Déclic T^le

Maths COMPLÉMENTAIRES

Programme 2020

GUIDE PÉDAGOGIQUE

hachette
ÉDUCATION

Déclic Tle Maths COMPLÉMENTAIRES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

Jean-Paul Beltramone

Frédéric Boure

Céline Decarnin

Fabien Frontini

Aurélie Huillery-Perrin

Frédéric Léon

Claudine Merdy

Conception et réalisation des vidéos

Geoffroy Laboudigue

hachette
ÉDUCATION

Édition : Corinne Lafont

Maquette intérieure : ADN

Mise en page : STDI

Photo couverture : © « Biggy Lion » Cez Art

Sommaire

THÈME 1

Modèles définis par une fonction

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
Continuité Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Cas des fonctions strictement monotones. Fonction dérivée de $x \to f(ax+b)$, $x \to \mathrm{e}^{u(x)}$, $x \to u(x)^2$ Dérivée seconde d'une fonction. Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes, équivalence admise, lorsque f est dérivable, avec la position par rapport aux tangentes. Caractérisation admise par la croissance de f', la positivité de f''. Point d'inflexion.	Calculer une fonction dérivée. Dresser un tableau de variations. Exploiter un tableau de variations pour déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x)=k$, pour résoudre une inéquation du type $f(x)\geqslant k$. Déterminer des valeurs approchées, un encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x)=k$. Reconnaître sur une représentation graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion. Étudier la convexité, la concavité, d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle.

2. Intention des auteurs

Les fonctions d'une variable réelle interviennent dans des problèmes variés, internes aux mathématiques ou issus des sciences expérimentales, économiques et sociales.
Conformément au programme, un équilibre a été gardé entre les problèmes de recherche et de modélisation et les exercices de calculs favorisant ainsi le développement d'automatismes nécessaires à la résolution de problème.
Ce thème très large doit être croisé avec d'autres thèmes : fonction logarithme (thème 4), calcul intégral (thème 5), répartition des richesses (thème 6), modèle d'évolution (thèmes 2 et 3).
Pour mener à bien cette étude, on consolide et on approfondit les connaissances acquises en classe de Première sur la dérivation (calcul de dérivée, étude de fonction, fonction exponentielle…) On introduit dans ce thème la notion de convexité.
À travers les pages *Maths en situation* notamment, des modèles issus de contextes géométriques, physiques, biologiques, économiques sont abordés.

Partir d'un bon pied

A **1.** c **2.** d **3.** a **4.** c **5.** a **6.** b **7.** c **8.** c

B **1.** Faux, car $f(0{,}5)=-1$.
2. Faux, T_1 n'est pas horizontale.
3. Faux, en B la tangente n'est pas horizontale.
4. Vrai, c'est le coefficient directeur de T_3.
5. Vrai, en $x=0{,}5$ la tangente « monte ».
6. Faux, les solutions sont -3 et 1.
7. Vrai, la courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y=-3$.
8. Faux, c'est le tableau de signes de f' car la fonction est décroissante puis croissante, avec changement de variation en $x=-1$.

C **1.** Pour f', la dérivée de la fonction exponentielle composée est fausse $(\mathrm{e}^u)'=u'\times\mathrm{e}^u$. Le terme (-5) n'a pas été dérivé.
$$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+3x^2-5$$
Pour g', il y a erreur sur les facteurs du produit : il n'y avait pas de parenthèses à e^x+1 :
$$g'(x)=2\mathrm{e}^x+(2x+3)\mathrm{e}^x=(2x+5)\mathrm{e}^x$$

2. On a $h'(x)=2x\mathrm{e}^x+(x^2-3)\mathrm{e}^x=(x^2+2x-3)\mathrm{e}^x$. Or $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$ donc on a le résultat attendu.

D **1.** Pour **a.** et **d.**, il s'agit d'une somme de nombres positifs et multipliés entre eux donc les fonctions sont positives. Pour e, $-x^2$ et -5 sont négatifs donc f aussi.
2. a. f est définie pour $x\neq 2$ et on a alors $(x-2)^2>0$.
$2x^2-4x-6$ a pour racines -1 et 3.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$(x-2)^2$			$+$		‖		$+$		
$2x^2-4x-6$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de f		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

b. g est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$1{,}5$		$+\infty$
$(2x-3)$			$-$		0	$+$	
e^x-1		$-$	0		$+$		
Signe de g		$+$	0	$-$	0	$+$	

Activités en situation...

Consolider les bases

1. ① Fausse, f sur $[1;2]$.

② Fausse, f' sur $[1;2]$.

③ Vraie, sur $[1{,}5;+\infty[$.

2. $f'(x)=2\mathrm{e}^x+(2x-1)\mathrm{e}^x=(2x+1)\mathrm{e}^x$, s'annule en $x=-0{,}5$. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$ et $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

On calcule les images de -1, $-0{,}5$ et 1.

Pour le signe de f, $\mathrm{e}^x>0$ donc f est du signe de $(2x-1)$ qui s'annule en 0,5 et $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Situation 1 Modèle défini par une fonction

1. On a quatre représentations de fonctions affines par morceaux. ① et ③ sont des fonctions affines par morceaux non continues ; pour ② et ④ on a représenté une fonction continue : il n'y a pas de « trous ».

2. Premier type : les tarifs des envois postaux en fonction du poids.

Deuxième type : températures relevées en fonction du temps.

Situation 2 Une bille plongée dans l'eau

1. a. $V_{\text{eau+bille}}=\pi r^2h=\pi\times10^2\times8=800\pi$ et $V_{\text{bille}}=\dfrac{256}{3}\pi$

donc $V_{\text{eau}}=\left(800-\dfrac{256}{3}\right)\pi=\dfrac{2144}{3}\pi$

b. $V_{\text{eau+bille}}=\pi r^2h=\pi\times10^2\times2x=200\pi x$; on a alors : $\dfrac{2144}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi x^3=200\pi x$ puis en multipliant par 3 et simplifiant par π, on obtient $2144+4x^3-600x=0$ ssi $x^3-150x+536=0$

2. a. b. Voir énoncé.

c. La courbe de f coupe 3 fois l'axe des abscisses.

3. a. $R\in[0;10]$

b. Sur $[0;10]$ on voit graphiquement que f s'annule deux fois, dont une fois en 4, rayon de la première bille, il reste alors une seule solution au problème.

c. $f(4)=0$ / $f(9)<0$ et $f(10)>0$ et d'après le graphique on a nécessairement $9<R<10$.

d.

Fonctions | Graphique | Tableau

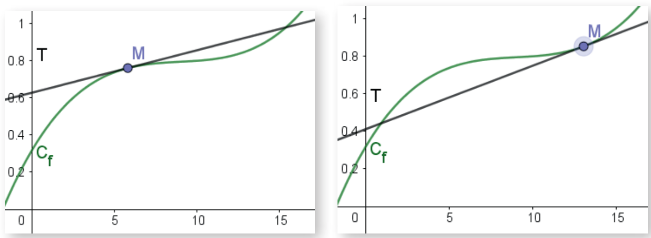
Régler l'intervalle

9.1	-75.429
9.2	-65.312
9.3	-54.643
9.4	-43.416
9.5	-31.625
9.6	-19.264
9.7	-6.327
9.8	7.192
9.9	21.299

On a donc $9{,}7<R<9{,}8$.

Situation 3 L'évolution du taux d'équipement en ordinateur

1. a.



b. La tangente T semble être en au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0;9]$ et en dessous sur $[9;+\infty[$.

c. Il semble y avoir un changement de position entre T et $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=9$.

2. a. $f'(x)=0{,}0018x^2-0{,}0324x+0{,}1504$

b. $f''(x)=0{,}0036x-0{,}0324$ s'annule en 9.

x	0		1		$+\infty$
Signe de f''		$-$	0	$+$	
f'	0,1504	↘	0,0046	↗	

c. Il y a un changement de variation de la dérivée f' en $x=9$.

3. Le taux d'équipement en ordinateur augmente depuis 2003. 9 ans après 2003 (donc en 2012), le taux continue à augmenter mais moins vite suite à l'introduction des tablettes.

Méthode

Capacité 1 Calculer une fonction dérivée

1 **1.** $f'(x)=(3x^2+2x)\mathrm{e}^{x^3+x^2}=x(3x+2)\mathrm{e}^{x^3+x^2}$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x^3+x^2}>0$ donc f' est du signe de $x(3x+2)$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		0		$+\infty$
x			$-$		0	$+$	
$3x+2$		$-$	0		$+$		
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$\mathrm{e}^{\frac{4}{27}}$	↘	1	↗	

2. $f(-1)=1$ et $f'(-1)=1$

$y=1(x-(-1))+1$ donc $y=x+2$.

2 $f'(x)=2\times(x^3-1)\times3x^2=6x^2(x^3-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2(x^3-1)=0 \Leftrightarrow x^2=0$ ou $x^3-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

La courbe $\mathscr{C}$ admet donc deux tangentes horizontales au point d'abscisse $x=0$ et $x=1$.

3 $f'(x)=\dfrac{-3}{2\sqrt{-3x+9}}$; le numérateur est négatif et le dénominateur est positif donc sur $]-\infty;3]$ $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante, autrement dit monotone.

4 **1.** On a $h'(x)=\dfrac{1\times(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

2. Sur $[-2;2]$ le dénominateur est strictement positif.
h' est du signe du numérateur, qui s'annule en -1 et 1.

x	-2		-1		0		2
Signe de h'		$-$	0	$+$	0	$-$	
h	$-0{,}4$	↘	$-0{,}5$	↗	$0{,}5$	↘	$0{,}4$

Capacité 3 — Déterminer des valeurs approchées des solutions d'une équation du type $f(x)=k$

5 **1.** $f'(x)=3x^2-x-2$ s'annule en 1 et $-\dfrac{2}{3}$.

x	-2		$-\dfrac{2}{3}$		1		2
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-3	↗	$\dfrac{103}{27}$	↘	$1{,}5$	↗	5

2. **a.** Trois solutions
b. Une solution
c. Aucune solution

6 **1.** $g'(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$ s'annule en -1 et 1.

x	-3		-1		1		6
Signe de g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	-2	↗	$-\dfrac{22}{3}$	↘	$-\dfrac{26}{3}$	↗	58

2. Sur $[-3;1]$, le maximum de g est $\dfrac{-22}{3}$ donc g ne s'annule pas. Sur $[1;6]$, g est continue et strictement croissante et $0\in\left[\dfrac{-26}{3};58\right]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $[1;6]$ et donc sur $[-3;6]$. Par balayage à la calculatrice, on obtient $3{,}229<\alpha<3{,}230$

3.

x	-3		α		6
Signe de g		$-$	0	$+$	

7 **1.** $f'(x)=3e^{3x}-3=3(e^{3x}-1)$. On a donc :

x	-2		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	↘	2	↗	$f(1)$

$f(-2)=e^{-6}+7\approx 7{,}002$
$f(1)=e^3-2\approx 18{,}1$

2. En appliquant la propriété des valeurs intermédiaires, on trouve deux solutions à l'équation $f(x)=3$. Une solution x_1 sur l'intervalle $[-2;0]$ et une solution x_2 sur l'intervalle $[0;1]$.

3. Par balayage à la calculatrice, on trouve $x_1\approx -0{,}61$ et $x_2\approx 0{,}38$.

8 Pour $k>5$ ou $k<-2$: pas de solution.
Pour $3<k\leqslant 5$ ou $k=-2$: une solution.
Pour $-2<k\leqslant 3$: deux solutions.

Capacité 4 — Reconnaître graphiquement la convexité, la concavité d'une fonction, un point d'inflexion

9 **1.** f semble convexe sur $[-1;2]$ et concave sur $[2;7]$.
2. La courbe admet un point d'inflexion en $x=2$.

10 **1.** Par lecture graphique, la courbe semble en dessous de ses tangentes sur $[-2;1]$ et sur $[4;6]$, et au-dessus de ses tangentes sur $[1;4]$. On en déduit que la fonction g semble concave sur $[-2;1]$ et sur $[4;6]$ et convexe sur $[1;4]$.

2. La fonction semble changer de convexité en $x=1$ et $x=4$. La courbe semble traverser sa tangente en ces points et admettre un point d'inflexion au point d'abscisse 1 et un autre au point d'abscisse 4.

Capacité 2 — Dresser et exploiter un tableau de variations

11

x	-1		$-0{,}2$		α		8
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

12 $f'(x)=\dfrac{e^x\times x^2-e^x\times 2x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

x	1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	↘	$0{,}25e^2$	↗	$0{,}0625e^4$

a. f' change de signe en 2 donc faux.
b. $e\approx 2{,}718$; $0{,}25e^2\approx 1{,}85$ et $0{,}0625e^4\approx 3{,}4$

$3>e$ et $\dfrac{e^2}{4}<3<\dfrac{e^4}{16}$ donc vrai.

c. Sur $[1;2]$ la fonction f est décroissante donc l'ordre des images est inversé. Faux.

CAPACITÉ 5 Étudier la convexité, la concavité d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle

13 **1.** $f'(x)=4x^3-9x^2-12x$ et $f''(x)=12x^2-18x-12$.
On a $\Delta=900$ et $x_1=-0{,}5$ et $x_2=2$. D'où le tableau de signes de f'' :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Sur $]-\infty;-0{,}5]$ et sur $[2;+\infty[$, f'' est positive, donc f' est croissante et f est convexe.
Sur $[-0{,}5;2]$, f'' est négative, donc f' est décroissante et f est concave.
La courbe de f admet deux points d'inflexion : aux points d'abscisse $-0{,}5$ et 2.

14 **1.** $f''(x)=\dfrac{-3}{(x+2)^2}<0$ donc f est strictement décroissante sur $[1;5]$.

2. $f''(x)=\dfrac{3\times(2x+4)}{(x+2)^4}=\dfrac{6}{(x+4)^3}>0$ donc f est convexe.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b et c **2.** a **3.** b **4.** b et c **5.** a
6. a et c **7.** a **8.** b **9.** a, b et c

vrai ou faux ?

Partie A. **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Faux **4.** Faux **5.** Faux

Partie B. **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Faux **4.** Vrai

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

15 Le discriminant vaut $7^2-4\times2\times3=25$ et les racines sont $-0{,}5$ et 3.

16 On factorise par e^x le numérateur et dénominateur du 1[er] membre : $\dfrac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})}$ et on simplifie par $\mathrm{e}^x\neq0$.

17 **1.** $A(x)=\mathrm{e}^{x+x}+3\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}=3\mathrm{e}^x$
2. $B(x)=3x^2+9x-30$
3. $E(x)=2x\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^x-4$

18 **1.** $A(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-4)$
2. $B(x)=-x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(-x+1)$
3. $C(x)=(\mathrm{e}^{3x})^2-3^2=(\mathrm{e}^{3x}-3)(\mathrm{e}^{3x}+3)$

19 **1.** $2x+1=0$ ou $x^2+2x-15=0$ ssi $x=-0{,}5$ ou $x=3$ ou $x=-5$.
2. $\mathrm{e}^x>0$ donc une seule solution : $\dfrac{1}{3}$.
3. Le dénominateur est strictement positif donc une seule solution : $\dfrac{3}{4}$.

20 **1.** $\Delta=-3$ donc le trinôme est du signe de $a=1$, donc positif d'où $S=\varnothing$.
2.

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
$x+6$		$-$	0		$+$		
e^x-1			$-$		0	$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $S=]-\infty;-6]\cup[0;+\infty[$.

21 **1.** $S=\dfrac{50\times51}{2}=1275$
2. $S=1+3^2+\ldots+3^5=\dfrac{1-3^6}{1-3}=364$

22 **1.** $u_1=48\,;u_{13}\approx427{,}97\,;u_{27}\approx5\,494{,}82$
2. $v_2=32\,;v_{13}\approx2{,}75\,;v_{27}\approx0{,}12$

23 **1.** $u_0=5\,;u_1=5{,}75\,;u_2=6{,}4625$
2. Elle n'est ni arithmétique ni géométrique.

24 =3*B2+A2+1

Automatismes du thème

25 **1.**

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		$+\infty$
$7x^2+2x+3$		$+$	

4. $-3x^2+4x=x(-3x+4)$

x	$-\infty$		0		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0		$+$		
$-3x+4$			$+$		0	$-$	
$-3x^2+4x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

26 Valeur exacte $\frac{1}{3}$ et non 0,33 et $e^{-x} > 0$ donc signes faux y compris sur la dernière ligne.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
e^{-x}		+		+	
$-3x+1$		+	0	−	
$f(x)$		+	0	−	

27 f est strictement décroissante sur $[-7;1]$ et strictement croissante sur $[1;6]$.

28

x	1		3		4		5
Signe de f'		−	0	+	0	−	

29 **1.** $f'(x) = 8(4x+1) = 32x+8$
2. $f'(x) = 72x - 12 = -12(-6x+1)$
3. $f'(x) = 10e^{2x+4}$
4. $f'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x+1}$
5. $f'(x) = 2e^{x}(e^{x}+1)$
6. $f'(x) = -8xe^{x^2}$

30 $f'(x) = 2x + 2e^{2x} - 2$ et on dérive de nouveau ce qui donne bien le résultat affiché.

31 **1.** $f'(x) = \dfrac{4e^{x} - (4x+1)e^{x}}{(e^{x})^2} = \dfrac{3-4x}{e^{x}}$

Une équation de la tangente en 0 est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ d'où $y = 3x+1$

2. $f'(x) = 3x^2 + 8x$

Une équation de la tangente en 1 est :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ d'où
$y = 11(x-1) + 4 = 11x - 7$

32 **1.** $f''(x) = -e^{x} < 0$ donc f est concave sur $\mathbb{R}$.
2. $f''(x) = e^{x} + 6 > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

33 **1.** $f(1) = -1$; $f'(1) = -1$; $f''(1) = 0$
2. $f''(x) = 6x - 6$ s'annule en 1 et change de signe donc A est un point d'inflexion.

exercices Application

Consolider les bases

34 **1.** $\Delta = 1{,}44$; 2 racines : 1 et 5.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

2.

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		+		+	0	−	
$2x+8$		−	0	+		+	
Signe de f		−	0	+	0	−	

3. $e^{-0{,}1x} > 0$ donc f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
4. $f(x) > 0$ ssi $e^{2x} > 1$ ssi $x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	

35 **1.** $f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$
2. $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} - 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
3. $f'(x) = 5e^{x} - 1$

36 $\mathscr{C}_2$ pour f ; $\mathscr{C}_3$ pour f' ; $\mathscr{C}_1$ pour f''.

37 **1.** $f'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}8x - 1{,}5$

x	1		5		10
Signe de f'	0	+	0	−	
f	1,3	↗	4,5	↘	−23

2. $f'(x) = -6x + 12$

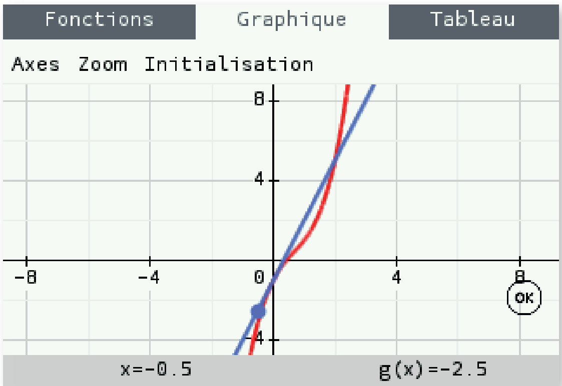
x	5		15
Signe de f'		−	
f	−24	↘	−504

3. $f'(x) = \dfrac{3}{(3x+6)^2}$

x	−1		3
Signe de f'		+	
f	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{3}{5}$

38 **1.** $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ avec $\Delta = -20 < 0$. Le signe de a est positif donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x, ce qui implique que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Une équation de la tangente en 0 est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ d'où $y = 3x - 1$
3. $f(x) - (3x-1) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ qui s'annule en 0 et 2 donc la droite traverse 2 fois la courbe $\mathscr{C}$. On a $f(x) - (3x-1) > 0$ ssi $x > 2$ donc la courbe est au-dessus de la droite sur $]2;+\infty[$, en dessous sinon.

4.



39 1. $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

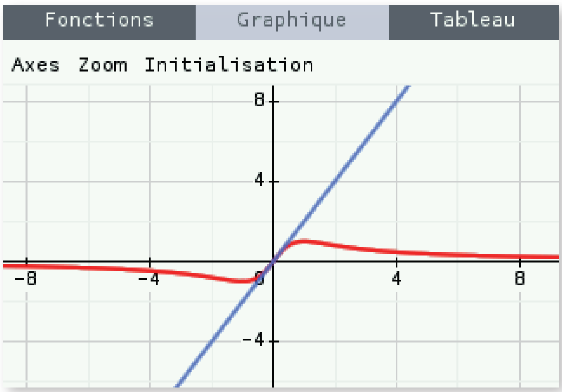
2. Une équation de la tangente en 0 est :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0) \text{ d'où } y=2x$$

3. a. $f(x)-2x=\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2x(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{-2x^3}{x^2+1}$

b. $f(x)-2x>0$ ssi $-2x^3>0$ ssi $x<0$ donc sur $]-\infty\,;0[$ la courbe est au-dessus de la droite et en dessous sur $]0\,;+\infty[$.

4.



Connaître le cours

40 **Diaporama QCM**

1. d 2. a 3. a 4. b
5. c 6. d 7. b 8. a

Diaporama exo

1. $f'(x)=2(x^3-x)(3x^2-1)$
2. $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f'(x)=3x^2e^{x^3}$
4. $f'(x)=3x^2+8x-2$ et $f''(x)=6x+8$
5. L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[1;4]$.
6. f est convexe sur $[-4;0]$ puis concave sur $[0;6]$. La courbe de f admet un point d'inflexion en $x=0$.
7. f est convexe sur $]-\infty\,;-1]$ puis concave sur $[-1;+\infty[$. La courbe de f admet un point d'inflexion en $x=-1$.
8. f est concave sur $]-\infty\,;0]$ puis convexe sur $[0\,;+\infty[$. La courbe de f admet un point d'inflexion en $x=0$.

Démo

41 f est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Elle est de la forme $u\times v$ donc on applique la formule et on obtient bien $2u'\times u$.

42 1. Vrai 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai 5. Faux

43 1. a. La courbe est en dessous de ses tangentes.
b. La fonction est donc concave.
2. La fonction est convexe.
3. a. La tangente traverse la courbe.
b. Ni convexe ni concave.

44 • Carré : convexe sur $\mathbb{R}$; $f''(x)=2>0$.

• Inverse : concave sur $]-\infty\,;0[$, convexe sur $]0\,;+\infty[$; $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ négative sur $]-\infty\,;0[$, positive sur $]0\,;+\infty[$.

• Cube : concave sur $]-\infty\,;0]$, convexe sur $[0\,;+\infty[$ et point d'inflexion en 0 ; $f''(x)=6x$ s'annule et change de signe en 0.

• Racine carrée : concave sur $[0\,;+\infty[$; $f''(x)=\dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}<0$ sur $[0\,;+\infty[$.

• Exponentielle : convexe sur $\mathbb{R}$; $f''(x)=e^x>0$ sur $\mathbb{R}$.

Travailler les capacités du thème

45 1. $f'(x)=2\times 6x^2\times(2x^3-3)=12x^2(2x^3-3)$
2. $f'(x)=8\times(-8x+3)\times(-4x^2+3x+5)$
3. $f'(x)=6(x-1)^2+0{,}5=6x^2-12x+6{,}5$

46 1. $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$
2. $f'(x)=2\dfrac{x^2-x-1}{(x^2+1)^2}$
3. $f'(x)=\dfrac{x^2-8x+3}{(2x-8)^2}$

47 1. $f'(x)=-6xe^{-x^2}$
2. $f'(x)=0{,}3e^{-0{,}1x+3}$
3. $f'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+10}}$

48 1. $f'(x)=(-x+1{,}5)e^{-0{,}5x}$
2. $f'(x)=(1{,}5x-2{,}5)e^{3x+1}$
3. $f'(x)=\dfrac{3-2x}{e^{2x}}$

49 1. $f'(x)=3x^2-6x+4$
$\Delta=-12<0$ donc f' est positive et f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $f'(x)=-0{,}3e^{-0{,}1x}$ donc f' est négative et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. $f'(x)=\dfrac{-6}{(x+2)^2}$ donc f' est négative et f est décroissante sur $]-2\,;+\infty[$.
4. $f'(x)=-8e^{2x}$ donc f' est négative et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

50 **1.** $f'(x)=x^2-2x-3$

x	-3		-1		3		6
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-8	↗	$\frac{8}{3}$	↘	-8	↗	19

2. $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

Racines du numérateur : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

x	-2		x_1		x_2		4
Signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	$\frac{7}{17}$

3. $f'(x)=(2-2x)e^{-x}$

x	-5		1		5
Signe de f'		$+$	0	$-$	
f	$-10e^5$	↗	$2e^{-1}$	↘	$10e^{-5}$

51 **1.** $f'(x)$ est du signe de $(-x+1{,}5)$ donc f est croissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\,;+\infty[$.

2. $f'(x)$ est du signe de $(1{,}5x-2{,}5)$ donc f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{5}{3}\,;+\infty\right[$.

3. $f'(x)$ est du signe de $(3-2x)$ donc f est croissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\,;+\infty[$.

52 **1.** Faux, 2 solutions
2. Vrai
3. Vrai

53 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ s'annule en 0 et 2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	-1	↘	-5	↗	

Sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$, la fonction est strictement négative donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution. On a $f(4)=15>0$ donc sur $]4\,;+\infty[$ on a $f(x)>15$ et donc pas de solution.
Sur l'intervalle $[2\,;4]$, f est continue et strictement croissante avec $f(2)$ et $f(4)$ de signes contraires. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α dans $[2\,;4]$ et donc dans $\mathbb{R}$.
$f(3)=-1<0$ donc $3<\alpha<4$.

54 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ est du signe de $x-1$ donc f est décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Or $f(1)=e>1$ qui est le minimum de f donc cette équation n'a pas de solution.

55 **1.** $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	↗	16	↘	-16	↗	144

2. Sur $[-3\,;2]$, le maximum de f est 16, l'équation $f(x)=50$ n'admet pas de solution.
Sur $[2\,;6]$, f est continue, strictement croissante, à valeurs dans $[f(2)\,;f(6)]$ et $50\in[f(2)\,;f(6)]$, donc par la propriété des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=50$ admet une solution.
Sur $[-3\,;6]$, l'équation $f(x)=50$ admet donc une unique solution notée α.
3. $4<\alpha<5$
4.

X	Y1
4.7	47.423
4.71	47.967
4.72	48.514
4.73	49.064
4.74	49.616
4.75	50.172
4.76	50.73
4.77	51.291

$4{,}74<\alpha<4{,}75$

56 **1.** $f'(x)=0{,}2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$ sur $]0\,;4]$.

x	0		4
Signe de f'		$+$	
f	-4	↗	$6{,}4$

f est continue et strictement croissante sur $[0\,;4]$ avec $f(0)$ et $f(4)$ de signes contraires donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α dans $[0\,;4]$.
2. a. $f(2)=2\sqrt{2}-3{,}6<0$, la solution se trouve alors dans $[2\,;4]$.
b. $f(3)=2\sqrt{3}-3{,}1>0$, la solution se trouve dans $[2\,;3]$.
3. $f(2{,}5)=2\sqrt{2{,}5}-3{,}375<0$ donc $2{,}5<\alpha<3$.

57 **1.** Il a recherché l'intersection des courbes $y=e^x$ et $y=3$, la calculatrice affiche à 0,001 près : $x=1{,}099$.
2. a. $-0{,}693$ **b.** $1{,}609$ **c.** $2{,}996$
d. $3{,}912$ **e.** $5{,}298$ **f.** $6{,}215$

58 **1.** Vrai **2.** Vrai **3.** Faux **4.** Vrai

59 **1.** c **2.** b **3.** b

60 **1. a.** Sur $[-3;1]$ les coefficients directeurs sont de plus en plus petits donc f' est décroissante.
b. f est alors concave.
2. f' est croissante donc f convexe sur $[1;5]$.
3. Oui en 1.

61 **1.** On sépare les fonctions croissantes et décroissantes (variations de f) puis convexes et concaves (variations de f').
a. Fonction g
b. Fonction h
c. Fonction k
d. Fonction f
2. f et k : convexes, g et h : concaves.

62 **1.** Convexe **2.** Concave

63 **1.** $(1;2)$ **2.** $(0;2)$

64 **1.** a et c
2. b

65 **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Vrai
4. Faux **5.** Vrai

66 **1.** Pour f : sommet « en bas », convexe ; pour g : sommet « en haut », concave.
2. a. $f'(x)=x+2$ et $f''(x)=1$
b. $g'(x)=-x-1$ et $g''(x)=-1$
3. Les signes de f'' et g'' confirment les conjectures.

67 **1.** $f''(x)$ est du signe de $x-4$ donc négatif sur $[-1;4]$ et positif sur $[4;8]$.
2. f est donc convexe sur $[4;8]$ et concave sur $[-1;4]$.
3. La courbe admet un point d'inflexion en 4.

68 **1.** $f''(x)=12x^2 \geqslant 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. $f''(x)=2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5x}>0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. $f''(x)=-4<0$ donc f est concave sur $\mathbb{R}$.
4. $f''(x)=-45\mathrm{e}^{3x}<0$ donc f est concave sur $\mathbb{R}$.

69 **1.** $f''(x)=6x$ s'annule et change de signe en 0, donc $A(0;5)$ est le point d'inflexion de la courbe.
2. $f''(x)=\mathrm{e}^x-1$ s'annule et change de signe en 0, donc $A(0;1)$ est le point d'inflexion de la courbe.
3. $f''(x)=18(x-1)$ s'annule et change de signe en 1, donc $A(1;2)$ est le point d'inflexion de la courbe.
4. $f''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$, s'annule et change de signe en $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, donc $A\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}};0{,}9\right)$ et $B\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}};0{,}9\right)$ sont les points d'inflexion de la courbe.
5. $f''(x)=\mathrm{e}^{-x^2}(4x^2-2)$ s'annule et change de signe en $-\sqrt{0{,}5}$ et $\sqrt{0{,}5}$, donc $A\left(-\sqrt{0{,}5};\mathrm{e}^{-0{,}5}\right)$ et $B\left(\sqrt{0{,}5};\mathrm{e}^{-0{,}5}\right)$ sont les points d'inflexion de la courbe
6. $f''(x)=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$ s'annule et change de signe en 2 donc $A(2;2\mathrm{e}^{-2})$ est le point d'inflexion de la courbe.

exercices Entraînement

1 Dérivation et applications

70 **1.** La courbe ① est positive, négative puis positive et s'annule en $x=1$ et $x=3$. Ce qui correspond aux variations de f. C'est donc la courbe de f'.
2. a. $f(1)=\dfrac{1}{4}\times 1^3+a\times 1^2+b\times 1=\dfrac{1}{4}+a+b$
$f(3)=\dfrac{1}{4}\times 3^3+a\times 3^2+b\times 3=\dfrac{27}{4}+9a+3b$
b. La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(1;1)$ et $B(3;0)$ donc $f(1)=1$ et $f(3)=0$.
On doit donc résoudre le système $\begin{cases}\dfrac{1}{4}+a+b=1\\ \dfrac{27}{4}+9a+3b=0\end{cases}$
On trouve : $a=-\dfrac{3}{2}$ et $b=\dfrac{9}{4}$.
D'où $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{9}{4}x$.
3. $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-3x+\dfrac{9}{4}$
$f'(1)=\dfrac{3}{4}-3+\dfrac{9}{4}=0$ et $f'(3)=0$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet deux tangentes horizontales aux points A et B.

71 **1. a.** $f(0)=-1$
b. $f(0)=b\mathrm{e}^0=-1$ donc $b=-1$
2. a. $f'(0)$ est le coefficient directeur de $\mathscr{T}$: $f'(0)=1$.
b. On applique la dérivée de $u\times v$ et on obtient la formule.
c. $f'(0)=(a+b)\mathrm{e}^0=1$ donc $a-1=1$ d'où $a=2$.
3. a. $(2x-1)\mathrm{e}^x=0$ ssi $2x-1=0$ ssi $x=0{,}5$ donc la courbe coupe l'axe des abscisses en $B(0{,}5;0)$.
b. La tangente est horizontale ssi la dérivée est nulle ; $(2x+1)\mathrm{e}^x=0$ ssi $x=-0{,}5$. Donc au point $C(-0{,}5;-2\mathrm{e}^{-0{,}5})$.

72 **1.** $f'(x)=1{,}11x^2-18{,}7x+76{,}51$ s'annule en 7 et en $\dfrac{21{,}86}{2{,}22}$ qui n'appartient pas à $[6;9]$; $f'(x)$ est alors positive sur $[6;7]$ et négative sur $[7;9]$ d'où f croissante sur $[6;7]$ et décroissante sur $[7;9]$.
2. f est maximale en 7 donc le pH doit être de 7.

73 **1.**
$f'(x)=4\mathrm{e}^{-0{,}25x}+4x\times(-0{,}25)\mathrm{e}^{-0{,}25x}=\mathrm{e}^{-0{,}25x}(4-x)$
2.

x	0		4		18
Signe de f'		+	0	−	
f	0	↗	$16\mathrm{e}^{-1}$	↘	$-72\mathrm{e}^{-4{,}5}$

3. Le maximum est atteint au bout de 4 jours avec 5 886 jouets.

74 **1.** Pour $x=5$, on obtient $-5\mathrm{e}^{-1{,}25}\approx -1{,}4325$ soit une perte de 14 325 €.

2. a.

x	2		6		20
$B(x)$		$-$	0	$+$	

b. Au moins 600 L.

3. a. $B'(x)=\mathrm{e}^{-0,25x}(12,5-1,25x)$

x	2		10		20
Signe de B'		$+$	0	$-$	
B	$-20\mathrm{e}^{-0,5}$	$\nearrow$	$20\mathrm{e}^{-2,5}$	$\searrow$	$70\mathrm{e}^{-5}$

b. 1 000 L

75 **1.** $B(x)>0$ ssi $4x^2+2x-2>0$ ssi $x>0,5$ (car la seconde racine est $-2<0$) donc l'entreprise doit construire plus de 50 pièces.
2. $B'(x)=(-4x^2+6x+4)\mathrm{e}^{-x}$ s'annule en 2 uniquement (car $-0,5<0$) donc $B'(x)\geqslant 0$ sur $[0;2]$ et $B'(x)\leqslant 0$ sur $[2;8]$. On en déduit les variations de B et le nombre de pièces pour lequel le bénéfice est maximal (en $x=2$) : 200 pièces.

2 Fonctions continues

76 **1.** Pour 44 kg : 39,60 € / Pour 50 kg : 35 € donc elle a raison.
2. Pour 52 kg : 36,40 €, oui il fait des économies.

77 **1.** $f(0)=1,44$. La glycémie est de 1,44 g/L au moment de l'injection.
2. $f'(t)=-0,48\mathrm{e}^{-0,8t}$ donc f' est négative et f est décroissante sur $[0;7]$.
La glycémie diminue au fil des heures.
3. a. $f(0,5)\approx 1,24$. La glycémie descend à 1,24 gramme par litre en environ 30 minutes.
b. $1,44-0,5=0,94$
$f(2,2)\approx 0,9432$ et $f(2,3)\approx 0,935$ donc au bout d'environ 2,3 heures, la glycémie a baissé de 0,5 gramme par litre.

78 **1.** $f'(x)=0,6912x^2-1,728x$ s'annule en 0 et en 2,5 donc la pente est bien nulle en ces 2 points.
2. $f''(x)=1,3824x-1,728$ s'annule et change de signe en 1,25.
La pente la plus forte est donc en 1,25.

x	0		1,25		2,5
Signe de f''		$-$	0	$+$	
f'	0	$\searrow$	$f'(1,25)$	$\nearrow$	0

3. Sur l'échelle, la barre est attachée au point de coordonnées $(-0,5;1)$ et sur le toboggan au point de coordonnées $(a;1)$ où a est un antécédent de 1 par f. À la calculatrice, on obtient avec la propriété des valeurs intermédiaires $a\approx 1,16$. La barre mesure donc environ 2,16 m.

79 **1. a.** $f'(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}\geqslant 0$ d'où f est croissante sur $[0;5]$.
b. $f(0)=1$ et $f(3)\approx 1,96$. Or f est continue et croissante sur $[0;3]$ et $1,85\in[1;1,96]$ donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires il existe une valeur de x pour laquelle $f(x)=1,85$.
2. a. On obtient $x\approx 1,833$.
b. Octobre 2016

80 **1. a.** $f'(x)=\dfrac{3-3x^2}{(x^2+2x+1)^2}$ s'annule en 1 sur $[0,5;4]$ d'où f strictement croissante sur $[0,5;1]$ et strictement décroissante sur $[1;4]$.
b. $f(4)=0,48<0,5$
2. a. 4
b. À partir du 4e semestre.

81 **1. a.** $f(30)=3\,014$ et $g(30)=3\,470$. Cela signifie que si le livre est vendu 30 €, l'éditeur est prêt à vendre 3 014 livres et les consommateurs prêts à acheter 3 470 livres. Donc l'offre est inférieure à la demande.
b. $f(50)=4130$ et $g(50)=2530$. Si le livre est vendu 50 €, l'offre est alors supérieure à la demande.
2. f est une fonction affine de coefficient directeur positif donc f est strictement croissante. Plus le prix du livre augmente, plus l'éditeur est prêt à vendre.
3. $g'(x)=-0,09x^2+10x-300$ avec $\Delta<0$ est strictement négative donc g est strictement décroissante sur $[15;75]$. Plus le prix du livre augmente, moins les consommateurs sont prêts à acheter.
4. $f(x)=g(x)$ équivaut à $f(x)-g(x)=0$ c'est-à-dire $0,03x^3-5x^2+355,8x-7\,440=0$.
On pose $d(x)=0,03x^3-5x^2+355,8x-7\,440$.
$d'(x)=0,09x^2-10x+355,8$ qui garde un signe strictement positif sur $[15;17]$ donc d est strictement croissante. Elle est continue, $d(30)<0$ et $d(50)>0$ donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, d s'annule une seule fois entre 30 et 50. On obtient environ 33,53 € à la calculatrice pour une offre et demande de 3 211 livres.

82 **1. a.** $f'(x)=-0,3465(\mathrm{e}^{0,033x}-\mathrm{e}^{-0,033x})$
$=-0,3465\mathrm{e}^{0,0033x}(1-\mathrm{e}^{-0,066x})$
$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-0,066x}<0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,066x}>1 \Leftrightarrow 0,066x<0$
$\Leftrightarrow x<0$
b.

x	-100		0		100
Signe de f'		$+$	0	$-$	
f	$f(-100)$	$\nearrow$	191	$\searrow$	$f(100)$

c. On cherche à encadrer la valeur positive de x telle que $f(x)=0$; on obtient 90,99 et 91.
d. Une équation de la tangente en 60 est :
$$y=f'(60)(x-60)+f(60)$$
d'où $y=-2,46(x-60)+134,5=-2,46x+282,1$

2. a. Hauteur de 191 m.
b. Largeur de 182 m.
c. La tangente touche l'axe des abscisses pour $-2{,}46x+282{,}1=0$ c'est-à-dire $x=114{,}7$, on est donc à 23,7 m des pieds.

83 **1.** $f'(x)=(2-2x)\mathrm{e}^{-x}$ s'annule en **1**.

x	0		1		6
Signe de f'		+	0	−	
f	0	↗	$2\mathrm{e}^{-1}$	↘	$12\mathrm{e}^{-6}$

2. a. Les intervalles images $[0\,;2\mathrm{e}^{-1}]$ et $[12\mathrm{e}^{-6}\,;2\mathrm{e}^{-1}]$ contiennent tous les deux 0,65 ; on applique deux fois la propriété des valeurs intermédiaires sur $[0\,;1]$ et sur $[1;6]$.
b. $x_1\approx 0{,}58$ et $x_2\approx 1{,}58$
3. La durée comprise entre les 2 valeurs est de 1 minute donc oui le personnel a été affecté par la fuite.

84 **1.** La fonction f' est positive sur $]-\infty\,;-2]$ et négative sur $[-2\,;+\infty[$. Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et décroissante sur $[-2\,;+\infty[$ ce qui correspond à la courbe ①.
La fonction f' est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ et croissante sur $[-1;+\infty[$. Donc la fonction f'' est négative sur $]-\infty\,;-1]$ et positive sur $[-1;+\infty[$ ce qui correspond à la courbe ③.
2. La fonction f' change une fois de variation en $x=-1$ donc la courbe de f admet un point d'inflexion en $x=-1$.

3 Étude de la convexité d'une fonction

85 **Partie A**
1. Jours 10 et 27.
2. Au 20e jour, 4 000 malades.
3. a. Sur $[0\,;10]$
b. Sur $[10\,;20]$
c. Sur $[20\,;30]$
4. Au 10e jour

Partie B
1. $f'(t)=-3t^2+60t=3t(20-t)$

t	0		20		30
Signe de f'	0	+	0	−	
f	0	↗	4 000	↘	0

2. a. $f'(5)=225$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f, qui donne une estimation de la propagation à $t=5$.
b. Au 10e jour : $f'(10)=300$; au 15e jour : $f'(15)=225$.
3. a. $f''(t)=-6t+60$ s'annule et change de signe en 10 ; f est alors convexe sur $[0\,;10]$ et concave sur $[10\,;30]$ ce qui confirme les résultats de **A.3** quant à la vitesse de propagation.
b. La vitesse de propagation diminue après J10 car f' est alors décroissante.

86 **1. a.** $C''(q)=0{,}03(q-40)$ s'annule et change de signe en 40 donc la courbe admet un point d'inflexion en 40.
b. $C''(q)<0$ sur $[20\,;40]$ donc C est concave sur $[20\,;40]$, de même C est convexe sur $[40\,;70]$.
2. a. et **b.** Puisque C est concave sur $[20\,;40]$ et convexe sur $[40\,;70]$, C' est donc décroissante sur $[20\,;40]$ et croissante sur $[40\,;70]$, son minimum est donc atteint en 40.

87 **Partie A**
1. $f'(x)=\dfrac{12\,750\mathrm{e}^{-x}}{(1+150\mathrm{e}^{-x})^2}>0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;12]$.
2. a. À la 5e année.
b. $f''(x)=\dfrac{12750\mathrm{e}^{-x}(150\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+150\mathrm{e}^{-x})^3}$ s'annule et change de signe en $x=-\ln\left(\dfrac{1}{150}\right)\approx 5{,}01$ donc la courbe admet un point d'inflexion en $-\ln\left(\dfrac{1}{150}\right)$.

Partie B
1. À partir de 2010, la fonction f est « presque constante », à 85 environ, ce qui n'est pas le cas dans la réalité. La fonction g, elle, semble être décroissante ce qui correspond plus au contexte d'une diminution du taux d'équipement en DVD.
2. $g'(x)=-0{,}078x^2+1{,}84x-11{,}6$ ne s'annule pas sur $[9\,;+\infty[$ et garde donc un signe strictement négatif d'où g décroissante.
3. a. $g''(x)=-0{,}156x+1{,}84$ s'annule en $\dfrac{1{,}84}{0{,}156}$ donc g' est croissante sur $\left[9\,;\dfrac{1{,}84}{0{,}156}\right[$ et décroissante ensuite. La décroissance de g s'accélère après environ 12 années.
b. La courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{1{,}84}{0{,}156}$.
4. On cherche le premier entier x tel que $g(x)=0$ (à la calculatrice), g s'annulerait en $x=26$ soit en 2024.

Apprendre à modéliser

1. a. Jaune : en observant la courbe, le rythme de croissance augmente jusque vers 1960 et semble ralentir ensuite puis il est quasiment constant depuis 2010.
Vert : la courbe est « quasi horizontale » et « monte » rapidement après 1945.
Violet : la courbe « monte » toujours mais ralentit (après une inflexion vers 1970).
Rouge : après 2010, courbe « plate ».
b. f est convexe sur $[1940\,;1965]$ puis concave sur $[1965\,;1980]$ puis convexe sur $[1980\,;2000]$ puis concave sur $[2000\,;2016]$.
2. a. $t(8)\approx 68{,}6$. La valeur effective du taux en 1968 est de 70 % ; soit 1,4 point d'erreur avec la réalité.

$\frac{70-68,6}{70} \approx 2,3\,\%$ un pourcentage d'erreur de 2,3 %.

b. $t'(x)=0,00084x^2-0,0552x+0,968$

$t''(x)=0,00168x-0,0552$

c. $t'(x)>0$ $(\Delta<0)$ donc t est croissante.

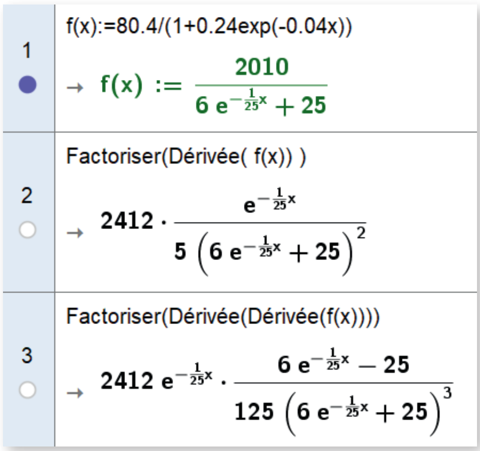
Le taux de la population urbaine ne fait qu'augmenter au fil des années.

d. $t''(x)>0 \Leftrightarrow 0,00168x-0,0552>0 \Leftrightarrow x>\frac{0,0552}{0,00168}$

Sur $\left[0\,;\frac{0,0552}{0,00168}\right]$ t' est décroissante et croissante sur $\left[\frac{0,0552}{0,00168}\,;+\infty\right[$. Donc t' est minimale en $\frac{0,0552}{0,00168}\approx 31$ soit 1991 ; ceci n'est pas compatible avec les données puisqu'il existe plusieurs périodes où le taux est stable.

e. La fonction t dépasse 100 après 77 années ce qui n'est pas cohérent.

3. On étudie la fonction p (variation et convexité).



On constate que cette fonction est croissante mais toujours concave sur $[0\,;+\infty[$ et tend vers 80,4 ce qui est plus cohérent en termes de limite mais pas de convexité.

Maths en situation...

88 **1.** La tente est une pyramide à bas triangulaire ABC de hauteur 3.

$\mathcal{V}=\text{Aire(base)}\times\text{hauteur}=\frac{BC\times AH}{2}\times 3$

Or d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABH on obtient $AH^2=1,5^2-x^2$.

D'où $\mathcal{V}(x)=\frac{2x\times\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-x^2}}{2}\times 3=3x\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}$.

2. Sur $[0\,;1,5[$, on a : $-4x^2+9>0$ et $2x+3>0$ mais $2x-3<0$ donc $\mathcal{V}'$ est du signe de $9-8x^2$ donc on obtient :

x	0		$\sqrt{\frac{9}{8}}$		1,5
Signe de $\mathcal{V}'$		+	0	−	||
$\mathcal{V}$		↗		↘	

Le volume est maximal pour $\sqrt{\frac{9}{8}}\approx 1,06$ m.

89 **1.** $C'(q)=45q^2-200q+500$ ne s'annule pas et reste positive donc C est strictement croissante sur $[0\,;10]$.

2. $C_m'(q)=C''(q)=90q-200$ s'annule en $\frac{20}{9}$; on a donc C_m décroissante sur $\left[0\,;\frac{20}{9}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{20}{9}\,;10\right]$.

En produisant moins de 2,2 tonnes, le coût marginal est de plus en plus petit.

3. $CM'(q)=\frac{C'(q)\times q-C(q)}{q^2}$ minimal pour $q_0=\frac{C(q_0)}{C'(q_0)}$.

On a alors $C'(q_0)=\frac{C(q_0)}{q_0}=CM(q_0)$ donc CM est minimal lorsqu'il est égal à C_m.

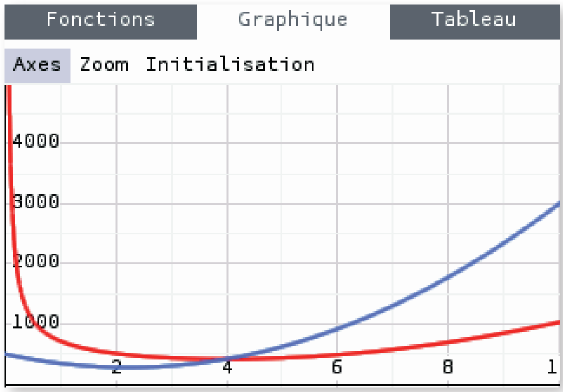
4. a. $CM(q)=15q^2-100q+500+\frac{300}{q}$ donc :

$$CM'(q)=30q-100-\frac{300}{q^2}=\frac{30q^3-100q^2-300}{q^2}$$

b. $q^2>0$ sur $]0\,;10]$ donc CM' est du signe du numérateur. En déterminant les variations du numérateur, et en appliquant la propriété des valeurs intermédiaires on constate qu'il s'annule en une seule valeur $q_0\approx 3,97$.

c. Sur $]0\,;q_0]$: $CM'(q)<0$ donc CM est décroissante et sur $[q_0\,;10]$, CM est croissante.

5. CM en rouge, C_m en bleu.



90 **1.** $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=0$

2. $h'(x)=0,06x^2+0,96x+3$ s'annule en x_1 et x_2

$x_1=\frac{-0,96-\sqrt{0,2016}}{0,12}\approx -11,7$ et

$x_2=\frac{-0,96+\sqrt{0,2016}}{0,12}\approx -4,3$ donc seul x_2 nous intéresse.

$h'(x)\leqslant 0$ sur $[-4,5\,;x_2]$ et $h'(x)\geqslant 0$ sur $[x_2\,;4]$, d'où :

x	−4,5		−4,2		5
Signe de h'		−	0	+	
$h(x)$	−0,003	↘	−0,015	↗	35,1

Or $h(-4,5)$ et $h(x_2)$ sont négatifs et $h(4)$ positif. On applique alors la propriété des valeurs intermédiaires sur $[x_2\,;4]$. Par balayage on trouve $x_0=-4$.

4. $f'(-4)=0,32$ et $g'(-4)=0,2$ donc le raccordement n'est pas bon.

91 **1. a.** $v=\frac{1}{3}\times\pi\times l^2\times h=\frac{\pi}{3}\times l^2\times h$. Or d'après le théorème de Pythagore dans le cône, on obtient :

$$l^2=R^2-h^2=400-h^2$$

b. $v'(h)=\pi\left(\frac{400}{3}-h^2\right)$ avec $0<h<20$. v' s'annule en $\sqrt{\frac{400}{3}}$ sur $]0;20[$. v est alors croissante sur $\left]0;\sqrt{\frac{400}{3}}\right[$ et décroissante sur $\left]\sqrt{\frac{400}{3}};20\right[$, elle admet donc un maximum en $\sqrt{\frac{400}{3}}$.

c. On a $l=\sqrt{400-\frac{400}{3}}=\sqrt{\frac{800}{3}}$ d'où une circonférence de la base de $2\pi\times\sqrt{\frac{800}{3}}$. Il manque un arc de :

$$2\times\pi\times20-2\pi\times\sqrt{\frac{800}{3}}=2\pi\left(20-\sqrt{\frac{800}{3}}\right)$$

α vaut donc $2\pi\left(20-\sqrt{\frac{800}{3}}\right)\div20\approx1{,}153\,\text{rad}\approx66°$.

2. En remplaçant 20 par R, on obtient $2\pi\left(R-\sqrt{\frac{2R^2}{3}}\right)\div R=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ rad qui ne dépend pas de R.

92 **1.** $P(2)=880$ boulons ; $P(4)=2\,440$ boulons

2. a. $V(L)=P'(L)=-45L^2+350L+150$

$V(2)=670$ boulons par heure ; $V(4)=830$ boulons par heure.

b. V a ses deux racines hors de $[0;8]$ donc $V(L)>0$ sur $[0;8]$ d'où P croissante sur $[0;8]$. Plus le facteur travail est élevé, plus la production est élevée.

3. a. $V'(L)=-90L+350$ s'annule en $\frac{35}{9}$ donc V croissante sur $\left[0;\frac{35}{9}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{35}{9};8\right]$.

b. Le rythme est maximum à $\frac{35}{9}$ h soit 3 h 50 min environ.

c. Phase de rendements croissants sur $\left[0;\frac{35}{9}\right]$ et décroissants sur $\left[\frac{35}{9};8\right]$.

4. Environ 4 h 40 min.

93 **Partie A**

1. $f'(x)=-5{,}04(x-30{,}6)\mathrm{e}^{-0{,}018(x-30{,}6)^2}$ est du signe de $-(x-30{,}6)$ donc f est croissante sur $[15;30{,}6]$ et décroissante sur $[30{,}6;50]$. Elle est maximale en 30,6 avec 116,9 pour mille environ.

2. f'' s'annule et change de signe en 25,3 et 35,9 environ, qui sont les abscisses des points d'inflexion. Cela signifie que la croissance ralentit à 25,3 et que la décroissance ralentit en 35,9.

Partie B

1. On applique la dérivée de $u\times v$, soit :

$f'(x)=\mathrm{e}^{0{,}0018x^2-0{,}195x}(12+12x(0{,}0036x-0{,}195))$ ce qui donnera le résultat demandé.

2. $0{,}0432x^2-2{,}34x+12$ s'annule en :

$$x_1=\frac{2{,}34-\sqrt{3{,}402}}{0{,}0864}\approx5{,}74 \text{ sur } [0;30]$$

x	0		$\frac{2{,}34-\sqrt{3{,}402}}{0{,}0864}$		30
Signe de f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(30)$

$f(x_1)\approx23{,}9$ et $f(30)\approx5{,}2$

3. Pour 6 ans environ.

4. Le taux baisse après 7 ans mais la baisse ralentit vraiment après l'inflexion de la courbe, vers 12 ans.

94 **1.** $f'(t)=\frac{12{,}88896\times10^{26}\times\mathrm{e}^{-0{,}032t}}{\left(1+2{,}74\times10^{26}\times\mathrm{e}^{-0{,}032t}\right)^2}>0$ donc f est bien croissante.

2. $f''(t)=$

$$\frac{0{,}032\times12{,}88896\times10^{26}\mathrm{e}^{-0{,}032t}\times\left(2{,}74\times10^{26}\mathrm{e}^{-0{,}032t}-1\right)}{\left(1+2{,}74\times10^{26}\times\mathrm{e}^{-0{,}032t}\right)^3}$$

f'' s'annule et change de signe en t tel que $2{,}74\times10^{26}\mathrm{e}^{-0{,}032t}=1$ c'est-à-dire pour $t\approx1902$ qui est l'abscisse du point d'inflexion : la vitesse de croissance diminue à partir de 1902.

3. a. $f(1919)\approx92{,}63$ donc une erreur de 0,66 million.

b. $f(1960)\approx126{,}9$ donc le modèle n'est plus valable.

95 **Partie A**

1. a. $f'(x)=\frac{194{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4x}}{\left(1+90\mathrm{e}^{-0{,}4x}\right)^2}>0$ donc f est strictement croissante. La masse du potiron est en hausse tout au long de sa vie.

b. Sa masse se rapproche de 5,4 kg.

2. a. $f''(x)=\frac{77{,}76\mathrm{e}^{-0{,}4x}(-1+90\mathrm{e}^{-0{,}4x})}{(1+90\mathrm{e}^{-0{,}4x})^3}$ est bien du signe de $-1+90\mathrm{e}^{-0{,}4x}$ car tous les autres facteurs sont positifs.

b. $g'(x)=-36\mathrm{e}^{-0{,}4x}<0$ donc g est strictement décroissante. Or $g(0)=89$ et $g(15)\approx-0{,}8$ sont de signes contraires et g est continue donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, elle s'annule une seule fois sur $[0;15]$ et donc sur $[0;+\infty[$ d'après ses variations. On obtient $\alpha\approx11{,}2$.

c. On en déduit le tableau de variations de f'.

x	0		α		$+\infty$
Signe de f''		$+$	0	$-$	
f'		$\nearrow$		$\searrow$	

d. f' est maximale en α qui annule g, c'est-à-dire vérifie $90\mathrm{e}^{-0{,}4\alpha}=1$, on a alors $f(\alpha)=\frac{5{,}4}{1+90\mathrm{e}^{-0{,}4\alpha}}=\frac{5{,}4}{2}$ donc la vitesse est maximale lorsque la masse atteint la moitié de la masse maximale.

3. Au 18e jour on dépasse 5 kg.

Partie B

1. a. $f'(x)=525e^{-0{,}06x-70e^{-0{,}06x}}>0$ donc f est strictement croissante, la taille du pommier augmente au fil des jours.

b. La taille tend vers 125 m.

2. $g'(x)=-4{,}2e^{-0{,}06x}<0$ donc g est strictement décroissante. $g(0)=69$ et $g(100)\approx-0{,}8$ donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires g s'annule une seule fois sur $[0;100]$ et donc sur $[0;+\infty[$ d'après ses variations.

c. À la calculatrice, on obtient $\alpha\approx70{,}8$.

d. On observe que f'' est du signe de g d'où :

x	0		α		$+\infty$
Signe de f''		$+$	0	$-$	
f'		↗		↘	

3. a. La dérivée est maximale en α ; on a alors $70e^{-0{,}06\alpha}=1$ d'où $f(\alpha)=125e^{-1}=\dfrac{125}{e}$.

b. La vitesse est donc maximale au moment où la taille est à $\dfrac{125}{e}$, soit environ un tiers de la taille maximale de 125 m.

Travaux pratiques

Plusieurs méthodes de « résolution approchée »

Préliminaires

1. $f'(x)=3x^2-2$ est strictement positive sur $[1;3]$ donc f est continue et strictement croissante sur $[1;3]$. Or $f(1)=-6$ et $f(3)=16$, donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, f s'annule une seule fois entre 1 et 3.

2. Les racines de $3x^2-2$ sont $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, en dehors de $[1;3]$ donc f' ne s'annule pas sur $[1;3]$.

Partie A

1. $2<\alpha<2{,}1$

2. $2{,}09<\alpha<2{,}10$

3. a. On obtient

```
>>>
>>> resol_balayage(0.1)
2.100000000000001
>>> resol_balayage(0.01)
2.0999999999999988
>>> |
```

On obtient, à l'arrondi près, le nombre de droite dans l'encadrement.

b. On utilise l'arrondi obtenu avec Python et l'arrondi $-p$ pour encadrer α.

Partie B

1. a. $f(1)=-6$, $f(3)=16$, $f(2)=-1$ donc d'après les variations de f on a nécessairement $2\leqslant\alpha\leqslant3$.

b. $f(2{,}5)=5{,}625>0$ et $f(2)<0$ donc $2\leqslant\alpha\leqslant2{,}5$.

2. Pour $p=0{,}01$ on obtient $2{,}09375<\alpha<2{,}1015625$.

On retrouve les résultats de la **partie A**.

3. On ajoute un compteur initialisé à 0 puis on l'incrémente dans la boucle *Tant que*.

Algo
$a\leftarrow1$
$b\leftarrow3$
$n\leftarrow0$
Tant que $b-a>p$ Faire
  $m\leftarrow\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m)>0$ Alors
    $b\leftarrow m$
  Sinon $a\leftarrow m$
  Fin Si
  $n\leftarrow n+1$
Fin Tant que
Afficher a et b

Partie C

1. $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est l'équation de la tangente en A_1. Elle passe par le point de coordonnées $(a_1;0)$ on a donc $0=f'(a_0)(a_1-a_0)+f(a_0)$ d'où le résultat.

2. On procède de même, avec la tangente en A_2 qui passe par le point de coordonnées $(a_2;0)$.

3. a.

```
def f(x):
    return x**3-2*x-5

def df(x):
    return 3*x**2-2

def newton(n):
    a=3
    for i in range(n):
        a=a-f(a)/df(a)
    return a
```

b. On rajoute

```
def precision(p):
    n=1
    while abs(newton(n)-newton(n-1))>p:
        n=n+1
    return n
```

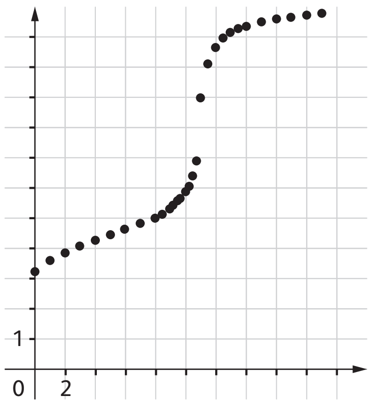
Partie D

Le nombre de boucles est beaucoup moins important avec cette fonction pour Newton par rapport à la dichotomie, elle-même beaucoup plus performante que le balayage.

Dosage acido-basique en chimie

Partie A

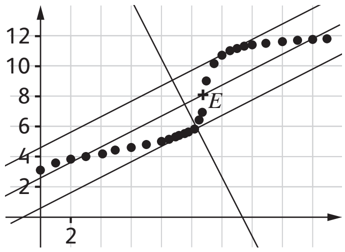
1.



2. La courbe semble convexe sur $[0;11]$ puis concave sur $[11;19]$. Le rythme de croissance du pH ralentit à partir de 11 mL.

3. a. • Première méthode : on observe la position des tangentes et de la courbe (au-dessus ou en dessous) pour déterminer le point d'inflexion (moment où l'on passe de convexe à concave).

• Deuxième méthode : la méthode des tangentes parallèles.



On obtient $E(10{,}8\,;8{,}1)$.

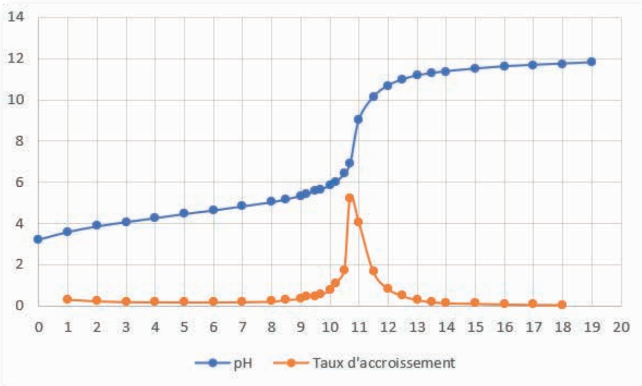
• Troisième méthode : on calcule les taux d'accroissement à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	Vb	pH	Taux d'accroissement
2	0	3,23	
3	1	3,6	0,32
4	2	3,87	0,24
5	3	4,08	0,2

En C3 =(B4-B2)/(A4-A2)

Le maximum du taux d'accroissement est atteint en $x = 10{,}7$.

17	10,2	6,03	1,12
18	10,5	6,41	1,74
19	10,7	6,9	5,24
20	11	9,03	4,05
21	11,5	10,14	1,65



Remarque : pour d'autres méthodes (non graphique), on peut déterminer à l'aide d'un logiciel l'équation de la courbe et faire l'étude algébrique de la fonction dérivée associée.

b. $C_a = \dfrac{C_b \times V_{beq}}{V_a} = \dfrac{0{,}1 \times 10{,}8 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-3}} = 0{,}108 \text{ mol/L}$

Calcul de l'impôt sur le revenu

Partie A

1. a. On a $2 + 2 \times 0{,}5 = 3$ parts donc $72\,000/3 = 24\,000$.

b. 24 000 se trouve dans la 2^{e} tranche et $(24\,000 - 10\,064) \times 0{,}14 = 1951$ € arrondi à l'euro.

c. $1951 \times 3 = 5\,853$ € bruts soit $5\,853/72\,000 \times 100 \approx 8{,}1$ %.

2. 3 144 € par part soit 7 860 € bruts soit environ 10,5 %.

3.

```
def impots(R, N):
    tranche_1 = 10064
    tranche_2 = 27794
    tranche_3 = 74517
    tranche_4 = 157806

    taux_1 = 0.14
    taux_2 = 0.30
    taux_3 = 0.41
    taux_4 = 0.45

    Q = R / N
    if Q <= tranche_1:
        impot = 0
    elif tranche_1 < Q <= tranche_2:
        impot = ((Q-10064) * taux_1)
    elif tranche_2 < Q <= tranche_3:
        impot = ((Q-27794) * taux_2) + 2482.2
    elif tranche_3 < RN <= tranche_4:
        impot = ((Q-74517) * taux_3) + 16499.1
    else:
        impot = ((Q-157806) * taux_4) + 50647.59

    return impot*N
```

Partie B

Il s'agit d'une fonction continue, affine par morceaux, qui est nulle de 0 à 10 064 puis sur chaque intervalle (= tranche du quotient) on a des fonctions affines, croissantes, de coefficient directeur le taux d'imposition de plus en plus grand. La fonction est convexe.

THÈME 2

Évolution : modèles discrets

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
• Généralités sur les suites numériques (définition, sens de variation) Représentation graphique d'une suite (définie explicitement, définie par une relation du type $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. • Limite d'une suite, notion et opérations • Limites et inégalités, cas des suites géométriques Passage à la limite dans les inégalités, théorème des gendarmes Rappel : somme des termes d'une suite géométrique Démo : limite de la suite somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q\in]0;1[$ à faire en exercice • Suites arithmético-géométriques Méthode sur un exemple générique Rechercher une suite constante solution particulière, utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions Représentation graphique de la suite, lien avec le point fixe de la fonction affine associée $x\mapsto ax+b$	Les capacités plus précisément étudiées sont les suivantes : • Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence • Conjecturer graphiquement le comportement d'une suite • Exploiter une suite géométrique (Calculer une limite d'une suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q\in]0;1[$) • Étudier une suite arithmético-géométrique (en contexte)

2. Intention des auteurs

Ce thème regroupe les questions relatives aux modèles d'évolution discrets, c'est-à-dire dont la modélisation s'appuie sur la mise en place de suites numériques. Il correspond au thème « modèles d'évolution » du programme de l'option mathématiques complémentaires, en se limitant aux cas des modèles discrets.

Comme le programme le précise, les questions relatives aux modèles d'évolution et aux phénomènes qui dépendent du temps pourront être étudiées tout au long de l'année, et seront l'occasion de mettre en regard les modèles discrets et continus. Précisons enfin que la notion de limite, qui fait l'objet d'une approche intuitive, est un objectif important du programme (pour les suites comme pour les fonctions).

Partir d'un bon pied

A **1.** $u_1=-1\,;u_3=15$ **2.** $v_1=2\,;v_2=-1$

3. $u_1=0\,;u_2=5$; suite croissante

4. $R=-3\,;u_2=-4\,;u_3=-7$

5. $v_1=-1\,;v_2=-\dfrac{1}{5}=-0{,}2$; suite croissante

6. $R=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5\,;w_2=0{,}5\,;w_3=-0{,}25$

B **1. a.** Explicite **b.** $u_0=1$, $u_1=4$ et $u_2=9$

c. Voir **2.c.**

2. a. Récurrence **b.** $v_0=3$, $v_1=4$ et $v_2=5$

c.

C **1. a.** u_n : rouge, v_n : vert, w_n : bleu

b. $u_0=1$, $v_0=2$, $w_0=1$

c. (u_n) et (v_n) semblent croissantes, (w_n) semble décroissante.

2. $u_0=0{,}5\times 0+1=1$; $w_0=\mathrm{e}^{-0{,}5\times 0}=1$

$$u_{n+1}-u_n=0{,}5(n+1)+1-(0{,}5n+1)$$
$$=0{,}5n+0{,}5+1-0{,}5n-1=0{,}5>0$$

Donc (u_n) est croissante.

(v_n) est géométrique de raison $1{,}25>1$ donc croissante.

(w_n) est une suite de termes strictement positifs avec $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{\mathrm{e}^{-0{,}5(n+1)}}{\mathrm{e}^{-0{,}5n}}=\mathrm{e}^{-0{,}5}<1$ donc (w_n) est une suite décroissante.

D **1. a.** $u_0=442$; $u_1=362$; $u_2=290$; $u_3=226$

b. (u_n) semble strictement décroissante.

2. Cela indique que u_{11} n'est pas strictement inférieur à u_{10} et donc que la suite n'est pas strictement décroissante.

Activités en situation…

Consolider les bases

1 **1.** Dans chaque situation, on connaît l'évolution d'une année à l'autre ainsi que la valeur initiale. On peut alors construire des suites récurrentes.
2. Pour tout entier n, on note u_n le nombre, en millier, de *licenciés* pour l'année 2019 + n.
La situation ① correspond à la suite ⓑ ; la situation ② correspond à la suite ⓐ ; la situation ③ correspond à la suite ⓒ ; et la situation ④ correspond à la suite ⓓ.

2 **1. a.** ⓐ et ⓓ sont géométriques, ⓑ et ⓒ sont arithmétiques.
b. ⓐ $u_n = 5 \times 1{,}2^n$; ⓑ $u_n = 5 + 0{,}2n$; ⓒ $u_n = 5 - 0{,}2n$;
ⓓ $u_n = 5 \times 0{,}8^n$
2. u_6 représente le nombre de licenciés en millier prévu en 2025.
ⓐ 14,92992 ; ⓑ 6,2 ; ⓒ 3,8 ; ⓓ 1,31072
3. a. ⓐ $u_{n+1} - u_n = 1{,}2^n$; ⓑ $u_{n+1} - u_n = 0{,}2$;
ⓒ $u_{n+1} - u_n = -0{,}2$; ⓓ $u_{n+1} - u_n = -0{,}8^n$
b. Pour ⓐ et ⓑ : (u_n) croissante ; pour ⓒ et ⓓ : (u_n) décroissante.

Situation 1 Évolution d'un capital

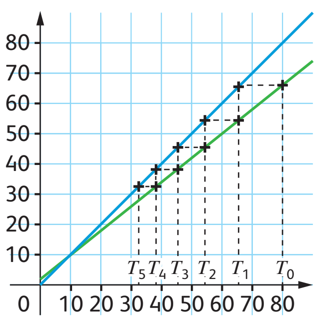
1 **1.** A : 1 015 €/1 030,23 € ; B : 1 067,50 €/1 135,51 €
2. $u_{n+1} = u_n \times 1{,}015$; suite géométrique.
3. $v_{n+1} = v_n \times 1{,}0075 + 60$ car augmenter de 0,75 % revient à multiplier par 1,0075 et on ajoute indépendamment 5 € par mois soit 60 € par an.
2 **1.** en B3 : =B2*1,015 ; en C3 : =C2*1,0075+60
2. a. 1 160,54 €/1 698,24 €
b. 49 ans/15 ans

Situation 2 Le modèle de Malthus

1 **a.** On a $1{,}028^{15} \approx 2$ donc 15 ans à 2,8 % par an donnent une augmentation globale de 100 %, soit un doublement.
b. En 25 ans, on a +10 millions nourris, soit $10/25 = 0{,}4$ million par an.
2 **a.** p est géométrique, a est arithmétique.
b. p et a tendent vers $+\infty$ car p a pour raison $1{,}028 > 1$ avec $p_0 > 0$ et a a pour raison $0{,}4 > 0$.
c. Après 20 ans, $p_{20} \approx 17{,}4$ et $a_{20} = 18$ donc oui.
Après 30 ans, $p_{30} \approx 22{,}9$ et $a_{30} = 22$ donc non.
d. L'algorithme indique à partir de combien d'années p dépasse a : $n = 26$.

Situation 3 Loi de refroidissement de Newton

1 $T_{n+1} = -0{,}2(T_n - 10) + T_n = 0{,}8T_n + 0{,}2 \times 10 = 0{,}8T_n + 2$
1. à 3.



2 T_n décroît vers 10, la température du café va donc progressivement se rapprocher des 10 °C ambiants.

Méthode

Capacité 1 Modéliser un problème par une suite

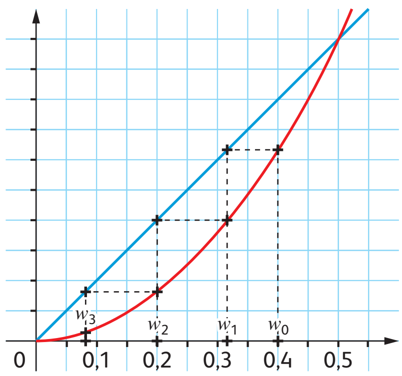
1 **1.** $1013{,}25 - 0{,}11 \times 1500 = 848{,}25$ hPa
2. a. $u_n = 1013{,}15 - 0{,}11n$
b. u_n est arithmétique.
c. 484,26 hPa

Capacité 2 Conjecturer le comportement d'une suite

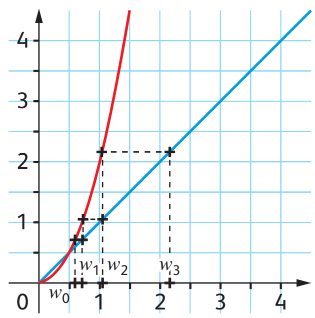
2 **1.** u_n semble tendre vers $+\infty$.
2. En développant, on retrouve la forme initiale.
$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{2}{n^2}\right) = 1$ donc par produit et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3 **1.** v_n semble tendre vers 0.
2. a. En factorisant la forme initiale par n au numérateur et dénominateur, on obtient la forme proposée.
b. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + \dfrac{1}{n} = +\infty$ par somme, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ par quotient.

4 **1.**



2. w_n semble tendre vers 0.
3.



w_n semble tendre vers $+\infty$.

Capacité 3 Exploiter une suite géométrique

5 **1.** $+\infty$ car $q > 1$ et $u_0 > 0$.
2. $-\infty$ car $q > 1$ et $u_0 < 0$.
3. 0 car (u_n) géométrique et $0 < q < 1$.
4. $-\infty$ car (u_n) géométrique, $q = 1{,}02 > 1$ et $u_0 = -1000 < 0$.

6 **1.** $S_{10}=\dfrac{1-0{,}5^{10}}{1-0{,}5}\approx 1{,}998$

2. $S_{10}=-2\times\dfrac{1-1{,}5^{10}}{1-1{,}5}\approx -226{,}7$

3. $S_{10}=4\times\dfrac{1-1{,}1^{10}}{1-1{,}1}\approx 63{,}75$

7 **1.** $S_n=\dfrac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2}$ S_n tend vers 1,25 en $+\infty$.

2. $S_n=-5\times\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}$ S_n tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

3. $S_n=2\times 0{,}92^2\times\dfrac{1-0{,}92^{n-1}}{1-0{,}92}$ S_n tend vers 21,16 en $+\infty$.

Capacité 4 — Modéliser un problème par une suite arithmético-géométrique

8 **1.** Pour passer d'une année à l'autre, on augmente l'effectif de 4 % en multipliant par 1,04 puis on enlève 156.
$u_0=27\,500$

2. a. $\alpha=3\,900$

$v_{n+1}=u_{n+1}-3\,900=1{,}04u_n-156-3\,900$
$=1{,}04(u_n-3\,900)=1{,}04v_n$

donc (v_n) est géométrique, $q=1{,}04$ et $v_0=23\,600$.

b. $v_n=23\,600\times 1{,}04^n$ donc $u_n=23\,600\times 1{,}04^n+3\,900$

3. a. u_n tend vers $+\infty$ car $1{,}04>1$. Le campus ne pourra plus accueillir les étudiants à partir d'un certain moment.

b. En 2025.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b **2.** a **3.** c **4.** b **5.** c

vrai ou faux ?

Partie A. **1.** Faux. La limite est 1.
2. Vrai. Par comparaison.
3. Vrai. Théorème des gendarmes.

Partie B. **1.** Faux. $u_1=2{,}5$ donc (u_n) ne peut être arithmétique de raison 1,8.
2. Vrai. On écrit v_{n+1} et on obtient $0{,}7v_n$.
3. Faux. C'est +6 et non –6.
4. Faux. (u_n) converge vers 6.

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

9 **1.** $\dfrac{23}{12}$ **2.** $\dfrac{-4}{63}$ **3.** 3 **4.** $\dfrac{-38}{5}$

10 **1.** 10^n **2.** 3^{n+3} **3.** 1 **4.** $4\times 1{,}2^n$

11 **1.** e^{-3} **2.** 4e

12 **1.** $4x^2+12x+9$ **2.** $8x^2-10x-4$
3. x^4-4

13 **1.** $(3x+1)^2$ **2.** $(4-5x)(4+5x)$ **3.** $(2x-0{,}5)^2$

14 **1.** $S=\{5\}$ **2.** $S=\{7{,}5\}$ **3.** $S=\{-1\,;3\}$
4. $S=\{0\,;1{,}5\}$ **5.** $S=\{0\}$ **6.** $S=\varnothing$

15 **1.** $S=]-\infty\,;-3]$ **2.** $S=[0\,;+\infty[$

16 f est de la forme $u\times v$.
$f'(x)=(2x-2)\mathrm{e}^x+(x^2-2x+4)\mathrm{e}^x=(x^2+2)\mathrm{e}^x$

17 $y=-3x+8$

18 $f'(x)=\dfrac{-3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+5)^2}<0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Automatismes du thème

19 $u_0=7$; $u_1=3$; $u_2=7$; $u_3=19$

20 $u_0=1$; $u_1=-2$; $u_2=-3$; $u_3=-2$

21 **1.** $u_{n+1}=u_n-3$; $u_n=17-3n$
2. $u_{n+1}=u_n+2$; $u_n=0{,}4+2(n-1)$

22 **1.** $u_{n+1}=u_n\times 0{,}8$; $u_n=100\times 0{,}8^n$
2. $u_{n+1}=u_n\times 1{,}2$; $u_n=3\times 1{,}2^{n-1}$

23 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$

24 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-\infty$

25 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=3$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-2$

26 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_n)=17{,}5$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_n)=\dfrac{10}{7}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_n)=\dfrac{100}{7}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_n)=\dfrac{32}{3}$

27 **1.** Ni arithmétique, ni géométrique.
2. $v_{n+1}=u_{n+1}+2=3u_n+6=3v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 3 et $v_0=4$.

Exercices Application

Consolider les bases

28 **1.** $u_0=3$; $u_1=\dfrac{4}{3}$; $u_2=1$; $u_{50}=\dfrac{53}{101}$

2. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+4}{2n+3}-\dfrac{n+3}{2n+1}$
$=\dfrac{(n+4)(2n+1)-(n+3)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$
$=\dfrac{-5}{(2n+3)(2n+1)}$

n étant positif, le dénominateur est positif donc $u_{n+1}-u_n<0$ et (u_n) est décroissante.

29 $u_1=-1$; $u_2=5$; $u_3=-7$

30 $u_1=5$; $u_2=9$; $u_3=23$

31 (u_n) est croissante.
(v_n) est croissante.
(w_n) est décroissante.

32 $f(x)=x\mathrm{e}^{2x}$
$f'(x)=(1+2x)\mathrm{e}^{2x}>0$ pour $x\geqslant 0$ donc f est strictement croissante, tout comme u_n.

33 **1.** $u_{n+1}=u_n-3$; $u_n=2-3n$
2. $u_{n+1}=u_n\times 1{,}05$; $u_n=2\,000\times 1{,}05^n$

34 **1.** $u_n=-2n-3$ donc (u_n) est arithmétique de raison -2 et de premier terme -3.
2. (u_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme -3.

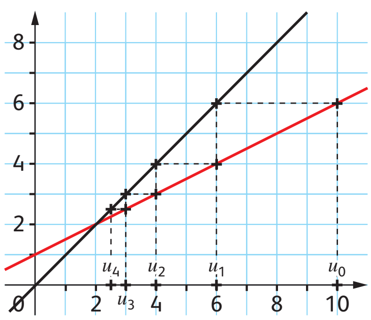
35 **1.** Vrai (formule explicite).
2. Faux (forme arithmético-géométrique).
3. Faux, c'est 2×3^n
4. Vrai, $u_{100}=50\times 100+120=5\,120$

Connaître le cours

36 **1.** $u_1=3$; $u_2=5$; $u_3=7$; $\lim(u_n)=+\infty$
2. $u_1=4$; $u_2=2$; $u_3=1$; $\lim(u_n)=0$
3. $\lim(u_n)=+\infty$
4. $S=21$
5. $u_1=3$; $u_2=7$
6. c

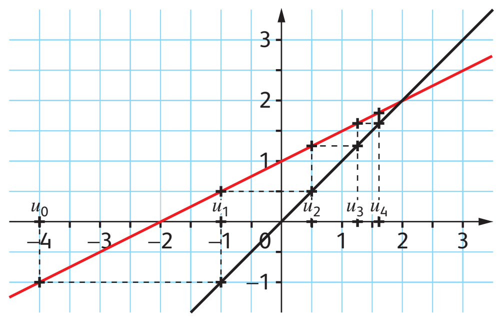
37 **1.** $u_0=-1$; $u_1=2{,}5$; $u_2=4{,}2$; $u_3=5{,}1$
2. (u_n) semble croissante et tendre vers 6.
3. $u_{n+1}=0{,}5u_n+3$
$u_1=2{,}5$; $u_2=4{,}25$; $u_3=5{,}125$

38 **1.**



(u_n) semble décroître vers 2.

2.



(u_n) semble croître vers 2.

39 $u_n=200\times 1{,}03^n$; (u_n) tend vers $+\infty$.
$v_n=-150\times 0{,}95^n$; (v_n) tend vers 0.

40 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=2$

41 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

42 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$

Démo
43 **1.** $S_n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. $0<q<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{1}{1-q}$.
3. $T_n=u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$; de même $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=\dfrac{u_0}{1-q}$.

Travailler les capacités du thème

44 **1.** Arithmétique de raison 50.
2. Géométrique de raison 1,01.
3. Géométrique de raison 0,56.
4. Géométrique de raison 0,9.

45 **1.** $u_n=(2n+1)^2$ **2.** $u_n=3n$ **3.** $u_n=\dfrac{1}{2^n}$

46 **1.** En 2021, l'établissement scolaire comptera $0{,}7\times 1\,000+350=1\,050$ élèves, ce qui correspond à v_1.
La situation 1 est modélisée par la suite (v_n) et la situation 2 par la suite (u_n).
2. $u_{n+1}=1{,}03u_n-50$ $v_{n+1}=0{,}7v_n+350$
3. a. $v_2=1\,085$ **b.** $u_4\approx 916{,}33$ €

47 **1.** On place 1 200 € sur un livret à intérêts composés de 3 %. u_n représente la somme disponible après n années.
2. Une société propose l'acheminement de containers pour 150 € pièce, avec un forfait de base de 1 200 €. Pour n containers transportés, le coût s'élève à u_n.
3. Une entreprise compte 1 200 employés. Chaque année, les effectifs augmentent de 3 % sur la base de recrutement par CV et indépendamment le centre de formation fournit 150 employés de plus par an. u_n représente le nombre d'employés après n années.

48 **1.** $T_n+1=0{,}85T_n+15$
2.

```
t=25
for i in range(10):
    t = 0.85*t+15
print (t)
```

Après 10 minutes.

49 **1.** 122 et 48

2. $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n$

$b_{n+1} = 0{,}9b_n + 0{,}2a_n$

3. 79 (A) et 91 (B)

4. 57 (A) et 113 (B)

50 **1.** $u_2 = 1\,;u_3 = 2\,;u_4 = 3\,;u_5 = 5$

2. La quantité de couples pour le mois n + 2 vaut la somme des couples présents au moins n + 1 et des naissances. Ces naissances proviennent des couples déjà présents l'année précédente (n), on a donc pour l'année n + 2 : $u_{n+1} + u_n$.

3. Il y aurait 233 couples le 1er janvier suivant.

51 **1.** (u_n) semble croissante.

2. (u_n) semble décroissante.

52 **1.** Cas 1 : $u_0 = -2\,;u_1 = 2{,}5\,;u_2 = 4{,}5\,;u_3 = 5$

Cas 2 : $u_0 = -2\,;u_1 = 2{,}7\,;u_2 = 1{,}1\,;u_3 = 1{,}6$

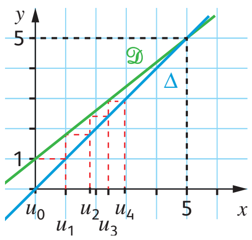
2. Cas 1 : u_n semble croître vers 5.

Cas 2 : u_n ne semble ni croissante ni décroissante mais semble converger vers 1,5.

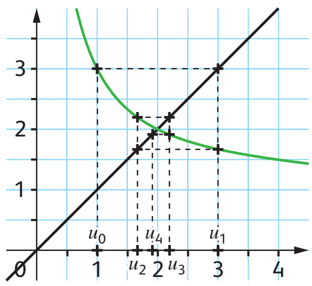
53 **1. a.** $x = 0{,}8x + 1 \Leftrightarrow x = 5$, donc les deux droites sont sécantes en $A(5\,;5)$.

1. b. et **2. a.** Voir graphique ci-contre.

b. (u_n) semble être croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.



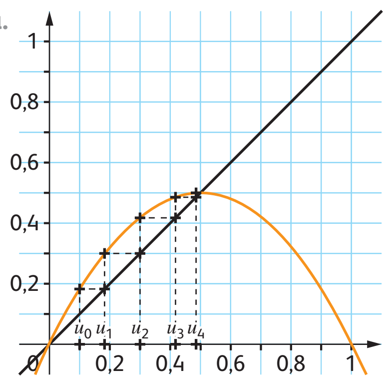
54 **1.** et **2. a.**



2. b. La suite n'est pas monotone et semble converger vers 2.

55 **1. a.** $f'(x) = -4x + 2$ s'annule en 0,5. f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0{,}5]$ et strictement décroissante sur $[0{,}5\,;+\infty[$.

1. b. et **2. a.**



b. u_n semble croissante et tendre vers 0,5.

c. Le nombre de coccinelles se stabilisera à 500 000.

56 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

57 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

58 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2. On factorise par 3^n le numérateur et dénominateur puis on simplifie.

3. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0 car $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc par somme et quotient u_n tend bien vers 1.

59 **1.** I_n est géométrique de raison 0,8.

2. $I_n = 80 \times 0{,}8^n$

3. I_n tend vers 0. Pour un grand nombre de couches, le son devient alors inaudible.

60 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes)

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (minoration)

3. On ne peut rien dire.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes)

61 **1.** • $S_n = 1 \times \dfrac{1 - 0{,}9^{n+1}}{1 - 0{,}9} = 10\left(1 - 0{,}9^{n+1}\right)$.

• $0 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^{n+1} = 0$.

Par différence et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 10$.

2. • $T_n = 1 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

• $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$.

Par différence et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{3}{2}$.

62 **1.** $S_n = \dfrac{1 - 0{,}25^n}{1 - 0{,}25}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{4}{3}$

2. $T_n = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1 - \dfrac{3}{4}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 3$

63 **1.** $S_n = 2 \times \dfrac{1 - 0{,}7^{n+1}}{1 - 0{,}7}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{20}{3}$

2. $T_n = -3 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{2}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -6$

64 **1. a.** 1 % en moins par jour donc $d_{n+1} = 0{,}99d_n$ (suite géométrique de raison 0,99).

b. $d_n = 50 \times 0{,}99^n$

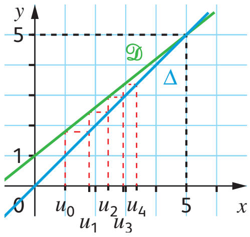
2. a.

$$D_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n = 50 \times \frac{1 - 0{,}99^n}{1 - 0{,}99} = 5\,000 \times \left(1 - 0{,}99^n\right)$$

b. La limite vaut 5 000. (D_n) étant strictement croissante, ce nombre ne sera jamais atteint.
3. 36 jours

65 **1.** 189 puis 138
2. a. Environ 37 tortues (u_{10}).
b. (u_n) semble décroissante et tendre vers 0.
3. a. (u_n) tend vers 0 (théorème des gendarmes)
b. Cette population risque de disparaître.

66 **1.** Il perd 20 % chaque année, cela revient à multiplier l'effectif précédent par 0,8. On rajoute 1, qui correspond en dizaine de milliers aux abeilles rachetées.



2. a. et **b.** Voir graphique ci-contre.
c. La limite semble être 5.
3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0{,}8u_{n+1} - 4 = 0{,}8(u_n - 5) = 0{,}8v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = -4$.
b. $v_n = v_0 \times 0{,}8^n$ donc $u_n = v_n + 5 = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.
c. $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$. Par produit et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$. Au bout d'un long moment, la population d'abeilles va se rapprocher de 50 000 et se stabiliser.

67 **1.** Il gagne 5 % chaque année, cela revient à multiplier l'effectif précédent par 1,05. On enlève 10, qui correspond en millier aux 10 000 ventes perdues.
2. a. $\alpha = 1{,}05\alpha - 10$ pour $\alpha = 200$.
b. $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 1{,}05u_n - 10 - 200$
$= 1{,}05(u_n - 200) = 1{,}05v_n$
Donc v_n est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0 = u_0 - 200 = 400$.
3. $u_n = v_n + 200 = 400 \times 1{,}05^n + 200$
4. u_n tend vers $+\infty$ par produit et somme car $1{,}05 > 1$. Le nombre de calculatrices vendu ne va cesser d'augmenter si ce modèle d'évolution est cohérent.

exercices Entraînement

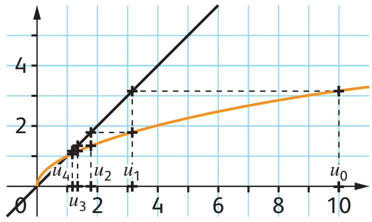
1 Généralités sur les suites

68 **1.** Si (u_n) arithmétique, $r = u_3 - u_2 = 2$ et u_0 serait égal à –4 ce qui n'est pas le cas.
Une suite géométrique ne peut contenir de 0 car $0 \times q$ ne donnera jamais 2 par exemple.
2. $f(x) = 0{,}5(x-2)(x+1)$
3. $u_1 = -1$; $u_{100} = 4\,949$

69 **1.** $u_0 = u_3 \neq u_5$ donc la suite n'est pas arithmétique.
$u_5 = 0$ et $2 \times q^2$ ne peut être égal à 0, donc la suite n'est pas géométrique.
2. $f(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}6x + 2$ **3.** $u_2 = 2{,}4$ et $u_4 = 1{,}2$

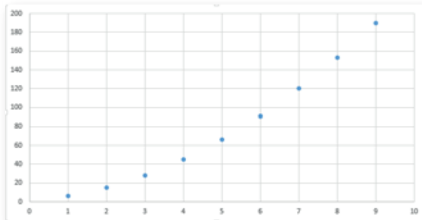
70 **1.** La suite semble décroître vers 1.
2. a. $u_0 = \sqrt{10}$; $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

b.



En s'appuyant sur le graphique précédent, la suite semble effectivement décroissante et convergente vers 1.

71 **1.** $u_1 = 6$; $u_2 = 15$; $u_3 = 28$; $u_4 = 45$
2.



Les points semblent appartenir à une parabole donc **b.**
3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
4. On a $u_n = 2n^2 + 3n + 1$ donc la somme des n premiers entiers au carré vaut $\dfrac{n}{6} \times (2n^2 + 3n + 1) = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.

72 **1.** Suite A : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}25x_n + 0{,}5y_n \\ y_{n+1} = 0{,}75x_n + y_n \end{cases}$
a. En utilisant un tableur pour faire calculer les premiers termes de la suite, on fait tracer le nuage de points et on utilise une *courbe de tendance*. Les points semblent alignés sur une droite de coefficient directeur $k \approx 2{,}18614$.
b. On vérifie que les points ne sont pas alignés (mais la suite des quotients y/x converge vers k, qui en fait est égal à $\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$; on ne peut pas démontrer ce résultat à ce niveau).
2. Suite B : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n - 0{,}5y_n \end{cases}$
a. Avec le tableur, il semblerait que les points appartiennent à deux droites de coefficients directeurs 2 et – 0,8, et que le point M se rapproche de l'origine O du repère.
b. On obtient : $x_{n+2} = -0{,}75x_n$. On peut en déduire que la suite (x_n) tend vers 0, et donc la suite (y_n) aussi grâce à l'égalité $y_n = x_{n+1} - 0{,}5x_n$.

73 **1.**

```
u=0
for k in range(4):
    u=2*u+(-1)**k
    print("u",k+1,"=",u)
```

2.

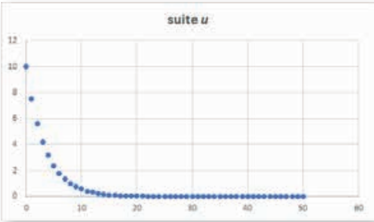
```
u=0
v=-1
for k in range(4):
    v=u
    u=2*u+(-1)**k
    v=v+u
    print("u",k+1,"=",u,";","v",k+1,"=",v)
```

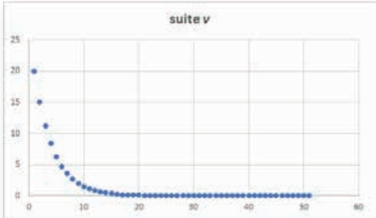
3. $v_n = 2^{n-1}$
4. On obtient $2^n = u_{n+1} + u_n = 3u_n + (-1)^n$ d'où $u_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.

74 Cf. fichiers Excel et Python.

2 Limites d'une suite

75 1.





2. Les deux suites semblent décroissantes vers 0.
3. a. Les premiers termes sont tous nuls.
b. $w_{n+1} = v_{n+1} - 2u_{n+1} = \dfrac{-8u_n + 4v_n}{4} = -2u_n + v_n = w_n$ donc (w_n) est constante et vaut $w_0 = 0$.
c. On obtient $v_n = 2u_n$ puis $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n$. Ces deux suites sont géométriques de raison comprise entre 0 et 1 et premier terme positif, elles sont donc bien décroissantes vers 0.

76 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 1$

Il s'agit de formes indéterminées.

77 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \mathrm{e}^4$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$

Il s'agissait de formes indéterminées.

78 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$B = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^0 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^1 + \ldots + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

$$B = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{-1}{2}} = \frac{2}{3}$$

79 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} 7 \times S_n$ où $S_n = \left(\dfrac{1}{10}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{10}\right)^1 + \ldots + \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$

$$A = \lim_{n\to+\infty} 7 \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{70}{9}$$

80 1. a.

n	a	b
0	50,00000	30,00000
1	32,50000	27,50000
2	23,12500	21,87500
3	17,03125	16,71875
4	12,69531	12,61719
5	9,50195	9,48242
6	7,12158	7,11670
7	5,33997	5,33875
8	4,00467	4,00436
9	3,00343	3,00335
10	2,25255	2,25253
11	1,68941	1,68940
12	1,26705	1,26705

b. Les deux suites semblent décroissantes et converger vers un même nombre.
2. b. (u_n) semble géométrique de raison 0,75 (converge vers 0).
(v_n) semble géométrique de raison 0,25 (converge vers 0).
c. $u_{n+1} = b_{n+1} + a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 3b_n}{4} = 0{,}75u_n$ ce qui confirme la conjecture.
d. De même $v_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = 0{,}25v_n$
e. $u_n + v_n = 2b_n$ donc $b_n = \dfrac{80 \times 0{,}75^n - 20 \times 0{,}25^n}{2}$
$u_n - v_n = 2a_n$ donc $a_n = \dfrac{80 \times 0{,}75^n + 20 \times 0{,}25^n}{2}$

81 1. $u_4 = 0{,}2357$; $u_5 = 0{,}235711$; $u_6 = 0{,}23571113$
2. Suite strictement croissante.
3. Lorsqu'on rajoute des décimales, les chiffre des dixièmes reste un 2 donc $u_n < M$ pour tout n. On peut alors penser que cette suite converge.

82 1. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$; la suite semble croissante, de limite 1.
2. $x = \dfrac{2x}{1+x}$ équivaut à $x^2 - x = 0$ pour $x \neq -1$, on a deux solutions : 0 et 1.
3. a. $v_0 = 0{,}5$
b. $\dfrac{2v_n}{1+v_n} = \dfrac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} = v_{n+1}$ on a donc $u_n = v_n$ (même formule de récurrence, même premier terme).
c. On factorise par 2^n le numérateur et dénominateur pour obtenir la formule. Par somme et quotient, u_n tend alors vers 1.

83 **1.**

```
#-*- coding:utf8 -*-
# Python 3

import turtle as tl

# on nomme deux tortues
souris, chat = tl.Turtle(), tl.Turtle()
# puis on les place dans le repère
souris.goto(0,0)
souris.setheading(90)
chat.up()
chat.goto(200,0)
chat.down()
# on repète 30 déplacements :
# dabord celui du chat, puis celui de la souris
for _ in range(30):
    chat.setheading(chat.towards(souris))
    chat.forward(20)
    souris.forward(20)

tl.mainloop()
```

2. $S_n(0;20n)$ et $C_n(x_n\,;y_n)$ donc on a :

$$d_n=\sqrt{x_n^{\,2}+(y_n-20n)^2}$$

3. a. On retrouve une configuration de Thalès, on a :

$$\frac{x_n-x_{n+1}}{x_n}=\frac{d_n}{20}\text{ d'où } x_{n+1}=\left(1-\frac{20}{d_n}\right)x_n$$

De même $\dfrac{20n-y_{n+1}}{20n-y_n}=\dfrac{d_n-20}{d_n}$ et on obtient le résultat.

b. Cf. fichier tableur.

c. (d_n) semble décroissante vers 105.

d. x_{18} est négatif, donc à partir du rang 18 le modèle ne fonctionne plus (on suppose dans les calculs la positivité de x_n).

e. Le chat et la souris se déplacent à la même vitesse dans la même direction : la distance qui les sépare reste constante.

3 Limites et inégalités

84 **1.** • $u_0=1$; $u_1=0{,}5$; $u_2=1{,}5$; $u_3=4$

• $u_n\geqslant v_n$ donc (u_n) tend vers $+\infty$

2. • $u_0=1$; $u_1=1$; $u_2=5$; $u_3=5$

• $u_n\geqslant v_n$ donc (u_n) tend vers $+\infty$

3. • $u_0=1$; $u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$; $u_2=-3$; $u_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-3$

• $u_n\leqslant v_n$ donc (u_n) tend vers $-\infty$

4. • $u_0=1$; $u_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{\pi}$; $u_2=0{,}5-\dfrac{6}{\pi}$; $u_3=-1-\dfrac{9}{\pi}$

• $u_n\leqslant v_n$ donc (u_n) tend vers $-\infty$

5. • $u_0=1$; $u_1=4$; $u_2=1$; $u_3=16$

• $u_n\geqslant(n-1)^2$ donc (u_n) tend vers $+\infty$

85 **1.** $u_0=1; u_1=1; u_2=\dfrac{1}{3}; u_3=0$

$0\leqslant u_n\leqslant v_n$ donc (u_n) tend vers 0.

2. $u_0=1; u_1=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}}; u_2=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2}}; u_3=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3}}$

$0\leqslant u_n\leqslant v_n$ donc (u_n) tend vers 0.

86 **1.** Le calcul de A_4 donne effectivement environ 0,7.

2. a. $f'(x)=1-0{,}16x$ est positive sur $[0\,;1]$ donc f strictement croissante.

b. L'intervalle image de $[0\,;1]$ par f est $[0\,;0{,}92]$ donc si $0\leqslant A_n\leqslant 1$, alors $0\leqslant f(A_n)\leqslant 1$.

c. $A_{n+1}-A_n=-0{,}08An^2<0$ donc (A_n) est décroissante.

d. La limite serait 0 mais l'année scolaire ne dure que 10 mois heureusement !

3.

```
a,n=0.9,0
while a>0.47:
    a=a-0.08*(a**2)
    n=n+1
print(n)
```

4 Suites arithmético-géométriques

87 **1.** (u_n) est décroissante et tend vers 4 en $+\infty$.

2. (u_n) est croissante et tend vers 4 en $+\infty$.

88 Ni croissante, ni décroissante, de limite 4,8.

89 **1.** (u_n) semble croissante de limite 8.

2. a. $v_{n+1}-v_n=0$, (v_n) est constante et vaut $v_0=6$.

b. $u_{n+1}=6+0{,}25u_n$; (u_n) est arithmético-géométrique.

c. $\alpha=8$. On pose $w_n=u_n-8$, on obtient $u_n=-4\times0{,}25^n+8$

d. La limite de (u_n) est bien 8.

90 **1.** L'aquarium contient 272,855 L, elle peut rajouter 32,855 L.

2. En calculant avec 2 et 3 cm, on obtient environ de 10 à 14 L en moins donc 13,5 est plausible, soit environ 5,6 %.

3. On part de 240 L, chaque semaine on perd 5 % donc on multiplie par 0,95 la quantité présente puis on rajoute les 13,5 L.

4. a. $W_{n+1}=V_{n+1}-270=0{,}95W_n$ et $W_0=-30$.

b. $V_n=-30\times0{,}95^n+270$

c. La limite de V_n étant 270, l'aquarium ne débordera pas.

91 **1.** u_n ne semble ni croissante ni décroissante, mais semble tendre vers 1,4.

2. On trouve $\alpha=1{,}4$. On pose $w_n=u_n-1{,}4$, on obtient $u_n=3{,}6\times\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n+1{,}4$.

3. En reposant $u_n=w_n+\dfrac{7}{5}$, on somme les termes d'une suite géométrique et $(n+1)$ termes égaux à $\dfrac{7}{5}$.

On a alors $S_n=3{,}6\times\dfrac{1-\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{-2}{3}}+(n+1)\times\dfrac{7}{5}$

$$=3{,}6\times\frac{3}{5}\times\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right)+(n+1)\times\frac{7}{5}$$

4. Pour n assez grand, le premier terme de la somme est très proche de 0 et $n+1$ très proche de n donc S_n sera proche de $1{,}4n$.

92 **1.** On définit u_n par la relation $u_{n+1}=0{,}8u_n+l$ et $u_0=5\,000$.

2. On utilise $v_n = u_n - \dfrac{l}{0,2}$; $v_n = \left(5\,000 - \dfrac{l}{0,2}\right) \times 0,8^n$ donc $u_n = \left(5\,000 - \dfrac{l}{0,2}\right) \times 0,8^n + \dfrac{l}{0,2}$.

3. En additionnant les termes de u_0 à u_{23}, on obtient une inéquation dont la résolution donne $l \geqslant 53,8$. Il faut donc gagner au moins 54 lecteurs par mois pour tenir l'objectif.

Apprendre à modéliser

1. a. Progression arithmétique.
b. Progression géométrique, non compatible avec **1.a.**
c. La croissance paraît exponentielle, la progression géométrique est plus logique.
2. Le modèle **c.** est le plus adapté (valeur en 0 et 17, type de croissance).
3. Oui le modèle convient toujours avec $n = 18$ puis 19.

Maths en situation...

93 **1.** $u_1 = 1811,25$; $u_2 = 2124,83$; $u_3 = 2\,440,77$
2. $u_{n+1} = 1,0075u_n + 300$
3. $\alpha = -40\,000 / u_n = 41500 \times 1,0075^n - 40\,000$
4. (u_n) tend vers $+\infty$, le capital augmentera toujours.
5. a.

```
def seuil(S):
    n=0
    u=1500
    while u<S:
        n=n+1
        u=1,0075*u+300
    return n
```

b. Il faudra 56 ans !
6. L'augmentation en euro est effectivement de plus en plus élevée chaque année.

94 **Partie A**
1. 20 000 × 0,32 % = 64 €, le CRD est de :
20 000 + 64 – 500 = 19 564 €
2. $19\,564 - 500 + 62,60 = 19\,126,60$ €
3. En C2 =B2*0,0032 ; en E2 =B2-D2+C2 ; en B3 =E2
4. a. Au 43ᵉ mois, la mensualité sera de 435,22 € avec les intérêts.
b. 1 435,23 € d'intérêts soit 7,2 % du montant emprunté.
Partie B
1. Le capital à rembourser augmente de 3,2 % chaque mois, mais il diminue de 500 €, d'où la formule.
2. a. $u_{n+1} = C_{n+1} - 156\,250 = 1,0032u_n$ donc u_n est géométrique de raison 1,0032 et $u_0 = -136\,250$.
b. $C_n = -136\,250 \times 1,0032^n + 156\,250$
c. On a $C_{42} > 0$ et $C_{43} < 0$ donc le capital restant dû devient nul lors du versement de la 43ᵉ mensualité.
3. a. Les intérêts I_n représentent 3,2 % du capital restant dû en fin de période précédente, soit C_{n-1}.
b. $I_n = 0,0032 \times \left(-136\,250 \times 1,0032^{n-1} + 156\,250\right)$
$= 500 - 436 \times 1,0032^{n-1}$

4. La somme vaut $44 \times 500 - 436 \times \dfrac{1-1,0032^{44}}{1-1,0032} \approx 1\,435$ €, ce qui représente la somme des intérêts payés.

95 **Partie A**
1. Cf. fichier
2. $t_{n+1} = t_n(1-\alpha) + 20\alpha$
3. 0,13
4. t_n semble décroissante, de limite 20 ce qui est la température ambiante, c'est donc cohérent.
Partie B
1. $u_{n+1} = t_{n+1} - 20 = 0,87t_n + 0,13 \times 20 - 20 = 0,87u_n$
2. $t_n = 80 \times 0,87^n + 20$

96 **1. a.** Il sert à savoir quand on dépassera une population fixée A.
b.

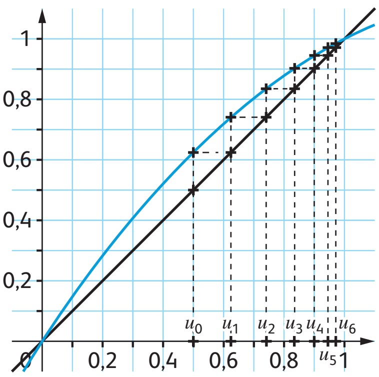
A	15	20	25	50	100
Rang à partir duquel $p_n \geqslant A$	15	26	34	59	84
Rang à partir duquel $a_n \geqslant A$	13	25	38	100	225

c. Les 2 suites sont croissantes, mais beaucoup plus rapidement pour (p_n).
2. En partant du même nombre (ici 1), il considère que les proportions pour la même année (après 200 ans par exemple) seront dans un rapport 256/9 avec 256 qui est le terme d'une suite géométrique et 9 le terme d'une suite arithmétique. Les calculs des deux termes $a_{200} = 90$ et $p_{200} \approx 2\,504$ donnent effectivement environ cette proportion.

97 **1.** La limite vérifie $l = l + rl(k-l)$ d'où $rl(k-l) = 0$ donc $l = 0$ ou $l = k$.

2. $p_{n+1} = \dfrac{N_{n+1}}{k} = \dfrac{N_n + rN_n(k-N_n)}{k} = \dfrac{N_n}{k} + rN_n\left(1 - \dfrac{N_n}{k}\right)$
$= p_n + rkp_n(1-p_n) = p_n + ap_n(1-p_n)$

3. a. b.



c. (x_n) semble converger vers 1.
d. En saisissant la feuille de calcul et à partir du 29ᵉ terme, le tableur donne la valeur 1 : la convergence vers 1 semble confirmée.
4. Comme pour la valeur 0,5, la suite (x_n) semble converger vers 1 lorsqu'on prend $a = 1,5$.
5. Pour la valeur $a = 2,5$, la suite (x_n) semble diverger en demeurant bornée.
6. Pour la valeur $a = 3$, la suite (x_n) semble diverger en demeurant bornée.

98 **1.** $t_0 = 0{,}2\,;\, t_1 = 0{,}2\,;\, t_2 = 0{,}2\,;\, t_3 = 0{,}2\,;\, t_4 = 0{,}1\,;\, t_5 = 0{,}1$

2. Alors que la population augmente, le taux d'accroissement relatif diminue.

3. La population en 2030 correspond à $P_1 = 8\,554$ millions ; pour 2040, $P_2 = 9\,217$ millions.

4. 2060 correspond à $P_4 = 10\,222$ millions, et 2 100 correspond à $P_8 = 11180$ millions. Ces valeurs sont effectivement très voisines des projections de l'ONU.

99 **Partie A**

1. Pour les pucerons, le jour suivant il y a 6 fois le nombre de pucerons de la veille moins les 100 pucerons mangés par la coccinelle (il y en avait C_n le jour de départ).
Pour les coccinelles, 10 % correspondent à une multiplication par 0,1 mais C_n est aussi multiplié par 6, il en reste donc 5,9 C_n (les parties entières permettent de reprendre chaque journée avec un nombre entier).

2.

```
from math import floor
p,c=2000,2
for i in range(10):
    p=floor(6*p-100*c)
    c=floor(5.9*c)
print(p,c)
```

3. Nombre de pucerons : 103 565 736 300
Nombre de coccinelles : 93 803 964.
Ce modèle est peu probable.

Partie B

1. Si $c_n = 0$, (p_n) est alors géométrique de raison supérieure à 1 donc tend vers l'infini.

2. Si $p_n = 0$, (c_n) est alors géométrique de raison $0 < q < 1$ donc tend vers zéro.

3. La masse de coccinelles et de pucerons varie à la hausse et à la baisse alternativement sans se stabiliser. La représentation graphique des points $(p_n\,;c_n)$ est en spirale.

Travaux pratiques

Évolution d'une épidémie : le modèle SIR

Partie A

1. α et λ appartiennent à l'intervalle $]0\,;1[$.

2. On a $S_{n+1} = (1-\alpha)S_n$ et $R_{n+1} = \lambda I_n + R_n$.
On constate que $S_{n+1} + R_{n+1} + I_{n+1} = S_n + R_n + I_n$ donc la population reste stable.

3. S_n est géométrique de raison $(1-\alpha)$ et tend vers 0 puisque $\alpha \in \,]0\,;1[$. Le nombre de personnes jamais infectées va donc décroître vers 0.

4. Si n très grand, S_n est très petit donc on a $I_{n+1} \approx (1-\lambda)I_n$ donc suite géométrique de raison $(1-\lambda)$, qui tend aussi vers 0. À terme, la population sera quasi exclusivement composée de résistants.

Partie B

1. $I_n \times S_n$

2. $S_{n+1} = S_n - \alpha S_n \times I_n$

3. $R_{n+1} = R_n + \beta I_n$

4. On a $S_{n+1} + R_{n+1} + I_{n+1} = S_n + R_n + I_n$

5. b. S = bleu, I = rouge, R = vert

c. Si les paramètres sont trop grands, les nombres varient trop rapidement pour ce modèle.

d. Si R est grand, I augmente très lentement.
Si I est grand, S tend très vite vers 0.

Le flocon de von Koch

Partie A

1. $l_0 = 1\,;\, c_0 = 3\,;\, P_0 = 3\,;\, \mathcal{A}_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

2. $l_{n+1} = \dfrac{1}{3} l_n$ et $c_{n+1} = 4c_n$

3. $P_n = c_n \times l_n$

4. $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + C_n \times l_{n+1}^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \mathcal{A}_n + C_n \times \dfrac{l_n^2}{9} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Partie B

l tend vers 0, c et P vers $+\infty$ alors que $\mathcal{A}$ tend vers une valeur proche de 0,692.

Des espèces invasives : les lapins en Australie

Cet exercice est un exercice de recherche, les modélisations proposées ne sont qu'un exemple parmi de nombreux possibles.

Entre 1859 et 1866, on peut prendre pour modèle une suite géométrique de raison 2,75 pour la population annuelle de lapins sur la seule propriété.

De 1916 à 1940, on peut modéliser le nombre de lapins (en million) par une suite arithmético-géométrique d'expression $u_{n+1} = au_n - 2$ avec $u_0 = 600$ et $u_{24} = 800$. Par tâtonnements, on peut approcher a par la valeur 1,015 (qui donne une croissance annuelle moyenne d'environ 1,5 %).

En supposant que la population croît ensuite jusqu'à 1950 de la même façon, on obtient $u_{34} \approx 907$ soit 907 millions de lapins en 1950.

En 1950, « l'effet myxomatose » réduit la population à 181 millions de lapins. Si l'on estime que « l'efficacité » de la myxomatose dure 5 ans en s'érodant régulièrement chaque année, on peut modéliser entre 1950 et 1955 par une suite géométrique de raison 1,015 (croissance de 1,5 % par an), « corrigée » successivement par les facteurs 0,28 (« effet myxomatose », perte de 72 %) puis 0,38 (perte de 62 %) puis 0,53 (perte de 47 %) puis 0,73 (perte de 27 %) ; on obtient une estimation pour l'année 1955 à environ 8 millions de lapins (51 millions en 1951, 20 millions en 1952, 11 millions en 1953, 7,9 millions en 1954, et 8 millions en 1955).

Aucun dispositif particulier n'étant décrit pour la période 1955-1970, on peut modéliser l'évolution du nombre de lapins par une suite géométrique dont la raison est égale au coefficient multiplicateur donnant l'accroissement annuel moyen de 1955 (8 millions) à 2017 (200 millions) soit : $q^{62} = \dfrac{200}{8}$. On obtient $q \approx 1{,}053$ c'est-à-dire une augmentation annuelle moyenne de 5,3 % de la population de lapins.

THÈME 3

Évolution : modèles continus

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
Notion de limite. Lien avec la continuité et les asymptotes horizontales ou verticales. Limites des fonctions de référence (carré, cube, racine carrée, inverse, exponentielle). Sur des exemples, notion d'une solution d'une équation différentielle. Notion de primitive, en liaison avec l'équation différentielle $y' = f$. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. Exemples. Équation différentielle $y' = ay + b$, où a et b sont des réels ; allure des courbes.	Calculer des limites. Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle. Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou d'une fonction de la forme $2uu'$ ou $u'\mathrm{e}^u$. Résoudre une équation différentielle $y' = ay$. Pour une équation différentielle $y' = ay + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

2. Intention des auteurs

La modélisation est au cœur de l'activité mathématique. Ce thème 3 poursuit l'étude engagée dans le thème 2 concernant les phénomènes d'évolution, et l'on y étudie ici plus particulièrement les modèles d'évolution continu.

Pour mener à bien cette étude, on introduit dans ce thème la notion de limite d'une fonction ainsi que les interprétations graphiques correspondantes. On aborde également la notion d'équation différentielle de la forme $y' = f$, permettant d'introduire la notion de primitives d'une fonction continue. Cette étude est complétée par les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, source féconde de problèmes de modélisations continus.

Conformément au programme, toutes ces notions sont introduites et traitées dans des contextes variés. L'accent a été mis sur la diversité des contextes où ces notions sont mises en jeu (historique, économique, physique, médical…).

Tous les exemples de problèmes proposés par le programme sont abordés.

Ce thème permet de réactiver et de consolider très largement les notions du programme de la classe de Première (dérivation, études de fonctions, fonction exponentielle…).

Comme dans tous les thèmes, le calcul numérique et algébrique est régulièrement travaillé, favorisant ainsi le développement d'automatismes, nécessaire à la résolution de problèmes.

Les outils numériques (logiciel de géométrie dynamique, python, calculatrice, tableur) sont régulièrement mobilisés dans les exercices, notamment dans la rubrique *Maths en situation*, permettant ainsi à l'élève d'en mesurer la portée et l'efficacité dans la résolution de problèmes.

Partir d'un bon pied

A **1.** c **2.** a et d **3.** b et c **4.** c et d **5.** b et c **6.** a **7.** b **8.** a et b **9.** b et c

B **1.** c **2.** b **3.** b

C **1.** $f(2) = 0$, $f'(2) = -1$, $f(6) = -2$, $f'(6) = \frac{2}{3}$

2. $y = -x + 2$

3. Les solutions sont 2 et environ 7,4.

4. L'équation admet 2 solutions.

5. Sur $[2 ; 5]$, f et f' sont négatives.

D **1.** $f'(x) = 3x^2 - 6x + \mathrm{e}^x$

2. $f'(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-2x}$

3. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$

4. $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

E **1.** $f'(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	3	↘	−1	↗	

3. $f'(x) = (2x + 3)\mathrm{e}^x$ est du signe de $2x + 3$.

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	$-2\mathrm{e}^{-3/2}$	↗	

4. $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ est du signe de $x-1$.

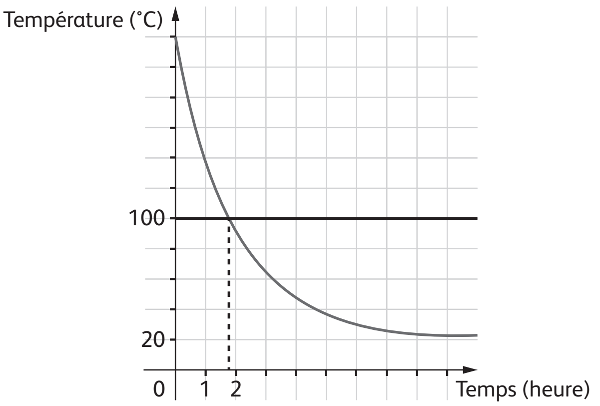
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	

F Les fonctions 1 et 4.

Activités en situation…

Consolider les bases

1. a. $f(0)=220$. La température initiale de l'objet est 220 °C.
b. Pour tout $t\geqslant 0$, $200e^{-0,5t}>0$, donc $f(t)>20$. La température de l'objet ne descendra pas en dessous de 20 °C.
c. $f'(t)=200\times\left(-0,5e^{-0,5t}\right)=-100e^{-0,5t}$. Or $e^{-0,5t}>0$, donc $f'(t)<0$. La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
La température de l'objet diminue au cours du temps.
d.



e. La température de l'objet passe en dessous de 100 °C au bout d'environ 1,8 heure.
2. a.

```
def f(t):
    return 20+200*exp(-0.5*t)
```

b. La fonction seuil permet de déterminer le temps, exprimé en heure, minute et seconde, au bout duquel la température passe en dessous de 100 °C.
c. Le programme retourne (1,49,58), ce qui signifie que c'est au bout de 1 heure, 49 minutes et 58 secondes que la température de l'objet passe en dessous de 100 °C.

Situation 1 Élimination d'un médicament

1. a. Les fonctions f_1 et f_4 sont solutions.
b. $f_5(t)=2,5e^{-0,1t}$, $f_6(t)=-3e^{-0,1t}$
c. $f'(t)=k\times\left(-0,1e^{-0,1t}\right)=-0,1f(t)$ donc f est solution de (E).
2. a. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=f'(t)\times e^{0,1t}+f(t)\times 0,1e^{0,1t}$
$=\left(f'(t)+0,1f(t)\right)e^{0,1t}$
b. Comme $f'(t)=-0,1f(t)$, on a $g'(t)=0$, il existe donc une constante $k\in\mathbb{R}$ telle que $g(t)=k$, $\forall t\in\mathbb{R}$.
c. Comme $g(t)=f(t)e^{0,1t}$, on a $f(t)=ke^{-0,1t}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.
3. a. On a $f(0)=ke^{-0,1\times 0}=3$. Donc $k=3$, et $f(t)=3e^{-0,1t}$.
b. On calcule $f(6)=3e^{-0,1\times 6}\approx 1,65$. Il reste donc 1,65 mL de médicament au bout de 6 h.

Situation 2 De Malthus à Verhulst

1. a. Les valeurs de f deviennent infiniment grandes tandis que celles de g deviennent infiniment proches de 0.
b. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{0,03t}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,03t}=0$
2. a. Comparaison :

Année	1800	1820	1840	1860	1920	1960	1980
Population	5,3	9,64	17,1	31,4	106	179,3	226,6
t	0	20	40	60	120	160	180
$P_1(t)$	5,3	9,7	17,6	30,1	194	644	1 173

On observe que la modélisation s'écarte très franchement des valeurs observées à partir de 1920.
b. $\lim\limits_{t\to+\infty} P_1(t)=+\infty$.
3. a. Comparaison :

Année	1800	1850	1840	1860	1920	1960	1980
Population	5,3	9,64	17,1	31,4	106	179,3	226,6
t	0	20	40	60	120	160	180
$P_2(t)$	5,3	9,5	16,9	29,4	119	205	240

Cette fois le modèle donne des valeurs assez proches jusqu'en 1980.
b. $\lim\limits_{t\to+\infty} P_2(t)=\dfrac{300}{1+55,6\times 0}=300$.
c. Comme la limite de P_2 est égale à 300 en l'infini, cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, la population va se stabiliser autour de 300 millions.
d. Le premier modèle ne correspond plus du tout à la réalité à partir de 1860. Le second modèle semble plus fiable.

Situation 3 Chute libre d'une bille

1. a. Les fonctions $F_1(x)=-10x+1$ et $F_2(x)=-10x+2$ sont deux solutions de l'équation différentielle.
b. Cette équation admet une infinité de solutions. Ce sont les fonctions $F_k(x)=-10x+k$ où $k\in\mathbb{R}$.
c. Les solutions de l'équation $y'=-10x+3$ sont les fonctions $F_k(x)=-5x^2+3x+k$ où $k\in\mathbb{R}$.
2. a. La fonction v est une primitive de la fonction a et la fonction h une primitive de la fonction v.
b. Les conditions initiales imposent que $v(0)=3$ et $h(0)=1$.
c. D'après **1.**, $v(t)=-10t+3$ et $h(t)=-5t^2+3t+1$.
d. La solution positive de l'équation $h(t)=0$ est environ 0,84. La bille atteindra le sol au bout d'environ 0,84 seconde.

Méthode

Capacité 1 — Calculer des limites, utiliser le calcul d'une limite

1 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x+1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-1\right)=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)(e^x-1)=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x}=3$

2 • On a $\lim\limits_{x\to2}(x+1)=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}(2-x)=0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=-\infty$.

• Pour tout $x>2$, $f(x)=\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\dfrac{2}{x}-1\right)}=\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{x}-1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=-1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$.

• La courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x=2$ pour asymptote verticale et la droite d'équation $y=-1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

3 1.
$$f'(x)=-\frac{100\times9\times(-0{,}34)\times e^{-0{,}34x}}{(1+9e^{-0{,}34x})^2}=\frac{306e^{-0{,}34x}}{(1+9e^{-0{,}34x})^2}>0$$
La fonction f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{100}{1+9\times0}=100$

b. La droite d'équation $y=100$ est donc asymptote à la courbe en $+\infty$.

3. La population va croître et se stabiliser aux environs de 100 %.

Capacité 2 — Déterminer les primitives d'une fonction

4 1. $F(x)=-4e^{-0{,}5x}$

2. $F(x)=-3e^x+\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-x$

3. $F(x)=-\dfrac{2}{x}+x$

4. $F(x)=2e^{-x^2+3x-1}$

5. $F(x)=\dfrac{1}{6}(x^3+3x-1)^2$

5 La fonction C est la primitive de la fonction f qui vérifie la condition $C(0)=3$.

On a $C(q)=-q^2+15q-10\times\dfrac{1}{-0{,}2}e^{-0{,}2q}+k$, soit

$C(q)=-q^2+15q+50e^{-0{,}2q}+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

Or $C(0)=50+k=3$, donc $k=-47$.

Ainsi $C(q)=-q^2+15q+50e^{-0{,}2q}-47$.

Capacité 3 — Résoudre une équation différentielle $y'=ax$

6 1. $f_k(x)=ke^{2x},\ k\in\mathbb{R}$ 2. $f_k(x)=ke^{-x},\ k\in\mathbb{R}$

3. $f_k(x)=ke^{-\frac{3}{4}x},\ k\in\mathbb{R}$ 4. $f_k(x)=ke^{\frac{3}{5}x},\ k\in\mathbb{R}$

7 1. L'équation (E) s'écrit $y'=-y$ donc $f(x)=ke^{-x}$, où $k\in\mathbb{R}$. Or $f(0)=k=1$. Donc $f(x)=e^{-x}$.

2. L'équation (E) s'écrit $y'=\dfrac{1}{3}y$ donc $f(x)=ke^{\frac{1}{3}x}$.

Or $f(-1)=ke^{-\frac{1}{3}}=3$, d'où $k=3e^{\frac{1}{3}}$.

Donc $f(x)=3e^{\frac{1}{3}(x+1)}$.

8 1. La solution est $f(t)=2e^{-0{,}08t}$.

2. Comme $f(12)=2e^{-0{,}08\times12}\approx0{,}77$, il restera 0,77 cm^3.

Capacité 4 — Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

9 1. $g'(x)+2g(x)=2+2\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)=4x+3$

2. $f'(x)+2f(x)=g'(x)-2e^{-2x}+2g(x)+2e^{-2x}=4x+3$

10 f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x, $f'(x)+2f(x)=e^{3x}$.
Or $f'(x)=3ae^{3x}$, donc $3ae^{3x}+2ae^{3x}=e^{3x}$, ce qui équivaut à $5a=1$, et donc $a=\dfrac{1}{5}$.

11 $f'(x)=-\dfrac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ et

$f(x)(1-f(x))=\dfrac{1}{1+e^{-x}}\left(1-\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

12 1. $g'(x)-2g(x)=-8x-2(-4x^2)=8x^2-8x$

2. $h'(x)-2h(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)-2(f(x)-g(x))=0$
$\Leftrightarrow f'(x)-2f(x)=g'(x)-2g(x)$
$\Leftrightarrow f'(x)-2f(x)=8x^2-8x$

3. $h_k(x)=ke^{2x},\ k\in\mathbb{R}$ donc $f_k(x)=ke^{2x}-4x^2,\ k\in\mathbb{R}$.

Capacité 5 — Résoudre une équation différentielle $y'=ax+b$

13 1. $f_k(x)=\dfrac{2}{3}+ke^{-3x},\ k\in\mathbb{R}$

2. $f_k(x)=\dfrac{3}{2}+ke^{\frac{1}{2}x},\ k\in\mathbb{R}$

3. $f_k(x)=-\dfrac{1}{3}+ke^{\frac{3}{2}x},\ k\in\mathbb{R}$

4. $f_k(x)=2+ke^{x},\ k\in\mathbb{R}$

14 1. On cherche une fonction constante $u:x\mapsto\alpha$ solution. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=2u(x)-5$, avec $u'(x)=0$. Le réel α vérifie donc $2\alpha-5=0$, soit $\alpha=\dfrac{5}{2}$.

On a donc $f(x)=ke^{2x}+\frac{5}{2}$, où $k\in\mathbb{R}$.

$f(0)=k+\frac{5}{2}=3$, donc $k=\frac{1}{2}$. D'où $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}$.

2. L'équation s'écrit $y'=\frac{3}{5}y+\frac{2}{5}$. La fonction constante u définie par $u(x)=-\frac{2}{3}$ est solution de l'équation, donc $f(x)=ke^{\frac{3}{5}x}-\frac{2}{3}$.

$f(1)=ke^{\frac{3}{5}}-\frac{2}{3}=-1$, donc $k=-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{5}}$.

Donc $f(x)=-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{5}(x-1)}-\frac{2}{3}$.

15 **1.** $u(t)=20$

2. $f_k(t)=20+ke^{-0{,}14t}$, $k\in\mathbb{R}$

3. $f(t)=20-20e^{-0{,}14t}$

4. $f(10)=20-20e^{-0{,}14\times 10}\simeq 15$

Au bout de 15 minutes, il reste environ 15 g.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b	**2.** a	**3.** b et c	**4.** b et c
5. a et c	**6.** b	**7.** b	**8.** a
9. a, b et c	**10.** c	**11.** b	

vrai ou faux ?

Partie A.	**1.** Vrai	**2.** Faux	**3.** Vrai	**4.** Faux
Partie B.	**1.** Vrai	**2.** Faux	**3.** Faux	**4.** Faux
	5. Faux	**6.** Vrai		

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

16 $A=e^{-2}$, $B=1$, $C=e^{-8}$.

17 **1.** $A=e^{-x+1}$ **2.** $B=e^{-5x+5}$

3. $C=e^{-2x-3}$ **4.** $D=-2e^{x-4}$

18 **1.**
$(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2=e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})=4$

2. $\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\times\frac{e^x}{e^x}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

19 **1.** $x^2-5x+4=0$; $S=\{1;4\}$

2. $-2x^2+3x-2=0$; $S=\varnothing$

3. $e^{-3x+1}-1=0\Leftrightarrow e^{-3x+1}=1\Leftrightarrow -3x+1=0$; $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

4. $e^{-2x}-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^{-2x}=e^{-x}\Leftrightarrow -2x=-x$; $S=\{0\}$

20 **1.** $3x^2+2x-1\geqslant 0$; $S=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

2. $-2x^2+3x>0$; $S=\left]0;\frac{3}{2}\right[$

3. $2e^{-2x}+1\leqslant 3\Leftrightarrow e^{-2x}\leqslant 1\Leftrightarrow -2x\leqslant 0$; $S=[0;+\infty[$

4. $1-e^{-3x+1}\geqslant 0\Leftrightarrow 1\geqslant e^{-3x+1}\Leftrightarrow 0\geqslant -3x+1$

$S=\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

21 **1.** $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ et
$e^{2x}+e^x-2=(e^x-1)(e^x+2)$

2. Comme $e^x+2>0$, $f(x)$ est du signe de e^x-1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

22 **1.** Comme $f(1)=-2$, on a $k=-2e^2$.

2. $f(x)=-2e^2e^{-2x}=-2e^{2-2x}=-2e^{2(1-x)}$

3. $f'(x)=-2\times\left(-2e^{2(1-x)}\right)=4e^{2(1-x)}$

4. $f(1)=-2$ et $f'(1)=4$ donc $y=4(x-1)-2=4x-6$.

23 **1.** Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques de raisons respectives e^{-3} et e^3 et de premier terme 1.

2. Comme $-1<e^{-3}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, et comme $e^3>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

24 **1.** $f'(x)=\frac{2\times(x-1)-(2x+3)\times 1}{(x-1)^2}=-\frac{5}{(x-1)^2}<0$

La fonction est donc décroissante sur $]1;+\infty[$.

2. $f'(t)=\frac{1\times(t^2+1)-t\times 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

25 **1.** $f'(x)=3e^{3x}-3=3(e^{3x}-1)$

$e^{3x}-1\geqslant 0\Leftrightarrow e^{3x}\geqslant 1\Leftrightarrow 3x\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme $f'(t)=6\times 0{,}1e^{-0{,}1t}>0$, la fonction est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Automatismes du thème

26 $D=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=-\infty$.

Trois asymptotes d'équations $x=1$, $y=0$ et $y=1$.

27 **1.** Une asymptote d'équation $y=-3$ en $+\infty$.
2. Une asymptote d'équation $x=-1$.
3. Pas d'asymptote liée à la limite.
4. Une asymptote d'équation $x=2$.

28 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=3$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{2x}{x-1}=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+e^x\right)=-\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\left(e^{3x}-1\right)=+\infty$

29 **1.** $F'(x)=f(x)=e^{x^2+1}$
2. $F'(x)=f(x)=e^{x^2+1}>0$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Le coefficient directeur est $F'(0)=f(0)=e$.

30 **1.** $F(x)=x^4-x^3+x^2-x$
2. $F(x)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)^2$
3. $F(x)=-\frac{1}{x}+e^x-3x$
4. $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x+1}-x$

31 **1.** $f_k(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}+k,\ k\in\mathbb{R}$
2. $f_k(x)=ke^{-x},\ k\in\mathbb{R}$
3. $f_k(x)=ke^{0,2x},\ k\in\mathbb{R}$
4. $f_k(x)=ke^{\frac{2}{3}x},\ k\in\mathbb{R}$

32 $f'(x)+f(x)=1\times e^{-x}+x\times\left(-e^{-x}\right)+xe^{-x}=e^{-x}$

33 **1.** La constante vaut $\frac{1}{2}$.
2. $f_k(x)=\frac{1}{2}+ke^{2x},\ k\in\mathbb{R}$.
3. Comme $f_k(0)=-2$, on a $k=-\frac{5}{2}$ et la solution cherchée est :
$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}e^{2x},\ k\in\mathbb{R}$$

exercices Application

Consolider les bases

34 ① $a=1,\ f(1)=-3,\ f'(1)=-3,\ y=-3x$
② $a=-1,\ f(-1)=0,\ f'(-1)=1,\ y=x+1$
③ $a=-2,\ f(-2)=2,\ f'(-2)=0,\ y=2$

35 **1.** $f(-1)=2,\ f'(-1)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-2}{-2+1}=-1$
2. $f'(4)=-5,\ f(4)=-5\times4+3=-17$

36 **1. a.** Sur $[-5;10]$ la fonction f est continue et strictement croissante. Comme la valeur 0 est comprise entre $f(-5)$ et $f(10)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[-5;10]$.
Sur $[10;20]$, la fonction f admet 2 pour minimum, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas d'autre solution.
$f(x)=0$ admet donc une seule solution sur $[-5;20]$.
b. Sur $[-5;10]$ la fonction est continue et strictement croissante. Comme la valeur 2 est comprise entre $f(-5)$ et $f(10)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur $[-5;10]$.
Sur $[10;20]$, la fonction admet pour minimum $f(13)=2$, l'équation $f(x)=2$ admet donc 13 pour autre solution.
L'équation $f(x)=2$ admet donc exactement deux solutions sur $[-5;20]$.
2. a. Faux, car la fonction est croissante sur $[-5;10]$.
b. Vrai, car $f'(13)=0$.
c. Vrai, car f est décroissante sur $[10;13]$.

37 **1.** $f'(x)=-2e^{-2x}-1<0$ donc f est décroissante sur $[1;2]$.
2. Sur $[1;2]$ la fonction est continue et strictement décroissante. Comme la valeur 0 est comprise entre $f(1)=e^{-2}>0$ et $f(2)=e^{-4}-1<0$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[1;2]$.

Connaître le cours

38 **1.** c **2.** b et d **3.** a et d **4.** a et c **5.** b et d
6. d **7.** c **8.** c et d **9.** c **10.** b

39 **1.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, alors la droite d'équation $y=2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-\infty$, alors la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe.
3. Si la droite d'équation $y=-5$ est asymptote à la courbe en $-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-5$.

40 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$
et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$

41 **1.** $G'(x)=F'(x)+0=f(x)$, donc G est aussi une primitive de f.
2. $c'(x)=F'(x)-H'(x)=f(x)-f(x)=0$. On en déduit que la fonction c est constante sur I.
3. Si F et H sont deux primitives de f sur I, alors, d'après **2.**, il existe une constante k telle que, pour tout $x\in\mathrm{I}$, $c(x)=F(x)-H(x)=k$.
Donc deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

42 **1.** Faux, une asymptote en $+\infty$ ne peut pas être verticale.
2. Vrai, $F'(x)=f(x)=e^{-x^2}>0$, toutes les primitives de f sont croissantes sur $\mathbb{R}$.
3. Faux, c'est $f_k(x)=ke^{-2x}$.
4. Faux, c'est $x\to0,1$.
5. Faux, c'est $f_k(x)=ke^{3x}+2$.

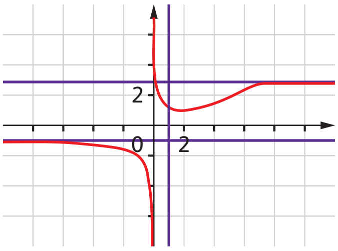
Travailler les capacités du thème

43 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$,

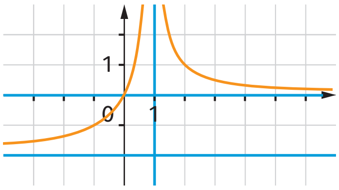
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$.

44 **1.** $y=-1$ en $-\infty$, $y=3$ en $+\infty$ et $x=0$

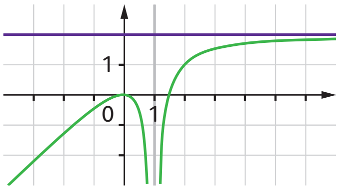
2. Allure possible de $\mathscr{C}$:



45 **1.** Allure possible de $\mathscr{C}$:



2. Allure possible de $\mathscr{C}$:



46 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+e^x\right)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3e^x-2x+1\right)=+\infty$

47 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2x-3)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2(x+2)=+\infty$

48 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)\left(e^x-3\right)=-3$

49 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2+3}=0$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}=-1$

50 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1}=+\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}=0$

51 **1.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-1}{x^2}=-\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to0}\left(-\dfrac{2}{x^2}+1\right)(x-1)=+\infty$

52 **1.** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{2x+3}{x-1}=-\infty$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{2x+3}{x-1}=+\infty$

53 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

2. a. Vrai **b.** Faux (FI) **c.** Faux (FI) **d.** Vrai

54 **1.** $f'(x)=e^x-1$. $e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$, f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. De plus comme $f(0)=1>0$, on en déduit que f est strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et donc $e^x>x$.

3. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

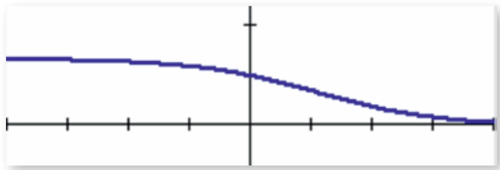
55 **1.** Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

56 **1.** Comme $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$, la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe.

2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, la droite d'équation $y=3$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et $+\infty$.

57 **1.** On obtient la courbe ci-dessous.



Il semble que $\mathscr{C}$ admette pour asymptotes horizontales les droites d'équations $y=\dfrac{2}{3}$ en $-\infty$ et $y=0$ en $+\infty$.

2. • On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+e^x)=3$, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2}{3}$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+e^x)=+\infty$, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Ce qui valide les conjectures formulées à la question **1.**

58 **1.** $F_k(x)=-x+k,\ k\in\mathbb{R}$ **2.** $F_k(x)=x^2+3x+k,\ k\in\mathbb{R}$

59 **1.** $F_k(x)=-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+k,\ k\in\mathbb{R}$

2. $F_k(x)=-3e^x+2x+k,\ k\in\mathbb{R}$

60 **1.** $F_k(x)=-\dfrac{2}{x}+k,\ k\in\mathbb{R}$

2. $F_k(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-3x+k,\ k\in\mathbb{R}$

61 **1.** $F(x)=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{3}{2}x^2-x$

2. $F(x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+2e^x$

3. $F(x)=\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{3}{x}$

62 **1.** $F(x)=-6\sqrt{x}+e^{2x}-\dfrac{1}{2}x$

2. $F(x)=e^{-2x+1}$

3. $F(x)=\dfrac{1}{3}e^{3x+1}$

63 **1.** $F(x)=-\dfrac{1}{x-1}$ **2.** $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2+2x}$

3. $F(x)=\left(x-e^{-x}\right)^2$

64 **1.** On a $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-e^{-x}+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

Or $F(0)=-1+k=-1$, d'où $k=0$.

Donc $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-e^{-x}$.

2. On a $f(x)=-\dfrac{3}{2}\times\left(-2xe^{-x^2}\right)$, donc :

$$F(x)=-\frac{3}{2}e^{-x^2}+k\text{, où }k\in\mathbb{R}$$

Or $F(1)=-\dfrac{3}{2}e^{-1}+k=0$, donc $k=\dfrac{3}{2}e^{-1}$.

D'où $F(x)=-\dfrac{3}{2}e^{-x^2}+\dfrac{3}{2}e^{-1}$.

65 **1.** Faux, c'est $y'=2e^{2x}$.
2. Vrai
3. Vrai, car la fonction est positive.
4. Vrai, elles ont la même dérivée.

66 **1.** $f_k(x)=ke^{5x}$, $k\in\mathbb{R}$ **2.** $f_k(x)=ke^{-0{,}75x}$, $k\in\mathbb{R}$

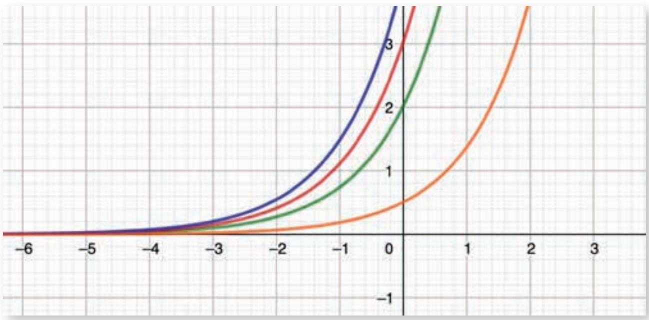
3. $f_k(x)=ke^{\frac{2}{3}x}$, $k\in\mathbb{R}$ **4.** $f_k(x)=ke^{-\frac{1}{2}x}$, $k\in\mathbb{R}$

67 **1.** $f_k(x)=ke^{\frac{3}{4}x}$, $k\in\mathbb{R}$ **2.** $f_k(x)=ke^{\frac{6}{5}x}$, $k\in\mathbb{R}$

68 **1.** $f_k(x)=ke^{4x}$, $k\in\mathbb{R}$ **2.** $f_k(x)=ke^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$

69 **1.** $f_k(x)=ke^{3x}$, $k\in\mathbb{R}$

2. Courbes à tracer



3. $f(x)=-2e^{3x}$

4. $g(x)=3e^3e^{3x}=3e^{3x+3}$

70 **1.** $y'=2y$ **2.** $y'=-3y$

3. $y'=-3y$ **4.** $y'=y$

71 $f_1(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$; $f_2(x)=-e^{-\frac{1}{2}(x+1)}$; $f_3(x)=-2e^{-\frac{1}{2}x}$

72 **1.** Pour tout $t\geqslant 0$, on a $C(t)=ke^{-0{,}008t}$, où $k\in\mathbb{R}$.
Or $C(0)=k=10$, donc $C(t)=10e^{-0{,}008t}$.

2. $C(2{,}5)\approx 9{,}8$. La concentration de saccharose au bout de 2 h 30 est d'environ 9,8 mol.L^{-1}.

73 **1.** $f(0)=2$, $f'(0)=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{1}{3}$

2. $f'(0)=af(0)$, donc $a=\dfrac{1}{6}$

3. $f(x)=2e^{\frac{1}{6}x}$

74 **1.** $f'(x)+2f(x)=3+2(3x-1)=3+6x-2=6x+1$

2. $g'(x)+2g(x)=-4e^{-2x}+3+2\left(2e^{-2x}+3x-1\right)=6x+1$

75 **1.** $u'(x)-u(x)=1\times e^x+x\times e^x-xe^x=e^x$

2. $f_k'(x)-f_k(x)=1\times e^x+(x+k)\times e^x-(x+k)e^x=e^x$

76 **1.**

$$f'(x)+2f(x)=1\times e^{-2x}+(x+1)\times\left(-2e^{-2x}\right)+2(x+1)e^{-2x}$$
$$=e^{-2x}$$

2. $-f'(x)+f(x)=-\dfrac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}+\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^x}{x^2}$

3. $f'(t)=\dfrac{18e^{-2t}}{\left(1+9e^{-2t}\right)^2}$

$$2f(t)(1-f(t))=2\times\frac{1}{1+9e^{-2t}}\left(1-\frac{1}{1+9e^{-2t}}\right)=\frac{18e^{-2t}}{\left(1+9e^{-2t}\right)^2}$$

77 **1.** u est solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel x, $u'(x)+3u(x)=e^{2x}$, avec $u'(x)=2ae^{2x}$. Donc $2ae^{2x}+3ae^{2x}=e^{2x}$, ce qui équivaut à $5a=1$, et donc $a=\dfrac{1}{5}$.

2. Pour tout réel x, $f'(x)=-3ke^{-3x}+\dfrac{2}{5}e^{2x}$.

$$f'(x)+3f(x)=-3ke^{-3x}+\frac{2}{5}e^{2x}+3\left(ke^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}\right).$$

Donc $f'(x)+3f(x)=e^{2x}$. f est bien solution de (E).

78 **1.** Faux, c'est une solution parmi une infinité.
2. Vrai

79 **1.** $p'(x)+2p(x)=2x-1+2\left(x^2-x+1\right)=2x^2+1$

2. $g'(x)+2g(x)=f'(x)-p'(x)+2f(x)-2p(x)$
$=2x^2+1-2x^2-1=0$

3. $f'(x)+2f(x)=g'(x)+p'(x)+2g(x)+2p(x)$
$=0+2x^2+1=2x^2+1$

4. $g_k(x)=ke^{-2x}$, $k\in\mathbb{R}$

5. $f_k(x)=ke^{-2x}+x^2-x+1$, $k\in\mathbb{R}$

80 **1.** Pour tout réel x, $u'(x)=0$ et $-5u(x)+1=0$, donc $u'(x)=-5u(x)+1$. u est solution de (E).

2. Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{-5x}+\dfrac{1}{5}$, où $k\in\mathbb{R}$.

81 **1.** $f(x)=ke^{-2x}-4$, $k\in\mathbb{R}$

2. $f(x)=ke^{\frac{5}{2}x}+\dfrac{3}{5}$, $k\in\mathbb{R}$

3. $f(x)=ke^{-\frac{1}{4}x}+0{,}1$, $k\in\mathbb{R}$

82 **1.** $f(x)=-\dfrac{9}{2}e^{-2x}+\dfrac{3}{2}$

2. $f(x)=-2e^{5x-5}+2$

3. $f(x)=5e^{-\frac{1}{2}x}-3$

83 **1.** La valeur de b est 2.

2. $f_1(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+2$; $f_2(x)=2$; $f_3(x)=-e^{-\frac{1}{2}x}+2$

et $f_4(x)=-3e^{-\frac{1}{2}(x+1)}+2$

84 **1.** $f_k(t)=k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+20,\ k\in\mathbb{R}$

2. $f(t)=200\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+20$

3. a. $f'(t)=-100\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}<0$. La fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=20$

c. La température diminue puis se stabilise à 20 degrés au bout d'un long moment.

exercices Entraînement

1 Limites d'une fonction

85 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\mathrm{e}^{-0,5x}\right)=+\infty$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}=-\infty$

3. $\lim\limits_{t\to+\infty}2,8\left(1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right)=2,8$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)=+\infty$

86 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\left(3\mathrm{e}^{-x}-1\right)=2$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{1-x}{1+x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{1-x}{1+x}=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+2}=-\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x+1}}=3$

87 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

88 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2. $f(x)=x^3\times1-x^3\times\dfrac{1}{x}+x^3\times\dfrac{1}{x^2}-x^3\times\dfrac{1}{x^3}$

$=x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

89 **1. a.** $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{-2x+1}{x-2}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{-2x+1}{x-2}=-\infty$

b. La droite d'équation $x=2$ est donc asymptote à la courbe.

2. a. Ce sont des formes indéterminées du type quotient d'infinis.

b. $f(x)=\dfrac{x\times\left(-2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\times\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$

d. La droite d'équation $y=-2$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

90 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3-2x^2+5x-2\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x^2}}=0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+x-1}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}}=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-1}{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$

91 **1.** On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0$. Par différence $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

L'axe des abscisses est donc asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2. On a $f(x)=\mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^x\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^x\right)=-\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

92 **1.** On conjecture $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

2. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{0,5x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $-\infty$.

3. a. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}\times2}{\mathrm{e}^{0,5x}\left(1+\mathrm{e}^{-0,5x}\right)}=\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-0,5x}}$

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-0,5x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. La droite d'équation $y=2$ est donc asymptote à la courbe en $+\infty$.

93 **1.** $C'(t)=12\times\dfrac{7}{80}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}>0$, la fonction C est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)=12$, le plateau n'est pas atteint et le médicament n'est pas efficace.

94 **1.** $v(t)=10-C\mathrm{e}^{-t}$

2. $v(0)=1\Leftrightarrow10-C=1\Leftrightarrow C=9$

3. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}10-9\mathrm{e}^{-t}=10$, la vitesse limite est de $10\ \mathrm{ms}^{-1}$.

95 Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{a}{1+b\mathrm{e}^{-0,04t}}=a$, on obtient que a vaut 2.

Or $h(0)=\dfrac{1}{10}$, donc $\dfrac{2}{1+b}=\dfrac{1}{10}$, on obtient que b vaut 19.

2 Équation différentielle, primitives

96 **1.** $F_k(x)=-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x+k,\ k\in\mathbb{R}$

2. $F_k(t)=2\mathrm{e}^{-t}+t+k,\ k\in\mathbb{R}$

3. $F_k(t)=2t+\mathrm{e}^{-2t+3}+k,\ k\in\mathbb{R}$

4. $F_k(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x^5}{5}-2x+k,\ k\in\mathbb{R}$

97 **1.** $f(x)=e^{x^3}+x-3$ **2.** $f(x)=-\dfrac{1}{2}e^{x^2-1}+\dfrac{3}{2}$

3. $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2+2x-3)^2+\dfrac{13}{2}$

98 **1.** $f(x)=3+\dfrac{1}{x^2}$; $F_k(x)=3x-\dfrac{1}{x}+k, k\in\mathbb{R}$

2. $F_k(x)=-\dfrac{1}{e^x+1}+k, k\in\mathbb{R}$

3. $f(x)=1-3e^{-x}+e^{-2x}$; $F_k(x)=x+3e^{-x}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+k, \in\mathbb{R}$

99 **1.** F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F'(x)=-3e^{-x}+(-3x+1)(-e^{-x})$$
$$=(-3+3x-1)e^{-x}=(3x-4)e^{-x}=f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :

$$G(x)=F(x)+k, \text{ où } k\in\mathbb{R}$$

Or $G(0)=F(0)+k=1+k=3$, donc $k=2$.

Donc $G(x)=(-3x+1)e^{-x}+2$.

3. Les primitives de h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x)=(-3x+1)e^{-x}+x^2-3x+k, \text{ où } k\in\mathbb{R}$$

100 **1.** Oui, car $F(x)-G(x)=-5$.

2. Oui, car $F(x)-G(x)=1$.

3. Non, car $F(x)-G(x)=\dfrac{7}{x^2+1}$.

101 **1.** Tableau de variations de F :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Comme $F'(1)=f(1)=2$, on a $y=2(x-1)-3=2x-5$.

102 **1.** Faux, car f est positive sur $[4;6]$.

2. Vrai, car f est positive sur $[-2;6]$.

3. Faux, c'est juste un point d'inflexion.

4. Vrai, car $F'(0)=f(0)=0$ et $F'(6)=f(6)=0$.

5. Vrai, car $F'(2)=f(2)=2$.

103 C'est la courbe 3, car $F'(-1)=f(-1)=0$.

104 La courbe $\mathscr{C}_2$ est celle de f, En effet, elle représente une fonction positive (négative) quand la rouge représente une fonction (dé)croissante.

105 **1.** $\Gamma_k(x)=-10e^{-x}+\dfrac{3}{2}x^2-6x+k, k\in\mathbb{R}$

2. $C_T(x)=-10e^{-x}+\dfrac{3}{2}x^2-6x+60$

3. $C_T(5)=67{,}5-10e^{-5}\approx 67{,}4$

106 **1.** $\Gamma_k(x)=6x-\dfrac{1}{2}e^{-x^2+3x}+k, k\in\mathbb{R}$

2. $C_T(x)=6x-\dfrac{1}{2}e^{-x^2+3x}+\dfrac{601}{2}$

3 Équation différentielle $y'=ax+b$

107 **1. a.** $f'(0)=3f(0)-5$, donc $f'(0)=-8$.

b. $T : y=f'(0)(x-0)+f(0)$, donc :

$$T : y=-8x-1$$

2. a. On cherche une fonction constante $u : x\mapsto\alpha$ solution. On a $u'(x)=3u(x)-5$, avec $u'(x)=0$. Le réel α vérifie donc $3\alpha-5=0$, soit $\alpha=\dfrac{5}{3}$.

On a donc $f(x)=ke^{3x}+\dfrac{5}{3}$, où $k\in\mathbb{R}$.

Or $f(0)=k+\dfrac{5}{3}=-1$, donc $k=-\dfrac{8}{3}$.

Donc $f(x)=-\dfrac{8}{3}e^{3x}+\dfrac{5}{3}$.

b. On a $f'(x)=-\dfrac{8}{3}\times 3e^{3x}=-8e^{3x}$. On retrouve $f'(0)=-8$, ainsi que l'équation de la tangente.

3. a. • On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x}=0$. Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{5}{3}$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}=+\infty$. Par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=\dfrac{5}{3}$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

b. Pour tout réel x, $f'(x)=-8e^{3x}$.

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{3x}>0$, donc $f'(x)<0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

108 **1.** $f_k(x)=ke^{-2x}+3, k\in\mathbb{R}$

2. C'est faux, ça dépend du signe de k.

3. C'est vrai car $\lim\limits_{x\to+\infty}(ke^{-2x}+3)=3$.

109 Il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=ke^{ax}-\dfrac{b}{a}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$, on en déduit que $a<0$ et $-\dfrac{b}{a}=3$.

Comme $f(0)=1$, on a $k-\dfrac{b}{a}=k+3=1$ et donc $k=-2$.

Comme $f'(x)=ake^{ax}$, $f'(0)=2$ on a $ak=-2a=2$ et $a=-1$.

Donc $f(x)=-2e^{-x}+3$.

110 **1.** $f_k(t)=ke^{-0{,}005t}, k\in\mathbb{R}$

2. Comme $V(0)=0$, on a $f(0)=-1200$, $k=-1200$ et $V(t)=1200(1-e^{-0{,}005t})$.

3. a. $V_L=\lim\limits_{t\to+\infty}1200(1-e^{-0{,}005t})=1200$

b. $V'(t)=1200\times 0{,}005e^{-0{,}005t}>0$ donc V est croissante sur $[0;+\infty[$.

c. La fonction V est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. La valeur 600 est comprise entre $V(0)=0$ et $V_L=1200$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $V(t)=600$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

Avec la calculatrice, on obtient environ 139.

4. Au bout de 139 min (2 h 19), le taux est atteint.

111 **1.** En remplaçant L, R et E par leurs valeurs numériques, on obtient $0{,}5y'+5y=3$ ce qui se transforme en $y'=-10y+6$.

2. La solution de l'équation différentielle qui s'annule en 0 est : $i(t)=0{,}6\left(1-e^{-10t}\right)$.

3. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} 0{,}6\left(1-e^{-10t}\right)=0{,}6$, cela signifie que l'intensité finit par se stabiliser à environ 0,6 ampère au bout d'un long moment.

112 **1.** On a $\theta'(t)=-2(\theta(t)-20)$ et donc θ est solution de l'équation différentielle $y'=-2y+40$.

2. On obtient $\theta(t)=50e^{-2t}+20$.

3. On a $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(50e^{-2t}+20\right)=20$, cela signifie que la température du liquide finit par se stabiliser à la température ambiante de 20 °C au bout d'un long moment.

113 **1.** En remplaçant m, k et g par leurs valeurs numériques, on obtient $80y'+25y=800$ ce qui se transforme en $y'=-0{,}3125y+10$.

2. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies par : $f_k(t)=ke^{-0{,}3125t}+32$, $k\in\mathbb{R}$.

3. La solution de l'équation différentielle qui s'annule en 0 est : $v(t)=32\left(1-e^{-0{,}3125t}\right)$.

4. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=32\left(1-e^{-0{,}3125t}\right)=32$, cela signifie que la vitesse du parachutiste finit par se stabiliser à environ 32 m.s^{-1} au bout d'un long moment. Il n'atteindra pas la vitesse de 50 m.s^{-1}.

114 **1.** Comme $v=d'$ et $v'=d''$, on obtient :

$$200v'+25v=50$$

ce qui se transforme en $v'=-0{,}125v+0{,}25$.

2. a. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies par : $v_k(t)=ke^{-0{,}125t}+2$, $k\in\mathbb{R}$.

b. La solution de l'équation différentielle qui s'annule en 0 est : $v(t)=2\left(1-e^{-0{,}125t}\right)$.

c. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=2$, cela signifie que la vitesse du chariot finit par se stabiliser à environ 2 m.s^{-1} au bout d'un long moment.

3. a. d est une primitive de v.

b. Il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $d(t)=2\left(t+8e^{-0{,}125t}\right)+k$. Comme la distance est nulle au départ :

$$k=-16 \text{ et } d(t)=2t-16+16e^{-0{,}125t}$$

c. $d(30)=44+16e^{-3{,}75}\approx 44{,}7$.

115 **1. a.** $g(0)=\dfrac{1}{f(0)}=100$.

b. $g'(t)=-\dfrac{f'(t)}{f^2(t)}=-\dfrac{0{,}05f(t)(1-f(t))}{f^2(t)}=-0{,}05g(t)+0{,}05$

c. La solution de (F) qui vaut 100 en 0 est :

$$g(t)=99e^{-0{,}05t}+1$$

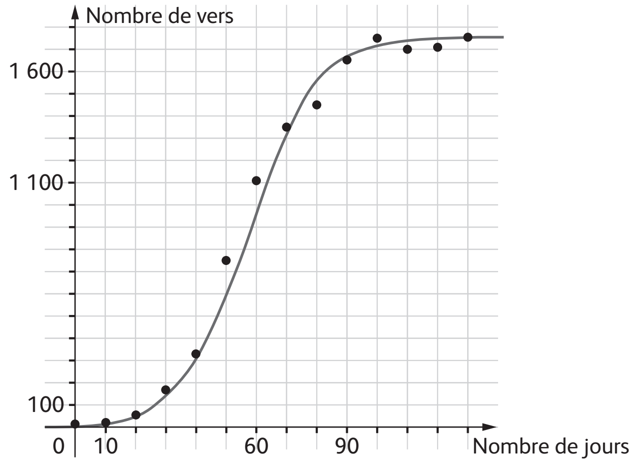
2. a. $f(t)=\dfrac{1}{g(t)}=\dfrac{1}{99e^{-0{,}05t}+1}$

b. $f(30)=\dfrac{1}{99e^{-1{,}5}+1}\approx 0{,}04$ soit 4 % de la population.

apprendre à modéliser

Partie A

1. Nuage de points et courbe



2. Jusqu'au 60^e jour on observe la phase de croissance exponentielle, du 60^e au 90^e jour, la phase de ralentissement, et à partir du 90^e jour la phase stationnaire.

Partie B

1. a. $CM_{\text{global}}=\left(1+\dfrac{9}{100}\right)^{10}\approx 2{,}37$

b.

Nombre de jours	0	10	20	30	40	50
Nombres de vers	10	26	58	165	320	743
Estimation	10	24	57	135	320	758

2. a. $N_1(t)=ke^{0{,}09t}$, où $k\in\mathbb{R}$. $N_1(0)=k=10$.

Donc $N_1(t)=10e^{0{,}09t}$.

b. Au bout de 80 jours, le nombre de vers serait $N_1(80)\approx 13\,394$.

Au bout de 100 jours, le nombre de vers serait $N_1(100)\approx 81030$.

c. Le nombre de vers estimé au bout de 80 jours et de 100 jours est bien trop important, ce modèle n'est pas envisageable à long terme.

Partie C

1. a. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}09t}=0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=K$.

b. Durant la phase stationnaire, le nombre de vers se rapproche de 1 750.

2. $N(0)=\dfrac{1750}{1+a}=10$, ce qui donne $a=174$, et donc $N(t)=\dfrac{1750}{1+174e^{-0{,}09t}}$.

3. Voir le graphique de la **partie A**.

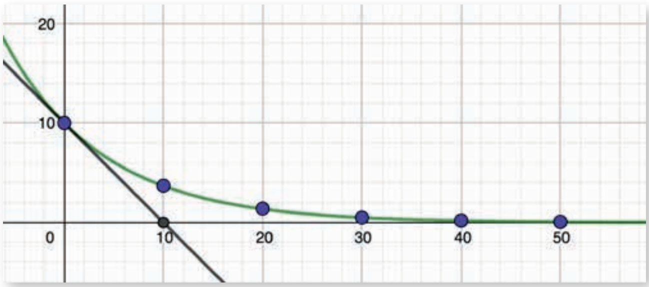
4. t_0 correspond à l'abscisse du point de la courbe de la fonction N en lequel la tangente a le coefficient directeur le plus grand. On lit graphiquement $t_0=60$.

Le point d'abscisse t_0 correspond au point d'inflexion de la courbe.

Maths en situation...

116 **Partie A**

1. Graphique



2. a. L'ajustement exponentiel.
b. L'équation proposée est $y = 10\mathrm{e}^{-0,1x}$.
3. $\tau = 10$
4. $10\mathrm{e}^{-0,1\times 10} \approx 3,7$ ce qui correspond bien à 37 % de 10.
5. $\tau = RC = 10^4 \times 10^{-3} = 10$

Partie B

1. La solution de l'équation différentielle $\tau y' + y = 0$ qui vaut E en 0 est $u_C(t) = E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$.

2. a. $u_C'(t) = -\dfrac{E}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} < 0$, la fonction est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{t\to+\infty} E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0$

c. La tension diminue au cours du temps et se stabilise aux alentours de 0 au bout d'un long moment.

3. $u_C(\tau) = E\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\tau}} = E\mathrm{e}^{-1} \approx 0,37E$

4. a. Comme $u_C(0) = E$ et $u_C'(0) = -\dfrac{E}{\tau}$, on a $y = -\dfrac{E}{\tau}t + E$.

b. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en τ.

5. On peut soit chercher à partir de combien de temps la tension a diminué de 63 % ou bien déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses.

117 **Partie A**

1. La longueur PN semble constante et égale à 1.
2. On a point $P(t,0)$. L'équation de la tangente en $M(t,\mathrm{e}^t)$ a pour équation $y = \mathrm{e}^t(x-t) + \mathrm{e}^t$, elle coupe l'axe des abscisses en $N(t-1;0)$. On a donc bien $NP = 1$.

Partie B

1. a. On a $y = f'(t)(x-t) + f(t)$.
b. Cette tangente coupe l'axe des abscisses quand $x = \dfrac{tf'(t) - f(t)}{f'(t)} = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$ donc en $N\left(t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}\,;0\right)$.

2. Comme $P(t,0)$, on a donc $PN = \dfrac{f(t)}{f'(t)}$.

3. Si cette distance PN est constante et égale à un réel a, alors on a bien $f'(t) = \dfrac{1}{a}f(t)$.

4. Les fonctions cherchées sont donc $f_k(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{a}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

118 **1.** La constante α doit être négative car la température diminue.
2. a. La fonction constante solution est définie par $u(t) = 22$.
b. $\theta_k(t) = k\mathrm{e}^{\alpha t} + 22$, $k \in \mathbb{R}$.
c. Étant donné que la température initiale est de 180°, on en déduit que : $\theta(t) = 158\mathrm{e}^{\alpha t} + 22$.
3. On sait aussi que $\theta(20) = 100$, on a donc :
$$\mathrm{e}^{20\alpha} = \frac{100-22}{158} = \frac{39}{79}$$
4. a. Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0	↗

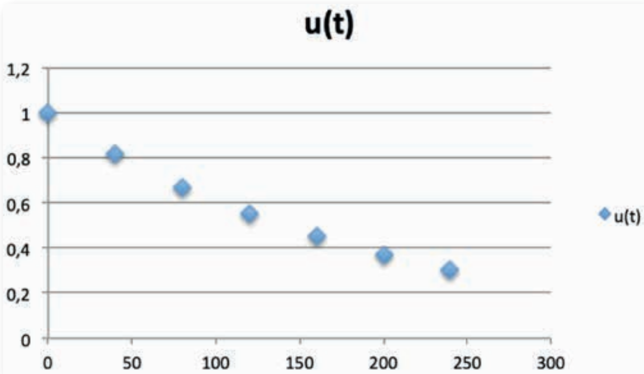
b. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $\dfrac{39}{79} \in]0\,;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \dfrac{39}{79}$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Avec la calculatrice, on obtient $\alpha \approx -0,03 \in]-1\,;0[$.

5. a. La fonction alpha permet d'obtenir une valeur approchée de α à 0,0001 près.
b. et **c.** $\alpha \approx -0,0353$

6. a. $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = 22$. Au bout d'un long moment, la température de la tarte se rapproche de la température ambiante de 22 °C.
b. $\theta'(t) = 158\alpha\mathrm{e}^{\alpha t} < 0$. La fonction θ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
c. Justine devra attendre 84 minutes avant de déguster sa tarte.

119 **Partie A**

1. Représentation graphique



2. Le coefficient multiplicateur global, sur une période de 40 jours, correspondant à une diminution quotidienne de 0,5 % est :
$$\left(1 - \frac{0,5}{100}\right)^{40} \approx 0,82$$
3. $M_{n+1} = 0,995M_n$. La suite (M_n) est la suite géométrique de raison 0,995 et de premier terme $M_0 = 1$.
4. a. D'après le tableau, M_n devient inférieure à 0,5 entre 120 et 160 jours.
b. Avec la calculatrice, on obtient que la période est de 139 jours.

Partie B

1. Comme $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{N(t+h)-N(t)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}-\lambda N(t)=-\lambda N(t)$, la fonction N est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et vérifie $N'(t)=-\lambda N(t)$.

2. La solution de l'équation différentielle qui vaut N_0 en 0 est donnée par $N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

3. a. On cherche T tel que $N(T)=\dfrac{1}{2}N_0$ cela revient à :

$$\mathrm{e}^{-0{,}005T}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{0{,}005T}=2$$

b. La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La valeur 2 est comprise entre $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathrm{e}^x=2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note ln2 cette solution.

c. On a $T=200\ln 2\approx 139$.

120 Partie A

1. On cherche un réel a tel la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a$ vérifie l'équation fonctionnelle. On a alors $a=f(x+y)=f(x)+f(y)=2a$.

On en déduit que $a=0$.

2. La fonction identité définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ est une solution.

3. a. $f(x)=f(0+x)=f(0)+f(x)$ donc $f(0)=0$.

b. $f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$. Or $f(0)=0$, donc $f(-x)=-f(x)$ et *f* est impaire.

4. a. $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2a$, de même $f(3)=3a$ et $f(4)=4a$.

b. De façon générale $f(n)=nf(1)=na$ si $n\in\mathbb{N}$ et $f(-n)=-f(n)=-na$. La formule est donc vraie pour les entiers relatifs.

Partie B

1. On dit que *f* est dérivable en 0 si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}\in\mathbb{R}$.

2. Comme $f(0)=0$ et $f'(0)=m$, on a $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=m$.

3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(h)}{h}$.

4. On a donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=m$. La fonction *f* est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=m$.

5. On en déduit qu'il existe un réel *k* tel que $f(x)=mx+k$. Comme $f(0)=0$, k est nul et f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx$.

6. Toute fonction linéaire vérifie l'équation fonctionnelle car : $m(x+y)=mx+my$.

7. La fonction cherchée est $f(x)=-\dfrac{3}{2}x$.

121 1. a. f_1 est solution de l'équation différentielle $y'=1{,}4y$.

b. $f_1(2)=\mathrm{e}^{2{,}8}\approx 16$ ce qui est beaucoup plus grand que la valeur observée de 14,5.

2. a. On calcule $g(0)=\dfrac{1}{f(0)}=1$ et on a :

$$g'(t)=-\frac{f'(t)}{(f(t))^2}=-\frac{1{,}4f(t)-0{,}014(f(t))^2}{(f(t))^2}$$
$$=-1{,}4g(t)+0{,}014$$

b. La solution de (E') qui vaut 1 en 0 est :

$$g(t)=0{,}99\mathrm{e}^{-1{,}4t}+0{,}01$$

c. On a alors $f(t)=\dfrac{1}{g(t)}=\dfrac{1}{0{,}99\mathrm{e}^{-1{,}4t}+0{,}01}=\dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-1{,}4t}}$.

d. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-1{,}4t}=0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=100$.

La population de bactéries augmente jusqu'à se stabiliser autour de 100 millions au bout d'un long moment.

122 1. On a $P(0)=\dfrac{6\,583\,700}{1+\mathrm{e}^{-0{,}262(0+0{,}781)}}\approx 3\,627\,727$, $P(1)\approx 4\,240\,344$, $P(3)\approx 4\,800\,904$, ce qui correspond à peu près aux valeurs du tableau.

2. Comme P est croissante et que $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=6\,583\,700$, la population va croître en se stabilisant en dessous de 6 600 000. Avec ce modèle, en 1900 il y aurait $P(8{,}6)\approx 6\,064\,454$ habitants.

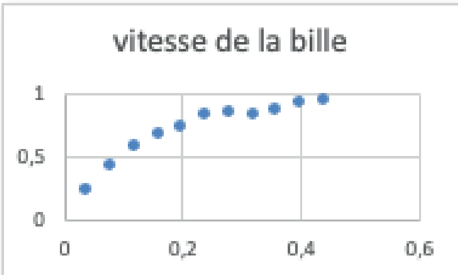
3. a. et **b.** Les valeurs sont très proches du premier modèle de 1815 à 1845 mais cette fois-ci $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=9\,439\,000$ donc la population toujours croissante ne s'élèverait jamais à plus de 9 439 000 âmes. À la fin du XIXe siècle, on trouverait cette fois-ci 6 394 874 personnes.

123 Partie A

1. Cf. fichier

2. On doit saisir : =(B4-B2)/(A4-A2)

3. Nuage de points $(t_i\,;v_i)$:



4. La vitesse limite semble être égale à 0,9 ms^{-1}.

Partie B

1. a. Les solutions sont $v_k(t)=c\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{\alpha m}{k}$, $c\in\mathbb{R}$.

b. Comme $v(0)=c+\dfrac{\alpha m}{k}=0$, on obtient :

$$v(t)=\frac{\alpha m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

2. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}=0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=\dfrac{\alpha m}{k}$.

3. a. $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=\dfrac{8{,}51\times 6{,}9\times 10^{-3}}{6{,}56\times 10^{-2}}\approx 0{,}89$

b. Cette valeur est assez proche de celle trouvée au **4.** de la **partie A**.

124 1. a. $\dfrac{f(t+1)}{f(t)}=\dfrac{13{,}67\mathrm{e}^{0{,}486(t+1)}}{13{,}67\mathrm{e}^{0{,}486t}}=\mathrm{e}^{0{,}486}\approx 1{,}62$.

b. Le taux d'augmentation annuel est d'environ 62 %.

2. La fonction la plus adaptée semble être la fonction f_2.

125 Partie A

1., **2.** et **3.** On obtient :

$$f(x)=-0{,}76x^3+25{,}22x^2+645{,}24x+8\,795{,}84$$

4. La dérivée $f'(x)=-2{,}28x^2+50{,}44x+645{,}24$ s'annule en $-9{,}07$ et $31{,}2$. La fonction f est donc croissante jusqu'en $31{,}2$ puis décroissante.
5. Le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[50\,;60]$.
Avec la calculatrice, on a $\alpha \approx 53$.
6. Cette modélisation n'est pas pertinente car il n'est pas possible que le nombre de centenaires devienne négatif !

Partie B
1. Le tableur donne $g(x)=9\,180\mathrm{e}^{0{,}06x}$.
2. $g'(x)=550{,}8\mathrm{e}^{0{,}06x}>0$ donc g est croissante sur $[0\,;60]$.
3. $g''(x)=33{,}048\mathrm{e}^{0{,}06x}>0$ donc g est convexe sur $[0\,;60]$.
4. À l'aide de la calculatrice, c'est à partir de la 29e année, c'est-à-dire en 2029, que le nombre de centenaires devrait dépasser 50 000.

Partie C
1.

x	2030	2050	2060
$h(x)$	55 490	141 191	199 590

Les estimations sont en effet plus proches.
2. $h'(x)=\dfrac{864\,000\mathrm{e}^{-0{,}06x}}{\left(1+36\mathrm{e}^{-0{,}06x}\right)^2}>0$ donc h est croissante sur $[0\,;60]$.
3. Il faut compléter avec $H<100\,000$, $N \leftarrow N+1$ et $H \leftarrow h(N)$.
4. et **5.** Il faut attendre 2042.

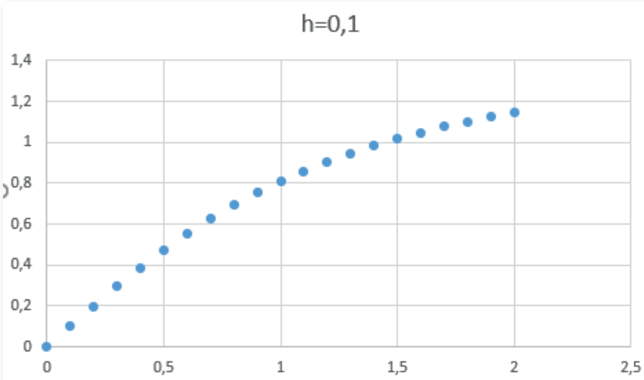
126 **1.** La croissance semble exponentielle.
2. a. Le tableur donne une tendance de $f(x)=39{,}3\mathrm{e}^{0{,}9x}$.
Avec cette tendance, on obtient en 2019 un PIB de $f(5{,}9)\approx 7\,952$ milliards.
b. L'estimation précédente sous-estime très sérieusement le PIB de 2019.
3. Une telle évolution exponentielle du PIB ne peut pas être durable dans le temps.

Travaux pratiques

La méthode d'Euler pour construire une courbe intégrale

Partie A
1. f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in\mathbb{R}$.
Dans ce cas, $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
2. Si h est assez petit, $f'(x_0)\approx\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ et donc $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$.
3. Comme l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, M_1 est bien sur la tangente.

Partie B
1. $f(0{,}1)=f(0+0{,}1)\approx f(0)+0{,}1\times f'(0)=0{,}1\times g(0)=0{,}1$
$f(0{,}2)=f(0{,}1+0{,}1)\approx 0{,}1+0{,}1\times g(0{,}1)\approx 0{,}199$.
2. a. et **b.** Formule tableur : =1/(1+A3^2).
c. La première sert à calculer les x_i, la seconde les y_i avec l'approximation affine.
d. et **e.** On obtient une approximation de la courbe de la primitive de g qui s'annule en 0. Cette approximation est d'autant plus précise que h est petit.



Partie C
1.

```
def g(x):
    return 1/(1+x**2)
```

2. a. Cette fonction créer deux listes, l'une contenant les x_i l'autre les y_i.
b. La variable h correspond au pas utilisé pour construire la courbe et la variable n le nombre de points construits.
c. On obtient les mêmes résultats qu'avec le tableur.
3. a. et **b.** Ces nouvelles instructions permettent de placer les points de coordonnées (x_i, y_i) pour tracer une courbe approchée de f.
c. Pour obtenir une approximation correcte sur $[0\,;10]$, il faut prendre un très grand nombre de points pour que le pas h soit tout petit.

Densité de population urbaine

Partie A
1. On a $C(0)=D_0$. D_0 est la densité au centre-ville.
2. $C'(r)=-bD_0\mathrm{e}^{-br}<0$ car $b>0$ et $D_0>0$. Donc C est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. $\lim\limits_{r\to+\infty}C(r)=0$, la densité décroît et tend vers 0 lorsqu'on s'éloigne de plus en plus du centre-ville.

Partie B
1. $N'(r)=D_0(b-2cr)\mathrm{e}^{br-cr^2}$

r	0		$\dfrac{b}{2c}$		$+\infty$
$N'(r)$		$+$	0	$-$	
$N(r)$	D_0	$\nearrow$	$D_0\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4c}}$	$\searrow$	0

2. Comme $\lim\limits_{r\to+\infty}(br-cr^2)=\lim\limits_{r\to+\infty}r(b-cr)=-\infty$, on a $\lim\limits_{r\to+\infty}N(r)=0$.
3. La population commence par augmenter pour ensuite diminuer et devenir pratiquement nulle quand on s'éloigne du centre.

Partie C
Le modèle de Clark est adapté à la ville C, où la densité ne fait que diminuer.

Le modèle de Newling lui est adapté aux villes A et B où l'on remarque d'abord une augmentation avant la diminution.

Équation différentielle à coefficients non constants

Partie A

1. Comme la fonction a est continue sur I, elle admet des primitives sur I.

2. $g'(x) = ka(x)e^{A(x)} = a(x)g(x)$

3. a. $h'(x) = f'(x)e^{-A(x)} - f(x)a(x)e^{-A(x)}$

$= (f'(x) - f(x)a(x))e^{-A(x)} = 0$

b. D'après la question **a.**, la fonction h est constante sur I, si on note k cette constante, on obtient le résultat annoncé.

4. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est l'ensemble des fonctions f_k définies sur I par :

$$f_k(x) = ke^{A(x)}, k \in \mathbb{R} \text{ où } A \text{ est une primitive de } a$$

5. a. $f_k(x) = ke^{x^2}, k \in \mathbb{R}$

b. $f_k(x) = ke^{-\frac{1}{2}e^{2x}}, k \in \mathbb{R}$

THÈME 4

Approche historique de la fonction logarithme

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
• Réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, représentation graphique. • Fonction logarithme népérien : réciproque de la fonction exponentielle. Limites, représentation graphique. Équation fonctionnelle. Fonction dérivée. • Fonction dérivée de $x \to \ln(u(x))$	• Calculer une fonction dérivée, calculer des limites. Dresser un tableau de variations. • Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser le calcul des limites, l'allure des courbes représentatives des fonctions inverse, carré, cube, racine carrée, exponentielle et logarithme. • Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation. • Utiliser la relation $\ln(q^n) = n\ln(q)$ pour déterminer un seuil.

2. Intention des auteurs

Conformément au programme, il s'agit, dans ce thème, de montrer qu'un objet mathématique peut être étudié selon divers points de vue. Historiquement introduite de deux façons très différentes presque simultanément (équation fonctionnelle et quadrature de l'hyperbole), le programme définit la fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle.
Pour mener à bien cette étude, on réactive tout d'abord les notions vues en classe de Première : dérivées, étude des variations d'une fonction, et fonction exponentielle (relation fonctionnelle et dérivée). Puis on travaille la définition actuelle et la résolution d'équations. Viennent ensuite seulement l'étude des limites et des variations, et la recherche de seuils. Une large part du thème est consacrée, comme l'indique le programme, à l'étude de problèmes historiques : lien entre suites arithmétiques et suites géométriques, travaux de Neper et de Briggs, quadrature de l'hyperbole, problème des sous-tangentes constantes, algorithme de Brouncker. On s'attache également à étudier des problèmes issus d'autres disciplines : démographie, économie, physique, … Les compétences de modélisation au travers la rubrique Maths en situation, et de communications avec les travaux pratiques et la proposition de plusieurs exposés à développer à l'oral, sont mobilisées. L'accent a été mis sur la diversité des situations.
Comme dans tous les thèmes, on travaille régulièrement le calcul numérique et algébrique, ainsi que le raisonnement et les démonstrations. La diversité des activités et exercices proposés permet de travailler la logique et laisse une grande place à la prise d'initiative (individuelle ou en groupe). De nombreux exercices permettent également le travail de l'oral et de l'argumentation.

Partir d'un bon pied

A 1. b 2. a 3. c 4. d 5. b 6. b 7. a 8. c

B 1. Faux 2. Faux 3. Faux 4. Vrai
5. Faux 6. Vrai 7. Faux

C 1. a. $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ b. $S = \varnothing$
c. $S = \{0\}$ d. $S = \{2\}$
e. $S = \{1\}$ f. $S = \{1\}$
2. a. $(e^x - 1)(2e^x + 3) = 2e^{2x} + 3e^x - 2e^x - 3 = 2e^{2x} + e^x - 3$
b. $S = \{0\}$

D 1. a. $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^2$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$
b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2. a. $f'(x) = 2e^{2x+1} - 2 = 2\left(e^{2x+1} - 1\right)$ et
$e^{2x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	3	↗ e^2

b. Comme le minimum de la fonction est 3, elle est strictement positive sur $]-\infty\,; 0{,}5]$.

3. Pour tout réel $x \in]-\infty\,; 0{,}5]$, $F'(x) = f(x) > 0$. Donc la fonction F est croissante sur $]-\infty\,; 0{,}5]$.

4. a. $f(0) = e + 1$, $f'(0) = 2(e - 1)$ et la droite T admet pour équation $y = 2(e-1)x + e + 1$.
b. $f''(x) = 4e^{2x+1} > 0$ donc la fonction f est convexe sur $]-\infty\,; 0{,}5]$.

c. Comme la fonction f est convexe, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T.

5. Les résultats précédents sont compatibles avec le tracé à la calculatrice.

E Comme $f(0)=b$ et $f(0)=-2$, on a $b=-2$.

Comme $f'(x)=(ax+a-2)\mathrm{e}^x$, $f'(0)=a-2$ et

$f'(0)=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-1$, on en déduit que $a=1$.

Donc $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$.

Activités en situation...

Consolider les bases

1. Les courbes des fonctions carré et racine carrée paraissent symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

2. $M(x\,;y)\in C_f \Leftrightarrow y=x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y}=x \Leftrightarrow M(y\,;x)\in C_g$

3. a. $S=\{7\}$ b. $S=\{81\}$
c. $S=\{256\}$ d. $S=\{\sqrt{5}\}$

Situation 1 Mettre en relation des produits et des sommes

1. a. On utilise le fait que les puissances s'ajoutent.

b. $1{,}77156\times1{,}94872=1{,}1^6\times1{,}1^7=1{,}1^{13}\approx3{,}45227$

$1{,}331\times2{,}14359=1{,}1^3\times1{,}1^8=1{,}1^{11}\approx2{,}85312$

2. a. Ces logarithmes font correspondre des valeurs entières aux puissances de 10.

b. $\log(2)\approx0{,}3110299957$ et $\log(3)\approx0{,}4771212547$ et $\log(2)+\log(3)\approx0{,}7781512504$ correspond à $\log(6)$.

c. $\log(2)+\log(4)=\log(8)$ et $\log(2)+\log(5)=\log(10)$

d. De façon générale $\log(a)+\log(b)=\log(a\times b)$

e. Pour multiplier 114 par 786, on ajoute $\log(114)$ et $\log(786)$, on obtient 4,9523273973 ce qui est $\log(89\,604)$ donc $114\times786=89\,604$.

Situation 2 Quadrature de l'hyperbole

1. Tableau de valeurs

a	1	2	3	4	5
$\mathscr{A}(a)$	0	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094
a	6	7	8	9	10
$\mathscr{A}(a)$	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972	2,3026
a	11	12	13	14	15
$\mathscr{A}(a)$	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081
a	16	17	18	19	20
$\mathscr{A}(a)$	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444	2,9957

2. On observe sur le tableau que par exemple : $A(2)+A(3)=A(6)$

Situation 3 Définir la fonction logarithme népérien

1. a. La fonction exp est continue, strictement croissante, et d'intervalle-image $]0\,;+\infty[$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires qui permet de justifier l'existence d'une telle valeur.

b. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, la valeur z est unique et ne dépend que de la valeur de y. Elle s'exprime bien comme « une fonction de y ».

c. Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on doit avoir $y>0$.

2. Comme $\mathrm{e}^{\ln(x\times y)}=x\times y=\mathrm{e}^{\ln(x)}\times\mathrm{e}^{\ln(y)}=\mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)}$, on a :

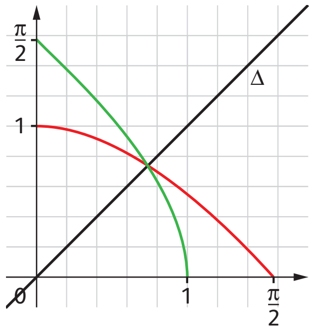
$$\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)$$

méthode

Capacité 1 Exploiter les courbes de fonctions réciproques

1 1. La fonction cosinus est continue et strictement monotone sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, d'intervalle-image $[0\,;1]$, elle admet donc une fonction réciproque, qui est définie sur $[0\,;1]$.

2. Courbes (réciproque en vert) :



2 1. Faux 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

Capacité 2 Étudier une fonction comportant un logarithme

3 1. $f'(x)=2x-6\times\dfrac{1}{x}=2\dfrac{x^2-3}{x}$

$f''(x)=2-6\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=2\dfrac{x^2+3}{x^2}$

2. Variations

x	0,5		$\sqrt{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0{,}5)$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$	$f(4)$

Avec $f(0{,}5)\approx4{,}41$; $f(\sqrt{3})\approx-0{,}30$ et $f(4)\approx7{,}68$.

3. $f(1)=1$ et $f'(1)=-4$ donc la tangente T admet pour équation $y=-4(x-1)+1=-4x+5$.

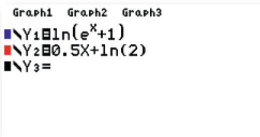
De plus, $f''(x)>0$, donc la fonction f est convexe sur $[0{,}5\,;4]$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T sur $[0{,}5\,;4]$.

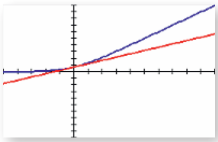
4 1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x+1>0$, donc $\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$ est défini.

2. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ donc, pour tout réel x, $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $f(0)=\ln 2$ et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. D'où l'équation de la tangente :

$$y=\frac{1}{2}(x-0)+\ln 2=\frac{1}{2}x+\ln 2$$

4. 



Capacité 3 Résoudre une équation, une inéquation

5 1. a. $S=\left\{e^{\frac{1}{3}}\right\}$ b. $S=\{1;e^4\}$

2. a. $S=\{\ln 5\}$ b. $S=\{\ln 7\}$

6 1. $S=\left\{e^{\frac{1}{6}}\right\}$ 2. $S=\left\{2+\sqrt{2}\right\}$

7 1. Comme $x>0$, $x+2>0$. La valeur 0 a un seul antécédent : 1.
2. Comme $x+2>0$, $f(x)$ est du signe de $\ln(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

8 1. $5+3\times 2^n \geqslant 1\,000 \Leftrightarrow 2^n \geqslant \dfrac{995}{3}$

$$\Leftrightarrow n\ln(2)\geqslant \ln\frac{995}{3}$$

$$\Leftrightarrow n\geqslant \frac{\ln\left(\frac{995}{3}\right)}{\ln 2}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{995}{3}\right)}{\ln 2}\approx 8{,}4$ donc $n\geqslant 9$

2. $5+3\times 0{,}5^n \leqslant 5{,}01 \Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant \dfrac{1}{300}$

$$\Leftrightarrow n\ln(0{,}5)\leqslant \ln\frac{1}{300}\Leftrightarrow n\geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{300}\right)}{\ln 0{,}5}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{1}{300}\right)}{\ln 0{,}5}=\dfrac{\ln 300}{\ln 2}\approx 8{,}2$ donc $n\geqslant 9$

3. $5-3\times 0{,}5^n \geqslant 4{,}999 \Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant \dfrac{1}{3\,000}$

$$\Leftrightarrow n\ln(0{,}5)\leqslant \ln\frac{1}{3\,000}$$

$$\Leftrightarrow n\geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{3\,000}\right)}{\ln 0{,}5}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{1}{3\,000}\right)}{\ln 0{,}5}=\dfrac{\ln 3\,000}{\ln 2}\approx 11{,}6$ donc $n\geqslant 12$

J'évalue mes connaissances

QCM

1. a	2. a	3. b	4. a
5. b	6. a et c	7. c	8. b
9. a et b	10. a	11. c	12. a

vrai ou faux ?

Partie A. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai 5. Faux 6. Vrai 7. Faux

Partie B. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux 4. Faux 5. Faux 6. Vrai

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

9 1. 6,5 2. 8 3. 15 4. 16 5. 18 6. 12

10 1. Comme $1{,}1\times 0{,}9=0{,}99$, on a une baisse globale de 1 %.
2. Comme $0{,}96\times 1{,}1=1{,}056$, on a une hausse globale de 5,6 %.
3. Comme $(1{,}06)^3\approx 1{,}191$, on a une hausse globale d'environ 19,1 %.

11 1. $S=\varnothing$ 2. $S=\left\{-\dfrac{4}{3};1;2\right\}$

12 1. Comme $e^x>0$, $f(x)$ est du signe de $5x-2$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Comme $x^2+x+1>0$, $f(x)$ est du signe de $3-x$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

13 1. $F(x)=2x^4+2x^3+x^2+7x$
2. $F(x)=-\dfrac{3}{x}+e^x$
3. $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x-1}-3x$

14 1. $F'(x)=-2e^{-x}+(-2x+1)(-e^{-x})=f(x)$
2. $F'(x)=2x-1+2e^x+(2x-3)e^x=f(x)$

15 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$

16 $v_{n+1}=u_{n+1}-20=0{,}95(v_n+20)-19=v_n$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0=-23$.

17 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes : l'une verticale d'équation $x=4$ et l'autre horizontale en $+\infty$ d'équation $y=1$.

Automatismes du thème

18 **1.** $\ln 8-\ln 16=3\ln 2-4\ln 2=-\ln 2$

2. $\ln\dfrac{1}{32}=-5\ln 2$

3. $\ln 2^3+3\ln 4=3\ln 2+6\ln 2=9\ln 2$

4. $4\ln e^2-e^{\ln 8}+\ln 2=4\times 2-8+\ln 2=\ln 2$

19 Résultat 1 : $\ln(x)+\ln(x+1)=\ln(x(x+1))=\ln(x^2+x)$

Résultat 2 : $\ln x^3-\ln x=3\ln x-\ln x=2\ln x$

20 **1.** Comme $2x+1>0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. Comme $-x^2<0$, $f'(x)$ est du signe opposé à celui de $\ln(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

21 **1.** $f'(x)=2\times\ln x+(2x+1)\times\dfrac{1}{x}=2\ln x+2+\dfrac{1}{x}$

2. $f'(x)=\dfrac{2}{2x-3}$

22 **1.** $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^2+7x-2\ln x$

2. $G(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$

3. $H(x)=\ln(e^x+1)$

23 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\ln x)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\ln x}{x}\right)=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(4-\ln x)=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(-2\ln x-1)=+\infty$

24 **1.** $f'(x)=2+\dfrac{1}{x}>0$. Donc la fonction f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$. Donc la fonction f est concave sur $]0\,;+\infty[$.

25 **1.** $S=\{\ln 4\}$ **2.** $S=\{\ln 7\}$

3. $S=\{\ln 5\}$ **4.** $S=\{\ln 3\}$

26 **1.** $S=\{e^4\}$ **2.** $S=\{e^{-2}\}$

3. $S=\{-2\,;1\}$ **4.** $S=\{e\,;e^{-1}\}$

27 **1.** $n>\dfrac{\ln 100}{\ln 1{,}25}$, soit à partir de 21.

2. $n\geqslant\dfrac{\ln 500}{\ln 1{,}1}$, soit à partir de 66.

3. $n\geqslant\dfrac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}8}$, soit à partir de 18.

4. $n>\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}5}$, soit à partir de 10.

exercices Application

Consolider les bases

28 $A=\dfrac{e^{3x-2x+1}}{e^{2x-3}}=e^{3x-2x+1-2x+3}=e^{-x+4}$

$B=\dfrac{e^1\times e^{-2x}}{e^{x-1}\times e^{3x}}=e^{1-2x-x+1-3x}=e^{2-6x}$

29 **1.** $f^2(x)-g^2(x)=\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=1$

2. $2f^2(x)-1=2\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-1=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=f(2x)$

3. $2f(x)\times g(x)=2\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\times\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=g(2x)$

30 **1.** Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

2. a. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\times\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

3. $f'(x)=\dfrac{e^x\times(e^x+1)-(e^x+1)\times e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^{2x}}{(e^x+1)^2}>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

31 $f'(x)=1\times e^x+(x-2)\times e^x=(x-1)\times e^x$

Comme $e^x>0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	

Donc f admet un minimum, égal à $f(1)=-e$.

32 **1.** Comme $e^{-0{,}1x}>0$, $f(x)$ est du signe de x :

x	-5		0		20
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. $f'(x)=1\times e^{-0{,}1x}+x\times\left(-0{,}01e^{-0{,}01x}\right)=(1-0{,}1x)\times e^{-0{,}1x}$

Comme $e^{-0{,}1x}>0$, $f'(x)$ est du signe de $1-0{,}1x$.

x	-5		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-5)$	$\nearrow$	$f(10)$	$\searrow$	$f(20)$

Avec $f(-5)\approx-8{,}2$; $f(10)\approx 3{,}7$ et $f(20)\approx 2{,}7$.

33 **1.** $f'(x)=2\times e^{-0{,}5x}+(2x+1)\times\left(-0{,}5e^{-0{,}5x}\right)$
$=(1{,}5-x)\times e^{-0{,}5x}$

Comme $e^{-0{,}5x}>0$, $f'(x)$ est du signe de $1{,}5-x$.

Donc f est croissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\,;+\infty[$.

2. $f''(x)=(-1{,}75+0{,}5x)\times e^{-0{,}5x}$

Comme $e^{-0{,}5x}>0$, $f''(x)$ est du signe de $-1{,}75+0{,}5x$.

Donc f'' est négative sur $]-\infty\,;3{,}5]$ et positive sur $[3{,}5\,;+\infty[$.

On en déduit que f est concave sur $]-\infty\,;3{,}5]$ et convexe sur $[3{,}5\,;+\infty[$.

On a $f(3{,}5)=8e^{-1{,}75}$, $f'(3{,}5)=-2e^{-1{,}75}$. Donc la tangente T admet pour équation $y=-2e^{-1{,}75}x+15e^{-1{,}75}$

b. Comme le point d'abscisse 3,5 est un point d'inflexion, d'après le **2.** la tangente T est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ sur $]-\infty\,;3{,}5]$ puis est en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[3{,}5\,;+\infty[$.

Connaître le cours

34 **Diaporama QCM**

1. b **2.** a **3.** a **4.** d
5. b **6.** c **7.** d **8.** a

Diaporama EXO

1. $A=0$

2. $\ln(x^3)-\ln(x^2)=\ln\left(\dfrac{x^3}{x^2}\right)=\ln x$

3. $x=\ln 8=3\ln 2$

4. $x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

6.

x	$-\infty$		e^3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

7. $f'(x)=4x-\dfrac{4}{x}=\dfrac{4x^2-4}{x}=\dfrac{4(x-1)(x+1)}{x}$

8. $F(x)=\ln(2x+3)$

35 **1.** a et b **2.** b, c et d
3. a et b **4.** a et b

Démo

36 **1.** $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$

2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln\left(x\times\dfrac{1}{y}\right)=\ln x+\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)=\ln x-\ln y$

37 **1.** Faux **2.** Faux **3.** Vrai
4. Faux **5.** Vrai **6.** Vrai

38 **1. a.** $S=\{\ln 5\}$ **b.** $S=\{-\ln 2\}=\left\{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

2. a. $S=\{e^5\}$ **b.** $S=\left\{e^{\frac{1}{2}}\right\}$

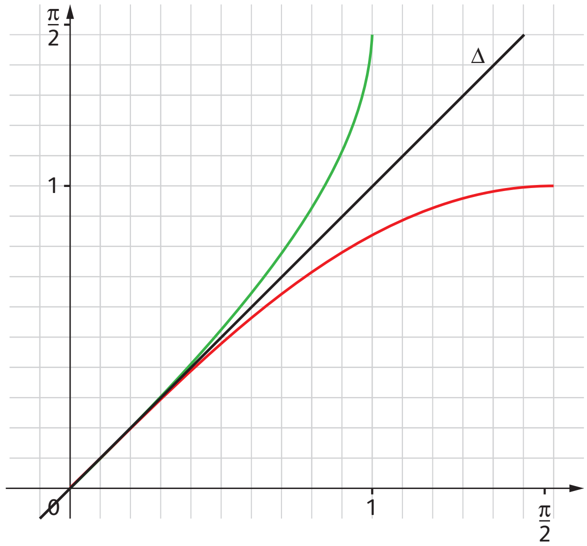
39 **1.** Faux
2. Vrai
3. Faux, ln n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$.
4. Faux
5. Vrai

40 **1.** $\ln 2<\ln 4{,}3$ **2.** $\ln 0{,}6<\ln 0{,}8$
3. $\ln 1{,}4<\ln e$ **4.** $\ln 0{,}4<\ln 1{,}3$

Travailler les capacités du thème

41 **1.** La fonction sinus est continue, strictement monotone sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et d'intervalle-image $[0\,;1]$, elle admet donc une fonction réciproque, qui est définie sur $[0\,;1]$.

2. Courbes (réciproque en vert) :



42 **1.** On sait que $x\in\,]0\,;1[$, $x^2<x<\sqrt{x}$, donc :

$$0{,}124^2<0{,}124<\sqrt{0{,}124}$$

2. On sait que $x\in\,]1\,;+\infty[$, $\sqrt{x}<x<x^2$, donc :

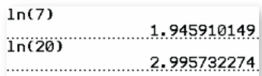
$$\sqrt{7{,}3}<7{,}3<7{,}3^2$$

43 **1.** Comme la fonction racine carrée est croissante, $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$. Donc $2<\sqrt{7}<3$.

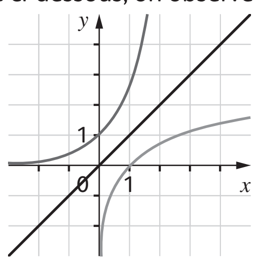
2. $\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$. Donc $3<\sqrt{13}<4$.

44 $\ln 7\approx 2$ et $\ln 20\approx 3$

À la calculatrice :



45 Sur le graphe ci-dessous, on observe que $\ln x<x<e^x$.



46 **1.** c **2.** c **3.** b **4.** c **5.** b

47 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(x+\ln(x))=-\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}(3-\ln(x))=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x+1}=-\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10}{\ln x}=0$

48 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3\ln(x)\right)=+\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)\ln x=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-4\ln x)=-\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2(6-2\ln x)\right)=-\infty$

49 **1.** $f(x)$ existe si, et seulement si $4x-8>0$ c'est-à-dire : $x>2$.

2. a. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. • $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)=0$, donc en passant au logarithme, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-8)=+\infty$, donc en passant au logarithme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

50 **1.** $f'(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ **2.** $f'(x)=-\dfrac{2}{x}$

3. $f'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}$ **4.** $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$

51 **1.** $f'(x)=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$ **2.** $f'(x)=4\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{x}$

3. $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ **4.** $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$

52 **1.** $f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

2. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

3. $f'(x)=\mathrm{e}^x\times\ln x+\mathrm{e}^x\times\dfrac{1}{x}=\mathrm{e}^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

4. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x\times\ln x-\mathrm{e}^x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x}\left(1-\dfrac{1}{x\ln x}\right)$

53 **1.** $F(x)=\ln x-2x^2$ **2.** $F(x)=3x-\ln x$

3. $F(x)=2\ln x-\dfrac{1}{3}x^3+x$ **4.** $F(x)=x^2-5\ln x$

54 **1.** $F(x)=\ln(3x+1)$ **2.** $F(x)=\ln\left(x^2+1\right)$

3. $F(x)=\dfrac{1}{5}\ln(5x+3)$ **4.** $F(x)=2\ln(x-1)$

55 **1.** $f'(x)=2+\dfrac{4}{x}$

2. $F'(x)=1\times(x-1+4\ln x)+x\times\left(1+\dfrac{4}{x}\right)=f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

56 **1.** $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

2. Comme $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\ln(x)$, la fonction f est de la forme $u'\times u$ avec $u(x)=\ln(x)$. On en déduit que les primitives F de f sont de la forme $\dfrac{1}{2}u^2+k$, où k est un réel fixé, c'est-à-dire $F(x)=\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2+k$.

3. $F_{\mathrm{e}}(x)=\dfrac{1}{2}\left(\ln^2 x-1\right)$

57 • Ligne 2 :

$f'(x)=2x+\dfrac{4}{x}-3=\dfrac{2x^2}{x}+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3x}{x}=\dfrac{2x^2-3x+4}{x}$

• Ligne 3 :

$$f''(x)=\frac{(4x-3)\times x-\left(2x^2-3x+4\right)\times 1}{x^2}=\frac{4x^2-3x-2x^2+3x-4}{x^2}=\frac{2x^2-4}{x^2}=\frac{2\left(x^2-2\right)}{x^2}$$

• Ligne 4 : Si on pose $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4(x\ln(x)-x)+x+c$, où c est un réel fixé, on a $F'(x)=x^2-3x+4\left(1\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1\right)+1=f(x)$.

Donc F est bien une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

58 **1.** La droite semble tangente à la courbe au point d'abscisse 1. De plus il semble que la courbe soit toujours en dessous de la droite sur $]0\,;+\infty[$.

2. $f(1)=-3$ $f'(x)=\dfrac{2}{x}$ et $f'(1)=2$ donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y=2(x-1)-3$, soit $y=2x-5$. Donc la droite rouge est bien la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

De plus $f''(x)=-\dfrac{2}{x^2}$ (négatif), donc la fonction f est concave sur $]0\,;+\infty[$. La courbe est donc en dessous de la tangente sur $]0\,;+\infty[$.

59 **1.** a **2.** b **3.** b **4.** a **5.** b

60 **1.** Le raisonnement est correct.

2. a. Comme la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et que $f(\mathrm{e})=0$, on a :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b.

x	0		e^3		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

c.

x	0		e^5		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

d.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

61 **1.** $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. a. $h(x)=\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b. D'après la question précédente, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite Δ sur $]0\,;1]$ puis au-dessus de la droite Δ sur $[1\,;+\infty[$.

62 **1.** Faux, la limite en $+\infty$ est égale à 0.

2. Vrai

3. Faux, $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$.

4. Vrai

63 1. a. $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

b. $x>0$ et $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

c.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	-1	↘	

2. a. Le maximum de f est égal à -1, atteint en $x=1$. La fonction f est donc négative sur $]0\,;+\infty[$.

b. Pour tout réel $x>0$, $f(x)<0 \Leftrightarrow \ln x - x<0 \Leftrightarrow \ln x<x$.

c. La courbe représentative du logarithme est en dessous de la bissectrice d'équation $y=x$.

64 1. a. $f(x)$ existe si, et seulement si $1+x>0$, c'est-à-dire $x>-1$.

b. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}>0$, donc la fonction f est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

3. $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}<0$, donc la fonction f est concave sur $]-1\,;+\infty[$.

4. a. $f(0)=0$ et $f'(0)=1$, donc l'équation de la tangente T est $y=x$.

b. Comme la fonction f est concave sur $]-1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ est toujours en dessous de la tangente T.

5. Les résultats précédents sont confirmés par les tracés sur la calculatrice.

65 Comme $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

$1-\ln x>0 \Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}$ et $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, cela justifie le tableau de variations.

De plus, comme $x>0$, $f(x)$ est du signe de $\ln(x)$. La fonction f est bien négative sur $]0\,;1]$ et positive sur $[1\,;+\infty[$.

66 1. c 2. b 3. b 4. b 5. a

67 1. $S=\{\mathrm{e}^{10}\}$ 2. $S=\left\{\mathrm{e}^{\frac{8}{5}}\right\}$

3. $S=\{1;2\}$ 4. $S=\{\mathrm{e}^{-1};\mathrm{e}^{3}\}$

68 1. $S=\{\ln 10\}$ 2. $S=\varnothing$ 3. $S=\left\{\ln\dfrac{3}{2}\right\}$

69 1. $S=\{\mathrm{e}^2-1\}$ 2. $S=\{2\}$

3. $S=\{\mathrm{e}^5-3\}$ 4. $S=\{-1;1\}$

70 1. $S=]-\infty\,;\ln 5[$ 2. $S=]\ln 4\,;+\infty[$ 3. $S=\varnothing$

71 1. $S=]0\,;\mathrm{e}^3]$ 2. $S=]0\,;\mathrm{e}^{-3}]$ 3. $S=]\mathrm{e}^4\,;+\infty[$

72 1. $S=[\mathrm{e}^3-1\,;+\infty[$ 2. $S=]1\,;\mathrm{e}^2-1[$

73 Comme $\mathrm{e}^x+1>0$, $f(x)$ est du signe de (e^x-3) :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

74

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

75 1. $f'(x)=-1\times\ln x-x\times\dfrac{1}{x}=-\ln x-1$

2. a. $-\ln x-1>0 \Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}^{-1}$

b. et 3. a. Signe de f' et variations de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	e^{-1}	↘	

b. Le maximum de f est e^{-1}, d'où l'inégalité donnée.

76 Le calcul est incorrect car l'élève divise par $\ln 0{,}8<0$ sans changer le sens de l'inégalité.

Le raisonnement correct est : $n\geqslant\dfrac{\ln(10^{-5})}{\ln(0{,}8)}$, donc $n\geqslant 52$.

77 1. Faux, car n doit être entier.

2. Vrai

3. Faux, c'est 4.

78 1. $\dfrac{\ln 100}{\ln 1{,}5}\approx 11{,}3$, donc $n\geqslant 12$.

2. $n\geqslant\dfrac{\ln(10^3)}{\ln(1{,}1)}$, donc $n\geqslant 73$.

3. $n\geqslant\dfrac{\ln(10^{-5})}{\ln(0{,}9)}$ donc $n\geqslant 110$.

79 1. $h_1=1{,}5$; $h_2=1{,}125$ et $h_3=0{,}84375$.

2. $2\times 0{,}75^n<10^{-2}\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln(0{,}005)}{\ln(0{,}75)}$. Comme $\dfrac{\ln(0{,}005)}{\ln(0{,}75)}\approx 18{,}4$ et n est un entier, il faut au moins 19 rebonds.

exercices Entraînement

1 La fonction logarithme népérien

80 1. Deux droites sont parallèles si leurs coefficients directeurs sont égaux. Ici le coefficient directeur de Δ est 1 et $\exp'(0)=1$. Donc les droites T et Δ sont parallèles.

2. $y_A=\mathrm{e}^{x_A}=\mathrm{e}^0=1$ donc $A(0\,;1)$ et par symétrie $B(1\,;0)$.

3. Par symétrie par rapport à Δ, l'équation réduite de D est $y = x - 1$.

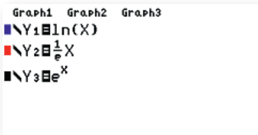
4. C'est la tangente à la courbe de la fonction ln au point B. Ce résultat est confirmé par la calculatrice en traçant la courbe de la fonction ln et la droite D.

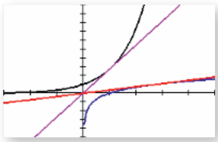
81 **1.** $e^1 = e$. L'ordonnée de A est e donc l'abscisse de B est e.

2. $y = \exp'(1)(x-1) + \exp(1) = e(x-1) + e = ex - e + e = ex$.
La tangente passe par l'origine du repère.

3. Par symétrie, la tangente au point B passe aussi par l'origine du repère. Donc elle admet une équation de la forme : $y = mx$. Elle passe de plus par le point $B(e\,;1)$ donc : $1 = me \Leftrightarrow m = \frac{1}{e}$. La tangente admet pour équation $y = \frac{1}{e}x$.

À la calculatrice, on obtient :





82 Résultat 1 : $e^{\ln(7)} + 3\ln(e) + 5\ln(1) = 7 + 3\times 1 + 5\times 0 = 10$
Résultat 2 : $\ln(e^3) - 4\ln(1) = 3 - 0 = 3$
Résultat 3 : $e^{\ln(4)} - 3\ln(e) + 2\ln(e^4) = 4 - 3 + 2\times 4 = 9$

83 **1.** $S = \{\ln 3 - 1\}$ **2.** $S = \left\{\frac{1-\ln 10}{2}\right\}$ **3.** $S = \varnothing$

84 **1.** $S = \{e^5 - 1\}$ **2.** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **3.** $S = \{1 - e^3\}$

85 **1.** $3e^x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. $4 - 3e^x > 0 \Leftrightarrow x < \ln\frac{4}{3}$

x	$-\infty$		$\ln\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3. $e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 5$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\ln 5$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $e^x + 1 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $2x - 5$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

86 **1.** $f'(x) = 2e^{2x} - 3$ et
$2e^{2x} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

x	-4		$\ln\left(\sqrt{3/2}\right)$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-4)$	$\searrow$	$f\left(\ln\left(\sqrt{3/2}\right)\right)$	$\nearrow$	$f(2)$

Avec $f(-4) \approx 12\,;\, f\left(\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right) \approx 0{,}89$ et $f(2) \approx 48{,}6$.

2. a. D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions.

b. Avec la calculatrice, on obtient les deux solutions : environ $-3{,}33$ et $1{,}32$.

3. $f''(x) = 4e^{2x} > 0$ donc la fonction f est convexe sur $[-4\,;2]$.

87 **1.** $f'(x) = e^x(e^x - 4) + e^x \times e^x = 2e^x(e^x - 2)$
$f''(x) = 2e^x(e^x - 2) + 2e^x \times e^x = 4e^x(e^x - 1)$

2. a. et **b.** Comme $2e^x > 0$ et $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$, la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\ln(2)]$ et croissante sur $[\ln(2)\,;+\infty[$.

3. a. et **b.** Comme $4e^x > 0$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$, la fonction f est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

2 Étude de la fonction logarithme

88 **1.** $f'(x) = 4 - \frac{1}{x} = \frac{4x-1}{x}$
$x > 0$ et $4x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

x	0		$0{,}25$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$1+\ln 4$	$\nearrow$	

2. $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

89 **1.** $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{x^2-1}{x}$ qui est du signe de $(x^2 - 1)$.
Donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $f'(x) = \frac{4}{x} - 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{-x^2+4x-3}{x^2}$, qui est du signe de $(-x^2 + 4x - 3)$. On obtient $\Delta = 4\,;\, x_1 = 3$ et $x_2 = 1$. Donc :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	

Avec $f(3) \approx 2{,}4$.

90 **1.** $f'(x)=-x+6-\dfrac{5}{x}=\dfrac{-x^2+6x-5}{x}$ qui est du signe de $\left(-x^2+6x-5\right)$. On obtient $\Delta=16$; $x_1=5$ et $x_2=1$. Donc :

x	0		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$5{,}5$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	

Avec $f(5)=17{,}5-5\ln(5)\approx 9{,}45$.

2. $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2}$ qui est du signe de $\left(x^2-6x+8\right)$. On obtient $\Delta=4$; $x_1=2$ et $x_2=4$. Donc :

x	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	

Avec $f(2)\approx -6{,}16$ et $f(4)\approx -6{,}32$.

91 **1.** a **2.** b **3.** b **4.** d

92 **1.** $f'(x)=6x\times\ln x+3x^2\times\dfrac{1}{x}=3x(2\ln x+1)$

2. et **3.** $f'(x)$ est du signe de $2\ln x+1$.

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{-3}{2e}$	$\nearrow$	

93 **1.** $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{\left(x^2\right)^2}=3\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

2. et **3.** $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$.

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{3}{2e}$	$\searrow$	

94 **1. a.** $f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

b. $f'(x)$ est du signe de $\ln x+1$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{-1}{e}$	$\nearrow$	

2. La fonction a le même signe que la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de l'axe des abscisses sur $]0\,;1]$ puis au-dessus sur $[1\,;+\infty[$.

3. a. $h(x)=x(\ln x-1)$, $h(x)$ est du signe de $(\ln(x)-1)$.

x	0		e		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b. La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de la droite Δ sur $]0\,;e]$ puis au-dessus sur $[e\,;+\infty[$.

95 **1. a.** $f'(x)=x-7+\dfrac{6}{x}=\dfrac{x^2-7x+6}{x}$

b. $f'(x)$ est du signe du trinôme x^2-7x+6, avec $\Delta=25$; $x_1=1$ et $x_2=6$.

x	1		6		9
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$7{,}5$	$\searrow$	$f(6)$	$\nearrow$	$f(9)$

Avec $f(6)\approx 0{,}75$ et $f(9)\approx 4{,}7$.

2. a. En appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $[1;6]$, on obtient une unique solution α sur $[1;6]$. Et il n'y en a pas d'autre sur $]6\,;9]$, car $f(9)\approx 4{,}7$ est le maximum de f sur cet intervalle.

b. Avec la calculatrice, on obtient : $2{,}55<\alpha<2{,}56$.

c. La variable contient 2,56 à la fin de l'algorithme.

3. Le coût est minimal pour $x=6$, c'est-à-dire 600 pneus. Le coût minimal est alors $f(6)\approx 0{,}75$ centaine d'euros, soit environ 75 euros.

96 **1.** $f'(t)=22\dfrac{\dfrac{1}{t}\times t-\ln t\times 1}{t^2}=22\dfrac{1-\ln t}{t^2}$

$f'(t)$ est du signe de $(1-\ln(t))$.

t	1		e		5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$	$f(5)$

Avec $f(e)=\dfrac{22}{e}+4\approx 12{,}09$ et $f(5)\approx 11{,}08$.

2. $f\left(1+\dfrac{10}{60}\right)\approx 6{,}91$ (supérieur à 6), donc le trafic n'est pas fluide à 7 h 10 min. En utilisant le tableau de variations, le trafic restera non fluide jusqu'à 11 h.

97 **1. a.** $f'(x)=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x-(x+2-\ln x)\times 1}{x^2}=\dfrac{\ln x-3}{x^2}$

b. $f'(x)$ est du signe de $(\ln x-3)$.

x	1		e^3		25
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$f(e^3)$	$\nearrow$	$f(25)$

Avec $f(e^3)=\dfrac{e^3-1}{e^3}\approx 0{,}950$ et $f(25)\approx 0{,}951$.

c. $e^3\approx 20{,}09$. Le coût minimal est égal environ à 0,95 € pour une production d'environ 2009 pièces.

2. L'intervalle-image de f est $\left[f\left(\mathrm{e}^3\right);3\right]$, avec $f\left(\mathrm{e}^3\right)\approx 0{,}950$.
Il est donc possible que le coût moyen soit inférieur ou égal à 1,50 €.
3. Le coût minimal étant d'environ 0,95 €, le coût ne pourra jamais être égal à 0,50 €.

98 **1. a.** $f'(x)=5+2\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{3-5x}{1-x}$

b. Comme $1-x>0$ sur $[0;1[$, $f'(x)$ est du signe de $(3-5x)$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$0{,}6$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(0{,}6)$	$\searrow$	$-\infty$

Avec $f(0{,}6)\approx 1{,}17$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$.

c. Le projectile atteint une hauteur maximale d'environ 1,17 m.
2. a. En appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $[0{,}6;1[$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0{,}6;1[$. De même sur $[0;0{,}6]$, cette équation admet une unique solution, égale à 0 car $f(0)=0$.

L'équation n'admet donc que deux solutions : 0 et α. Or $f(0{,}8)\approx 0{,}78$ (positif), donc $\alpha>0{,}8$.

Avec la calculatrice, on obtient : $\alpha\approx 0{,}893$.
b. Le projectile retombe au sol environ 0,893 m plus loin.

99 **1.** $f'(x)=30\dfrac{\dfrac{20\times(1-x)-20x\times(-1)}{(1-x)^2}}{\dfrac{20x}{1-x}}=\dfrac{30}{x(1-x)}$

Sur $]0;1[$ la dérivée f' est donc positive et la fonction f est donc croissante. Plus le diamètre est grand (c'est-à-dire plus son tronc est large), plus l'arbre est vieux.

2. $f(x)>20 \Leftrightarrow 30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)>20 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)>\dfrac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{20x}{1-x}>\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}<x<1$$

De façon analogue, on obtient que :

$$f(x)<120 \Leftrightarrow 0<x<\frac{\mathrm{e}^4}{20+\mathrm{e}^4}$$

On en déduit que :

$$20<f(x)<120 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}<x<\frac{\mathrm{e}^4}{20+\mathrm{e}^4}$$

Comme $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}\approx 0{,}089$ et $\dfrac{\mathrm{e}^4}{20+\mathrm{e}^4}\approx 0{,}732$, le diamètre du tronc doit être compris entre environ 8,9 et 73,2 cm pour que les conditions d'utilisation du modèle soient valides.

100 **1. a.** $f(1)=2$
b. $f(1)=a+b\ln 1=a$ donc $a=2$.
2. a. $f'(x)=a+b\times\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{b}{x}$ **b.** $f'(1)=1$ **c.** $b=-1$

3. $f(x)=2-\ln(x)$. Donc $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$ qui est du signe de $(2x-1)$. Donc f est décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Démo
101 **1.** $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

2. Comme $u(x)>0$, $u'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe.
3. Comme les dérivées ont le même signe, les fonctions f et u ont les mêmes variations sur l'intervalle I.

3 Propriétés algébriques

102 **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Vrai **4.** Vrai

103 **1.** $\ln 3+\ln 9+3\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)=\ln 3+2\ln 3-3\ln 3=0$

2. $2\ln 4+3\ln 2+6\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\ln 2+3\ln 2-6\ln 2=\ln 2$

3. $3\ln(\mathrm{e})+\ln\left(\mathrm{e}^4\right)+5\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=3+4-5=2$

104 $A=\ln\dfrac{25}{2}$; $B=\ln\left(\dfrac{1}{3}\mathrm{e}\right)$; $C=\ln 2025$ et $D=\ln\dfrac{16}{27}$

105 Résultat 1 : $\ln 4+3\ln 2-\ln 8=2\ln 2+3\ln 2-3\ln 2=2\ln 2$
Résultat 2 : $3\ln 7-2\ln 49=3\ln 7-4\ln 7=-\ln 7$

106 $A=\ln\left(\dfrac{3\times 5}{7}\right)=\ln 3+\ln 5-\ln 7$

$B=\ln\left(5^4\times 2^3\right)=4\ln 5+3\ln 2$

$C=\ln\left(\dfrac{3^4\times 5^2}{7^3}\right)=4\ln 3+2\ln 5-3\ln 7$

107 **1.** $\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\times 2\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)=\dfrac{1}{2}\ln x$

2. a. $\ln\sqrt{2}+\ln\sqrt{8}=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}3\ln 2=2\ln 2$

b. $2\ln\sqrt{3}+\ln\dfrac{1}{3}=\ln 3-\ln 3=0$

$\ln\sqrt{\mathrm{e}}+4-\ln\mathrm{e}^3=\dfrac{1}{2}+4-3=1{,}5$

108 $\ln x^2-\ln\left(\dfrac{x^5}{\mathrm{e}}\right)+\ln 2=\ln(2x)+5$

$\Leftrightarrow 2\ln x-5\ln x+1+\ln 2=\ln 2+\ln x+5$

$\Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Donc l'affirmation est vraie.

109 $x^n=k \Leftrightarrow \ln\left(x^n\right)=\ln(k) \Leftrightarrow n\ln(x)=\ln(k)$

$$\Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{n}\ln(k)$$

$$\Leftrightarrow x=\exp\left(\frac{1}{n}\ln(k)\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(k)}$$

110 **1. a.** $CM_{\text{global}}=CM^9=\dfrac{V_{\text{finale}}}{V_{\text{initiale}}}=\dfrac{67{,}064}{65{,}027}$

b. $\ln\left(CM^9\right)=\ln\dfrac{67{,}064}{65{,}027} \Leftrightarrow 9\ln CM=\ln\dfrac{67{,}064}{65{,}027}$

$$\Leftrightarrow \ln CM=\frac{1}{9}\ln\frac{67{,}064}{65{,}027} \Leftrightarrow CM=\mathrm{e}^{\frac{1}{9}\ln\frac{67{,}064}{65{,}027}}$$

c. $CM \approx 1{,}0034$

Donc $t = CM - 1 \approx 0{,}34\,\%$.

d. L'augmentation de la population française est d'environ 0,34 % chaque année.

2. a. Entre 2020 et 2025 s'écoulent 5 ans, donc on estime la population française à $67{,}064 \times 1{,}0034^5 \approx 68{,}212$ millions d'habitants.

b. $67{,}064 \times 1{,}0034^n > 70 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{70}{67{,}064}\right)}{\ln(1{,}0034)}$

or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{70}{67{,}064}\right)}{\ln(1{,}0034)} \approx 12{,}62$ et n est entier. Donc $n \geqslant 13$.

D'après le modèle, il faut donc attendre 13 ans après 2020 pour dépasser 70 millions soit en 2033.

c. Entre 2020 et 2030 s'écoulent 10 ans, donc on estime la population française à $67{,}064 \times 1{,}0034^{10} \approx 69{,}679$ millions d'habitants.

Cette estimation est un peu plus faible que celle de l'INSEE, qui prend en compte d'autres facteurs : natalité, immigration, facteurs économiques…

111 **1.** L'affirmation est vraie car :

$$CM = \frac{V_{\text{finale}}}{V_{\text{initiale}}} = \frac{275}{340} \approx 0{,}8$$

Soit une baisse d'environ 20 %.

2. a. De 1985 à 2010, il y a 25 ans, on applique alors 25 baisses successives. Donc : $CM = (1-t)^{25} = 0{,}8$.

b. $(1-t)^{25} = 0{,}8 \Leftrightarrow t = 1 - e^{\frac{\ln 0{,}8}{25}} \approx 0{,}00889$

Soit une baisse de 0,889 %.

3. De 1985 à 2100, il y a 115 ans, on applique alors 115 baisses successives : $CM = (1-0{,}00889)^{115} \approx 0{,}358$.

Soit une baisse globale d'environ 64,2 %.

D'après le modèle, la baisse serait moindre. Il est donc probable que dans l'article on envisage une accélération du rythme de fonte des glaciers.

112 **1.** En 2019, la fréquentation est estimée à $1{,}26 \times 1{,}07 \approx 1{,}35$ millions de visiteurs et en 2020 à $1{,}26 \times 1{,}07^2 \approx 1{,}44$ millions.

2. a. $1{,}26 \times 1{,}07^n > 2 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{1{,}26}\right)}{\ln(1{,}07)}$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{1{,}26}\right)}{\ln(1{,}07)} \approx 6{,}8$ et n est entier. Donc $n \geqslant 7$.

b. Il faudra attendre 7 ans après 2018, soit 2025 pour que la fréquentation dépasse 2 millions de visiteurs.

3. $1{,}26 \times 1{,}07^n > 10 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{10}{1{,}26}\right)}{\ln(1{,}07)}$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{10}{1{,}26}\right)}{\ln(1{,}07)} \approx 30{,}6$ et n est entier. Donc $n \geqslant 31$.

Il faudrait attendre 31 ans pour que le quai Branly dépasse le nombre de visiteurs actuels au Louvre. Cet objectif est irréaliste car le quai Branly ne pourrait pas accueillir autant de visiteurs que le Louvre car il est beaucoup plus petit.

Apprendre à modéliser

1. Euler s'intéresse au taux d'accroissement moyen annuel de la population lorsque le taux d'accroissement global sur 200 ans est connu.

2. a. Chaque année $CM = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$ et donc au bout de 200 ans, il faut multiplier par $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{200}$. La valeur initiale est 6, la valeur finale est 1 000 000, donc :

$$6\left(\frac{x+1}{x}\right)^{200} = 1\,000\,000$$

b. En appliquant log de chaque côté de l'égalité, on obtient :

$$200\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log\left(\frac{1\,000\,000}{6}\right)$$

Donc $\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \dfrac{1}{200} \times \log\left(\dfrac{1\,000\,000}{6}\right) \approx 0{,}0261092$

3. a. $\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 0{,}0261092$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0{,}0261092 \times \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x} = \exp(0{,}0261092\ln(10))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \exp(0{,}0261092\ln(10)) - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\exp(0{,}0261092\ln(10)) - 1} \approx 16{,}14$$

b. Comme $\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 0{,}0261092$, on a :

$$\frac{x+1}{x} = 10^{0{,}0261092} \approx 1{,}061963$$

c'est-à-dire $\dfrac{x+1}{x} \approx \dfrac{1061963}{1\,000\,000}$

En utilisant les produits en croix :

$1\,000\,000(x+1) = 1061963x$

$\Leftrightarrow 1\,000\,000 = 61963x \Leftrightarrow x = \dfrac{1\,000\,000}{61963} \approx 16{,}14$

Cela signifie que chaque année la population augmente de $\dfrac{1}{16}^{\text{ième}}$ environ.

4. L'augmentation pendant 200 ans correspond à $CM = \dfrac{1\,000\,000}{6}$, donc 200 ans plus tard, la population d'un million s'élèvera à $1\,000\,000 \times \dfrac{1\,000\,000}{6}$.

5. Ce modèle n'est pas réaliste sur le long terme car à partir d'un certain moment les ressources limitent l'accroissement d'une population.

6. a. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{25} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e^{\frac{\ln 2}{25}} - 1} \approx 36$

La population augmente tous les ans ainsi de $\dfrac{1}{36}^{\text{ième}}$.

b. Une telle évolution est encore plus rapide que celle envisagée par Euler. Si elle se réalisait, la population deviendrait très importante encore plus rapidement. Les ressources naturelles ne suffiraient plus à nourrir la population : ce serait la catastrophe démographique.

113 **1. a.** $\log\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}\times 2\log\left(\sqrt{ab}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\left(\sqrt{ab}\right)+\log\left(\sqrt{ab}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{ab}\times\sqrt{ab}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log(a\times b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$$

b. En particulier avec $b=1$, on obtient $\log\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\log a$ et $\log\left(\sqrt{10}\right)=\frac{1}{2}\log 10$ et en réitérant : $\log\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right)=\frac{1}{4}\log 10$.

c. Comme $a^2<ab<b^2$ et que la fonction racine carrée est croissante, $\sqrt{a^2}<\sqrt{ab}<\sqrt{b^2}$. Donc $a<\sqrt{ab}<b$.

d. Si $a\leqslant x\leqslant\sqrt{ab}$, alors $\log(a)\leqslant\log(x)\leqslant\log\left(\sqrt{ab}\right)$.

Donc $\log(a)\leqslant\log(x)\leqslant\dfrac{\log(a)+\log(b)}{2}$.

Et de même si $\sqrt{ab}\leqslant x\leqslant b$, alors :

$$\frac{\log(a)+\log(b)}{2}\leqslant\log(x)\leqslant\log(b)$$

2. a. Cet algorithme fonctionne comme un algorithme de dichotomie sauf qu'au lieu de considérer la moyenne arithmétique de a et b on utilise la moyenne « logarithmique » $\left(\dfrac{\log(a)+\log(b)}{2}\right)$. À chaque étape, l'écart $(x-a)$ est divisé par 2 : il finira donc par devenir inférieur à 0,00001. Par construction :

$\sup(|\log x-\log a|,|\log x-\log b|)\leqslant\frac{1}{2}(\log b-\log a)$ et donc $\log a$ et $\log b$ fournissent un encadrement de $\log x$.

b. Programme Python

```
from math import *
def logarithme(x):
    a,b=1,10
    loga,logb=0,1
    while x-a>=10**(-5):
        if x<=sqrt(a*b):
            b=sqrt(a*b)
            logb=(loga+logb)/2
        else:
            a=sqrt(a*b)
            loga=(loga+logb)/2
    return(loga,logb)
for x in range(1,11):
    print(x,logarithme(x))
```

```
1 :  0
2 :  0.30078125
3 :  0.4765625
4 :  0.6015625
5 :  0.6982421875
6 :  0.77734375
7 :  0.8447265625
8 :  0.90234375
9 :  0.9541015625
10 :  1
```

On obtient ainsi deux premiers chiffres significatifs.

d. La calculatrice donne les mêmes valeurs que celles de la table de Briggs.

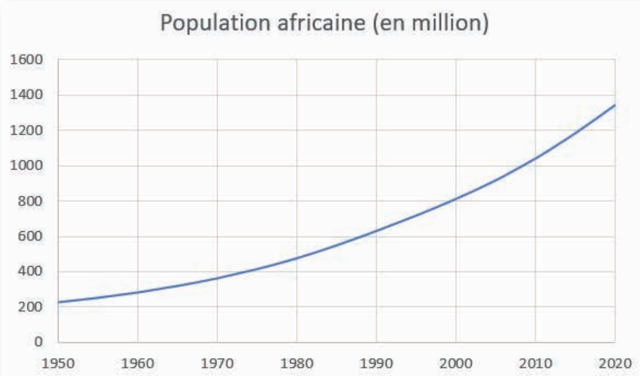
3. a. On propose :

```
def logarithme_sup_10_inf_1000(x):
    if x<=100:
        return 1+logarithme(x/10)[0]
    else:
        return 2+logarithme(x/100)[0]
```

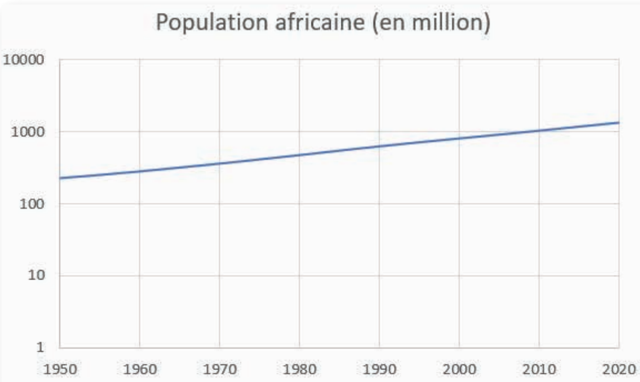
b. On propose :

```
def logarithme_inf_1(x):
    if 0.1<=x<=1:
        return -1+logarithme(10*x)[0]
    elif 0.01<=x:
        return -2+logarithme(100*x)[0]
    elif 0.001<=x:
        return -3+logarithme(1000*x)[0]
    elif 0.0001<=x:
        return -4+logarithme(10000*x)[0]
    elif 0.00001<=x:
        return -5+logarithme(100000*x)[0]
```

114 **1. a.** La croissance africaine semble exponentielle : elle accélère au cours du temps.



b. Avec une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées le nuage de points semble former une ligne droite.



2. a. Comme $f(0)=a$, on obtient $a=228$.

Comme $f(b)=228\mathrm{e}^{70b}$, on obtient $b=\frac{1}{70}\ln\left(\frac{1341}{228}\right)$ et, en arrondissant à 10^{-4}, $b\approx 0{,}0253$. Donc, $f(x)=228\mathrm{e}^{0{,}0253x}$.

b. En 1960, la population africaine est estimée à $f(10)\approx 294$ millions d'habitants et en 1970 à $f(20)\approx 378$ millions d'habitants.

c. Avec ce modèle, la population sera supérieure à 2 milliards dès que $x\geqslant\frac{1}{0{,}0253}\ln\left(\frac{2\,000}{228}\right)$.

Or $\frac{1}{0{,}0253}\ln\left(\frac{2\,000}{228}\right)\approx 85{,}8$, donc le seuil est atteint au bout de 86 ans, soit en 2036.

3. Selon le modèle, la population africaine est estimée à $f(100)\approx 2\,862$ milliards d'habitants en 2050 et à $f(150)\approx 10\,141$ milliards d'habitants en 2100. On constate que les valeurs du modèle sont supérieures à celles envisagées par l'ONU. Ce modèle ne tient pas compte du fait qu'une population ne peut pas s'étendre indéfiniment sur un territoire, il faut aussi prend en compte les ressources, les migrations, les facteurs économiques.

115 **1.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=90$. Lorsque le salaire devient très grand, la satisfaction du salarié devient proche de 90 %.

2. a. $f'(x)=-90\times\frac{-0{,}25\times400\times e^{-0{,}25x}}{(1+400e^{-0{,}25x})^2}=\frac{9\,000e^{-0{,}25x}}{(1+400e^{-0{,}25x})^2}$

b. $f'(x)>0$ donc la fonction f est croissante sur $[10\,;+\infty[$. Cela signifie que lorsque le salaire augmente, la satisfaction du salarié augmente.

x	10	$+\infty$
$f(x)$	$f(10)$	90

Avec $f(10)\approx2{,}66$.

c. D'après le tableau de variations de f, l'équation $f(x)=100$ n'admet pas de solution. Donc la saturation ne sera jamais atteinte.

3. a. $f''(x)=\frac{2\,250e^{-0{,}25x}\left(400e^{-0{,}25x}-1\right)}{(1+400e^{-0{,}25x})^3}$

b. $400e^{-0{,}25x}-1>0\Leftrightarrow x<4\ln(400)$

c. $f''(x)$ est du signe de $\left(400e^{-0{,}25x}-1\right)$. D'après la question **b.**, la fonction f est convexe sur $[10\,;4\ln(400)]$ et concave sur $[4\ln(400)\,;+\infty[$.

d. $4\ln(400)\approx24$. D'après la question **c.**, à partir d'un salaire annuel de 24 000 euros, la fonction « envie » décroît. Cela signifie que la satisfaction augmente, mais de moins en moins vite.

116 **1.** Avec 120 mensualités, la mensualité est d'environ 525,45 euros. Le montant total remboursé est alors $120\times525{,}45=63\,054$ euros. Le montant total des intérêts est alors de 13 054 euros.

2. Avec 96 mensualités, la mensualité est d'environ 628,25 euros. Le montant total des intérêts est de 10 312 euros.

3. a. $\frac{200}{1-1{,}004^{-n}}\leqslant950\Leftrightarrow n\geqslant-\frac{\ln\left(1-\frac{200}{950}\right)}{\ln(1{,}004)}$

Or n est entier et $-\frac{\ln\left(1-\frac{200}{950}\right)}{\ln(1{,}004)}\approx59{,}21$. Donc $n\geqslant60$.

b. Le montant des mensualités est inférieur à 950 euros pour un emprunt sur au moins 60 mois. Pour cette durée minimale, la mensualité est alors de 939 euros et le montant total des intérêts s'élève à 6 340 euros.

117 **Partie A**

1. $f(x)<13\Leftrightarrow x>e^{\frac{8,8}{3,8}}$

Comme $e^{\frac{8,8}{3,8}}\approx10{,}133$, à partir de 101,33 euros, la demande de la clientèle est inférieure à 13 000 sacs.

2. $f'(x)=-\frac{3{,}8}{x}<0$ donc la fonction f est décroissante sur $[5\,;35]$. Cela signifie que lorsque le prix d'un sac augmente, la demande de la clientèle diminue.

$g'(x)=0{,}3+0{,}1e^{-0{,}1x+2}>0$ donc la fonction g est croissante sur $[5\,;35]$. Cela signifie que lorsque le prix d'un sac augmente, l'offre de l'entreprise augmente aussi.

Partie B

1. a. $h'(x)=-\frac{3{,}8}{x}-0{,}3-0{,}1e^{-0{,}1x}<0$. Donc la fonction h est strictement décroissante sur $[5\,;35]$.

b. $h(5)\approx14{,}07$ et $h(35)\approx-6{,}59$. En appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $[5\,;35]$, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $[5\,;35]$.
De plus, $h(21)\approx0{,}24$ (positif) et $h(22)\approx-0{,}33$ (négatif). Donc $\alpha\in[21\,;22]$.

c. Avec la calculatrice, on obtient $\alpha\approx21{,}42$.

2. a. Si le prix est inférieur à α euros, la demande de la clientèle est supérieure à l'offre de l'entreprise.

b. Si le prix est supérieur à α euros, la demande de la clientèle est inférieure à l'offre de l'entreprise.

118 **Partie A**

1. Pour une amplitude de 1 mm, on a une magnitude de 3 donc $3=\log1-\log A_0\Leftrightarrow A_0=10^{-3}$ et donc :

$$M_L=\log A-\log\left(10^{-3}\right)=\log\left(10^3A\right)$$

2. $\lim_{A\to+\infty} M_L(A)=+\infty$ donc l'échelle de Richter n'admet pas de borne supérieure.

Partie B

1. Sur cette échelle logarithmique, les points semblent alignés donc $\log E$ semble être une fonction affine de la magnitude. Il existe donc deux réels a et b tels que $\log E=aM_L+b$.

2. $1{,}5\times9{,}5+4{,}8=19{,}05$ et $\log\left(1{,}1\times10^{19}\right)\approx19{,}04$.

Cela est compatible avec la relation établie par Richter.

3. $\log E'=1{,}5(M_L+1)+4{,}8=1{,}5M_L+4{,}8+1{,}5$
$\approx\log E+\log30=\log(30E)$

Donc lorsque la magnitude augmente de 1, l'énergie libérée est multipliée par 30.

119 **Partie A**

1. Voir fichier TICE.

2. On conjecture que la différence y_H-y_B est constante et égale à k.

3. $f(a)=k\ln a$ et $f'(a)=\frac{k}{a}$ donc l'équation de la tangente en A est $y=\frac{k}{a}x+k\ln a-k$.

Ainsi $y_H=k\ln a$ et $y_B=k\ln a-k$ donc $y_H-y_B=k$.

Partie B

1. a. $y_H=f(a)$

b. L'équation réduite de T est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Or $x_B=0$. Donc $y_B=f'(a)(0-a)+f(a)$, soit :

$$y_B=f(a)-a\times f'(a)$$

c. $y_H=f(a)$ et $y_B=f(a)-a\times f'(a)$
Donc $y_H-y_B=a\times f'(a)$.

On en déduit que $a\times f'(a)=k$, soit : $f'(a)=\frac{k}{a}$.

2. La fonction f est une primitive de $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Donc il existe un réel c tel que, pour tout réel $x>0$:

$$f(x)=k\ln x+c$$

120 **Partie A**

1. $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(b\,;\dfrac{1}{b}\right)$, $D\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}\right)=\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{a+b}{2ab}\right)$

Le coefficient directeur de la droite (OD) est $\dfrac{\dfrac{a+b}{2ab}}{\dfrac{a+b}{2}}=\dfrac{1}{ab}$.

Donc la droite (OD) admet pour équation $y=\dfrac{x}{ab}$.

2. Les coordonnées de C vérifient le système $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=\dfrac{x}{ab} \end{cases}$

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{ab} \Leftrightarrow x=\sqrt{ab}$ donc les coordonnées de C sont $C\left(\sqrt{ab}\,;\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\right)$.

3.

$$\text{Aire}_{MNCA}=\frac{MA+NC}{2}\times MN=\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}}{2}\times\left(\sqrt{ab}-a\right)=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$$

$$\text{Aire}_{NCBP}=\frac{BP+NC}{2}\times PN=\frac{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}}{2}\times\left(b-\sqrt{ab}\right)=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$$

Les deux trapèzes $MNCA$ et $NPBC$ ont bien la même aire.

Partie B

1. On applique la **partie A** en remplaçant les points A et B (d'abscisses respectives a et b) par les points A et C (d'abscisses respectives a et $\sqrt{ab}$) pour obtenir le point G.

On en déduit que l'abscisse de G est $\sqrt{a\times\sqrt{ab}}=\sqrt{a\sqrt{ab}}$.

De même, on applique la **partie A** en remplaçant les points A et B (d'abscisses respectives a et b) par les points C et B (d'abscisses respectives $\sqrt{ab}$ et b) pour obtenir le point H.

On en déduit que l'abscisse de H est $\sqrt{\sqrt{ab}\times b}=\sqrt{b\sqrt{ab}}$.

2. On a $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} a-\sqrt{a\sqrt{ab}} \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a\sqrt{ab}}} \end{pmatrix}=\dfrac{a-\sqrt{a\sqrt{ab}}}{a\sqrt{a\sqrt{ab}}}\times\begin{pmatrix} a\sqrt{a\sqrt{ab}} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{\sqrt{ab}}}{a\sqrt{\sqrt{ab}}}\times\begin{pmatrix} a\sqrt{a\sqrt{ab}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix} \sqrt{ab}-\sqrt{a\sqrt{ab}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{a\sqrt{ab}}} \end{pmatrix}=\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{a\sqrt{ab}}}{a\sqrt{b\sqrt{ab}}}\times\begin{pmatrix} a\sqrt{b\sqrt{ab}} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}}{\sqrt{ab\sqrt{ab}}}\times\begin{pmatrix} a\sqrt{b\sqrt{ab}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc, comme $a<b$, l'aire du triangle AGC est :

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC}\right)\right|=\frac{1}{2}\times\frac{\left(\sqrt{\sqrt{ab}}-\sqrt{a}\right)}{a\sqrt{\sqrt{ab}}}\times\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}\right)}{\sqrt{ab\sqrt{ab}}}$$

$$\times\left|\det\begin{pmatrix} a\sqrt{a\sqrt{ab}} & a\sqrt{b\sqrt{ab}} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\sqrt{ab}}-\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}\right)}{2a^2b}\times a\sqrt{\sqrt{ab}}\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\sqrt{ab}}-\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}\right)\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\times\sqrt{\sqrt{ab}}}{2ab}$$

De même $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} a-\sqrt{a\sqrt{ab}} \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a\sqrt{ab}}} \end{pmatrix}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{\sqrt{ab}}}{\sqrt{ab\sqrt{ab}}}\times\begin{pmatrix} b\sqrt{a\sqrt{ab}} \\ -1 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix} \sqrt{ab}-\sqrt{a\sqrt{ab}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{a\sqrt{ab}}} \end{pmatrix}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}}{b\sqrt{\sqrt{ab}}}\times\begin{pmatrix} b\sqrt{b\sqrt{ab}} \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc, comme $a<b$, l'aire du triangle FBC est :

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB}\right)\right|=\frac{1}{2}\times\frac{\left(\sqrt{\sqrt{ab}}-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{ab\sqrt{ab}}}\times\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}\right)}{b\sqrt{\sqrt{ab}}}$$

$$\times\left|\det\begin{pmatrix} b\sqrt{a\sqrt{ab}} & b\sqrt{b\sqrt{ab}} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\sqrt{ab}}-\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}\right)}{2ab^2}\times b\sqrt{\sqrt{ab}}\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\sqrt{ab}}-\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{\sqrt{ab}}\right)\times\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\times\sqrt{\sqrt{ab}}}{2ab}$$

On en déduit que les triangles ACG et BCH ont la même aire.

Partie C

Si trois abscisses x_G, x_H, x_I sont en progression géométrique, alors $x_H=\sqrt{x_G x_I}$.

D'après la **partie A**, les trapèzes $DGHE$ et $HILE$ ont la même aire.

D'après la **partie B**, les aires des domaines compris entre l'hyperbole $\mathcal{H}$ et les segments $[ED]$ et $[EL]$ sont égales.

Par différence, les aires des « trapèzes concaves » $DGHE$ et $HILE$ sont égales.

Travaux pratiques

Algorithme de Brouncker

Partie A

1. Le premier rectangle a pour aire $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1\times 2}$. Comme il est inclus dans le domaine $\mathcal{D}$, qui a pour aire $\ln(2)$, on en déduit que $\dfrac{1}{1\times 2}\leqslant\ln(2)$.

2. a. Le rectangle est construit sur l'intervalle $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$, il a pour longueur $\dfrac{1}{2}$. Sa largeur est égale à la différence $\left(\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6}$.

b. À la seconde étape, on rajoute le second rectangle qui a pour aire $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times 4}$.

On en déduit que $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}\leqslant \ln(2)$.

3. a. À la troisième étape, on ajoute les deux rectangles d'aires respectives :

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{5\times 6}\text{ et }\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{7\times 8}$$

b. Comme la réunion des rectangles est incluse dans le domaine $\mathcal{D}$, on a bien leur aire qui est inférieure à l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Partie B

1. Algorithme

$$\text{Somme}\leftarrow\text{Somme}+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$
$$k\leftarrow k+1$$

2. a.

```
def Brouncker(n):
    k=0
    S=0
    while k<=n:
        S=S+1/((2*k+1)*(2*k+2))
        k=k+1
    return S
print(10,Brouncker(10))
print(20,Brouncker(20))
print(50,Brouncker(50))
print(100,Brouncker(100))
print(1000,Brouncker(1000))
```

On obtient :

```
>>>
10 0.6709359053399301
20 0.681384101885609
50 0.6882692478405775
100 0.6906780598104286
1000 0.6928974926853756
```

b. À l'aide de la calculatrice on a :

$$\ln(2)\approx 0{,}6931471805599453$$

La vitesse de convergence de (u_n) vers $\ln(2)$ est assez lente. Il faut plus de 1 000 itérations pour obtenir 3 chiffres significatifs.

3. a. $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$

b. On a :

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

c. Par construction on a toujours $u_n\leqslant \ln 2$.

De plus, $\ln(2)$ est la limite en $+\infty$ de $\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k+1}\right)$. À chaque terme u_n, on ajoute $\frac{1}{2n+3}$ et on retire $\frac{1}{2n+4}$ pour obtenir u_{n+1}.

La limite est donc comprise entre u_n et $u_n+\frac{1}{2n+3}$.

Donc $u_n\leqslant \ln(2)\leqslant u_n+\frac{1}{2n+3}$.

d. On est certain que $|u_n-\ln(2)|<10^{-4}$ dès que $\left|\left(u_n+\frac{1}{2n+3}\right)-u_n\right|<10^{-4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2n+3}<10^{-4}$, ou encore $n>\frac{9\,997}{2}$. Comme n est entier, on obtient $n>4\,999$.

Effectivement avec Python pour 4 999 itérations, on trouve une erreur inférieure à $4{,}9\times 10^{-5}$.

Des points alignés ou non ?

Partie A

1. On a $f_k{}'(x)=1-k\mathrm{e}^{-x}$. Comme k est strictement positif, on obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\ln(k)$		$+\infty$
$f_k{}'(x)$		$-$	0	$+$	

2. Il semble que la droite à laquelle appartiennent tous les points A_k ait pour équation $y=x+1$.

Partie B

En utilisant le signe de f_k', la fonction f_k admet un minimum en $\ln(k)$, donc le point A_k a pour abscisse $\ln(k)$.

Son ordonnée est égale à :

$$f_k(\ln(k))=\ln(k)+k\mathrm{e}^{-\ln(k)}=\ln(k)+k\times\frac{1}{k}=\ln(k)+1$$

Donc $y_{A_k}=x_{A_k}+1$.

Le point A_k appartient donc à la droite d'équation $y=x+1$.

Intensité et niveau sonore

Partie A

1. $N_0=10\log\left(\frac{I_0}{I_0}\right)=10\log(1)=10\times 0=0$

2. a. $N_{\text{moto}}=10\log\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right)=10\log(10^7)=10\times 7=70\text{ dB}$

b. $N_{\text{classe}}=55\Leftrightarrow\log\left(\frac{I_{\text{classe}}}{10^{-12}}\right)=5{,}5$

$$\Leftrightarrow I_{\text{classe}}=10^{-12}10^{5{,}5}\approx 3\times 10^{-7}\text{ W/m}^2$$

3. $N_{\text{douleur}}=120\Leftrightarrow\log\left(\frac{I_{\text{douleur}}}{10^{-12}}\right)=12$

$$\Leftrightarrow I_{\text{douleur}}=10^{-12}10^{12}=1\text{ W/m}^2$$

Partie B

1. Pour le niveau sonore : $\frac{102}{105}\approx 0{,}87$, ce qui correspond à une baisse d'environ 13 %.

Pour l'intensité sonore associée : $\frac{I_0\times 10^{\frac{102}{10}}}{I_0\times 10^{\frac{105}{10}}}=10^{-0{,}3}\approx 0{,}5$, ce qui correspond à une baisse d'environ 50 %.

2. $\frac{N_{\text{avion}}}{N_{\text{téléphone}}}=\frac{10^{-12}10^{12}}{10^{-12}10^{6}}=10^6$

Il faut un million de téléphones pour obtenir la même intensité sonore.

3. $N(I\times 10)=10\log\left(\frac{I\times 10}{10^{-12}}\right)=10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)+10\log(10)$

$$=N(I)+10$$

L'affirmation est donc vraie.

THÈME

5

Calculs d'aires

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
Intégrale d'une fonction continue et positive, de signe quelconque. Calculs d'aires, présentation des méthodes des rectangles et des trapèzes.	Estimer une aire à partir d'une représentation graphique. Calculer une intégrale, une valeur moyenne. Calculer l'aire sous une courbe, entre deux courbes.

2. Intention des auteurs

Dans ce thème « Calculs d'aires », on se pose la question de déterminer l'aire d'une surface dont les contours sont définis par la courbe représentative d'une (ou plusieurs) fonction(s). Une première approche, à l'aide des fonctions continues positives sur un intervalle, permet de découvrir la relation entre l'aire d'un domaine et la notion d'intégrale.
Le cas général permet de présenter les propriétés du calcul intégral.
Pour les fonctions dont on ne peut déterminer une primitive avec les connaissances actuelles des élèves, l'aire peut se calculer à l'aide de la méthode des rectangles, des trapèzes ou bien par la méthode de Monte-Carlo. Ces trois méthodes donnent l'occasion d'utiliser des algorithmes (à écrire ou à compléter) et de présenter ainsi une exploitation du langage Python.
Comme le préconise le programme, certains exercices s'appuient sur des textes historiques qui présentent différentes méthodes mise en œuvre dans la recherche de calcul d'aires de figures non polygonales. Grâces aux références indiquées, l'enseignant, mais aussi les élèves curieux et motivés pourront retrouver les textes originaux, qui sont du domaine public, sur internet.

Pour assurer un suivi efficace de l'ensemble des élèves et répondre aux attentes de chacun suivant leur profil et leur poursuite d'étude, l'enseignant trouvera un nombre conséquent d'exercices variés et progressifs, balisés par les capacités et contenus développés dans le thème. Pour la plupart, on a veillé à ce que ces exercices soient contextualisés et, on l'espère, attractifs de par les différents domaines d'application.

Enfin, conformément à l'esprit du programme de l'option « mathématiques complémentaires », on s'est attaché à illustrer l'ensemble de ces notions à travers des thèmes d'étude variés présentant l'utilisation du calcul intégral lié aux notions de surface ou de volume dans différents domaines : recherche fondamentale mathématique, physique, marketing, médecine, ingénierie…

Partir d'un bon pied

A **1.** e **2.** c et d **3.** c **4.** d **5.** a
6. b et c **7.** b **8.** c **9.** d

B **1.** Aire du rectangle : $B \times h$

Aire du triangle : $\frac{1}{2} B \times h$

Aire du trapèze : $\frac{B+b}{2} \times h$

Aire du disque : πr^2

2. Figures ① 8, ② $8-\frac{\pi}{2}$ et ③ f $4+\frac{\pi}{2}$

C **1.** $f'(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$

2. $g'(x)=\frac{1}{x+5}$

3. $h'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $k'(x)=\frac{1\times(1-x)-(x+1)\times 1}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$

D **1.** $F(x)=-e^{2-x}$

2. $G(x)=\ln(x^2+1)$

3. $H(x)=-2\times\frac{1}{x+3}=-\frac{2}{x+3}$

4. $K(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$

E **1.** $A=\sum_{i=1}^{n} hi^2 = h\sum_{i=1}^{n} i^2$

2. $B=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta}{i} = \delta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$

F Les coordonnées $(x\,;y)$ doivent vérifier :

$$-2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } -0{,}5x+1 \leqslant y \leqslant -0{,}5(x+3)(x-2)$$

C'est le domaine délimité par les droites d'équations $x=-2$, $x=2$, $y=1-\frac{1}{2}x$ et la parabole.

Activités en situation...

Consolider les bases

Si les triangles sont « assez fins », alors leur hauteur est quasiment égale à $\frac{d}{2}$. En mettant les triangles tête-bêche, on forme donc un rectangle de largeur $\frac{d}{2}$ et de longueur le demi-cercle $\frac{22}{7}\times\frac{d}{2}$. L'aire du rectangle est donc $\frac{d}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{d}{2}=\frac{11}{14}d^2$, c'est l'aire du disque.

Situation 1 Depuis Archimède...

1 $\mathscr{A}_{OBD}=\frac{1}{2}\times DR\times CO=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$ et $\mathscr{A}=\frac{4}{3}$

2 $x_M=x_I=\frac{1}{2}$ et $y_M={x_M}^2=\frac{1}{4}$

$\mathscr{A}_{MSB}=\frac{1}{2}\times SM\times RB=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ et comme

$\mathscr{A}_{OBC}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ on a $\mathscr{A}_{MSB}=\frac{1}{8}\mathscr{A}_{OBC}$

3 Comme $\mathscr{A}_{MSO}=\mathscr{A}_{MSB}$, $\mathscr{A}_{MBO}=2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$, par symétrie l'aire verte est égale à $\mathscr{A}_{MBO}=2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\mathscr{A}_{OBD}$.

4 Si on réitère le procédé et que l'aire suivante est égale au quart de la précédente, on a bien :

$$\mathscr{A}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}$$

5 En sommant les termes de la suite géométrique, on obtient :

$$\mathscr{A}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

ce qui tend vers $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$, la valeur d'Archimède.

Situation 2 ...jusqu'à Roberval

1 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Cette somme est un polynôme qui se comporte à l'infini comme son terme de plus haut degré $\frac{1}{3}n^3$ donc le rapport converge vers un tiers.

2 $\mathscr{A}_{ABCD}=n\times n^2=n^3$

Quand n est grand on peut approximer l'aire au-dessus de l'arc de parabole par la somme des aires de tous les rectangles :

$$\mathscr{A}=1\times 1^2+1\times 2^2+1\times 3^2+\ldots+1\times n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\simeq\frac{1}{3}n^3$$

L'aire du domaine en dessous de la parabole est alors d'environ $\frac{2}{3}n^3$ ce qui représente les deux tiers du carré.

Situation 3 Aire sous la courbe

1 L'aire est une fonction croissante de l'abscisse et $\mathscr{A}(1)=0$.

2 **1.** On note R_1 et R_2 les rectangles respectivement inscrit et circonscrit au domaine compris entre les droites d'équations $x=t$, $x=t+h$, $y=0$ et l'hyperbole.

Par construction :

si $h>0$ $\frac{h}{t+h}=\mathscr{A}_{R_1}\leqslant\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)\leqslant\mathscr{A}_{R_2}=\frac{h}{t}$

2. $\frac{1}{t+h}\leqslant\frac{\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)}{h}\leqslant\frac{1}{t}$

3. Si $h<0$ $\frac{1}{t}\leqslant\frac{\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)}{h}\leqslant\frac{1}{t+h}$

4. En faisant tendre h vers 0, on obtient que $\mathscr{A}$ est dérivable et $\mathscr{A}'(t)=\frac{1}{t}$.

De plus, comme $\mathscr{A}(1)=0$, on déduit que $\mathscr{A}(t)=\ln t$.

3 **1.** En appliquant la même démarche, on obtient que si $h>0$ on a $t^2\leqslant\frac{\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)}{h}\leqslant(t+h)^2$. En passant à la limite, on obtient $\mathscr{A}'(t)=t^2$ et comme $\mathscr{A}(0)=1$, $\mathscr{A}(t)=\frac{t^3}{3}$.

En particulier $\mathscr{A}(1)=\frac{1}{3}$ qui représente l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la parabole et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

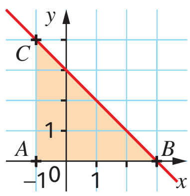
Donc l'aire du domaine délimité par la parabole, la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ vaut $\frac{2}{3}$.

2. En utilisant la parité, on obtient que l'aire du domaine est égale à $\frac{4}{3}$.

Méthode

Capacité 1 Estimer une aire à partir d'une représentation graphique

1 **1.** Représentation



2. $\int_{-1}^{3}-x+3=\mathscr{A}_{\text{Triangle}}=8$

2 **1.**

$$y=\sqrt{4x-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant 0\\x^2-4x+y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant 0\\(x-2)^2+y^2=4\end{cases}$$

C'est l'équation d'un demi-cercle de centre $(2;0)$ et de rayon 2.

2. $\int_0^4\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi 2^2=2\pi$

3 **1.** $f'(x)=x-1$ ce qui est positif après 1.

x	0	1	3
$f(x)$	1,5 ↘	1	↗ 3

Comme $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$; $3=1\times 3 \leqslant \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3\times 3=9$

2. Avec la calculatrice, on obtient $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=4{,}5$.

CAPACITÉ 2 Calculer une intégrale, une valeur moyenne

4 $F'(x)=x^2-4x+5=f(x)$

$\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-F(-2)=\dfrac{112}{3}$

5 On cherche à calculer $\int_4^9 f(x)\mathrm{d}x$ avec $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On remarque que $F(x)=2\sqrt{x}$ a pour dérivée :

$$F'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$$

On en déduit que :

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left[2\sqrt{x}\right]_4^9=F(9)-F(4)=2\sqrt{9}-2\sqrt{4}=2$$

6 $F'(x)=1\times \mathrm{e}^x+(x-1)\times \mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x=f(x)$

$\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=F(\ln 2)-F(0)=2\ln 2-1$

7 $F'(x)=1\times \ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x=f(x)$

$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=F(\mathrm{e})-F(1)=1$

8 $K=4J+6I=4\times\dfrac{\pi}{4}+6\times\dfrac{2}{3}=\pi+4$

La valeur moyenne de K est :

$$\frac{1}{1-0}K=K$$

9 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1-x+1}{x^2-1}=f(x)$ donc :

$$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^4\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_2^4\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\int_2^4\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

Or, sur $[2;4]$, $x-1>0$ donc une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x-1}$ est $x\mapsto\ln(x-1)$; de même $x+1>0$ sur $[2;4]$, donc une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ est $x\mapsto\ln(x+1)$ donc :

$$I=[\ln(x-1)]_2^4+[\ln(x+1)]_2^4=2\ln(3)-\ln(5)$$

CAPACITÉ 3 Calculer l'aire sous une courbe, entre deux courbes

10 **1.** $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{4}x^2-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$

2. Comme la fonction est impaire et que l'intervalle est symétrique par rapport à 0, l'intégrale est nulle.

11 **1.** On a $F'(t)=(-at+a-b)\mathrm{e}^{-t}$; d'où $a=b=-1$ et $F(t)=(-t-1)\mathrm{e}^{-t}$.

2. $\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\left[(-t-1)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^3=-4\mathrm{e}^{-3}-(-1)\mathrm{e}^0=1-4\mathrm{e}^{-3}$

12 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 4-x^2+4x-4=x\Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$

Les deux courbes se coupent en $A(3;0)$ et $B(0;0)$.

Comme $f(x)\geqslant g(x)$, l'aire du domaine est égale à :

$$\int_0^3 f(x)-g(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 -x^2+3x=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=4{,}5$$

J'évalue mes connaissances

QCM

1. c	**2.** b	**3.** a	**4.** a
5. a et c	**6.** a	**7.** c	**8.** b

vrai ou faux ?

1. Vrai. Pour tout $x\in[a;b]$,

$$f(x)\leqslant g(x)\Leftrightarrow g(x)-f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow\int_a^b g(x)-f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

2. Faux. Par exemple si $g(x)=\mu$ avec μ la valeur moyenne de f sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, avec $f(x)\neq g(x)$ sur $[a;b]$.

3. Vrai. La fonction $t\mapsto t(t+2)$ est positive sur $[0;+\infty[$, donc F est croissante sur $[0;+\infty[$.

4. Vrai.
$$\int_0^1 u'(x)\times u(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}u(x)^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\left(u(1)^2-u(0)^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}(u(1)-u(0))(u(1)+u(0))$$

Pour que $\int_0^1 u'(x)\times u(x)\mathrm{d}x=0$, il faut que $u(0)=u(1)$ ou $u(0)=-u(1)$.

5. Vrai. Méthode des rectangles : $f(0)=1$; $f(0{,}5)=\dfrac{4}{5}$; $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

Aire hachurée : $0{,}5\times\dfrac{4}{5}+0{,}5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{13}{20}$.

Aire bleue : $0{,}5\times 1+0{,}5\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{10}$.

automatismes et calculs

Automatismes transversaux

13 **1.** $S=\sum_{k=1}^{4}\dfrac{1}{k}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{12}$

2. $T=\sum_{k=1}^{4}k^2=0+1+4+9+16+25=55$

3. $U=\sum_{k=2}^{10}1=9\times 1=9$

4. $V=\sum_{k=2}^{8}k+3=2+3+4+5+6+7+8+3=38$

14 1. $S=\sum_{k=-1}^{n}(k+3)$

2. $T=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$

15 1. $A=\left(2+e^x\right)\left(3-e^x\right)=6+e^x-e^{2x}$

2. $B=\left(1-e^x\right)^2=1-2e^x+e^{2x}$

3. $C=\left(e^x-e^{-x}\right)^2=e^{2x}-2+e^{2x}$

4. $D=e^{-x}\left(5-e^x\right)=5e^{-x}-1$

16 1. $S=\left\{-2+\sqrt{10}\,;2+\sqrt{10}\right\}$

2. $S=\{-2;2\}$

3. $S=\left\{\frac{5-\sqrt{41}}{2};\frac{5+\sqrt{41}}{2};0\right\}$

4. $S=\{1\}$

17 1. La suite est arithmétique de premier terme $u_0=-7$ et de raison $r=4$ donc la somme est égale à $S=\frac{u_0+u_{12}}{2}\times 13=221$.

2. La suite est géométrique de premier terme $u_1=\frac{2}{3}$ et de raison $q=\frac{2}{3}$ donc la somme est égale à :

$$T=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{116\,050}{59\,049}$$

18 1. $\ln(3x+2)=7\Leftrightarrow 3x+2=e^7\,;S=\left\{\frac{e^7-2}{3}\right\}$

2. $e^{5-0,2x}=8\Leftrightarrow 5-0,2x=\ln 8\,;S=\{25-10\ln 2\}$

19 1. $1,05\times 1,10=1,155\longrightarrow$ hausse de 15,5 %

2. $1,07\times 0,93=9,9951\longrightarrow$ baisse de 0,49 %

3. $0,965\times 0,935=0,902\longrightarrow$ baisse de 9,8 %

20 1. $f'(x)=8x+3$ ce qui est positif après 1.

x	-10		$-\frac{3}{8}$		15
$f(x)$	365	↘	$-\frac{89}{16}$	↗	940

$Max=940$
$Min=-\frac{89}{16}$

2. $f'(x)=-2,8x+9,7$ ce qui est positif après 1.

x	-10		$-\frac{97}{28}$		15
$f(x)$	-252	↗	$\approx 1,8$	↘	$-184,5$

$Max\approx 1,8$
$Min=-252$

21 1. $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{201}{140}$; $y_A=4\times y_A+b\Leftrightarrow b=21$

$y=4x+b$ donc $y=4x+21$

2. $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{201}{140}$; $y_A=4\times y_A+b\Leftrightarrow b=\frac{4\,587}{14}$

$y=\frac{201}{140}x+\frac{4\,687}{14}$

22 1. $x^2+8x+y^2-6y+16=0\Leftrightarrow(x-4)^2+(y-3)^2=9$
Cercle de centre $\Omega(4;3)$ et de rayon 3.

2. $x^2-4x+y^2+8y+64=0\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+4)^2=-44$
Ce n'est pas un cercle.

23 1. $V=\pi r^2 h=160\pi\text{ cm}^3=\frac{4\pi}{25}$ litres

2. $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{4\,300\pi}{3}\text{ cm}^3=\frac{43\pi}{30}$ litres

3. $V=c^3=1000\text{ cm}^3=1$ litre

Automatismes du thème

24 1. $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3x$

2. $G(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3\ln x$

3. $H(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{3}{x}$

25 1. $F(x)=2\sqrt{x}$

2. $G(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

3. $H(x)=-\sqrt{4-x^2}$

26 1. $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$ est égale à l'aire d'un demi-disque de rayon 4, elle vaut donc 8π.

2. $4\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ est égale à quatre fois l'aire d'un demi-disque de rayon 3, elle vaut donc 18π.

3. $6\int_{0}^{2}t+1\,dt$ est égale à six fois l'aire d'un trapèze de bases 1 et 3 et de hauteur 2, elle vaut donc 24.

27 1. $\int_{1}^{9}\sqrt{16-(x-5)^2}\,dx$ est égale à l'aire d'un demi-disque de rayon 4, elle vaut donc 8π.

2. $\int_{1}^{5}8-t\,dt$ est égale l'aire d'un trapèze de bases 3 et 7 et de hauteur 4, elle vaut donc 20.

3. $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ est égale à l'aire d'un quart de disque de rayon 2, elle vaut donc π.

28 1. $I=\int_{-2}^{4}x^2+2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-2}^{4}=36$

2. $J=\int_{1}^{4}t+\frac{1}{t}\,dt=\left[\frac{t^2}{2}+\ln t\right]_{1}^{4}=\frac{15}{2}+2\ln 2$

3. $K=\int_{2}^{8}\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\,du=\left[\ln u-\frac{1}{u}\right]_{2}^{8}=2\ln 2+\frac{3}{8}$

29 1. $I=\int_{-\ln 3}^{\ln 3}e^x\,dx=\left[e^x\right]_{-\ln 3}^{\ln 3}=\frac{8}{3}$

2. $J=\int_{0}^{\ln 7}\frac{e^t}{e^t+3}\,dt=\left[\ln\left(e^t+3\right)\right]_{0}^{\ln 7}=\ln(10)-2\ln(2)$

3. $K=\int_{2}^{9}\frac{2t}{t^3+3}\,dt=\left[\ln\left(t^2+3\right)\right]_{2}^{9}=\ln(84)-\ln(7)$

30 1. et 2. $I=J=0$ car on intègre une fonction impaire sur une période.

3. $K=\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=2$ car la fonction sinus est 2π-périodique.

31 $F'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

$I=\int_1^9\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{2}x\sqrt{x}\right]_1^9=\frac{52}{3}$

c'est $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^9$

32 **1.** $A=\int_1^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_1^3=\ln 3$

2. $A=\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{26}{3}$

exercices Application

Consolider les bases

33 **1.** $F(x)=\frac{x^3}{3}$ **2.** $G(x)=-\frac{1}{x+1}$

34 **1.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+\mathrm{e}^x$

2. $G(x)=\ln(|x+1|)$ donc sur $]-\infty\,;-1[$, $G(x)=\ln(-x-1)$

3. $H(x)=3\sqrt{x}$

35 Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$.

1. $F'(x)=1\times\mathrm{e}^x+(x-1)\times\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x$

2. $\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_1^2=\mathrm{e}^2$

36 **1.** $f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x$

2. $I=\int_1^3\ln x\,\mathrm{d}x=[x\ln x-x]_1^3=3\ln 3-2$

37 **1.** $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

2. Sur $[0\,;+\infty[$, $x+2>0$ et $x+3>0$ donc :

$$F(x)=\ln(x+2)-\ln(x+3)$$

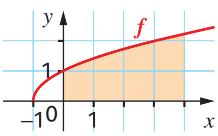
38 **1.** C'est le domaine délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=2{,}5$, $y=0$ et la courbe. Son aire est égale à $I=\int_{-1}^{2,5}f(x)\mathrm{d}x$.

2. C'est le domaine délimité par les droites d'équations $x=-2$, $x=5$, $y=0$ et la courbe. Son aire est égale à $I=\int_{-2}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

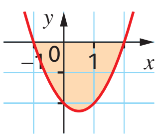
39 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$; $g(x)=\sqrt{1-(x-2)^2}$;

$h(x)=2+\sqrt{1-(x-2)^2}$ et $i(x)=1-\sqrt{1-(x+1)^2}$

40



41



Connaître le cours

42 **Diaporama QCM**

1. Aire A - c / Aire B - a / Aire C - d **2.** c **3.** d **4.** c
5. d **6.** d **7.** c et b **8.** a et b

Diaporama EXO

1. Fonction f : $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$; fonction g : $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}g(x)\mathrm{d}x$ et fonction h : $\int_0^4 h(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{0}=6$

3. La fonction est paire, donc $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}g(x)\mathrm{d}x=0$

4. $\int_0^4 h(x)\mathrm{d}x=[H(x)]_0^4=-5+5\ln(5)$

5. $\mu=\frac{1}{1-\mathrm{e}}\int_0^{\mathrm{e}-1}h(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}-1}$

6. La valeur moyenne appartient à $[-7\,;2]$.

7. $A=\int_{-1}^{1}2-f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}-x^2+1\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$

8. Somme des aires des rectangles, l'aire vaut au moins 6 unités d'aires.

43 **1.** Vrai : relation de Chasles

2. Faux, contre-exemple x^2

3. Faux, il faut diviser par 4 et pas par 10.

4. Vrai, linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^2 f(x)+2x\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x$$

44 **1.** Vrai **2.** Faux
3. Faux, c'est supérieur à 2. **4.** Faux : compter les carreaux.

45 **1.** $I=5+2=7$ et $J=5-2=3$

2. $\int_{-1}^{3}\alpha f(x)+\beta g(x)\mathrm{d}x=5\alpha+2\beta$ il y a une infinité de solutions, par exemple : $\alpha=2$ et $\beta=0$, on obtient 10.

46 **1.** $f'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ **2.** $f'(x)=\frac{1}{x^2}$

47 **1.** $I=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=2$

2. $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=0$

3. $K=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{\pi-\frac{3\pi}{4}}^{\pi+\frac{3\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x=0$ car la courbe est symétrique par rapport au point $\Omega(\pi\,;0)$.

Travailler les capacités du thème

48 Une unité d'aire correspond à un rectangle de 2 cm^2.

1. Faux **2.** Vrai **3.** Vrai
4. Vrai **5.** Vrai

49 • Le domaine 1 : environ 12,5 carreaux, soit 25 u.a.

• Le domaine 2 : environ 9,5 carreaux, soit 24 u.a.

50 $M_f\approx 2$; $M_g\approx 1{,}25$; $M_h\approx 1$; $M_i\approx 0{,}5$

51 $I=\int_3^7 x^2+2x-9\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-9x\right]_3^7=\frac{328}{3}$

$J=\int_1^{\mathrm{e}}\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}$

$=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^2+\ln\mathrm{e}\right)-\left(\frac{1}{2}1^2+\ln 1\right)=\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}$

52 **1.** $I=\int_{-2}^{2}x^3+x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2}=0$

2. $J=\int_4^1\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\left[\sqrt{t}+\frac{1}{t}\right]_1^4=\frac{1}{4}$

53 **1.** Sur $[-1;2]$, $x+2>0$, donc une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x+2}$ est $\ln(x+2)$.

2. $J=\int_0^4\frac{2t}{\sqrt{t^2+3}}\mathrm{d}t=\left[2\sqrt{t^2+3}\right]_0^4=2\sqrt{19}-2\sqrt{3}$

54 **1.** $I=\int_0^4\frac{2x}{(x^2+3)^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x^2+3}\right]_0^4=\frac{16}{57}$

2. $J=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{2t-1}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t-1}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3}$

55 **1.** $I=\int_1^3\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^3=\frac{1}{2}(\ln 3)^2$

2. $J=\int_{-2}^{5}4t(2t^2+3)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}(2t^2+3)\right]_{-2}^{5}=49\,182$

56 **1.** La fonction définie par $f(x)=(3x-1)\mathrm{e}^{1{,}5x^2-x+3}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u: x\mapsto 1{,}5x^2-x+3$.
On en déduit :
$I=\int_{-2}^{4}(3x-1)\mathrm{e}^{1{,}5x^2-x+3}\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^{1{,}5x^2-x+3}\right]_{-2}^{4}=\mathrm{e}^{23}-\mathrm{e}^{11}$

2. La fonction définie par $f(t)=(-3t^2+4t)(-t^3+2t^2+1)$ est de la forme $u'u$ avec $u: t\mapsto -t^3+2t^2+1$.

On en déduit $J=\left[\frac{1}{2}(-t^3+2t^2+1)^2\right]_1^2=\frac{1}{2}(1-4)=-\frac{3}{2}$

57 **1.** Sur $[-4;0]$, la fonction $x\mapsto x^2-5x+3$ est positive, donc une primitive de $x\mapsto\frac{2x-5}{x^2-5x+3}$ est $\ln(x^2-5x+3)$.

$I=\int_{-4}^{0}\frac{2x-5}{x^2-5x+3}\mathrm{d}x=\left[\ln(x^2-5x+3)\right]_{-4}^{0}=-\ln 13$

2. $J=\int_{-5}^{-4}\frac{2}{(2t+7)^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2t+7}\right]_{-5}^{-4}=\frac{2}{3}$

58 **1.**
$I=\int_1^3\frac{7-6x}{\sqrt{9+7x-3x^2}}\mathrm{d}x=\left[2\sqrt{9+7x-3x^2}\right]_1^3=2\sqrt{3}-2\sqrt{13}$

2. $J=\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}}\frac{(\ln t)^2}{t}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}\ln^3 t\right]_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}}=\frac{2}{3}$

59 **1.** $\mu=\frac{1}{12}\int_{-2}^{10}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\times 48=4$

2. $\mu=\frac{1}{10}\int_{-2}^{8}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\times 45=4{,}5$

60 **1.** $\mu=\frac{1}{8}\int_{-4}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\times 4=0{,}5$

2. $\mu=\frac{1}{11}\int_4^{15}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{11}\times 2{,}5\simeq 0{,}3$

61 **1.** $I\approx 3$

2. $1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=f(x)$

3. Sur $[-3;3]$, la fonction $x\mapsto 1+\mathrm{e}^x$ est positive, donc une primitive de $x\mapsto\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ est $\ln(1+\mathrm{e}^x)$.

$I=\int_{-3}^{3}1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\left[x-\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]_{-3}^{3}=6+\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-3}}{1+\mathrm{e}^3}\right)=3$

4. $\mu=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=0{,}5$

62 **1.** $I\approx 0{,}12$

2. $t-2+\frac{4}{t+2}=\frac{(t-2)(t+2)+4}{t+2}=f(x)$

3. Sur $[0;1]$ la fonction $t\mapsto t+2$ est positive, donc une primitive de $t\mapsto\frac{1}{t+2}$ est $\ln(t+2)$.

$I=\int_0^1 t-2+\frac{4}{t+2}=\left[\frac{t^2}{2}-2t+4\ln(t+2)\right]_0^1=-\frac{3}{2}+4\ln 3-4\ln 2$

4. $\mu=\frac{1}{1}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}+4\ln 3-4\ln 2$

63 **1.** $\frac{a}{(2x+3)^2}+\frac{b}{2x+3}=\frac{a+3b+2bx}{(2x+3)^2}$

Par identification avec $f(x)$ on obtient $a=-\frac{7}{2}$ et $b=\frac{1}{2}$.

2. $2x+3$ est positif sur $[0;1]$.

$I=\int_0^1-\frac{7}{2}\frac{1}{(2x+3)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x=\left[\frac{7}{4}\frac{1}{2x+3}+\frac{1}{4}\ln(2x+3)\right]_0^1$

$=-\frac{7}{30}+\frac{1}{4}\ln 5-\frac{1}{4}\ln 3$

64 **1.** La fonction $x\mapsto 1+x^2$ est positive sur $[0;1]$, donc une primitive de $x\mapsto\frac{2x}{1+x^2}$ est $x\mapsto\ln(1+x^2)$.

$I=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

2. $I+J=\int_0^1\frac{x+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

$J=\frac{1}{2}-I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

65 **1.** $\mathcal{A}_0=\int_1^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_1^4=2\ln 2$

2. $\mathcal{A}_1=\int_1^4 g(x)-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ et $\mathcal{A}_2=-\int_1^5 h(x)\mathrm{d}x$

3. $\mathcal{A}_2=-\int_1^5\frac{3}{8}(x^2-6x+5)\mathrm{d}x=-\frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+5x\right]_1^5=4$

4. Si $1\leqslant g(x)\leqslant 4$ sur $[1;3]$, alors on a $2\leqslant\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x\leqslant 8$.

Si $3\leqslant g(x)\leqslant 4$ sur $[3;4]$, alors on a $3\leqslant\int_3^4 g(x)\mathrm{d}x\leqslant 4$.

En sommant ces deux égalités : $5\leqslant\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x\leqslant 12$.

5. $\mathcal{A}_1=\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x-\int_1^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x-2\ln 2$

donc $5-\ln 2\leqslant\mathcal{A}_1\leqslant 12-2\ln 2$

66 **1.** $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

2. Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$:

$$\int_0^1 1-\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

3. $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (avec 1 l'aire du carré).

67 **1.** $\mathcal{A} = \int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x$

2. Aucune des fonctions usuelles n'est une primitive de ln.
3. Comme les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques, les graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ et l'aire du domaine délimité par $x=1$; $x=4$; $y=0$ et $y=\ln x$ est la même que celle domaine délimité par $x=0$; $x=\ln 4$; $y=4$ et $y=\mathrm{e}^x$.

$\mathcal{A} = \int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = 4\times 2\ln 2 - \int_0^{\ln 4}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^{\ln 4} = 8\ln 2 - 3$

68 $\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)-g(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 6-x-g(x)\mathrm{d}x$

$\int_0^2 \frac{7}{8}x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^4 6-x-\frac{1}{8}x^2\,\mathrm{d}x$

$= \left[\frac{7}{8}\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \left[6x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = 6$

exercices Entraînement

1 Intégrale d'une fonction continue et positive

69 $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{x^2+2}\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x^3+2x}{x^2+2} - \frac{2x}{x^2+2}\mathrm{d}x$

$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} x - \frac{-2x}{x^2+2}\mathrm{d}x$

La fonction $x \mapsto x^2+2$ est strictement positive sur $\left[\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$ d'où :

$$I = \left[\frac{x^2}{2} - \ln\left(x^2+2\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} + 2\ln 2 - \ln 7$$

70 **1.** $f'(t) = 1\times\sqrt{1+t} + (1+t)\times\frac{1}{\sqrt{1+t}} = \frac{3\sqrt{1+t}}{2}$

2. $I = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$

3. $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{5}$

71 **1.** $I(x) = \int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^x = 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$

2. $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 1$ C'est l'aire entre la courbe et le demi-axe des abscisses réelles positives.

72 **1.** $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

2. $g(x) = 1+\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{4+\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$

3. C'est toujours strictement positif.
4. Par définition $L = \int_{-4}^4 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$ or g est une fonction paire et positive, donc $\sqrt{g}$ est aussi une fonction paire. Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

$$\int_{-4}^4 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x = 2\times\int_0^4 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

$L = 2\times\int_0^4 \sqrt{\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$

5. $L = \int_0^4 \left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-4} \approx 54{,}58$

73 **1.**

$$G'(x) = \frac{1}{2}\times\left(1\times\sqrt{1+x^2} + x\times\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}-x}}{\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{\sqrt{1+x^2}-x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \sqrt{1+x^2}$$

C'est bien une primitive.
2. $f'(x) = x$

et $L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = G(1) - G(0) = \frac{\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \approx 1{,}15$

74 **1.** $f'(x) = 2x\times\mathrm{e}^{-x} + x^2\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(2x-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$ est du signe de $2x-x^2$ qui s'annule en 0 et 2.

x	0	2	4
$f(x)$	0 ↗	$4\mathrm{e}^{-2}$	↘ $16\mathrm{e}^{-4}$

$Max = 4\mathrm{e}^{-2}$
$Min = 0$

2. On a $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{Max}\times 4 = 16\mathrm{e}^{-2}$
Pour tout $x\in[2;4]$, $f(x) \geqslant f(4)$ donc :

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant (4-2)f(4) = 32\mathrm{e}^{-4}$$

3. $F'(x) = \left(-ax^2+(2a-b)x+b-c\right)\mathrm{e}^{-x}$
En identifiant avec la fonction, on obtient :
$a=1$, $b=c=-2$ et $F(x) = -\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$

4. $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = F(4) - F(0) = 2 - 26\mathrm{e}^{-4}$

75 **1.** $I+J = \int_0^1 \frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$

2. $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right]_0^1 = \ln(\mathrm{e}+1) - \ln 2$

$I = 1-J = 1-\ln(\mathrm{e}+1)+\ln 2$

76 **1.** $I+J = \int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^u+2}{\mathrm{e}^u+1}\mathrm{d}u = \int_0^1 2\mathrm{d}u = [2]_0^1 = 2$

$I-J = \int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u+1}\mathrm{d}u = \left[2\ln\left(\mathrm{e}^u+1\right)\right]_0^1 = 2\ln(\mathrm{e}+1) - 2\ln 2$

2. $I = \frac{1}{2}(I+J+I-J) = 1+\ln(\mathrm{e}+1)-\ln 2$

$J = \frac{1}{2}(I+J-(I-J)) = 1-\ln(\mathrm{e}+1)+\ln 2$

77 **1.** $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

2. En comparant les aires des graphiques :

aire verte $\int_{n+k-1}^{n+k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \geqslant 1\times\frac{1}{n+k}$

aire rouge $1\times\frac{1}{n+k} \geqslant \int_{n+k}^{n+k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

3. En sommant les inégalités et en utilisant la relation de Chasles sur les intégrales :

$$\int_n^{2n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_{n+1}^{2n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

4. Comme

$\int_n^{2n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_n^{2n}=\ln(2n)-\ln(n)=\ln\left(\frac{2n}{n}\right)=\ln 2$ et

$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$, on a $\ln 2\leqslant u_n\leqslant \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$.

En passant à la limite, on obtient que la suite converge vers $\ln 2$.

2 Cas général

78 **1. a.** Comme la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

b. $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

2. a. $f(-x)=(-x)^2\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)=f(x)$

b. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\left(\mathrm{e}-5\mathrm{e}^{-1}\right)$

79 **1. a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x=2$

b. $f(2)=\frac{(2-4)^2}{2}=2=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$

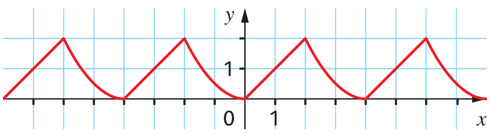
La fonction f est donc continue en 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}\frac{(x-4)^2}{2}=0$

$f(0)=0=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)$

Par translation, $f(0)=f(4)$, donc la fonction f est continue en 4.

2.



3. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2\times 2}{2}=2$ (aire du triangle)

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=2+\int_2^4\frac{1}{2}x^2-4x+8\mathrm{d}x\\&=2+\left[\frac{1}{6}x^3-2x^2+8x\right]_2^4\\&=2+\frac{32}{3}-32+32-\left(\frac{4}{3}-8+16\right)\\&=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}\end{aligned}$$

4. $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x+\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x=2\times\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$

(translation) ; donc $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$.

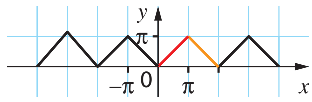
De même $\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$.

80 **1. a.** $\lim\limits_{\substack{t\to\pi\\ t<\pi}} f(t)=\lim\limits_{\substack{t\to\pi\\ t<\pi}} t=\pi=f(\pi)$

b. $\lim\limits_{\substack{t\to 2\pi\\ t<2\pi}} f(t)=\lim\limits_{\substack{t\to 2\pi\\ t<2\pi}} 2\pi-t=0=f(2\pi)$

La fonction est continue, on peut tracer la courbe sans lever le crayon.

2.



3. $\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t=\pi^2$

4. $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=2\pi^2$

$\int_{-4\pi}^{3\pi} f(t)\mathrm{d}t=7\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t=\frac{7\pi^2}{2}$

81 **1. a.** Si $a\leqslant b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$ **b.** Si $a\geqslant b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$

2. a. Si $a\leqslant b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$ **b.** Si $a\geqslant b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$

3. Les quatre intégrales sont négatives.

3 Calculs d'aires

82 **1.** $\int_0^{19{,}89}\frac{19{,}61}{1+t}\mathrm{d}t=[19{,}61\ln(1+t)]_0^{19{,}89}\simeq 59{,}60$

$\int_0^{19{,}89}\frac{19{,}61}{(1+t)^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{19{,}61}{1+t}\right]_0^{19{,}89}\simeq 18{,}67$

$\int_0^{19{,}89}\frac{19{,}61}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t=\left[19{,}61\times 2\sqrt{1+t}\right]_0^{19{,}89}\simeq 139{,}82$

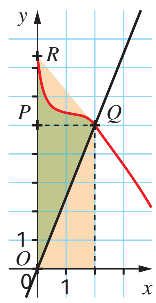
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty} 19{,}61\ln(1+x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{19{,}61}{1+x}+19{,}61=19{,}61$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x h(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty} 19{,}61\times 2\sqrt{1+x}-19{,}61=+\infty$

Le seul projet réaliste est le second.

83 **1. a.**



b. $f(0)=\mathrm{e}^2$ donc $C\left(0\,;\mathrm{e}^2\right)$

c. Comme $f'(x)=-(x-1)^2\,\mathrm{e}^{2-x}<0$, la courbe et la droite ne peuvent se couper qu'en un seul point et elles se coupent en $Q(2\,;5)$.

d. $\mathcal{A}_{OPQ}=\frac{OP\times OQ}{2}=5$, $\mathcal{A}_{ORQ}=\frac{OR\times OQ}{2}=\mathrm{e}^2$ donc

$5\leqslant\mathcal{A}\leqslant\mathrm{e}^2$

2. a. et **b.** $G'(x)=(-2x-2)\mathrm{e}^{2-x}-\left(x^2+2x+3\right)\mathrm{e}^{2-x}=f(x)$

c.

$$\mathcal{A}=\int_0^2 f(x)-\frac{5}{2}x\,\mathrm{d}x=\left[-\left(x^2+2x+3\right)\mathrm{e}^{2-x}-\frac{5}{4}x^2\right]_0^2=3\mathrm{e}^2-16$$

84 **1. b.** La courbe $\mathscr{C}_2$ correspond à la courbe f et la courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à la courbe g.

c. On lit $a=-2$, $b=-1$, $c=1$ et $d=2$.

2. On cherche x tel que :

$$\frac{4}{x^2}=5-x^2\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=x^2\\X^2-5X+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=x^2\\X=1\\X=4\end{cases}$$

(racines évidentes)

donc $x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$
ou $x^2=4 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$

3. On cherche x tel que $5-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$.

4. Les fonctions sont paires, donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On découpe le domaine en tranches correspondant à chacune des fonctions.

5. $$\mathscr{A}=2\left(\int_0^1 5-x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_2^{\sqrt{5}} 5-x^2\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=2\left(\left[5x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{4}{x}\right]_1^2+\left[5x-\frac{1}{3}x^3\right]_2^{\sqrt{5}}\right)$$
$$=2\left(5-\frac{1}{3}+(-2)+4+5\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{5}}{3}-10+\frac{8}{3}\right)$$
$$=\frac{-4+20\sqrt{5}}{3}$$

85 **1.** $g_a(-x)=g_a(x)$ donc la fonction est paire.

2. $g_a{}'(x)=-\frac{2}{a^3}xe^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{a}$	↘ 0

3. a. Comme la fonction est paire, on peut se limiter au calcul de l'aire entre 0 et a. Il suffira ensuite de multiplier le résultat par 2.

b. On découpe l'intervalle $[0\,;a]$ en n intervalles $\left[\frac{ak}{n}\,;\frac{a(k+1)}{n}\right]$ pour k allant de 0 à $n-1$. Comme la fonction est décroissante sur cet intervalle :
$$g_a\left(\frac{a(k+1)}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{ak}{n}}^{\frac{a(k+1)}{n}} g_a(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{a}{n}g_a\left(\frac{ak}{n}\right)$$
En sommant, on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a}{n}g_a\left(\frac{a(k+1)}{n}\right)\leqslant\int_0^a g_a(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a}{n}g_a\left(\frac{ak}{n}\right)$$
Il suffit ensuite de remarquer que :
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a}{n}g_a\left(\frac{a(k+1)}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}g_a\left(\frac{ak}{n}\right)$$

4. Python :

```
from math import exp

def g_a(x):
    return 1/a * exp(-(x/a)**2)

a, n = 1, 1000
image = [g_a(a/n * k) for k in range(n+1)]
rect_sup = a/n * sum(image[0:n-1])
rect_inf = a/n * sum(image[1:n])
print(2*rect_inf," <= aire <= ", 2*rect_sup)
```

5. Avec $a=1$, on obtient :
$$1{,}492\leqslant D_a\leqslant 1{,}494$$

6. a. L'aire semble constante.

b. L'aire étant constante, quand a augmente, la courbe « en cloche » devient plus large et plus basse.

86 **1. a.** $I_1=\int_1^a\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln x]_1^a=\ln a$

$I_2=\int_a^{a^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln x]_a^{a^2}=\ln a^2-\ln a=2\ln a-\ln a=\ln a$

b. $I_n=\int_{a^{n-1}}^{a^n}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln x]_{a^{n-1}}^{a^n}=\ln a^n-\ln a^{n-1}=\ln a$

c. Quelles que soient les valeurs de n, les aires sont constantes et égales à $\ln a$.

2. a. $\mathscr{A}_n=\int_1^{a^n}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln x]_1^{a^n}=n\ln a$ est une suite arithmétique de raison $\ln a$.

b. « géométrique » ; « arithmétique »

Apprendre à modéliser

1. Expérimentation…

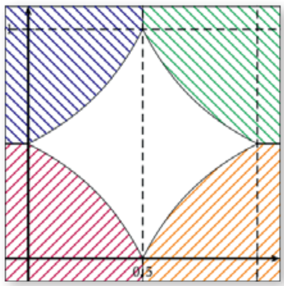
2. a. $a+b+c=1$

b. $(1): a\leqslant b+c$; $(2): b\leqslant a+c$; $(3): c\leqslant b+a$

3. a. Si $x\geqslant\frac{1}{2}$, alors on a $a=yx$, $b=(1-y)x$, $c=1-x$ et en réécrivant les trois inégalités on obtient :
$$(1): y\leqslant\frac{1}{2x}\ ;\quad (2): y\geqslant 1-\frac{1}{2x}\ ;\quad (3): x\geqslant\frac{1}{2}$$

b. Si $x<\frac{1}{2}$ on a $a=x$, $b=(1-x)y$, $c=(1-x)(1-y)$ et en réécrivant les trois inégalités on obtient :
$$(1): x\leqslant\frac{1}{2}\ ;\quad (2): y\leqslant\frac{1}{2(1-x)}\ ;\quad (3): y\geqslant 1-\frac{1}{2(1-x)}$$

4. a. Figures avec $x\geqslant\frac{1}{2}$ et $x<\frac{1}{2}$:



Les points des zones hachurées sont ceux dont les coordonnées ne vérifient pas les inéquations précédentes.

b. Pour des raisons de symétrie, l'aire de la zone non hachurée est celle du carré de côté 1 moins 4 fois celle de la zone orangée.

D'où $\mathscr{A}=1-4\int_{0,5}^1 1-\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

5. $\mathscr{A}=1-4\int_{0,5}^1 1-\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x=1-4\int_{0,5}^1\mathrm{d}x+4\int_{0,5}^1\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

Or $x\mapsto 2x$ est positive sur $[0{,}5\,;1]$ donc :
$$\int_{0,5}^1\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]_{0,5}^1=-\frac{1}{2}\ln(2)$$
La probabilité de construire un triangle est donc :
$$1-2\ln(2)\approx 0{,}386$$

87 **Recherche d'une surface minimale**

Partie A

1. Le disque doit avoir un rayon égal à $\frac{1}{2}$ et donc une aire égale à $\frac{\pi}{4}$.

2. L'aire d'un secteur angulaire de rayon 1 et d'angle 60° vaut $\frac{\pi}{6}$. L'aire d'un triangle équilatéral de côté 1 vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Chacune des petites lunes a donc une aire égale à $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ et l'aire d'un « triangle de Reuleaux » vaut $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$.

3. Comme $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}704$ et $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}78$, l'aire du triangle est inférieure à celle du disque.

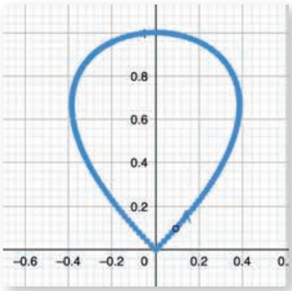
Partie B

1. $x(t)$ est impaire et $y(t)$ est paire.

2. Tableau de valeurs

t	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1
$x(t)$	0	−0,10	−0,19	−0,27	−0,38	−0,36	−0,17	0
$y(t)$	1	0,99	0,96	0,91	0,94	0,51	0,19	0

3.



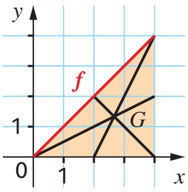
4. $A=\int_{-1}^{1}x(t)y'(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(t^3-t)(-2t)\mathrm{d}t=2\int_{-1}^{1}t^2-t^4\mathrm{d}t$

$=2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{15}$

Maths en situation...

88 **1. Cas où $f(x)=x$**

a.



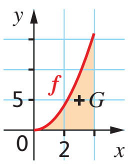
b. $G(2{,}67\,;1{,}33)$

c. Calcul :

$$x_G=\frac{\int_0^4 x\times x\,\mathrm{d}x}{\int_0^4 x\,\mathrm{d}x}=\frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4}=\frac{8}{3}$$

$$y_G=\frac{1}{2}\frac{\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^4 x\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4}=\frac{4}{3}$$

2. Cas où $f(x)=x^2$

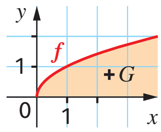


Calcul :

$$x_G=\frac{\int_0^4 x\times x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x}=\frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4}=3$$

$$y_G=\frac{1}{2}\frac{\int_0^4 x^4\,\mathrm{d}x}{\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\frac{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4}=\frac{24}{5}$$

3. Cas où $f(x)=\sqrt{x}$



Calcul :

$$x_G=\frac{\int_0^4 x\times x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}{\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}=\frac{\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4}{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4}=\frac{12}{5}$$

$$y_G=\frac{1}{2}\frac{\int_0^4 x\,\mathrm{d}x}{\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4}{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4}=\frac{3}{4}$$

89 **1.** $A_{\text{ellipse}}=\frac{ab}{4}\pi=16\pi$ donc chaque part doit avoir une surface de $\frac{4}{3}\pi\approx 4{,}19\ \text{cm}^2$.

2. En isolant y dans l'équation de l'ellipse, on obtient :

$$f(x)=y=\sqrt{16-0{,}25x^2}$$

3. La fonction est paire donc, en utilisant la symétrie de sa courbe, on peut restreindre l'étude.

4. a. $A_{\text{trapeze}}=\frac{f(x)+f\left(x+\frac{a}{n}\right)}{2}\times\frac{a}{n}$

b. return sqrt(16-0.25*x**2)

c. Les parts sont égales à $\frac{1}{2}\times 16\pi\div 6\approx 4{,}18879$.

d. Elle ajoute le pas à l'abscisse déjà obtenue tant que l'aire calculée ne dépasse pas 4,18879.

```
from math import sqrt

def fond(x):
    return sqrt(16 - 0.25*x**2)

n = 500
pas = 8/n
x, part = 0, 0
for _ in range(5):
    while part < 4.18879:
        part = part + (fond(x) + fond(x + pas)) * pas / 2
        x = x + pas
    print("couper à x=",x-pas)
    part = 0
```

5. Avec le programme, on obtient :

1.040 ; 2.112 ; 3.232 ; 4.432 ; 5.808

Ce qui correspond à des parts égales à environ 4,2.

On peut vérifier :

$$\int_0^{1{,}040}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{1{,}040}^{2{,}112}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{2{,}112}^{3{,}232}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx\int_{3{,}232}^{4{,}432}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{4{,}432}^{5{,}808}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{5{,}808}^{8}f(x)\mathrm{d}x\approx 4{,}2$$

90 **1.**

$$D=\frac{2\pi P}{4\eta L}\int_0^R r(R^2-r^2)\mathrm{d}r=\frac{2\pi P}{4\eta L}\left[R^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^R=\frac{\pi P R^4}{8\eta L}$$

2. Si $R'=2R$ alors $D'=\frac{\pi P(2R)^4}{8\eta L}=\frac{\pi P\times 16R^4}{8\eta L}=16D$

91 **1. a.** et **b.** La modification du paramètre δ provoque des translations horizontales de la courbe.

2. a. $C(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $R(x)=2\left(\frac{x-0{,}2}{3}\right)^5\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-0{,}2}{3}\right)^6}$

b. $m_C\approx 0{,}7$ et $m_R\approx 3{,}1$

c. $p=\int_1^3 \min(C(x), R(x))\mathrm{d}x$ est l'aire de la surface bleue, c'est-à-dire la zone défaillance.

3. a. Programme

```
from math import exp
from random import uniform

def C(x):
    return 2 * x * exp(- x**2)

def R(x):
    return 2 * ((x - 0.2) / 3)**5 * exp(-((x - .2) / 3)**6)

pts, pts_dans_zone = 5000, 0
for _ in range(pts):
    x = uniform(1,3)
    y = uniform(0,.2)
    if y < min(C(x), R(x)):
        pts_dans_zone += 1
print("proba défaillance =", .4 * pts_dans_zone / pts)
```

b. La valeur fluctue un peu et elle vaut environ 0,058.

c. Réduction de la probabilité défaillante

```
def R(x, d):
    return 2 * ((x - d) / 3)**5 * exp(-((x - d) / 3)**6)

def proba():
    pts, pts_dans_zone = 5000, 0
    for _ in range(pts):
        x = uniform(1,3)
        y = uniform(0,.2)
        if y < min(C(x), R(x,d)):
            pts_dans_zone += 1
    return .4 * pts_dans_zone / pts
```

d. On obtient $d\approx 1{,}25$ et $m_R\approx 4{,}2$.

92 1. On cherche a et b tels que $f(x)=ax^2+b$. Comme $f(0)=R$ et $f(h)=r$, on obtient $a=\dfrac{r-R}{h^2}$ et $b=R$.

2. $g(x)=\left(\dfrac{r-R}{h^2}x^2+R\right)^2$ est paire comme $f(x)$.

3. a. $V=2\pi\int_0^r\left(\dfrac{r-R}{h^2}x^2+R\right)^2\mathrm{d}x$ car g est paire.

b. $V=2\pi\int_0^r\left(\dfrac{r-R}{h^2}\right)^2x^4+2R\dfrac{r-R}{h^2}x^2+R^2\,\mathrm{d}x$

$$V_{\text{parabole}}=\frac{2\pi\times 90}{15}\left(8\times 25^2+4\times 25\times 20+3\times 20^2\right)$$

4. a. $V_{\text{parabole}}=2\pi\left[\left(\dfrac{r-R}{h^2}\right)^2\dfrac{x^5}{5}+2R\dfrac{r-R}{h^2}\dfrac{x^3}{3}+R^2x\right]_0^r$

$$=\frac{2\pi h}{15}\left(8R^2+4Rr+3r^2\right)=49\,200\pi$$

$$V_{\text{Kepler}}=\frac{\pi\times 90}{3}\left(20^2+2\times 25^2\right)=49\,500\pi$$

Dans le calcul de V_{parabole}, h vaut 45 alors que dans V_{Kepler}, h représente la hauteur **totale** du tonneau, soit 90.

b. $\dfrac{49\,200}{49\,500}\approx 0{,}994$ soit 0,6 % d'erreur !

c. Taper « calcul du volume d'un tonneau » dans un moteur de recherche.

93 $\int_0^{24}C_B(t)\mathrm{d}t=\int_0^{24}-5{,}2\mathrm{e}^{-1{,}5t}+5\mathrm{e}^{-0{,}26t}\,\mathrm{d}t$

$$=\left[\frac{-5{,}2}{-1{,}5}\mathrm{e}^{-1{,}5t}+\frac{5}{-0{,}26}\mathrm{e}^{-0{,}26t}\right]_0^{24}\approx 15{,}73$$

$$\int_0^{24}C_A(t)\mathrm{d}t=\int_0^{24}6\mathrm{e}^{-0{,}25t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{6}{-0{,}25}\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right]_0^{24}\approx 23{,}94$$

$F_B\approx 0{,}46$

Travaux pratiques

Calculs de volumes

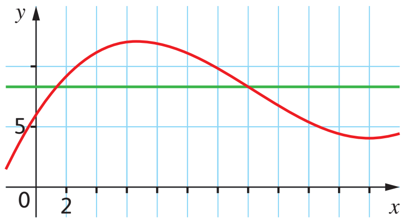
Partie A

1. Il suffit de développer le carré.

2. $F(x)=\dfrac{36}{1\,771\,561}\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{282}{161\,051}\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{3\,265}{58\,564}\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{962}{131}\dfrac{x^4}{4}$
$+\dfrac{202}{121}\dfrac{x^3}{3}+24\dfrac{x^2}{2}+36x$

3.
$$V=\pi\int_0^{24}f^2(x)\mathrm{d}x=\pi[F(x)]_0^{24}=\pi F(24)\approx 5\,808\text{ cm}^3\approx 5{,}8\text{ L}$$

4. a. Graphe :



$\mu\approx 8{,}3$

b. On obtient un cylindre de rayon 8,3 et de hauteur 24.

c. $V=\pi R^2h=\pi\times 8{,}3^2\times 24\approx 5\,194\text{ cm}^3$ Ce résultat est parfaitement cohérent avec celui obtenu avant.

5. Quatre bouteilles de 1,5 L, ça fait effectivement 6 L.

Partie B

1. $V_{\mathrm{d}x}=\pi\times f^2(x)\times\mathrm{d}x$

2. a. et b. Programme

```
from math import pi

def f(x):
    return 6/1331 * x**3 - 47/242 * x**2 + 2*x + 6

x, dx, vol = 0, .1, 0
while x < 26: # 26 cm = hauteur du vase
    if vol < 1000: # volume : 1 litre = 1000 cm^3
        # méthode des rectangles : cylindre de hauteur dx
        vol = vol + pi * (f(x))**2 * dx
    else:
        print("marque à x=",x-dx)
        vol = 0
    x = x + dx
```

c. On obtient : 3.8 ; 6.3 ; 8.7 ; 11.5 ; 16.1

Triangle et parabole

1. a. $m=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$ et comme $a^2=(a+b)a+p$, on a $p=-ab$ et l'équation est $y=(a+b)x+ab$.

b. $f(c)=c^2$, $f'(c)=2c$ et $y=2c(x-c)+c^2=2cx-c^2$

c. La tangente est parallèle à l'arc si $2c=a+b\Leftrightarrow c=\dfrac{a+b}{2}$

donc les coordonnées de C sont $\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{(a+b)^2}{2}\right)$.

2. a. et b. Le rapport semble constant et valoir 4/3.

3. a. On note H, I, L les projections orthogonales respectives de A, B, C sur l'axe des abscisses.

$$\mathcal{A}_{AHLB}=\frac{a^2+b^2}{2}(b-a)$$

$$\mathcal{A}_{ACIH}=\frac{a^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)=\frac{(b-a)\left(5a^2+2ab+b^2\right)}{16}$$

$$\mathcal{A}_{BCIL}=\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)\left(a^2+2ab+5b^2\right)}{16}$$

$$\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{AHLB}-\mathcal{A}_{ACIH}-\mathcal{A}_{BCIL}=\frac{(b-a)^3}{8}$$

b. $I=\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3}$

$\mathcal{A}_p=\mathcal{A}_{AHLB}-I=\frac{1}{6}(b-a)^3$ en remarquant que :

$$\left(b^3-a^3\right)=(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)$$

c. $\frac{\mathcal{A}_p}{\mathcal{A}_T}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

Lunules d'Hippocrate

Partie A

La somme des aires des lunules est égale à la somme des aires des demi-disques rouges et bleus moins l'aire du demi-disque blanc plus l'aire du triangle rectangle :

$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\frac{1}{2}CA\times CB$

$=\frac{1}{2}CA\times CB$

car d'après le théorème de Pythagore $AC^2+BC^2-AB^2=0$

Partie B

1. Comme le triangle est rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit donc $OA=OC$. De plus, comme $OA=AC$, le triangle OAC est équilatéral.

2. On note y l'abscisse de O. Comme $OA^2=1+y^2$ et $OA^2=AC^2=4$, on obtient que $y=-\sqrt{3}$.

3. C'est le demi-disque supérieur de centre l'origine du repère et de rayon 1 donc $y=\sqrt{1-x^2}$.

Donc $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\times 1^2=\frac{\pi}{2}$

4. Le cercle de centre $O\left(0\,;-\sqrt{3}\right)$ et de rayon 2 a pour équation $x^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=2^2$. La partie inférieure de la lunule a donc pour équation :

$$y=-\sqrt{3}+\sqrt{4-x^2}$$

5. L'aire de la lunule est égale à :

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}-\left(-\sqrt{3}+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+2\times\sqrt{3}-\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{2}+2\sqrt{3}-\left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$

$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\approx 1{,}21$

THÈME 6

Répartitions des richesses et inégalités

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
Statistiques descriptives. Caractéristiques de dispersion (médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile) Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a;b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction. Courbe de Lorenz et indice de Gini.	Comparer des séries statistiques. Estimer graphiquement ou encadrer une valeur moyenne. Calculer une valeur moyenne. Interpréter une intégrale une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

2. Intention des auteurs

L'étude de la répartition des richesses dans la population d'un pays, des salaires dans une entreprise, etc., et la comparaison de différentes répartitions sont des occasions de réinvestir des connaissances antérieures de statistique descriptive (caractéristiques de dispersion) et d'utiliser les nouveaux outils d'analyse (calcul intégral, thème 5).

Pour mener à bien cette étude, on réactive tout d'abord dans ce thème les notions vues dans les classes antérieures sur les statistiques. L'objectif étant de mettre en valeur les couples (moyenne-écart type) et (médiane-quartile) afin de comparer de manière pertinente des séries. Ces indicateurs sont complétés par l'introduction des déciles et notamment du rapport interdécile comme mesure de l'inégalité. On complète ensuite l'utilisation du calcul intégral introduit dans le thème 5 par le calcul et l'interprétation de la valeur moyenne.

Une large part du thème est consacrée, comme l'indique le programme, à l'étude des courbes de Lorenz et de l'indice de Gini. Cette notion permet de réactiver et de consolider les notions du programme vues dans le thème 1 (convexité).

Conformément au programme, ce thème propose une approche nouvelle, avec des problèmes issus d'autres disciplines. Les compétences de modélisation au travers la rubrique Maths en situation, et de communications avec les travaux pratiques et la proposition de plusieurs exposés à développer à l'oral, sont mobilisées. L'accent a été mis sur la diversité des situations mais aussi la recherche de données actuelles et réelles permettant aux élèves de s'ouvrir et de réfléchir sur ce thème de la répartition des richesses et des inégalités.

Partir d'un bon pied

A **1.** c **2.** a **3.** a **4.** b
5. d **6.** d **7.** a **8.** a

B **1.** Faux **2.** Faux **3.** Vrai **4.** Faux **5.** Vrai **6.** Faux

C **1.**

Valeurs	1	2	3	4	5
Effectifs	12	3	11	6	3

2. La moyenne vaut $\frac{90}{35}=\frac{18}{7}\approx 2{,}57$ et l'écart type $\sqrt{\frac{438}{245}}\approx 1{,}34$.

3. La médiane vaut 3 et l'intervalle interquartile vaut $4-1=3$.

D **1. a.** $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x$

b. $F(x)=4e^x+x$ **c.** $F(x)=-\frac{1}{x}+x^2$

d. $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{x^2}{2}-x$ **e.** $F(x)=2\ln x+3\frac{x^2}{2}$

2. a. $F'(x)=3e^x+(3x-1)e^x=f(x)$

b. $F'(x)=4\ln x+4x\times\frac{1}{x}-3+2x=f(x)$

E **1.** $2=\frac{8}{4}\leqslant A\leqslant\frac{12}{4}=3$

2. c

3. $\int_1^2 f(x)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3{,}5\frac{x^3}{3}-1{,}5\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{13}{6}$

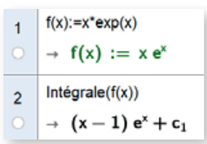
Activités en situation…

Consolider les bases

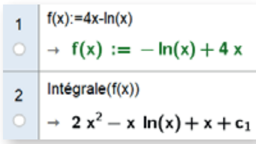
1 **a.** Élève A : $F(x)=x^4-2x^3+\frac{1}{2}x-x$

• L'élève A a oublié les constantes multiplicatives.

• L'élève B a primitivé un produit facteur par facteur. On ne peut pas « deviner » de formule explicite. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on peut montrer que : $F(x)=(x-1)e^x$.



• L'élève C a dérivé la fonction. On ne connaît pas de formule explicite d'une primitive de la fonction logarithme. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on peut montrer que :
$F(x) = 2x^2 - x\ln(x) + x$.



• L'élève D a primitivé le numérateur et le dénominateur. On ne peut pas « deviner » de formule explicite.

2 Ligne 2 : $f'(x) = 2e^{-x} + (2x-1)(-e^{-x}) = (-2x+3)e^{-x}$

Ligne 3 : $f''(x) = -2e^{-x} + (-2x+3)(-e^{-x}) = (2x-5)e^{-x}$

Ligne 4 : $F(x) = (-2x-1)e^{-x}$ et on a :

$$F'(x) = (2x-1)e^{-x} = f(x)$$

Situation 1 Répartition des salaires en 2016

1 a. 30 % des salariés gagnent moins de 1 479 €.
40 % des femmes gagnent moins de 1 499 €.
70 % des hommes gagnent moins de 2 431 €.
b. En orange le rapport interdécile et en bleu l'écart interdécile.
c. On a D_1 égal à 1 186 €.
d. D_4 et D_8 valent respectivement 1 621 € et 2 709 €.
e. D_5 est aussi la médiane de la série.

2 Les salaires de la classe moyenne sont situés entre 1 479 € et 2 273 €

3 L'écart interquartile des femmes est beaucoup moins important que celui des hommes. Les salaires des femmes sont moins dispersés que ceux des hommes. Le rapport interquartile des femmes est inférieur à celui des hommes. La répartition des salaires des femmes est plus équitable que celle des hommes.

Situation 2 Répartition du patrimoine en 2015

1 Les déciles ne sont pas uniformément espacés. Le patrimoine n'est pas également réparti sur l'ensemble de la population.

2 a. Pour calculer le patrimoine total, on multiplie le patrimoine moyen par le nombre de détenteurs : $P_{\text{moyen}} = \dfrac{P_{\text{total}}}{N}$,
or $P_{\text{moyen}} = 268\,980$ donc on a : $P_{\text{total}} = N \times 268\,980$.
Pour calculer le patrimoine total, on multiplie le patrimoine moyen par le nombre de détenteurs :

$$P_{\text{total}} = P_{\text{moyen}} \times \frac{x\,\%}{100} \times N$$

Avec 10 %, on obtient $P_{\text{total}} = 2\,000 \times \dfrac{10}{100} \times N = 200N$

b. Ce qui représente $\dfrac{2\,000 \times \dfrac{N}{10}}{268\,980 \times N} = \dfrac{200}{268\,980} \approx 0{,}07\,\%$

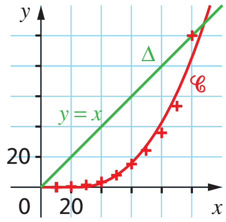
c. De la même façon, $\dfrac{2\,000 \times \dfrac{N}{20}}{268\,980 \times N} = \dfrac{100}{268\,980} \approx 0{,}36\,\%$

Les 20 % les moins riches détiennent 0,36 % du patrimoine.

d.

Pop.	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Pat.	0	0,1	0,4	1,2	3,4	8,2	15	24	36	53	100

3 a. b. Courbe :



c. La fonction est convexe.
d. La répartition est très inégalitaire.

Situation 3 Mesure du degré d'inégalité d'une répartition

1 a. Une courbe de Lorenz est toujours comprise entre l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = x$. L'aire entre la droite et la courbe est positive et majorée par l'aire sous la droite : 0,5.
b. Plus le « ventre » de la courbe de Lorenz est « gros », plus l'indice est grand et plus la répartition est inégalitaire.
On obtient l'inégalité en multipliant par 2.

2 a. On compte environ 30 petits carreaux soit 0,3 ua. On obtient donc un indice de Gini égal à 0,6.

b. $G = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 0{,}8x^5 + 0{,}2x^2\,\mathrm{d}x = \left[0{,}8\frac{x^6}{6} + 0{,}2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0{,}6$

On retrouve le même résultat qu'en a.

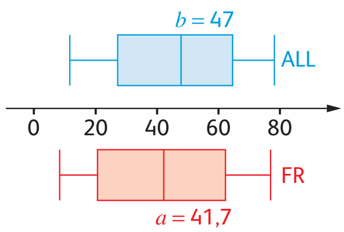
méthode

Capacité 1 Comparer des séries statistiques

1 1. Fr. : $Q_3 - Q_1 = 61{,}3 - 20{,}7 = 40{,}6$ et $\dfrac{D_9}{D_1} = \dfrac{75{,}6}{8{,}3} \approx 9{,}1$

All. : $Q_3 - Q_1 = 63{,}5 - 26{,}9 = 36{,}6$ et $\dfrac{D_9}{D_1} = \dfrac{76{,}8}{11{,}6} \approx 6{,}6$

2. Boîtes à moustaches



3. La population allemande est globalement plus âgée, sinon les répartitions autour de la médiane sont les mêmes.

2 1. On a $\bar{x} = 49{,}25$; $\sigma = \sqrt{406{,}4875} \approx 20{,}16$; $Q_1 = 32$; $Me = 51$ et $Q_3 = 62$.
2. La moyenne des 20 candidats est supérieure à la moyenne nationale avec un écart type plus faible. La médiane aussi est supérieure, avec un écart interquartile plus faible. Les 20 candidats ont mieux réussi et de manière plus homogène que la moyenne nationale. Cependant, le troisième quartile est plus bas, les 25 % les meilleurs ont de moins bons résultats que les 25 % les meilleurs au niveau national.

Interpréter une intégrale, une valeur moyenne

3 $\mu = \frac{1}{8-4}\int_4^8 0{,}1x - 0{,}5 + 0{,}6\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}\mathrm{d}x$

$= \left[0{,}1\frac{x^2}{2} - 0{,}5x + 0{,}6\frac{\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}}{-0{,}2}\right]_4^8 \simeq 0{,}6$

4 **1.** L'aire sous la courbe fait environ 36 carreaux soit $36 \times 25^2 = 22\,500$ et $\mu = \frac{25\,000}{400} \simeq 56$.

2. $\mu = \frac{1}{400}\int_0^{400} \frac{1}{6\,000}x^2 - \frac{1}{4}x + 0{,}75\mathrm{d}x$

$= \left[\frac{1}{6\,000}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + 0{,}75x\right]_0^{400} \simeq 58$

5 **1.** $F'(x) = -0{,}3 \times 3x^2 - 17 + 20\ln(x) + 20x \times \frac{1}{x}$

$= -0{,}9x^2 + 20\ln(x) - 17 + 20$

$= -0{,}9x^2 + 20\ln(x) + 3$

Pour tout réel $x \in [2;6]$, on a $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f.

2. $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = F(6) - F(2)$, avec :

$F(2) = -0{,}3 \times 2^3 - 17 \times 2 + 20 \times 2 \times \ln 2 = -36{,}4 + 40\ln 2$

$F(6) = -0{,}3 \times 6^3 - 17 \times 6 + 20 \times 6 \times \ln 6 = -166{,}8 + 120\ln 6$

Donc $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 80\ln 2 + 120\ln 3 - 130{,}4$.

3. $\mu = \frac{1}{6-2}\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x$

Donc $\mu = 20\ln 2 + 30\ln 3 - 32{,}6 \approx 14{,}221$.

La valeur moyenne du bénéfice est d'environ 14 221 euros.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b et c **2.** b et c **3.** a et b
4. a **5.** b **6.** a et b

vrai ou faux ?

Partie A. 1. Faux 2. Faux 3. Vrai 4. Vrai 5. Faux

Partie B. 1. Vrai 2. Vrai 3. Vrai 4. Faux

Partie C. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

6 **1.** 1,15 ; 0,94 ; 1,33 ; 0,90 ; 0,99 ; 0,99 ; 1,07
2. +8 % ; +26,5 % ; –5 % ; –13 % ; +20 % ; –50 % ; +100 %

7 **1.** $S = \left\{0 ; \frac{7}{4}\right\}$ **2.** $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

8 **1.** Comme $\mathrm{e}^x > 0$, la fonction est du signe de la fonction affine :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Comme $x^2 + x + 1 > 0$, la fonction est du signe de la fonction affine :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

9 **1.** $f(x) = 4 \times \mathrm{e}^x + (4x-1)\mathrm{e}^x = (4x+3)\mathrm{e}^x$

2. $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 3$

3. $f'(x) = 4\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$

4. $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x = 2(x+1)\mathrm{e}^x$

5. $f'(x) = \frac{2 \times (x-1) - (2x-3) \times 1}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}$

6. $f'(x) = \frac{6 \times \mathrm{e}^x - (6x+7) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = -(6x+1)\mathrm{e}^{-x}$

10 **1. a.** $u_{n+1} = 0{,}8u_n$ **b.** $u_n = 4 \times 0{,}8^n$
2. a. $u_{n+1} = 1{,}04u_n$ **b.** $u_n = 6 \times 1{,}04^{n-1}$

11 $d_1 : -2$; $d_2 : 0$; $d_3 : 2$; $d_4 : \frac{1}{2}$; $d_5 : -\frac{1}{3}$

12 **1.** $P(X > 0) = P(X \geqslant 2) = 0{,}15 + 0{,}4 = 0{,}55$
2. $P(X \leqslant 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
3. $E(X) = -4 \times 0{,}1 - 1 \times 0{,}05 + 0 + 2 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}4 = 1{,}05$

13 $P(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$

$P(\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = p(\bar{\mathrm{A}}) \times P(\mathrm{B}) = (1 - P(\mathrm{A})) \times P(\mathrm{B})$
$= (1 - 0{,}4) \times 0{,}5 = 0{,}3$

$P(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = 1 - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
$= 0{,}1$

Automatismes du thème

14 **1.** $F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - x$
2. $F(x) = x^2 - \ln x$
3. $F(x) = 4\mathrm{e}^x - x$

15 $\int_1^2 \mathrm{e}^x + x - 1\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + \frac{1}{2} \simeq 5{,}17$

16 **1.** $\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 3x^2 + 1\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x^3 + x]_0^2 = 5$

2. $\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[\mathrm{e}^x]_0^3 = \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}$

3. $\mu = \frac{1}{4}\int_1^5 \frac{2}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln x]_1^5 = \frac{\ln 5}{2}$

17 $f'(x)=3\times e^{-2x}-2\times e^{-2x}(3x+1)=-(6x-1)e^{-2x}$
$f''(x)=-\left(6\times e^{-2x}-2\times e^{-2x}(6x-1)\right)=4(3x-2)e^{-2x}$

18 **1.** $f'(x)=e^{-x}$; $f''(x)=-e^{-x}$; <0 concave
2. $f'(x)=-\dfrac{4}{x}$; $f''(x)=\dfrac{4}{x^2}>0$; convexe

19 **1.**

Valeurs	10	15	20	25	30	35
Effectifs	7	14	23	30	10	16
FCC	0,10	0,21	0,44	0,74	0,84	1,00

2. $M_{ed}=25$; $D_1=10$; $D_9=35$; $Q_1=20$; $Q_3=30$

20 **1.** $\bar{x}\simeq 4{,}46$; $\sigma\simeq 3{,}25$ **2.** $M_{ed}=3{,}5$; $Q_3-Q_1=4$

21 $\min=0$; $\max=100$; $M_{ed}=35$; $Q_1=10$; $Q_3=60$

exercices Application

Consolider les bases

22 **1.** $f'(x)=24x^2-12x+2$; $f''(x)=48x-12$
$F(x)=2x^4-2x^3+x^2+7x$
2. $f'(x)=0{,}009x^2+0{,}02x+0{,}005$; $f''(x)=0{,}018x+0{,}02$
$F(x)=0{,}003\dfrac{x^4}{4}+0{,}01\dfrac{x^3}{3}+0{,}005\dfrac{x^2}{2}$
3. $f'(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{10}{3}x+\dfrac{1}{12}$; $f''(x)=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{10}{3}$
$F(x)=-\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{5x^3}{9}+\dfrac{x^2}{24}-\dfrac{x}{3}$

23 **1.** $f'(x)=2x\times e^x+x^2\times e^x=x(2+x)e^x$ comme $e^x>0$ la dérivée est du signe du trinôme :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0	↗	$+\infty$

2. $f''(x)=(2+2x)\times e^x+(2x+x^2)\times e^x=(x^2+4x+2)e^x$
comme $e^x>0$ la dérivée est du signe du trinôme :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

Les points d'abscisse $-2-\sqrt{2}$ et $-2+\sqrt{2}$ sont des points d'inflexion.
3. a. $F'(x)=(2x-2)\times e^x+(x^2-2x+2)\times e^x=f(x)$
b. $I=\int_0^1 x^2e^x\,dx=\left[(x^2-2x+2)e^x\right]_0^1=2e^2-2\simeq 12{,}8$

24 **1.** $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$, f est croissante.
2. $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, f est concave.
3. a. $F'(x)=x+1+1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=f(x)$
b. $I=\int_1^2 x+2+\ln x\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}+x+1+x\ln x\right]_1^2=\dfrac{5}{2}+2\ln 2$

Connaître le cours

25 **Diaporama QCM**

1. d	**2.** a	**3.** b	**4.** d
5. c	**6.** b	**7.** a	**8.** b

Diaporama EXO
1. $Q_3-Q_1=16-4=12$
2. Les deux séries ont des valeurs qui vont de 0 à 100 avec la même médiane. La série B est plus dispersée autour de la médiane car son écart interquartile est plus élevé.
3. $\sigma>0{,}8$
4. $D_1=20$: les 10 % des candidats ayant obtenus les moins bonnes notes ont eu au plus 20.
$D_9=92$: les 10 % des candidats ayant obtenus les meilleures notes ont eu plus de 92.
$Me=D_5=64$: 50 % des candidats ont eu moins de 64.
5. $I=\ln 4$
6. $\mu=\dfrac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx=13$
7. $A=\int_1^2 2e^{-x}\,dx=e^{-1}-e^{-2}$
8. $A=\int_0^1 (x-x^2)\,dx$

26 **1.** L'écart type mesure la dispersion autour de la **moyenne**.
2. **L'intervalle inter quartile** mesure la dispersion autour de la médiane.
3. Plus l'écart type est grand, plus **la dispersion autour de la moyenne est grande**.
4. La médiane partage la série en **deux**, les quartiles en **quatre** et les **déciles** en dix séries de même taille.
5. D_1 est la plus petite valeur telle que **10 % de l'effectif a une valeur inférieure**.

27 **1.** Faux **2.** Faux **3.** Vrai
4. Faux (il faut que la fonction f soit positive sur $[a\,;b]$)

Travailler les capacités du thème

28 **1.** a **2.** b **3.** c **4.** b

29 **1.** $\overline{x_1}=\overline{x_2}=100$. Les deux séries ont la même moyenne, on ne peut pas les comparer à l'aide de cet indicateur.
2. a. La série S_1 semble la plus dispersée.
b. $\sigma_1=\sqrt{50}$ et $\sigma_2=\sqrt{25}=5$. On a $\sigma_1>\sigma_2$ ce qui confirme que la série S_1 est la plus dispersée.

30 **1.** Situation 1 : $\sigma=0$
2. Situation 2 : $\sigma=6$
3. Situation 3 : $1\leqslant\sigma\leqslant 2$

31 **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Faux **4.** Faux

32 **1.** Vrai **2.** Vrai **3.** Faux

33 **1.** En France
a. Répartitions :
10 % des salariés gagnent moins de 9,90 €/h ;
90 % des salariés gagnent moins de 26,70 €/h ;
50 % des salariés gagnent moins de 14,80 €/h.

b. Inégalités :
50 % des salariés les mieux payés perçoivent au moins 1,5 fois plus que 10 % des moins bien payés ;
10 % des salariés les mieux payés perçoivent au moins 2,7 fois plus que 10 % des moins bien payés ;
10 % des salariés les mieux payés perçoivent au moins 1,8 fois plus que 50 % des moins bien payés.
2. a. C'est en Allemagne que les inégalités sont les plus grandes dans la partie la plus basse.
C'est au Royaume-Uni que les inégalités sont les plus grandes dans la partie la plus basse.
C'est en Allemagne et au Royaume-Uni que les inégalités sont les plus grandes dans l'ensemble de la population.

34 **1.** a et b **2.** c

35 **1.** $\mathscr{A}=\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$
2. En comptant les carreaux égales à une unité d'aire, on trouve $\mathscr{A}\approx 8$.
3. $\mu=\frac{1}{5-1}\mathscr{A}=\frac{1}{4}\mathscr{A}$. Donc on peut estimer que $\mu\approx 2$.
4. Le rectangle de hauteur 2 et de largeur 4 a bien pour aire 8. Ce qui est cohérent avec la valeur moyenne trouvée en **2.**

36 **1.** *L'aire*, c'est l'aire sous la courbe et *moyenne*, c'est la valeur moyenne de la fonction.
2. $\int_0^3 2\mathrm{e}^{0,2x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{0,2}\mathrm{e}^{0,2x}\right]_0^3=10\left(\mathrm{e}^{0,6}-1\right)\simeq 8,2212$
$\mu=\frac{1}{3}\int_0^3 2\mathrm{e}^{0,2x}\,\mathrm{d}x\simeq 2,7404$

37 **1.** Vrai **2.** Faux **3.** Faux

38 **1.** $\mu=\frac{1}{4}\int_{-2}^2 2x^2+3x-1\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^2=\frac{5}{3}$
2. $\mu=\frac{1}{1}\int_0^1\frac{1}{100}x^3-\frac{99}{100}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1}\left[\frac{1}{100}\frac{x^4}{4}-\frac{99}{100}\frac{x^3}{3}\right]_0^1$
$=-\frac{131}{400}\simeq -0,3275$
3. $\mu=\frac{1}{1}\int_0^1 4x-1+3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1}\left[2x^2-x+3\mathrm{e}^x\right]_0^1$
$=3\mathrm{e}-2\simeq 6,155$
4. $\mu=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}}3-\frac{2}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\left[3x-2\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{3\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1}\simeq 1,836$

exercices Entraînement

1 Des outils statistiques

39 **1.** $\bar{x}=\frac{2\times 6\,000+6\times 1400}{8}=\frac{20\,400}{8}=2\,550$
2. Avec l'augmentation de 10 %, le salaire des 2 cadres est de 6 600 € et le salaire des 11 ouvriers de 1 540 €. Le salaire moyen avec l'augmentation est donc :
$$m=\frac{2\times 6\,600+11\times 1540}{13}=\frac{30\,140}{13}\approx 2\,318$$
L'employé a raison.

40 **1.**

	$\bar{x}$	σ	Me	Q_1	Q_3
SP95	1,410	0,142	1,381	1,313	1,51
Diesel	1,380	0,117	1,385	1,281	1,464

2. a. Ce n'est pas le cas car tous les pays n'ont pas la même taille.
b. En vert et en orange sont indiqués les pays où les prix sont plus élevés qu'en France.
3. Les prix en France sont supérieurs au troisième quartile.
4. a. Avec le salaire médian français, on peut acheter 22 pleins.
b. C'est effectivement plus pertinent de comparer les pouvoirs d'achat plutôt que les prix.

41 En 2001, on a $\frac{Q_9}{Q_1}=\frac{9,8}{31,4}\simeq 0,31$. Cela signifie que les 10 % des ménages les plus riches consacrent 3 fois moins de leurs revenus pour se loger que les 10 % des ménages les plus pauvres.
Cet indicateur passe à 0,29 en 2006 puis à 0,25 en 2013. Les inégalités se creusent.

2 Des outils issus de l'analyse

42 On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
$f'(x)=4x^3>0$, la fonction est croissante.
$f''(x)=12x^2>0$, la fonction est convexe.
Comme $0\leqslant x\leqslant 1$, alors $f(x)=x^4\leqslant x$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.
$I=1-2\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x=1-2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{5}$

43 On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$
$f'(x)=0,4x+0,8>0$, la fonction est croissante.
$f''(x)=0,4>0$, la fonction convexe.
$f(x)-x=0,2\left(x^2-1\right)\leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.
$I=1-2\int_0^1 0,2x^2+0,8x\,\mathrm{d}x=1-2\left[0,2\frac{x^3}{3}+0,8\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{15}$

44 On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
$f'(x)=\frac{2}{(2-x)^2}$, donc sur $[0;1]$, f' est positive, f est croissante.
$f''(x)=-\frac{4}{(2-x)^3}$, donc sur $[0;1]$, f'' est positive et f est convexe.
$f(x)-x=\frac{x(x-1)}{2-x}$, donc sur $[0;1]$, $f(x)-x\leqslant 0$ donc $f(x)\leqslant x$.
La courbe représentative de la fonction f est une courbe de Lorenz.
On calcule l'indice de Gini :
$$G=2\times\mathscr{A}\text{ avec }\mathscr{A}=\frac{1}{2}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$F(x)=-2\ln(2-x)-x$ est une primitive de f.

On a donc $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-1+2\ln 2$.

$\mathcal{A}=\dfrac{3}{2}-2\ln 2$ et $G=3-4\ln 2\approx 0{,}227$

45 On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

$f'(x)=\dfrac{4}{3}\dfrac{2}{(x-2)^3}>0$, la fonction est croissante.

$f''(x)=\dfrac{4}{3}\dfrac{6}{(x-2)^4}>0$, la fonction est convexe.

$f(x)-x=-\dfrac{x}{3(x-2)^2}\left(3x^2-12x+16\right)\leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.

$I=1-2\int_0^1\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x=1-\dfrac{2}{3}\left[-\dfrac{4}{x-2}-x\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

46 On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

$f'(x)=\dfrac{20}{(5-x)^3}>0$, la fonction est croissante.

$f''(x)=\dfrac{40}{(5-x)^4}>0$, la fonction est convexe.

$f(x)-x=\dfrac{x(x-1)}{5-x}\leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.

$I=1-2\int_0^1\dfrac{20}{5-x}-4\mathrm{d}x=1-2[-20\ln(5-x)-4x]_0^1$
$=90+40\ln 0{,}8\simeq 0{,}074$

47 On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

$f'(x)=\dfrac{14{,}4}{(3-x)^3}>0$, la fonction est croissante.

$f''(x)=\dfrac{43{,}2}{(3-x)^4}>0$, la fonction est convexe.

$f(x)-x=-\dfrac{x(x-4{,}2)(x-1)}{(3-x)^2}\leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.

$I=1-2\int_0^1\dfrac{7{,}2}{(3-x)^2}-0{,}8\mathrm{d}x=1-\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{7{,}2}{3-x}-0{,}8x\right]_0^1=\dfrac{1}{5}$

48 **1. a.** On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

$f'(x)=3x^3+0{,}25>0$, la fonction est croissante.

$f''(x)=4{,}5x^2>0$, la fonction est convexe.

$f(x)-x=0{,}75x\left(x^3-1\right)\leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.

b. $I=1-2\int_0^1 0{,}75x^4+0{,}25x\,\mathrm{d}x$

$=1-2\left[0{,}75\dfrac{x^5}{5}+0{,}25\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=\dfrac{9}{20}$

2. a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0{,}4\\ x>0{,}4}}\dfrac{e^{8(x-0{,}4)}-1}{e^{4{,}8}-1}=0$ donc g est continue.

$g'(x)=\dfrac{8e^{8(x-0{,}4)}}{e^{4{,}8}-1}>0$, g est donc croissante.

$g''(x)=\dfrac{64e^{8(x-0{,}4)}}{e^{4{,}8}-1}>0$, g est donc convexe.

On admet que $g(x)\leqslant x$.

b. $I=1-2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1-2\int_{0{,}24}^1\dfrac{e^{8(x-0{,}4)}-1}{e^{4{,}8}-1}\mathrm{d}x$

$=1-\dfrac{2}{e^{4{,}8}-1}\int_{0{,}24}^1 e^{8(x-0{,}4)}-1\mathrm{d}x$

$=1-\dfrac{2}{e^{4{,}8}-1}\left[\dfrac{1}{8}e^{8(x-0{,}4)}-x\right]_{0{,}24}^1\simeq 0{,}4$

3. L'indice de Gini de f est plus grand que celui de g. La part du revenu imposable est plus inégalitaire que l'impôt sur le revenu.

49 **1. a.** On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

$f'(x)=0{,}25\left(3x^2+x+2\right)>0$, la fonction est croissante.

$f''(x)=0{,}5(x+3)>0$, la fonction est convexe.

$f(x)-x=0{,}5x(x+2)(x-1)\leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.

b. $\int_0^1 0{,}25x^3+0{,}25x^2+0{,}5\mathrm{d}x=0{,}25\left[\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+2x\right]_0^1=\dfrac{19}{48}$

2. a. On a $g(0)=0$ et $g(1)=1$

b. $g'(x)=\dfrac{3e^{3x}}{e^3-1}>0$, la fonction est croissante.

$g''(x)=\dfrac{9e^{3x}}{e^3-1}>0$, la fonction est convexe.

c. $h(x)=g(x)-x=\dfrac{e^{3x}-1}{e^3-1}-x$

$h'(x)=\dfrac{3e^{3x}}{e^3-1}-1$ et $h''(x)=\dfrac{9e^{3x}}{e^3-1}>0$

La dérivée est continue, croissante et $0\in[h'(0)\,;h'(1)]$ donc par la propriété des valeurs intermédiaires il existe un réel $\alpha\in[0\,;1]$ tel que $h'(\alpha)=0$.

h' est donc négative sur $[0\,;\alpha]$ puis positive sur $[\alpha\,;1]$.

x	0	α	1
$h(x)$	0 ↘	$h(\alpha)$	↗ 0

La fonction h admet un minimum négatif, elle est donc négative.

On a donc $g(x)\leqslant x$.

d. D'après les questions précédentes, la fonction g est bien une fonction de Lorenz.

e. $\int_0^1\dfrac{e^{3x}-1}{e^3-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{e^3-1}\int_0^1 e^{3x}-1\mathrm{d}x=\dfrac{1}{e^3-1}\left[\dfrac{1}{3}e^{3x}-1\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{3}\dfrac{e^3-4}{e^3-1}$

3. $I_f=1-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1-2\times\dfrac{19}{48}=\dfrac{5}{24}\simeq 0{,}21$

$I_g=1-2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1-\dfrac{2}{3}\dfrac{e^3-4}{e^3-1}\simeq 0{,}44$

4. a. L'entreprise B est la plus inégalitaire

b. Cela correspond à la courbe avec le plus « gros ventre ».

Apprendre à chercher

1. a. Avec les données brutes, les prix semblent effectivement avoir fortement augmentés. Mais il faut tenir compte de l'inflation pour donner un avis plus pertinent.
b. Il faut tenir compte de l'évolution des salaires et de l'inflation globale des prix.
2. a. Évolution des prix :

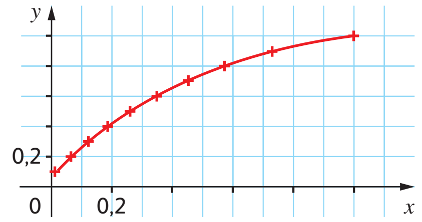
	CM	Évolution	Avec 1 h de smic en 1980	Avec 1 h de smic en 2018
Baguette	3,48	+ 248 %	8,52	11,35
Bœuf	3,45	+ 245 %	0,26	0,35
Lait	2,47	+ 147 %	5,6	10,51
Beurre	2,10	+ 110 %	2,36	5,22
Huile	3,05	+ 205 %	1,8	2,74
Œufs	2,25	+ 125 %	1,8	3,72
Sucre	1,78	+ 78 %	3,67	9,6
Vin	5	+ 400 %	3,67	3,4
Essence	2,85	+ 185 %	4	6,67
Diesel	3,47	+ 247 %	5,3	7,1
Cinéma	4,08	+ 308 %	0,87	0,99
Cigarettes	17,07	+ 1 607 %	5,2	1,41
Journal	5,71	+ 471 %	6	5
Timbre	3,71	+ 271 %	10	12
Médecin	3,81	+ 281 %	0,3	0,4
Voiture	2,33	+ 133 %	0,0005	0,0001

b. La moyenne des CM est environ égale à 4,16, c'est-à-dire une augmentation moyenne de 316 %.
3. a. Pour convertir les Francs en Euros, on divise par 6,55957, théoriquement une baguette à 1,67 francs vaut donc 0,25 €.
b. En tenant compte de l'inflation, la conversion Francs-Euros aurait été beaucoup plus faible. En tenant compte de ce correctif, une baguette coûterait 0,72 €, ce qui ne correspond qu'à une hausse de $\left(\dfrac{0{,}87}{0{,}72}-1\right)\times 100 = 21\ \%$.
4. Voir les deux dernières colonnes du tableau.
Le pouvoir d'achat en 2018 est plus élevé qu'en 1980. On note le cas exceptionnel des cigarettes qui s'explique par la politique contre le tabagisme.

Maths en situation…

50 Partie A
1. La médiane est égale à 30 040 €.
Le seuil de pauvreté est de 15 020 € par an soit 1 252 € par mois. Le seuil de richesse est de 60 080 € par an soit 5 006 € par mois.
2. Les classes moyennes ont un salaire mensuel compris entre 1 760 et 4 112 €.
3. $\dfrac{Q_9}{Q_1}=\dfrac{63\,210}{13\,630}\simeq 4{,}6$

Les 10 % les plus riches gagnent presque 5 fois plus que les 10 % les plus pauvres.
4. a.



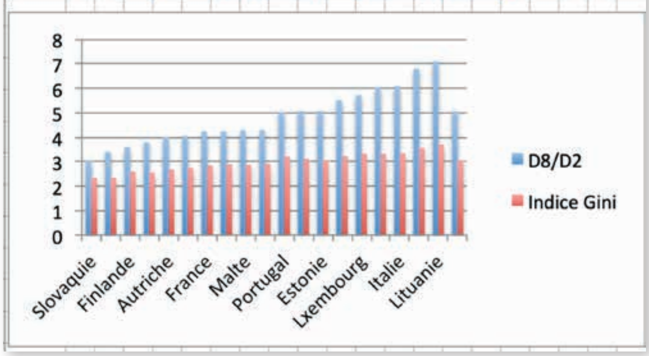
$y = 0{,}6236x^2 - 1{,}7944x^2 + 2{,}1199x + 0{,}0539$

On obtient environ 15 % de pauvres et 10 % de riches.

Partie B
1. a. Le revenu moyen est d'environ 36 299 €.
b. Pour calculer le revenu total, on multiplie le revenu moyen par le nombre de détenteurs : $R_{\text{total}} = R_{\text{moyen}} \times N$.
Pour D_1 : $R_{\text{total}} = 10\,030 \times \dfrac{10}{100} \times N = 1003N$.
c. Pour D_1, un taux de $\dfrac{1\,003N}{36\,299N} \simeq 2{,}8\,\%$.
d. Pour D_9, un taux de $\dfrac{9\,624N}{36\,299N} \simeq 26{,}5\,\%$.
2. Graphe :
En abs : les déciles
En ord : les parts cumulées
3. a. On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
$f'(x) = 2{,}1x^2 + 0{,}3 > 0$, la fonction est croissante.
$f''(x) = 4{,}2x > 0$, la fonction convexe.
$f(x) - x = 0{,}7x(x^2-1) \leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.
b. $\displaystyle\int_0^1 0{,}7x^3 + 0{,}3x\,\mathrm{d}x = \left[0{,}7\frac{x^4}{4} + 0{,}3\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0{,}325$
c. $I = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2\times 0{,}325 \simeq 0{,}35$
d. La valeur de l'INSEE est de 0,348 soit une différence de :
$$\left(\frac{0{,}35}{0{,}348}-1\right)\times 100 \simeq 0{,}6\,\%$$

51

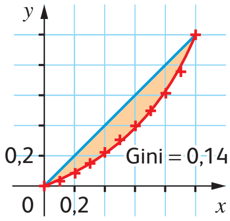
	Slovaquie	Slovenie	Finlande	Belgique	Autriche	Pays Bas	France	Irlande	Malte	Chypre	Portugal	Allemagne	Estonie	Grèce	Luxembourg	Espagne	Italie	Lettonie	Lituanie	Total
D8/D2	3,03	3,4	3,6	3,78	4	4,05	4,23	4,23	4,28	4,29	5,02	5,07	5,07	5,51	5,72	6,03	6,09	6,8	7,09	5,07
Indice Gini	2,34	2,34	2,59	2,56	2,68	2,74	2,85	2,89	2,87	2,91	3,21	3,11	3,06	3,23	3,32	3,32	3,34	3,56	3,69	3,06



Sur les D_8/D_2
Moyenne : 4,8 ; Écart Type de 1,15
Médiane : 4,03 ; Q_1 : 4 et Q_3 : 5,62
On voit nettement d'un côté se détacher certains pays.

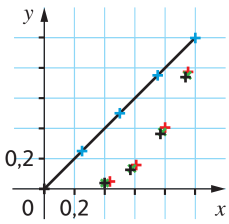
Espagne, Italie, Grèce, Lettonie et Lituanie les plus inégalitaires.
Finlande, Belgique, Autriche, Pays-Bas, Slovaquie et Slovénie où les écarts de revenus se situent bien en dessous de la moyenne.
La France occupe une position intermédiaire dans cette hiérarchie.

52 **1. a.**



b. La fonction est une bonne approximation de la fonction de Lorenz.
c. L'indice de Gini est environ égal à 0,28.
2. Dans l'exercice **50** , on obtenait un indice de Gini pour les revenus disponibles de 0,35. La distribution des niveaux de vie est plus resserrée que celles de revenus disponibles.

53 **Partie A**
1. L'évolution est assez faible, on constate une légère diminution des petites parcelles et une augmentation des grandes.
2. Les surfaces des petites exploitations diminuent tandis que celles des grandes structures augmentent.
3. a. En abs : FCC des tailles des exploitations
En ord : FCC des SAU
b. Graphe :



4. a. On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

$f'(x)=\dfrac{4,5e^{4,5x}}{e^{4,5}-1}>0$, f est donc croissante.

$f''(x)=\dfrac{4,5^2e^{4,5x}}{e^{4,5}-1}>0$, f est donc convexe.

b. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{e^{4,5x}-1}{e^{4,5}-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{e^{4,5}-1}\int_0^1 e^{4,5x}-1\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\frac{1}{e^{4,5}-1}\left[\frac{1}{4,5}e^{4,5x}-x\right]_0^1=\frac{1}{4,5}$

c. $I=1-2\times\dfrac{1}{4,5}\simeq 0,55$

Partie B
1. On a $g(0)=0$ et $g(1)=1$.

$g'(x)=0,11\dfrac{1}{(1,1-x)^2}>0$, la fonction est croissante.

$g''(x)=\dfrac{0,22}{(1,1-x)^3}>0$, la fonction est convexe.

$g(x)-x=\dfrac{x(x-1)}{1,1-x}\leqslant 0$, la fonction est donc bien une fonction de Lorenz.

2. $\displaystyle I=1-2\int_0^1\frac{0,11}{1,1-x}-0,1\mathrm{d}x$

$=1-2[-0,11\ln(1,1-x)-0,1x]_0^1\simeq 0,97$

Les inégalités sont encore plus fortes à la Réunion.

Partie C
Oui la partie orange (exploitations individuelles) diminue au profit des vertes et des jaunes (exploitations sociétaires) tant en surface qu'en nombre d'emplois.

54 **1.** L'IDH est une fonction croissante de l'espérance de vie.
2. L'IDH est une fonction croissante du taux de scolarisation.
3. L'IDH est une fonction croissante du revenu national brut.

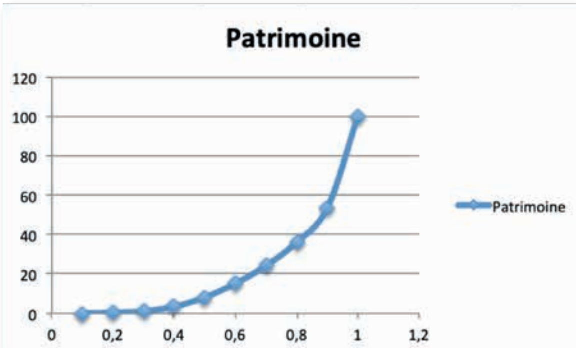
Travaux pratiques

Comparaison de la répartition du patrimoine et des revenus en France

Partie A
1. Données

Part de la population	Part du patrimoine	FCC patrimoine	Aire
0,1	0,07	0,07	0,0215
0,2	0,29	0,36	0,0765
0,3	0,81	1,17	0,231
0,4	2,28	3,45	0,584
0,5	4,78	8,23	1,1695
0,6	6,93	15,16	1,9715
0,7	9,11	24,27	3,02
0,8	11,86	36,13	4,475
0,9	17,24	53,37	7,668
1	46,62	99,99	4,9995
			24,2165
			0,51567

2. Graphe

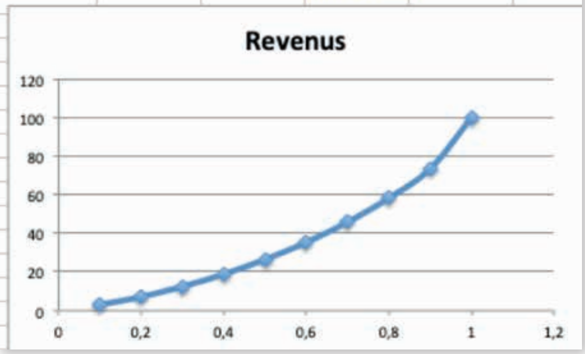


3. a. La grande base du trapèze correspond à C3, la petite base à C2 et la hauteur à 10 %.
b. L'aire totale obtenue est égale à 24,21.
c. L'indice de Gini vaut 0,52.
4. On avait obtenu 0,6, ce résultat est un peu plus faible.

Partie B

1. Feuille de calcul :

Part de la population	Part du revenu	FCC revenu	Aire
0,1	2,8	2,8	0,495
0,2	4,3	7,1	0,975
0,3	5,3	12,4	1,56
0,4	6,4	18,8	2,26
0,5	7,6	26,4	3,085
0,6	8,9	35,3	4,055
0,7	10,5	45,8	5,2
0,8	12,4	58,2	6,58
0,9	15,2	73,4	8,665
1	26,5	99,9	4,995
			37,87
			0,2426



2. On trouve 0,24 au lieu de 0,34 précédemment.

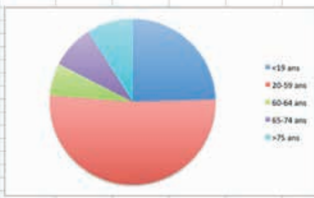
3. La répartition du patrimoine est plus inégalitaire que celle des revenus.

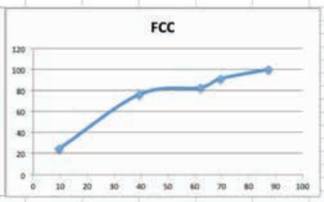
2070 Projection de la population française

Partie A

<19 ans	20-59 ans	60-64 ans	65-74 ans	>75 ans
9,5	39,5	62	69,5	87,5
24,6	51,6	6,3	8,5	9
24,6	76,2	82,5	91	100

moyenne	40,41
Ecart Type	23,16
mediane	
Q1	
Q3	

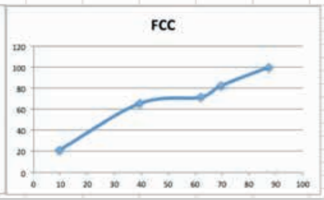




Partie B

<19 ans	20-59 ans	60-64 ans	65-74 ans	>75 ans
9,5	39,5	62	69,5	87,5
21,3	44,2	5,8	10,8	17,9
21,3	65,5	71,3	82,1	100

moyenne	46,25
Ecart Type	23,16
mediane	
Q1	
Q3	



Partie C

On remarque que la population est « vieillissante » et on peut se poser des questions sur la part des « actifs » et des « inactifs » dans la population.

Différences salariales entre homme et femme

On pourra remarquer que les inégalités salariales entre les hommes et les femmes sont flagrantes au profit des hommes et que c'est visible en France mais aussi au niveau Européen (doc. 3).

Plus on progresse dans l'échelle des salaires, plus l'écart est important.

En s'appuyant sur le doc. 1, chez les 10 % les mieux rémunérés, les femmes gagnent 21 % de moins que les hommes contre 7 % chez les moins rémunérées.

Cet écart dépend aussi de la catégorie socio-professionnelle. L'écart le plus faible est constaté chez les employés (une catégorie majoritairement féminine) (doc. 2).

À partir du doc. 2, on peut comparer les différences entre salaire net moyen.

Année	2005	2010	2015
Hommes	2037	2266	2438
Femmes	1652	1815	1986
Rapport femmes/hommes	81,9 %	80,9 %	81,5 %

Les femmes perçoivent encore 18,5 % de moins que les hommes en 2015.

Pour obtenir l'égalité, le chemin est encore long.

THÈME 7

Inférence bayésienne

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
Probabilités conditionnelles, inversion du conditionnement, formule de Bayes.	Calculer des probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles.

2. Intention des auteurs

Dans ce thème, nous traitons le thème « Inférence bayésienne ». Toutes les notions sur les probabilités conditionnelles du programme de spécialité mathématiques de Première générale (définition, notation $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, partition, formule des probabilités totales, arbre pondéré, indépendance de deux événements) sont présentées et mises en application dans les activités, les exercices et les thèmes d'études.

La formule de Bayes, nouveauté du programme de mathématiques complémentaires en Terminale, est introduite et présentée comme une méthode à acquérir.
Les mises en application sont de difficultés graduelles et issues de contextes variés. Elles sont suivies par des thèmes d'étude proposés dans le programme qui permettront à chaque professeur d'adapter son enseignement selon les poursuites d'études de ses élèves (médical, numérique, économique, génétique…).

Partir d'un bon pied

A **1.** c **2.** a et c **3.** a et d **4.** a, b et d **5.** a et d
6. b **7.** a, b et c **8.** a et c **9.** b et d **10.** b, c et d

B **Affirmation 1** Vrai, $P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})$.

Affirmation 2 Faux, $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=1-P_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})=0{,}25$.

Affirmation 3 Faux, $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=(1-0{,}6)\times(1-0{,}75)=0{,}1$.

Affirmation 4 Faux, $P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=0{,}124$.

Affirmation 5 Vrai, car $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\dfrac{0{,}6\times0{,}04}{0{,}124}=\dfrac{6}{31}$.

C **1.** b et c **2.** a **3.** c **4.** c

D **1.** $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}02\times0{,}1=0{,}002$

2. $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=(1-0{,}02)\times(1-0{,}1)=0{,}98\times0{,}9=0{,}882$

3. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$
$=0{,}02+0{,}1-0{,}002=0{,}118$

4. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}116$

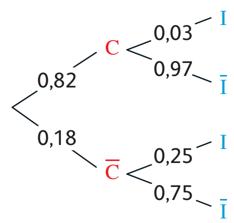
Autre méthode :
$P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=0{,}02\times(1-0{,}1)+0{,}1\times(1-0{,}02)$
$=0{,}116$

Activités en situation…

Consolider les bases

1 **a.** $P(\mathrm{C})=0{,}82$; $P_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{I}})=0{,}97$; $P_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{I})=0{,}25$

b.



2 **a.** $P(\mathrm{C}\cap\mathrm{I})=P(\mathrm{C})\times P_{\mathrm{C}}(\mathrm{I})=0{,}82\times0{,}03=0{,}0246$

b. $P(\mathrm{I})=P(\mathrm{I}\cap\mathrm{C})+P(\mathrm{I}\cap\overline{\mathrm{C}})=0{,}0696\simeq0{,}7$ donc l'affirmation de l'INSEE est correcte.

3 $P_{\overline{\mathrm{C}}}(\overline{\mathrm{I}})=0{,}75$. On en déduit que 75 % des personnes n'ayant pas effectué une scolarité complète au collège ne sont pas en situation d'illettrisme.

$P_{\overline{\mathrm{I}}}(\overline{\mathrm{C}})=\dfrac{P(\overline{\mathrm{I}}\cap\overline{\mathrm{C}})}{P(\overline{\mathrm{I}})}=\dfrac{0{,}18\times0{,}75}{1-0{,}0696}\approx0{,}145$ donc, parmi les personnes qui ne sont pas en situation d'illettrisme, environ 14,5 % n'ont pas fini leur scolarité.

Situation 1 De quelle urne provient cette boule ?

1 Intuitivement, une boule rouge prélevée proviendrait de l'urne 2 qui contient une forte proportion de boules rouges.

2 a.

```
from random import*
def de():
    n=randint(1,6)
    return (n)
```

b.

```
def prelev_urne1():
    no_boule_prelevee=randint(1,100)
    if no_boule_prelevee<=90:
        return('rouge')
    else:
        return('noire')
```

c.

```
def prelev_urne2():
    no_boule_prelevee=randint(1,100)
    if no_boule_prelevee<=30:
        return('rouge')
    else:
        return('noire')
```

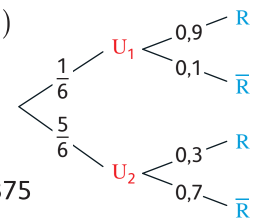
d.

```
def simul(n):
    nb_boule_rouge=0
    nb_tirage_rge_urne1=0
    nb_tirage_rge_urne2=0
    for k in range(n):
        if de()==1:
            if prelev_urne1()=='rouge':
                nb_boule_rouge=nb_boule_rouge+1
                nb_tirage_rge_urne1=nb_tirage_rge_urne1+1
        else:
            if prelev_urne2()=='rouge':
                nb_boule_rouge=nb_boule_rouge+1
                nb_tirage_rge_urne2=nb_tirage_rge_urne2+1
    return(nb_boule_rouge,nb_tirage_rge_urne1,nb_tirage_rge_urne2)
```

e. On constate que la probabilité la plus forte est qu'elle provienne de l'urne 2 (dans environ 62 % des cas).

3 a. $P(\mathrm{R}) = P(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{R}) + P(\mathrm{U}_2 \cap \mathrm{R})$

$$= 0{,}9 \times \frac{1}{6} + 0{,}3 \times \frac{5}{6} = 0{,}4$$



$$P_{\mathrm{R}}(\mathrm{U}_1) = \frac{P(\mathrm{R} \cap \mathrm{U}_1)}{P(\mathrm{R})} = \frac{0{,}9 \times \frac{1}{6}}{0{,}4} = 0{,}375$$

b. Du résultat obtenu précédemment, on déduit que $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{U}_2) = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$ ce qui confirme le résultat de la question **2** e.

Situation 2 Formule de Bayes

1 a. On sait que $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_1) = \dfrac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}_1)}{P(\mathrm{B})}$ donc, en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_1) = \dfrac{P_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{C}_1)}{P(\mathrm{B})}$.

b. Puisque C_1, C_2 et C_3 forment une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}_1) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}_2) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}_3)$$
$$= P(\mathrm{C}_1) \times P_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_2) \times P_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_3) \times P_{\mathrm{C}_3}(\mathrm{B})$$

On remplace alors $P(\mathrm{B})$ dans la formule démontrée à la question précédente :

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_1) = \frac{P_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{C}_1)}{P(\mathrm{C}_1) \times P_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_2) \times P_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_3) \times P_{\mathrm{C}_3}(\mathrm{B})}$$

De même, on montre que :

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_2) = \frac{P_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{C}_2)}{P(\mathrm{C}_1) \times P_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_2) \times P_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_3) \times P_{\mathrm{C}_3}(\mathrm{B})}$$

et

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_3) = \frac{P_{\mathrm{C}_3}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{C}_3)}{P(\mathrm{C}_1) \times P_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_2) \times P_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}_3) \times P_{\mathrm{C}_3}(\mathrm{B})}$$

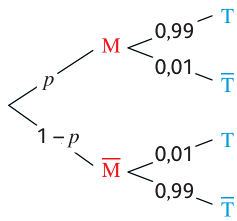
2 On note M_{A}, respectivement M_{B} et M_{C}, les événements « la pièce a été fabriquée par la machine A (respectivement B ou C) ».
Et D l'événement « la pièce est défectueuse ».
D'après l'énoncé, on a $P(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}) = 0{,}4$, $P(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) = 0{,}35$, $P_{\mathrm{M}_{\mathrm{A}}}(\mathrm{D}) = 0{,}02$, $P_{\mathrm{M}_{\mathrm{B}}}(\mathrm{D}) = 0{,}03$ et $P_{\mathrm{M}_{\mathrm{C}}}(\overline{\mathrm{D}}) = 0{,}99$. Les événements M_{A}, M_{B} et M_{C} forment une partition de l'univers.
On applique la formule démontrée précédemment :

$$P_{\mathrm{D}}(\mathrm{M}_{\mathrm{A}})$$
$$= \frac{P_{\mathrm{M}_{\mathrm{A}}}(\mathrm{D}) \times P(\mathrm{M}_{\mathrm{A}})}{P_{\mathrm{M}_{\mathrm{A}}}(\mathrm{D}) \times P(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}) + P_{\mathrm{M}_{\mathrm{B}}}(\mathrm{D}) \times P(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) + P_{\mathrm{M}_{\mathrm{C}}}(\mathrm{D}) \times P(\mathrm{M}_{\mathrm{C}})}$$
$$= \frac{0{,}02 \times 0{,}4}{0{,}02 \times 0{,}4 + 0{,}03 \times 0{,}35 + (1 - 0{,}99) \times (1 - 0{,}4 - 0{,}35)} \approx 0{,}38$$

Situation 3 Efficacité d'un test de dépistage

1 a. D'après l'énoncé, on a $P(\mathrm{M}) = p$, $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0{,}99$ et $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}99$.

b. $$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \frac{p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) \times p(\mathrm{M})}{p(\mathrm{T})}$$
$$= \frac{0{,}99 \times p}{0{,}99p + 0{,}01(1 - p)}$$
$$= \frac{0{,}99p}{0{,}98p + 0{,}01} = \frac{99p}{98p + 1}$$



c. f est le quotient de deux fonctions affines définies et dérivables sur $[0\,;1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0\,;1]$, donc f est dérivable sur $[0\,;1]$.
Pour tout réel p de l'intervalle $[0\,;1]$, on a

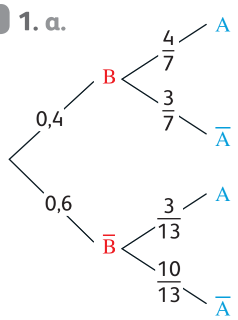
$$f'(p) = \frac{99(1 + 98p) - 99p \times 98}{(1 + 98p)^2} = \frac{99}{(1 + 98p)^2} > 0$$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;1]$: plus la proportion de malades est grande, plus la probabilité d'être malade lorsqu'on a un test positif est grande.

2 Lorsque $p =$ 0,7 : $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = f(0{,}7) \approx 0{,}996$ d'où $p_{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{M}}) \approx 0{,}004$.
Lorsque $p = 0{,}005$: $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = f(0{,}005) \approx 0{,}332$ d'où $p_{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{M}}) \approx 0{,}668$.
On en déduit que lorsque très peu de personnes sont malades dans la population, le résultat des tests est très peu fiable.

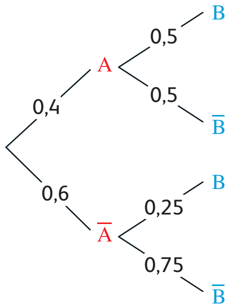
Méthode

CAPACITÉ 1 Exploiter un arbre pondéré

1 **1. a.**



b.



2. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=\frac{4}{7}\times 0{,}4+\frac{3}{13}\times 0{,}6\approx 0{,}367$$

2 **1.** On note P « l'élève a eu son permis du premier coup » et F « l'élève est une fille ». On a :

$$P(P)=P(P\cap F)+P(P\cap\bar{F})=\frac{1}{3}\times 0{,}75+\frac{1}{10}\times 0{,}25=0{,}275$$

2. $P_P(\bar{F})=\dfrac{P(P\cap\bar{F})}{P(P)}=\dfrac{0{,}25\times 0{,}1}{0{,}275}=\dfrac{1}{11}$

CAPACITÉ 2 Calculer des probabilités simples et conditionnelles

3 $P(B)=P_A(B)\times P(A)+P_{\bar{A}}(B)\times P(\bar{A})=0{,}48$

$P_B(A)=\dfrac{P_A(B)\times P(A)}{P(B)}=0{,}25$

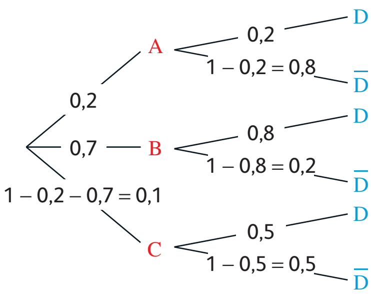
$P_{\bar{B}}(A)=\dfrac{P_A(\bar{B})\times P(A)}{P(\bar{B})}=\dfrac{7}{12}$

4 $P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=0{,}26$

$P_{\bar{A}}(\bar{B})=0{,}5$

$P_{\bar{B}}(\bar{A})=\dfrac{P_{\bar{A}}(\bar{B})\times P(\bar{A})}{P(\bar{B})}=\dfrac{10}{37}$

5 **1.**



2. On a

$$P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$
$$=0{,}2\times 0{,}2+0{,}7\times 0{,}8+0{,}1\times 0{,}5=0{,}6.$$

On en déduit $P_D(A)=\dfrac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}2\times 0{,}2}{0{,}6}=\dfrac{1}{15}$

6 Soient les événements P « l'horticulteur achète au 1er grossiste » et F « le bulbe donne une fleur ». On cherche :

$$P_F(\bar{P})=\frac{P_{\bar{P}}(F)\times P(\bar{P})}{P_{\bar{P}}(F)\times P(\bar{P})+P_P(F)\times P(P)}$$
$$=\frac{0{,}3\times 0{,}8}{0{,}3\times 0{,}8+0{,}7\times 0{,}9}=\frac{8}{29}$$

J'évalue mes connaissances

QCM

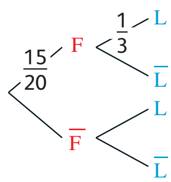
1. b **2.** b et c **3.** c **4.** a et b **5.** b
6. a et c **7.** b **8.** a **9.** c

Vrai ou faux ?

Partie A.

D'après l'énoncé, on a $P_F(L)=\dfrac{1}{3}$,

$P(L)=\dfrac{8}{20}=0{,}4$ et $P(F)=\dfrac{15}{20}=0{,}75$.



1. Faux, on a $P_F(L)=\dfrac{1}{3}$ et non $P_L(F)=\dfrac{1}{3}$.

On peut ainsi tracer l'arbre ci-contre.

2. Vrai, d'après la formule des probabilités totales :

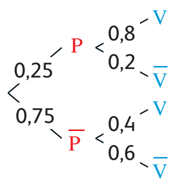
$$P(L\cap\bar{F})=P(L)-P(F\cap L)=0{,}75-0{,}75\times\frac{1}{3}=\frac{3}{20}$$

3. Vrai, on cherche $P_{\bar{F}}(L)=\dfrac{P(\bar{F}\cap L)}{P(\bar{F})}=\dfrac{0{,}15}{1-0{,}25}=0{,}6=\dfrac{3}{5}$.

Donc 3 élèves sur 5 portent des lunettes.

Partie B.

En notant P l'événement « il pleut dans la région » et V « Zoé se rend au travail en voiture », la situation se modélise par l'arbre ci-contre.



1. Faux, on applique la formule des probabilités totales :

$$P(V)=P(P\cap V)+P(\bar{P}\cap V)=0{,}25\times 0{,}8+0{,}75\times 0{,}4=0{,}5$$

2. Vrai, $P_{\bar{V}}(P)=\dfrac{P(P\cap\bar{V})}{P(\bar{V})}=\dfrac{0{,}25\times 0{,}2}{0{,}5}=0{,}1$.

3. Vrai, on a $P(P)=0{,}25$ et $P(V)=0{,}5$

donc $P(P)\times P(V)=0{,}125$

et $P(V\cap P)=P(P)\times P_P(V)=0{,}25\times 0{,}8=0{,}2$.

Ainsi, $P(V\cap P)\neq P(P)\times P(V)$.

Les événements P et V ne sont donc pas indépendants.

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

7 **1.** $-\dfrac{7}{8}$ **2.** 1 **3.** $\dfrac{21}{50}$
4. $-\dfrac{23}{15}$ **5.** $\dfrac{3}{4}$ **6.** $\dfrac{6}{7}$

8 **1.** 5^{14} **2.** 10^9 **3.** 2^{10}
4. 10^3 **5.** 3^{-1} **6.** 7^4

9 **1.** $p=0{,}097$ **2.** $p=\dfrac{3}{4}$ **3.** $p=0{,}05$
4. $p=0{,}06$ **5.** $p=0{,}1$ **6.** $p=\dfrac{4}{9}$

10 **1.** $x\in\{1{,}5\,;4\}$ **2.** $x=-3$
3. $x\in\{-\sqrt{8}\,;\sqrt{8}\}$ **4.** $x\in\{-2\,;0\,;2\}$

11 **1.** Pour tout réel x, $f'(x)=3x^2-12$.

$f'(x)$ s'annule en -2 et 2.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗		↘		↗	

2. Pour tout réel x, $g'(x)=\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$.

De plus, $(x^2+4)^2$ est strictement positif pour tout réel x et, $4-x^2$ s'annule en -2 et 2.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g		↘		↗		↘	

3. Pour tout réel x, $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

e^{-x} est strictement positif pour tout réel x et, $1-x$ s'annule en 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de h'		$+$	0	$-$	
Variations de h		↗		↘	

4. Pour tout réel x, $i'(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$.

x^2+3 est strictement positif pour tout réel x, et $2x$ s'annule en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de i'		$-$	0	$+$	
Variations de i		↘		↗	

12 **1.** Pour tout réel x, $F(x)=\dfrac{3}{4}x^4-x^2+5x$

2. Pour tout réel $x>0$, $G(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2x^2}$

3. Pour tout réel x, $H(x)=2x^3-\mathrm{e}^x$

4. Pour tout réel $x>0$, $J(x)=\dfrac{3}{2}x^2+5\ln x$

5. Pour tout réel x, $K(x)=\dfrac{1}{4}\ln(2x^2+3)$

13 **1.** $\left[x^2+3x\right]_{-2}^{3}=18-(-2)=20$

2. $\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln 3}=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\ln 3}-1\right)=4$

3. $\left[\ln(x+2)\right]_{-1}^{4}=\ln 6-\ln 1=\ln 6$

4. $\left[2\sqrt{x+5}\right]_4^{20}=2\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}\right)=4$

Automatismes du thème

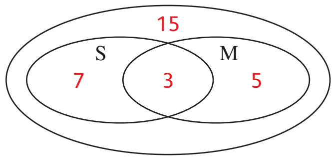
14 **1.** $P(\bar{G})=\dfrac{634}{1200}$; $P(\bar{C})=0{,}7$; $P(G\cap C)=0{,}18$;

$P(G\cup C)=\dfrac{490}{1200}$

2. $P_G(\bar{C})=\dfrac{350}{566}$

3. $P_F(C)=\dfrac{144}{634}$

15 **1.**



2. $P(S\cap M)=\dfrac{3}{30}=0{,}1$

$P(S\cup M)=\dfrac{15}{30}=0{,}5$

$P_M(S)=\dfrac{3}{8}$

16 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}1$

$P(\bar{A})=1-P(A)=0{,}7$

$P_A(B)=\dfrac{0{,}1}{0{,}3}=\dfrac{1}{3}$

$P_B(A)=\dfrac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5$

17 **1.** Comme A et B sont incompatibles, on a $P(A\cap B)=0$ d'où :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0{,}7$

$P_B(A)=0$; $P_{\bar{B}}(A)=0{,}5$

2. Comme A et B sont indépendants, on a :

$$P(A\cap B)=0{,}3\times 0{,}4=0{,}12$$

On en déduit $P(A\cup B)=0{,}3+0{,}4-0{,}12=0{,}58$

$P_B(A)=P(A)=P_{\bar{B}}(A)=0{,}3$

3. $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0{,}03$

$P(A\cup B)=0{,}3+0{,}4-0{,}03=0{,}67$

$P_B(A)=\dfrac{0{,}03}{0{,}4}=0{,}075$

$P_{\bar{B}}(A)=\dfrac{0{,}27}{0{,}6}=0{,}45$

18 Soit p la probabilité d'obtenir 3, la probabilité d'obtenir la face 2 est égale à $3p$ et celle de la face 1 est égale à $3\times 2p=6p$. Il en découle que la probabilité d'obtenir la face 4 est égale à $\dfrac{6p}{4}$.

On sait, de plus, que la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1, soit :

$$6p+3p+p+\frac{6p}{4}=1$$

On obtient alors $p=\dfrac{2}{23}$ (donc des probabilités dans l'ordre des faces de $\dfrac{12}{23}, \dfrac{6}{23}, \dfrac{2}{23}, \dfrac{3}{23}$).

exercices Application

Consolider les bases

19 8 % des hommes sont daltoniens : $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{D})$

51 % des personnes sont des femmes : $P(\overline{\mathrm{H}})$

4,175 % des personnes sont daltoniennes : $P(\mathrm{D})$

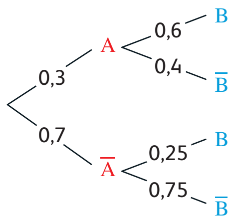
Parmi les femmes, 0,5 % sont daltoniennes : $P_{\overline{\mathrm{H}}}(\mathrm{D})$

Près de 94 % des daltoniens sont des hommes : $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{H})$

45,08 % des personnes sont des hommes non daltoniens : $P(\mathrm{H}\cap\overline{\mathrm{D}})$

20 **1. a.** Dans l'énoncé, on donne des probabilités sachant que A et $\overline{\mathrm{A}}$ sont réalisés, donc ces événements doivent être positionnés sur les premières branches de l'arbre. Donc l'arbre le plus pertinent est celui de gauche.

b.



2. On applique la formule des probabilités composées :
$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=0{,}3\times0{,}6=0{,}18$
$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=0{,}7\times0{,}25=0{,}175$

3. On applique la formule des probabilités totales :
$$P(\mathrm{B})=0{,}18+0{,}175=0{,}355$$

4. $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{0{,}18}{0{,}355}=\dfrac{36}{71}$

21 **1.** A et B étant indépendants, on a :
$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=0{,}3\times0{,}6=0{,}18$$

2. A et B étant indépendants, A et $\overline{\mathrm{B}}$ le sont également d'où :
$$\begin{aligned}P(\overline{\mathrm{A}}\cup\mathrm{B})&=P(\overline{\mathrm{A}})+P(\mathrm{B})-P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})\\&=P(\overline{\mathrm{A}})+P(\mathrm{B})-P(\overline{\mathrm{A}})\times P(\mathrm{B})\\&=0{,}7+0{,}6-0{,}7\times0{,}6\\&=0{,}88\end{aligned}$$

3. $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=P(\mathrm{A})=0{,}3$

4. A et B étant indépendants, $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont également :
$$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})=0{,}7\times0{,}6=0{,}42$$

5. A et B étant indépendants, $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ le sont également :
$$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=0{,}7\times0{,}4=0{,}28$$

6. $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})=P(\overline{\mathrm{B}})=0{,}4$

22 **1.** La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

2. a. On cherche α tel que $\alpha=1{,}03\alpha-60$ donc :
$$\alpha=\frac{-60}{-0{,}03}=2\,000$$

b. Pour tout entier naturel n, on a :
$v_{n+1}=u_{n+1}-2\,000=1{,}03u_n-2\,060=1{,}03(u_n-2\,000)=1{,}03v_n$
donc v est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0=3\,000$.

c. Pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n=v_n+2\,000=3\,000\times1{,}03^n+2\,000$$

3. Comme $1{,}03>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}1{,}03^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Connaître le cours

23 **Diaporama QCM**

1. b et d **2.** b et c **3.** c **4.** c et d
5. a et c **6.** c **7.** c **8.** a et c

Diaporama EXO

1. a. $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})=0{,}03$ **b.** $P_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{E}})=0{,}7$
c. $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{E})=0{,}8$ **d.** $P(\mathrm{E})=0{,}54$

2. a. $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{C})=\dfrac{3}{54}$ **b.** $P_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{C})=\dfrac{7}{46}$

3. 0,84

4. a. $P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{A}})=\dfrac{12}{13}$ **b.** $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}04$ **c.** $P_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{C})=\dfrac{7}{46}$

5. $P(\mathrm{A})=0{,}5$ et $P(\mathrm{B})=0{,}2$

6. 0,1

7. $p_{n+1}=0{,}8-0{,}4p_n$

8. $x=1$, $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{U}_1)=0{,}5$ et $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{U}_2)=\dfrac{6}{7}$

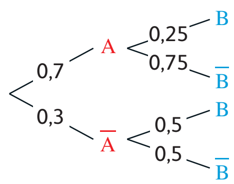
24 **1.** c **2.** b **3.** a **4.** b **5.** c **6.** a

25 Rappelons la formule de Bayes : $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{B})\times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})}$

où A et B sont deux événements de probabilités non nulles. Cette propriété permet « d'inverser » un conditionnement et donc un arbre de probabilités.

26 On peut prouver que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B})$ ou que $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

27 **1.**



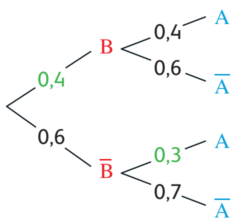
2. a. D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}P(\mathrm{B})&=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})\\&=0{,}7\times0{,}25+0{,}3\times0{,}5=0{,}325\end{aligned}$$

b. $\overline{\mathrm{B}}$ est l'événement contraire de B, donc :
$$P(\overline{\mathrm{B}})=1-P(\mathrm{B})=0{,}675$$

c. D'après la formule des probabilités composées :
$$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0{,}3\times0{,}5=0{,}15$$

d. D'après la définition de probabilité conditionnelle :
$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\frac{0{,}7\times0{,}25}{0{,}325}=\frac{7}{13}$$

28 **1.**



$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}16$
donc $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{0{,}16}{0{,}4}=0{,}4$

2. a. $P(\mathrm{A})=0{,}4\times0{,}4+0{,}6\times0{,}3=0{,}34$

b. $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=0{,}4\times0{,}6=0{,}24$

c. $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})}{P(\mathrm{A})}=\dfrac{0{,}6\times0{,}3}{0{,}34}=\dfrac{9}{17}$

d. $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\dfrac{0{,}4\times0{,}6}{0{,}66}=\dfrac{4}{11}$

Travailler les capacités du thème

29 **1.** Vrai, $P(\mathrm{C})=1-P(\mathrm{A})-P(\mathrm{B})=0{,}3$

2. Vrai, $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{D})=1-P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{D}})=0{,}2$

3. Faux, c'est $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$. De plus :

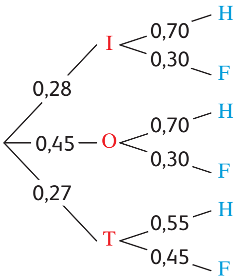
$$P_{\mathrm{D}}(\mathrm{C})=\frac{P(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})}{P(\mathrm{D})}=\frac{0{,}3\times0{,}5}{0{,}31}\neq0{,}5$$

4. Faux, $P(\mathrm{D})=0{,}2\times0{,}3+0{,}5\times0{,}2+0{,}3\times0{,}5=0{,}31$

5. Vrai, $P(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{D}})=P(\mathrm{B})\times P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{D}})=0{,}5\times0{,}8=0{,}4$

6. Vrai, $P(\overline{\mathrm{D}})=1-P(\mathrm{D})=1-0{,}31=0{,}69$

30 **1.**



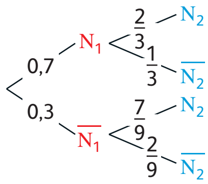
2. a. $P(\mathrm{F}\cap\mathrm{I})=0{,}28\times0{,}30=0{,}084$

$P(\mathrm{F}\cap\mathrm{O})=0{,}45\times0{,}3=0{,}135$

b. $P(\mathrm{F})=0{,}084+0{,}135+0{,}27\times0{,}45=0{,}3405$

3. $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{I})=\dfrac{0{,}084}{0{,}3405}=\dfrac{56}{227}$

31 **1.** Notons N_1 l'événement « on obtient une boule noire au premier tirage » et N_2 l'événement « on obtient une boule noire au deuxième tirage ». On peut représenter la situation par l'arbre ci-contre.



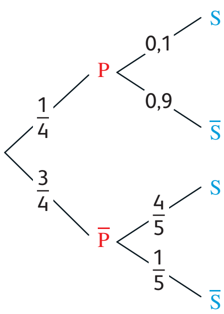
2. a. $P(\overline{\mathrm{N}_1}\cap\overline{\mathrm{N}_2})=P(\overline{\mathrm{N}_1})\times P_{\overline{\mathrm{N}_1}}(\overline{\mathrm{N}_2})=0{,}3\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$

b. $P(\mathrm{N}_1\cap\overline{\mathrm{N}_2})+P(\overline{\mathrm{N}_1}\cap\mathrm{N}_2)=0{,}7\times\dfrac{3}{9}+0{,}3\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{15}$

c. $P(\mathrm{N}_2)=P(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{N}_2)+P(\overline{\mathrm{N}_1}\cap\mathrm{N}_2)=\dfrac{7}{10}$

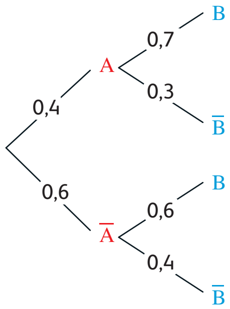
3. $P_{\mathrm{N}_2}(\overline{\mathrm{N}_1})=\dfrac{P(\overline{\mathrm{N}_1}\cap\mathrm{N}_2)}{P(\mathrm{N}_2)}=\dfrac{1}{3}$

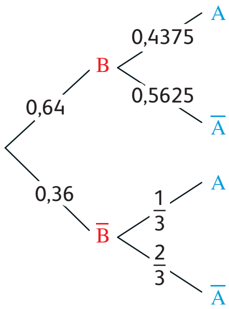
32 Soient P l'événement « le temps est pluvieux » et S l'événement « Emma sort son chien ». On modélise la situation par l'arbre pondéré suivant :



Donc $P(\mathrm{S})=\dfrac{1}{4}\times0{,}1+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=0{,}625$

33





Pour le premier arbre, on utilise la probabilité de l'événement contraire.

Pour le deuxième arbre, on a :

$P(\mathrm{B})=0{,}4\times0{,}7+0{,}6\times0{,}6=0{,}64$

$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{0{,}4\times0{,}7}{0{,}64}=0{,}4375$

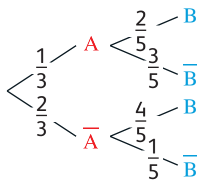
$P_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})}{P(\overline{\mathrm{B}})}=\dfrac{0{,}4\times0{,}3}{1-0{,}64}=\dfrac{1}{3}$

34 **1.** On calcule $P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})=\dfrac{2}{3}$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{2}{15}$,

donc $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{8}{15}$.

Ainsi, $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\dfrac{4}{5}$.

On en déduit l'arbre pondéré complet ci-contre.



2. $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\dfrac{1}{5}$ et $P_{\overline{\mathrm{B}}}(\overline{\mathrm{A}})=\dfrac{P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})}{P(\overline{\mathrm{B}})}=\dfrac{2}{5}$.

35 **1. a.** $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{O})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=0{,}5$

b. $P(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{O}})=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=0{,}1$

c. $P(\mathrm{O})=0{,}5+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{5}+P(\mathrm{C}\cap\mathrm{O})=0{,}65+P(\mathrm{C}\cap\mathrm{O})>0{,}6$

donc la livraison d'œufs frais sera mise en place.

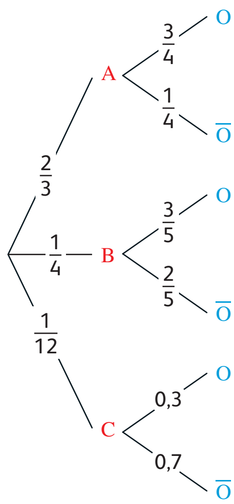
2. a. $P(\mathrm{C}\cap\mathrm{O})=P(\mathrm{O})-P(\mathrm{B}\cap\mathrm{O})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{O})$

$=0{,}675-0{,}65$

$=0{,}025$

b. $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{O})=\dfrac{0{,}025}{\frac{1}{12}}=0{,}3$.

On en déduit l'arbre pondéré complet :

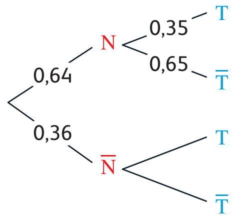


c. $P_{\mathrm{O}}(\mathrm{C})=\dfrac{0{,}025}{0{,}675}=\dfrac{1}{27}$

exercices Entraînement

1 Probabilité conditionnelle et arbre

36 **1.** Soient N l'événement « l'adhérent est nouveau » et T l'événement « l'adhérent possède un télescope ». On peut modéliser la situation par l'arbre pondéré suivant :



On sait de plus que $P(\overline{N}\cap T)=0{,}27$.

On en déduit, en appliquant la formule de probabilités totales, que :

$P(T)=P(T\cap N)+P(T\cap\overline{N})=0{,}64\times0{,}35+0{,}27=0{,}494$

2. $P_T(N)=\dfrac{0{,}64\times0{,}35}{0{,}494}\approx0{,}453$

37 **1.** $P(S\cap D)=P(S)\times P_S(D)=0{,}6\times0{,}95=0{,}57$

2. On a $P(D)=P(\overline{S}\cap D)+P(S\cap D)$ donc :

$$P_{\overline{S}}(D)\times0{,}4+0{,}57=0{,}586 \text{ d'où } P_{\overline{S}}(D)=0{,}04$$

3. $P_{\overline{D}}(S)=\dfrac{0{,}6\times0{,}05}{0{,}414}\approx0{,}072$

38 Soit p la proportion de clients choisissant une borne automatique. La proportion de clients attendant moins de 10 minutes, par la formule des probabilités totales, est :

$$p\times0{,}86+(1-p)\times0{,}63$$

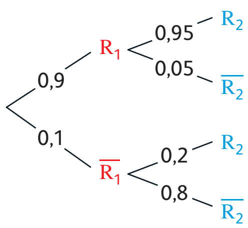
On cherche la valeur de p telle que :

$0{,}86p+0{,}63(1-p)\geqslant0{,}75$

$\Leftrightarrow 0{,}23p\geqslant0{,}12$

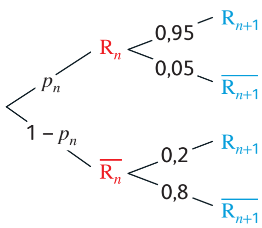
$\Leftrightarrow p\geqslant\dfrac{12}{23}$

39 **1. a.**



b. $P(R_2)=0{,}9\times0{,}95+0{,}1\times0{,}2=0{,}875$. Donc 87,5 % des clients rapportent la bouteille en semaine 2.

2. a.



b. Pour tout entier naturel $n\geqslant1$,

$P(R_{n+1})=0{,}95\times p_n+0{,}2\times(1-p_n)=0{,}75p_n+0{,}2$

(p_n) est donc une suite arithmético-géométrique.

c. $\alpha=0{,}75\alpha+0{,}2 \Leftrightarrow \alpha=0{,}8$

d. Pour tout entier naturel $n\geqslant1$:

$u_{n+1}=p_{n+1}-0{,}8=0{,}75p_n-0{,}6=0{,}75(p_n-0{,}8)=0{,}75u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $u_1=0{,}1$.

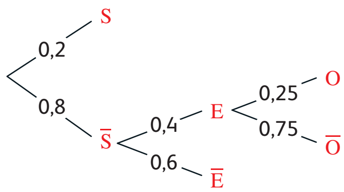
e. Pour tout entier naturel $n\geqslant1$,

$u_n=u_1\times0{,}75^{n-1}=0{,}1\times0{,}75^{n-1}$ d'où :

$$p_n=0{,}1\times0{,}75^{n-1}+0{,}8$$

f. Puisque $0<0{,}75<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}75^{n-1}=0$, il découle que la suite (p_n) tend vers 0,8. Au fur et à mesure du temps, la proportion de personnes rapportant la bouteille se stabilisera à 80 %.

40 **1.**



2. Notons A l'événement « le candidat est admis ».

$P(A)=P(S)+P(\overline{S}\cap E\cap O)$

$\quad=0{,}2+0{,}8\times0{,}4\times0{,}25$

$\quad=0{,}28$

3. $P_A(S)=\dfrac{P(S\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}28}=\dfrac{5}{7}$

2 Inversement du conditionnement

41 Soient C l'événement « le téléspectateur a regardé le concours » et R l'événement « le téléspectateur a regardé les recettes rapides ».

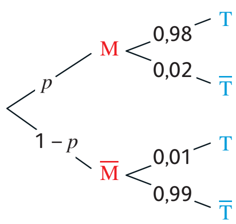
On a $0{,}44\times P_{\overline{C}}(R)+0{,}56\times0{,}25=0{,}162$ d'où :

$$P_{\overline{C}}(R)=0{,}05$$

42 Soient C l'événement « le client a plus de 50 ans » et D l'événement « le client a des problèmes d'audition aux 2 oreilles ».

On a $P_{\overline{D}}(C)=\dfrac{P(\overline{D}\cap C)}{P(\overline{D})}=\dfrac{0{,}75\times0{,}2}{0{,}75\times0{,}2+0{,}25\times0{,}6}=0{,}5$

43 **1. a.**



b. $P(M\cap T)=0{,}98p$

$P(T)=0{,}98p+0{,}01(1-p)=0{,}97p+0{,}01$

2. a. $P_T(M)=\dfrac{0{,}98p}{0{,}97p+0{,}01}=\dfrac{98p}{97p+1}$

b. Pour tout réel p de $[0\,;1]$, $f'(p)=\dfrac{98}{(97p+1)^2}$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ ce qui signifie que, plus la part de malades dans la population est élevée, plus la probabilité d'être malade lorsqu'on a un test positif est élevée.

3. On souhaite avoir $\dfrac{98p}{97p+1}>0{,}95 \Leftrightarrow p>\dfrac{0{,}95}{5{,}85}$ soit environ 0,163.

3 Rappels sur l'indépendance

44 D'une part, $P(\mathrm{T})\times P(\mathrm{P})=\frac{6}{30}\times\frac{10}{30}=\frac{1}{15}$; d'autre part, $P(\mathrm{T}\cap\mathrm{P})=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ donc les événements P et T sont bien indépendants.

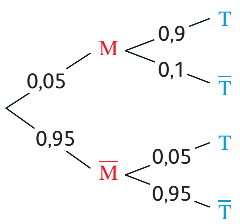
45 **1.** A et B sont indépendants, donc $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ sont également indépendants d'où $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=0{,}98\times0{,}9=0{,}882$.
2. « La montre présente au moins un défaut » est l'événement contraire du précédent, donc $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0{,}118$.
3. On a $P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$
$=0{,}118-0{,}02\times0{,}1=0{,}116$

Apprendre à raisonner

1. Les effectifs de succès et de patients du tableau 1 sont cohérents avec la répartition effectuée dans le tableau 2.
2. Le tableau 1 fait penser que le traitement B est plus efficace (83 % contre 78 %) alors que dans le tableau 2 c'est le traitement A (93 et 87 % contre 73 et 69 %).
3. a. $P_{\mathrm{G}}(\mathrm{A})=\frac{263}{343}\approx0{,}77$; $P_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})=\frac{80}{343}\approx0{,}23$;
$P_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{A})=\frac{87}{357}\approx0{,}24$; $P_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{B})=\frac{270}{357}\approx0{,}76$
b. $P_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})=\frac{247}{343}\approx0{,}72$; $P_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{S})=\frac{315}{357}\approx0{,}88$
c. La taille des calculs rénaux influence le choix de traitement car pour des gros calculs la probabilité de recevoir le traitement A est d'environ 77 % contre 23 % pour le B, alors que pour les petits, c'est 24 % pour A contre 76 % pour B ; la probabilité de guérir est d'environ 71 % pour les gros calculs contre 88 % pour les petits.
4. Si un patient a des calculs rénaux, l'estimation de leur taille est un paramètre supplémentaire important (par échographie), le médecin doit alors conseiller le traitement A pour les gros calculs et le traitement B pour les petits calculs.
5. Un facteur de confusion est une variable qui peut modifier les résultats d'un essai.

Maths en situation...

46 **Partie A**
1.



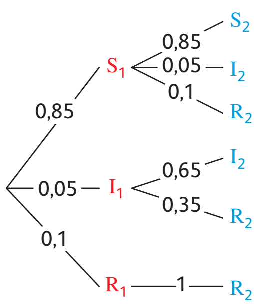
2. $P(\mathrm{T})=0{,}05\times0{,}9+0{,}95\times0{,}05=0{,}0925$
3. $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})=\frac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})}{P(\mathrm{T})}\approx0{,}486$ donc la VPP est environ égale à 0,49.
$P_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{M}})=\frac{P(\overline{\mathrm{M}}\cap\overline{\mathrm{T}})}{P(\overline{\mathrm{T}})}\approx0{,}994$ donc la VPN est environ égale à 0,99.
Lorsqu'un test est positif, seule une personne sur deux environ est réellement malade ; 99 % des personnes ayant un test négatif ne sont pas malades.
4. $P_e=P(\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{T}})+P(\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{T})=0{,}0525$

Partie B
1. $P(\mathrm{T})=0{,}9p+0{,}05(1-p)=0{,}85p+0{,}05$
2. $P(\overline{\mathrm{T}})=0{,}95-0{,}85p$
3. $VPP=\frac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})}{P(\mathrm{T})}=\frac{0{,}9p}{0{,}85p+0{,}05}$
$VPN=\frac{P(\overline{\mathrm{M}}\cap\overline{\mathrm{T}})}{P(\overline{\mathrm{T}})}=\frac{0{,}95(1-p)}{0{,}95-0{,}85p}$
4. a., **b.** et **d.** Cf. fichier
c. En B2 =0,9*A2/(0,85*A2+0,05)
En C2 =0,95*(1-A2)/(0,95-0,85*A2)
e. Lorsque la prévalence augmente, la VPP augmente et la VPN diminue.
5. a. Pour tout réel p de $]0\,;1[$, $f'(p)=\frac{0{,}045}{(0{,}85p+0{,}05)^2}>0$
donc f est strictement croissante sur $]0\,;1[$.
b. Plus p augmente, plus la VPP augmente.

Partie C
Affirmation 1 : la probabilité d'un test positif pour un malade est de 95 % avec Elisa contre 90 % avec Luminex® donc vrai.
Affirmation 2 : avec Elisa, 15 erreurs sur 200 malades soit 7,5 % contre 5,25 % pour Luminex® donc faux.
Affirmation 3 : D'après le résultat de la question **B. 5. b.**, pour le test Elisa, plus la sensibilité est élevée et plus la VPP augmente.

47 **1.** $P_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ est la probabilité que le mail contienne un mot suspect, sachant qu'il s'agit d'un spam.
$P_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{M})$ est la probabilité que le mail contienne un mot suspect, sachant qu'il s'agit d'un ham.
$P(\mathrm{S})$ est la probabilité de recevoir un spam.
2. Réponse **a.** car les probabilités connues par le logiciel sont sachant que les événements S ou $\overline{\mathrm{S}}$ sont réalisés.
3. Réponse **b.** On applique la formule des probabilités totales.
4. Réponse **a.** Par définition de la spamicité et de la formule des probabilités composées.
5. Réponse **b.** En appliquant la formule des probabilités totales au dénominateur.
6. a. En simplifiant la formule obtenue dans la question précédente par 0,5.
7. a. 0,23 donc non spam.
b. 0,67 donc non spam.
c. 0,95 donc spam.
8. a. En reprenant la formule du **6.**, on obtient :
$$P_{\mathrm{M}}(\mathrm{S})=\frac{0{,}8\times P_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})}{0{,}8\times P_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})+0{,}2\times P_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{M})}$$
b. On obtient respectivement 0,55 (non spam), 0,99 (spam) et 0,80 (non spam).

48 **Partie A**
1.



2. D'après la formule des probabilités totales :

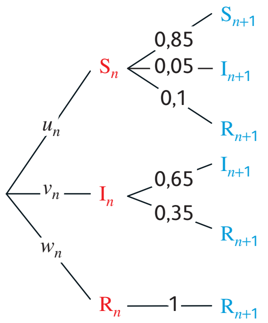
$$P(\mathrm{R}_2)=0{,}05\times0{,}35+0{,}1+0{,}85\times0{,}1=0{,}2025$$

3. $P_{\mathrm{R}_2}(\mathrm{I}_1)=\dfrac{0{,}05\times0{,}35}{0{,}2025}\approx0{,}086$. Donc 8,6 % des individus rétablis en semaine 2 ont été infectés en semaine 1.

Partie B

1. D'après l'énoncé, une semaine n donnée, un individu peut être dans l'un des trois états suivants : soit susceptible d'être atteint (de probabilité u_n), soit infecté par le virus (de probabilité v_n) soit rétabli (de probabilité w_n), donc la somme des trois probabilités correspondantes est égale à 1.

2. a.



b. D'après l'arbre pondéré, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=P(\mathrm{S}_{n+1})=u_n\times0{,}85$

$v_{n+1}=P(\mathrm{I}_{n+1})=u_n\times0{,}05+v_n\times0{,}65$

3. a.

	A	B	C	D
1	n	Un	Vn	Wn
2	0	1,0000	0,0000	0,0000
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
9	7	0,3206	0,0679	0,6115
10	8	0,2725	0,0602	0,6674
11	9	0,2316	0,0527	0,7157
12	10	0,1969	0,0459	0,7573
13	11	0,1673	0,0396	0,7930
14	12	0,1422	0,0341	0,8236
15	13	0,1209	0,0293	0,8498
16	14	0,1028	0,0251	0,8721
17	15	0,0874	0,0214	0,8912
18	16	0,0743	0,0183	0,9074
19	17	0,0631	0,0156	0,9213
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

b. Le pic épidémique a lieu en semaine 5.

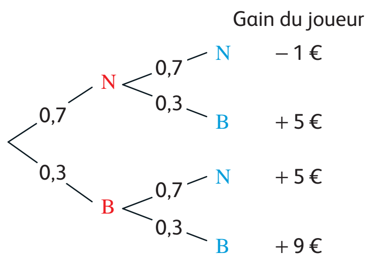
4. a. u est géométrique de raison 0,85 de premier terme 1 ; donc pour tout entier naturel n, $u_n=0{,}85^n$.

b. Comme $0<0{,}85<1$, la limite de u est égale à 0.

De plus, comme $0<0{,}65<1$, la limite de v est également 0. De plus, on a $w_n=1-u_n-v_n$ donc la limite de w est égale à 1. On en déduit qu'à long terme, la population est entièrement rétablie donc le virus est éradiqué.

49 Partie A

On peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-dessous :

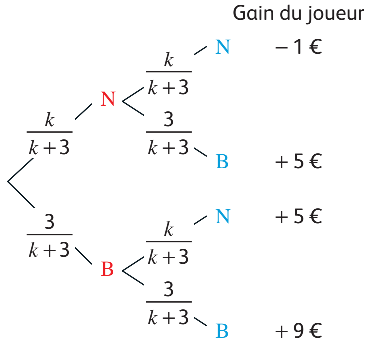


1. Gagner 5 euros revient à tirer une boule blanche puis une noire ou le contraire, avec une probabilité de $0{,}7\times0{,}3$ à chaque fois, soit au final $2\times0{,}21=0{,}42$.

2. On sait que la première boule tirée est blanche, la probabilité de gagner 5 € dans ce cas est donc égale à 0,7.

Partie B

On peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. a. On a $P(Y_k=5)=2\times\dfrac{3}{k+3}\times\dfrac{k}{k+3}=\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

b.

i	–9	–1	5
$P(Y_k=i)$	$\left(\dfrac{k}{k+3}\right)^2$	$\left(\dfrac{3}{k+3}\right)^2$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

2. Pour tout entier $k\geqslant2$, $E(Y_k)=\dfrac{-9k^2-9+30k}{(k+3)^2}$.

Donc $E(Y_k)>0\Leftrightarrow-9k^2+30k-9>0$ car $(k+3)^2>0$

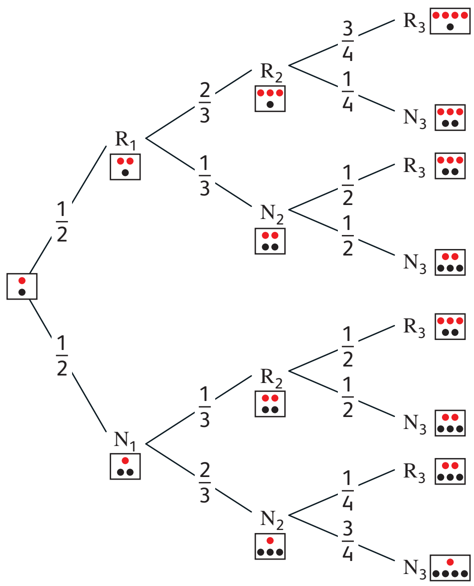
$\Delta=576$ donc $E(Y_k)$ admet deux racines : $\dfrac{1}{3}$ et 3.

On en déduit que $E(Y_k)$ est strictement positive sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{3};3\right[$, or k est un entier supérieur ou égal à 2, donc le jeu est favorable au joueur si $k=2$.

On en déduit que le jeu est défavorable au joueur pour tout entier $k\geqslant3$.

50 Partie A

1. a.



b. $P(X_2=1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$; $P(X_2=2)=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$;

$P(X_2=3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

c. Les 3 compositions d'urne ont donc la même probabilité d'être obtenues.
3. Voir arbre pondéré précédent.
$P(X_3=1)=P(X_3=2)=P(X_3=3)=P(X_3=4)=\frac{1}{4}$
4. En partant d'une répartition du marché à parts égales, tous les scenarii de répartition future ont la même probabilité d'apparaître.

Partie B

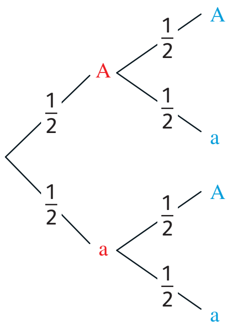
1. a. La probabilité est $\frac{r}{r+n}$ (nombre de boules rouges divisé par nombre total de boules).
b. La fonction `random()` retourne un nombre réel compris entre 0 et strictement inférieur à 1. On simule alors le tirage d'une boule rouge si la probabilité est comprise entre 0 et $\frac{r}{r+n}$.
c. `n=n+1`
2. a. On peut avoir 11 configurations (de 1 à 11 boules rouges au final).
b. Oui ces résultats sont cohérents car on observe 11 répartitions ayant des fréquences très proches, aux alentours de $\frac{1}{11}\approx 0{,}0909$.
3. Cf. fichier.

Travaux pratiques

Calcul de probabilités en génétique

Partie A

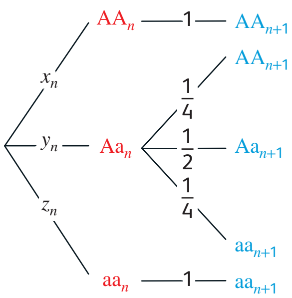
1. Grâce à l'arbre ci-contre, les couplages d'allèles possibles pour un descendant de première génération sont (A ; A), (A ; a) et (a ; a).



2. $\frac{1}{4}$ pour AA et aa, $\frac{1}{2}$ pour Aa.

Partie B

1. D'après la **partie A**, $x_1=\frac{1}{4}$, $y_1=\frac{1}{2}$ et $z=\frac{1}{4}$.
2. $P_{\mathrm{AA}_n}(\mathrm{AA}_{n+1})=1$ puisque la génération n ne possède que des allèles A.
D'après le **1.** de la **partie A**, on déduit que $P_{\mathrm{Aa}_n}(\mathrm{AA}_{n+1})=\frac{1}{4}$ et $P_{\mathrm{Aa}_n}(\mathrm{Aa}_{n+1})=\frac{1}{2}$.
3.



4. Pour tout entier naturel n,
$x_{n+1}=P(\mathrm{AA}_{n+1})=x_n\times 1+y_n\times\frac{1}{4}$ d'après l'arbre
et $y_{n+1}=P(\mathrm{Aa}_{n+1})=y_n\times\frac{1}{2}$.
5. Pour tout entier naturel n, $z_n=1-x_n-y_n$.

Partie C

1. a. Cf. fichier.
```
y=y*0.25
z=1-x-y
```
b. (x_n) semble tendre vers $\frac{1}{2}$, (y_n) semble tendre vers 0 et (z_n) semble tendre vers $\frac{1}{2}$.
2. a. (y_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $y_0=1$, donc pour tout entier naturel n, on a $y_n=0{,}5^n$.
b. Pour tout entier naturel n :
$$x_{n+1}-x_n=0{,}25y_n=0{,}25\times 0{,}5^n$$
c. Pour tout entier naturel n :
$$x_n-x_0=0{,}25\times 0{,}5^{n-1}+0{,}25\times 0{,}5^{n-2}+\ldots+0{,}25\times 0{,}5^0$$
$$=0{,}25\times(1+0{,}5+\ldots+0{,}5^{n-1})=0{,}25\times\frac{1-0{,}5^n}{1-0{,}5}$$
$$=\frac{1-0{,}5^n}{2}$$
d'où $x_n=\frac{1-0{,}5^n}{2}$ et $z_n=1-\frac{1-0{,}5^n}{2}-0{,}5^n=\frac{1-0{,}5^n}{2}=x_n$
3. Comme $0<0{,}5<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=\frac{1}{2}$.
Après un grand nombre de générations, les génotypes Aa disparaîtront alors que les AA et aa représenteront chacun la moitié de la population.

Partie D

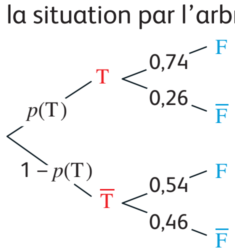
1. $p_n=y_n$ puisque hétérozygote.
2. $0{,}5^n\leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5}$ soit $n=7$ qui est le premier indice entier.

Tabac et infarctus

1. D'après l'infographie, plus de la moitié des infarctus sont causés par le tabac chez les femmes.
2. a. $P_{\mathrm{I}}(\mathrm{F})=0{,}6$
b. $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{I})=\frac{P(\mathrm{F}\cap\mathrm{I})}{P(\mathrm{F})}=\frac{0{,}6\times P(\mathrm{I})}{0{,}28}=\frac{15}{7}P(\mathrm{I})$
$P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{I})=\frac{P(\overline{\mathrm{F}}\cap\mathrm{I})}{P(\overline{\mathrm{F}})}=\frac{0{,}4\times P(\mathrm{I})}{0{,}72}=\frac{5}{9}P(\mathrm{I})$
c. $\frac{P_{\mathrm{F}}(\mathrm{I})}{P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{I})}=\frac{\frac{15}{7}}{\frac{5}{9}}\approx 4$. La probabilité qu'une femme fasse un infarctus est 4 fois supérieure lorsqu'elle fume.

Les repas végétariens à la cantine

On choisit une personne interrogée au hasard. On note T « la personne est âgée de plus de 35 ans » et F « la personne est favorable à la mise en place des repas végétariens ».
On peut modéliser la situation par l'arbre ci-dessous :



On sait de plus que $P(\mathrm{F})=0{,}59$.

En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient :
$0,74 \times P(\mathrm{T}) + (1 - P(\mathrm{T})) \times 0,54 = 0,59$

$\Leftrightarrow 0,2P(\mathrm{T}) + 0,54 = 0,59$

$\Leftrightarrow P(\mathrm{T}) = 0,25$

La proportion de personnes interrogées de plus de 35 ans est de 25 %.

Jeu de Monthy-Hall

Avant l'intervention du présentateur, le candidat a une chance sur trois d'avoir désigné la porte avec la voiture. S'il ne change pas son choix, il a toujours une chance sur trois de gagner. Mais après l'intervention, la voiture a deux chances sur trois d'être derrière la porte restante, il vaut donc mieux changer de porte systématiquement.

THÈME 8

Expériences répétées, échantillonnage

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
Épreuve et loi de Bernoulli, schéma de Bernoulli et loi binomiale, lois uniformes discrètes	Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, une loi binomiale. Déterminer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal. Dans le cas où X suit une loi binomiale, calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, les probabilités des événements du type $P(X=k)$ ou $P(X \leqslant k)$, etc.

2. Intention des auteurs

Dans ce thème « Expériences répétées, échantillonnage », on illustre le modèle probabiliste de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes et en particulier la notion de schéma de Bernoulli. On dégage alors deux lois discrètes usuelles : la loi de Bernoulli associée à la notion d'épreuve de Bernoulli et la loi binomiale, loi du nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. On développe ensuite quelques applications aux statistiques inférentielles : l'échantillonnage où il s'agit de quantifier l'étendue des fluctuations d'échantillonnage (notion d'intervalle de fluctuation), ses applications pour construire un test statistique bilatéral pour une fréquence et, dans une moindre mesure, la notion d'estimation par intervalle de confiance (à partir de la connaissance et de l'observation d'un échantillon, induire des propriétés de la population dont il est issu) dans le cadre des sondages par échantillonnage aléatoire simple. La loi géométrique, loi du rang du premier succès dans une répétition d'épreuve de Bernoulli fait l'objet du prochain thème consacré aux temps d'attente.

Les simulations prennent une part importante dans ce thème. La loi uniforme sur $[0;1[$ est mise à contribution pour simuler des tirages de boules dans une urne, des lancers de dés équilibrés (la loi uniforme discrète prend alors ici tout son intérêt) ou truqués et pour simuler des répétitions d'épreuves de Bernoulli et ainsi la réalisation de variables aléatoires de lois binomiales. L'outil tableur et la réalisation de scripts Python sont les outils privilégiés pour mettre en œuvre ces simulations. Comme l'indique le programme, la démarche algorithmique dans des contextes variés est fortement sollicitée dans ce thème (par exemple : calcul des coefficients binomiaux, de probabilités mettant en jeu une loi binomiale, des bornes d'un intervalle de fluctuation…).

Pour assurer un suivi efficace de l'ensemble des élèves et répondre aux attentes de chacun suivant leur profil et leur poursuite d'étude, l'enseignant trouvera un nombre conséquent d'exercices variés et progressifs, balisés par les capacités et contenus développés dans le thème. Pour la plupart, on a veillé à ce que ces exercices soient contextualisés.

Enfin, conformément à l'esprit du programme de l'option « mathématiques complémentaires », on s'est attaché à illustrer l'ensemble de ces notions à travers des thèmes d'étude variés mobilisant d'autres disciplines et les compétences de modélisation : applications en santé publique, dans le domaine juridique, dans des domaines scientifiques (radioactivité), en sociologie (étude des biais relatifs à la sincérité des réponses lors d'un sondage)…

Partir d'un bon pied

A **1.** d **2.** a **3.** b et d **4.** b
5. c **6.** a et e **7.** b **8.** a et c

B **1.** Vrai, car la somme des probabilités vaut 1.
2. Vrai, car :
$E(X)=-5\times0{,}4-2\times0{,}05+3\times0{,}2+6\times0{,}1=-0{,}9$
3. Faux, mais $P(X<0)=0{,}45$.
4. Faux, $\sigma(X)\approx3{,}8$.
5. Faux, mais $P(X\geqslant-2)=1-P(X=-5)$.
6. Faux, $E(Y)=3E(X)+2=-0{,}7$.

C **1.** X prend les valeurs 5, 15, 35 et –5.
2.

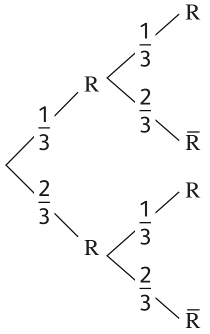
x_i	5	15	35	–5
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{400}$	$\frac{40}{400}$	$\frac{15}{400}$	$\frac{325}{400}$

3. $P(X\geqslant15)=\frac{55}{400}=\frac{11}{80}$: la probabilité de gagner plus de 15 € est de $\frac{11}{80}$.

$P(X<30)=\frac{385}{400}=\frac{77}{80}$: la probabilité de gagner moins de 30 € est de $\frac{77}{80}$.

4. $E(X)=\dfrac{5\times20+15\times40+35\times15-5\times325}{400}=-1$: en moyenne, le joueur perd 1 €.

D 1. a. R : « le joueur réussit »



x_i	-6	2	10
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

b. $E(X)=\dfrac{-6\times4+2\times4+10}{9}=\dfrac{-2}{3}$

c. En moyenne l'équipe perdra 40 s.

2.

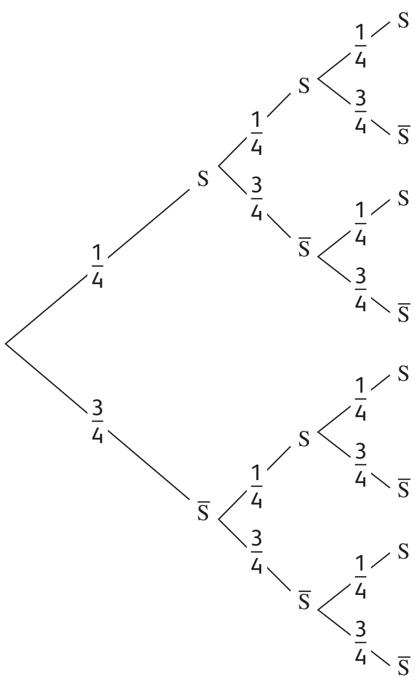
x_i	-9	-1	7	15
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$E(X)=-1$

activités en situation...

Consolider les bases

2 S : « Bastien regarde correctement »



a. La probabilité que Bastien donne trois réponses exactes est égale à : $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{1}{64}$.

b. La probabilité que Bastien donne trois réponses inexactes est égale à : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$.

c. La probabilité que Bastien donne une réponse exacte et deux réponses inexactes est égale à : $3\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{27}{64}$.

2

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$E(X)=\dfrac{48}{64}=0{,}75$

3

y_i	-3	0	3	6
$P(Y=y_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$E(Y)=\dfrac{-48}{64}=-0{,}75$: dans ce cas, la note finale moyenne est négative !

Autre méthode : on a $Y=2X-(3-X)=3X-3$ d'où $E(Y)=3E(X)-3=3\times0{,}75-3=-0{,}75$.

Situation 1 Chemins à Manhattan…

1 a. On peut lister tous les chemins de R à B : NNEE, NENE, NEEN, ENEN, ENNE, EENN soit 6 chemins.
De R à T : EEEN, EENE, ENEE, NEEE soit 4 chemins.

b. Le dernier point avant F est forcément B ou T, on a alors $6+4=10$ chemins au total qui vont de R à F.

2 a. $\dbinom{4}{2}=6$

b. $\dbinom{4}{3}=4$ et $\dbinom{5}{3}=10$

$\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}=\dbinom{5}{3}$

3 On peut, pour chaque point du quadrillage, dénombrer les chemins qui mènent du point d'origine R à ce point en exploitant la relation de Pascal mise en évidence dans les questions précédentes. On peut alors déduire, de proche en proche, le nombre de chemins qui mènent de R à I : on obtient alors le coefficient $\dbinom{13}{6}$ qui vaut 1 716.

Situation 2 Tirages successifs dans une urne

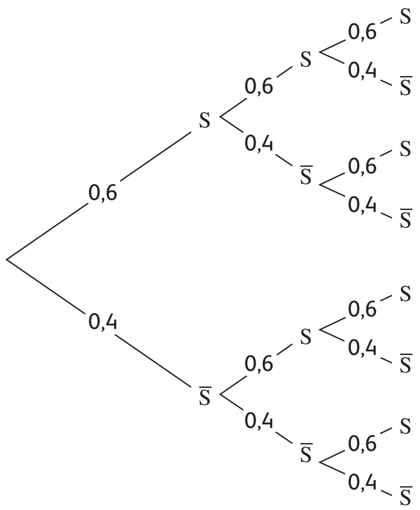
1 S correspond à l'événement « tirer une boule rouge », avec une probabilité de 0,6.

2 a. et b.

```
from random import*

def epreuve():
    if random()<0.6:
        return 'succes'
    else:
        return 'echec'

def schema():
    nb_succes=0
    for i in range(4):
        if epreuve()=='succes':
            nb_succes=nb_succes+1
    return nb_succes


def repetition_schema(n):
    frequences=[0,0,0,0,0]
    for i in range(n):
        nb_succes=schema()
        frequences[nb_succes]=frequences[nb_succes]+1
    return [x/n for x in frequences]
```

c. On observe que la fréquence de 2 Succès ou 3 Succès parmi 5 est la plus élevée (environ 0,34 chacune, selon les simulations de 10 000 expériences).

3 **a.**



$P(X=0)=0{,}4^4=0{,}0256$

$P(X=4)=0{,}6^4=0{,}1296$

b. 4 chemins d'où :

$P(X=1)=0{,}6\times0{,}4^3\times4=0{,}15363$

$P(X=3)=0{,}4\times0{,}6^3\times4=0{,}3456$

c. $\binom{4}{2}=6$ chemins de probabilité $0{,}4^2\times0{,}6^2$

$P(X=2)=6\times0{,}4^2\times0{,}6^2=0{,}3456$

d. Ces résultats sont conformes avec les simulations.

Situation 3 **Vous avez dit truquée ?**

1 On peut lancer un grand nombre de fois la pièce et comparer les fréquences de Pile et Face par rapport à la répartition « normale » de 0,5 chacune. Plus l'échantillon est grand, plus les fréquences empiriques se rapprochent des probabilités théoriques en vertu de la loi des grands nombres.

2 À l'aide d'un tableur, on peut déterminer les fréquences d'apparition de Pile et Face pour chacune des deux pièces (à l'aide de la fonction NB.SI pour effectuer le décompte). On obtient alors les résultats suivants :

	A	B	C	D	E	F
1	piece 1	piece 2				
2	P	F	Effectifs	Piles	Faces	Total
3	P	P	Piece 1	2467	2533	5000
4	P	P	Piece 2	2953	2047	5000
5	P	F				
6	F	P	Fréquences	Piles	Faces	Total
7	F	P	Piece 1	0,4934	0,5066	1
8	P	F	Piece 2	0,5906	0,4094	1
9	F	P				
10	F	F				

On note que les fréquences d'apparition de Pile/Face observées pour la Pièce 1 sont proches de 0,5 tandis que pour la Pièce 2, ces fréquences sont éloignées de la répartition 0,5/0,5. Pour un nombre aussi élevé de lancers (ici $n=5\,000$ lancers), les fluctuations d'échantillonnage à elles seules ne peuvent expliquer de tels écarts si la Pièce 2 se révélait équilibrée. Ainsi, on peut affirmer avec conviction que la pièce truquée est la Pièce 2.

Méthode

CAPACITÉ 1 Identifier des situations : loi uniforme, loi de Bernoulli

1 **Situation 1 :** X prend toutes les valeurs entières de 1 à 50, avec la même probabilité donc loi uniforme discrète sur $[\![1;50]\!]$.

R vaut 0 avec une probabilité de 0,5 et de même pour 1, elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre 0,5.

Situation 2 : N vaut 1 avec une probabilité 0,5 ; 0 sinon ; elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre 0,5.

Y prend toutes les valeurs entre 1 et 43 mais pas avec la même probabilité, par exemple l'as de trèfle donne 11, comme la dame de pique. Elle ne suit ni une loi uniforme, ni une loi de Bernoulli.

2 • On choisit au hasard une carte dans un jeu de 54 cartes. La variable aléatoire T, qui prend la valeur 1 si la carte choisie est une tête et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli.

• On choisit au hasard un élève dans une classe de Terminale. La variable aléatoire F, qui prend la valeur 1 si l'élève a fait son travail et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli.

CAPACITÉ 2 Déterminer des coefficients binomiaux, triangle de Pascal

3 $\binom{10}{1}=10$; $\binom{10}{9}=10$; $\binom{2020}{0}=1$; $\binom{2020}{2019}=2020$

4 En continuant le triangle de Pascal, on trouve :

$$\binom{10}{7}=120 \text{ et } \binom{10}{8}=45$$

Par symétrie des coefficients :

$\binom{10}{7}=\binom{10}{10-7}=\binom{10}{3}=120$;

$\binom{10}{8}=\binom{10}{10-8}=\binom{10}{2}=45.$

Par propriété additive des coefficients :

$$\binom{10}{7}+\binom{10}{8}=\binom{11}{8}=165$$

Par symétrie : $\binom{11}{8}=\binom{11}{11-8}=\binom{11}{3}=165.$

5 $\binom{25}{14}=4\,457\,400=\binom{25}{11}$

6 $1+5+10+10+5+1=32$ (2^5)

CAPACITÉ 3 Calculer des probabilités dans le cadre d'une loi binomiale

7 **1. a.** $\mathcal{B}(10;0{,}25)$ **b.** $P(X=2)\simeq0{,}282$

c. Graphiquement, on lit $P(X\leqslant2)\simeq$ 0,55.

d. Graphiquement, on lit $P(X=9)\simeq$ 0.

2. On a, d'après la calculatrice, $P(X\leqslant2)\simeq0{,}52559$ et $P(X=9)\simeq$ 0,00003.

8 Soit R la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées par Raphaël ; R suit la loi $\mathscr{B}\left(5\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

1. On cherche :

$$P(R \geqslant 1) = 1 - P(R = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243} \approx 0{,}867$$

2. On calcule $E(X) = 5 \times \dfrac{1}{3} \approx 1{,}67$. Raphaël gagnera entre 1 et 2 parties.

CAPACITÉ 4 Déterminer un intervalle de fluctuation et prendre une décision

9 Pour déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 99 % pour la fréquence, on considère une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathscr{B}(250\,;0{,}92)$.

Un tel intervalle de fluctuation s'écrit $\left[\dfrac{k_1}{250}\,;\dfrac{k_2}{250}\right]$ où k_1 et k_2 sont les plus petits entiers tels que $P(X \leqslant k_1) > 0{,}005$ et $P(X \leqslant k_2) \geqslant 0{,}095$.

À la calculatrice on obtient $k_1 = 218$ et $k_2 = 240$ donc un tel intervalle de fluctuation est $\mathrm{I} = \left[\dfrac{218}{250}\,;\dfrac{240}{250}\right]$. Or $f_{\text{obs}} = \dfrac{225}{250} \in \mathrm{I}$ donc, au seuil de 99 %, on ne rejette pas l'hypothèse.

10 **1. a.** C suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100\,;p)$.

b. On calcule $f_{\text{obs}} = \dfrac{4}{100}$, donc l'intervalle de confiance au seuil de 95 % de p est :

$$\mathrm{I}_C = \left[\frac{4}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}}\,;\frac{4}{100} + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [-0{,}06 : 0{,}14]$$

c. On a donc $p \in [0\,;0{,}14]$, si C suit la loi $\mathscr{B}(100\,;0)$, $E(C) = 0$; si C suit la loi $\mathscr{B}(100\,;0{,}14)$, $E(C) = 14$.

Elle peut donc espérer trouver de 0 à 14 crevettes !

2. On cherche à valider l'affirmation : « le sachet contient 5 % de crevettes ».

En utilisant un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

C suit la loi $\mathscr{B}(100\,;0{,}05)$; $\mathrm{I}_F = \left[\dfrac{2}{100}\,;\dfrac{10}{100}\right]$, comme $\dfrac{4}{100} \in \mathrm{I}_F$ on accepte l'affirmation.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b **2.** a **3.** b **4.** a et c
5. a et c **6.** b **7.** b **8.** b **9.** a

vrai ou faux ?

Partie A. **1.** Vrai **2.** Faux

Partie B. **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Faux

Partie C. **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Faux

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

11 **1.** 2^{-2} **2.** 3^6 **3.** 10^2

12 **1.** $15x = 10$ si et seulement si $x = \dfrac{2}{3}$; $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

2. $2x^2 - 4x - 6 = 0$: $\Delta = 64$ donc 2 racines ; $S = \{-1\,;3\}$.

3. $2x - 1 = 0$ ou $x^2 + 6x + 9 = 0$ si et seulement si $x = 0{,}5$ ou $(x+3)^2 = 0$; $S = \{-3\,;0{,}5\}$.

4. $3x - 1 = -x$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{4}$: $S = \{0{,}25\}$.

5. $\ln(2x+7) = 0$ si et seulement si $2x + 7 = 1$ donc $S = \{-3\}$.

13 **1.** $f'(x) = -9x^2 - 4x$

2. $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x^2} + x \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}(1 - 2x^2)$

3. $h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x+1) - \mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$

4. $i'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x + 2x + 1}$

14 **1.** $A(x)$ est du signe de $2x - 1$ car $x^2 + 3 > 0$ donc négative sur $]-\infty\,;0{,}5]$ et positive sur $[0{,}5\,;+\infty[$.

2. $B(x)$ est du signe de $x + 3$ car $\mathrm{e}^{-5x} > 0$ donc négative sur $]-\infty\,;-3]$ et positive sur $[-3\,;+\infty[$.

3.

x	1		3		$+\infty$
$3x^2 - 27$	||	$-$	0	$+$	
$x^2 - 1$	||	$+$	|	$+$	
$C(x)$	||	$-$	0	$+$	

4. Puisque $\ln a \geqslant 0$ si et seulement si $a \geqslant 1$, $D(x)$ est positive si et seulement si $2x + 4 \geqslant 1$ si et seulement si $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$ et donc négative si et seulement si $x \in \left]-2\,;\dfrac{-3}{2}\right]$.

15 **1.** $\left[\dfrac{x^3}{3} + 3x\right]_0^3 = 18$ **2.** $\left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$

3. $\left[\dfrac{\ln x}{3}\right]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{3}$

16 **1.** $u_n = -2 \times 3^n$ **2.** $u_n = 8 - 5(n-1)$

17 **1.** $+\infty$ car n^2 tend vers $+\infty$.

2. 0 car $0{,}2^n$ tend vers 0 (puisque $-1 < 0{,}2 < 1$).

3. $-\infty$ car 3^n tend vers $+\infty$ (puisque $3 > 1$).

4. $\dfrac{4}{3}$ car $0{,}2^n$ tend vers 0 (puisque $-1 < 0{,}2 < 1$).

18 **1.** $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}95}$ donc $S = [32\,;+\infty[$.

2. $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}75}$ donc $S = [17\,;+\infty[$.

3. $n \geqslant \dfrac{\ln 2{,}1}{\ln 1{,}05}$ donc $S = [16\,;+\infty[$.

4. $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}4}$ donc $S = [8\,;+\infty[$.

Automatismes du thème

19 **1.** $E(X)=\dfrac{2+10}{2}=6$
2. $E(X)=0{,}3$; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}\approx 0{,}458$
3. $E(x)=10\times 0{,}2=2$; $\sigma(X)=\sqrt{10\times 0{,}2\times 0{,}8}\approx 1{,}265$

20 **1.** $\binom{7}{2}=\binom{7}{5}$ **2.** $\binom{7}{7}=1$ **3.** $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}$

21
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

22 **1.** 1 **2.** 200 **3.** 1
4. 25 **5.** 1

23 **1.** $\binom{5}{2}$ **2.** $\binom{10}{2}$ **3.** $\binom{15}{9}$
4. $\binom{100}{25}$ **5.** $\binom{200}{100}$

24 **1.** 10 **2.** 6 **3.** 15
4. 35 **5.** 21

25 **1.** $0{,}8^6$ **2.** $6\times 0{,}2\times 0{,}8^5$
3. $1-0{,}8^6$ **4.** $1-0{,}2^6$

26 Au millième :
1. 0,114 **2.** 0,416 **3.** 0,584
4. 0,999 **5.** 0,017 **6.** 0,582

exercices Application

Consolider les bases

27 **1.** Vrai, car $p+p^2=1-(0{,}1+0{,}2+0{,}14)$.
2. Vrai, dans ce cas $p^2=0{,}16$ et $p=0{,}4$.
3. Faux, c'est 0,14.
4. Vrai, car $1-(0{,}2+0{,}14)=0{,}66$.
5. Faux, c'est $-0{,}08$.
6. Vrai

28 **1.** b et d **2.** d **3.** a

29 **1.**

x_i	0	-2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=\dfrac{-1}{6}$ donc le jeu n'est pas favorable au joueur.

3. Si p est ce gain, on doit avoir $-2\times\dfrac{1}{2}+p\times\dfrac{1}{6}=0$ d'où $p=6$ (avec mise remboursée).

Connaître le cours

30 **Diaporama QCM**
1. a et c **2.** b, d et e **3.** b, c et d **4.** a, c et e
5. b, c et d **6.** b **7.** d et e **8.** a et c **9.** a et c
10. a, d et e **11.** b

31 **1.** X suit une loi uniforme discrète, pour tout $k\in[\![5;20]\!]$, $P(X=k)=\dfrac{1}{16}$ et $E(X)=12{,}5$.
2. Non, car la somme 4 par exemple a plus de chances de sortir que la somme 2.
3. Non, car il n'y a pas les nombres de 2 à 6 dans l'intervalle $[\![1;10]\!]$.

32 **1.** Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à 2 issues.
2. a. S : « la carte est rouge » ; $P(S)=0{,}5$.
b. S : « la face obtenue est 1 » ; $P(S)=0{,}25$.
c. S : « la somme des 2 faces est 2 » ; $P(S)=\dfrac{1}{36}$.
d. S : « la boule est noire » ; $P(S)=0{,}4$.

33 **1.** $0{,}3^2\times 0{,}7$ **2.** 3 chemins
3. $P(X=2)=3\times 0{,}3^2\times 0{,}7=0{,}189$
$P(X=1)=3\times 0{,}3\times 0{,}7^2=0{,}441$

34 **1.** $\binom{n}{n-k}$ **2.** $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$
3. $\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$
$E(X)=np$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Travailler les capacités du thème

35 **1.** Réponse b, car X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1;100]\!]$ et son espérance est $\dfrac{1+100}{2}=50{,}5$.
2. Réponses a et c. X suit une loi de Bernoulli avec $P(X=1)=\dfrac{1}{4}$. Son espérance vaut $\dfrac{1}{4}$ et son écart type $\sqrt{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

36 **1.** L'épreuve de Bernoulli consiste à lancer le dé et son Succès est « obtenir un non multiple de 3 ». La variable aléatoire X associée suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{2}{3}$.
2. X ne suit ni une loi uniforme ni une loi de Bernoulli. En effet, $X(\Omega)=\{2;4;6;8\}$.
3. L'épreuve de Bernoulli consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés et son Succès est « ne pas obtenir un double ». La variable aléatoire X associée suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{5}{6}$.
4. X suit une loi uniforme discrète sur $[\![1;21]\!]$.
5. L'épreuve de Bernoulli consiste à tirer une carte au hasard dans un jeu de tarot. On appelle Succès l'événement « obtenir un atout ». La variable aléatoire X associée suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{21}{78}$.

37 **1.** Une situation possible est : Pour qu'une partie de jeu en ligne commence, il faut que le nombre de joueurs soit compris entre 3 et 21. Le serveur informatique choisi de façon aléatoire le nombre de joueurs.
La variable aléatoire X donnant le nombre de joueurs dans une partie suit donc la loi uniforme dans $[\![3\,;21]\!]$.

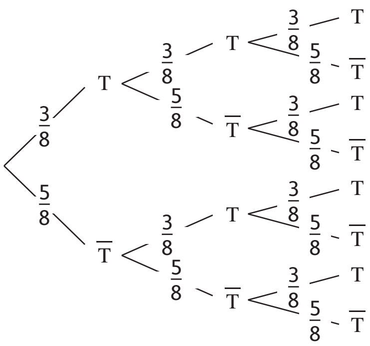
2. X suit la loi uniforme de paramètre $\dfrac{1}{21-3+1}=\dfrac{1}{19}$; et $E(X)=\dfrac{3+21}{2}=12$.

38 Oui, cette expérience aléatoire peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli de Succès S : « l'athlète atteint la cible » de probabilité $p=0{,}97$.

39 **1.** Faux, il y a 4 épreuves.
2. Vrai, le chemin $\mathrm{E}-\mathrm{E}-\mathrm{E}-\mathrm{E}$.
3. Vrai, 1 Échec à placer parmi 4.
4. Vrai, $\dbinom{4}{2}=6$.

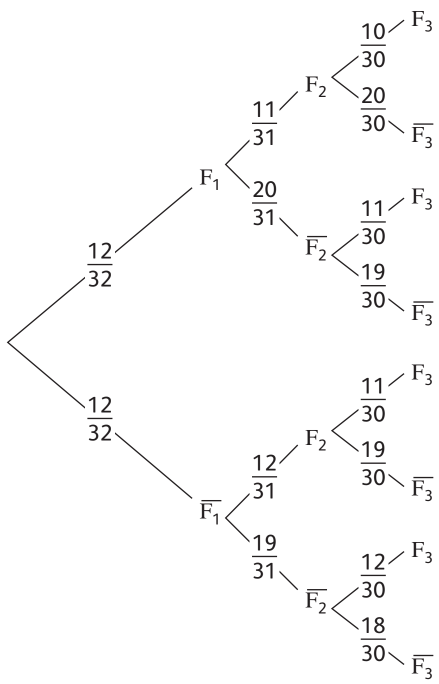
40 **1.** c et d **2.** b, c et d **3.** b, c et d

41 **1.** À chaque tirage, le jeu contient $4\times3=12$ têtes parmi les 32 cartes. La probabilité d'obtenir une tête est donc $p=\dfrac{12}{32}=\dfrac{3}{8}$.
Soit T l'événement : « la carte choisie est une tête ».



2. Chaque tirage ne comporte que deux issues : la carte est une tête (Succès) ou la carte n'est pas une tête (Échec). À chaque tirage, les probabilités restent les mêmes et les épreuves sont indépendantes : il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p=\dfrac{3}{8}$.
3. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de têtes à l'issue des trois tirages.
$P(X=2)=\dbinom{3}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^2\times\left(\dfrac{5}{8}\right)^{3-2}=3\times\dfrac{3^2}{8^2}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{135}{512}\approx0{,}26$

42 **1.**



2. Non, il ne s'agit pas d'un schéma de Bernoulli car les conditions de l'épreuve changent à chaque nouveau tirage.
3. $\dfrac{12}{32}\times\dfrac{11}{31}\times\dfrac{20}{30}+\dfrac{12}{32}\times\dfrac{20}{31}\times\dfrac{11}{30}+\dfrac{20}{32}\times\dfrac{12}{31}\times\dfrac{11}{30}=\dfrac{11}{124}$

43 **1.** $\dbinom{4}{1}=4$ car $\dbinom{n}{1}=n$
2. $\dbinom{10}{9}=10$ car $\dbinom{n}{n-1}=n$
3. $\dbinom{15}{1}=15$ car $\dbinom{n}{1}=n$
4. $\dbinom{30}{0}=1$ car $\dbinom{n}{0}=1$ **5.** $\dbinom{20}{20}=1$ car $\dbinom{n}{n}=1$

44 **1.** 31 824 **2.** 43 758
3. 75 582 **4.** 75 582

45 **1.** 455 **2.** 153
3. 184 756 **4.** 145 422 675

46 **1.** a et d **2.** c **3.** c

47 **1.** a **2.** a et b **3.** a et c

48 Au millième :
1. 0,130 **2.** 0,772
3. 0,048 **4.** 0,762

49 Oui, paramètres $n=20$ et $p=0{,}47$.

50 Non, les conditions successives changent.

51 Oui, paramètres $n=6$ et $p=0{,}25$.

52 **1.** Chaque ordinateur tombe en panne indépendamment des autres ; la probabilité d'une panne est la même pour chaque ordinateur : c'est donc une expérience de Bernoulli.
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}05$ (le Succès est l'ordinateur tombe en panne).
2. a. Au moins un ordinateur… :
$$P(X\geqslant1)=1-P(X=0)\approx0{,}64$$
b. Exactement 5 ordinateurs… : $P(X=5)\approx0{,}002$.
c. Au plus 7 ordinateurs… : $P(X\leqslant7)\approx1$.
3. $E(X)=20\times0{,}05=1$; en moyenne, il y a aura un ordinateur qui tombera en panne durant la période de garantie.

53 **1.** X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\,;0{,}6)$.
2. a. $P(X=1)=8\times0{,}6^1\times0{,}4^7\approx0{,}008$
b. $P(X=3)=\dbinom{8}{3}\times0{,}6^3\times0{,}4^5\approx0{,}124$
c. $P(X\geqslant1)=1-P(X=0)\simeq0{,}992$
d. $P(X\leqslant4)\approx0{,}406$
3. $(X)=8\times0{,}6=4{,}8$, c'est le nombre moyen de cafés vendus pour les 8 clients.

54 **1.** On répète dans les mêmes conditions et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,54 ; Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(12\,;0{,}54)$.
2. Il s'agit de $P(Y=3)$.

3. a. $P(Y=5)=\binom{12}{5}\times 0{,}54^5\times 0{,}46^7\approx 0{,}158$; c'est la probabilité d'obtenir 5 personnes parmi les 12 qui ont ce comportement.
b. $P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-0{,}46^{12}\approx 0{,}99991$
c. $P(Y\geqslant 6)\approx 0{,}716$ au millième.

55 **1.** Vrai
2. Faux, c'est 7.
3. Vrai, car valeurs arrondies par défaut.
4. Vrai

56 On peut étudier la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(200\,;0{,}5)$ et déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence à 95 % ; on obtient $P(86\leqslant X\leqslant 114)\geqslant 0{,}95$ et un intervalle de fluctuation de la fréquence est donc $\mathrm{I}=\left[\frac{86}{200};\frac{114}{200}\right]=[0{,}43\,;0{,}57]$.

On a $f_{\text{obs}}=\frac{123}{200}=0{,}615\notin\mathrm{I}$ donc on rejette l'hypothèse d'être en présence d'une pièce équilibrée.

57 Ici, l'intervalle de fluctuation de la variable X est $\mathrm{I}_X=[k_1\,;k_2]$ tel que $P(X\leqslant k_1)>\frac{0{,}05}{2}$ et $P(X\leqslant k_2)\geqslant 1-\frac{0{,}05}{2}$.
À l'aide du graphique : $k_1=3$ et $k_2=13$, donc $\mathrm{I}_X=[\![3\,;13]\!]$.

L'intervalle de fluctuation de la fréquence $F=\frac{X}{14}$ est donc $\mathrm{I}_F=\left[\frac{1}{14};\frac{13}{14}\right]$.

58 **1.** $f_{\text{obs}}=\frac{947}{1000}$
2. a. $a=959$ et $b=980$.
b. $\mathrm{I}=[0{,}959\,;0{,}98]$
3. $f_{\text{obs}}=0{,}947\notin\mathrm{I}$ donc on peut effectivement remettre en cause les réglages.

exercices Entraînement

1 Loi uniforme discrète

59 **1.**

```
from random import random

def de_tetraedique():
    x=random()
    if x<0.25:
        return 1
    elif x<0.5:
        return 2
    elif x<0.75:
        return 3
    else:
        return 4
```

2. a. Les valeurs retournées peuvent vairées dans l'intervalle $[0\,;4[$.
b. int(4*random()) est alors dans $[\![0\,;3]\!]$ et int(4*random())+1 dans $[\![1;4]\!]$.

c.et 3.

```
def de_tetraedique_bis():
    return int(4*random())+1

def de_cubique():
    return int(6*random())+1
```

60 **1.** et **2.**

```
#### 4000 lancers d'un dé tétrédrique équilibré
dice = [0]*4
for _ in range(4000):
    face = randrange(1, 5)
    dice[face - 1] += 1
print(dice)

#### 1000 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée
piece = [0]*2
for _ in range(1000):
    face = randrange(1, 3)
    piece[face - 1] += 1
print(piece)
```

3.

```
#### 2000 tirages d'une des cartes as,2,3,...,dame,roi
#### parmi les 14 cartes de coeurs possibles
jeu_carte = [0]*14
for _ in range(2000):
    face = randrange(1, 15)
    jeu_carte[face - 1] += 1
print(jeu_carte)
```

61 **1.** B suit une loi uniforme discrète sur $[\![2\,;5]\!]$.
2. Non, D prend des valeurs entre –16 et 17 mais plusieurs valeurs ne sont pas atteintes (2 par exemple).

b \ c	2	3	4	5
2	–4	–8	–12	–16
3	1	–3	–7	–11
4	8	4	0	–4
5	17	13	9	5

3. S suit la loi uniforme discrète sur $[\![0\,;1]\!]$ (dans 8 cas sur 16, $\Delta=b^2-4c$ est positif ou nul) ou encore une loi de Bernoulli de paramètre $p=0{,}5$ (il s'agit de la même loi !).

2 Épreuve et loi de Bernoulli

3 Schéma de Bernoulli

62 **1.** On répète 40 fois la même expérience de Bernoulli donc on obtient un schéma de Bernoulli avec $n=40$ et $p=0{,}5$.

2. a. 35 bonnes réponses parmi 40 : $\binom{40}{35}=658\,008$.
b. Au plus 5 fautes :
$$\binom{40}{0}+\binom{40}{1}+\binom{40}{2}+\binom{40}{3}+\binom{40}{4}=102\,091$$
c. Au moins 38 bonnes réponses :
$$\binom{40}{38}+\binom{40}{39}+\binom{40}{40}=821$$
3. a. Le nombre de chemins avec 10 succès parmi les 40 réponses ou le nombre de chemins avec 30 fautes parmi les 40 réponses.
b. Le nombre de chemins avec 1, 2 ou 3 bonnes réponses parmi les 40 réponses (ou le nombre de chemins avec 1, 2 ou 3 erreurs parmi les 40 réponses).

63 Soit F la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face 1 est sortie à l'issue des cinq lancers de dés. On peut imaginer la situation avec un arbre pondéré de 5 niveaux, la probabilité du Succès (celle de F) est $p=\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois le 1 est donc :

$$P(F \geqslant 1)=1-P(F=0)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}598$$

Soit A la variable aléatoire donnant le nombre de fois où on tire un As à l'issue des sept tirages. On peut imaginer la situation avec un arbre pondéré de 7 niveaux, la probabilité du Succès (celle de A) est $p=\frac{1}{8}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois un As est donc :

$$P(A \geqslant 1)=1-P(A=0)=1-\left(\frac{7}{8}\right)^7 \approx 0{,}607$$

Il vaut mieux choisir le jeu de cartes pour augmenter les chances de gagner.

64 **1. a.** ALEA() retourne au hasard un nombre réel de l'intervalle $[0;1[$, ce nombre appartient à l'intervalle $[0;0{,}5]$ avec une probabilité de 0,5 ce qui équivaut à simuler G ou D de manière équiprobable.

b. =NB.SI(B2:E2;»D»)

c. Voir fichier tableur corrigé.

I3 =NB.SI($F:$F;I2)/MAX($A:$A)

Simulation	Clou n°1	Clou n°2	Clou n°3	Clou n°4	Case arrivée
1	G	D	D	G	2
2	G	G	D	G	1
3	G	D	D	G	2
4	D	D	G	D	3
5	G	D	D	G	2
6	G	G	D	D	2
7	G	G	D	D	2
8	D	G	G	G	1
9	D	G	D	D	3
10	D	D	D	D	4
11	D	D	G	D	3
12	D	G	D	D	3
13	G	D	D	D	3
14	D	G	G	D	2

Nbre simulations :	10000				
Case arrivée	0	1	2	3	4	Total
Fréquence	0,0629	0,2552	0,3696	0,2494	0,0629	1

d. Voir fichier tableur corrigé.

1000 simulations					
arrivée	0	1	2	3	4
fréquence	0,066	0,25	0,373	0,248	0,063

10000 simulations					
arrivée	0	1	2	3	4
fréquence	0,0658	0,2515	0,3727	0,2486	0,0614

2. a. Une épreuve de Bernoulli avec $p=0{,}5$ correspondant à G/D est répétée 4 fois dans les mêmes conditions, il s'agit d'un schéma de Bernoulli avec $n=4$.

b. Pour la case 0, le seul chemin est GGGG avec une probabilité de $0{,}5^4=0{,}0625$. Pour la case 4, le seul chemin est DDDD avec la même probabilité.

c. Pour la case 2, il faut placer 2G parmi les 4 déplacements soit $\binom{4}{2}=6$ chemins, pour une probabilité de $6\times0{,}5^2\times0{,}5^2=0{,}375$.

d. Par symétrie on va trouver la même probabilité :

$$\binom{4}{1}\times0{,}5\times0{,}5^3=0{,}25$$

65 **1.**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

2. a. $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!1!}=\frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}=3$

$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\times4\times3\times2}{3\times2\times2}=10$

b. Ces résultats coïncident bien avec le triangle de Pascal.

3. a. $n!=n\times(n-1)!$

b. et **c.** Cf. fichier

```
def facto(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n * facto(n - 1)

def coeff(n, p):
    return facto(n)/(facto(n-p) * facto(p))
```

4 Loi binomiale

66 **1.** On répète 10 fois de manière indépendante une expérience aléatoire (tirer un pénalty) de probabilité $p=0{,}7$; la variable qui compte le nombre de buts marqués (=Succès) suit alors une loi $\mathcal{B}(10;0{,}7)$.

2. a. $P(X=3)=\binom{10}{3}\times0{,}7^3\times0{,}3^7\approx0{,}009$

b. $P(X=0)=0{,}3^{10}\approx6\times10^{-6}$

c. $P(X\geqslant1)=1-P(X=0)\approx0{,}999994$

d. $P(X\leqslant6)\approx0{,}3504$ à la calculatrice

3. $E(X)=10\times0{,}7=7$, il réussit en moyenne 7 pénaltys sur 10 tirs.

67 **1.** On répète 15 fois de manière indépendante une expérience aléatoire de probabilité $p=0{,}23$; la variable qui compte le nombre de personnes qui consultent leur portable avant de s'endormir (= Succès) suit alors une loi $\mathcal{B}(15;0{,}23)$.

2. $P(X=4)\approx0{,}215$: c'est la probabilité d'avoir 4 réponses positives sur les 15.

$P(X\leqslant5)\approx0{,}892$: la probabilité qu'au moins 5 personnes répondent positivement.

3. $P(X\geqslant1)\approx0{,}98$

4. $E(X)=15\times0{,}23=3{,}45$: en moyenne 3,45 personnes interrogées sur les 15 consultent leur portable.

68 Graphique ① : $\mathcal{B}(10;0{,}4)$ Graphique ② : $\mathcal{B}(15;0{,}6)$
Graphique ③ : $\mathcal{B}(20;0{,}4)$ Graphique ④ : $\mathcal{B}(20;0{,}8)$

69 On peut considérer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli avec 22 épreuves indépendantes, S : « le copropriétaire est présent » aura une probabilité de 0,8. Si on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de Succès, on a $P(X\geqslant11)\approx0{,}9997$.

70 La probabilité de tirer une boule blanche est de 0,01 à chaque tirage. On désigne par S : « la boule tirée est blanche ». On répète n fois l'expérience et on obtient un schéma de Bernoulli. Soit X le nombre de boules blanches tirées après n tirages.

$$P(X\geqslant1)=1-P(X=0)=1-0{,}99^n$$

$1-0{,}99^n\geqslant0{,}95$ si et seulement si $0{,}99^n\leqslant0{,}05$ si et seulement si $n\geqslant\frac{\ln0{,}05}{\ln0{,}99}$: le premier entier qui convient est 299.

71 **1.** Q suit une loi $\mathcal{B}\left(4;\dfrac{1}{6}\right)$.

$$P(Q\geqslant 1)=1-P(Q=0)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}518$$

2. Soit H la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 en 8 lancers ; elle suit la loi $\mathcal{B}\left(8;\dfrac{1}{6}\right)$.

$$P(H\geqslant 2)\approx 0{,}395$$

3. Aucune n'a raison, on a plus de chance d'obtenir un 6 en 4 lancers.

72 **1. a.** D suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100\,000\,;0{,}0007)$.

b. L'espérance mathématique de D est égale à 70. Or 100 000 pièces sont contrôlées et donc, en moyenne, 70 pièces nécessitent une refonte ce qui fait un coût total de 10 070 €.

2. a. Chaque jour, 5 000 lots sont produits. La probabilité qu'une pièce d'un lot de 20 soit défectueuse correspond à reprendre D avec $n=20$. $P(D\geqslant 1)\approx 0{,}01391$.

On considère alors que X suit $\mathcal{B}(5\,000\,;0{,}01391)$.

b. 5 000 lots contrôlés à 0,25 € et en moyenne 69,55 soient 70 refontes soit 1 950 €. L'économie est de plus de 8 120 € par jour.

73 **1. a.** X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}25)$.

b. $E(X)=20\times 0{,}25=5$

c. L'énoncé précise que le candidat répond à chaque question : la réponse donnée est soit juste (1 point) soit fausse (–0,25 point). Pour obtenir la moyenne il faut au moins 12 réponses correctes : $P(X\geqslant 12)=0{,}001$.

2. a. $N=1\times X-0{,}25\times(20-X)=1{,}25X-5$ car le candidat répond à chaque question.

b. $E(N)=1{,}25E(X)-5=1{,}25$ (linéarité de la moyenne)

Soit f le nombre de points d'une réponse fausse :

$$E(N)=5\Leftrightarrow(1+f)E(X)-20f=0\Leftrightarrow f=0$$

74 Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de composants défectueux parmi n pièces. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}005)$.

$P(X\geqslant 1)\leqslant 10\,\%$ signifie que $1-P(X=0)\leqslant 0{,}1$ si et seulement si $1-0{,}995^n\leqslant 0{,}1$ si et seulement si $n\leqslant\dfrac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}995}$: le plus grand entier qui convient est $n=21$.

5 Échantillonnage et estimation

75 **1. a.** X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(100\,;\dfrac{1}{6}\right)$.

b. $k_1=10$ et $k_2=24$

c. $\mathrm{I}=[0{,}1\,;0{,}24]$

2. a. $f_{obs}=0{,}28\notin\mathrm{I}$ donc il ne doit pas accepter l'hypothèse

b. Il peut penser que son dé n'est pas parfaitement équilibré, mais il y a une probabilité de 5 % de le rejeter à tort.

76 **1.** X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(150\,;0{,}4)$.

2. Avec la calculatrice, on obtient $k_1=48$ et $k_2=72$ soit pour la fréquence : $\mathrm{I}=\left(\dfrac{48}{150};\dfrac{72}{150}\right)$.

3. $f_{obs}=\dfrac{50}{150}\in\mathrm{I}$ donc on peut accepter l'affirmation du maire.

77 **1. a.** Ligne 5 proba=(1-p)**n

Ligne9 : proba=binom(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)

b. Voici la fonction coeff_k1(n,p) complétée :

```
1  from scipy.special import binom
2
3  # remarque : si le module scipy n'est pas dans votre distribution
4  # définir la fonction binom à l'aide du l'exercice 65 de ce chapitre.
5
6  def coeff_k1(n,p):
7      k = 0
8      proba = (1 - p)**n # = binom(n, 0) * p^0 * (1-p)^n
9      proba_cumule = proba
10     while proba_cumule <= 0.025:
11         k = k + 1
12         proba = binom(n, k) * p**k * (1 - p)**(n -k)
13         proba_cumule = proba_cumule + proba
14     return k
```

2. Fonction coeff_k2(n,p) :

```
16 def coeff_k2(n,p):
17     k = 0
18     proba = (1 - p)**n # = binom(n, 0) * p^0 * (1-p)^n
19     proba_cumule = proba
20     while proba_cumule < 0.975:
21         k = k + 1
22         proba = binom(n, k) * p**k * (1 - p)**(n -k)
23         proba_cumule = proba_cumule + proba
24     return k
```

3. Bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

```
27 def bornes_IF(n, p):
28     return coeff_k1(n, p)/n, coeff_k2(n, p)/n
```

4. Intervalle de fluctuation au seuil $1-\alpha$

```
31 def coeff_k1a(n, p, alpha):
32     k = 0
33     proba = (1 - p)**n # = binom(n, 0) * p^0 * (1-p)^n
34     proba_cumule = proba
35     while proba_cumule <= alpha / 2:
36         k = k + 1
37         proba = binom(n, k) * p**k * (1 - p)**(n -k)
38         proba_cumule = proba_cumule + proba
39     return k
40
41 def coeff_k2a(n, p, alpha):
42     k = 0
43     proba = (1 - p)**n # = binom(n, 0) * p^0 * (1-p)^n
44     proba_cumule = proba
45     while proba_cumule < (1 - alpha) / 2:
46         k = k + 1
47         proba = binom(n, k) * p**k * (1 - p)**(n -k)
48         proba_cumule = proba_cumule + proba
49     return k
```

```
51 def bornes_IFa(n, p, alpha):
52     return coeff_k1a(n, p, alpha)/n, coeff_k2a(n, p, alpha)/n
```

78 L'intervalle de fluctuation pour $p=0{,}02$ et $n=900$ donne $\mathrm{I}=\left[\dfrac{10}{900};\dfrac{27}{900}\right]$.

Comme $f_{obs}=\dfrac{21}{900}$ appartient à I, on accepte l'hypothèse que le gène a une influence.

Apprendre à modéliser

Partie A

1. a. $p=\dfrac{1}{10}$

b. et **2.**

Chiffre	0	1	2	3	4
Fréquence	0,09	0,118	0,108	0,1	0,106
Distance d_i	0,01	0,018	0,008	0	0,006
Chiffre	5	6	7	8	9
Fréquence	0,1	0,096	0,072	0,106	0,104
Distance d_i	0	0,004	0,028	0,006	0,004

d_{obs}=0,0084

Partie B

1. Pour 1 000 simulations, l'algorithme affiche les bornes $[a;b]$ de l'intervalle de fluctuation de la distance d au seuil de 95 % de confiance.

2. On obtient :

$$d_{25} = 0{,}0055999999999999998$$
$$d_{975} = 0{,}016000000000000004$$

d_{obs} appartient à cet intervalle donc il ne s'agit pas d'une valeur aberrante selon l'hypothèse formulée.

Maths en situation...

79 **1. a.** $P(S=n)=p^n$, un seul test est nécessaire.

b. C'est l'événement contraire du précédent, de probabilité $1-p^n$ donc $n+1$ tests.

2. a.

a_i	1	$n+1$
$P(A=a_i)$	p^n	$1-p^n$

b. Il y a n personnes dans l'échantillon donc la moyenne vaut :

$$\frac{1}{n}E(A)=\frac{p^n+(n+1)(1-p^n)}{n}=1-\left(p^n-\frac{1}{n}\right)$$

3. a.

```
p,pas=0.001,0.001

while p<1:
    eco_max,n_max=0,1
    for n in range(2,11):
        eco=p**n-1/n
        if eco>eco_max:
            eco_max,n_max=eco,n
    print("pour p=",p,"n_max=",n_max)
    p=p+pas
```

b.

0,694	0,877	0,935	0,959	0,972	0,980	0,985	0,988	0,990
1	3	4	5	6	7	8	9	10
0	34	51	61	67	73	76	79	81

80 **Partie A**

1. $n=68$ (nombre de i) et $p=0{,}2$.

2. $P(X=13)\approx 0{,}12$

Partie B

1. Au moins 13 points tombent sur une ligne.

2. $P(X\geqslant 13)\approx 0{,}62$

Partie C

1. On obtient $\left(\frac{7}{68};\frac{20}{68}\right)$.

2. $f_{obs}=\frac{13}{67}$ appartient à l'intervalle de fluctuation.

Partie D

M.B. compare $\frac{13}{68}\approx 0{,}191$ à $P(X=13)$ et conclut que le texte est mis en forme de manière particulière. M.P. dira le contraire puisque $\frac{13}{68}<P(X\geqslant 13)$ de même que Zorana dira que le texte ne contient pas de message codé.

81 **Partie A**

1. X donne le nombre d'apparitions de l'événement S : « le véhicule est contrôlé » en répétant 30 fois la même expérience aléatoire de manière indépendante, elle suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(30;p)$.

2. a. Pour 30 jours, la somme économisée est de 10 € par jour soit 300 € en tout, diminuée de mX (nombre de contrôles dans le mois multiplié par le prix de l'amende) donc $Y=300-mX$.

b. Par linéarité de l'espérance, $E(Y)=300-mE(X)$.

Partie B

1. $P(X=2)\approx 0{,}259$

2. $P(X\leqslant 2)\approx 0{,}812$ donc $P(X\geqslant 3)\approx 0{,}188$

3. On a $E(X)=30\times 0{,}05=1{,}5$ donc $E(Y)=300-1{,}5m$.

$300-1{,}5m\leqslant -200$ si et seulement si $m\geqslant\frac{1000}{3}$: il faut donc au moins une contravention de 334 €.

Partie C

1. $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$=(1-p)^{30}+\binom{30}{1}\times p\times(1-p)^{29}+\binom{30}{2}\times p^2\times(1-p)^{28}$$
$$=(1-p)^{28}\left((1-p)^2+30p(1-p)+435p^2\right)$$
$$=(1-p)^{28}\left(1-2p+p^2+30p-30p^2+435p^2\right)$$
$$=(1-p)^{28}\left(406p^2+28p+1\right)$$

2. a. Sur $[0;1]$ on a $(x-1)\leqslant 0$ donc $f'(x)\leqslant 0$ et f est décroissante.

b. On a $f(0)=1$ et $f(1)=0$ or f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ avec $0{,}01\in[0;1]$ donc, par la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x)=0{,}01$; au millième près elle vaut 0,252.

3. p doit valoir au moins 0,252.

82 **1. a.**

```
from statistics import mean
from random import random

def comptage_bruit_fond():
    nbre_coups=0
    for k in range(100):
        coup=int(random()+0.4)
        nbre_coups=nbre_coups+coup
    return nbre_coups
```

b.

```
from statistics import mean
from random import random

def comptageBF100():
    comptage=[]
    for i in range(100):
        nbre_coups=0
        for k in range(100):
            coup=int(random()+0.4)
            nbre_coups=nbre_coups+coup
        comptage.append(nbre_coups)
    return comptage
```

c.

```
comptages=comptageBF100()
comptages.sort()
print(comptages)
print(mean(comptages))
```

Retour dans la console :

```
Console Python
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
[27, 28, 29, 30, 30, 31, 33, 33, 34, 34, 34, 35, 35, 36, 36, 36, 36,
 36, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38,
 38, 38, 39, 39, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40,
 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43,
 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 46, 46,
 46, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 48, 49, 49, 49, 50, 51, 60]
40.6
```

Dans la simulation, sur l'ensemble des 100 valeurs, 23 valeurs sont supérieures ou égales à 45 et la moyenne vaut 40,6 donc un comptage supérieur à 45 ne semble pas exceptionnel.

2. a. X suit une loi binomiale de paramètres $p=0{,}4$ et $n=100$ (nombre de centièmes de seconde en une seconde, puisque le compteur compte un bruit de fond avec une probabilité de 0,4).

b. $N=48$ à la calculatrice.

c. La radioactivité du pendentif est significative pour 450 CPS mais pas pour 48 CPS.

83 **Partie B**

1. $p(\mathrm{A})=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$ (la somme vaut 4 pour $(1;3)$, $(3;1)$ et $(2;2)$).

$p(\mathrm{B})=\dfrac{11}{12}$

2. $p(\mathrm{Y})=p(\mathrm{Y}\cap\mathrm{A})+p(\mathrm{Y}\cap\mathrm{B})=\dfrac{p\times1}{12}+\dfrac{(1-p)\times11}{12}$

$=\dfrac{11}{12}+\dfrac{p-11p}{12}=\dfrac{11}{12}-\dfrac{5p}{6}$

3. $\dfrac{11}{12}-\dfrac{5p}{6}=f$ donc $p=\dfrac{-6f}{5}+\dfrac{11}{10}$

Partie C

1. et **2.** L'intervalle de confiance pour $p(\mathrm{Y})$ est

$\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ donc pour p :

$$\left[\frac{-6}{5}\left(f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{11}{10};-\frac{6}{5}\left(f-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{11}{10}\right]$$

Travaux pratiques

Triangle de Pascal

Partie A

1. a. Vrai

b. Faux, seulement de 1 à numéro de la ligne.

2. Script complété :

```
import numpy as np

def triangleP(n):
    tp = np.array([[0] * (n+1)] * (n+1))
    tp[0][0] = 1
    for lig in range(1, n+1):
        tp[lig][0] = 1
        for col in range(1, lig):
            tp[lig][col] = tp[lig - 1][col - 1] + tp[lig - 1][col]
        tp[lig][lig] = 1
    return tp

print(triangleP(5))
```

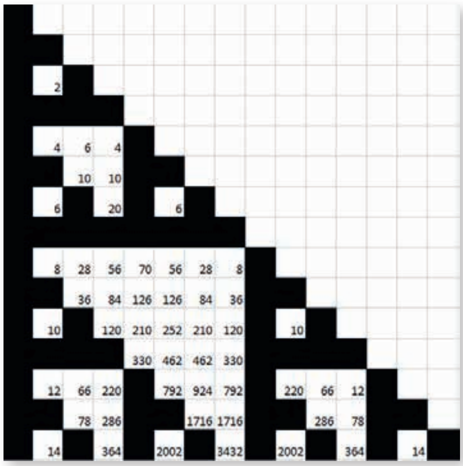
Affichage console (six premières lignes du triangle de Pascal) :

```
Console Python
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
[[ 1  0  0  0  0  0]
 [ 1  1  0  0  0  0]
 [ 1  2  1  0  0  0]
 [ 1  3  3  1  0  0]
 [ 1  4  6  4  1  0]
 [ 1  5 10 10  5  1]]
>>>
```

3. Pour $n=14$ et $p=6$.

Partie B

1.



2. a. 10%2 donne 0 et 21%2 donne 1.

b. Si a et b pairs ou a et b impairs, leur somme est paire ; si a et b sont de parité différente, leur somme est impaire.

c. 4 cas possibles

• Cas 1 : a est pair donc a%2 = 0
b est pair donc b%2=0
d'où (a%2 + b%2)%2 = 0%2 = 0
Dans ce cas $(a+b)$ est pair, donc (a+b)%2 = 0

• Cas 2 : a est pair donc a%2 = 0
b est impair donc b%2=1
d'où (a%2 + b%2)%2 = 1%2 = 1
Dans ce cas $(a+b)$ est impair, donc (a+b)%2 = 1

• Cas 3 (voir cas 2) : le rôle de a et b est symétrique.

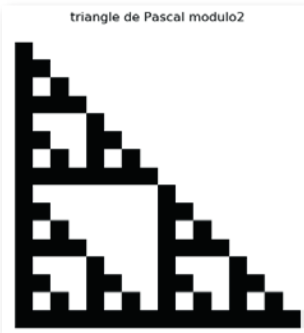
• Cas 4 : a est impair donc a %2 = 1
b est impair donc b %2=1
d'où (a%2 + b%2)%2 = 2%2 = 0
Dans ce cas $(a+b)$ est pair, donc (a+b)%2 = 0

d. Cf. fichier corrigé.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def triangleP2(n):
    tp=np.array([[0]*(n+1)]*(n+1))
    tp[0][0]=1
    for lig in range(1,n+1):
        tp[lig][0]=1
        for col in range(1,lig):
            tp[lig][col]=(tp[lig-1][col-1]+tp[lig-1][col])%2
        tp[lig][lig]=1
    return tp

plt.matshow(1-triangleP2(15))
plt.gray()
plt.title("triangle de Pascal modulo2")
plt.axis('equal')
plt.axis('off')
plt.show()
```

e. Si le coefficient est pair, la valeur sera 0.

f. Cette instruction change les 0 en 1 et les 1 en 0.



Surréservation

1. a. Chaque passager sur les n réservations se présente ou non de manière indépendante, avec une probabilité de 85 % ; Xn suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(n;0;85)$.

b. $P(X_{320}=300)\approx6\times10^{-7}$

$P(X_{320} \geqslant 300) \approx 10^{-6}$: il y a environ une chance sur un million que la capacité de l'avion soit dépassée.

2. a. À partir de quel nombre de réservations maximal déterminé à l'avance la probabilité d'avoir l'avion plein ne dépasse pas 1 % ?

b. Cf. fichier corrigé.

```
from scipy.special import binom

def proba_cumulee_jusqua_300(n):
    proba_cumule=0
    for k in range(0,301):
        proba_cumule+=binom(n,k)*.85**k*.15**(n-k)
    return proba_cumule

def determination_de_n(p):
    n=300
    while proba_cumulee_jusqua_300(n)>=p:
        n+=1
    return n-1
```

Retour console pour trouver n tel que $P(X_n \leqslant 300) \geqslant 0{,}99$:

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
>>> determination_de_n(.99)
336
```

$n = 336$: jusque 336 réservations ouvertes pour 300 places, la probabilité que la capacité de l'avion soit dépassée est inférieure à 0,01.

c. On remplace 0.99 par $1-p$ en rajoutant la variable p ; lorsque p diminue, n augmente (349 pour 0.7), lorsque p est très proche de 1, n diminue (327 pour 0.9999).

Sondages et interprétation

1. Par exemple pour Ipsos, on obtient un intervalle de confiance pour la proportion p_{Macron} d'électeurs votant pour E. Macron dans l'ensemble de la population égale à

$$\left[0{,}24-\frac{1}{\sqrt{1401}}\,;0{,}24+\frac{1}{\sqrt{1401}}\right] \text{ soit environ } [0{,}213\,;0{,}267]$$

et pour la proportion $p_{\text{Le Pen}}$ d'électeurs votant pour M. Le Pen dans l'ensemble de la population égale à

$$\left[0{,}22-\frac{1}{\sqrt{1401}}\,;0{,}22+\frac{1}{\sqrt{1401}}\right] \text{ soit environ } [0{,}193\,;0{,}247].$$

Ainsi, ces deux intervalles se chevauchant, il nous est impossible de classer les estimations des proportions p_{Macron} et $p_{\text{Le Pen}}$.

Pour Ifop, la taille de l'échantillon étant plus grande, on pourrait espérer pouvoir comparer ces deux proportions puisque les intervalles de confiance ont des amplitudes plus faibles. On obtient comme intervalles de confiance :

pour p_{Macron} :

$$\left[0{,}245-\frac{1}{\sqrt{2823}}\,;0{,}245+\frac{1}{\sqrt{2823}}\right] \simeq [0{,}226\,;0{,}264]$$

pour $p_{\text{Le Pen}}$:

$$\left[0{,}225-\frac{1}{\sqrt{2823}}\,;0{,}225+\frac{1}{\sqrt{2823}}\right] \simeq [0{,}206\,;0{,}244]$$

Ces intervalles se chevauchant, ils ne nous permettent pas de conjecturer un classement.

On peut vérifier qu'aucun de ces sondages ne permettent de classer les deux premiers candidats puisque les tailles des échantillons sont insuffisantes pour que les amplitudes de ces intervalles de confiance ne se chevauchent pas.

2. De même, aucun sondage ne permet d'affirmer que Jean-Luc Mélenchon serait 4^{e} car l'intervalle de confiance de son score chevauche toujours celui du 3^{e}.

3. On peut calculer des intervalles de fluctuation pour chaque institut de sondage et chaque candidat. Pour cela, on pourrait exploiter les fonctions écrites à l'exercice **75** permettant de calculer des intervalles de fluctuation au seuil de 0,95 néanmoins, pour des raisons de dépassement des capacités de calcul, ces fonctions sont inefficientes pour de grandes valeurs de n. En substitution, on exploite la fonction `cdf` du module `binom` de la bibliothèque `scipy` pour calculer de tels intervalles de fluctuation.

```
from scipy.stats import binom

# Utilisation de la fonction binom.cdf(k, n, p, loc=0)
# du module binom permettant de calculer les probabilités
# cumulées P(X <= k) lorsque X ~ B(n,p)

def bornes_IF(n,p):
    probas_cumulees = list(binom.cdf(range(n),n,p))
    i = 0
    while probas_cumulees[i]<=.025:
        i=i+1
    borne_gauche=i
    while probas_cumulees[i]<.975:
        i=i+1
    borne_droite=i
    return borne_gauche/n,borne_droite/n
```

```
table_taille_echantillon=[['Odoxa','BVA','Ifop','OpinionWay','Ipsos'],
[953,1494,2823,1500,1401]]

table_scores_finaux=[['Melenchon','Macron','Fillon','Le Pen'],
[0.1958,0.2401,0.2001,0.2130]]

for i in range(5): # pour chaque institut
    nom_institut = table_taille_echantillon[0][i] # nom de l'institut de sondage
    taille_echantillon=table_taille_echantillon[1][i] # taille de l'échantillon
    print("Institut : ",nom_institut," Taille de l'échantillon : ",taille_echantillon)
    for c in range(4): # pour chaque candidat
        candidat=table_scores_finaux[0][c] # nom du candidat
        proportion_election=table_scores_finaux[1][c] # score du candidat
        print("Candidat : ",candidat, " Score : ", proportion_election)
        print("Intervalle de confiance : ",bornes_IF(taille_echantillon,proportion_election))
```

On obtient alors les résultats suivants :

```
Console Python
--------------------
Institut :  Odoxa  Taille de l'échantillon :  953
Candidat :  Melenchon  Score :  0.1958
Intervalle de confiance :  (0.17103882476390347, 0.22140608604407136)
Candidat :  Macron  Score :  0.2401
Intervalle de confiance :  (0.2130115424973767, 0.2675760755508919)
Candidat :  Fillon  Score :  0.2001
Intervalle de confiance :  (0.17523609653725078, 0.22560335781741866)
Candidat :  Le Pen  Score :  0.213
Intervalle de confiance :  (0.18677859391395593, 0.23924449108079748)
--------------------
Institut :  BVA  Taille de l'échantillon :  1494
Candidat :  Melenchon  Score :  0.1958
Intervalle de confiance :  (0.17603748326639893, 0.21619812583668005)
Candidat :  Macron  Score :  0.2401
Intervalle de confiance :  (0.21887550200803213, 0.2617135207496653)
Candidat :  Fillon  Score :  0.2001
Intervalle de confiance :  (0.18005354752342703, 0.22088353413654618)
Candidat :  Le Pen  Score :  0.213
Intervalle de confiance :  (0.19210174029451138, 0.23427041499330656)
```

```
Console Python
--------------------
Institut :  Ifop  Taille de l'échantillon :  2823
Candidat :  Melenchon  Score :  0.1958
Intervalle de confiance :  (0.18136733970952887, 0.2104144527098831)
Candidat :  Macron  Score :  0.2401
Intervalle de confiance :  (0.22458377612469005, 0.2561105207226355)
Candidat :  Fillon  Score :  0.2001
Intervalle de confiance :  (0.18561813673397096, 0.21501948281969535)
Candidat :  Le Pen  Score :  0.213
Intervalle de confiance :  (0.19801629472192703, 0.22812610697839178)
--------------------
Institut :  OpinionWay  Taille de l'échantillon :  1500
Candidat :  Melenchon  Score :  0.1958
Intervalle de confiance :  (0.176, 0.216)
Candidat :  Macron  Score :  0.2401
Intervalle de confiance :  (0.21866666666666668, 0.262)
Candidat :  Fillon  Score :  0.2001
Intervalle de confiance :  (0.18, 0.22066666666666668)
Candidat :  Le Pen  Score :  0.213
Intervalle de confiance :  (0.19266666666666668, 0.234)
```

```
--------------------
Institut :  Ipsos  Taille de l'échantillon :  1401
Candidat :  Melenchon  Score :  0.1958
Intervalle de confiance :  (0.17558886509635974, 0.21698786581013563)
Candidat :  Macron  Score :  0.2401
Intervalle de confiance :  (0.21770164168451106, 0.26266952177016417)
Candidat :  Fillon  Score :  0.2001
Intervalle de confiance :  (0.17915774446823698, 0.22127052105638828)
Candidat :  Le Pen  Score :  0.213
Intervalle de confiance :  (0.192005710206995, 0.23483226266952176)
```

On vérifie alors que les fréquences observées pour chacun des sondages appartiennent bien aux intervalles de fluctuation calculés. Ainsi, les échantillons utilisés peuvent être considérés comme représentatifs de l'ensemble des électeurs.

THÈME 9

Temps d'attente

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
Lois à densité, loi géométrique, loi exponentielle, propriété d'absence de mémoire des lois géométriques et exponentielles.	Identifier des situations mettant en jeu une variable aléatoire de loi géométrique. Déterminer si une fonction est une densité de probabilité, calculer des probabilités mettant en jeu une loi continue à densité. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire continue à densité.

2. Intention des auteurs

Nous avons choisi de traiter le thème « Temps d'attente » sous deux angles : l'aspect discret avec la loi géométrique et l'aspect continu avec les lois à densités usuelles au programme (uniforme et exponentielle). Dans le thème 8, les notions d'épreuve et de schéma de Bernoulli ont été dégagées, c'est l'occasion dans le thème 9 d'introduire la loi géométrique vue comme la loi du rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Nous dégageons la propriété caractéristique d'absence de mémoire de la loi géométrique. Une introduction au concept général de loi continue à densité motivée par la nécessité d'étudier des variables aléatoires non discrètes précède l'étude de deux lois continues particulières au programme : la loi uniforme sur un intervalle $[a\,;b]$ et la loi exponentielle. La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle est dégagée (la caractérisation est admise).

Les lois géométriques et exponentielles permettent ainsi de modéliser des temps d'attente dans des contextes variés : temps d'attente entre deux pannes, durée de fonctionnement d'un composant électronique, durée de vie avant désintégration d'un noyau radioactif, durée d'attente dans une file… Le lien entre ces deux lois fait l'objet d'un thème d'étude (discrétisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle dans le contexte de la désintégration de noyaux radioactifs).

Les exercices d'application et d'entraînement visent une appropriation graduelle des notions et méthodes ; nous nous sommes attachés à proposer autant que possible des exercices contextualisés. Certains, plus théoriques mais rares, visent à démontrer les résultats du cours au programme. L'enseignant aura ainsi à sa disposition un large panel d'exercices progressifs qui lui permettront de différencier plus facilement son enseignement en fonction du profil de ses élèves et de leur poursuite d'étude.

Conformément au programme, des thèmes d'étude aux contextes variés sont proposés en entrée et en fin de thème. Ces thèmes d'étude sont l'occasion, pour bon nombre d'entre eux, d'exploiter les outils d'algorithmique et programmation et l'usage d'outils logiciels (simulations de réalisation de variables aléatoires de loi uniforme, de loi exponentielle).

Partir d'un bon pied

A 1. b 2. c et d 3. a 4. b et c
5. a et c 6. b et c 7. d 8. a

B 1. b 2. a 3. c 4. a 5. c 6. b

C 1. $2 \leqslant \mathcal{A}_1 \leqslant 3$ et $2 \leqslant \mathcal{A}_2 \leqslant 3$

2. a. et b. $\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{1} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \simeq 2{,}35$ u.a.

$\mathcal{A}_2 = \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^4 = \frac{8}{3} \simeq 2{,}67$ u.a.

D 1. Comme la somme de toutes les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ vaut 1, $p = 0{,}05$.

2. $p(X \geqslant 0) = p(X = 0) + p(X = 5) + p(X = 7) = 0{,}35$

3. $E(X) = -3 \times 0{,}15 - 1 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}95 + 7 \times 0{,}2 = 5{,}2$

Activités en situation…

Consolider les bases

1 On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de bonnes réponses à l'issue du questionnaire. X compte alors le nombre de succès lors d'un schéma de Bernoulli à 20 épreuves dont l'épreuve de Bernoulli associée consiste, pour le candidat, à répondre à une question. On appelle Succès l'événement « le candidat répond correctement à la question posée », le Succès a pour probabilité $p = 0{,}25$. X suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$.
La probabilité cherchée est alors :

$$P(X=1) = \binom{20}{1} \times p^1 \times (1-p)^{19} = 20 \times 0{,}25 \times 0{,}75^{19} \simeq 0{,}211$$

2 a. Cf. question **1** (la note obtenue par Boris est égale au nombre de bonnes réponses à l'issue du questionnaire car toute bonne réponse est gratifiée d'un point et toute mauvaise réponse ou absence de réponse n'est pas pénalisée).

b. La probabilité que Boris obtienne la note de 10 est égale à $P(X=10)=\binom{20}{10}\times p^{10}\times(1-p)^{10}\simeq 0{,}01$.

c. On a $P(X>10)=1-P(X\leqslant 10)\simeq 1-0{,}996\simeq 0{,}004$.

d. Boris peut espérer la note de $E(X)=np=5$ points en répondant au hasard à ce questionnaire.

e. On cherche alors la probabilité conditionnelle :

$$P_{(X\geqslant 5)}(X\geqslant 10)=\frac{P(X\geqslant 5\cap X\geqslant 10)}{P(X\geqslant 5)}$$
$$=\frac{P(X\geqslant 10)}{P(X\geqslant 5)}\simeq\frac{0{,}0139}{0{,}5852}\simeq 0{,}024$$

Situation 1 Premier Succès dans un schéma de Bernoulli

1 $p=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$

2 **a.** et **b.**

```python
from random import*
import matplotlib.pyplot as pyplot

def tirages_avant_rouge():
    nb_tirages = 1
    alea = random()
    while alea > 0.2 :
        alea = random()
        nb_tirages = nb_tirages + 1
    return nb_tirages


# On repète 10000 fois l'epreuve
liste_nbtirages=[0]*30
for i in range(10000):
    t=tirages_avant_rouge()
    if t <= 30 :
        liste_nbtirages[t-1] = liste_nbtirages[t-1] + 1
print(liste_nbtirages)
# construction du diagramme en bâtons
pyplot.xlabel('Nb de tirages effectués avant boule rouge')
pyplot.ylabel('Effectifs')
pyplot.bar(range(1,31),liste_nbtirages,width=0.5,color='blue')
pyplot.show()
```

3 **a.** R peut prendre toutes les valeurs entières non nulles.

$P(R=1)=P(S_1)=\dfrac{20}{80}=\dfrac{1}{4}$

b. $P(R=2)=P\left(\overline{S_1}\cap S_2\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{16}$

$P(R=3)=p\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap S_3\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{64}$

$P(R=n)=P\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\cdots\cap\overline{S_{n-1}}\cap S_n\right)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{4}$

Situation 2 Durée de vie d'une ampoule

1 **a.** La proportion d'ampoules ayant une durée de vie comprise entre 1 200 et 2 200 heures est environ 0,6.

b. La proportion d'ampoules ayant une durée de vie supérieure à 2 000 heures est environ 0,25.

c. La proportion d'ampoules ayant une durée de vie inférieure à 1 500 est environ 0,5.

2 **a.** C'est un quotient de quantités strictement positives.

b. $\displaystyle\int_{1\,000}^{3\,000}f(x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{3\,000}{2x}\right]_{1\,000}^{3\,000}=1$

Cela signifie que l'aire sous la courbe de la fonction f en unité d'aire sur l'intervalle $[1000\,;3000]$ est égale à 1. Il s'agit également de la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit comprise entre 1 000 et 3 000 heures.

c. ① $P(1200\leqslant X\leqslant 2\,200)=\displaystyle\int_{1\,200}^{2\,200}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{25}{44}\simeq 0{,}57$

② $P(X>2\,000)=\displaystyle\int_{2\,000}^{3\,000}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}=0{,}25$

③ $P(X\leqslant 1\,500)=\displaystyle\int_{1\,000}^{1\,500}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}=0{,}5$

Situation 3 Propriété d'absence de mémoire

1 **a.** X suit la loi géométrique de paramètre 0,15. Pour tout entier $k\geqslant 1$, on a :

$$P(X=k)=0{,}85^{k-1}\times 0{,}15$$

b. $P(X\leqslant n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}0{,}85^{k-1}\times 0{,}15=\frac{1-0{,}85^{n}}{1-0{,}85}\times 0{,}15$
$=1-0{,}85^{n}$

c. $P(X>n)=1-P(X\leqslant n)=0{,}85^{n}$

d. $P_{(X>2)}(X>5)=\dfrac{P(X>5)}{P(X>2)}=\dfrac{0{,}85^{5}}{0{,}85^{2}}=0{,}85^{3}=P(X>3)$

La probabilité que le basketteur rate cinq lancers de suite sachant qu'il en a déjà raté deux est égale à la probabilité qu'il en rate trois de suite.

Ce résultat est conforme à l'intuition car les lancers sont supposés indépendants donc le fait de rater trois lancers successifs n'impacte pas la probabilité de réussir ou rater les lancers suivants.

2 **a.** On a $P(Y\geqslant 300)=\mathrm{e}^{-5\times 10^{-3}\times 300}\simeq 0{,}22$

$P(Y\geqslant 400)\simeq 0{,}14$ et $P(Y\geqslant 700)\simeq 0{,}03$

b. $P_{(Y\geqslant 400)}(Y\geqslant 700)=\dfrac{P(Y\geqslant 700)}{P(Y\geqslant 400)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-5\times 10^{-5}\times 700}}{\mathrm{e}^{-5\times 10^{-5}\times 400}}$
$=\mathrm{e}^{-5\times 10^{-5}\times 300}=P(Y\geqslant 300)$

Sachant que le composant électronique a fonctionné plus de 400 heures, la probabilité que sa durée de vie dépasse 700 heures est identique à la probabilité que la durée de vie d'un composant neuf dépasse 300 heures. On dit que la loi de vie du composant est une loi sans mémoire ou encore sans vieillissement.

méthode

CAPACITÉ 1 Utiliser une loi géométrique

1 **1.** $P(X=4)=0{,}7^{3}\times 0{,}3=0{,}1029$

$P(X\leqslant 2)=P(X=1)+P(X=2)=0{,}3+0{,}7\times 0{,}3=0{,}51$

$P(X>3)=1-P(X\leqslant 3)=1-P(X\leqslant 2)-P(X=3)$
$=1-0{,}51-0{,}7^{2}\times 0{,}3=0{,}343$

2. $E(X)=\dfrac{1}{0{,}3}\simeq 3{,}33$

2 **1.** D'après l'énoncé, le temps d'attente moyen est 3 minutes, soit $E(T)=3$. Donc, en notant $p>0$ le paramètre de la loi géométrique suivie par T, $\dfrac{1}{p}=3$ d'où $p=\dfrac{1}{3}$.

2. $P(1\leqslant T\leqslant 3)=P(T=1)+P(T=2)+P(T=3)$

Soit $P(1\leqslant T\leqslant 3)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{2}$

Donc $P(1\leqslant T\leqslant 3)=\dfrac{19}{27}\simeq 0{,}7$.

3. $P(T>5)=1-P(T\leqslant 5)=1-P(1\leqslant T\leqslant 5)$

Or $P(1\leqslant T\leqslant 5)=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\right)$.

En reconnaissant la somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, on obtient :

$$P(1\leqslant T\leqslant 5)=\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}}=\frac{211}{243}$$

Ainsi, $P(T>5)=1-\dfrac{211}{243}=\dfrac{32}{243}\simeq 0{,}13$.

3 **1.** X suit la loi géométrique de paramètre 0,1.

2. $P(X=1)=0{,}1$

3. $P(X>2)=1-P(X\leqslant 2)=1-P(X=1)-P(X=2)$
$=1-0{,}1-0{,}9\times 0{,}1=0{,}81$

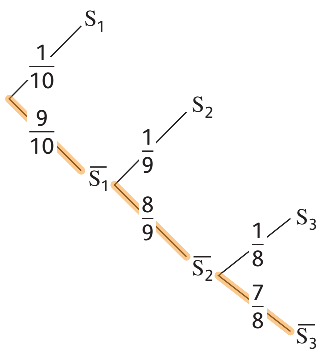
La probabilité que le veilleur nécessite plus de 2 essais pour ouvrir la porte est égale à 0,81.

4. Par la propriété d'absence de mémoire, on a :

$P_{(X>5)}(X>8)=P(X>8-5)=P(X>3)$
$=1-P(X\leqslant 3)=0{,}729$

La probabilité que le veilleur essaye 8 clés sans succès sachant qu'il a en a déjà essayé 5 est égale à la probabilité qu'il en essaye 3 sans succès.

5. La probabilité d'ouvrir la porte au troisième essai signifie : choisir deux mauvaises clés lors des deux premiers essais puis choisir la bonne au troisième. On peut ainsi représenter la situation par un arbre (l'événement S_i signifie « ouvrir la porte lors du i-ème essai).



Par conséquent, la probabilité cherchée est donc égale à :

$P\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap S_3\right)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{10}=0{,}1$

CAPACITÉ 2 Calculer des probabilités en utilisant une densité de probabilité

4 **1.** X est une variable aléatoire à densité définie sur $[0;10]$ donc $P(0\leqslant X\leqslant 10)=1$.

2. L'aire de la partie du plan hachurée en orange s'interprète par $P(0\leqslant X\leqslant 4)=0{,}03$ et celle hachurée en vert par $P(8\leqslant X\leqslant 10)=0{,}5$.

3. $P(4<X<8)=1-P(0\leqslant X\leqslant 4)-P(8\leqslant X\leqslant 10)$
$=1-0{,}03-0{,}5=0{,}47$

$P(X\geqslant 4)=1-P(X<4)=1-P(0\leqslant X\leqslant 4)=0{,}97$

$P(X\leqslant 8)=1-P(X>8)=1-P(8\leqslant X\leqslant 10)=0{,}5$

5 **1.** La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0;1]$ et $\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x=\left[x^3\right]_0^1=1$, donc f est bien une densité de probabilité sur $[0;1]$.

2. La fonction est continue et positive sur l'intervalle $[1;2]$ et $\int_1^2 \dfrac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\dfrac{2}{x}\right]_1^2=1$, c'est bien une densité de probabilité sur $[1;2]$.

3. La fonction est négative sur l'intervalle $[0{,}5;1]$ donc ce n'est pas une densité de probabilité sur l'intervalle $[-1,1]$.

4. La fonction est continue et positive sur $[0;\ln 2]$ et $\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x\right]_0^{\ln 2}=1$, c'est bien une densité sur cet intervalle.

6 **1.** f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[2;4]$. De plus, $\int_2^4 kt\,\mathrm{d}t=\left[k\dfrac{t^2}{2}\right]_2^4=6k$, ainsi, f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[2;4]$ si et seulement si $k=\dfrac{1}{6}$.

2. a. $P(X\leqslant 3)=P(2\leqslant X\leqslant 3)=\int_2^3\dfrac{1}{6}t\,\mathrm{d}t=\left[\dfrac{1}{6}\times\dfrac{t^2}{2}\right]_2^3=\dfrac{5}{12}$

b. $E(X)=\int_2^4 t\times\dfrac{1}{6}t\,\mathrm{d}t=\left[\dfrac{1}{6}\times\dfrac{t^3}{3}\right]_2^4=\dfrac{28}{9}$

$V(X)=\int_2^4 t^2\times\dfrac{1}{6}t\,\mathrm{d}t-(E(X))^2=\left[\dfrac{1}{6}\times\dfrac{t^4}{4}\right]_2^4-\left(\dfrac{28}{9}\right)^2=\dfrac{26}{81}$

CAPACITÉ 3 Calculer des probabilités dans le cadre de la loi uniforme

7 **1.** La variable aléatoire N suit la loi uniforme sur $[0;1[$.
Ainsi : $P(0{,}3\leqslant N\leqslant 0{,}7)=0{,}7-0{,}3=0{,}4$

2. $P(N<0{,}6)=P(0\leqslant N\leqslant 0{,}6)=0{,}6-0=0{,}6$

3. $P(N\geqslant 0{,}3)=P(0{,}3\leqslant N\leqslant 1)=1-0{,}3=0{,}7$

4. $P\left(N=\dfrac{1}{3}\right)=0$ puisque N suit une loi continue à densité.

8 X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;90]$.

1. $P(X>30)=\dfrac{90-30}{90}=\dfrac{60}{90}=\dfrac{2}{3}$ **2.** $P(X<70)=\dfrac{70}{90}=\dfrac{7}{9}$

3. $E(X)=\dfrac{0+90}{2}=45$

En moyenne, le courrier est remis à l'entreprise à 9 h 45.

9 $P(X\leqslant 8)=P(5\leqslant X\leqslant 8)=\dfrac{8-5}{20-5}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{3}$

$P(X\geqslant 17)=P(17\leqslant X\leqslant 20)=\dfrac{20-17}{20-5}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{3}$

$P(11\leqslant X\leqslant 14)=\dfrac{14-11}{20-5}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{3}$

On remarque que ces trois probabilités sont égales à $\dfrac{1}{3}$.

CAPACITÉ 4 Calculer des probabilités dans le cadre de la loi exponentielle

10 **1.** D'après l'énoncé, $E(X)=10$ donc $\dfrac{1}{\lambda}=10$.
On en déduit que $\lambda=0{,}1$.

2. $P(10\leqslant X\leqslant 20)=\mathrm{e}^{-0{,}1\times 10}-\mathrm{e}^{-0{,}1\times 20}\simeq 0{,}2325$

3. $P_{(X\geqslant 10)}(X\geqslant 20)=P_{(X\geqslant 10)}(X\geqslant 10+10)=P(X\geqslant 10)$

d'après la propriété de loi sans mémoire suivie de la loi exponentielle.

Ainsi $P_{(X\geqslant 10)}(X\geqslant 20)=\mathrm{e}^{-0{,}1\times 10}\simeq 0{,}3679$.

11 **1.** $P(X>6)=0{,}3\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda\times 6}=0{,}3\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda\times 6}\right)=\ln 0{,}3$
$\Leftrightarrow -6\lambda=\ln 0{,}3\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{\ln 0{,}3}{6}\simeq 0{,}20$

2. $P(X > 2) = e^{-0,2\times 2} = e^{-0,4}$

3. $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = e^{-0,2\times 2} - e^{-0,2\times 5} \simeq 0,3$

4. $P(X \leqslant t) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2\times t} = 0,5 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln 0,5}{0,2} \simeq 3,5$

La moitié des robots fabriqués ont une durée de vie inférieure à 3,5 années.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b **2.** a **3.** a et c **4.** c **5.** b et c
6. c **7.** b **8.** a **9.** c **10.** c **11.** b

vrai ou faux ?

Partie A.

1. Vrai. On considère la variable aléatoire X qui, aux lancers successifs du dé, associe le rang d'apparition du premier six. X suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.
Donc $E(X) = \dfrac{1}{p} = 6$.

2. Faux. En notant D la durée, en heure, du trajet d'un salarié, on a $P(0,25 \leqslant D \leqslant 0,3) = \dfrac{0,3 - 0,25}{1} = 0,05$.

3. Faux. On note T la durée de vie, en heure, d'un transistor avant sa première panne.
On a $E(T) = \dfrac{1}{0,0005} = 2\,000$.

Partie B.

1. Vrai. On note X le rang du premier tir réussi. X suit une loi géométrique de paramètre 0,1. D'après la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique, on a :

$$P_{(X\geqslant 4)}(X > 5) = P(X > 1) = 1 - P(X = 1) = 0,9$$

2. Faux. T suit une loi exponentielle ayant la propriété d'absence de mémoire. Donc :

$$\begin{aligned} P_{(T\geqslant 15)}(T \leqslant 15+5) &= 1 - P_{(T\geqslant 15)}(T > 20) \\ &= 1 - P(T > 5) = P(T \leqslant 5) \end{aligned}$$

3. Faux. Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-3\,;6]$.

$$P_{(X\geqslant 0)}(X \leqslant 3) = \frac{P(0 \leqslant X \leqslant 3)}{P(X \geqslant 0)} = \frac{\dfrac{3-0}{6-(-3)}}{\dfrac{6-0}{6-(-3)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

12 **1.** $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + x$ **2.** $G(x) = \dfrac{1}{7}x$

3. $H(x) = e^{3x}$ **4.** $J(x) = -e^{-3x}$

13 **1.** $\displaystyle\int_{-2}^{10} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_{-2}^{10} = 6$

2. $\displaystyle\int_0^{1\,000} 0,3e^{-0,3x}\,dx = \left[-e^{-0,3x}\right]_0^{1\,000} \simeq 1$

3. $\displaystyle\int_1^8 (x-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^8 = \frac{49}{2}$

4. $\displaystyle\int_0^{\ln 4} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 4} = \frac{15}{2}$

14 **1.** $\displaystyle\int_0^3 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^3 \simeq 0,5$

2. $\displaystyle\int_2^5 \frac{4}{x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{x}\right]_2^5 = \frac{6}{5}$ **3.** $\displaystyle\int_2^8 \frac{1}{3}\,dx = \left[\frac{x}{3}\right]_2^8 = 2$

4. $\displaystyle\int_{-2}^6 \frac{1}{x+3}\,dx = [\ln(x+3)]_{-2}^6 = \ln 9 - \ln 1 = \ln(3^2) = 2\ln 3$

15 **1.** $\ln(10^3) = 3\ln(2\times 5) = 3\ln 2 + 3\ln 5$

2. $\ln(2^4 \times 125) = \ln(2^4) + \ln(5^3) = 4\ln 2 + 3\ln 5$

3. $\ln\left(\dfrac{5^8}{32}\right) = \ln(5^8) - \ln(32) = 8\ln 5 - \ln(2^5) = 8\ln 5 - 5\ln 2$

4. $\ln(500) - 2\ln 10 = \ln(500) - \ln(10^2) = \ln\left(\dfrac{500}{100}\right) = \ln 5$

16 **1.**
$e^{-2x} = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 4}{-2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\ln 2}{-2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$; $S = \{-\ln 2\}$

2. $e^{-x} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -x > -\ln 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$; $S =]-\infty\,;\ln 2[$

3. $1 - e^{-0,5x} = 0,85 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln 0,15}{0,5}$; $S = \{-2\ln 0,15\}$

4. $1 - e^{-0,01x} \geqslant 0,3 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{\ln 0,7}{0,01}$; $S = [-100\ln 0,7\,;+\infty[$

5. $e^{-0,2t} = 1 - e^{-0,2t} \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0,2}$; $S = \{5\ln 2\}$

6. $e^{-0,6x}(1 - e^{-0,2x}) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2x} < 0$
$\Leftrightarrow e^{-0,2x} > 1 \Leftrightarrow x < 0$; $S =]-\infty\,;0[$

17 **1.** $0,5^n = 0,1 \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,5} \simeq 3,3 \notin \mathbb{N}$; $S = \varnothing$

2. $0,85^n < 0,2 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85}$; $S = [\![10\,;+\infty[\![$

3. $9 \times 1,2^n = 20 \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln(20 \div 9)}{\ln 1,2} \simeq 4,4 \notin \mathbb{N}$; $S = \varnothing$

4. $0,3 \times 2^{n-1} \geqslant 1\,000 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(1\,000 \div 0,3)}{\ln 2} + 1 \simeq 12,7$
$S = [\![13\,;+\infty[\![$

18 **1.**

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-3x^2 - 12x + 15$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)e^{-x}$		$-$	0	$+$	

3.

x	5		$+\infty$
$\dfrac{2}{x-5}$	‖	$+$	

4.

x	-6		-5		$+\infty$
$\ln(x+6)$	‖	θ		$+$	

19 **1.** $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \dfrac{2}{15}$

2. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{19}{30}$

3. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = \dfrac{3}{5}$

4. $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{1-P(A)}=\dfrac{3}{4}$

20 1. a. $P(X=1)\simeq 0{,}27$ b. $P(X<2)\simeq 0{,}38$
c. $P(X\geqslant 1)\simeq 0{,}89$ d. $P(X=4)\simeq 0{,}09$
2. $E(X)=10\times 0{,}2=2$; $\sigma(X)=\sqrt{10\times 0{,}2\times 0{,}8}\simeq 1{,}26$

Automatismes du thème

21 1. $P(X=1)=0{,}1$ 2. $P(X=3)=0{,}9^2\times 0{,}1=0{,}081$

22 1. La fonction n'est pas positive sur tout l'intervalle : ce n'est donc pas une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;3]$.
2. L'intégrale n'est pas égale à 1 : ce n'est donc pas une densité de probabilité sur l'intervalle $[2;4]$.
3. La fonction est positive, continue sur $[0;1]$ et $\int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t=\left[t^3\right]_0^1=1$. C'est bien une densité de probabilité sur $[0;1]$.
4. La fonction est positive, continue sur $[1;2]$ et $\int_1^2 \dfrac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\left[-\dfrac{2}{x}\right]_1^2=1$. C'est bien une densité de probabilité sur $[1;2]$.

23 1. $P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-0{,}23=0{,}77$
2. $P(1\leqslant X\leqslant 2{,}5)=1-P(X\leqslant 1)-P(X\geqslant 2{,}5)=0{,}17$
3. $P(X\leqslant 2{,}5)=1-P(X\geqslant 2{,}5)=0{,}4$
4. $P(X=2{,}5)=0$

24 1. $P(X\geqslant 0{,}5)=0{,}5$ 2. $P(X<0{,}75)=0{,}75$
3. $P(X<0)=0$ 4. $P(X=0{,}333)=0$

25 1. $P(X\geqslant 12)=0{,}8$ 2. $P(X<15)=0{,}5$
3. $P(X\geqslant 20)=0$ 4. $P(X=13)=0$

26 1. $P(X\geqslant 0)=1$
2. $P(X<5)=1-\mathrm{e}^{-0{,}2\times 5}\simeq 0{,}63$
3. $P(2\leqslant X\leqslant 4)=\mathrm{e}^{-0{,}2\times 2}-\mathrm{e}^{-0{,}2\times 4}\simeq 0{,}22$
4. $P(X=3)=0$

27 1. Loi uniforme sur l'intervalle $[10;20]$.
2. Loi géométrique de paramètre $\dfrac{4}{20}=0{,}2$.
3. Loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{15}$.

Exercices Application

Consolider les bases

28 1. X suit la loi binomiale de paramètres 4 et 0,1.
2. a. $p(X=0)\simeq 0{,}6561$ b. $p(X\geqslant 1)\simeq 0{,}3439$
c. $p(X=2)\simeq 0{,}0486$ d. $p(X<4)\simeq 0{,}9999$
e. $p(X>3)\simeq 0{,}0001$ f. $p(X\geqslant 3)\simeq 0{,}037$

29 1. $P(X=1)=0{,}1$; $P(X=2)=0{,}9\times 0{,}1$
$P(X=3)=0{,}9^2\times 0{,}1$
2. $P(X=n)=0{,}9^{n-1}\times 0{,}1$

30 1. a. $P(X\geqslant 4)=0{,}2$
b. $P(X\geqslant 2)=0{,}25+0{,}4+0{,}2=0{,}85$
c. $P(2\leqslant X\leqslant 3)=0{,}25+0{,}5=0{,}65$
2. a. $P_{(X\geqslant 2)}(X\leqslant 3)=\dfrac{P(2\leqslant X\leqslant 3)}{P(X\geqslant 2)}=\dfrac{0{,}65}{0{,}85}\simeq 0{,}529$
b. $P_{(X\geqslant 2)}(X\geqslant 4)=\dfrac{P(X\geqslant 4)}{P(X\geqslant 2)}=\dfrac{4}{17}\simeq 0{,}235$
c. $P_{(X<4)}(X\geqslant 2)=\dfrac{P(2\leqslant X<4)}{1-P(X=4)}=\dfrac{P(2\leqslant X\leqslant 3)}{0{,}8}$
$=\dfrac{0{,}65}{0{,}8}=0{,}8125$

31 1. $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x=2$
2. $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=3$
3. $\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=3+5=8$

32 1. $F(1)=0$ 2. $F(3)=\int_1^3 4x^2\,\mathrm{d}x=\left[4\dfrac{x^3}{3}\right]_1^3=\dfrac{104}{3}$
3. $F(t)$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x=1$, $x=t$, $y=0$ et la courbe de f.
$F(3)-F(2)=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x=2$, $x=3$, $y=0$ et la courbe de f.
4. $F(t)=\int_1^t 4x^2\,\mathrm{d}x=\left[4\dfrac{x^3}{3}\right]_1^t=\dfrac{4}{3}(t^3-1)$ et $F'=f$: F est la primitive de f qui s'annule en 1.

Connaître le cours

33 **Diaporama QCM**

1. c 2. b 3. a, c et d 4. b et d 5. c
6. c et d 7. d 8. a et c 9. c 10. a et d

34 **Expérience A :** épreuve de Bernoulli avec une probabilité de Succès $p=\dfrac{1}{6}$. La variable aléatoire X prend la valeur 1 lorsqu'on obtient un Succès et 0 sinon. X suit alors une loi de Bernoulli de paramètre p.
Expérience B : on considère la variable aléatoire X donnant le premier instant où on obtient Face. X suit alors la loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{1}{2}$.
Expérience C : on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de figures dans la main de 5 cartes. X suit alors la loi binomiale de paramètres $p=\dfrac{3}{8}$ et $n=5$.

35 1. X prend toutes les valeurs entières supérieures à 1.
2. $P(X=1)=0{,}25$; $P(X=2)=0{,}75\times 0{,}25=0{,}1875$
$P(X=3)=0{,}75^2\times 0{,}25\simeq 0{,}14$
3. Pour tout entier $k\geqslant 1$, on a $P(X=k)=0{,}75^{k-1}\times 0{,}25$.
$E(X)=\dfrac{1}{0{,}25}=4$
4. Exemple d'expérience aléatoire mettant en jeu la variable aléatoire X : on lance un dé tétraédrique équilibré autant de fois que nécessaire jusqu'à l'apparition de la face 1. On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de cette face. Alors X suit une loi géométrique de paramètre $p=0{,}25$.

36 **1.** Une fonction est une densité de probabilité sur un intervalle si et seulement si cette fonction est continue et positive sur cet intervalle et que son intégrale sur cet intervalle est égale à 1.

2. a. La fonction est continue et positive sur $[-2;4]$ et $\int_{-2}^{4}\frac{1}{24}x^2\,dx=\left[\frac{1}{24}\times\frac{x^3}{3}\right]_1^3=1.$

b. $P(-1\leqslant X\leqslant 2)=\int_{-1}^{2}\frac{1}{24}x^2\,dx=\left[\frac{1}{24}\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{8}$

$P(X\leqslant 3)=\int_{-2}^{3}\frac{1}{24}x^2\,dx=\frac{35}{72}$

$P(X\geqslant 0)=P(0\leqslant X\leqslant 4)=\int_{0}^{4}\frac{1}{24}x^2\,dx=\frac{8}{9}$

c. $P(X=-1)=0$ car X suit une loi de probabilité continue à densité.

37 **1.** $f(x)=\frac{1}{6-(-2)}=\frac{1}{8}$

2. $P(-1\leqslant Y\leqslant 3)=\frac{3-(-1)}{8}=\frac{1}{2}$

$P(Y\leqslant 4)=P(-2\leqslant Y\leqslant 4)=\frac{4-(-2)}{8}=\frac{3}{4}$

$P(Y\geqslant -1)=P(-1\leqslant Y\leqslant 6)=\frac{6-(-1)}{8}=\frac{7}{8}$

3. $E(Y)=\frac{-2+6}{2}=2$

38 **1.** $f(x)=2{,}5\times10^{-5}\mathrm{e}^{-2{,}5\times10^{-5}x}$; $f(0)=2{,}5\times10^{-5}$

$E(T)=\frac{1}{2{,}5\times10^{-5}}=40\,000$

La durée de vie moyenne d'un tel transistor est égale à 40 000 heures.

2. La probabilité que le transistor dure moins de 15 mille heures vaut :

$$P(T\leqslant 15\,000)=1-\mathrm{e}^{-2{,}5\times10^{-5}\times15\,000}\simeq 0{,}313$$

La probabilité que le transistor dure plus de 50 mille heures vaut :

$$P(T>50\,000)=\mathrm{e}^{-2{,}5\times10^{-5}\times50\,000}\simeq 0{,}287$$

La probabilité que le transistor dure entre 10 et 30 mille heures vaut :

$$P(10\,000<T<30\,000)=\mathrm{e}^{-2{,}5\times10^{-5}\times10\,000}-\mathrm{e}^{-2{,}5\times10^{-5}\times30\,000}\simeq 0{,}306$$

Travailler les capacités du thème

39 **1. a.** Faux **b.** Vrai **c.** Vrai **d.** Faux
2. a. Faux **b.** Vrai **c.** Faux **d.** Faux

Démo
40 **1.** Pour tout entier $k\geqslant 1$, on a $P(X=k)=q^{k-1}p$

2. a. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

$$P(X\leqslant n)=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}p=\cancel{p}\frac{1-q^n}{\cancel{1-q}}=1-q^n$$

b. On en déduit alors que, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$P(X>n)=1-P(X\leqslant n)=q^n$$

c. Pour tous entiers naturels m et n non nuls, on a alors :

$$P_{(X>m)}(X>m+n)=\frac{P(X>m+n)}{P(X>m)}=\frac{q^{m+n}}{q^n}=q^n=P(X>n)$$

Note des auteurs
Dans la correction des exercices suivants, lorsque X suit une loi géométrique de paramètre p, on utilisera le fait que pour tout entier $k\geqslant 1$, on a :

$$P(X\leqslant k)=1-q^k \text{ et } P(X>k)=q^k$$

avec $q=1-p$.

41 **1.** $P(X=1)=0{,}16$

2. a. X suit la loi géométrique de paramètre 0,16.

b. $P(X=3)=0{,}84^2\times0{,}16\simeq 0{,}11$

c $P(X\leqslant 2)=P(X=1)+P(X=2)=0{,}16+0{,}84\times0{,}16\simeq 0{,}29$

Il s'agit de la probabilité que Marie obtienne sa première pièce étrangère au plus tard au second tirage.

d. $P_{(X>3)}(X>5)=P(X>5-3)=0{,}84^2\simeq 0{,}71$

La probabilité de tirer la première pièce étrangère après le 5e tirage sachant qu'on n'a pas tiré une pièce étrangère au cours des 3 premiers tirages est environ égale à 0,71.

42 **1.** Y suit la loi géométrique de paramètre 0,15.

2. $P(Y=4)=0{,}85^3\times0{,}15\simeq 0{,}09$

La probabilité que Corinne obtienne son premier ticket de grattage gagnant au 4e ticket acheté est environ égale à 0,09.

3. $E(Y)=\frac{1}{0{,}15}\simeq 6{,}7$ En moyenne, elle achète 7 tickets chez son buraliste.

43 $P(X=k)\leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}3\times(1-0{,}3)^{k-1}\leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow 0{,}7^{k-1}\leqslant\frac{0{,}01}{0{,}3}\Leftrightarrow (k-1)\ln 0{,}7\leqslant \ln\frac{1}{30}$

$\Leftrightarrow k\leqslant\frac{\ln\frac{1}{30}}{\ln 0{,}7}+1$

Les solutions sont les entiers de l'intervalle $[1;10]$.

44 **1.** Réponses correctes : a et b.

Seules les fonctions f et g sont positives, continues et d'intégrales égales à 1 sur $[1;4]$.

La fonction h n'est pas positive sur $[1;4]$. L'intégrale de la fonction i sur l'intervalle $[1;4]$ n'est pas égale à 1.

2. Réponses correctes : a et b.

Les trois fonctions représentées sont positives sur $[0;2]$ mais la troisième n'est pas continue sur $[0;1]$ (discontinuité en 1). Les intégrales des deux premières fonctions sur $[0;2]$ sont bien égales à 1.

45 **1.** Les deux fonctions sont continues et positives sur $[-1;1]$ et les intégrales sur cet intervalle sont égales à 1.

2. Avec f :

a. $P(-1\leqslant X\leqslant 0)=0{,}5$ **b.** $P(0\leqslant X\leqslant 0{,}5)=0{,}375$

c. $P(X\geqslant 0)=0{,}5$ **d.** $P(-0{,}5\leqslant X\leqslant 0{,}5)=0{,}75$

3. Avec g :

a. $P(-1\leqslant X\leqslant 0)=0{,}75$ **b.** $P(0\leqslant X\leqslant 0{,}5)=0{,}1875$

c. $P(X\geqslant 0)=0{,}25$ **d.** $P(-0{,}5\leqslant X\leqslant 0{,}5)=0{,}5$

46 **1. a.**

b. La fonction est continue et positive et l'intégrale est égale à 1.

2. $P(X \leqslant 6) = \int_5^6 (x-5)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^6 = \frac{1}{2}$

Le camion arrive avant 6 h avec une probabilité égale à 0,5.

3. $P(X \leqslant 5{,}5) = \int_5^{5,5} (x-5)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^{5,5} = \frac{1}{8}$

$P(X \geqslant 6{,}25) = \int_{6,25}^7 (7-x)\,dx = \left[7x - \frac{x^2}{2}\right]_{6,25}^7 = \frac{9}{32}$

4. $P_{(X \geqslant 6)}(X \leqslant 6{,}5) = \frac{P(6 \leqslant X \leqslant 6{,}5)}{P(X \geqslant 6)} = \frac{\int_6^{6,5}(7-x)\,dx}{\int_6^7 (7-x)\,dx} = \frac{3}{4}$

47 Toutes les fonctions de cet exercice sont positives et continues sur les intervalles indiqués pour $k \geqslant 0$. Reste désormais à trouver les valeurs de $k \geqslant 0$ de sorte que $\int_I f$ soit égale à 1.

1. $\int_0^{10} k\,dx = [kx]_0^{10} = 10k$ d'où $k = \frac{1}{10}$

2. $\int_0^4 kx\,dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8k$ d'où $k = \frac{1}{8}$

3. $\int_0^2 kx^2\,dx = \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}k$ d'où $k = \frac{3}{8}$

4. $\int_1^{e^2} k\frac{1}{x}\,dx = [k\ln x]_1^{e^2} = 2k$ d'où $k = \frac{1}{2}$

48 **1.** f est une fonction de densité sur $[1;5]$ si $\int_1^5 f(x)\,dx = 1$.

Or $\int_1^5 f(x)\,dx = \left[-\frac{k}{x}\right]_1^5 = -\frac{k}{5} - \left(-\frac{k}{1}\right) = \frac{4}{5}k$.

On en déduit $\int_1^5 f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$.

Pour tout réel x de $[1;5]$, $f(x) = \frac{5}{4x^2}$.

2. Une primitive de f sur $[1;5]$ est la fonction $x \mapsto -\frac{5}{4x}$.

a. $P(X \leqslant 3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \left[-\frac{5}{4x}\right]_1^3 = -\frac{5}{12} + \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$

b. $P(X \geqslant 2) = \int_2^5 f(x)\,dx = \left[-\frac{5}{4x}\right]_2^5 = \frac{3}{8}$

c. $P(2 < X \leqslant 4) = \int_2^4 f(x)\,dx = \left[-\frac{5}{4x}\right]_2^4 = \frac{5}{16}$

3. On a $E(X) = \int_1^5 xf(x)\,dx = \int_1^5 \frac{5}{4x}\,dx = \left[\frac{5}{4}\ln x\right]_1^5 = \frac{5}{4}\ln 5$

49 **1.** $F(a) = \int_0^a k e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \left[-2ke^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^a = 2k\left(1 - e^{-\frac{a}{2}}\right)$

Puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-\frac{a}{2}} = 0$, alors par limite d'une différence, $\lim\limits_{a \to +\infty}\left(1 - e^{-\frac{a}{2}}\right) = 1$ et donc par limite d'un produit, on déduit que $\lim\limits_{a \to +\infty} F(a) = 2k$ et donc $k = \frac{1}{2}$.

2. a. $P(\mathrm{A}) = F(2) \simeq 0{,}63$

b. $P(\mathrm{B}) = F(4) - F(3) \simeq 0{,}09$

c. $P(\mathrm{C}) = 1 - F(10) \simeq 0{,}01$

On pourra remarquer que X suit une loi exponentielle de paramètre 0,5.

50 **1.** Faux. $P(X \in [0{,}1;0{,}6]) = \frac{0{,}6 - 0{,}1}{1 - 0} = 0{,}5$

2. Vrai. $P(X < 75) = \frac{75 - 0}{100 - 0} = 0{,}75$ et $P(X > 25) = \frac{100 - 25}{100 - 0} = 0{,}75$

3. Vrai. $E(X) = \frac{80 + 20}{2} = 50$

51 **1.** $P(X \leqslant 2) = P(-1 \leqslant X \leqslant 2) = \frac{2 - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{1}{2}$

2. $P(X \geqslant 3) = P(3 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{5 - 3}{5 - (-1)} = \frac{1}{3}$

3. $P_{(X \geqslant 0)}(X < 2) = \frac{P(0 \leqslant X < 2)}{P(X \geqslant 0)} = \frac{2}{5}$

52 **1.** c

2. Réponse b, puisque $P(2 \leqslant T \leqslant 3) = \frac{3-2}{x-2} = \frac{1}{x-2}$ ainsi $\frac{1}{x-2} = 0{,}25 \Leftrightarrow x - 2 = 4$ donc $x = 6$.

3. Réponse c, en effet $P\left(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ où X est une variable de loi uniforme sur $[0;1]$.

4. Réponse b, car $E(X) = \frac{5}{2}$, $P(X > 2) = \frac{5-2}{5-0} = \frac{3}{5}$, $P(X \leqslant 2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ et $P(X \leqslant 5) = 1$.

5. Réponse c, en effet, en notant X la variable aléatoire donnant la durée de communication, X suit une loi uniforme sur $[0;120]$ et donc :

$P_{(X \geqslant 30)}(X \leqslant 90) = \frac{P(30 \leqslant X \leqslant 90)}{P(X \geqslant 30)} = \frac{0{,}5}{0{,}75} = \frac{2}{3}$

53 **1.** D suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;25]$.

2. $f(x) = \frac{1}{25}$

3. $P(0 \leqslant X \leqslant 8) = \frac{8}{25}$

4. $P_{(X \geqslant 12)}(X \leqslant 20) = \frac{P(12 \leqslant X < 20)}{P(X \geqslant 12)} = \frac{8}{13}$

Démo

54 **1.** Pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

2. $E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$
$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

3. $\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \left[\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$
$= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$

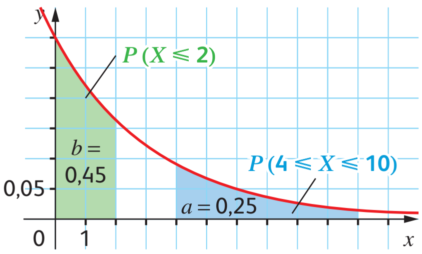
$V(X) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - (E(X))^2$
$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}$

55 **1.** $\lambda = f(0) = 0{,}3$

2. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) = 0{,}3e^{-0{,}3x}$.

3. Cette aire vaut 1. Cette aire correspond à la probabilité $P(X \geqslant 0) = 1$.

4. a. et **b.**



5. $P(4 \leqslant X \leqslant 10) = \mathrm{e}^{-0{,}3\times 4} - \mathrm{e}^{-0{,}3\times 10} \simeq 0{,}25$

$P(X \leqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}3\times 2} \simeq 0{,}45$

56 **1.** Faux. Pour tout réel t positif, $f(t) = 0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01t}$.

2. Faux. Pour tout réel t positif :

$$P(Y \geqslant t) = 1 - P(Y < t)$$
$$= 1 - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}01x}\right]_0^t$$
$$= 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 1\right) = \mathrm{e}^{-0{,}01t}$$

3. Faux. $P(Y \leqslant 3 \times 60) = 1 - \mathrm{e}^{-180\times 0{,}01} \simeq 0{,}83$

4. Vrai. $P(Y \geqslant 60) = \mathrm{e}^{-0{,}01\times 60} \simeq 0{,}55 > 0{,}5$

57 **1.** Réponse b, voir la formule démontrée dans le cours.

2. Réponse a, en effet :

$$P(D \leqslant t) = P(D \geqslant t) \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{-\lambda t} = 1$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

3. Réponse a, en effet :

$$P(D \leqslant 1) = 0{,}18 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}18 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}82$$
$$\Leftrightarrow -\lambda = \ln 0{,}82 \Leftrightarrow \lambda = -\ln\frac{82}{100}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \ln\frac{100}{82} \Leftrightarrow \lambda = \ln\frac{50}{41}$$

4. Réponse a, en effet, par la propriété de durée de vie sans vieillissement de la loi exponentielle (loi sans mémoire), on a :

$$P_{(D\geqslant 2)}(D \geqslant 3) = P(D \geqslant 1)$$

5. Réponse b, en effet : $P(D \geqslant 3) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 3} = \mathrm{e}^{-0{,}6} \simeq 0{,}5488$

exercices Entraînement

1 Loi géométrique

58 **1.** On répète le lancer jusqu'à obtenir la face numéro 6, la variable X suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

2. $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$, $P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$

3. $E(X) = 6$, il faut en moyenne 6 lancers pour sortir de l'écurie.

4. $P(X \leqslant 5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \simeq 0{,}6$

Démo

59 **1. a.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a alors :

$$P(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1} = \cancel{p}\,\frac{1-q^n}{\cancel{1-q}} = 1 - q^n$$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - q^n\right) = 1$ car $|q| < 1$

La somme de toutes les probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

2. a. La variable X suit la loi géométrique de paramètre 0,1.

b. $P(X \leqslant 10) = 1 - 0{,}9^{10} \simeq 0{,}65$

c. $P(X \leqslant n) > 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}9^n < 0{,}1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9} \simeq 21{,}85$

Il faut au moins 22 lancers pour que la probabilité de réussir soit supérieure à 90 %.

Démo

60 **1.** On suppose que X vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ alors, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X > m + n) = P_{(X>m)}(X > m + n) \times P(X > m)$$
$$= P(X > n) \times P(X > m)$$

2. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$u_{n+1} = P(X > n + 1) = P(X > n) \times P(X > 1) = u_n \times q$ la suite est donc géométrique de raison q et de premier terme $u_1 = P(X > 1) = q$.

b. On a donc, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = q \times q^{n-1} = q^n$$

c. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n + 1)$$
$$= P(X > n - 1) - P(X > n)$$
$$= u_{n-1} - u_n = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1 - q) = q^{n-1}p$$

La variable X suit donc bien la loi géométrique de paramètre p.

61 On note X le nombre de paquets achetés pour obtenir la figurine convoitée. Cette variable suit la loi géométrique de paramètre 0,05.

1. $P(X = 4) = 0{,}95^3 \times 0{,}05 \simeq 0{,}04$

2. $P(X \geqslant 5) = P(X > 4) = 0{,}95^4 \simeq 0{,}815$

3. Par la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique, on a :

$$P_{(X>10)}(X < 15) = 1 - P_{(X>10)}(X > 15) = 1 - P(X > 5)$$
$$= 1 - 0{,}85^5 \simeq 0{,}556$$

4. $E(X) = \frac{1}{0{,}05} = 20$. En moyenne il faudra acheter 20 paquets de céréales pour obtenir la figurine.

62 **1.** $P(X = 1) = \frac{1}{3}$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{4}$, la première situation étant la plus probable.

2. $P(X = k) \leqslant P(Y = k) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} \leqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow k \geqslant \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)} + 1 \simeq 3{,}4$$

À partir de 4 réponses, la situation A devient moins probable.

2 Lois continues à densité

63 **1.** La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[-2\,;2]$. De plus :

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} a\left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x = a\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x$$
$$= a\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}a \text{ d'où } a = \frac{3}{32}$$

2. a. Pour tout $x \in [-2;2]$, on a

$f(-x) = a\left(4-(-x)^2\right) = a\left(4-x^2\right) = f(x)$. Donc f est paire.

b. Soit t un réel de l'intervalle $[0;2]$. Par symétrie, on a $P(Y \leqslant -t) = P(Y \geqslant t)$ d'où :

$$P(0 \leqslant Y \leqslant t) = P(Y \leqslant t) - P(Y \leqslant 0)$$
$$= (1 - P(Y > t)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - P(Y \geqslant t)$$

D'autre part, par des arguments d'aires, on a :

$$P(-t \leqslant Y \leqslant t) = 1 - P(Y \leqslant -t) - P(Y \geqslant t)$$

Or, par symétrie, on a $P(Y \leqslant -t) = P(Y \geqslant t)$ d'où :

$$P(-t \leqslant Y \leqslant t) = 1 - P(Y \geqslant t) - P(Y \geqslant t) = 1 - 2P(Y \geqslant t)$$

64 **1.** Pour tout $t \in [-1;1]$, on a :

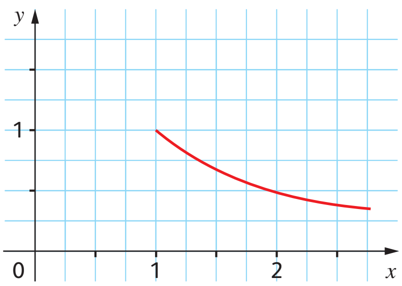
$$F(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-1}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$F(t)$ représente donc l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = t$.

2. a. est associé à ③ **b.** est associé à ① **c.** est associé à ②

65 **1.** f est une fonction continue et positive sur $[1;\mathrm{e}]$ (pour $m \geqslant 0$). De plus, $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{m}{x}\mathrm{d}x = [m\ln x]_1^{\mathrm{e}} = m$ d'où $m = 1$ pour que f soit une densité de probabilité sur $[1;\mathrm{e}]$.

2.



3. a. Pour tout réel $t \in [1;\mathrm{e}]$, on a $F(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^t = \ln t$.

b. ① $P(X \leqslant 2) = F(2) = \ln 2 \simeq 0{,}69$

② $P(1{,}5 \leqslant X \leqslant 2) = \ln 2 - \ln 1{,}5 \simeq 0{,}29$

③ $P(X > 1{,}5) = 1 - p(X \leqslant 1{,}5) = 1 - \ln 1{,}5 \simeq 0{,}59$

3 Loi uniforme continue sur $[a\,;b]$

66 **a.** $P(10{,}5 \leqslant X \leqslant 10{,}75) = \dfrac{0{,}25}{1{,}5} = \dfrac{1}{6}$

b. $P(X \leqslant 11) = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$

c. $P(X \geqslant 10{,}75) = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$

d. $P(10 \leqslant X \leqslant 10{,}5) = 1 - P(X \geqslant 10{,}5) = \dfrac{1}{3}$

e. $P_{(X \geqslant 10{,}5)}(X \geqslant 11) = \dfrac{P(10{,}5 \leqslant X \leqslant 11)}{P(X \geqslant 10{,}75)} = \dfrac{1}{2}$

67 **1.** Le choix est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[380;780]$.

2. $P(\mathrm{A}) = P(510 \leqslant X \leqslant 541) = \dfrac{31}{400} \simeq 0{,}08$

$P(\mathrm{B}) = P(575 \leqslant X \leqslant 579) + P(605 \leqslant X \leqslant 622)$

$= \dfrac{4}{400} + \dfrac{17}{400} = \dfrac{21}{400} \simeq 0{,}05$

$P(\mathrm{C}) = 1 - P(478 \leqslant X \leqslant 483) = 1 - \dfrac{5}{400} = \dfrac{395}{400} \simeq 0{,}99$

68 **1.** X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;15]$.

2. $P(\mathrm{A}) = P(0 \leqslant X \leqslant 3) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

$p(\mathrm{B}) = P(10 \leqslant X \leqslant 15) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

3. $P_{(X>5)}(X < 5+5) = \dfrac{P(5 < X < 10)}{P(5 < X < 15)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

4. $P(X \leqslant t) = 0{,}95 \Leftrightarrow \dfrac{t}{15} = 0{,}95 \Leftrightarrow t = 15 \times 0{,}95 = 14{,}25$

La durée d'attente est inférieure à 14 min et 15 s dans 95 % des cas.

69 **1.** $E(X) = 210 \Leftrightarrow \dfrac{100+b}{2} = 210 \Leftrightarrow b = 320$

2. $P(X \leqslant 240) = 0{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{240-100}{b-100} = 0{,}2 \Leftrightarrow b = 800$

3.

$P(225 \leqslant X \leqslant 250) = 0{,}125 \Leftrightarrow \dfrac{250-225}{b-100} = 0{,}125 \Leftrightarrow b = 300$

4. $P(X > 150) = 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{b-150}{b-100} = 0{,}5 \Leftrightarrow b = 200$

4 Loi exponentielle

70 **1.** On a $P(Y \leqslant 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Et d'après l'énoncé, on a $P(Y \leqslant 1) = 0{,}12$.

Il faut donc résoudre l'équation $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}12$.

Soit $\mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}88 \Leftrightarrow \lambda = -\ln 0{,}88$.

2. $P(Y > 3) = \mathrm{e}^{-3\lambda} = \mathrm{e}^{-0{,}384} \simeq 0{,}681$

3. La probabilité cherchée est $P_{(Y>1)}(Y > 4)$, or d'après la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, on a $P_{(Y>1)}(Y > 4) = P_{(Y>1)}(Y > 1+3) = P(Y > 3)$.

En reprenant le résultat obtenu à la question précédente, $P_{(Y>1)}(Y > 4) = \mathrm{e}^{-0{,}384}$.

71 **1.** $P(T < 4) = 0{,}565 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0{,}565$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(1-0{,}565)}{-4} \simeq 0{,}208$$

2. a. Par la propriété de durée de vie sans vieillissement de la loi exponentielle (loi sans mémoire), on a alors :

$$P_{(T>4)}(T > 8) = P(T > 4) = \mathrm{e}^{-0{,}208 \times 4} \simeq 0{,}435$$

b. $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \simeq \dfrac{1}{0{,}208} \simeq 4{,}8$ ans

c. $P(T > t) = 0{,}75 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}208t} = 0{,}75 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}75)}{-0{,}208} \simeq 1{,}4$

75 % des batteries durent plus de 1,4 années.

72 **1.** $E(X) = 7{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} = 7{,}5 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{15} \simeq 0{,}133$

2. $P(X > 5) = \mathrm{e}^{-0{,}133 \times 5} \simeq 0{,}513$

3. $P_{(X>4)}(X > 4+1) = P(X > 1) = \mathrm{e}^{-0{,}133 \times 1} \simeq 0{,}880$

4. $P(6 < X < 10) = \mathrm{e}^{-0{,}133 \times 6} - \mathrm{e}^{-0{,}133 \times 10} \simeq 0{,}190$

5. a. Y suit la loi binomiale de paramètres 8 et 0,513.

b. $P(Y = 3) = \dbinom{8}{3} \times 0{,}513^3 \times 0{,}487^5 \simeq 0{,}21$

c. $E(Y) = np = 8 \times 0{,}513 \simeq 4$

Démo

73 **1.** f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

2. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$G'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-\lambda x} + \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \times \left(-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = g(x)$$

Donc G est bien une primitive de g sur $[0\,;+\infty[$.

b. $\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^t g(x)\mathrm{d}x=G(t)-G(0)=\frac{1}{\lambda}\left(1-\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)$

c. On a $\lim\limits_{t\to+\infty}-\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$ donc, par limite d'une somme et d'un produit, on déduit que :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\left(1-\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)=\frac{1}{\lambda}$$

Ainsi, $E(X)=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$.

4. $E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}011}\simeq 0{,}91$

La durée moyenne d'une conversation téléphonique est d'environ 1 heure et 30 minutes.

74 Les durées d'attente à un standard téléphonique ou à une caisse enregistreuse sont modélisées en pratique par des lois exponentielles. On fera cette hypothèse dans cet exercice. Ainsi, si la durée d'attente entre deux appels est modélisée par une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ alors, d'après les données de l'énoncé, on a :

$$E(X)=3\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{3}$$

Par conséquent, la probabilité que la durée séparant deux appels dépasse 4 minutes est estimée à :

$$P(X\geqslant 4)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times 4}\simeq 0{,}26$$

75 **Partie A**

1. L'automobiliste attend entre 2 et 10 minutes pour passer.

2. $E(D)=\frac{2+10}{2}=6$, en moyenne, il attend 6 minutes.

3. $P(D\leqslant 5)=\frac{3}{8}=0{,}375$

Partie B

1. $E(T)=\frac{1}{0{,}05}=20$

En moyenne 20 heures séparent deux bateaux.

2. $F(x)=-\mathrm{e}^{-0{,}05x}$

$P(T\leqslant t)=\int_0^t 0{,}05\mathrm{e}^{-0{,}05x}\,\mathrm{d}x=[F(t)]_0^t=1-\mathrm{e}^{-0{,}05t}$

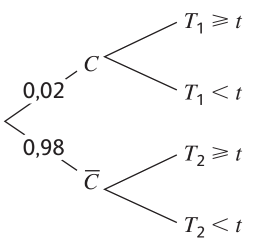
3. $P(T\leqslant 12)=1-\mathrm{e}^{-0{,}05\times 12}\simeq 0{,}45$

4. $P_{(T\geqslant 24)}(T\geqslant 48)=P(T\geqslant 48-24)=\mathrm{e}^{-0{,}05\times 24}\simeq 0{,}30$

76 **1. a.** $P(T_1\geqslant 1\,000)=\mathrm{e}^{-5\times10^{-4}\times 1\,000}\simeq 0{,}61$

b. $P(T_2\geqslant 1\,000)=\mathrm{e}^{-10^{-4}\times 1\,000}\simeq 0{,}90$

2. On peut modéliser la situation par l'arbre de probabilités suivant :



Par la formule des probabilités totales, on a alors :

$$\begin{aligned}P(T\geqslant t)&=P(C\cap(T\geqslant t))+P\left(\overline{C}\cap(T\geqslant t)\right)\\&=P(C)\times P_C(T_1\geqslant t)+P\left(\overline{C}\right)\times P_{\overline{C}}(T_2\geqslant t)\\&=0{,}02\mathrm{e}^{-5\times10^{-4}t}+0{,}98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}P_{(T\geqslant 1\,000)}(C)&=\frac{P(C)\times P(T_1\geqslant 1\,000)}{P(T\geqslant 1\,000)}\\&=\frac{0{,}02\times 0{,}61}{0{,}02\times 0{,}61+0{,}98\times 0{,}90}\simeq 0{,}014\end{aligned}$$

77 **1.** Lorsque le circuit est monté en parallèle, la probabilité qu'il soit défaillant avant un an est égale à :

$$\begin{aligned}P((C_1\leqslant 1)\cap(C_2\leqslant 1))&=P(C_1\leqslant 1)\times P(C_2\leqslant 1)\\&=\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}5\times 1}\right)^2\simeq 0{,}15\end{aligned}$$

La première égalité venant du fait que les variables aléatoires C_1 et C_2 sont indépendantes.

2. Lorsque le circuit est monté en série, la probabilité qu'il soit défaillant avant un an est égale à :

$$\begin{aligned}&P((C_1\leqslant 1)\cup(C_2\leqslant 1))\\&=P(C_1\leqslant 1)+P(C_2\leqslant 1)-P((C_1\leqslant 1)\cap(C_2\leqslant 1))\\&=2\times\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}5\times 1}\right)-\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}5\times 1}\right)^2\simeq 0{,}632\end{aligned}$$

Apprendre à modéliser

Partie A

1. a. X prend toutes les valeurs entre 0 et 10 suivant une loi uniforme. Son espérance est égale à 5 minutes.

b. Dans ce modèle, le premier usager a raison. Quant au second usager, vu que le bus passe à horaire fixe, plus le nombre de personnes en attente de son passage est important plus le bus précédent est passé il y a longtemps donc l'affirmation du second usager est cohérente. Le troisième usager a tort pour ce modèle.

2. Avec les aléas de circulation, il est peu vraisemblable que les horaires de passages des bus soient aussi réguliers. À la limite, pour une rame de métro automatisée, un tel modèle pourrait être envisageable.

Partie B

1. Sur une durée de 60 minutes par exemple, s'il y a autant de créneaux de 8 minutes et de créneaux de 12 minutes soit 3 de chaque.

La probabilité d'un créneau de 8 minutes est donc égale à $\frac{8\times 3}{60}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ et celle d'un créneau de 12 minutes est $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

2. Entre deux bus de 8 minutes, il attend uniformément entre 0 et 8 minutes soit en moyenne 4 minutes. Et entre deux bus de 12 minutes, il attend uniformément entre 0 et 12 soit en moyenne 6 minutes.

3. Comme les probabilités respectives des créneaux 8 et 12 minutes sont respectivement égales à 0,4 et 0,6, son temps d'attente moyen sera égal à :

$$0{,}6\times 6+0{,}4\times 4=5{,}2 \text{ minutes}$$

4. Le premier usager a tort dans ce modèle. Pour ce second modèle, le second usager a également tort car le fait qu'il y ait beaucoup de monde à l'arrêt signifierait alors qu'il y ait une forte probabilité que le créneau entre deux bus soit celui d'amplitude la plus élevée à savoir 12 minutes ici et donc l'attente peut être plus importante que si l'usager arrive sur un créneau d'attente de 5 minutes.

Partie C

1. La durée T séparant l'arrivée de deux bus consécutifs suit ici une loi exponentielle de paramètre λ avec $E(T)=10$ minutes. Ainsi, $\frac{1}{\lambda}=10$ d'où $\lambda=0{,}1$.

2. Descriptif de la simulation disponible :

• On simule les durées qui s'écoulent entre deux passages successifs de bus. Ces durées suivent alors la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$ (fonction `realisation_exp(lamb)`).

• On stocke ces durées dans une liste et on fait la somme cumulée de ces durées : on obtient ainsi une liste constituée des temps de passage des bus :

$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ (liste `temps_passage`)

• On simule l'instant t_{usager} d'arrivée d'un usager par une loi uniforme sur $[t_1 ; t_n]$ (fonction `temps_attente`).

• On calcule alors la durée d'attente D du prochain bus par cet usager :

$t_k - t_{usager}$ où k est l'indice tel que $t_{k-1} < t_{usager} < t_k$ (fonctions `temps_attente` et `recherche`)

• On effectue plusieurs simulations successives afin d'obtenir une estimation de l'espérance de la variable aléatoire D (script final).

Après exécution de ce script, on obtient une durée d'attente moyenne proche de 10 minutes pour l'usager. Ainsi, l'usager 3 a raison (ce qui peut être contre-intuitif d'où le paradoxe). En fait, plus un intervalle entre deux passages de bus a une forte amplitude, plus la probabilité qu'un usager se présente dans cet intervalle est importante. Ceci explique le paradoxe. Quant à l'affirmation du deuxième usager, tout comme pour le second modèle, elle est là ici discutable car le fait qu'il y ait beaucoup de monde à l'arrêt peut signifier aussi que l'amplitude d'attente entre les deux bus est importante…

Maths en situation…

78 **Partie A**

1. Dans chaque paquet on tombe au hasard sur l'une des quatre figurines. La ligne 8 permet de simuler le tirage au hasard d'un numéro de figurine entre 0 et 3.

2. a.

```
1 from random import *
2
3 ListeSimulations=[]
4 def tps_attente_collection():
5     nb_achat=0
6     nb_fig=7
7     collection=[0]*nb_fig
8     while 0 in collection:
9         figurine=randint(0,nb_fig-1)
10        collection[figurine]=1
11        nb_achat=nb_achat+1
12    return nb_achat
13
14 def moyenne(Liste):
15     somme=0
16     for element in Liste:
17         somme=somme+element
18     return somme / len(Liste)
19
20
21 nombre_simulation = 10000
22
23 for i in range(nombre_simulation):
24     ListeSimulations.append(tps_attente_collection())
25
26 print(moyenne(ListeSimulations))
27
```

b. Cette condition teste s'il reste un 0 dans le tableau, c'est-à-dire s'il manque une figurine dans la collection.

3. Voir ci-dessus.

4. et **5.** En moyenne, il faut acheter 8,3 paquets pour compléter la collection.

6. Pour compléter une collection de 5 (respectivement 6 et 7) figurines, il faut en moyenne acheter 11,3 (respectivement 14,7 et 18) paquets.

Partie B

1. Dès le premier paquet, on obtient une figurine de la collection donc $T_1 = 1$ (c'est un événement certain, sa probabilité vaut 1).

2. a. Étant donné que l'on a déjà une figurine, la probabilité de tomber sur une figurine différente avec un nouveau paquet est égale à $\frac{3}{4}$.

b. Notre collection compte un seul modèle de figurine. On appelle Succès l'événement « obtenir un nouveau modèle de figurine ». La variable aléatoire T_2 comptant le nombre d'achats nécessaires pour obtenir le premier Succès suit donc une la loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$.

3. Étant donné que l'on a déjà deux figurines, la probabilité de tomber sur une figurine différente avec un nouveau paquet est égale à $\frac{1}{2}$.

Notre collection compte alors deux modèles différents de figurines. On appelle Succès l'événement « obtenir un troisième modèle de figurine ». La variable aléatoire T_3 comptant le nombre d'achats nécessaires pour obtenir le premier Succès suit donc une la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

De même, la variable T_4 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$.

4. a. T représente la durée nécessaire pour obtenir 4 modèles de figurines différents, pour cela, il faut attendre d'obtenir le premier modèle puis le second, puis le troisième et enfin le dernier. Ainsi, on a :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

b. $E(T) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) + E(T_4) = 1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{1} + \frac{4}{1}$

$E(T) = 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) \approx 8{,}33$ ce qui est cohérent avec le résultat obtenu par simulation lors de la **partie A**.

Partie C

De la même façon, on obtient que, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant N$, la variable aléatoire T_k suit une loi géométrique de paramètre $\frac{N-k+1}{N}$. En ajoutant toutes les espérances, on obtient le résultat.

Avec n égal à 5 et 6, on trouve des résultats très proches de ceux obtenus avec les simulations.

79 **Partie A**

1. $P(T \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, c'est la probabilité que le noyau ne soit toujours pas désintégré au bout de t minutes.

2. a. On répète N_0 fois de façon identique et indépendante une expérience à deux issues contraires, le noyau est désintégré ou pas au bout de t minutes. La variable $X(t)$ comptant le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t suit donc la loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

b. $N(t) = E = np = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Partie B

1. $\{Y = k\}$ est l'événement : « la durée de vie du noyau est comprise entre la $(k–1)$-ième et la k-ième unité de temps » autrement dit « le noyau se désintègre entre la (k–1)-ième et la k-ième unité de temps ».

2. a. On a :

$$P(k-1<T\leqslant k)=P(k-1\leqslant T\leqslant k)=\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}-\mathrm{e}^{-\lambda k}$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)$$

b. En notant $p=1-\mathrm{e}^{-\lambda}$ et $q=1-p=\mathrm{e}^{-\lambda}$, on a alors $P(k-1<T\leqslant k)=pq^{k-1}$ donc Y suit la loi géométrique de paramètre $p=1-\mathrm{e}^{-\lambda}$.

3. a. $p=\dfrac{1}{6}$

b. Y suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

c. $p=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-\lambda}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow \lambda=-\ln\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\simeq 0{,}1823$

Partie C

1. $P\left(T\leqslant \tau_{0,5}\right)=0{,}5\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-\lambda\tau_{0,5}}=0{,}5\Leftrightarrow \tau_{0,5}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$

2. $N\left(\tau_{0,5}\right)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda\tau_{0,5}}=N_0\mathrm{e}^{-\lambda\frac{\ln 2}{\lambda}}=\dfrac{N_0}{2}$

3. $m=E(T)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{\ln 2}\tau_{0,5}\simeq 1{,}44\tau_{0,5}$

4. a. La demi-vie du $^{99\mathrm{m}}$Tc est égale à $\tau_{0,5}=6$ heures donc sa constante radioactive est $\lambda=\dfrac{\ln 2}{\tau_{0,5}}=\dfrac{\ln 2}{6}\simeq 0{,}116$.

b. On note T la variable aléatoire donnant la durée de vie (en heure) d'un tel atome radioactif. On a alors :

$P(T\leqslant 5)=1-\mathrm{e}^{-0{,}116\times 5}\simeq 0{,}44$

$P(T\geqslant 9)=\mathrm{e}^{-0{,}116\times 9}\simeq 0{,}352$

c. $P(T\leqslant t)=0{,}95\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-0{,}116t}=0{,}95\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 0{,}05}{-0{,}116}\simeq 26$

95 % des atomes ne se sont pas désintégrés avant 26 heures.

80 **Partie A**

1. a. Si Bonnie arrive à 12 h 20, c'est-à-dire après $\dfrac{1}{3}$ alors Clyde doit arriver entre $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$ et $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$.

b. Si Bonnie arrive à 12 h 50, c'est-à-dire après $\dfrac{5}{6}$ alors Clyde doit arriver entre $\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{2}$ et $\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}$ ce qu'on limitera à 1.

2. Dans les deux cas, la durée d'attente est $|C-B|$.

3. Ils se rencontrent si la durée d'attente est inférieure à $\dfrac{1}{4}$.

Partie B

1. et **2.**

```python
from random import *

def rencontre():
    C=random()
    B=random()
    d=abs(C-B)
    if d<=0.25:
        rv=1
    else:
        rv=0
    return rv

def simulation(n):
    compteur=0
    for i in range(n):
        compteur=compteur+rencontre()
    return compteur/n

print(simulation(10000))
```

3. Les fréquences se rapprochent de 0,437.

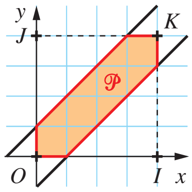
4. Les fréquences se rapprochent de l'aire de la « diagonale » rouge.

Partie C

1. Pour que la rencontre ait lieu, il faut et il suffit que :

$$0\leqslant x\leqslant 1\;;\;0\leqslant y\leqslant 1 \text{ et } x-\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant x+\frac{1}{4}$$

2. a. et **b.**



c. Pour calculer l'aire, on enlève celle des deux petits triangles rectangles au carré :

$$\mathscr{A}=1-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}\simeq 0{,}4375$$

3. La probabilité qu'ils se rencontrent est donc égale à 0,4375.

81 **1.** Comme la probabilité que « face » sorte est égale à 0,5, on peut supposer raisonnablement qu'elle finira par apparaître « rapidement ». Le tout est d'être capable de miser jusque-là…

2.

Rang	1	2	3	4	n
Mise	1	2	4	8	2^{n-1}
Gain	1	2	4	8	2^{n-1}
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^n}$

3. a. X peut prendre toutes les valeurs entières strictement positives et suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

b. Le gain prend pour valeurs les puissances de 2.

4. a. $P\left(Y=2^{k-1}\right)=P(X=k)$

b. $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}2^{k-1}\times P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}2^{k-1}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2}$

c. Chaque terme de la somme vaut un demi et la somme comporte un nombre infini de termes.

d. Cette espérance est donc infinie.

Pour que le joueur puisse espérer un tel gain infini en théorie, il faudrait qu'il dispose de son côté de fonds infinis aussi….

82 **Partie A**

1. $T=-\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda}$

$T\leqslant t\Leftrightarrow -\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda}\leqslant t\Leftrightarrow -\ln(1-U)\leqslant \lambda t\Leftrightarrow \ln(1-U)\geqslant -\lambda t$

$\Leftrightarrow 1-U\geqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\Leftrightarrow U\leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$

2. $P(T\leqslant t)=P\left(U\leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$

3. La variable T suit donc la loi exponentielle de paramètre λ.

Partie B

a.

```python
from random import random
from math import log

def realisation_exp(lamb):
    """ simule et retourne une durée aléatoire
    de loi exponentielle de paramètre lamb
    """
    return -log(1-random())/lamb
```

b.

```
def echantillon(N,lamb):
    """ simule la durée de vie d'un échantillon
    de N atomes radioactifs
    """
    liste=[]
    for _ in range(N):
        liste.append(realisation_exp(lamb))
    return liste
```

c.

```
def demi_vie(N,lamb):
    liste=echantillon(N,lamb)
    liste.sort()
    return liste[int(N/2)]

print(demi_vie(1000000,.1))
print(log(2)/.1)
```

d. Avec cette simulation, on obtient que $\tau_{0,5} \simeq 6{,}9$.

En théorie, on a $\tau_{0,5} = \dfrac{\ln 2}{0{,}1} \simeq 6{,}93$ ce qui est proche de la valeur obtenue par simulation.

Travaux pratiques

La méthode de Monte-Carlo

Partie A

1. Cette intégrale donne l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ et la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x^2}$.

2. D'après la figure, $0{,}76 = \dfrac{19}{25} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{21}{25} = 0{,}84$.

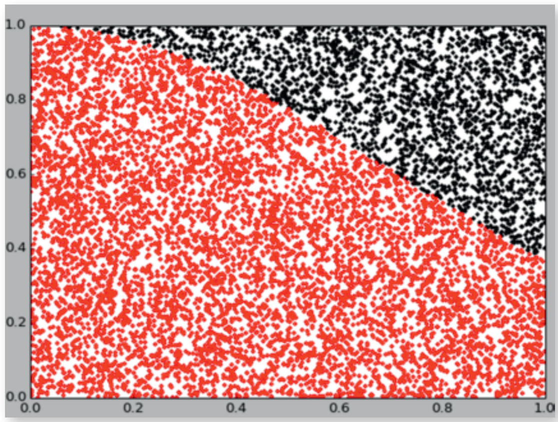
Partie B

1. Un point $M(x\,;y)$ du carré $OIKJ$ est situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.

2. L'aire du carré est égale à 1 d'où l'égalité.

3. a. et **b.**

```
from random import*
from math import*
from matplotlib.pyplot import*

def points_sous_courbe(N):
    nbpoint=0
    # parametrage de la fenetre
    xlim(0,1)
    ylim(0,1)
    # simulations
    for i in range(N):
        x=random()
        y=random()
        if y<=exp(-x**2):
            nbpoint=nbpoint+1
            plot(x,y,'.r')
        else:
            plot(x,y,'.k')
    #affichage
    show()
    return nbpoint

def aire_sous(N):
    k=points_sous_courbe(N)/N
    return k

print(aire_sous(10000))
```



c. Résultats :

Taille	500	1 000	5 000	10 000
Résultat	0,72	0,735	0,7512	0,7428

d. L'intégrale I vaut environ 0,74.

Une politique nataliste qui questionne

Partie A

1. La fonction `random` renvoie uniformément un réel de l'intervalle $[0\,;1[$, en ajoutant 0,5, on obtient uniformément un réel de l'intervalle $[0{,}5\,;1{,}5[$. Il y a une probabilité $\dfrac{1}{2}$ que ce réel appartienne à l'intervalle $[0{,}5\,;1[$ et de même une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$ que ce réel appartienne à l'intervalle $[1\,;1{,}5[$. Par conséquent, la partie entière de ce réel vaut soit 0 soit 1 avec équiprobabilité.

2.

```
from random import *
from statistics import mean

def fratrie():
    nbre_enfants=0
    nbre_garcons=0
    while nbre_garcons==0:
        nbre_garcons+=int(random()+0.5)
        nbre_enfants+=1
    return nbre_enfants
```

3. a.

```
def simulations(N):
    simul=[]
    for k in range(0,N):
        simul.append(fratrie())
    return simul
```

b. Résultats des simulations :

Taille	Nb moyen d'enfant/ famille	Nb moyen de fille/ famille	Nb de garçon/ famille
100	1,93	0,93	1
1 000	1,956	0,956	1

Partie B

1. L'événement $N = k$ signifie que la famille compte $(k-1)$ filles pour les $k-1$ premières naissances et que la k-ième naissance est celle d'un garçon. Ainsi, N suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

L'espérance mathématique de N est donc 2.

2. On a $P(G=1)=1$ (chaque famille compte un seul garçon) donc l'espérance de G est égale à 1.

Cette politique nataliste, en plus d'être discriminante, n'a aucun intérêt en termes de répartition des sexes puisque les proportions de garçons et de filles dans cette population seront identiques. Chaque famille compte en moyenne deux enfants de sexes différents. On obtiendrait exactement la même répartition des sexes dans la population sans avoir recours à cette politique nataliste.

Paradoxe de Bertrand

1. Dans le triangle OAH rectangle en H, l'angle au centre $\widehat{COA}$ a pour mesure $2\times 60^\circ = 120^\circ$ et le côté $[OA]$ a pour longueur 1, on a donc $AH = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ensuite $AC = 2AH = \sqrt{3}$.

2. a. AM vaut $\sqrt{3}$ quand M est confondu avec C ou B. On a $AM \geqslant \sqrt{3}$ si et seulement si $M \in \widehat{BC}$.

b. $\widehat{AB} = \frac{1}{3} p_{\text{cercle}} = \frac{2\pi}{3}$

c. $P\left(X \geqslant \sqrt{3}\right) = P\left(M \in \widehat{BC}\right) = \frac{1}{3}$

3. a. On note I le milieu du segment $[AB]$.
$DE \geqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow M \in [OI]$

b. $P\left(Y \geqslant \sqrt{3}\right) = P(M \in [OI]) = \frac{OI}{OC'} = \frac{1}{2}$

4. a. Dans le triangle OMG rectangle en M, on a :
$GM^2 + MO^2 = OG^2 \Leftrightarrow GM = \sqrt{1 - MO^2}$ et
$GH = 2GM = 2\sqrt{1 - MO^2}$

b. $GH \geqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{1 - MO^2} \geqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow OM \leqslant \frac{1}{2}$

c. $P\left(L \geqslant \sqrt{3}\right) = \frac{\text{Aire}_{C(O\,;\,0,5)}}{\text{Aire}_{C(O\,;\,1)}} = \frac{1}{4}$

Le paradoxe vient du fait que la probabilité obtenue dépend donc de la méthode que l'on utilise pour choisir la corde « au hasard ».

THÈME 10

Corrélation et causalité

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues
• Nuage de points. Point moyen. • Ajustement affine. Droite des moindres carrés. Coefficient de corrélation. • Ajustement se ramenant par changement de variable à un ajustement affine. • Application des ajustements à des interpolations ou extrapolations.	• Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser le calcul des limites, l'allure des courbes représentatives des fonctions inverse, carré, cube, racine carrée, exponentielle et logarithme. • Représenter un nuage de points. • Calculer les coordonnées d'un point moyen. • Déterminer une droite de régression, à l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou par calcul. • Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler.

2. Intention des auteurs

Conformément au programme, il s'agit, dans ce thème, de conjecturer des relations, affines ou exponentielles par exemple, entre deux quantités physiques, biologiques ou autres, grâce à l'étude de séries statistiques à deux variables. Et de bien distinguer les notions de corrélation et de causalité.
Pour mener à bien cette étude, on s'appuie notamment sur les études de fonctions classiques et les représentations graphiques.
Une large part du thème est consacrée, comme l'indique le programme, à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines : démographie, biologie, informatique, économie, physique,… Les compétences de modélisation au travers la rubrique Maths en situation, et de communications avec les travaux pratiques et la proposition de plusieurs exposés à développer à l'oral, sont mobilisées. L'accent a été mis sur la grande diversité des situations.
Comme dans tous les thèmes, on travaille régulièrement le calcul numérique et algébrique, ainsi que le raisonnement. La diversité des activités et exercices proposés permet de travailler la logique et laisse une grande place à la prise d'initiative (individuelle ou en groupe). De nombreux exercices permettent également le travail de l'oral et de l'argumentation.

Partir d'un bon pied

A **1.** c **2.** d **3.** b **4.** b
5. d **6.** a **7.** b **8.** c

B **1.** b
2. Somme des valeurs/6.

C **1.** $\mathscr{C}_1$ correspond à la fonction f, $\mathscr{C}_2$ correspond à la fonction h et $\mathscr{C}_3$ correspond à la fonction g.
2. $\mathscr{C}_1$ correspond à une décroissance logarithmique, $\mathscr{C}_2$ correspond à une croissance linéaire et $\mathscr{C}_3$ correspond à une croissance exponentielle.
3. On obtient, en arrondissant les résultats à 0,1 près si besoin :

a.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$		2,39	1,69	1,29	1	0,78	0,59	0,44	0,31

b.

x	–1	–0,5	0	0,5	1
$g(x)$	0,07	0,33	1,5	6,72	30,13

c.

x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$	–1	0	1	2	3	4	5

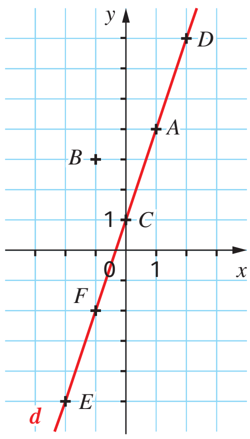
D **1.** Vrai, on vérifie le coefficient directeur (–2) et l'ordonnée à l'origine (3).
2. Faux, le coefficient directeur est $\frac{1}{4}$ et non 4.
3. Faux, il est juste en dessous.
4. Vrai

Activités en situation…

Consolider les bases

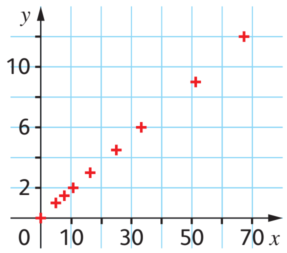
1 ⑦ - ⑤ - ⑨ - ④ - ② - ① - ③ - ⑥ - ⑧

2 a. $3\times1+1=4$ donc A appartient à la droite d.
$3\times(-1)+1=-2$ donc B n'appartient pas à la droite d.
b. Par exemple $C(0;1)$ et $D(2;7)$ appartiennent à la droite d.
c. On remplace x par -2, on obtient $E(-2;-5)$.
d. On remplace y par -2 et on résout, on obtient $F(-1;-2)$.



Situation 1 Loi d'Ohm

1 a.

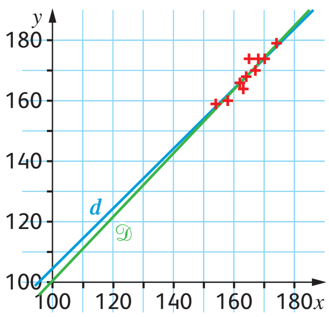


Les points semblent alignés avec l'origine
b. $U=a\times I$ avec $a\approx0{,}2$ (U est en V et I en mA).

2 a. L'intensité est d'environ 50 mA.
b. La tension est d'environ 20V.

Situation 2 Une relation entre l'envergure et la taille ?

1



Les points semblent être regroupés autour d'une droite, ce qui indique une certaine corrélation.

2 a. Les points semblent effectivement assez proches de cette droite.
b. Les deux propositions semblent assez équivalentes.

3 a.

x_i	154	158	162	163	164	165
y_i	159	160	166	164	168	174
$(y_i-(x_i+4))^2$	1	4	0	9	0	25
$(y_i-(1{,}06x_i-5{,}8))^2$	2,43	2,82	0,01	8,88	0	24,01

x_i	167	168	170	174	Total
y_i	170	174	174	179	
$(y_i-(x_i+4))^2$	1	4	0	1	45
$(y_i-(1{,}06x_i-5{,}8))^2$	1,49	2,96	0,16	0,13	42,89

b. C'est la droite $\mathscr{D}$ qui ajuste le mieux.

Situation 3 Corrélation et causalité

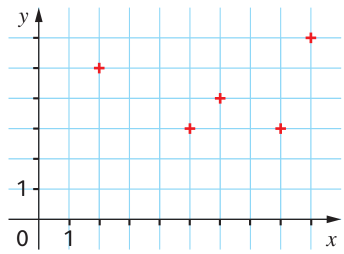
Le fait d'avoir graphiquement un « lien » entre deux courbes n'implique pas systématiquement corrélation et causalité. Dans les trois exemples, les courbes sont proches et semblent suivre le même dessin en rapport avec les années d'observation, il est pourtant assez clair qu'une causalité entre les variables observées n'aurait pas de sens.

Méthode

Capacité 1 Représenter un nuage de points

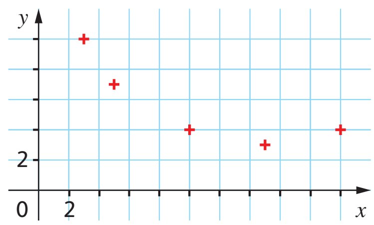
Capacité 2 Calculer les coordonnées d'un point moyen

1 1.



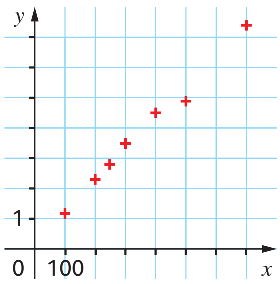
Un ajustement affine ne semble pas adapté.

2.



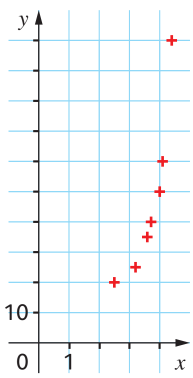
Un ajustement affine peut se discuter mais il ne serait pas forcément de bonne qualité.

3.



Un ajustement affine semble adapté car les points semblent assez alignés.

4.



Un ajustement affine ne semble pas du tout adapté, la forme évoquée n'étant pas celle d'une droite.

2 **1.** Le point moyen a pour coordonnées $(6\,;4{,}2)$.
2. Le point moyen a pour coordonnées $(15\,;4{,}5)$.
3. Le point moyen a pour coordonnées $(350\,;3{,}8)$.
4. Le point moyen a pour coordonnées $\left(\frac{51}{14}\,;\frac{330}{7}\right)$.

CAPACITÉ 3 Déterminer une droite de régression

3 **1.** $a \approx 1{,}28$; $b \approx 0{,}8$ et $r \approx 0{,}97$.
2. $a \approx 10{,}9$; $b \approx 51{,}1$ et $r \approx 0{,}95$.
3. $a \approx -0{,}14$; $b \approx 59{,}88$ et $r \approx -0{,}976$.

CAPACITÉ 4 Utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler

4 **1.** $y = 0{,}48x + 1{,}94$
2. Comme $r \approx 0{,}992$, très proche de 1, l'ajustement affine précédent est adapté.
3. a. La production en 2022 est estimée à :
$$0{,}48 \times 7 + 1{,}94 = 5{,}3 \text{ tonnes}$$
b. $0{,}48x + 1{,}94 > 7 \Leftrightarrow x > \frac{253}{24}$. Comme $\frac{253}{24} \approx 10{,}5$, la production dépassera 7 tonnes à partir de :
$$2015 + 11 = 2026$$

5 **1.** $y = 0{,}61x + 1{,}54$
2. Oui car $r \approx 0{,}996$, très proche de 1.
3. a. $x = 7$ donne $y = 5{,}81$ tonnes.
b. $y = 7$ pour $8 < x < 9$ donc à partir de 2024.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. a	2. b	3. b	4. a	5. c
6. a	7. c	8. b et c	9. b et c	

vrai ou faux ?

Partie A.	1. Faux	2. Vrai	3. Vrai	4. Faux	
Partie B.	1. Vrai	2. Faux	3. Faux	4. Vrai	5. Vrai

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

6 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4-3+2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
$\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2 = \left(\frac{7-1}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$

7 **1.** 1,2 **2.** 0,97 **3.** 1,025 **4.** 2 **5.** 0,5 **6.** 0,78

8 **1.** +6 % **2.** −2 % **3.** +12 %
4. −24 % **5.** +200 % **6.** −2,5 %

9 **1.** $A(x) = 4x^2 - 4x - 24$
2. $B(x) = 14x^2 - 5x$
3. $C(x) = -8x - 4$

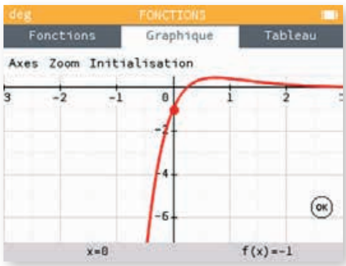
10 **1.** $A(x) = e^{2x} - e^x$ **2.** $B(x) = e^{2x} + 8e^x + 16$
3. $C(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$

11 **1.** $A(x) = (x+3)(2x-5)$
2. $B(x) = e^x(7e^x - 1)$

12 **1.** $A(x) = (e^x + 3)(e^x - 3)$
2. $B(x) = (e^x - 5)^2$

13 **1.** Puisque $4(e^x + 5) > 0$, seul le facteur $e^x - 1$ peut s'annuler ; $e^x = 1$ ssi $x = 0$ d'où $S = \{0\}$.
2. $e^{-4x} > 0$ donc cette équation équivaut à $2x - 3 = 0$ ssi $x = 1{,}5$ d'où $S = \{1{,}5\}$.

14 **1.** $f(x)$ est du signe de $4x - 1$ donc $f(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$ et $f(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.
2. $f'(x) = 4e^{-2x} + (4x-1) \times (-2)e^{-2x} = (6 - 8x)e^{-2x}$
$f'(x)$ est du signe de $6 - 8x$ donc $f'(x) < 0$ et f est croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{4}\right[$ et $f'(x) > 0$ et f est décroissante sur $\left]\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$.
3.



15 $u_1 = 3u_0 - 1 = -7$; $u_2 = 3 \times (-7) - 1 = -22$;
$u_3 = 3 \times (-22) - 1 = -67$

16 $u_0 = 0^3 - 2 \times 0 + 1 = 1$; $u_1 = 1^3 - 2 \times 1 + 1 = 0$; $u_2 = 5$; $u_3 = 22$

Automatismes du thème

17 **1.** Par exemple $A(0\,;1{,}2)$ et $B(2\,;1{,}48)$
2. Par exemple $A(0\,;22)$ et $B(3\,;0{,}1)$
3. Par exemple $A(0\,;-1{,}32)$ et $B(1\,;3{,}2)$

18 **1.** $2 \times (-1) + 3 = 1$ donc $A \in d$.
2. $-2 \times (-1) + 5 = 7$ donc $A \notin d$.

19 $\mathcal{D}_1$ a pour coefficient directeur −3, $\mathcal{D}_2$ a pour coefficient directeur 2 et $\mathcal{D}_3$ a pour coefficient directeur 0.

20 $\bar{x} = \frac{-3 + 1{,}5 - 1 + 2 + 4}{5} = 0{,}7$
$\bar{y} = \frac{1 - 1 + 0{,}5 + 2{,}5 + 2}{5} = 1$
Le point moyen a pour coordonnées $(0{,}7\,;1)$.

21 En procédant comme dans l'exercice **20**, on trouve que le point moyen a pour coordonnées $(-0{,}6\,;-0{,}6)$.

22 $y \approx 0{,}07x + 0{,}18$

23 $y \approx -0{,}52x + 121{,}70$

exercices Application

Consolider les bases

24 **1.** L'équation réduite est de la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{5}$ d'où $y = \frac{1}{5}x + p$. On remplace par les coordonnées de B par exemple, on obtient $-1 = \frac{1}{5} \times 2 + p$ d'où $p = -\frac{7}{5}$.

L'équation est donc $y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$.

2. $y = -x + 5$

3. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

4. $y = -0{,}4x + 4{,}6$

25 **1.** Par exemple $A(0\,;-1)$ et $B(1\,;1)$.
2. Par exemple $A(0\,;4)$ et $B(1\,;1)$.
3. Par exemple $A(0\,;4)$ et $B(4\,;8)$.
4. Par exemple $A(0\,;1)$ et $B(1\,;-1)$.
Il suffit alors de tracer la droite $(AB) = (d)$.

26 **1.** Faux, c'est -1.
2.Vrai, car $-4 + 4 = 0$.
3. Vrai, car $-0 + 4 = 4$.
4.Vrai, car $-1{,}5 + 4 = 2{,}5$.

27 $\mathscr{C}_1$ représente la fonction k.
$\mathscr{C}_2$ représente la fonction f.
$\mathscr{C}_3$ représente la fonction h.
$\mathscr{C}_4$ représente la fonction g.

28

x_i	12 453	104 567	256 734	1 327 654
$\ln x_i$	9,4	11,6	12,4	14,1

x_i	0,0034	0,650	4	7	12
e^{x_i}	1,0	1,9	54,6	1 096,6	162 754,8

29 **1.** 4 **2.** -3 **3.** 5 **4.** 25 **5.** $\frac{1}{9}$ **6.** 7

30 **1.** $A = \sum_{i=1}^{n} i^2$; $B = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)$

2. $C = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_n - 1)$
$D = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$

Connaître le cours

31 **Diaporama QCM**
1. d **2.** a **3.** a **4.** c **5.** a **6.** b **7.** d **8.** b

Diaporama EXO

1. $A(2\,;1)$, $B(4\,;3)$, $C(5\,;2)$ et $D(6\,;4)$.

2. $G\left(\frac{17}{4}\,;\frac{5}{2}\right)$

3. $a = \frac{(1-3)(2-2)+(3-3)(0-2)+(5-3)(4-2)}{(1-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2}$ et

$b = \overline{y} - a\overline{x}$

4.

$$r = \frac{(1-3)(2-2)+(3-3)(0-2)+(5-3)(4-2)}{\sqrt{(1-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2} \times \sqrt{(2-2)^2+(0-2)^2+(4-2)^2}}$$

5. $y = 578{,}7x + 105{,}4$
6. $r \approx 0{,}76$
7. Rang 8
8. 33 %

32 **1.** Faux, $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

2. Vrai

3. Faux, $V(Y) = \frac{1}{3}\left((y_1 - \overline{y})^2 + (y_2 - \overline{y})^2 + (y_3 - \overline{y})^2\right)$

4. Faux, $\text{cov}(X, Y) =$

$\frac{1}{3}\left[(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{x})(y_2 - \overline{y}) + (x_3 - \overline{x})(y_3 - \overline{y})\right]$

33 **1.** $a = \frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+(x_3-\overline{x})(y_3-\overline{y})}{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2}$

et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

2.

$$r = \frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+(x_3-\overline{x})(y_3-\overline{y})}{\sqrt{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2} \times \sqrt{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+(y_3-\overline{y})^2}}$$

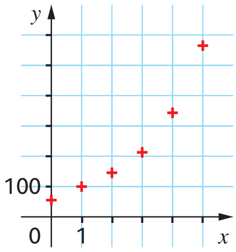
34 **1. a.** $y = 0{,}3x + 2{,}6$
b. $y = 0{,}25x + 2{,}57$
2. $r \approx 0{,}91$ qui est proche de 1 ; l'ajustement est justifié.

35 En B4 : =PENTE(B2:F2;B1:F1)
En B5 : =ORDONNEE.ORIGINE(B2:F2;B1:F1)
En B6 : =COEFFICIENT.CORRELATION(B2:F2;B1:F1)

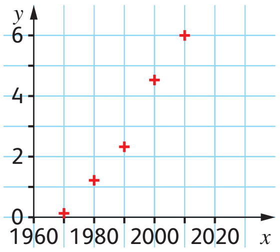
Travailler les capacités du thème

36 **1.** La série A est représentée par le nuage 2 ; la série B est représentée par le nuage 3 ; la série C est représentée par le nuage 1 et la série D est représentée par le nuage 4.
2. On peut envisager un ajustement affine seulement pour les séries C et D, car les points des nuages sont presque alignés.

37 Série 1



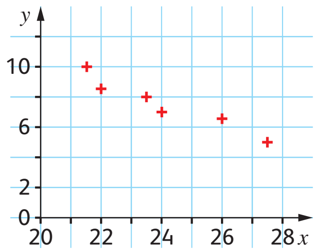
Un ajustement exponentiel est peut-être adapté.
Série 2



Un ajustement affine est peut-être adapté.

38	Série A	Série B	Série C	Série D
Point moyen	$\left(3{,}5\,;\dfrac{11}{12}\right)$	$(40\,;32)$	$\left(0{,}45\,;\dfrac{7}{12}\right)$	$\left(\dfrac{8}{3}\,;2{,}75\right)$

39 **1.**



2. Point moyen $G\left(\dfrac{289}{12}\,;7{,}5\right)\approx(24{,}08\,;7{,}5)$: pour un prix moyen au kg de 24,08 €, il a vendu en moyenne 7,5 kg.

40 **1.** La droite des points extrêmes est d_3 et la droite de Mayer est d_1. Donc la droite des moindres carrés est d_2.
2. a. Le coefficient directeur de la droite de Mayer (AF) est :

$$\frac{y_F-y_A}{x_F-x_A}=\frac{2-3}{6-1}=-0{,}2$$

L'ordonnée à l'origine est :

$$y_A-(-0{,}2)\times x_A=3+0{,}2\times 1=3{,}2$$

Donc $(AF): y=-0{,}2x+3{,}2$.
b. Le point moyen G_1 des 3 premiers points du nuage a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+2+3}{3}\,;\dfrac{3+2+7}{3}\right)=(2\,;4)$.
De même, le point moyen G_2 des 3 derniers points du nuage a pour coordonnées $(5\,;2)$.
La droite (G_1G_2) admet :
- pour coefficient directeur $\dfrac{2-4}{5-2}=-\dfrac{2}{3}$;
- pour ordonnée à l'origine $4-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times 2=\dfrac{16}{3}$.

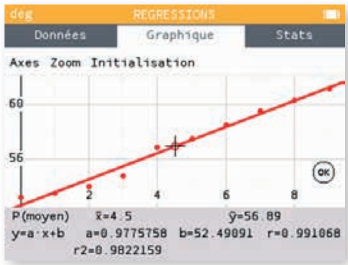
Donc $(G_1G_2): y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{16}{3}$.
c. Comme $\overline{x}=3{,}5$ et $\overline{y}=3$, on peut construire le tableau suivant.

x_i	1	2	3	4	5	6	
y_i	3	2	7	4	0	2	
$X_i=x_i-\overline{x}$	−2,5	−1,5	−0,5	0,5	1,5	2,5	
$Y_i=y_i-\overline{y}$	0	−1	4	1	−3	−1	Somme
$X_i\times Y_i$	0	1,5	−2	0,5	−4,5	−2,5	−7
$(X_i)^2$	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25	17,5
$(Y_i)^2$	0	1	16	1	9	1	28

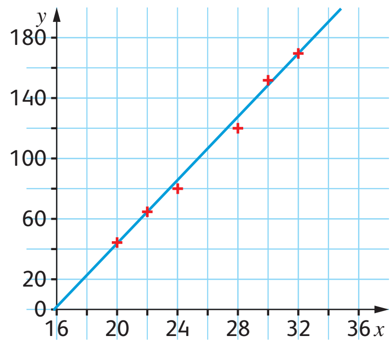
Alors $a=\dfrac{-7}{17{,}5}=-0{,}4$ et $b=3-(-0{,}4)\times 3{,}5=4{,}4$.

Donc $d_2: y=-0{,}4x+4{,}4$.

41

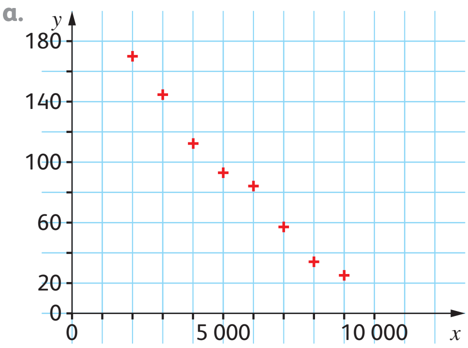


42 **1.**



2. Les points semblent alignés, un ajustement affine est pertinent.
3. $10{,}5\times 20-166=44$ et $10{,}5\times 32-166=170$ donc les deux points appartiennent bien à la droite (d).
4. a. On lit environ 138 ventes pour une température de 29 °C.
b. $10{,}5\times 29-166=138{,}5$ ce qui est cohérent.

43 **1. a.**



b. Un ajustement affine est envisageable, les points semblent proches d'une droite.
2. a. G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{2\,000+3\,000+4\,000+5\,000}{4}\,;\frac{170+145+112+93}{4}\right)$$

soit $(3\,500\,;130)$.

G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{6\,000+7\,000+8\,000+9\,000}{4};\frac{84+57+34+25}{4}\right)$$

soit $(7\,500;50)$.

b. Le coefficient directeur vaut $\dfrac{50-130}{7\,500-3\,500}=-0{,}02$ et $130=-0{,}02\times3\,500+p$ donc $p=200$ et l'équation de la droite de Mayer est $y=-0{,}02x+200$.

Pour $x=10\,000$, on obtient 0 client intéressé.

44 **1.** $\overline{x}=35$ et $\overline{y}=3{,}8$.

$\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=245$

$\sum(x_i-\overline{x})^2=2\,450$

D'où $a=\dfrac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{245}{2\,450}=0{,}1$

$b=\overline{y}-a\overline{x}=3{,}8-0{,}1\times35=0{,}3$

2. $\sum(y_i-\overline{y})^2=24{,}76$

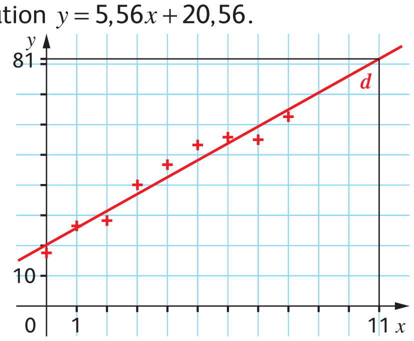
$$r=\frac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{245}{\sqrt{2\,450}\sqrt{24{,}76}}\approx0{,}995$$

3. Les résultats obtenus à la calculatrice sont identiques.

45 **1.** Voir graphique ci-dessous.

2. a. La droite d'ajustement par les moindres carrés admet pour équation $y=5{,}56x+20{,}56$.

b.



3. a. En 2020, on estime que la proportion des plus de 15 ans qui se connectent à l'Internet mobile est environ 81 %.

b. Pour $x=11$, $y=5{,}56\times11+20{,}56=81{,}72$. On retrouve le résultat précédent.

4. L'ajustement ne reste pas valable sur le long terme, car la proportion ne peut pas dépasser 100 %.

46 **1.** À la calculatrice, on obtient l'ajustement affine donné avec $r\approx0{,}981$ qui est proche de 1 donc l'ajustement est justifié.

2. a. Pour $x=55$ on obtient $0{,}7\times55-19{,}5=19$ m.

b. Pour $y=47$ on obtient $0{,}7\times x-19{,}5=47$ d'où $x=95$ km/h.

3. a. $0{,}7\times150-19{,}5=85{,}5$ m

b. $D=\dfrac{(150\div10)^2}{2}=112{,}5$ m

c. La distance obtenue avec la formule est beaucoup plus élevée, l'ajustement affine est adapté pour des vitesses faibles mais ne convient plus ensuite.

exercices Entraînement

1 Statistiques à deux variables

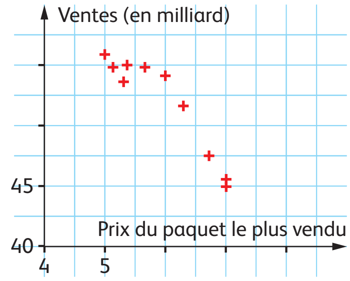
47 **1.** Les quantités étudiées sont les ventes de cigarettes et le prix du paquet le plus vendu.

On peut choisir pour X le prix du paquet le plus vendu, et pour Y les ventes de cigarettes associées.

2. a. On obtient :

Prix x_i (en €)	5	5,13	5,3	5,35	5,65	5,98
Vente y_i (en milliard)	55,8	54,9	53,6	55	54,8	54,1
Prix x_i (en €)	6,3	6,7	7	7	7	
Vente y_i (en milliard)	51,5	47,5	45	45,5	44,9	

b.



3. Les points du nuage sont presque alignés : on peut dire que les données sont corrélées.

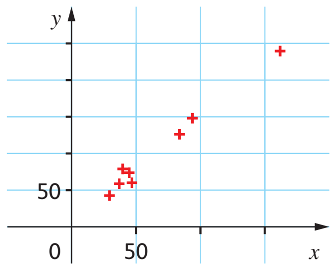
Ici, on peut dire qu'il existe un lien de cause à effet entre le prix d'un paquet de cigarettes et les ventes.

48 **1.** Il s'agit du nombre de buts marqués et du nombre de tirs tentés.

2. a.

Tirs tentés	162	94	84	47	45	45	45	40	37	30
Buts marqués	241	149	127	61	71	72	76	79	59	43

b.



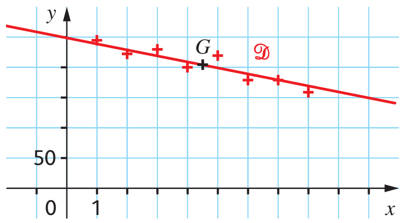
3. Les points du nuage sont relativement alignés. On a un coefficient de corrélation proche de 1 donc on peut dire que ces valeurs sont corrélées, le lien de cause à effet est plutôt cohérent dans un effectif professionnel : plus le joueur tire, plus il doit marquer. Ce qui est assez constant dans ce club est donc l'efficacité (ratio tentés/marqués).

49 **1.** Pour une taille de 0,4 m, on obtient environ 9,4 kg ce qui est donc assez éloigné de ce qui est indiqué sur la carte de Pikachu.

2. $r\approx0{,}89$ qui est proche de 1 donc la corrélation est plutôt bonne. Mais on ne peut pas en déduire un lien de causalité.

2 Ajustement affine

50 **1.** **2.** et **3.** **b.**



2. $G(4{,}5\,;205)$.

3. a. On résout
$205 = -10 \times 4{,}5 + b$.
Donc $b = 250$.

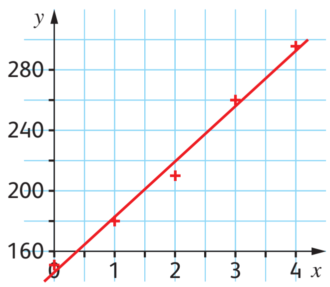
4. Pour $x = 10$,
$y = -10 \times 10 + 250 = 150$. On peut prévoir 150 milliers d'euros de chiffre d'affaires pour le 2e trimestre 2019.

51 **1.** Oui, les points semblent alignés.
2. a. $y = 12{,}13x + 1419{,}6$
b. $r \approx 0{,}997$ donc l'ajustement est justifié.
3. a. 2019 correspond à la valeur 7 pour x, on obtient 1 504,51 €.
b. Il y a un écart de 16,71 € entre la valeur estimée en **3. a.** et la valeur observée qui montre que l'ajustement donne une tendance mais pas la valeur exacte (mais l'écart est d'environ 1,1 % ce qui reste très acceptable).

52 **1.** La courbe est assez peu éloignée d'une droite donc on peut envisager un ajustement affine.
2. a. Pour $x = 10$ on obtient 1,3 million.
b. $-0{,}2x + 3{,}3 < 1$ pour $x > 11{,}5$ soit à partir de 2022.

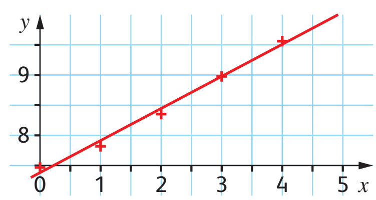
53 **1.** Oui, les points étant assez proches d'une certaine droite et la valeur r est très proche de 1.
2. a. En B9 : =PENTE(C2:C7;B2:B7)
En B10 : =ORDONNEE.ORIGINE(C2:C7;B2:B7)
En B11 : =COEFFICIENT.CORRELATION(C2:C7;B2:B7)
b. $y = 12{,}06x - 2{,}57$
3. Pour $x = 23$ milliers d'euros investis en publicité, on obtient $y \approx 274{,}81$ milliers d'euros de chiffre d'affaires.

54 **1.**



2. $y = 37{,}2x + 144{,}8$
3. a. Pour janvier 2020, rang 10, on lit graphiquement environ 520 milliers de téléchargements.
b. $37{,}2 \times 10 + 144{,}8 = 516{,}8$ milliers de téléchargements.

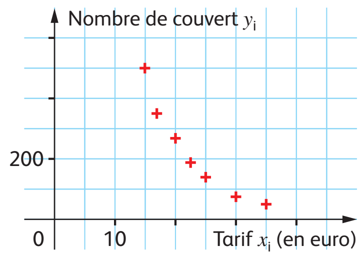
55 **1.**



2. a. et **b.** $y = 0{,}52x + 7{,}39$
3. a. Cela correspond à $x = 8$, on lit graphiquement environ 11,5 millions d'abonnements.
b. $0{,}52 \times 8 + 7{,}39 = 11{,}55$

3 Ajustement et changement de variable

56 **1.**



Un ajustement affine ne semble pas adapté.
2. a.

x_i	15	17	20	22,5	25	30	35
z_i	6,21	5,86	5,60	5,25	4,94	4,32	3,91

b. On obtient $z = -0{,}116x + 7{,}878$, avec $r \approx -0{,}997$.
Cet ajustement affine est adapté.
c. Comme $z = \ln(y)$, on a $\ln(y) = -0{,}116x + 7{,}878$.
Donc $y = e^{-0{,}116x + 7{,}878} = e^{7{,}878} \times e^{-0{,}116x}$.
Or $e^{7{,}878} \approx 2\,639$. Donc la fonction f définie sur $[15\,;35]$ par $f(x) = 2\,639 \times e^{-0{,}116x}$ permet de modéliser la situation.

3. On résout

$$f(x) \geqslant 100 \Leftrightarrow 2\,639 \times e^{-0{,}116x} \geqslant 100$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}116x} \geqslant \frac{100}{2\,639} \Leftrightarrow -0{,}116x \geqslant \ln\left(\frac{100}{2\,639}\right)$$
$$\Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{0{,}116}\ln\left(\frac{100}{2\,639}\right)$$

Or $-\dfrac{1}{0{,}116}\ln\left(\dfrac{100}{2639}\right) \approx 28{,}215$.

En arrondissant au centime, le prix maximum du buffet est 28,21 euros.

57 **1. a.** $y = -1970{,}091x + 22\,682{,}91$ et $r \approx -0{,}983$.
b. En 2020 : $y = -1970{,}091 \times 10 + 22\,682{,}91 = 2\,982$ €.
Puis 1 012 € en 2021 ; à partir de 2022, la cote estimée est négative donc l'ajustement n'a plus de sens.
2. a.

x_i	0	1	2	3	4
$z_i = \ln(y_i)$	10,093	10,007	9,758	9,660	9,535
x_i	5	6	7	8	9
$z_i = \ln(y_i)$	9,410	9,225	9,129	8,908	8,708

b. $z = -0{,}150x + 10{,}118$ et $r \approx -0{,}996$.
c. $\ln(y) = -0{,}15x + 10{,}118$ ssi :

$$y = e^{-0{,}15x + 10{,}118} \approx 24\,785{,}15e^{-0{,}15x}$$

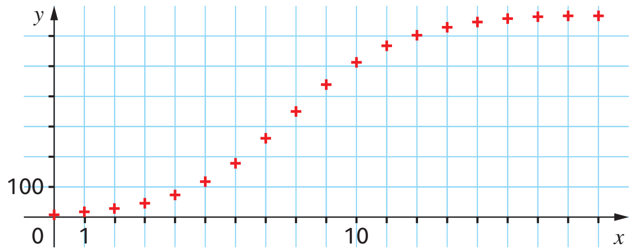
d. En 2020 : $y = 24\,785{,}15e^{-0{,}15 \times 10} \approx 5\,530$ €, puis 4 760 € en 2021, 4 097 € en 2022, 3 526 € en 2023, 3 035 € en 2024 et 2 612 € en 2025.
3. Cet ajustement exponentiel est plus adapté, les cotes restant positives jusqu'en 2025 (et on a un coefficient de corrélation r proche de –1 en **2. a.** également).

58 **1.** On obtient à la calculatrice $m = -70{,}65x + 68{,}76$ ce qui donne pour 2019 : $m = -70{,}65 \times 19 + 68{,}76$, soit environ –1273,6 cm de masse cumulée.

2. Non la valeur estimée de –1 273,6 cm est relativement éloignée de la valeur observée (environ 14 % d'erreur relative).
3. a. $y \approx 0{,}1x + 5{,}34$
b. $|m| \approx e^{0{,}1x+5{,}34}$ donc $m \approx -208{,}5e^{0{,}1x}$ (car les valeurs de m sont négatives).
c. En 2019 : $-208{,}5 \times e^{0{,}1\times 19} \approx -1394$ cm, qui est assez proche de la valeur observée (–1 479 cm), donc effectivement cet ajustement est meilleur.

Apprendre à représenter

1.



On constate effectivement une croissance rapide au départ, puis ralentie, et enfin des valeurs qui stagnent.
2. a.

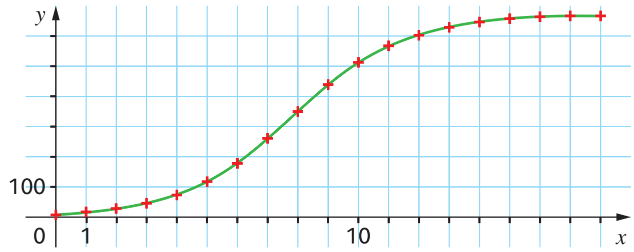
t_i	0	1	2	3	4
$y_i = \ln(m_i)$	2,262	2,907	3,367	3,854	4,264
t_i	5	6	7	8	
$y_i = \ln(m_i)$	4,780	5,162	5,550	5,860	

b. On obtient $y \approx 0{,}447t + 2{,}43$ avec $r \approx 0{,}997$: l'ajustement est de bonne qualité.
c. $m \approx 11{,}36e^{0{,}447t}$: on a effectivement une croissance exponentielle pendant les 8 premières heures.
3. a. Puisque $\lambda > 0$ on a $e^{-\lambda t}$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc le quotient tend vers $\dfrac{M}{1+k\times 0} = M$ lorsque que t tend vers $+\infty$.
b. La valeur maximale vers laquelle les ordonnées des points semble tendre est cohérente avec 665.
c.

t_i	0	1	2	3	4
z_i	4,223	3,565	3,088	2,572	2,123
t_i	5	6	7	8	9
z_i	1,522	1,033	0,460	–0,110	–0,681
t_i	10	11	12	13	14
z_i	–1,219	–1,671	–2,137	–2,872	–3,276
t_i	15	16	17	18	
z_i	–3,847	–4,278	–4,843	–5,332	

d. On obtient $z \approx 0{,}531t + 4{,}166$ avec $r \approx -0{,}9998$.
D'où $m \approx \dfrac{665}{1+e^{-0{,}531t+4{,}166}} \approx \dfrac{665}{1+64{,}5e^{-0{,}531t}}$.

4.



L'ajustement par la fonction f est visuellement de très bonne qualité.

Maths en situation...

59 **Partie A**
1. a. $y = 0{,}289x - 534{,}98$
b. $r \approx 0{,}99$ donc l'ajustement affine est adapté.
c. En 2020 : 48,8 millions, puis 49,1 millions en 2021, 49,4 millions en 2022, 49,7 millions en 2023, 50,0 millions en 2024 et 50,2 millions en 2025.
2. a. $y \approx 0{,}0067x + 33{,}18$
b. L'ajustement affine n'est pas pertinent sur la période 2010-2019 ($r \approx 0{,}12$), mais il peut peut-être donner la tendance après 2019.
c. Chaque année entre 2020 et 2025 : 46,7 millions d'habitants (en arrondissant à 0,1 million près).
3. Dire lequel ajustement donne des estimations les plus proches des valeurs observées.
Partie B
1. a. $y = 0{,}328x + 27{,}542$
b. $r \approx 0{,}998$ donc l'ajustement affine est adapté.
c. En 2020 : 37,4 millions, puis 37,7 millions en 2021 ; 38,0 millions en 2022 ; 38,4 millions en 2023 ; 38,7 millions en 2024 ; 39,0 millions en 2025.
2. a. On obtient, à 0,01 près :

x_i	0	1	2	3	4
y_i	3,32	3,33	3,35	3,36	3,37
x_i	5	6	7	8	9
y_i	3,38	3,39	3,40	3,41	3,41
x_i	10	11	12	13	14
y_i	3,42	3,43	3,45	3,45	3,46
x_i	15	16	17	18	19
y_i	3,47	3,48	3,49	3,50	3,51
x_i	20	21	22	23	24
y_i	3,53	3,53	3,55	3,56	3,57
x_i	25	26	27	28	29
y_i	3,58	3,59	3,60	3,61	3,63

b. $z = 0{,}010x + 3{,}324$ avec $r \approx 0{,}999$ donc l'ajustement est adapté.
c. $y = e^{0{,}01x+3{,}324} \approx 27{,}77e^{0{,}01x}$ qui donne en 2020 : 37,5 millions, puis 37,9 millions en 2021 ; 38,2 millions en 2022 ; 38,6 millions en 2023 ; 39,0 millions en 2024 et 39,4 millions en 2025.
3. Le modèle exponentiel donne des chiffres légèrement supérieurs et certainement plus proches de la réalité.

60 **1.** On peut ajuster par la méthode des moindres carrés.

- La température t en fonction de l'année x :

$$t = 0{,}0219x - 43{,}286$$

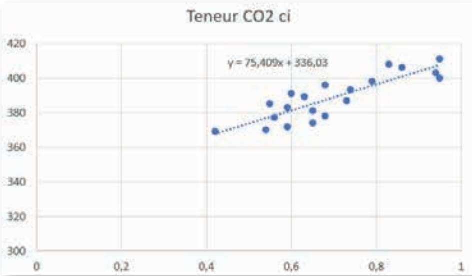
- La teneur c en CO_2 en fonction de l'année x :

$$c = 2{,}21x - 4\,052$$

On obtient les estimations suivantes :

Année	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Température	0,95	0,97	1,00	1,02	1,04	1,06
Teneur en CO_2	412	414	417	419	421	423

2. Un ajustement affine entre t et c donne un coefficient de corrélation de 0,86 donc les anomalies de température et la teneur en CO_2 semblent corrélées.



61 **1. a.** Voir fichier TICE.

b. On obtient $y = 0{,}737x + 2{,}191$ avec $r \approx 0{,}97$ donc l'ajustement est adapté.

2. $\ln(c) = 0{,}737\ln(m) + 2{,}191$ donc $c = e^{0{,}737\ln(m)+2{,}191}$, ou encore : $c \approx 8{,}94e^{0{,}737\ln(m)}$.

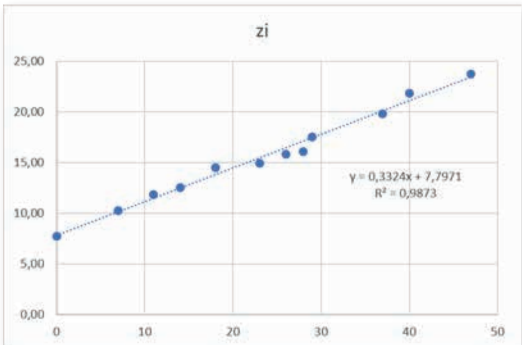
En écrivant avec la notation puissance (hors-programme) :

$$c \approx 8{,}94m^{0{,}737}$$

62 **Partie A**

1. On ne peut pas placer sur un même graphique de manière exploitable des valeurs de l'ordre de 10^3, 10^6 et 10^9.

2. et **3.** Cf. fichier TICE.



Un ajustement affine semble adapté car les points semblent proches d'une droite.

Partie B

1. a. On obtient $z = 0{,}33x + 7{,}80$.

b. $r \approx 0{,}99$

2. r est très proche de 1 donc un ajustement affine de z en x est adapté.

3. $\ln(y) = 0{,}33x + 7{,}80$, donc $y = e^{0{,}33x+7{,}8}$.

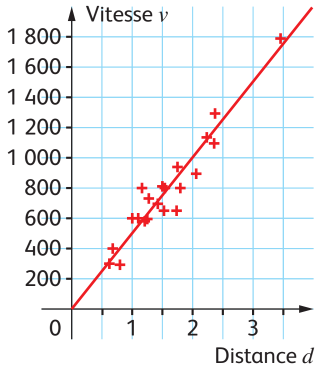
4. $$\frac{f(x+2)}{f(x)} = \frac{e^{0{,}33(x+2)+7{,}8}}{e^{0{,}33x+7{,}8}} = \frac{e^{0{,}33(x+2)}}{e^{0{,}33x}} = \frac{e^{0{,}33x+0{,}66}}{e^{0{,}33x}} = e^{0{,}66} \approx 2$$

Cela signifie que le nombre de transistors double tous les deux ans et que le modèle de la loi de Moore est toujours valable.

63 À la calculatrice, en utilisant une régression linéaire, on obtient : $t = 0{,}040v + 0{,}130$, avec un coefficient de corrélation $r \approx 0{,}998$, très proche de 1.

Cet ajustement est donc adapté.

64 **1.**



2. $G(1{,}56\,;785{,}24)$

La droite (OG) a donc pour équation $y = mx$ avec :

$$m \approx \frac{785{,}24}{1{,}56} \approx 503{,}8$$

3. La droite (OG) semble être un bon ajustement affine.

65 **1. a.** Cf. fichier TICE.

b. Un ajustement affine n'est pas du tout approprié.

2. a. et **b.** Cf. fichier TICE.

c. Un ajustement affine semble adapté, seul le dernier point semble « dévier » de cette droite.

d. La droite tracée correspond à $r \approx 0{,}98$ donc un ajustement affine est bien approprié.

3. $\ln P = -6\,696{,}1 \times \frac{1}{T} + 26{,}027$ d'où :

$$P = \exp\left(-6696{,}1 \times \frac{1}{T} + 26{,}027\right)$$

66 En traçant le nuage de points (voir fichier TICE), on constate qu'une évolution globalement affine est adaptée à la situation ($r \approx 0{,}985$) mais il faudrait plutôt couper la série en deux, la tendance de 2000-2008 n'étant pas du tout la même pour 2009-2018 (ralentissement de la croissance du PIB).

Travaux pratiques

Troisième loi de Kepler

Partie A

1. Cf. fichier TICE.

2. Les points ne semblent pas alignés.

3. En choisissant des échelles logarithmiques sur chacun des axes, les points semblent alignés.

Partie B

1. Voir fichier TICE.

2. a. C'est la 3e formule qui est correcte.

b. Cf. fichier TICE.

c. =SOMME(B8:F8)/SOMME(B9:F9) pour le coefficient directeur.

=G5-G4*C18 pour l'ordonnée à l'origine (si on a placé a en C18).

d. En arrondissant au centième, c'est bien ce qu'on a obtenu.

3. Le coefficient de corrélation est de 1, l'ajustement affine est donc adapté.

4. Puisque $y=\frac{3}{2}x-11{,}97$, on a alors $\ln T=\frac{3}{2}\ln a-11{,}97$ donc $2\ln(T)=3\ln(a)-23{,}94$, donc $\ln(T^2)=\ln(a^3)-23{,}94$.
On en déduit que :

$$\ln(T^2)-\ln(a^3)=\ln\left(\frac{T^2}{a^3}\right)=-23{,}94$$

Donc $\frac{T^2}{a^3}=e^{-23{,}94}\approx 4\times 10^{-11}$ (constante).

5. Pour les trois planètes, on trouve aussi $\frac{T^2}{a^3}\approx 4\times 10^{-11}$ donc la relation est vérifiée.

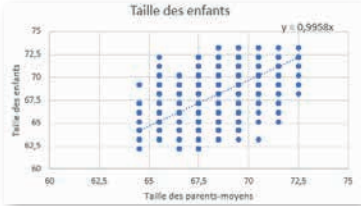
Les lois empiriques d'Engel

Partie A

1. On constate sur la ligne « Produits alimentaires et boissons non alcoolisées » que la proportion de la dépense de consommation totale est décroissante de Q1 (quartile ayant le niveau de vie le plus faible) à Q5. Ce qui valide la loi d'Engel.
2. En 2011 : pour les lignes « Logement » et « Habillement », les proportions sont relativement constantes pour chaque quintile de niveau de vie. Ce qui confirme les observations d'Engel.
Pour les loisirs, la proportion de la dépense augmente selon le niveau de vie ; pour la santé, la proportion de la dépense est relativement constante (autour de 4,2 %). Mais pour l'éducation, la proportion de la dépense est plutôt décroissante en fonction du niveau de vie. Donc les constations d'Engel sont à relativiser.

Pourquoi utiliser le terme de « régression » ?

On peut faire un nuage de points avec pour coordonnées les tailles des enfants et des « parents moyens ».



En traçant un ajustement passant par l'origine du repère, on obtient une droite dont le coefficient directeur est strictement inférieur à 1 : la taille des enfants semble donc globalement inférieure à celle de leurs parents.
D'après cette étude de Galton, les enfants issus de « très grands » parents seront grands mais pas aussi grands que les parents, et l'inverse pour les enfants issus de parents très petits. Par exemple, pour des parents de taille 71,5 pouces, la moyenne des tailles de leurs 43 enfants est de 69,9 pouces, alors que pour des parents de taille 66,5 pouces, les enfants ont une taille moyenne de 67,2 pouces. Ces tailles vont « régresser » vers la taille moyenne, cela signifie qu'elles sont « attirées » par les valeurs moyennes, vers le bas pour les grandes, vers le haut pour les petites.