à (Δ) passant par M. On note $\mathcal{P}$ le plan déterminé par les droites sécantes (D) et (Δ_1).

b) Déterminer la direction de (AB) en traçant l'épure (d_1, d'_1) de la droite (D_1) orthogonale à $\mathcal{P}$ en M.

c) Montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan $\mathcal{R}$ défini par les droites (D_1) et (D).

d) Déterminer l'épure du point B intersection de (Δ) et $\mathcal{R}$ puis celle de A. Calculer le plus court chemin des droites (D) et (Δ).

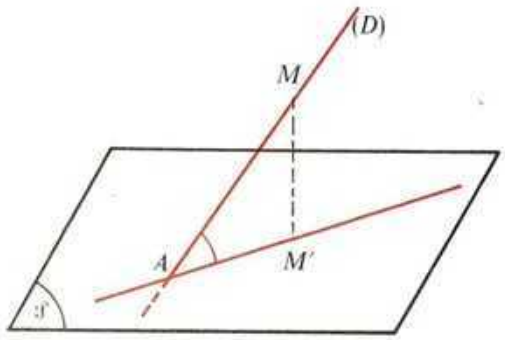
Lignes de plus grande pente (G_5)

Soient $\mathcal{P}$ un plan, (D) une droite sécante en A au plan $\mathcal{P}$ et non orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

1) Soient M et N deux points de (D) distincts de A, M' et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur $\mathcal{P}$.

a) Pourquoi a-t-on $M' \neq A$, $N' \neq A$ et $\widehat{MAM'} = \widehat{NAN'}$?

On appelle « **angle** » **de la droite (D) avec le plan $\mathcal{P}$,** l'angle $\widehat{MAM'}$ où M est un point quelconque de (D) distinct de A et M' le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.



$$(D) \cap \mathcal{P} = \{A\} \quad M \in (D) - \{A\}$$
$$M' \in \mathcal{P} \quad (MM') \perp \mathcal{P}$$

Remarque.

On ne parlera pas d'angle d'une droite (D) avec le plan $\mathcal{P}$ lorsque (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$. L'« angle » d'une droite avec un plan est un angle $\widehat{MAM'}$ aigu.

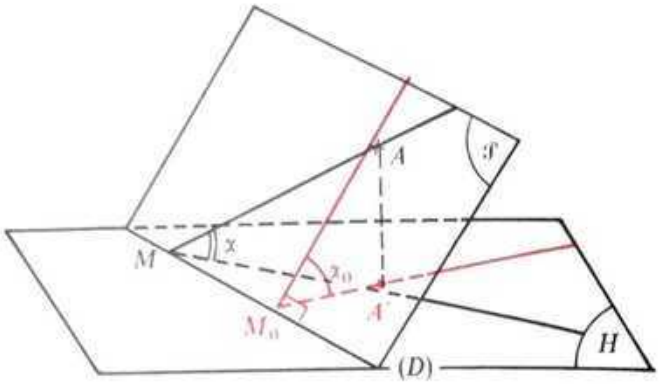
b) Calculer « l'angle » de la droite (D) de vecteur $\vec{u}$ avec le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ dans les deux cas suivants :

- $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$
- $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$

Soit α la mesure de l'« angle » de la droite (D) avec le plan $\mathcal{P}$ on appelle **pente de la droite (D) par rapport au plan** $\mathcal{P}$, le nombre réel tg α.

Quelle est la pente par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'une droite incluse dans $\mathcal{P}$? Montrer que deux droites parallèles et non orthogonales à un même plan $\mathcal{P}$ ont même pente par rapport à $\mathcal{P}$.

2) Soient $\mathcal{P}$ et (H) deux plans non perpendiculaires, nous allons étudier la pente des différentes droites du plan $\mathcal{P}$ par rapport au plan (H). On note p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.



$$\begin{array}{c} \mathcal{S} \cap (H) = (D) \\ A \in \mathcal{S} \quad A' = p(A) \\ M \in (D) \quad M_0 \in (D) \end{array}$$

Dans le cas où $\mathcal{S}$ est parallèle à (H) on dit que toutes les droites de $\mathcal{S}$ ont une pente nulle par rapport à (H).

Étudions le cas où $\mathcal{S}$ et (H) sont sécants suivant la droite (D).

Soit A un point de $\mathcal{S}$, n'appartenant pas à (D). On note A' l'image de A par p, M_0 le projeté orthogonal de A sur (D).

Montrer que pour tout point M de (D), la pente par rapport à (H) de la droite (AM) est inférieure ou égale à celle de la droite (AM_0).

On dit que la droite (AM_0) est une **ligne de plus grande pente** de $\mathcal{S}$ par rapport à (H).

Vérifier que par le point A il ne passe qu'une seule ligne de plus grande pente de $\mathcal{S}$ par rapport à (H).

3) Représenter l'épure de la ligne de plus grande pente (L) passant par le point A d'un plan $\mathcal{S}$ par rapport au plan horizontal (H) dans les cas suivants :

a) Soient $A\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\-1\\6\end{pmatrix}$, le plan $\mathcal{S}$ est défini par les points A, B et C.

b) A a pour coordonnées 3, 2 et 2 et le plan $\mathcal{S}$ a pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 4 = 0$.

Puisque toutes les lignes de plus grande pente de $\mathcal{S}$ par rapport à (H) sont parallèles, elles ont même pente tg α par rapport à (H); ce nombre tg α est appelé **la pente du plan $\mathcal{S}$ par rapport au plan (H).**

4) Recherche d'un plan de pente donnée par rapport à (H) et contenant une droite donnée (D) avec (D) parallèle à (H) :

a) Soient (D) parallèle au plan (H) et α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi tg α est fixée.

Déterminer un plan contenant (D) et de pente tg α par rapport à (H) (on utilisera un plan auxiliaire contenant une ligne de plus grande pente de $\mathcal{S}$ et son projeté orthogonal sur (H)). Combien a-t-on de tels plans $\mathcal{S}$?

b) Soit (D) une droite de représentation paramétrique :

$$[t \longmapsto (t + 2;\ 2t;\ 3)].$$

Tracer une épure de chacun des plans solutions du problème ci-dessus sachant que $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2}$.

5) Recherche d'un plan de pente donnée par rapport à (H) et contenant une droite sécante à (H) :

Soient A un point de (D) n'appartenant pas au plan (H), A_1 le projeté orthogonal de A sur (H), B un point de (H) et α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On veut tracer un plan $\mathcal{T}$ contenant la droite (AB) et de pente tg α par rapport à (H).

a) Montrer que l'ensemble des points M_0 de (H) tels que (AM_0) ait pour pente tg α par rapport à (H) est un cercle $(\mathcal{C})$ que l'on déterminera.

b) Montrer que l'intersection du plan $\mathcal{T}$ avec le plan (H) doit contenir B et être tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

c) Donner le nombre de plans $\mathcal{T}$ répondant à la question selon la position du point B.

d) Déterminer un programme de construction pour une solution.

e) Construire l'épure des plans cherchés s'ils existent dans chacun des cas suivants :

- Le point A a pour coordonnées 3,2 et 2 et le plan $\mathcal{T}$ doit contenir la droite (AB) avec B ayant pour coordonnées 1, -2 et 0, et le plan $\mathcal{T}$ a pour pente $\frac{1}{2}$ par rapport à (H).
- Le plan $\mathcal{T}$ doit contenir la droite (AC) avec le point C ayant pour coordonnées 1, -5 et 0 et le plan $\mathcal{T}$ a encore pour pente $\frac{1}{2}$ par rapport à (H).

Problèmes de coupe de solides (G_5)

Dans cette étude les mesures des longueurs sont exprimées en centimètres.

I Soient $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5, P, Q et R les points situés respectivement sur les segments $[AB]$, $[AD]$ et $[HG]$ tels que : $AP = 3$, $AQ = 2$ et $HR = 4$.

1) Représenter en perspective cavalière l'intersection $PQSRTU$ du plan (PQR) avec les faces du cube.

2) Sachant que A, B et C ont respectivement pour triplet de coordonnées (6; 0; 5), (1; 0; 5) et C(1, 5, 5) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$, tracer l'épure (*abcdefgh*, *a'b'c'd'e'f'g'h'*) du cube $ABCDEFGH$, puis les épures :

- (p, p'), (q, q') et (r, r') des points P, Q et R
- $(rt, r't')$ de la droite (RT) (utiliser les portions relatives des droites (PQ) et (RT))
- (ℓ, ℓ') du point L, intersection des droites (PQ) et (BC)

- (u, u') du point U, intersection du côté $[BF]$ avec le plan (PQR)
- $(qs, q's')$ de la droite (QS) contenant l'intersection du plan (PQR) avec la face $(ADHE)$ (S étant sur une des arêtes de la face $(ADME)$).

3) Donner les valeurs approchées (à 0,1 près) des mesures des longueurs des côtés du polygone $PQSRTU$ et construire ce polygone en vraie grandeur.

II Soient $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête 5, P, Q et R les trois points situés respectivement sur les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[CD]$ tels que :

$$AP = 2 \qquad AQ = 3 \quad \text{et} \quad CR = 4.$$

1) Représenter en perspective cavalière l'intersection $PQRS$ du plan (PQR) avec les faces du tétraèdre.

2) Tracer l'épure $(abcd, a'b'c'd')$ du tétraèdre $ABCD$ sachant que la face (BCD) est située dans le plan horizontal (H), que l'arête $[AB]$ est frontale et que les points D et C ont pour triplets de coordonnées $(1; 4; 0)$ et $(6; 4; 0)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$. (On tracera dans l'ordre $(bcd, b'c'd')$, a et a').
Tracer ensuite les épures :

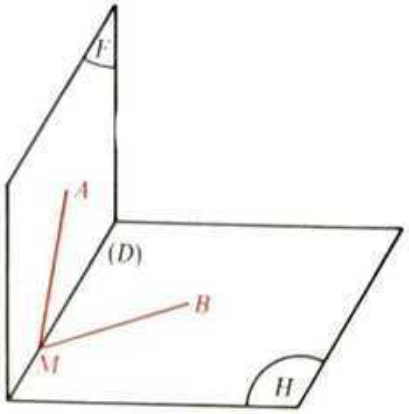
- (p, p') du point P
- (ℓ, ℓ') du point L, intersection de (BC) avec la parallèle à (AB) passant par Q (on pourra calculer la distance LC)
- (q, q') du point Q
- (r, r') du point R
- (s, s') du point S (utiliser le point d'intersection des droites (PQ) et (BC))
- $(pqrs, p'q'r's')$ de la section $PQRS$ et colorier l'intérieur de ces deux polygones.

3) Représenter en vraie grandeur le polygone $PQRS$.

4) Représenter la surface développée de la partie du tétraèdre située « au-dessus » du plan (PQR).
Vérifier les valeurs approchées trouvées dans la 3e question pour les mesures des côtés du polygone.
Réaliser le solide ayant la surface développée trouvée précédemment, en vraie grandeur avec du carton.

Le plus court chemin (G_5)

I Soient (H) et (F) deux plans perpendiculaires, (D) la droite d'intersection de (H) et (F), A et B des points situés respectivement sur (F) et (H).
On cherche le plus court chemin pour aller de A à B en se déplaçant sur les plans (F) et (H). C'est-à-dire on cherche un point M_0 de (D) tel que le minimum de la somme : $MA + MB$, lorsque M décrit (D), soit atteint en M_0.



(1)

$(F) \perp (H) \quad (F) \cap (H) = (D)$
$M \in (D) \quad A \in (F) \quad B \in (H)$

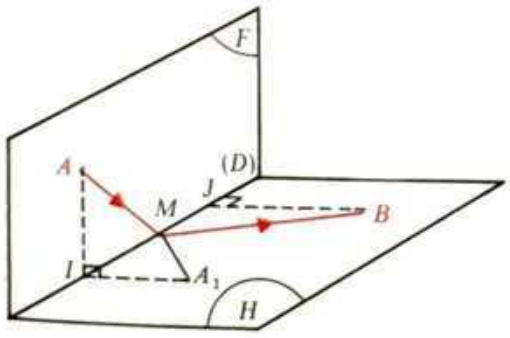
1) *Première méthode :* (géométrie descriptive)

a) Tracer les épures des points A et B. Placer l'épure d'un point M quelconque de (D).

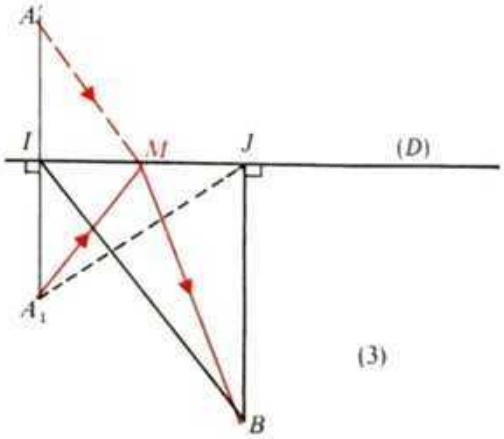
b) Pourquoi peut-on mesurer $MA + MB$ en vraie grandeur sur l'épure?

c) En déduire que M_0 est unique et le déterminer graphiquement.

2) *Deuxième méthode* (perspective cavalière)



(2)



(3)

$I \in (D) \quad J \in (D)$
$A_1 \in (H)$

***a*) Sur la figure (2) en perspective cavalière on a projeté orthogonalement A en I et B en J sur (D) et on a construit le triangle IMA_1 rectangle en I tel que : $IA_1 = IA$ et A_1 appartient à (H). Pourquoi a-t-on : $AM + MB = A_1M + MB$?**

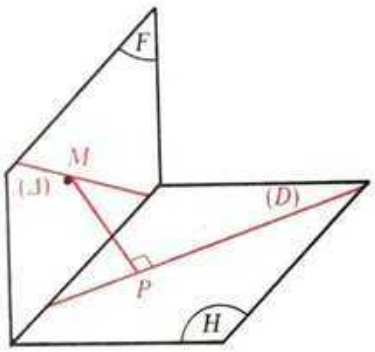
***b*) Sur la figure (3) on a représenté dans le plan (H) le point A' symétrique de A_1 par rapport à (D).**
Pourquoi a-t-on $AM + MB = A'M + MB$?

c) En déduire graphiquement la position du point M_0.

d) Justifier alors le programme de construction suivant pour tracer le point M_0 sur une figure en perspective cavalière :

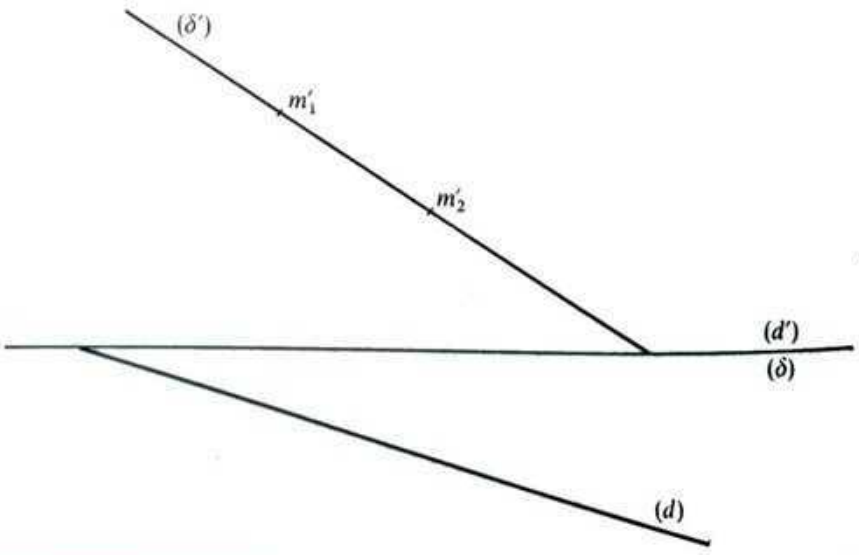
- Tracer la droite (A_1J) et la droite (BI).
- Placer le point P d'intersection des droites (BI) et (A_1J).
- Projeter orthogonalement P en H_0 sur (D).

II Soient (F) et (H) deux plans perpendiculaires, (D) une droite incluse dans (H), (Δ) une droite incluse dans (F).



$(H) \perp (F)$,	$M \in (F)$
$(D) \subset (H)$	$(\Delta) \subset (F)$

On veut déterminer le point M de (Δ) et le point P de (D) tels que la droite (MP) est perpendiculaire à (D) et à (Δ) et montrer que MP est la distance de (D) à (Δ) (c'est-à-dire la plus petite distance d'un point de (D) à un point de (Δ)) : on dit que le segment $[MP]$ est le plus court chemin pour aller de la droite (D) à la droite (Δ).



1) Soient M_1 et M_2 deux points de (Δ) d'épures respectives (m_1, m'_1) et (m_2, m'_2) déterminés sur l'épure ci-dessous grâce à m'_1 et m'_2. Représenter l'épure $(m_1 p_1, m'_1 p'_1)$ de la droite $(M_1 P_1)$ perpendiculaire à (D) en P_1 puis celle $(p_1 n_1, p'_1 n'_1)$ de la droite $(P_1 N_1)$ perpendiculaire à (Δ) en N_1.
Faire de même à partir de m'_2 pour placer les épures respectives (m_2, m'_2) (p_2, p'_2) et (n_2, n'_2) de M_2, P_2 et N_2 avec $(M_2 P_2)$ perpendiculaire à (D) en P_2 et $(P_2 N_2)$ perpendiculaire à (Δ) en N_2.

2) A quelle condition sur N_i et M_i la droite $(M_i P_i)$ répond-elle au problème posé? Les points M_1 et M_2 conviennent-ils?

3) On note pour i appartenant à $\{1, 2\}$, c'_i le point d'intersection des droites $(p'_i n'_i)$ et $(m'_i m_i)$.
Montrer qu'il existe une homothétie h_2 dont on précisera le centre I telle que :

$\overset{\curvearrowright}{h_2}$

P_1	P_2
P'_1	P'_2
c'_1	c'_2
m_1	m_2

4) Montrer que quel que soit le point m'_i choisi sur (δ') le quadrilatère $p_i p'_i c'_i m_i$ est l'image de $p_1 p'_1 c'_1 m_1$ par une homothétie h_i de centre I, où (m_i, m'_i) est l'épure du point M_i de (Δ) fixé par m'_i, (p_i, p'_i) est l'épure du point P_i tel que $(M_i P_i)$ soit perpendiculaire à (D) en P_i, (n_i, n'_i) l'épure du point N_i tel que $(P_i N_i)$ soit perpendiculaire à (Δ) en N_i et c'_i est le point d'intersection des droites $(p'_i n'_i)$ et $(m'_i m_i)$.

5) En déduire la construction des épures (m, m') et (p, p') des points M et P de (Δ) et (D) respectivement tels que (MP) soit perpendiculaire à (Δ) en M et à (D) en P.

6) Montrer que $[MP]$ est le plus court chemin pour aller de (Δ) à (D).

INDEX TERMINOLOGIQUE

A

Abscisse 224
Angle au centre 42
– droit 32
– d'une droite avec un plan 480
– d'une similitude directe 159
– extérieur 44
– inscrit 42
– intérieur 43
– orienté d'un couple de demi-droites 31
– – – vecteurs 34
Angles supplémentaires 40
Antidéplacement 148
Applicateur linéaire 163
Application ponctuelle 114
Arc cos 82
Arc sin 82
Arc tg 89
Arrangement 396
Axe d'une similitude indirecte 160
– d'une symétrie axiale 131

B

Base 228
Base orthogonale 19, 336
Base orthonormée 21, 248, 336
Bipoints équipollents 211

C

Centre d'une similitude 159
Cercle d'Euler 474
Changement de repère par rotation d'axes 145
– translation d'axes 121
Coefficient de corrélation linéaire 437
Colinéaires 7
Combinaison 398
– linéaire 6
Congruence modulo 360 65
– – 2π 66
Coordonnées cartésiennes 142
– polaires 142
Cos 74
Cosinus d'un angle 36
Cote 224
Cotg 84
Courbe d'estimation 425
Covariance 429

D

Demi-droite vectorielle 10
Déplacement 147
Déterminant 14
Détermination de la mesure en degrés d'un angle orienté 70
– – en radians 68
– principale 68
Direction 33, 12
– d'une projection 204, 207
– d'une symétrie axiale 131
Distance d'un point à un plan 355
Double d'un angle 41
Droite affine 217
– d'ajustement 427
– de bout 255
– de profil 261
– d'Euler 473
– de régression 466
– globalement invariante 120
– orthogonale à un plan 317
Droites orthogonales 315
– vectorielles orthogonales 19
Droite vectorielle 8, 217
– – associée 11, 217
– verticale 256

E

Écart (absolu) moyen 410
– type 412
Engendrer 9
Épreuve 401
Épure 251
Équation cartésienne 239
Équiprobabilité 404
Espace vectoriel réel 6
Étendue 409
Évènement 402
– certain 402
– contraire 403
– élémentaire 402
– impossible 402
– réalisé 402
Événements incompatibles 403
Éventualité 402
Expression analytique 116

F

Factorielle 396
Figures semblables 153
Fonction cosinus 74
– cotangente 84
– sinus 74
– tangente 83
Frontale 259

G

Groupe des homothéties-translations 130
– linéaire de $\mathcal{V}$ 165

H

Homothétie dans $\mathcal{E}$ 215
– – $\mathcal{E}'$ 121
Homothétie vectorielle 161
Homothétique 121, 215
Horizontale 259

I

Isométrie 115

L

Ligne de plus grande pente 482
– – rappel 251
– – terre 251

M

Matrice d'une application linéaire 164
Mesure en radians d'un angle orienté 68, 70
Moyenne géométrique 465
Multiplication scalaire 333

N

Norme d'un vecteur 20
Nuage de points 420

O

Opposé 5
Ordonnée 224

P

Parallélogramme 199
Pente d'une droite par rapport à un plan 481
– d'un plan par rapport à un plan 482
Permutation 396
Plan affine 5, 219
– frontal 251
– horizontal 251
– médiateur 349
– projetant 207
Plans perpendiculaires 327
Plan vectoriel 5, 218
– – associé 219
– vertical 276
Point invariant 115
– moyen 424
Produit scalaire 16, 333
– vectoriel 475
Projection 121, 204, 207
– orthogonale 323
– vectorielle dans $\mathcal{U}$ 162
– – orthogonale dans $\mathcal{U}$ 477
Projetante 121, 204
Projeté 121, 204, 207
– frontal 251
– horizontal 251

Q

Quadrilatère 199

R

Rappeler un point 257, 278
Rapport d'une similitude 153
Rectiligne d'une dièdre 327
Réflexion 130
Repère affine 7, 217, 224
– cartésien 8, 217, 224
– orthogonal 247
– orthonormé 246, 338
– rectangulaire 247
Représentation analytique 116
– paramétrique 229, 234
– par points pondérés 421
– par tâches 421
Retournement 148
Rotation de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$ 139

S

Série statistique double 419
Séries marginales 420
Similitude 153
– directe 158
– indirecte 158
Sin 74
Sinus d'un angle 36
Sphère 361
Symétrie axiale 131
– centrale 216
– glissée d'axe (D) et de vecteur $\vec{u}$ 149
– orthogonale 130
– vectorielle 164
Symétrique 131
Système de Cramer 15
– d'une représentation paramétrique 229, 234

T

Tg 83
Trace frontale 270
– horizontale 270
Traces 258
Transformation du plan 114
Translaté 212
Translation 114, 399
Triangle de Pascal 399

U

Univers 401

V

Valeurs estimées 435
– observées 407
Variance 410
Vecteur normal 339
– normé 22, 336
– unitaire 20, 336
Vecteurs coplanaires 219

ACHEVÉ D'IMPRIMER 3e TRIMESTRE 1987
SUR LES PRESSES SPÉCIALES DE LA
SOCIÉTÉ EUROPÉENNE DES ARTS GRAPHIQUES
5, RUE DE PONTOISE
75005 PARIS
IMPRIMÉ EN ITALIE
NUMÉRO D'ÉDITEUR D 42909 (D.O.VII)