ANNALES PREPARATION TD

Série d'exercice complexe

Exercice1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a) $z^2 + (-1 - i)z + 2 - i = 0$
b) $z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i = 0$
c) $z^2 + (-1 + 3i)z - 4 = 0$
d) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
e) $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$
f) $z^2 - (-1 + i)z + 2(1 - i) = 0$
g) $(1 - i)z^2 - 2(3 - 2i)z + 9 - 7i = 0$
h) $z^2 + (-1 + 4i)z - 5 + 5i = 0$
i) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$
j) $z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$
k) $z^2 - (2 + mi)z + 2 + mi - m = 0$ Où $m \in \mathbb{C}$
l) $z^2 + (3 + i)z + 2 + 3i = 0$
m) $-z^2 + 5z - 7 = 0$
n) $z^2 + (8 + 4i)z + 3i + 8 = 0$
o) $iz^2 - iz + 1 + i = 0$
p) $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : (On commencera par déterminer la solution $z_0$indiqué)
a) $z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i = 0$, z_0 est imaginaire pure.
b) $z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i = 0$, z_0 est imaginaire pure.
c) $z^3 - (3 + 3i\sqrt{3})z^2 - (6 - 6i\sqrt{3})z + 8 + 24i = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$
d) $z^3 + (1 - i)z^2 + (-8 + 4i)z - 4 - 28i = 0$, z_0 est imaginaire pure
e) $z^3 + (1 + i)z^2 + (4 - i)z - 6i + 12 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$
f) $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$

3) Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^4 + (4 - 3i)z^2 + (7 - 9i)z - 18 - 6i$
   a) montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réel α que l'on déterminera
   b) montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $\boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{\beta i}$ où β est un nombre réel que l'on déterminera
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Soit A , B , C et D les points du plan d'affixes respectives :

$z_A = 2 - 2i$; $z_B = - 1 + 7i$; $z_C = 4 + 2i$; $z_D = - 4 - 2i$.

1. Placer ces points dans le repère.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

2. On pose $Q_1 = \dfrac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ et $Q_2 = \dfrac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D}$.

a) Calculer les nombres complexes Q_1 et Q_2 sous forme algébrique.

b) En déduire que les points A , B , C et D sont cocycliques.

3. Soit Ω le point d'affixe – 1 + 2i. Démontrer que Ω est le centre du cercle passant par les points A , B , C et D.

Exercice 3

On donne dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - 8iz + 16 = 0$.

1. Vérifier que – 2i est une solution de (E).

2. On admet que (E) a une solution réelle

3. Déterminer les nombres complexes a, b et c pour que :

$z^4 - 2z^3 - 8iz + 16 = (z - 2)(z + 2i)(az^2 + bz + c)$.

4. Résoudre l'équation (E).

5. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2i$; $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

a) Ecrire z_B et z_C sous forme trigonométrique.

a) Vérifier que z_A ; z_B et z_C sonr les racines cubiques de 8i.

c) Le triangle ABC est inscrit dans un cercle (C). Déterminer le centre et le rayon de ce (C), puis vérifier que le point D d'affixe 2 appartient à (C).

d) Calculer la mesure de chaque côté du triangle ABC.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation : $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

2. On pose $P(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$.

a) Vérifier que $P(-1) = 0$.

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c)$.

c) Préciser tous les zéros de P.

3. Dans le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J), on donne A (0 ; 2) ; B (2 ; 1) ; C(1 ; – 1) et D(–1 ; 0).soit le point E symétrique du point B par rapport à A.

a) Faire une figure (unité graphique : 1 cm).

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.
4.a) Calculer l'affixe du centre K de ABCD.
b) Déterminer l'affixe de E graphiquement puis par le calcul.

5. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2i\bar{z} - 2 - 4i| = 2\sqrt{5}$.

Exercice 5

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 7z^2 + (13 + 16i)z + 9 - 12i = 0$.
a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.
b) Résoudre l'équation (E).
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives : i ; 1 + 2i et 6 – 3i.
a) Placer les points A, B et C puis démontrer que ABC est un triangle rectangle.
b) Démontrer que l'affixe du point D, image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 4 est :
5 + 2i.
c) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont précisera le centre et le rayon.

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{e_1}\,;\,\overrightarrow{e_2})$ d'unité graphique 2 cm.

A est le point d'affixe -2 – i. On considère l'application f du plan P privé de A dans P, qui à tout point M du plan distinct de A associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-i}{z+2+i}$.

On pose z = x + iy avec x et y des nombres réels.
1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
2. En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur, est le cercle de centre le point K(-1 ; 0), de rayon $\sqrt{2}$, privé du point A.

3. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe *z* tels que z' soit un nombre réel.

4. Construire les ensembles (Γ) et (E) dans le repère$(O\,;\,\overrightarrow{e_1}\,;\,\overrightarrow{e_2})$

Exercice 7

Soit A et B les points du plan d'affixes respectives -2i et 1 + i

1. Déterminer l'écriture complexe de la translation *t* de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Soit la droite (D) d'équation y = x + 2. Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation *t* .

Exercice 8

Déterminer l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1. f est la rotation de centre A(3 – i) et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. f est l'homothétie de centre Ω(-2 + 5i) et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

3. f est la symétrie centrale de centre B (1 + i)

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

4. f est la similitude directe de centre A(2i), de rapport $3\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation f est donnée. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

1. $z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z-\sqrt{3}+i$ 2. $z' = -\frac{3}{2}z+5(1-i)$ 3. $z' = -3iz + 4 - 2i$

4. $z' = z + \frac{1+i}{2}$ 5. $z' + 1 - i = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z + 1 - i)$ 6. $z' - 4 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 4)$

7. $z' + 3 - i = -5(z + 3 - i)$.

Exercice 10

Le plan complexe est muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère la similitude S qui au point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' tel que $z' = x' + iy'$ tel que $x' = ax - by - 1$ et $y' = bx + ay + 2$ où a et b sont des paramètre réels.

1) Exprimer z' en fonction de z
2) Déterminer le couple $(a;b)$ pour que S soit une translation. Préciser alors l'affixe de son vecteur.
3) Déterminer le couple $(a;b)$ pour que S soit une homothétie de rapport 2 dont on précisera l'affixe de son centre.
4) On considère l'ensemble E des point $M(a;b)$ tel que S soit une rotation et F l' l'ensemble E des point $M(a;b)$ tel que S soit une similitude plane directe de rapport 2.

a) Montrer que le point $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$ appartient à E et que $B(\sqrt{2};\sqrt{2})$ appartient à F.
b) Déterminer les ensembles E et F.

Exercice 11

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) unité graphique : 2 cm.

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = 0$.

Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = (z + 2)[z^2 - 2(1 + i)z + 8(1 + i)]$.

2.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 - 6i$.

b) Résoudre dans l'équation (E_1) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = 0$.

c) En déduire les solutions de (E).

3. Soient A, B et C les points d'affixes respectives -2 ; $4i$ et $2 - 2i$.

a) Faire une figure.

b) Soit K le milieu du segment [BC]. On considère la similitude directe S de centre A qui transforme B en K.

Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.

c) Déterminer l'écriture complexe de S.

d) Déterminer l'angle et le rapport de S.

Exercice 12

On considère dans ℂ le polynôme défini par $P(z) = z^3 + (-8-4i)z^2 + (16+20i)z - 8 - 24i$

1) a- Calculer P (2).

   b- En déduire qu'on peut écrire $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes.

   a- Résoudre dans ℂ l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+2i$; 2 et $4+2i$.

   a- Placer les points A, B et C

   b-Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

3) On considère la similitude directe S telle que S (A) = B et S (B) = C.

   a- Déterminer l'angle et le rapport de S.

   b- Donner l'écriture complexe de S.

   a- Donner l'affixe du point K centre de la similitude S.

Exercice 13

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (1-i)z^2 + (7-10i)z + 9 + 7i$

1) a) Démontrer que P(z) admet une racine imaginaire pure que l'on notera β.

   b) résoudre l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (1-i)z^2 + (7-10i)z + 9 + 7i = 0$.

2) On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

   On donne A (- i) ; B (2 + 3i) et C (- 1 – 3i)

a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Calculer $z = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ et en déduire que les points A, B et C sont alignés.

4) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan d'affixe z tel que :

   $|z - z_A| = |z - z_B|$

Exercice 14

I/ On considère le polynôme p défini par : $P(z) = z^3 - (3+i)z^2 + 8z - 12 + 4i$.

1) Calculer P (-2i) et P (2)
2) a) Ecrire p(z) sous forme de produits de facteurs du premier degré.

   b) résoudre dans l'équation P(z) = 0.

II/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : 2 ; 1 + 3i et -2i.

1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe. (Unité graphique : 2 cm)
2) a) Construire le point E symétrique du point B par rapport à J.

   b) Prouver par le calcul que $z_E = -1 - i$

3) Démontrer que :

   a) Le triangle JAB est rectangle isocèle en J.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

b) Les points A, J, E, C appartiennent à un cercle (Γ) dont on précisera l'affixe du centre K et le rayon.

4) Construire (Γ).

SESSION 2014

Exercice 1 (5 points) :

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : **P(z)=**z^3**-**$(5+i)z^2+(a+ib)z-8-16i$ où a et b sont des nombres réels non nuls.

1) Déterminer les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation **P(z)=0.**

2) Résoudre dans C, l'équation **:** **P(z)=**$z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i=0$**.**

3) Dans le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé directe **(O;**$\vec{u};\vec{v}$**) d'unité 1cm,**

On considère les points **I,J,K et A** d'affixe respectives : $Z_I=2i$, $Z_J=3+i$, $Z_K=2-2i$, $Z_A=\sqrt{3}+i$

a)Placer les point **I, J, K et A .**A l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, construire le point A.

b) Démontrer que les droites **(IJ)** et **(JK)** sont perpendiculaires.

4) Soit B le points du plan tel que $Z_B=\overline{z}_A$.

a)Calculer les distance OA,OB et AB. En déduire la nature du triangle AOB**.**

b) Calculer l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange.

5) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O. Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

SESSION 2005

<u>EXERCICE 1</u>

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u},\vec{v}$ **).**

On note A le point d'affixe i.

1°) Résoudre dans C l'équation à une inconnue z suivante :. $\frac{iZ-2+4i}{Z-i}=z$

2°) A tout point M d'affixe z, avec z ≠ i, on associe le point M' d'affixe z'

tel que : z'$=\dfrac{iz-2+4i}{z-i}$ **.**

a/ Exprimer z' – i en fonction de z.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

b/ Montrer que (z′ – i) (z – i) = – 3 + 4i.

c/ En déduire la valeur de |z′ – i|.|z – i|.

d/ Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que |z – i| = $\sqrt{10}$.

e/ En utilisant les résultats précédents, montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{10}$ alors M′ appartient à un cercle (C′) de centre A dont on déterminera le rayon.

3°) Soit S la similitude plane directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{5\pi}{4}$.

a/ Ecrire l'expression complexe de S.

b/ Soit B le point d'affixe 1 + 3i et B′ = S(B). Déterminer l'affixe de B′.
Montrer que B′ appartient au cercle (C).

Série d'exercice fonction logarithme et exponentielle

Exercice1

I. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x+2)}{x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{xlnx}$; 4)$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x^2-3x+7)}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x^5-x^3)}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+lnx}{1-lnx}$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$;8) $\lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$;9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-(lnx)^5$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{lnx+ln2}{x-\frac{1}{2}}$; 11) $\lim\limits_{x\to7} \frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)+ln7}{x-7}$;12) $\lim\limits_{x\to0} \frac{ln(1+3x)}{5x}$; 13) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{lnx}$;14) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}lnx$

15) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}lnx$; 15) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}(lnx)^{10}$

II .Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}-2e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x-\frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x-\frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-(1-x)}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-2x+3)e^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-x)e^x$; $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-e^{2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-e^x}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{2x}-e^x)$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{1-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{\sqrt{2x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

1) III. Dans chacun des cas suivants, Déterminer le domaine D de f, Etudier la Continuité et la Dérivabilité de f en x_0, .Interpréter graphique ce résultats

1)$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} - e^{-x} - 1 \ \ si\ x \geq 0 \\ e^{x} + 2x - 1 \ \ si\ \ x < 0 \end{cases}$ 2)$f(x) = \begin{cases} -x + 6 - 4e^{\frac{x}{2}} \ \ si\ x \leq 0 \\ x + 2 - xlnx \ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{x} \ \ si\ x \geq 0 \\ e^{3x} - 3x - \ \ si\ \ x < 0 \end{cases}$ 4)$f(x) = \begin{cases} -x + 2\ln(x+1)\ si\ x \in]-1;0[\\ x - 1 + e^{-x} \ \ si\ \ x \in [0;+\infty[\end{cases}$

5)$f(x) = \begin{cases} \frac{lnx}{x+1} \ si\ x \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \ \ si\ \ x < 1 \end{cases}$ 6)$f(x) = \begin{cases} x - 1 + e^{x} \ \ si\ x < 0 \\ 0 \ \ \ \ si\ x = 0 \\ \frac{-x^2 lnx}{1+x} \ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{x} \ \ si\ x \geq 0 \\ (x+1)e^{-x}\ si\ \ x < 0 \end{cases}$ 8)$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x + e^{x-1}\ si\ x \leq 1 \\ \frac{3}{2} - x + ln(2x-1) \ \ si\ \ x > 1 \end{cases}$

9)$f(x) = \begin{cases} -x + e^{\frac{x}{2}} - 3\ si\ x < 0 \\ 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2\ si\ \ x \geq 0 \end{cases}$ 10)$f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x} + 2\ si\ x < 0 \\ \frac{xlnx}{x+1} \ \ si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

11)$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{e^{x}} si\ x \leq 0 \\ x - xlnx \ \ \ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$ 12)$f(x) = \begin{cases} x - xln(-x) \ \ si\ \ x < 0 \\ 0; si\ x = 0 \\ xe^{-\frac{1}{x}} \ \ si\ x > 0 \end{cases}$

13)$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{1-x} si\ x \leq 1 \\ \frac{2}{x} - lnx \ \ \ \ si\ \ x > 1 \end{cases}$ 14)$f(x) = \begin{cases} xln|x+1|\ si\ x \in]-\infty;0[\\ \frac{e(x-x^2)}{e^{-2x}} \ \ \ si\ x \in]0;+\infty[\end{cases}$

15)$f(x) = \begin{cases} e^{x} - x - 1 \ \ si\ x \leq 0 \\ x^2 lnx \ \ \ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$ 16)$f(x) = \begin{cases} -xe^{x} \ \ si\ x \leq 0 \\ xlnx \ \ \ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$

17)$f(x) = \begin{cases} xe^{1+2x} \ \ si\ x \leq 0 \\ x(1 - lnx) \ \ \ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$ 18)$f(x) = \begin{cases} 2e^{2x} - x \ \ si\ x \leq 0 \\ (5x+2)e^{-x} \ \ \ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

19) $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & si\ x<0 \\ xln(x+1) & si\ x\geq 0\end{cases}$ 20) $f(x)=\begin{cases} 1-x+2\ln x & si\ x\in]0;1[\\ x-2+e^{1-x} & si\ x\in [1;+\infty[\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases} x-2+2e^{\frac{x-1}{2}} & si\ x\leq 1 \\ x(-1+lnx)^2 & si\ x>1\end{cases}$ 22) $f(x)=\begin{cases} 2+(x-1)e^{x+1} & si\ x\leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}\left[\frac{1}{2}-ln(x+1)\right] & si\ x>-1\end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases} (1-x)e^{\frac{x}{2}} & si\ x\geq 0 \\ 1+\frac{x}{2}ln(1-x) & si\ x<0\end{cases}$ 24) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{ln(x+1)} & si\ x\geq -1 \\ (x+1)e^{-1-x} & si\ x<-1 \\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases} \frac{ln|x-1|}{x} & si\ x>0 \\ \frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} & si\ x\leq 0\end{cases}$ 26) $f(x)=\begin{cases} x+\frac{e^x}{2e^x-1} & si\ x\leq 0 \\ 1-x+\sqrt{x}lnx & si\ x>0\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x}{x+1} & si\ x\leq 0 \\ xlnx+1 & si\ x>0\end{cases}$ 28) $f(x)=\begin{cases} \left(\frac{-x+1}{x}\right)e^x & si\ x\leq 1 \\ x-1+\frac{lnx}{x} & si\ x>1\end{cases}$

Dans chacun des cas ci-dessous étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :(1) $f(x)=ln(2x+1)$ (2) $f(x)=\frac{x}{lnx}$ (3) $f(x)=ln(1-x^2)$ (4) $f(x)=xlnx-x$ (5) $f(x)=ln|x+1|$ (6) $f(x)=x-lnx$ (7) $f(x)=ln|x|$ (8) $f(x)=|lnx|$ (9) $f(x)=\frac{1+lnx}{1-lnx}$

$$(10)\ f(x)=e^x-x-4$$

$$(9)\ f(x)=\frac{1+lnx}{1-lnx}$$

SUJET TYPE1 :

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si\ x\leq 0 \\ \dfrac{lnx}{-1+lnx} & si\ x>0\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Vérifier que la fonction f est continue en x = 0.
3. Étudier la dérivabilité de f en x = 0.
4. a. Déterminer la fonction dérivée f0 de f.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
5. a. Préciser les branches infinies à la courbe (C) de f.
   b. Tracer (C).

6. Calculer l'aire A du domaine limité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 ; x = 0.

SUJET TYPE 2

I. Soit f, la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - 2x + x\ln x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) du plan d'unité graphique : 2 cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2.Étudier la continuité et la dérivabilité de f en x = 0.
3. Étudier les variations de f. On dressera un tableau de variation de f.
4. Pour x≤0, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses et écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en ce point.
5. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α ∈]6; 7[. On ne demande pas de calculerα.
6 a. Étudier les branches infinies à (C).
b. Tracer la courbe (C) de f et la droite (T).

II. Soit h la fonction numérique de la variable réelle x, définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = -f(x)$
9 a. Dresser le tableau de variation de h.
b. Tracer la courbe (C 0) représentative de h dans le même repère que (C) de f.
c. Calculer en cm2, l'aire A du domaine (D) limité par les courbes (C) ; (C 0) et les droites d'équations x = -1 ; x = 0.

SUJET TYPE 3

PARTIE A :

On considère la fonction $P(x) = 1 - x - 2lnx$
1) Déterminer le domaine de définition de p puis calculer les limites à ses bornes.
2) Etudier le sens de variation de P.
3) Calculer $P(1)$et déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1} - x & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{x + lnx}{x^2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal (O;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) d'unité 2cm.

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Calculer les limites aux bornes de D. En déduire une conséquence graphique.
3) Etudier la continuité de f en 1 .
4) Etudier la dérivabilité de f en 1. En déduire une conséquence graphique.
5) Montrer que la droite d'équation $y = -x$est une asymptote a (C) en $-\infty$.
6) Calculer la dérivéef de f'.
7) Dresser le tableau de variation de f .
8) Construire la courbe (C) , ses tangentes et ses asymptotes.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

PARTIE C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle, $[1;+\infty[$,.

1) a- Montrer que h est bijective de $[1;+\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

b- En déduire le domaine de définition de la fonction bijective h^{-1}

2) Déterminer les variations de h^{-1} et dresser son tableau de variation.

3) Construire dans le même repère la courbe de h^{-1}

SUJET TYPE 4

Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par : $\begin{cases} f(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right) \text{ si } x \in]0;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

(Cf) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Etudier la dérivabilité de f en 0.

2. Etudier la limite f en +∞.

3. On admet que f est dérivable sur]0 ; +∞ [.

   a) Démontrer que pour tout x $\in$]0 ; +∞ [, $f'(x) = x(\ln x - 1)$.

   b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1.

5. Soit la fonction h définie sur]0 ; +∞ [par $h(x) = f(x) + x - \dfrac{1}{4}$.

   a) Etudier les variations de la fonction dérivée h' de h sur]0 ; +∞ [et dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites)

   b) En déduire le signe de h' sur]0 ; +∞ [, puis le sens de variation de h .

   c) Calculer puis déduire de la question précédente le signe de h(x) suivant les valeurs de x.

   d) En déduire la position relative de (T) et (Cf).

6. Construire (T) et (Cf) dans un repère orthonormé.

SUJET TYPE 5

Partie A

Soit la fonction g définie sur]0 ; +∞ [par $g(x) = x^2 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (sans calculer les limites).

2. En déduire le signe de g(x) sur]0 ; +∞ [.

Partie B

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞ [par $f(x) = x + \dfrac{1+\ln x}{x}$.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

(Cf) es la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b) Monter la droite (D) d'équation y = x est asymptote à en $+\infty$.

   c) Déterminer la position de par rapport à (D) sur.

3. Etudier les variations de la fonction f.

4. Déterminer le point B de (Cf) où la tangente (T) est parallèle à (D).

5. a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

   b) Copier puis compléter le tableau suivant par les arrondis d'ordre 2 de f(x):

x	0,3	$\frac{1}{e}$	1	7
f(x)				

   c) Déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

6. Tracer (Cf) et les droites (D) et (T) dans le repère (O, I, J).

SUJET TYPE 6

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x(1-x^2) + 1 - 2\ln x$.

1. Déterminer les limites de en 0 et $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel strictement positif, $g'(x) = \dfrac{(x+1)(-3x^2+3x-2)}{x}$.

3. Démontrer que g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]1\,;+\infty[$.

5. Démontrer que $\forall x \in]0\,;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x}{x} - (x-1)^2\right)$.

On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
1. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. Vérifier que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = -x + 2 + \dfrac{\ln x - x}{x^2}$.
3. Démontrer que la droite (Δ) est asymptote à (Cf) en $+\infty$.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

4. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

5. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

6. Calculer f(1) puis justifier que f(α).

7. Démontrer l'équation f(x) = 0 admet une solution unique dans l'intervalle [α ; +∞ [.

Partie C

Soit la fonction h définie sur]0 ; +∞ [, par h(x) = lnx – x.

1. Dresser le tableau de variation de h.

2. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif, on a h(x) < 0.

3. Déterminer les positions relatives de (Cf) et (Δ).

4. Construire (Cf) et (Δ).

SUJET TYPE 7

Partie A

Soit la fonction h dérivable sur ℝ et définie par : $h(x) = 3 + (x – 1)e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de h en -∞ et en +∞.

2. a) Démontrer que ∀ x ∈ ℝ, $h'(x) = (2 – x)e^{-x}$.

b) En déduire les variations de h et dresser son tableau de variations.

3. Démontrer que sur l'intervalle]-∞ ; 2] l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α et que

-1 < α < 0.

4. En déduire que pour tout nombre réel x, $\begin{cases} h(x) < 0 \text{ si } x \in]-\infty ; \alpha[\\ h(x) > 0 \text{ si } x \in]\alpha ; +\infty[\end{cases}$

Partie B

Soit la fonction numérique définie sur ℝ par $f(x) = 3x + 1 – xe^{-x}$. (Cf) est la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2cm.

1. Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : f'(x) = h(x).

3. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = 3x + 1 est asymptote à (Cf) en +∞.

5. Etudier la position relative de (Cf) et (Δ).

6. Démontrer que (Cf) admet en +∞ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

8. Tracer (Cf), (Δ) et (T).

On prendra $\alpha = -0{,}6$ et $f(\alpha) = 0{,}3$.

CORRIGER EXERCICE 1 :
Exercice1

1) Résolution dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + (-1 - i)z + 2 - i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1 - i)^2 - 4(1)(2 - i)$

$\Delta = 2i - 8 + 4i$

$\Delta = -8 + 6i$

$\Delta = -9 + 1 + 2(1)(3i)$

$\Delta = (3i)^2 + 2(1)(3i) + 1^2$

Alors $\Delta = (1 + 3i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{-(-1-i)-(1+3i)}{2}$ et $z'' = \frac{-(-1-i)+(1+3i)}{2}$

$z' = \frac{1+i-1-3i}{2}$ et $z'' = \frac{1+i+1+3i}{2}$

$z' = \frac{-2i}{2}$ et $z'' = \frac{2+4i}{2}$

$z' = -i$ et $z'' = 1 + 2i$

D'où $S = \{\ -i\ ; 1 + 2i\ \}$

b) $z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i = 0$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = [-(1+3i)]^2 - 4(1)(-6+9i)$

$\Delta = 1 + 6i - 9 + 24 - 36i$

$\Delta = 16 - 30i$

$\Delta = 25 - 9 + 2(5)(3i)$

$\Delta = 5^2 + 2(1)(3i) + (3i)^2$

Alors $\Delta = (5+3i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{(1+3i)-(5+3i)}{2}$ et $z'' = \frac{(1+3i)+(5+3i)}{2}$

$z' = \frac{(1+3i)-5-3i}{2}$ et $z'' = \frac{(1+3i)+5+3i}{2}$

$z' = \frac{-4}{2}$ et $z'' = \frac{6+6i}{2}$

$z' = -2$ et $z'' = 3 + 3i$

D'où $S = \{ \quad -2 \ ; \ 3+3i \}$

c) $z^2 + (-1+3i)z - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1+3i)^2 - 4(1)(-4)$

$\Delta = 1 - 6i - 9 + 16$

$\Delta = 8 - 6i$

$\Delta = 9 - 1 - 2(3)(i)$

$\Delta = 3^2 - 2(1)(3i) + (i)^2$

Alors $\Delta = (3-i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{-(-1+3i)-(3-i)}{2}$ et $z'' = \frac{-(-1+3i)+(3-i)}{2}$

$z' = \frac{1-3i-3+i}{2}$ et $z'' = \frac{1-3i+3-i}{2}$

$z' = \frac{-2-2i}{2}$ et $z'' = \frac{4-4i}{2}$

$z' = -1 - i$ et $z'' = 2 - 2i$

D'où $S = \{ \quad -1 - i \;;\; 2 - 2i \}$

d) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4(1)(4)$

$\Delta = 12 - 16$

$\Delta = -4$ ainsi $\Delta = 2^2(i^2)$

Alors $\Delta = (2i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2}$ et $z'' = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2}$

$z' = \sqrt{3} - i$ et $z'' = \sqrt{3} + i$

D'où $S = \{ \quad \sqrt{3} - i \;;\; \sqrt{3} + i \}$

e) $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = [-(4 + 3i)]^2 - 4(1)(1 + 5i)$

$\Delta = 16 + 24i - 9 - 4 - 20i$

$\Delta = 3 - 4i$ ainsi
$\Delta = 4 - 1 - 2(2)(i)$

$\Delta = 2^2 - 2(2)(i) + (i)^2$

Alors $\Delta = (2 - i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{(4+3i)-(2-i)}{2}$ et $z'' = \frac{(4+3i)+(2-i)}{2}$

$z' = \frac{6+4i}{2}$ et $z'' = \frac{6+2i}{2}$

D'où $S = \{ \quad 3 + 2i \;;\; 3 + i \}$

f) $z^2 - (-1 + i)z + 2(1 - i) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = [-(-1+i)]^2 - 4(1)[2(1-i)]$

$\Delta = -2i - 8 + 8i$

$\Delta = -8 + 6i$ ainsi
$\Delta = -9 + 1 - 2(1)(3i)$

$\Delta = (1)^2 - 2(1)(3i) + (3i)^2$

Alors $\Delta = (1+3i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{(-1+i)-(1+3i)}{2}$ et $z'' = \frac{(-1+i)+(1+3i)}{2}$

$z' = \frac{-2-2i}{2}$ et $z'' = \frac{4i}{2}$

D'où $S = \{ \quad -1 - i \ ; \ 2i \}$

g) $(1-i)z^2 - 2(3-2i)z + 9 - 7i = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' = [(3-2i)]^2 - 4(1-i)(9-7i)$

$\Delta' = 3 + 4i$ ainsi
$\Delta' = 4 - 1 + 2(2)(i)$

$\Delta' = (2)^2 + 2(2)(i) + (i)^2$

Alors $\Delta' = (2+i)^2$

$z' = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $z'' = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

$z' = \frac{(3-2i)-(2+i)}{(1-i)}$ et $z'' = \frac{(3-2i)+(2+i)}{(1-i)}$

$z' = \frac{4-2i}{2}$ et $z'' = \frac{6+4i}{2}$

D'où $S = \{ \quad 2 - i \ ; \ 3 + 2i \}$

h) $z^2 + (-1+4i)z - 5 + 5i = 0$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

i) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(3+i)$

$\Delta' = -3 + 4i$ ainsi

$\Delta' = -4 + 1 + 2(2)(i)$

$\Delta' = (1)^2 + 2(2)(i) + (2i)^2$

Alors $\Delta' = (1+2i)^2$

$z' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $z'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$

$z' = \frac{3-(1+2i)}{2}$ et $z'' = \frac{3+(1+2i)}{2}$

$z' = \frac{2-2i}{2}$ et $z'' = \frac{4+2i}{2}$

D'où $S = \{ \quad 1 - i \ ; \ 2 + i \}$

j) $z^2 - (3+3i)z + 5i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = [-(3+3i)]^2 - 4(1)(5i)$

$\Delta = 9 + 18i - 9 - 20i$

$\Delta = -2i$

$\Delta = 1 - 1 + 2(1)(i)$

$\Delta = 1^2 - 2(1)(i) + (i)^2$

Alors $\Delta = (1-i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{(3+3i)-(1-i)}{2}$ et $z'' = \frac{(3+3i)+(1-i)}{2}$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

$z' = \frac{3+3i-1+i}{2}$ et $z'' = \frac{3+3i+1-i}{2}$

$z' = \frac{2+4i}{2}$ et $z'' = \frac{4+2i}{2}$

$z' = 1 + 2i$ et $z'' = 2 + i$

D'où $S = \{ \quad 1 + 2i \quad ; \quad 2 + i\}$

k) $z^2 - (2 + mi)z + 2 + mi - m = 0$ Où $m \in \mathbb{C}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = [-(2 + mi)]^2 - 4(1)(2 + mi - m)$

$\Delta = 4 + 4im - m^2 - 8 - 4im + 4m$

$\Delta = -m^2 + 4im - 4$

$\Delta = -(m^2 - 4im + 4)$

$\Delta = i^2[m^2 - 2(m)(2) + (2)^2]$

Alors $\Delta = i^2(m-2)^2$

Alors $\Delta = [(m-2)i]^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{(2+mi)-(m-2)i}{2}$ et $z'' = \frac{(2+mi)+(m-2)i}{2}$

$z' = \frac{2+2i}{2}$ et $z'' = \frac{2+2(m-1)i}{2}$

$z' = 1 + i$ et $z'' = 1 + (m-1)i$

D'où $S = \{ \quad 1 + i \quad ; \quad 1 + (m-1)i\}$

l) $z^2 + (3 + i)z + 2 + 3i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3 + i)^2 - 4(1)(2 + 3i)$

$\Delta = 9 + 6i - 1 - 8 - 12i$

$\Delta = -6i$

$\Delta = 3 - 3 + 1 + 2(\sqrt{3})(i\sqrt{3})$

$\Delta = (3i)^2 + 2(1)(3i) + 1^2$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

Alors $\Delta = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{-(3+i)-(\sqrt{3}+i\sqrt{3})}{2}$ et $z'' = \frac{-(3+i)+(\sqrt{3}+i\sqrt{3})}{2}$

$z' = -\frac{(3+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2}$ et $z'' = \frac{(\sqrt{3}-3)+(-1+\sqrt{3})i}{2}$

D'où $S = \left\{ -\frac{(3+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2} \;;\; \frac{(\sqrt{3}-3)+(-1+\sqrt{3})i}{2} \right\}$

m) $-z^2 + 5z - 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (5)^2 - 4(-1)(-7)$

$\Delta = -3$

Alors $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{-5-i\sqrt{3}}{-2}$ et $z'' = \frac{-5+i\sqrt{3}}{-2}$

D'où $S = \left\{ \frac{5+i\sqrt{3}}{2} \;;\; \frac{5-i\sqrt{3}}{2} \right\}$

n) $z^2 + (8 + 4i)z + 3i + 8 = 0$

o) $iz^2 - iz + 1 + i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-i)^2 - 4(i)(1 + i)$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

$\Delta = 3 - 4i$

Alors $\Delta = (2+i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{i-(2+i)}{2i}$ et $z'' = \frac{i+(2+i)}{2i}$

D'où $S = \{\ i\ ; 1+i\}$

p) $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = [-(1+i)]^2 - 4(1)(2+2i)$

$\Delta = -8 - 6i$

Alors $\Delta = (1-3i)^2$

$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z' = \frac{1+i-(1-3i)}{2}$ et $z'' = \frac{1+i+(1-3i)}{2}$

$z' = 2i$ et $z'' = 1 - i$

D'où $S = \{\ 2i\ ;\ 1-i\}$

4) **Résolvons** dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : (On commencera par déterminer la solution $z_0$indiqué)

g) $\boldsymbol{z^3 - 7z^2 + (19+5i)z - 18 - 30i = 0}$, z_0 est imaginaire pure.

Posons $z_0 = \alpha i$ avec α un réel $z^3 - 7z^2 + (19+5i)z - 18 - 30i = 0$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow (\alpha i)^3 - 7(\alpha i)^2 + (19+5i)(\alpha i) - 18 - 30i = 0}$$

$\boldsymbol{\Rightarrow -\alpha^3 i + 7\alpha^2 + 19\alpha i - 5\alpha - 18 - 30i = 0 \Rightarrow (7\alpha^2 - 5\alpha - 18) + i(-\alpha^3 + 19\alpha - 30) = 0}$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -\alpha^3 + 19\alpha - 30 = 0 \ (1) \\ -7\alpha^2 - 5\alpha - 18 = 0 \ (2) \end{cases}$$

$7\alpha^2 - 5\alpha - 18 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \; ou \; \alpha = \frac{-9}{7}$;

$-\left(\frac{-9}{7}\right)^3 + 19\left(\frac{-9}{7}\right) - 30 = \frac{-17940}{343} \neq 0$; $-(2)^3 + 19(2) - 30 = 0$

Donc (2) vérifie (1) et (2)

$z_0 = 2i$

Déterminons 3 nombres complexes a, b et c tel que $z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$. **Par identification ou par division euclidienne** $a = 1$; $b = -7 + 2i \; et \; c = 15 - 9i$

$z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i = (z - 2i)[z^2 - (7 - 2i)z + 15 - 9i]$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$, $z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i = 0$

$z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)[z^2 - (7 - 2i)z + 15 - 9i] = 0$

$\Longrightarrow z = 2i$ **ou** $z^2 - (7 - 2i)z + 15 - 9i = 0$

$\Delta = [-(7 - 2i)]^2 - 4(15 - 9i) = (1 + 4i)^2$

$\Delta = -15 + 8i$

$\Delta = (1 + 4i)^2$

on a : $z_1 = \frac{7-2i-(1+4i)}{2} = 3 - 3i$; $z_2 = \frac{7-2i+(1+4i)}{2} = 4 + i$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i; 3 - 3i; 4 + i\}$

h) $z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i = 0$, z_0 est imaginaire pure.

Posons $z_0 = \alpha i$ **avec** α **un réel**

$z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i = 0$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

$\Leftrightarrow (\alpha i)^3 - (5+i)(\alpha i)^2 + (10+6i)(\alpha i) - 8 - 16i = 0$

$\Rightarrow -\alpha^3 i + 5\alpha^2 + \alpha^2 i + 10\alpha i - 6\alpha - 8 - 16i = 0$

$\Rightarrow (5\alpha^2 - 6\alpha - 8) + i(-\alpha^3 + \alpha^2 + 10\alpha - 16) = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -\alpha^3 + \alpha^2 + 10\alpha - 16 = 0 \ (1) \\ 5\alpha^2 - 6\alpha - 8 = 0 \ (2) \end{cases}$$

$5\alpha^2 - 6\alpha - 8 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \ ou \ \alpha = \frac{-4}{5}$;

$-\left(\frac{-4}{5}\right)^3 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + 10\left(\frac{-4}{5}\right) - 16 = \frac{}{225} \neq 0$; $-(2)^3 + 2^2 + 10(2) - 16 = 0$

Donc (2) vérifie (1) et (2)

$z_0 = 2i$

Déterminons 3 nombres complexes a, b et c tel que $z^3 - 7z^2 + (19+5i)z - 18 - 30i = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$. **Par identification ou par division euclidienne** $a = 1$;

$$b = -5 + i \ et \ c = 8 - 4i$$

$z^3 - 7z^2 + (19+5i)z - 18 - 30i = (z - 2i)[z^2 - (5-i)z + 8 - 4i]$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$, $z^3 - 7z^2 + (19+5i)z - 18 - 30i = 0$

$z^3 - 7z^2 + (19+5i)z - 18 - 30i = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)[z^2 - (5-i)z + 8 - 4i] = 0$

$\Longrightarrow z = 2i$ **ou** $z^2 - (5-i)z + 8 - 4i = 0$

$\Delta = [-(5-i)]^2 - 4(8-4i) = -8 + 6i$

$\Delta = (1+3i)^2$

$z' = \frac{(5-i)-(1+3i)}{2}$ **et** $z'' = \frac{(5-i)+(1+3i)}{2}$

$z' = 2 - 2i$ **et** $z'' = 3 + i$

D'où $S = \{ \ 2i \, ; 2 - 2i \ ; \ 3 + i \}$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

i) $z^3-(3+3i\sqrt{3})z^2-(6-6i\sqrt{3})z+8+24i=0$, $z_0\in\mathbb{R}$
j) $z^3+(1-i)z^2+(-8+4i)z-4-28i=0$, z_0 est imaginaire pure
k) $z^3+(1+i)z^2+(4-i)z-6i+12=0$, $z_0\in\mathbb{R}$
l) $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$, $z_0\in\mathbb{R}$

5) Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z)=z^4+(4-3i)z^2+(7-9i)z-18-6i$

a) montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réel α que l'on déterminera

Soit le polynôme $P(z)=z^4+(4-3i)z^2+(7-9i)z-18-6i, z\in\mathbb{C}$

1) Montrons que le polynôme $p(z)$admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera

Posons $z_0=\alpha$ avec α un réel $P(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^4+(4-3i)\alpha^2+(7-9i)\alpha-18-6i=0$

$$\Rightarrow \alpha^4+4\alpha^2-3\alpha^2 i+7\alpha-9\alpha i-18-6i=0$$

$$\Rightarrow (\alpha^4+4\alpha^2+7\alpha-18)+i(-3\alpha^2-9\alpha-6)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha^4+4\alpha^2+7\alpha-18=0 \ (1)\\ -3\alpha^2-9\alpha-6=0 \ (2)\end{cases}$$

$-3\alpha^2-9\alpha-6=0 \Rightarrow \alpha=(-1)\ ou\ \alpha=-2$;

$(-1)^4+4(-1)^2+7(-1)-18=-20\neq 0$; $(-2)^4+4(-2)^2+7(-2)-18=0$

Donc (-2) vérifie (1) et (2)

$z_0=-2$

b) **Montrons que l'équation $P(z)=0$ admet une solution imaginaire pure $z_1=\beta i$ où β est un nombre réel que l'on déterminera**

Posons $z_0=\beta$ avec β un réel

$$P(\beta i)=0 \Leftrightarrow (\beta i)^4+(4-3i)(\beta i)^2+(7-9i)(\beta i)-18-6i=0$$

$$\Rightarrow \beta^4-(4-3i)(\beta)^2+(7-9i)(\beta i)-18-6i=0$$

$$\Rightarrow \left(\beta^4-4\beta^2+9\beta-18\right)+i\left(3\beta^2+7\beta-6\right)=0$$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \beta^4 - 4\beta^2 + 9\beta - 18 = 0 \ (1) \\ 3\beta^2 + 7\beta - 6 = 0 \ (2) \end{cases}$$

$3\beta^2 + 7\beta - 6 = 0 \Rightarrow \beta' = -3 \ ou \ \beta'' = \frac{2}{3}$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{2}{3}\right) - 18 = -\frac{920}{81} \neq 0$; $(-3)^4 - 4(-3)^2 + 9(-3) - 18 = 0$

Donc (-3) vérifie (1) et (2)

$z_0 = -3i$

c) **Résolvons** dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Déterminons 3 nombres complexes a, b et c tel que

$\mathrm{P(z)} = (z - z_0)(z - z_1)(az^2 + bz + c)$. **Par identification ou par division euclidienne**
$a = 1; b = -2 - 3i \ et \ c = -1 + 3i$

$$\mathrm{P(z)} = (z + 2)(z + 3i)[z^2 - (2 + 3i)z + -1 + 3i]$$

$\mathrm{P(z)} = 0 \Leftrightarrow (z + 2)(z + 3i)[z^2 - (2 + 3i)z + -1 + 3i] = 0$

$\Longrightarrow z = -2$ **ou** $z = -3i \ ou \ z^2 - (2 + 3i)z + -1 + 3i = 0$

$\Delta = [-(2 + 3i)]^2 - 4(-1 + 3i) = i^2$

on a : $z' = \frac{2+3i-i}{2} = 1 + i$; $z'' = \frac{2+3i+i}{2} = 1 + 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-2; -3i + i; 1 + 2i\}$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

CORRIGER
SUJET TYPE1 :

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{lnx}{-1+lnx} & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) d'unité graphique : 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

$$D_f =]-\infty; e[\cup]e\,; +\infty[$$

2. Vérifier que la fonction f est continue en x = 0.

- $f(0) = e^{2(0)}$ ainsi $f(0) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{lnx}{-1+lnx}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{-1}{lnx}+1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en x = 0

3. Étudier la dérivabilité de f en x = 0.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x+xlnx} = -\infty$$

4. a. la fonction dérivée f' de f.

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{-1}{x(-1+lnx)^2} & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

b. le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0				$+\infty$
$f'(x)$		$+$	2 ‖ $-\infty$	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

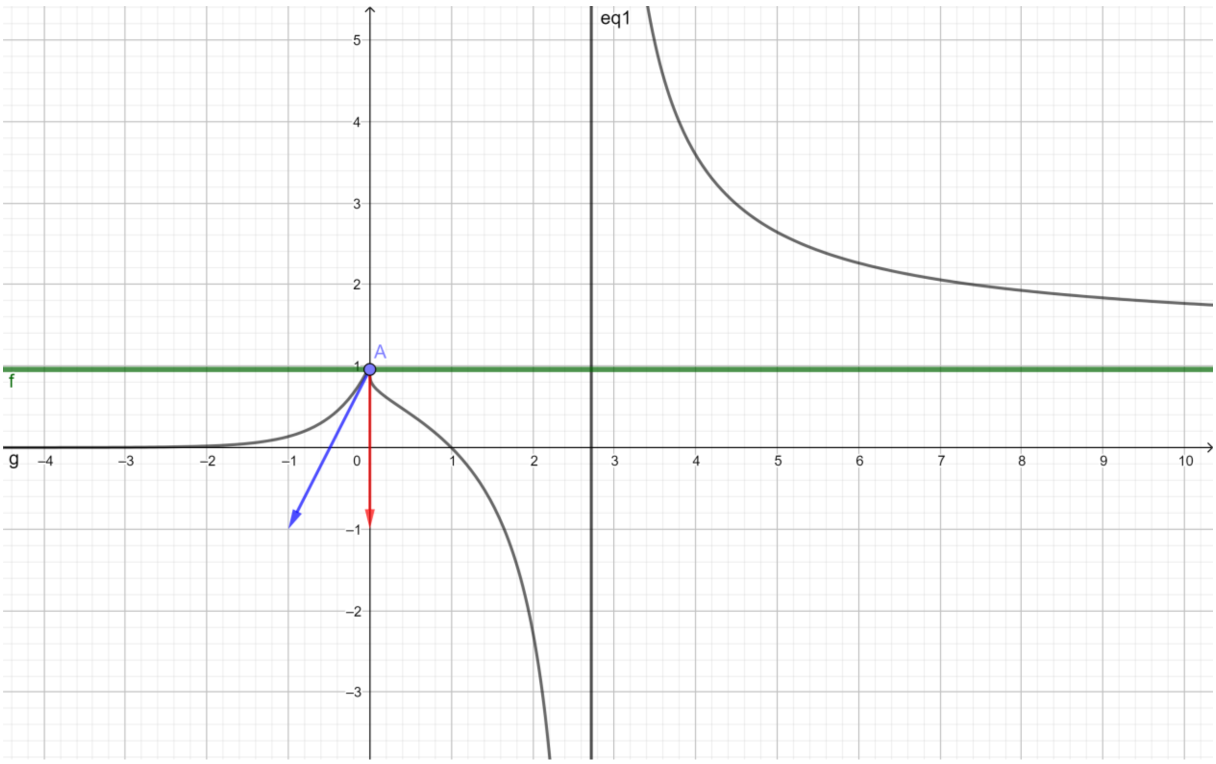
5. a. Préciser les branches infinies à la courbe (C) de f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ d'où y=0 est une asymptote horizontale pour la courbe (C)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{-1+lnx} = 1$ d'où y=1 est une asymptote horizontale pour la courbe (C)

$\lim\limits_{x\to e} f(x) = \infty$ d'où x=e est une asymptote verticale pour la courbe (C)

b. Tracer (C).



«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.

6. Calculer l'aire A du domaine limité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 ; x = 0.

A=$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx.Ua$

A=$\int_{-1}^{0} 2e^{2x}\,dx|\vec{\imath}|.|\vec{\jmath}|$

A=$[e^{2x}]_{-1}^{0}.4cm^2$

A=$4(1-e^{-2})cm^2$

«Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée.» John Louis Von Neumann.