Sujets de Baccalauréat Malien
TSE- STI
(2010 – 2020)

Conseils pratiques pour l'épreuve de mathématiques au baccalauréat

Le texte de l'épreuve de mathématiques comporte deux exercices et un problème à rédiger en **3 heures**. Le nombre de points attribués aux exercices et au problème est toujours précisé dans l'énoncé.
Un exercice en **4 ou en 5 points** devra être rédigé et relu en **40 min**, un problème en **12 points** en environ **2h20 minutes**.

Au début de l'épreuve

- Lisez lentement **tout l'énoncé, c'est-à-dire du début à la fin**. En effet, les questions sont rarement indépendantes et il peut arriver que l'une d'entre elles donne une indication précieuse quant à la résolution des questions précédentes.
- Détermine le temps maximum que vous devez employer pour traiter, rédiger et relire chaque exercice et le problème en fonction des indications du barème.
- Commencez par l'exercice qui vous parait ≪ **le plus facile** ≫et même si possible par **le problème.**

Pendant l'épreuve

- Cherchez d'abord les questions au brouillon, si vous terminez l'exercice, recopiez-le ; si vous n'arrivez pas à Résous une question, relisez une fois votre brouillon, si tout vous parait juste, commencez la rédaction ; ≪ **la mise au propre** ≫en faisant ressortir les résultats obtenus dans les premières questions car ceci vous aidera à trouver la suite.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat donné dans l'énoncé, laissez un **blanc** dans votre copie c'est-à-dire **un espace** en fonction de la densité de la question, et continuez votre exercice ou votre problème.
- N'oubliez pas qu'une réponse doit être justifiée.

Présentation de votre copie

- Séparez les questions, encadrez ou soulignez les résultats ; respectez les notations du texte car ceci peut inciter le correcteur à une **indulgence** vis-à-vis de votre copie.
- N'abusez pas **des effaceurs et des correcteurs**, la copie devient parfois illisible.
- N'oubliez pas que **les figures géométriques et les graphiques** doivent comporter tous les points nécessaires à la compréhension de vos démonstrations.

Bonne chance à tous et à toutes !!!

Sujet Bac 2010. (TSE - STI)

Exercice 1……………………..…………………………………………$(\mathbf{5\ points})$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $Z^4 + 5Z^3 + (11-3i)Z^2 + (10-10i)Z - 8i = 0$

1) Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure Z_0 que l'on déterminera.
2) Montre que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
3) Achève la résolution de (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
4) En désignant par Z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par Z_2 la solution réelle et par Z_3 la quatrième solution de (E), montre que Z_0 ; Z_1 ; Z_2 et Z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
5) Donne le module et un argument de chacune des solutions de (E).

Exercice 2……………………..…………………………………………$(\mathbf{5\ points})$

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. On désigne par S la réflexion d'axe la droite (D): $y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O\ ;\ \vec{\imath}\ )$

1) Soit M un point du plan et M_1 son image par S ; on pose $M' = \sigma(M_1)$.

a) Calcule les coordonnées $x'\ et\ y'\ de\ M'$ en fonction des coordonnées $x\ et\ y$ de M.

b) Caractérise la transformation qui fait passer de M à M'.

c) Au point $M(x\ ;\ y)$, on associe le point $N(X\ ;\ Y)$ telles que : $\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$

Montre que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.

2) Sachant que le point M décrit la droite d'équation $y = x$, détermine l'ensemble décrit par N ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $(M\ ;\ N)$

Problème……………………………………………………………$(\mathbf{10\ points})$

Partie A : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Détermine les limites de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.
3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifie que zéro (0) en est une.

b) L'autre solution est appelée α. Montre que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie B : Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$.

1) Détermine les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
2) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)\ et\ g(x)$ ont même signe. (g est la fonction définie dans la partie A). Etudie le sens de variation de f.
3) Montre que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A).

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$).

4) Etablis le tableau de variation de f.
5) Trace la courbe $(\mathcal{C})$ représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique 2cm).

Partie C : Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\,dx$

1) Montre que pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n\ et\ \sin(n\pi) = 0$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montre que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$
3) Montre que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$. En déduis la limite de I_n en $+\infty$

Correction Bac 2010. (TSE - STI)

Exercice 1……………….……………………………………….($\boldsymbol{5\ points}$)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $Z^4 + 5Z^3 + (11 - 3i)Z^2 + (10 - 10i)Z - 8i = 0$

1) Montrons que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure Z_0 que l'on déterminera.

Soit $Z_0 = ib$ cette solution imaginaire pure telle que :

$(ib)^4 + 5(ib)^3 + (11 - 3i)(ib)^2 + (10 - 10i)(ib) - 8i = 0 \Leftrightarrow$

$(b^4 - 11b^2 + 10b) + i(-5b^3 + 3b^2 + 10b - 8) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b^4 - 11b^2 + 10b = 0 & (1) \\ -5b^3 + 3b^2 + 10b - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) : $b^4 - 11b^2 + 10b = 0 \Leftrightarrow b^3 - 11b + 10 = 0.$

1 étant une solution de l'équation $b^3 - 11b + 10 = 0$, alors on a : $b = 1$ et par conséquent $Z_0 = i$ est la solution imaginaire pure cherchée.

2) Montrons que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

Soit a cette solution réelle telle que : $a^4 + 5a^3 + (11 - 3i)a^2 + (10 - 10i)a - 8i = 0 \Leftrightarrow$

$(a^4 + 5a^3 + 11a^2 + 10a) - i(3a^2 + 10b + 8) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^4 + 5a^3 + 11a^2 + 10a = 0 & (1) \\ 3a^2 + 10b + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) : $3a^2 + 10b + 8 = 0$. La résolution de cette équation donne $a_1 = -2$ et $a_2 = -\frac{4}{3}$

Ainsi $a_1 = -2$ vérifie l'équation (1). D'où -2 est la solution réelle cherchée.

3) Achevons la résolution de (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Pour cela factorisons le polynôme $Z^4 + 5Z^3 + (11 - 3i)Z^2 + (10 - 10i)Z - 8i$

On a : $(Z - i)(Z + 2)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma) = Z^4 + 5Z^3 + (11 - 3i)Z^2 + (10 - 10i)Z - 8i \Leftrightarrow$

$\alpha Z^4 + (\beta + 2\alpha - i\alpha)Z^3 + (\gamma + 2\beta - i\beta - 2i\alpha)Z^2 + (2\gamma - i\gamma - 2i\beta)Z - 2i\gamma = Z^4 + 5Z^3 + (11 - 3i)Z^2 + (10 - 10i)Z - 8i$

Par identification, on a : $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 2\alpha - i\alpha = 5 \\ \gamma + 2\beta - i\beta - 2i\alpha = 11 - 3i \\ 2\gamma - i\gamma - 2i\beta = 10 - 10i \\ -2i\gamma = -8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 + i \\ \gamma = 4 \end{cases}$

D'où $(Z - i)(Z + 2)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma) = 0 \Leftrightarrow (Z - i)(Z + 2)[Z^2 + (3 + i)Z + 4] = 0$

$\Leftrightarrow (Z - i)(Z + 2)[Z^2 + (3 + i)Z + 4] = 0 \Leftrightarrow$

$Z - i = 0$ ou $Z + 2 = 0$ ou $Z^2 + (3 + i)Z + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$Z = i$ ou $Z = -2$ ou $Z^2 + (3 + i)Z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = -8 + 6i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ xy = 3 & (2) \\ x^2 + y^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) $+$ (3)

On a: $2x^2 = 2$ =>x^2 = 1 =>$x = -1$ ou $x = 1$

(2) : $xy = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$

- Si $x = 1 \Rightarrow y = 3$ et $\delta_1 = 1 + 3i$
- Si $x = -1 \Rightarrow y = -3$ et $\delta_2 = -1 - 3i$

Par conséquent on a :Z= $\frac{-b + \delta 1}{2a} = \frac{-(3+i) + (1+3i)}{2} = -1 - i$ ou

$$Z= \frac{-b + \delta 2}{2a} = \frac{-(3+i) + (-1-3i)}{2} = -2 - 2i$$

D'où S = $\{i\ ;\ -2\ ;\ -1 - i\ ; -2 - 2i\}$

4) Soient $Z_0 = i$; $Z_1 = -1 - \mathrm{i}$; $Z_2 = -2$ et $Z_3 = -2 - 2i$
Montrons que Z_0 ; Z_1 ; Z_2 et Z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Z_0 ; Z_1 ; Z_2 et Z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_3}{Z_2} = q$ où q est un réel ou un complexe.
$\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{-1-i}{i} = 1 + i$; $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{-2}{-1-i} = 1 + i$ et $\frac{Z_3}{Z_2} = \frac{-2-2i}{-2} = 1 + i$
Puisque $\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_3}{Z_2} = 1 + i$ alors Z_0 ; Z_1 ; Z_2 et Z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique.

5) Donnons le module et un argument de chacune des solutions de (E).
$Z_0 = i$ => $|Z_0| = 1$ et $arg(Z_0) = \frac{\pi}{2}$

$Z_1 = -1 - \mathrm{i}$ => $|Z_1| = \sqrt{2}$ et $arg(Z_1) = \frac{3\pi}{4}$

$Z_2 = -2$ => $|Z_2| = 2$ et $arg(Z_2) = \pi$

$Z_3 = -2 - 2i$ => $|Z_3| = 2\sqrt{2}$ et $arg(Z_3) = \frac{5\pi}{4}$

Exercice 2……………..……………………………………………(5 $\boldsymbol{points}$)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. On désigne par S la réflexion d'axe la droite (D): $y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O\ ;\ \vec{\imath}\ )$

1) Soit M un point du plan et M_1 son image par S ; on pose $M' = \sigma(M_1)$.

a) Calculons les coordonnées $x'\ et\ y'\ de\ M'$ en fonction des coordonnées $x\ et\ y$ de M.

On a : $S(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}$ et $M' = \sigma(M_1). \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ et

b) Caractérisons la transformation qui fait passer de M à M'.

C'est la rotation de centre $O\binom{0}{0}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$

c) Au point $M(x\ ;\ y)$, on associe le point $N(X\ ;\ Y)$ telles que : $\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$

Montrons que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.

2) Sachant que le point M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminons l'ensemble décrit par N ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $(M\ ;\ N)$

- Déterminons l'ensemble décrit par N

$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow X + Y = 2 + y - x$. Or $y = x$

$\Leftrightarrow\ X + Y = 2 + y - y \Leftrightarrow X + Y = 2 \Leftrightarrow X + Y - 2 = 0$

D'où l'ensemble décrit par N est la droite d'équation $X + Y - 2 = 0$

- Déterminons l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $(M\ ;\ N)$

Le milieu du bipoint $(M\ ;\ N)$ a pour coordonnées $\left(\frac{x+X}{2}\ ;\ \frac{y+Y}{2}\right)$

Donc on a : $y = x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+X}{2} = x + \frac{1}{2} \\ \frac{y+Y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ car $y = x$

D'où l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $(M\ ;\ N)$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

Problème……………………………………………………….(10 $\boldsymbol{points}$)

Partie A : Soit g la fonction numérique définie sur ℝ par : $g(x) = 2e^{x} - x - 2$.

1) Déterminons les limites de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} 2e^{x} - x - 2 = 2(0) - (-\infty) - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} 2e^{x} - x - 2 = 2(+\infty) - (+\infty) - 2 = +\infty - \infty =$ FI

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} x\left(\frac{2e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty)(+\infty - 1 - 0) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

2) Etudions le sens de variation de g

$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g'(x) = 2e^x - 1$

Posons $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -ln2$

x	$-\infty$		$-ln2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

- $\forall x \in]-\infty\ ;\ -ln2[\ ;\ g'(x) < 0$ et par conséquent pour tout $x \in]-\infty\ ;\ -ln2[\ ;\ g$ est strictement décroissante.

- $\forall x \in]-ln2\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) > 0$ et par conséquent pour tout $x \in]-ln2\ ;\ +\infty[\ ;\ g$ est strictement croissante.

Dressons son tableau de variation.

x	$-\infty$		α		$-ln2$		0		$+\infty$
$g'(x)$				$-$	0			$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-1 + ln2$	↗	0	↗	$+\infty$

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
a) Vérifions que zéro (0) en est une.
0 est une solution de l'équation $g(x) = 0$ si et seulement si $g(0) = 0$
$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0.$
D'où 0 est une solution de l'équation $g(x) = 0$.

b) L'autre solution étant α, montrons que $-1,6 \le \alpha \le -1,5$.

- D'après le tableau de variation, $\forall\ x \in\ ]-\infty\ ;\ -ln2[$, g est définie, continue et strictement décroissante. Alors elle réalise une bijection de $]-\infty\ ;\ -ln2[$ vers $]-1 + ln2\ ;\ +\infty[$ et puisque $0 \in\ ]-1 + ln2\ ;\ +\infty[$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une autre solution α telle que $g(\alpha) = 0$

- De plus $\begin{cases} g(-1,6) = 0,004 \\ \quad et \\ g(-1,5) = 0,054 \end{cases}$ => $g(-1,6) \times p(-1,5) < 0.$
  Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in\ ]-1,6\ ;\ -1,5\ [$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une autre solution $\alpha \in\ ]-1,6\ ;\ -1,5\ [$.

4) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

D'après le tableau de variation de g, on a :

- $\forall x \in]-\infty\,;\ \alpha[\, \cup\,]0\,;\ +\infty[\,; g(x) > 0$
- $\forall x \in]0\,;\ \alpha[; g(x) < 0$

Partie B : Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^{x}$.
1) Déterminons les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} e^{2x} - (x+1)\,e^{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} e^{2x} - xe^{x} - e^{x} = 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} e^{2x} - (x+1)\,e^{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{x}{e^{x}} - \frac{1}{e^{x}}\right) = (+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty$$

2) Calculons $f'(x)$ et montrons que $f'(x)\ et\ g(x)$ ont même signe

$f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^{x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - [e^{x} + (x+1)e^{x}\ ] = 2e^{2x} - e^{x} - (x+1)e^{x}$

$\Leftrightarrow f'(x) = e^{x}(2e^{x} - x - 2\ ) \Leftrightarrow f'(x) = e^{x} \times g(x)$

D'où $f'(x)\ et\ g(x)$ ont même signe

Etudions le sens de variation de f.

Puisque $f'(x)\ et\ g(x)$ ont même signe, alors

- $\forall x \in]-\infty\,;\ \alpha[\, \cup\,]0\,;\ +\infty[\,; f'(x) > 0$ et $f(x)$ est strictement croissante
- $\forall x \in]0\,;\ \alpha[; f'(x) < 0$ et $f(x)$ est strictement décroissante

3) Montrons que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A).

On sait que d'après partie A, 3) b), on a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{2}$
Or $f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)\,e^{\alpha} = (e^{\alpha})^2 - (\alpha+1)\,e^{\alpha}$.

Remplaçons $e^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{2}$ par sa valeur dans $f(\alpha) = (e^{\alpha})^2 - (\alpha+1)\,e^{\alpha}$.

Ainsi on a : $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\frac{\alpha+2}{2} = \frac{(\alpha+2)^2}{4} - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} = \frac{(\alpha+2)^2 - 2\,(\alpha+1)(\alpha+2)}{4}$

$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} \Leftrightarrow f(\alpha) = -\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4}$

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$.

On sait que $-1{,}6 \ \le\ \alpha\ \le\ -1{,}5 \Leftrightarrow$

$f(-1{,}6\,) \leq \ f(\alpha) \ \leq \ f(-1{,}5) \Leftrightarrow$

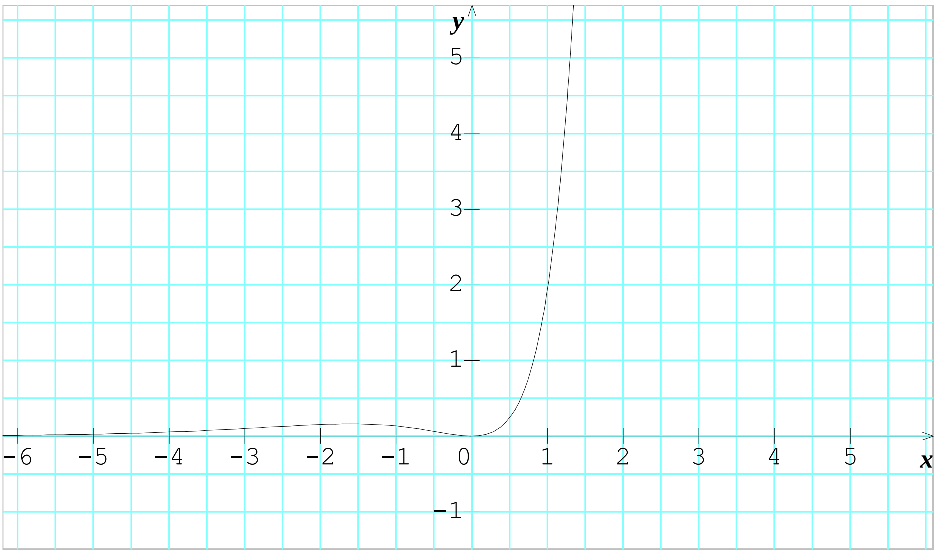
$0{,}16 \leq \ -\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4} \leq \ 0{,}18 \Leftrightarrow$

$0{,}16 \leq \ f(\alpha) \leq \ 0{,}18$ est un encadrement de $f(\alpha)$

4) Etablissons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) Traçons la courbe $(\mathcal{C})$ de f.



Partie C : Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx$

1) Montrons que pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases} \cos(n\pi) = (-1)^n \\ \quad et \\ \sin(n\pi) = 0 \end{cases}$

- Pour $n = 0;$ on a : $\begin{cases} \cos(0) = (-1)^0 \\ \quad et \\ \sin(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ et \\ 0 = 0 \end{cases}$ vraie
- Pour $n = 1;$ on a : $\begin{cases} \cos(\pi) = (-1)^1 \\ \quad et \\ \sin(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ et \\ 0 = 0 \end{cases}$ vraie

Supposons la relation vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\begin{cases} \cos(\mathrm{n}\pi) = (-1)^n \\ et \\ \sin(\mathrm{n}\pi) = 0 \end{cases}$

et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $(n+1)$ c'est-à-dire montrons que

$\begin{cases} \cos\pi(n+1) = (-1)^{n+1} \\ et \\ \sin\pi(n+1) = 0 \end{cases}$ est aussi vraie.

On a : $\begin{cases} \cos\pi(n+1) = (-1)^{n+1} \\ et \\ \sin\pi(n+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\pi n+\pi) = (-1)^{n+1} \\ et \\ \sin(\pi n+\pi) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(\pi n) = (-1)\times(-1)^n \\ et \\ -\sin(\pi n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\pi n) = (-1)^n \\ et \\ \sin(\pi n) = 0 \end{cases}$

D'où la relation est vraie à l'ordre $(n+1)$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a :$\begin{cases} \cos(\mathrm{n}\pi) = (-1)^n \\ et \\ \sin(\mathrm{n}\pi) = 0 \end{cases}$

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$

$I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx.$

Posons $u = \cos(nx)$ => $u' = -n\sin(nx)$
$v' = e^x$ => $v = e^x$

=> $I_n = [e^x\cos(nx)]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} e^x \sin(nx)dx \Leftrightarrow$

$I_n = (-1)^n e^x - 1 + n\int_0^{\pi} e^x \sin(nx)dx \Leftrightarrow$

Posons $u = \sin(nx)$ => $u' = n\cos(nx)$
$v' = e^x$ => $v = e^x$
=> $I_n = (-1)^n e^x - 1 + n\left[[e^x\sin(nx)]_0^{\pi} - n\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)dx\right] \Leftrightarrow$

$I_n = (-1)^n e^x - 1 + [ne^x\sin(nx)]_0^{\pi} - n^2\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)dx \Leftrightarrow$

$I_n = (-1)^n e^x - 1 - n^2\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)dx \Leftrightarrow$

$I_n = (-1)^n e^x - 1 - n^2 I_n \Leftrightarrow$

$I_n + n^2 I_n = (-1)^n e^x - 1 \Leftrightarrow$

$(1+n^2)I_n = (-1)^n e^x - 1 \Leftrightarrow I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2} \quad (CQFD)$

3) Montrons que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$.

On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow$

$$-e^{\pi} \leq (-1)^n e^{\pi} \leq e^{\pi} \Leftrightarrow$$

$$-e^{\pi} - 1 \leq (-1)^n e^{\pi} - 1 \leq e^{\pi} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-e^{\pi}-1}{1+n^2} \leq \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2} \leq \frac{e^{\pi}-1}{1+n^2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2} \leq \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2} \leq \frac{e^{\pi}-1}{1+n^2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2} \leq I_n \leq \frac{e^{\pi}-1}{1+n^2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2} \leq I_n \leq \frac{e^{\pi}-1}{1+n^2} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{e^{\pi}-1}{1+n^2}\right| \leq |I_n| \leq \left|-\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}\right| \Leftrightarrow \qquad \frac{e^{\pi}-1}{1+n^2} \leq |I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$$

$$\Rightarrow \qquad |I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2} \, CQFD$$

En déduisons la limite de I_n en $+\infty$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} I_n = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2} = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{e^{\pi}+1}{n^2} = 0$$

D'où $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n = 0$

Sujet Bac 2011. (TSE - STI)

Exercice 1……………………………………………………………$(5\ points)$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on donne le point $A\binom{12}{18}$.

On désigne par B un point de l'axe $(O;\vec{u})$, et C un point de $(O;\vec{v})$, tels que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1) Démontre que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation : (E): $2x + 3y = 78$.

2) On se propose de trouver tous les couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) A partir de la définition de B et de C, trouve une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E)

b) Démontre qu'un couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si
$(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$ où $k\ est\ un\ entier\ relatif$.

c) Combien y a-t-il de couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21\ et\ -5 \leq y \leq 14$?

Exercice 2……………………………………………………………$(5\ points)$

1) Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. On considère l'application affine $f\ de\ \mathcal{P}\ dans\ \mathcal{P}$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}\ et\ \mathbb{C}\ l'ensembledes\ nombres\ complexes.$$

a) f est-elle bijective ? Justifie ta réponse.

b) Détermine l'ensemble des points invariants par f.

c) Quelle est l'image par f de la droite $(\mathcal{D})$: $y = 2x + 1$?

2) On désigne par $M(x\ ;\ y)$ le point d'affixe z et par $M'(x'\ ;\ y')$ le point d'affixe z' où $z\ et\ z'$ sont des nombres complexes.

a) Sachant que $f(M) = M'$, exprime z' en fonction de z.

b) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

Problème……………………………………………………………$(10\ points)$

Partie A : Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ et\ (\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ i\ ;\ j\ )$. Unité 2 cm.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Démontre que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

3) Calcule $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f.

4) a) Démontre que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
Donne l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I.

b) Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).

5) Trace $(\mathcal{C})\ et\ (T)$ dans le même repère.

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx\ I$

b) Calcule en cm² l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (T) et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

Partie B : Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\left]0\ ;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$h(x) = \frac{1}{2}f(cosx)$ où f est la fonction définie dans la partie A.

1) Vérifie que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{sinx}$

2) Calcule l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx$

3) Soit $(I_n)n \in \mathbb{N}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx$

a) Calcule $I_0 \;\; et \; I_1$

b) En déduis l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calcule I_2 ; I_3 ; $I_4 \; et \; I_5$

Correction Bac 2011. (TSE - STI)

Exercice 1……………….……………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1) Démontrons que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation : (E): $2x + 3y = 78$.
On sait que :

- $A\binom{12}{18}$
- $B\binom{x}{0}$ Car B un point de l'axe $(O;\vec{u})$.
- $C\binom{0}{y}$ Car C un point de l'axe $(O;\vec{v})$.
- $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$. Or $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = \binom{x-12}{0-18} \\ \overrightarrow{AC} = \binom{0-12}{y-18}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB} = \binom{x-12}{-18} \\ \overrightarrow{AC} = \binom{-12}{y-18}\end{cases}$ ou encore

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (x-12\ ;\ -18) \\ \overrightarrow{AC} = (-12\ ;\ y-18)\end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \binom{x-12}{-18} \bullet \binom{-12}{y-18} = 0 \Leftrightarrow (x-12)(-12) + (-18)(y-18) = 0$

$\Leftrightarrow (-12x + 144) + (-18y + 324) = 0 \Leftrightarrow -12x - 18y + 468 = 0$ (Simplifions par -6)

On a : $2x + 3y - 78 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y = 78$ (CQFD)

2) On se propose de trouver tous les couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) A partir de la définition de B et de C, trouvons une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E)

A partir de la définition de B et de C, la solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E) est :

$(x_0\ ;\ y_0) = (12\ ;\ 18)$

b) Démontrons qu'un couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si
$(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$ où k *est un entier relatif*.

Si $(x_0\ ;\ y_0) = (12\ ;\ 18)$ est une solution particulière de l'équation $2x + 3y = 78$ alors on a :

$2x_0 + 3y_0 = 78$. Alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 78 & (1) \\ 2x_0 + 3y_0 = 78 & (2)\end{cases}$$

En multipliant l'équation (2) par -1 , on a :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 78 & (1) \\ -2x_0 - 3y_0 = -78 & (2)\end{cases}$$

En effectuant la somme membre à membre des équations (1) et (2) , on a :
$2(x - x_0) + 3(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 2(x - x_0) = -3(y - y_0) \Leftrightarrow -2(x - x_0) = 3(y - y_0)$.

Puisque $PGCD(2\,;3)=1$, c'est-à-dire que 2 et 3 sont premier entre eux, alors d'après

Gauss on a : $-2/3(y - y_0) \Leftrightarrow -2/(y - y_0)$. Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$-2k = y - y_0 \Leftrightarrow y = -2k + y_0$.

Or $y_0 = 18 \Rightarrow y = -2k + 18$.

De même : $-3(y - y_0) = 2(x - x_0)$.

Puisque $PGCD(3\,;2)=1$, c'est-à-dire que 3 et 2 sont premier entre eux, alors d'après

Gauss on a : $-3/(x - x_0) \Leftrightarrow 3/(x - x_0)$.

Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $3k = x - x_0 \Leftrightarrow x = 3k + x_0$.

Or $x_0 = 12 \Rightarrow x = 3k + 12$.

D'où $S = \{3k + 12\ ; -2k + 18\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Déterminons le nombre de couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21\ et\ -5 \leq y \leq 14$

On a : $\begin{cases} -6 \leq x \leq 21 \\ -5 \leq y \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 3k + 12 \leq 21 \\ -5 \leq -2k + 18 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq 3k \leq 9 \\ -23 \leq -2k \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -6 \leq k \leq 3 \\ 4 \leq 2k \leq 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq k \leq 3 \\ 2 \leq k \leq 11{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq 2k \leq 14{,}5 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq 7{,}25$

$\Rightarrow k \in \{-2\ ;\ -1\ ; 0\ ; 1\ ;\ 2\ ; 3\ ; 4\ ; 5\ ; 6\ ; 7\}$

Donc il ya 10 couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21\ et\ -5 \leq y \leq 14$

Exercice 2………………..……………………………………………(5 *points*)

1) Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. On considère l'application affine $f\ de\ \mathcal{P}\ dans\ \mathcal{P}$ qui à tout point $M(x\ ;y)$ associe le point $M'(x'\ ;y')$ telles que :

$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$ $et\ \mathbb{C}$ l'*ensembledes nombres complexes.*

a) Vérifions si f est bijective

f est bijective si et seulement si $detM \neq 0$ où $detM$ désigne le déterminant associé à la matrice de f.

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM = \begin{vmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$ Alors f est bijective.

b) Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

f admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 8y = -8 \\ 8x + y = 1 \end{cases}$

La résolution de ce système donne $x = 0$ et $y = 1$

D'où le point $\binom{0}{1}$ est le point invariant.

c) Déterminons l'image par f de la droite $(\mathcal{D})$: $y = 2x + 1$

On sait que $\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$.

Remplaçons $y = 2x + 1$ par sa valeur dans le système, on a :

$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}(2x+1) - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}(2x+1) - \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y' = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y' = 4\left(\frac{x'}{2}\right) + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y' = 2x' + 1 \end{cases}$

D'où l'image par f de la droite $(\mathcal{D})$: $y = 2x + 1$ est la droite $(\mathcal{D})$: $y' = 2x' + 1$

2) On désigne par $M(x\,;\,y)$ le point d'affixe z et par $M'(x'\,;\,y')$ le point d'affixe z' où $z\ et\ z'$ sont des nombres complexes.

a) Sachant que $f(M) = M'$, exprimons z' en fonction de z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$.

Remplaçons $x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5}$ et $y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5}$ par leurs valeurs dans $Z' = x' + iy'$

Ainsi on : $Z' = \left(-\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5}\right) + i\left(\frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow$

$Z' = \left(\frac{-6x + 8y - 8}{5}\right) + i\left(\frac{8x + 6y - 1}{5}\right) \Leftrightarrow$

$5Z' = (-6x + 8y - 8) + i(8x + 6y - 1) \Leftrightarrow$

$5Z' = (-6 + 8i)(x - iy) - (8 + i) \Leftrightarrow$

$5Z' = (-6 + 8i)\overline{Z} - (8 + i) \Leftrightarrow$
$Z' = \frac{1}{5}(-6 + 8i)\overline{Z} - \frac{1}{5}(8 + i)$

b) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

$Z' = \frac{1}{5}(-6 + 8i)\overline{Z} - \frac{1}{5}(8 + i)$ est l'expression complexe d'une similitude indirecte dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = \left|\frac{1}{5}(-6 + 8i)\right| = 2$
- Centre : $\Omega\binom{0}{1}$ (le point invariant)
- Axe : la droite $(\mathcal{D})$: $y = 2x + 1$

<u>Problème</u>……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

<u>Partie A :</u>

On considère la fonction f définie par $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Déterminons l'ensemble de définition D_f de f.

$Df = \left\{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ; 1 - x > 0\ et\ \frac{1-x}{1+x} > 0\right\}$ => $Df =]-1\ ;\ 1[$

2) Calculons les limites aux bornes de Df puis en déduisons que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\infty$$

Alors les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à la courbe (C) de f

3) Dressons le tableau de variation de f

$f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ => $f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = -\left(\frac{2}{1-x^2}\right) = \frac{-2}{1-x^2}$

=> $f'(x) = \frac{-2}{1-x^2} < 0 \ \forall\, x \in D_f$. D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

4) a-Ecris une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse I où I est le point d'inflexion de la courbe (C).

Déterminons le point d'inflexion de la courbe (C)

$f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}$ => $f''(x) = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}$. Posons $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(1-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0$

=> $x = 0$. Donc $f''(x) > 0$ sur $]-1\,;\ 0[$ puis $f''(x) < 0$ sur $]0\,;\ 1[$ d'où le point $I(0\,; f(0)\,) = (0\,; 0\,)$ => $I(0\,; 0\,)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $I(0\,; 0\,)$ est :

(T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Or $x_0 = 0$ => $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

=> $y = f'(0)(x) + f(0) = -2(x) + 0 = -2x$

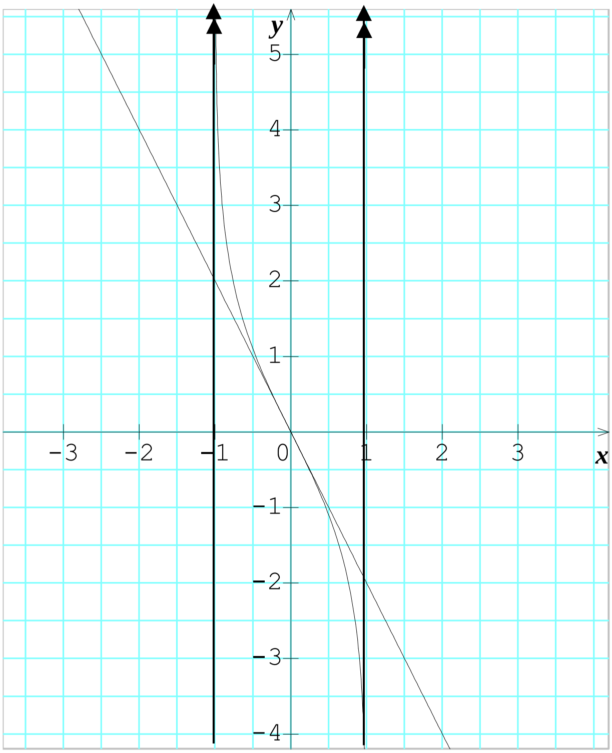
D'où (T) : $y = -2x$ est l'équation de la tangente au point $I(0\,; 0\,)$

b-Etudions la position de (C) et (T) puis traçons (C) et (T) dans le même repère.

D'après 4) b), on a :

$\forall\, x \in]-1\,;\ 0[\,;\ f''(x) > 0$ => $\forall\, x \in]-1\,;\ 0[\,;$ (C) est au-dessus (T)

$\forall\, x \in]0\,;\,1[\,;\; f''(x) < 0 \;=> \forall\, x \in \forall\, x \in]0\,;\,1[\,;$ (C) est en dessous (T)



5) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$.

a-Calculons I en utilisant une intégration par parties.

$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 1 \times f(x)dx$

Posons $u(x) = f(x) => u'(x) = f'(x)$

$v'(x) = 1 => v(x) = x$

$=> I = [xf(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} xf'(x)dx = \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x \times \frac{-2}{1-x^2}\ dx$

$= \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{-2x}{1-x^2}\ dx = \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - [ln(1-x^2)]_{-\frac{1}{2}}^{0}$

$= \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - ln(1-x^2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{3}{2}ln3 - ln4$

b- En déduisons en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la tangente (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

$$A = (2cm)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(f(x) - y)\,dx = 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(f(x) + 2x)\,dx$$

$$= 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x\,dx$$

$$= 4cm^2 \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - ln(1 - x^2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + 4cm^2[x^2]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$=> A = 4cm^2 \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - ln(1 - x^2) + x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = (6ln3 - 4ln4 - 1)cm^2$$

<u>Partie B :</u>

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par

$h\,(x) = \frac{1}{2}f(cosx)$ où f est la fonction définie dans la **<u>Partie A :</u>**

1) Vérifions que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{sinx}$

h est la primitive de la fonction g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $h'(x) = g(x)$

$h(x) = \frac{1}{2}f(cosx)$ => $h'(x) = -\frac{1}{2}sinxf'(cosx)$. Or $f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}$

=> $h'\,(x) = -\frac{1}{2}\,sinx \times \frac{-2}{1-cos^2x} = \frac{sinx}{sin^2x} = \frac{1}{sinx} = g(x)$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}f(0) = 0$. D'où h est la primitive de la fonction g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$

2) Calculons l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx$

$$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx = [h(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}ln\frac{1}{3}$$

D'où $K = \frac{1}{2}ln\frac{1}{3}$

3) Soit l'intégrale (I_n); n appartenant à $\mathbb{N}$ définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx}dx$.

a-Calculons I_0 et I_1

$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx$ => $I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^0 x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx = \frac{1}{2} ln \frac{1}{3}$

$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx$ => $I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^1 x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sinx} dx = [ln(sinx)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -ln \frac{\sqrt{3}}{2}$

b- Calculons l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinx \times cos^n x\, dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinx \times cos^n x dx = \left[- \frac{cos^{n+1} x}{n+1}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

c- En déduisons l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n

$$I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{n+2} x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x - cos^{n+2} x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x\,(1 - cos^2 x)}{sinx} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x\, sin^2 x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinx \times cos^n x\, dx \left[- \frac{cos^{n+1} x}{n+1}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

=> $I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ ⇔ $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

Calculons I_2 ; I_3 et I_4

$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

- Pour $n = 0$; on a : $I_2 = I_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$.
- Pour $n = 1$; on a : $I_3 = I_1 - \frac{1}{8} = -ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}$.
- Pour $n = 2$; on a : $I_4 = I_2 - \frac{1}{24} = \frac{1}{2} ln 3 - \frac{13}{24}$

Sujet Bac 2012. (TSE - STI)

Exercice 1…………………..…………………………………………($5\ points$)

A// Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$

1) Détermine l'ensemble de définition $Df\ de\ f$.

2) Détermine les réels a , b et c tels que pour tout $x\ de\ Df$, on ait : $f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$

3) En déduis l'ensemble des primitives de $f\ sur\ Df$.

B// Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. La mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à $m1$ Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à $m2$ Francs.

L'entier m_1 s'écrit m_1 = $1x00y2$ dans le système de numération de base huit. Et m_2 s'écrit m_2 = $x1y003$ en base sept.

1) Détermine les chiffres $x\ et\ y$ pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2) Détermine le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

3) Détermine $le\ pgcd$ (m_1; m_2).

4) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1\ u + m_2 v = 5$ où $u\ et\ v$ sont deux entiers relatifs.

Exercice 2…………………..…………………………………………($5\ points$)

I// On considère le complexe Z défini par : $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où z = $x + iy$, $avec$ $(x\ ; y) \in \mathbb{R}^2$

1) On note $Z = X + iY$, $(X\ ; Y) \in \mathbb{R}^2$. Ecrire X et Y en fonction de $x\ et\ y$.

2) Au complexe z, on associe le point $M\ (x\ ; y)$ du plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ; \vec{u}\ ; \vec{v})$. Détermine l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montre que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

II// On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle.

1) Sachant que a = 72 et que le plus petit multiple commun de a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ?

2) Trouve les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calcule l'entier naturel n tel que :$n^2 - 240\ est\ un\ carré\ parfait$.

Problème………………………………………………………………($10\ points$)

Soit f la fonction de $[0\ ;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}$

1) a) Etudie le sens de variation de f.

b) Etudie la limite de $f\ en + \infty$. Interprète graphiquement le résultat.

c) Dresse le tableau de variation de f.

2) On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

a) Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse nulle.

b) Trace $(T)\ et\ (\mathcal{C})$.

3) En utilisant les variations de f, démontre que $\forall\ x \in [1\ ; 2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$.

4) a) Démontre que pour tout réel $x\ de$ [1 ; 2], on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montre que pour tout $x \in [1\ ;\ 2]$, $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}\ |x - 1|$. En déduis un encadrement de f sur $[1\ ;\ 2]$ par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure.

Correction Bac 2012. (TSE - STI)

Exercice 1………………..………………………………………..$(\mathbf{5\ points})$

A// Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$

1) Déterminons l'ensemble de définition $Df\ de\ f$.

Df $= \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\} = \ ]-\infty\ ; -1[\ \cup\ ]-1\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

2) Déterminons les réels a , b et c tels que pour tout $x\ de\ Df$, on ait : $f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$

La division réduction au même dénominateur de $f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$ donne :

$$f(x) = \frac{ax(1-x^2) + b(1+x) + c(1-x)}{1-x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-ax^3 + (a+b-c)x + b-c}{1-x^2}$$

Par identification avec $f(x) = \frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$

On a : $\frac{-ax^3 + (a+b-c)x + b-c}{1-x^2} = \frac{x^3+2x+2}{1-x^2} \Leftrightarrow -ax^3 + (a+b-c)x + b - c = x^3 + 2x + 2$

=> $a = -1$; $b = \frac{5}{2}$ et $c = -\frac{1}{2}$ et par conséquent $f(x) = -x + \frac{\frac{5}{2}}{1-x} - \frac{\frac{1}{2}}{1+x} \Leftrightarrow$

$$f(x) = -x + \frac{5}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$$

3) En déduisons l'ensemble des primitives de $f\ sur\ Df$.

$$f(x) = -x + \frac{5}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}ln|1-x| - \frac{1}{2}ln|1+x| + k\ .\ (k \in \mathbb{R})$$

B// Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. La mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit. Et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ en base sept.

1) Déterminons les nombres x et y sachant que chacun d'eux peuvent, avec la totalité de son argent acheter un nombre entier de mangues.

$m_1 = \overline{1x00y2}^8 = 1 \times 8^5 + x \times 8^4 + 0 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + y \times 8 + 2$

$= 4096x + 8y + 32770$

$m_2 = \overline{x1y003}^7 = x \times 7^5 + 1 \times 7^4 + y \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 0 \times 7 + 3$

$= 16807x + 343y + 2404$

Puisqu'ils ont dépensé la totalité de leur argent, alors :

$\begin{cases} m_1 \equiv 0[5] \\ m_2 \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3y) \equiv 0[5] \\ (2x+3y+4) \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = 5k \\ 2x+3y+4 = 5k' \end{cases}$

- Encadrement de $5k$

$0 \leq x \leq 6$ (1)

$\Leftrightarrow 0 \leq y \leq 6$

$0 \leq 3y \leq 18$ (2)

(1) + (2) : $0 \leq x + 3y \leq 24$

$\Leftrightarrow 0 \leq 5k \leq 24$

$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{24}{5}$

$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq 4{,}8$ => $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$

- Encadrement de $5k'$

$0 \leq x \leq 6$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 12$

$\Leftrightarrow 4 \leq 2x + 4 \leq 16$ (1)

$\Leftrightarrow 0 \leq y \leq 6$

$\Leftrightarrow 0 \leq 3y \leq 18$ (2)

(1) + (2) : $4 \leq 2x + 3y + 4 \leq 34$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq 5k' \leq \frac{34}{5}$ => $k' \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Ainsi pour $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ et $k' \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ on a : $x = 6$ et $y = 3$

2) Déterminons le montant que dispose chacune des commerçantes

D'où $m_1 = 4096x + 8y + 32770 = 4096 \times 6 + 8 \times 3 + 32770 = 57370$ F

et $m_2 = 16807 \times 6 + 343 \times 3 + 2404 = 104275$ F

En déduisons le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
Pour la première, on a : $n_1 = \frac{m_1}{5} = \frac{57370}{5} = 11474$ mangues

Pour la deuxième, on a $n_2 = \frac{m_2}{5} = \frac{104275}{5} = 20855$ mangues
3) Déterminons $le\ pgcd\ (m_1; m_2)$.

En utilisant le tableau d'Algorithme, on a : $PGCD(m_1;\ m_2) = 10$

4) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1\ u + m_2 v = 5$ $où\ u\ et\ v$ sont deux entiers relatifs.

$m_1\ u + m_2 v = 5 \Leftrightarrow 57370\ u + 104275 v = 5 \Leftrightarrow 11474\ u + 20855 v = 1$

En utilisant le tableau d'Algorithme, on a : $(3059;\ -1683)$ est une solution particulière de l'équation $11474\ u + 20855 v = 1$. Par conséquent la solution générale est :

S= $\{(20855k + 3059\ ;\ -11474k - 1683)\}$

Exercice 2……………….……………………………………………(5 *points*)

I// On considère le complexe Z défini par : $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où z = $x + iy$, $avec$ $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2$

1) On note $Z = X + iY$, $(X\ ;\ Y) \in \mathbb{R}^2$.

Ecrivons X et Y en fonction de $x\ et\ y$.

$$Z = \frac{z^2}{z+i} \Leftrightarrow Z = \frac{(x+iy)^2}{(x+iy)+i} \Leftrightarrow Z = \frac{x^2+2xyi-y^2}{x+iy\ +i} \Leftrightarrow Z = \frac{(x^2-y^2)+i(2xy)}{x+i(y\ +1)}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{[(x^2-y^2)+i(2xy)][x-i(y\ +1)]}{x^2+(y\ +1)^2} \Leftrightarrow Z = \frac{x^3+x(y+1)^2-x}{x^2+(y\ +1)^2} + i\frac{y^3+y^2+x(y-1)}{x^2+(y\ +1)^2}$$

D'où $\begin{cases} X = \frac{x^3+x(y+1)^2-x}{x^2+(y\ +1)^2} \\ \quad et \\ Y = \frac{y^3+y^2+x(y-1)}{x^2+(y\ +1)^2} \end{cases}$

2) Au complexe z, on associe le point $M\ (x\ ;\ y)$ du plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

Déterminons l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

Z soit imaginaire pur non nul si $X = 0 \ \Leftrightarrow \frac{x^3+x(y+1)^2-x}{x^2+(y\ +1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^3+x(y+1)^2-x = 0$

$$\Leftrightarrow x[x^2+(y+1)^2-1] = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ \ x^2+(y+1)^2-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0\ ou\ \ x^2+(y+1)^2 = 1\ \ \Leftrightarrow x = 0\ ou\ \ (x-0)^2+(y+1)^2 = 1$$

Donc l'ensemble (Γ) des points M du plan cherché est l'intersection entre la droite d'équation $x = 0$ et le cercle de centre $\Omega(0\ ; -1)$ et de rayon $r = 1$ privé des points $O(0\ ; 0)$ et $B(0\ ; -1)$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$.

$z^2 + 2iz - 2 = 0$. On a : $\Delta = 4 \Rightarrow Z_1 = 1 - i$ et $Z_2 = -1 - i$

Montrons que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

Soient $M_1\binom{1}{-1}$ et $M_2\binom{-1}{-1}$ les images d'affixes respectives $Z_1 = 1 - i$ et $Z_2 = -1 - i$.

Les points M_1et M_2 appartiennent à l'ensemble (Γ) si $d(\Omega\ ;\ M_1) = d(\Omega\ ;\ M_2) = r$.

$$d(\Omega\ ;\ M_1) = |Z_1 - Z_\Omega| = |(1-i)-(-i)| = |1-i+i| = |1| = 1$$

$$d(\Omega\ ;\ M_2) = |Z_2 - Z_\Omega| = |(-1-i)-(-i)| = |-1-i+i| = |-1| = 1$$

Puisque $d(\Omega\ ;\ M_1) = d(\Omega\ ;\ M_2) = r = 1$, alors les points M_1et M_2 appartiennent à l'ensemble (Γ)

II// On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle.

1) Sachant que : $\begin{cases} a = 72 \\ PPCM(a\,;b) = 216 \end{cases}$, déterminons les valeurs possibles de b

On a : $\begin{cases} a = 72 \\ PPCM(a\,;b) = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^3 \times 3^2 \\ PPCM(a\,;b) = 2^3 \times 3^3 \end{cases}$

Donc ce système est valable si $b = 3^3 \times 2^x$ avec $b < a \Leftrightarrow 3^3 \times 2^x < 2^3 \times 3^2 \Leftrightarrow 3 \times 2^x < 2^3$
$\Leftrightarrow 2^{x-3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^{(x-3)ln2} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x-3)ln2 < ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow (x-3)ln2 < -ln3 \Leftrightarrow$
$x - 3 < -\frac{ln3}{ln2} \Leftrightarrow x < 3 - \frac{ln3}{ln2} \Leftrightarrow x < 1{,}413$ => $x \in \{0\,;1\}$

D'où les valeurs possibles de b sont :

- Si $x = 0$, on a : $b = 3^3 \times 2^0 = 27 \times 1 = 27.$
- Si $x = 1$, on a : $b = 3^3 \times 2^1 = 27 \times 2 = 54.$

2) Trouvons les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240.
Après décomposition de 240, on a :
$D_{240} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;8\,;10\,;12\,;15\,;16\,;20\,;24\,;30\,;40\,;48\,;60\,;80\,;120\,;240\}$
Calculons l'entier naturel n tel que :$n^2 - 240$ $est\ un\ carré\ parfait.$
$n^2 - 240$ $est\ un\ carré\ parfait$ si $n^2 - 240 = m^2$ (avec $m < n$)
Donc $n^2 - 240 = m^2 \Leftrightarrow n^2 - m^2 = 240 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 240$
Ainsi on peut établir le tableau ci-dessous :

$n-m$	2	4	6	8	10	12
$n+m$	120	60	40	30	24	20
n	61	32	23	19	17	16
m	59	28	17	11	7	4

<u>Problème</u>……………………………………………………………$(\mathbf{10\ points})$

Soit f la fonction de $[0\,;\,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2+8}}$

1) a) Etudions le sens de variation de f.

$$f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2+8}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(0)\left(x + \sqrt{x^2+8}\right) - \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}\right)(8)}{\left(x + \sqrt{x^2+8}\right)^2} = \frac{-8\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+8}\right)^2}$$

$$= \frac{-8\left(\frac{x + \sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+8}\right)^2} = \frac{-8\left(x + \sqrt{x^2+8}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+8}\right)^2\left(\sqrt{x^2+8}\right)} = \frac{-8}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)\left(x + \sqrt{x^2+8}\right)}$$

=> $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) < 0$ et par conséquent $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, f est strictement décroissante

b) Etudions la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{8}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x}\right)}} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{8}{x+|x|\sqrt{1+\frac{8}{x}}} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{8}{x+x\sqrt{1+\frac{8}{x}}}$$

$$= \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{8}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{x}}\right)} = \frac{8}{(+\infty)(1+1)} = \frac{8}{(+\infty)(2)} = \frac{8}{+\infty} = 0$$

Interprétation : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$

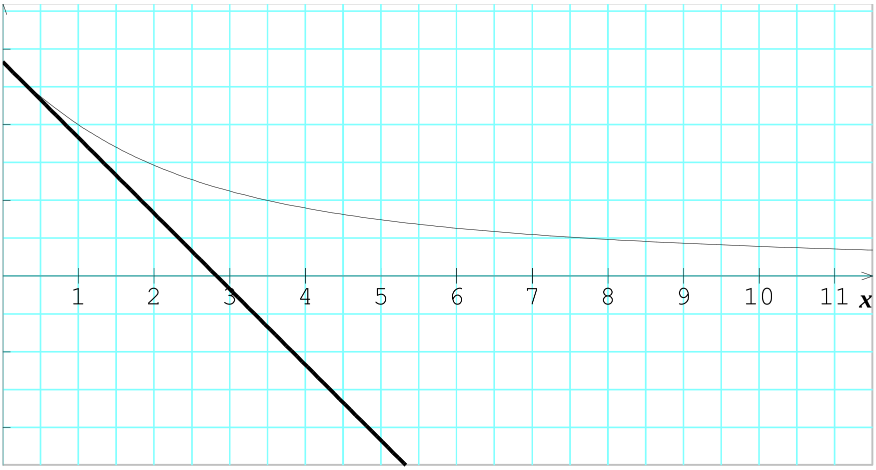
c) Dressons le tableau de variation de f.

$f(0) = \frac{8}{\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{8}}{8} = \sqrt{8}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{8}$ ↘	0

2) On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
a) Donnons une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse nulle.
On a (T) :$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ⇔ (T) :$y = -1(x) + \sqrt{8}$⇔ (T) :$y = -x + \sqrt{8}$

b) Traçons (T) *et* $(\mathcal{C})$.



3) En utilisant les variations de f, démontrons que $\forall\ x \in [1\ ;\ 2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$.

On sait que : $1 \leq x \leq 2$ (Appliquons f à cette inégalité)

f étant décroissante sur $[1\ ;\ 2]$ alors on a :

$f(2) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow$

$\frac{8}{2+\sqrt{2^2+8}} \leq f(x) \leq \frac{8}{1+\sqrt{1^2+8}} \Leftrightarrow$

$\frac{8}{2+\sqrt{4+8}} \leq f(x) \leq \frac{8}{1+\sqrt{1+8}} \Leftrightarrow$

$\frac{8}{2+2\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{8}{1+3} \Leftrightarrow$
$\frac{4}{1+\sqrt{3}} \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow$

$1{,}46 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow$

$1 \leq 1{,}46 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow$

$1 \leq f(x) \leq 2$

D'où $\forall\ x \in [1\ ;\ 2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$.

4) a) Démontrons que pour tout réel $x\ de$ [1 ; 2], on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

On sait que : $1 \leq x \leq 2$ (Appliquons f' à cette inégalité)

Alors on a : $f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$. Or $f'(x) = \frac{-8}{(\sqrt{x^2+8})(\ x+\sqrt{x^2+8}\ )}$
Donc $\frac{-8}{(\sqrt{1+8})(\ 1+\sqrt{1^2+8}\ )} \leq f'(x) \leq \frac{-8}{(\sqrt{2^2+8})(\ 2+\sqrt{2^2+8}\ )} \Leftrightarrow$

$\frac{-8}{3(\ 1+3\ )} \leq f'(x) \leq \frac{-8}{(2\sqrt{3})(\ 2+2\sqrt{3}\ )} \Leftrightarrow$

$\frac{-8}{12} \leq f'(x) \leq \frac{-8}{(2\sqrt{3})(\ 2+2\sqrt{3}\ )} \Leftrightarrow$

$-\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-8}{(2\sqrt{3})(\ 2+2\sqrt{3}\ )}$ (Appliquons la valeur absolue à cette inégalité)

On a : $\left|\frac{-8}{(2\sqrt{3})(\ 2+2\sqrt{3}\ )}\right| \leq |f'(x)\ | \leq \left|-\frac{2}{3}\right| \Leftrightarrow$

$\frac{8}{(2\sqrt{3})(\ 2+2\sqrt{3}\ )} \leq |f'(x)\ | \leq \frac{2}{3}$

D'où pour tout réel $x\ de$ [1 ; 2], on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrons que pour tout

$x \in [1\ ;\ 2]$, $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}\ |x-1|$.

Puisque $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ alors d'après le théorème des inégalités des accroissements finis, on a :

$|f(x) - \ f(1)\ | \leq \frac{2}{3}\ |x-1|$. Or $f(1) = \frac{8}{1+\sqrt{1^2+8}} = \frac{8}{1+3} = \frac{8}{4} = 2$

D'où l'inégalité $|f(x) - 2\ | \leq \frac{2}{3}\ |x-1|$

En déduisons un encadrement de f sur [1 ; 2] par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure.

On sait que : $|f(x) - f(1)\ | \leq \frac{2}{3}\ |x-1| \Leftrightarrow$

$-\frac{2}{3}\ |x-1| \leq f(x) - 2 \leq \frac{2}{3}\ |x-1| \Leftrightarrow$

$-\frac{2}{3}\ |x-1| + 2 \leq f(x) \leq \frac{2}{3}\ |x-1| + 2 \Leftrightarrow$

D'où f est encadré par les fonctions affines $\begin{cases} f_1(x) = -\frac{2}{3}\ |x-1| + 2 \\ \quad et \\ f_2(x) = \frac{2}{3}\ |x-1| + 2 \end{cases}$

Sujet Bac 2013. (TSE - STI)

Exercice 1……………….……………………………………….$(\mathbf{5\ points})$

I// 1) Résous dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.
2) a) Trouve le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
b) Soit l'entier naturel N = 999 888 777 666 555 444 333 222 111.
- Montre que N peut s'écrire en fonction de 111.
- Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ?

II// Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Soit T_α l'application de $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.
1) Montre que, pour tout α, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera.
2) Montre qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport.

3) Montre qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie.
On les notera R *et* R^{-1}.

Exercice 2……………….……………………………………….$(\mathbf{5\ points})$

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée approximativement par la fonction q définie par :
$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, q_0 la quantité de substance injectée en milligramme.
1) Etablis le tableau de variation de q.
2) On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela, il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs q_m *et* q_M.
$q_m = 1{,}2\ mg$ est le seuil d'efficacité et $q_M = 2{,}6 mg$ est le seuil de toxicité.
Déduis du tableau de variation de q, les valeurs qu'on peut donner à q_0 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.
3) On pose $q_0 = 10$
a) Trace soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix.
b) Détermine graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

Problème………………………………………………………$(\mathbf{10\ points})$

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction fn définie sur]0 ; +∞ [par :
$f_n(x) = \dfrac{(lnx)^n}{x^2}$. On note $(\mathcal{C}n)$ la courbe représentative de fn dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Etude de f_1
1) Détermine $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}1)$?

2) Etudie le sens de variation de f_1 et donner le tableau de variation de f_1.
3) Donne une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(\mathcal{C}1)$.
4) Détermine $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}2)$?
5) Calcule $f'_2(x)$ et donne le tableau de variations de f_2

Partie B :
1) Etudie le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduis la position relative de $(\mathcal{C}1)$ et $(\mathcal{C}2)$.
2) Trace $(\mathcal{C}1)$ et $(\mathcal{C}2)$ dans le même repère orthogonal.

Partie C :
n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e f_n\,(x)dx$
1) On pose $F(x) = \frac{1+lnx}{x}$
Calcule $F'(x)$. En déduire I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, montre que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$
3) Calcule I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre $(\mathcal{C}1)$ et $(\mathcal{C}2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Correction Bac 2013. (TSE - STI)

Exercice 1……………….……………………………………….($\boldsymbol{5\ points}$)

I// 1) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.

$$x^3 - y^3 = 631 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 1 \times 631 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 631 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 631 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = 631 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - x - 210 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $x = 15$ et $y = 14$. D'où S= {(15 ; 14)}

2) a) Trouvons le reste de la division Euclidienne de 111 par 7

La division Euclidienne de 111 par 7 donne $111 = 7 \times 154 + 6$.

D'où le reste de la division euclidienne de 111 par 7 est : 6.

Trouvons le reste de la division Euclidienne de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.

$10^0 \equiv 1[7]$; $10^1 \equiv 3[7]$; $10^2 \equiv 2[7]$; $10^3 \equiv 6[7]$; $10^4 \equiv 4[7]$; $10^5 \equiv 5[7]$; $10^6 \equiv 1[7]$

Alors d'une manière générale, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, on a :

$10^{6k} \equiv 1[7]$ $\qquad 10^{6k+2} \equiv 2[7]$ $\qquad 10^{6k+4} \equiv 4[7]$

$10^{6k+1} \equiv 3[7]$ $\qquad 10^{6k+3} \equiv 6[7]$ $\qquad 10^{6k+5} \equiv 5[7]$

D'où les restes possibles de la division Euclidienne de 10^n par 7 sont : 1 ; 3 ; 2 ; 6 ; 4 ; 5

b) Soit l'entier naturel N = 999 888 777 666 555 444 333 222 111.
- Montrons que N peut s'écrire en fonction de 111.

On a : N = 999 888 777 666 555 444 333 222 111 $\Leftrightarrow$

$N = 999.10^{24} + 888.10^{21} + 777.10^{18} + 666.10^{15} + 555.10^{12} + 444.10^9 + 333.10^6 + 222.10^3 + 111 \Leftrightarrow$

$N = 9 \times 111.10^{24} + 8 \times 111.10^{21} + 7 \times 111.10^{18} + 6 \times 111.10^{15} + 5 \times 111.10^{12} + 4 \times 111.10^9 + 3 \times 111.10^6 + 2 \times 111.10^3 + 1 \times 111 \Leftrightarrow$

$N = 111(9.10^{24} + 8.10^{21} + 7.10^{18} + 6.10^{15} + 5.10^{12} + 4.10^9 + 3.10^6 + 2.10^3 + 1) \Leftrightarrow$

D'où l'écriture de N en fonction de 111.

- Déterminons le reste de la division euclidienne de N par 7

$N = 111(9.10^{24} + 8.10^{21} + 7.10^{18} + 6.10^{15} + 5.10^{12} + 4.10^{9} + 3.10^{6} + 2.10^{3} + 1) \Leftrightarrow$

$N = 111(9.10^{6\times4+0} + 8.10^{6\times3+3} + 7.10^{6\times3+0} + 6.10^{6\times2+3} + 5.10^{6\times2+0} + 4.10^{6\times1+3} + 3.10^{6\times1+0} + 2.10^{3} + 1)$

D'après 2) a), on a :

$10^{6\times4+0} \equiv 1[7]$; $10^{6\times3+0} \equiv 1[7]$; $10^{6\times2+0} \equiv 1[7]$; $10^{6\times1+0} \equiv 1[7]$

$10^{6\times3+3} \equiv 6[7]$; $10^{6\times2+3} \equiv 6[7]$; $10^{6\times1+3} \equiv 6[7]$

Donc $N \equiv 111(9\times1 + 8\times6 + 7\times1 + 6\times6 + 5\times1 + 4\times6 + 3\times1 + 2.10^{3} + 1)[7] \Leftrightarrow$

$N \equiv 111(9 + 48 + 7 + 36 + 5 + 24 + 3 + 2000 + 1)[7] \Leftrightarrow$

$N \equiv 111(2133)[7]$. Or $111 \equiv 6[7]$

Donc $N \equiv 6(2133)[7] \Leftrightarrow N \equiv (12798)[7]$

Or la division Euclidienne de 12798 par 7 donne $12798 = 1828 + 2$

$\Rightarrow \quad N \equiv 2[7]$

D'où le reste de la division euclidienne de N par 7 est 2.

II// Soit T_α l'application de $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ telle que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.

1) Montrons que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, T_α est bijective

T_α est bijective si et seulement si $detM_\alpha \neq 0$

$detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = \frac{1}{4} + \alpha^2 \neq 0$. Alors T_α est bijective .

Montrons que T_α admet un unique point invariant que l'on précisera.

T_α Admet un point invariant si et seulement si $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2\alpha y = 0 \\ 2\alpha x - 3y = 0 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $x = 0$ et $y = 0$

D'où $\Omega(0 ; 0)$ est le point invariant.

2) Montons qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H dont précisera le centre et le rapport.

Pour cela exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = \left(-\frac{1}{2}x - \alpha y\right) + i\left(\alpha x - \frac{1}{2}y\right)$

$= -\frac{1}{2}x - \alpha y + i\alpha x - \frac{1}{2}yi$

$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (-\alpha y + i\alpha x)$

$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (i^2\alpha y + i\alpha x)$

$= -\frac{1}{2}(x + iy) + i\alpha(x + iy)$

$= \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)(x + iy)$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)Z$

<u>NB :</u> Si $Z' = aZ + b$, on dit que T_α est une homothétie $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$

Avec $a = -\frac{1}{2} + i\alpha$

Alors $a = -\frac{1}{2} + i\alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$ si et seulement si $\alpha = 0$.

D'où T_α est une homothétie si $\alpha = 0$.

3) a- Montrons qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie.

T_α est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $\det(Matf) = a^2 + b^2 = 1$

$det M_\alpha = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b- Vérifions que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera R et R^{-1}

D'où on a $R^{+}: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ et $R^{-1}: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En observant, on remarque que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice 2……………….……………………………………….($5\ points$)

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée approximativement par la fonction q définie par :
$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, q_0 la quantité de substance injectée en milligramme.
1) Etablissons le tableau de variation de q.

On a $q(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} q(t) = q_0(0 - 0) = 0$

$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$ => $q'(t) = q_0(-0,5e^{-0,5t} + e^{-t})$. On sait que $q_0 > 0$

Donc posons $-0,5e^{-0,5t} + e^{-t} > 0 \Leftrightarrow -0,5 + e^{0,5t-t} > 0 \Leftrightarrow -0,5 + e^{-0,5t} > 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,5t} > 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,5t} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,5t > ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -0,5t > -ln2 \Leftrightarrow t < \frac{ln2}{0,5}$

$\Leftrightarrow t < \frac{ln2}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow t < 2ln2 \Leftrightarrow t < ln4$

Ainsi pour tout $t < ln4$, $q'(t) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

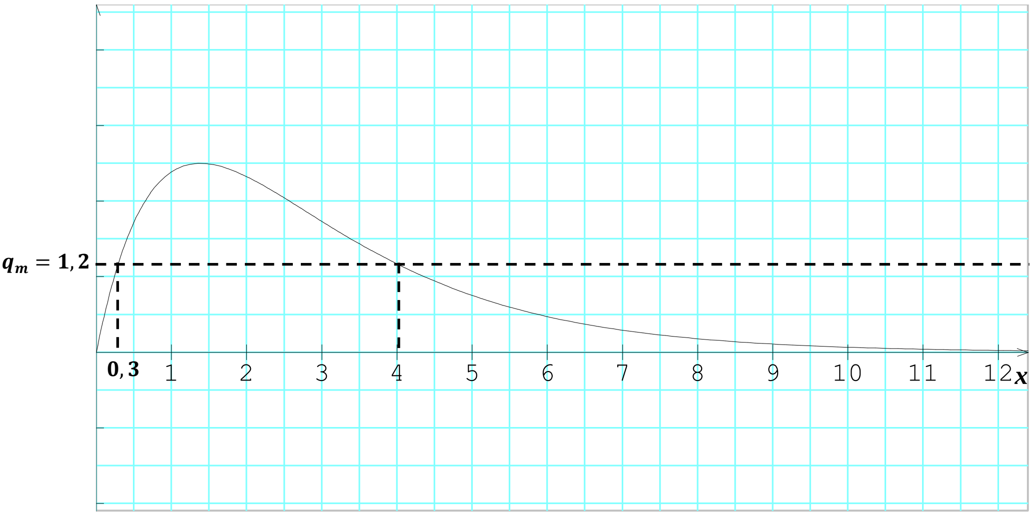
t	0		$ln4$		$+\infty$
$q'(t)$		$+$	0	$-$	
$q(t)$	0	↗	$\frac{q_0}{4}$	↘	0

2) On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela, il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs q_m et q_M.
$q_m = 1,2\ mg$ est le seuil d'efficacité et $q_M = 2,6\ mg$ est le seuil de toxicité.
Déduisons du tableau de variation de q, les valeurs qu'on peut donner à q_0 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.

Pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique, il faut que :
$max(q) < q_M \Leftrightarrow \frac{q_0}{4} < 2{,}6 \Leftrightarrow q_0 < 2{,}6 \times 4 \Leftrightarrow q_0 < 10{,}4$
D'où q_0 doit être inférieur à 10,4 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.
3) On pose q_0 = 10
a) Traçons soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix.

Pour q_0 = 10, on a le tableau de variation ci-dessous :

t	0		$ln4$		$+\infty$
$q'(t)$		+	0	−	
$q(t)$	0	↗	$\frac{5}{2}$	↘	0



b) Déterminons graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

q_m = 1,2 mg étant le seuil d'efficacité, alors on mène la parallèle à l'axe des abscisses passant par 1,2. Ainsi cette droite coupe la courbe en deux points que l'on projette sur l'axe (ox).
On obtient ainsi 0,3 et 4.
D'où l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace est [0,3 ; 4] (voir figure)

Problème……………………………………………………………**(10 *points*)**
Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction fn définie sur]0 ; +∞ [par :
$f_n(x) = \frac{(lnx)^n}{x^2}$. On note (Cn) la courbe représentative de fn dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Etude de f_1

1) Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f_1(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{lnx}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0$

On peut en déduire que pour $(\mathcal{C}1)$, on a : une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$

2) Etudions le sens de variation de f_1

$f_1(x) = \frac{lnx}{x^2} \Rightarrow f'_1(x) = \frac{1-2lnx}{x^3}$

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ x^3 > 0.$ Alors le signe de f'_1 dépend du signe du numérateur $1 - 2lnx$.

Posons $1 - 2lnx > 0$

$1 - 2lnx > 0 \Leftrightarrow -2lnx > -1 \Leftrightarrow lnx < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$

Ainsi pour tout $x < e^{\frac{1}{2}}$, on a : $f'_1(x) > 0$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau ci-dessous, on a :

$\forall x \in \left]0\ ;\ e^{\frac{1}{2}}\right[,\ f'_1(x) > 0.$ Alors pout tout $x \in \left]0\ ;\ e^{\frac{1}{2}}\right[$, f_1 est strictement croissante.

$\forall x \in \left]e^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[,\ f'_1(x) < 0.$ Alors pout tout $x \in \left]e^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, f_1 est strictement décroissante.

Le tableau de variation de f_1 est le suivant :

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3) Donnons une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(\mathcal{C}1)$.

On a $(T_1): y = f'_1(1)(x-1) + f_1(1).$ $\begin{cases} f'_1(1) = 1 \\ \quad et \\ f_1(1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (T_1): y = 1(x-1) + 0 \Leftrightarrow (T_1): y = x - 1$

4) Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f_2(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left(\frac{lnx}{x}\right)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{lnx}{x}\right)^2 = 0$

On peut en déduire que pour $(\mathcal{C}2)$, on a : une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$

5) Etudions le sens de variation de f_2 puis donne le tableau de variations de f_2

$f_2(x) = \left(\frac{lnx}{x}\right)^2 \Rightarrow f'_2(x) = \frac{2(1-lnx)lnx}{x^3}$

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ x^3 > 0$. Alors le signe de f'_1 dépend du signe du numérateur $2(1 - lnx)lnx$.

Posons $\begin{cases} 1 - lnx > 0 \\ et \\ lnx < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -lnx > -1 \\ et \\ lnx < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} lnx < 1 \\ et \\ lnx < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < e^1 \\ et \\ x < e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < e \\ et \\ x < 1 \end{cases}$

x	0		1		e		$+\infty$
$1 - lnx$		$+$		$+$	0	$-$	
lnx		$-$	0	$+$		$+$	
$f'_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau ci-dessous, on a :
$\forall x \in]0\,;\,1[\cup]e\,;\,+\infty[,\ f'_2(x) < 0$. Alors pout tout $x \in]0\,;\,1[\cup]e\,;\,+\infty[$, f_2 est strictement décroissante.

$\forall x \in]1\,;\,e[,\ f'_2(x) > 0$. Alors pout tout $x \in]1\,;\,e[$, f_2 est strictement croissante.

Le tableau de variation de f_2 est le suivant : $\frac{1}{e}$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

<u>Partie B</u> :

1) Etudions le signe de $f_1(x) - f_2(x)$

$f_1(x) - f_2(x) = \frac{lnx}{x^2} - \frac{ln^2x}{x^2} = \frac{lnx - ln^2x}{x^2} = \frac{(1-lnx)lnx}{x^2}$

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ x^2 > 0$. Alors le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ dépend du signe du numérateur $(1 - lnx)lnx$.

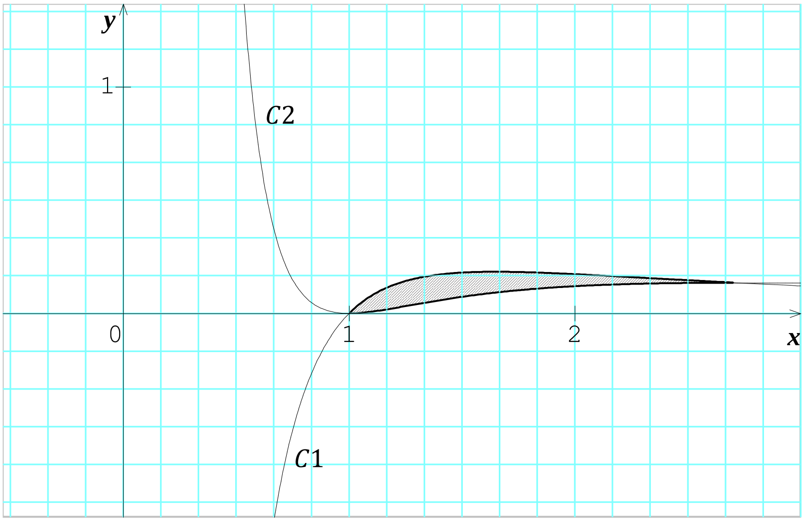
x	0	1	e	$+\infty$
$1-lnx$	$+$	$+$	0	$-$
lnx	$-$	0	$+$	$+$
$f_1(x) - f_2(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

D'après le tableau de signe ci-dessus, on a :
$\forall x \in]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[$, $f_1(x) - f_2(x) < 0$. Alors pout tout $x \in]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[$, C_1 est en dessous de C_2

$\forall x \in]1\ ;\ e[$, $f_1(x) - f_2(x) > 0$. Alors pout tout $x \in]1\ ;\ e[$, C_1 est au-dessus de C_2

Pour $x \in \{1\ ; e\}$, $(\mathcal{C}1)$ et $(\mathcal{C}2)$ sont confondues

2) Traçons $(\mathcal{C}1)$ et $(\mathcal{C}2)$ dans le même repère orthogonal.



Partie C :
n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$

1) On pose $F(x) = \frac{1+lnx}{x}$

Calculons $F'(x)$.
$F(x) = \frac{1+lnx}{x}$ => $F'(x) = -\frac{lnx}{x^2} = -f_1(x)$

En déduisons I_1.

$I_1 = \int_1^e f_1(x)dx \Leftrightarrow I_1 = -\int_1^e -f_1(x)dx \Leftrightarrow I_1 = [-F(x)]_1^e = \left(-F(e)\right) - \left(-F(1)\right)$

$\Leftrightarrow I_1 = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$

2) En utilisant une intégration par parties, montrons que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

On a : $I_n = \int_1^e f_n(x)dx \Rightarrow I_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x)dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \int_1^e \frac{(lnx)^{n+1}}{x^2}dx$

$\Leftrightarrow I_{n+1} = \int_1^e \frac{1}{x^2} \times (lnx)^{n+1}dx$

Posons $u = (lnx)^{n+1} \Rightarrow u' = (n+1) \times \left(\frac{1}{x}\right) \times (lnx)^n = \frac{(n+1)(lnx)^n}{x}$

$v' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

Donc $I_{n+1} = \left[-\frac{(lnx)^{n+1}}{x}\right]_1^e + (n+1)\int_1^e \frac{(lnx)^n}{x^2} \Leftrightarrow I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ (CQFD)

3) Calculons I_2

On sait que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

Donc $I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2\left(\frac{e-2}{e}\right) = \frac{e-5}{e}$

En déduisons l'aire en cm^2 du domaine compris entre $(\mathcal{C}1)$ et $(\mathcal{C}2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$\mathcal{A} = (2\ cm \times 10\ cm)\int_1^e \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx = 20cm^2 \int_1^e f_1(x)dx - 20cm^2 \int_1^e f_2(x)dx \Leftrightarrow$

$\mathcal{A} = 20cm^2 I_1 - 20cm^2 I_2 = (I_1 - I_2) \times 20cm^2 = \left(\frac{e-2}{e} - \frac{e-5}{e}\right) \times 20cm^2 = \frac{3}{e} \times 20cm^2 \Leftrightarrow$

$\mathcal{A} = \frac{60}{e}cm^2$

Sujet Bac 2014. (TSE - STI)

Exercice 1……………….……………………………………………(5 points)

1-/ Soit l'équation (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$ où z est l'inconnue complexe.

a-/ Montre que (E) admet deux solutions complexes conjuguées u et $\bar{u}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.

b-/ Calcule le module et un argument de u. En déduis le module et un argument de $\bar{u}$.

c-/ Écris $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

d-/ Calcule le module et un argument de $\frac{u}{u-4}$. En déduis le module et un argument de $\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$.

2-/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I, J). On considère les points A ; B et C d'affixes respectives : $Z_A = -3$; $Z_B = 2 + 2i$ et $Z_C = 7i$.

a-/ Construis le triangle ABC.

b-/ Calcule les distances AB et BC.

c-/ Écris le nombre complexe $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ sous forme trigonométrique.

d-/ Déduis des questions a-/ et b-/ la nature du triangle ABC.

Exercice 2……………….……………………………………………(5 points)

I./ Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60.

II./ Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- ■ Le 1er chiffre est pair ;
- ■ La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- ■ Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;
- ■ Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- ■ Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

NB : Les parties I./ et II./ sont indépendantes

Problème………………………………………………………………(10 points)

A// Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1-/ a-/ Détermine les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

b-/ Calcule $\varphi'(x)$ et Étudie son signe. Dressez le tableau de variation de φ.

2-/ Démontre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1\,;+\infty[$. Vérifie que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.

3-/ En déduis le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

B-// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x + 1)\, e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ Leurs courbes sont respectivement notées (C_f) et (C_g)

1-/ Détermine les domaines de définition de f et de g puis Calcule leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

2-/ Montre que (C_f) et (C_g) admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune (T). Donne une équation cartésienne de (T).

3-/ a-/ Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A .

b-/ Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

c-/ En déduis la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

4-/ a-/ Détermine une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b-/ Détermine les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c-/ Déduis une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$.

d-/ Calcule l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations : $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$

<u>**NB**</u> : Les tracés de (C_f) et (C_g) ne sont pas demandés

Correction Bac 2014. (TSE - STI)

Exercice 1……………….……………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1°/ (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$

a-/ Montrons que $(\boldsymbol{E})$ admet deux solutions complexes conjuguées u et $\overline{\boldsymbol{u}}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.

(E) est une équation complexe à coefficients réels et dont le discriminant

$\Delta = 9 - 12 = -3 = 3i^2$. Donc $u = 3 + i\sqrt{3}$ et $\bar{u} = 3 - i\sqrt{3}$

b) Nous avons $u = 3 + i\sqrt{3}$ et $\bar{u} = 3 - i\sqrt{3}$. Alors $|u| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$et un argument de u est $\theta = \frac{\pi}{6}$; On en déduit $|\bar{u}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ et un argument de $\bar{u}$ est $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

c) $u - 4 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$

d) Calculons du module et d'un argument de

Donc $h_n(z) = h_0(z) \Leftrightarrow z^n(1-z) = 1 - z \Leftrightarrow (z^n - 1)(1-z) = 0 \Leftrightarrow z^n = 1\ ou$

$1 - z = 0$, alors on a : $z = 1\ ou\ z^n = 1$, ce qui revient à chercher les racines n-ieme de l'unité. Ainsi les solutions sont : $z_k = \left[1;\frac{2k\pi}{n}\right]\ \ avec\ k \in \{0,1,2,3,\dots,n-1\}$, on pourra ecrire aussi $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. L'ensemble solution est :

$$S = \left\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\ , aveck \in \{0,1,2,3,\dots,n-1\}\right\}$$

2-/ a) Montrons que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solutions :
Soit $z = x + iy$, $|z| = |1-z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$
$\Leftrightarrow x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ et\ y \in \mathbb{R}$
$z = \frac{1}{2} + iy\ avec\ y\ \in \mathbb{R}$ L'équation admet donc une infinité de solutions.

AUTRE METHODE :
a) Soient les points $M(z) et\ A(1), on\ a$:
$|z| = |1-z| \Leftrightarrow OM = AM$, les solutions sont les points appartenant à la médiatrice du segment $[OA]$ d'où l'equation admet une infinite de solutions.

b) soit z_0 l'une des solutions telle que $z_0 = [\rho, \theta]$
$|z_0| = |1 - z_0| \Longrightarrow |1 - z_0| = \rho$
$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0 \Longrightarrow 1 - z_0 = \frac{1}{2} - iy_0\ donc\ 1 - z_0 = \overline{z_0}$, par conséquent $\arg(1 - z_0) = -\theta$
$|{z_0}^n(1 - z_0)| = \rho^{n+1}$ et $\arg\left({z_0}^n(1 - z_0)\right) = n\theta - \theta = (n-1)\theta$

c) En déduisons que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$

(1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n(1-z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases}$

Comme z_0 est solution alors, on a : ${z_0}^n(1-z_0) = 1$ donc $\begin{cases} \rho^{n+1} = 1 \\ (n-1)\theta = 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0$ $alors$ $|z_0| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + {y_0}^2 = 1$ $donc$ $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$; $(n-1)\theta = 2k\pi \Rightarrow (n-1)\frac{\pi}{3} = 2k\pi$
c'est-à-dire $n - 1 = 6k$ ou $encore$ $n \equiv 1[6]$

De même si $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$; on demontre alors que $n - 1 = 6k'$
c'est-à-dire $n \equiv 1[6]$.

En conclusion le système n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$

L'ensemble solution est $\left\{\boldsymbol{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$

II-/

1) $(E): 11x + 8y = 79$

   a) Montrons que si $(x; y)$ est $solution$ $de (E)$ $alors$ $y \equiv 3[11]$
   $11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 8y \equiv 79[11] \Leftrightarrow 56y \equiv 14[11]$, alors $y \equiv 3[11]$

   b) Résolvons (E):
   $\begin{cases} 11x + 8y = 79 \\ y \equiv 3[11] \end{cases}$,
   On a : $y = 11k + 3$ $avec$ $k \in \mathbb{Z}$, donc
   $11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 11x + 8(11k + 3) = 79$
   $\Leftrightarrow 11x = -88k + 55 \Leftrightarrow x = -8k + 5, k \in \mathbb{Z}$

   $S = \{(-8k + 5; 11k + 3), k \in \mathbb{Z}\}$.

2) Soient x, y, z respectivement le nombre de pièce du $1^{er}, 2^e$ et du 3^e lot

Le problème peut être traduit par le système suivant : $\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x + y + z = 41 \quad (1) \\ 12x + 9y + z = 120 \quad (2) \end{cases}$

En effectuant l'opération $(2) - (1)$, on obtient $11x + 8y = 79$, donc $x = -8k + 5$ et
$y = 11k + 3$ or $z = 41 - x - y$ $donc$ $z = -3k + 33$
$(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, ona $k = 0$ ce qui $implique$ que $\boldsymbol{x = 5}$; $\boldsymbol{y = 3}$; $\boldsymbol{z = 33}$
Le 1^{er} lot comprend 5 pièces
Le 2^e lot comprend 3 pièces
Le 3^e lot comprend 33 pieces.

Exercice 2………………..…………………………………………(5 *points*)

I- Soit x le nombre de filles et soit y le nombre de garçons

Soit (x_i) $les\ tailles\ des\ filles\ \ et$ (y_i) $celles\ des\ garçons$ on a :

$\frac{\sum x_i}{x} = 160\ et\ \frac{\sum y_i}{y} = 173{,}5$ Alors $\sum x_i = 160x\ et\ \sum y_i = 173{,}5y\ donc\ \frac{\sum x_i + \sum y_i}{x+y} = 167$
$il\ s'ensuit\ que\ 7x - 6{,}5y = 0\ ou\ 14x - 13y = 0$

Donc $\begin{cases} x = 13k \\ y = 14k \end{cases}, k \in \mathbb{N}^*$

$50 < x + y < 60 alors\ 50 < 27k < 60\ donc\ 1{,}85 < k < 2{,}22\ d'ou`k = 2$

Par conséquent $x = 26\ et\ y = 28$

L'effectif de la classe est donc 54

II- $x \in \{2,4,6,8\}\ et\ x + y = 15\ et\ z = x - y\ et\ x = zt$

$x + y + z + t + h \equiv 0[9] \Longrightarrow 6 + z + t + h \equiv 0[9]$

Les valeurs 2 et 4 pour x sont écartées car $x + y = 15\ et\ 0 \leq y \leq 9$

Pour $x = 6\ , on\ a$: $x + y = 15 \iff y = 9\ or\ \ x - y = z$

$donc\ \ 6 - 9 = z\ (absurde)$

On montre que $x = 8$; $y = 7$; $z = 1$; $t = 8$; $h = 3$.

La combinaison cherchée est 87183

<u>**Problème**</u>**……………………………………………………………($\mathbf{10}\ \boldsymbol{points}$)**

A// $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1-/ a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty\ et\ \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1$; $y = -1$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

b) Calcul de $\varphi'(x)$

$\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + x + 1)$

$\varphi'(x) = e^{-x}(-x^2 + x)$

Signe de $\varphi'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} > 0, le\ signe\ de\ \varphi'(x) est\ celui\ de\ \ (-x^2 + x)$

Le tableau de signe

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-	

$si\ x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[,\ \varphi'(x) < 0$

$si\ x \in [0; 1],\ \varphi'(x) \geq 0$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e} - 1$	$\searrow$	-1

2 -/ $\varphi(0) = 0\ d'ou\grave{}\ \ 0$ est solution

φ est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ d'où φ est bijective de $[1; +\infty[$ vers $\left]-1; -1 + \frac{3}{e}\right]$ d'où il existe $\alpha \in [1; +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(1{,}79) = 9{,}610^{-4} > 0\ et\ \varphi(1{,}80) = -0{,}001\ < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$

3/ le signe de φ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	+	0	-	

B-// $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$; $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

1-/ $Df = \mathbb{R}\quad et\ Dg = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

2-/ Montrons que $C_f\ et\ C_g$ admettent au point $A(0; 1)$ une tangente commune (T)
$f(0) = 1\ et\ g(0) = 1; A\ \in C_f \cap C_g$

$f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x + 1)$

$f'(x) = e^{-x}(-2x+1)$

$g'(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(0) = 1\ et\ g'(0) = 1$ Soit $\begin{cases} f(0) = g(0) = 1 \\ f'(0) = g'(0) = 1 \end{cases}$ donc $C_f\ \ et\ C_g$ admettent une tangente commune en $A\ et\ (T): y = x+1\ \ est$ l'equation de cette tangente.

3/ a) $f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$= \frac{(2x+1)[e^{-x}(x^2+x+1)-1]}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

b) Signe de $f(x) - g(x)$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\varphi(x)$		$+$	|	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	|	$+$	|	$+$	|	$-$	

$\forall\ x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[\cup\ ]\alpha; +\infty[,\ \ f(x) - g(x) < 0$

$\forall\ x \in \left[\frac{-1}{2}; \alpha\right], f(x) - g(x) \geq 0$

C) Position relative des courbes $C_f\ \ et\ C_g$

Pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[\cup\ ]\alpha; +\infty[,\ \ , (C_f)\ est\ en\ dessous\ de\ (C_g)$

Pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}; 0\right[\cup\ ]0; \alpha[, (C_f)\ est\ au\ dessus\ de\ (C_g)$

$(C_f)\ et\ \ (C_g)\ \ se\ coupent\ en \left\{\left(\frac{-1}{2}; 0\right), (0; 1), \left(\alpha; \frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}\right)\right\}$

4-/ a) $G(x) = ln(x^2+x+1)$

b) $F'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax+b) = e^{-x}(-ax+a+b)$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$ => $F(x) = (-2x-3)e^{-x}$

C) Une primitive $H\ de\ \ f - g\ \ \ sur\ \mathbb{R}\ \ \ est\ \ \ H(x) = F(x) - G(x)$

$H(x) = (-2x-3)e^{-x} - ln(x^2+x+1)$

d) $\int_{\frac{-1}{2}}^{0}[f(x) - g(x)]\,d = [H(x)]_{\frac{-1}{2}}^{0}$

$$= H(0) - H\left(\frac{-1}{2}\right) = -3 - ln1 — (-2e^{\frac{1}{2}} - ln\frac{3}{4}) = \ 0{,}0096$$

L'aire est $0{,}0096\ Ua$

Sujet Bac 2015. (TSE - STI)

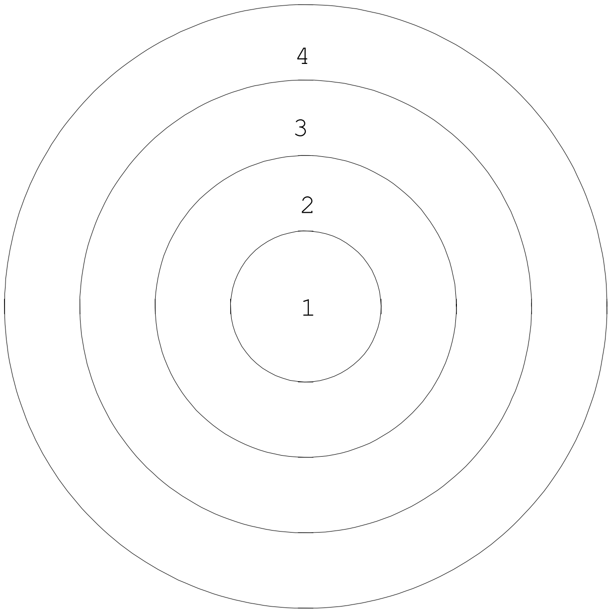
Exercice 1...(5 $points$)

I// Une cible est constituée de cercles concentriques de rayon respectifs 1 ; 2 ; 3 ; 4 déterminant quatre (04) zones numérotées (1) ; (2) ; (3) ; (4) (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme 5ième zone.

1) Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones 1 ; 2 ; 3 ; 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone. (**Rappel :** l'aire du disque de rayon $\boldsymbol{r}$ est **A=** $\boldsymbol{\pi r^2}$)

Montre que les probabilités P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 d'atteindre respectivement les zones (1) ; (2) ; (3) ; (4) sont égales à K ; $3K$; $5K$; $7K$ où K est un nombre que l'on ne demande pas de Calcule dans cette question.

2) – Si la flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4000 F.
− Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3000 F.
− Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2000 F.
− Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1000 F.
− Si la flèche touche la zone (5), le joueur perd 30000 F.



On suppose que l'espérance mathématique de X est nulle.
On rappelle que X est le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancée d'une flèche).

a- Détermine les probabilités P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 et P_5 de manquer la cible.

b- Donne sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

II// Trois villages désignés par les lettres A ; B ; C sont disposés en triangle comme suit :
Le village A est à 4 km de B ; à 3 Km de C et le village B est à 5 Km de C.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, Détermine son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.

Exercice 2……………….………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

I// α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

1) Prouve que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2) Déduis-en les valeurs de N.

II// Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(o\ ; \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A ; $B\ \ et\ \ C$ trois points d'affixes respectives : $a = -1 + 3i$; $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par : $Z' = (2 - 2i)Z + 1$.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
2) Détermine l'affixe du point B' image du point B par la transformation f. Vérifié que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.
3) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où x et y sont des entiers relatifs et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par f. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ puis en déduis l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\ ; 5]$.

Problème……………………………………………………………$(10\ \boldsymbol{points})$

A// Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.
1) On désigne par $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan, $M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ l'image de M_1 par la symétrie d'axe $(o\ ;\ \vec{\imath}\,)$.
a- Exprime x' et y' en fonction de x et y.
b- Caractérise l'application qui transforme M en M'.
c- On désigne par $\boldsymbol{r}$ l'application qui au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ définie par :
$\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$. Montre que $\boldsymbol{r}$ est une rotation dont précisera le centre Ω et l'angle θ.

2) Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, Détermine l'ensemble décrit par le point M'' ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$.
3) Au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on associe le point $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ définie par : $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$
a- Quelle est la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?
b- Caractérise l'image de (E) par la rotation $\boldsymbol{r}$ définie en 1) –c.

B// Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1) Etudie les variations de f et trace sa courbe Cf dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Précise les tangentes à Cf aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$

2) Soit C$'f$ l'image de la courbe Cf par la symétrie orthogonale par rapport à $(o\ ;\ \vec{\imath}\ )$.
On pose Γ= Cf ∪ C$'f$. Tracer Γ dans le même repère que Cf.

3) On considère le point $A\binom{-1}{0}$ et la droite Δ d'équation $x = -2$. Soit m un paramètre non nul, D la droite d'équation $y = mx$ et D' la droite orthogonale à D en $O\binom{0}{0}$. Les droites D et D'coupent Δ en P et P' respectivement.
Soit K le milieu du segment $[PP']$, la droite (AK) coupe D et D' en M et M'respectivement.
a- Détermine les coordonnées de M et M' en fonction de m.
b- On appelle Γ_1 , l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}^*$ et $\Gamma_1{}'$ celui des points M' lorsque $m \in \mathbb{R}^*$. Trouve une relation entre Γ_1 et Γ_1'.

Correction Bac 2015. (TSE)

<u>Exercice 1</u>……………….……………………………………….($\boldsymbol{5\ points}$)

I// 1) Montrons que les probabilités P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 d'atteindre respectivement les zones (1) ; (2) ; (3) ; (4) sont égales à K ; $3K$; $5K$; $7K$.
On donne l'aire du disque $\boldsymbol{A = \pi r^2}$

- L'aire de la zone (1) est $A_1 = \pi(1)^2 = \pi$
- L'aire de la zone (2) est $A_2 = \pi(2)^2 - \pi = 3\pi$
- L'aire de la zone (3) est $A_3 = \pi(3)^2 - \pi(2)^2 = 5\pi$
- L'aire de la zone (4) est $A_4 = \pi(4)^2 - \pi(3)^2 = 7\pi$

Ainsi la probabilité d'atteindre l'une des zones (1) ; (2) ; (3) ; (4) est proportionnelle à l'aire de cette zone donc on a : $\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} = \frac{P_3}{5\pi} = \frac{P_4}{7\pi}$.

En posant $P_1 = K$ avec $K \in]0;1[$, on a :

$$\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} \Leftrightarrow P_2 = 3P_1 = 3K$$

$$\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_3}{5\pi} \Leftrightarrow P_3 = 5K$$

$$\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_4}{7\pi} \Leftrightarrow P_4 = 7K$$

<u>Autre méthode</u> :

$$\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} = \frac{P_3}{5\pi} = \frac{P_4}{7\pi} = C \Leftrightarrow P_1 = \frac{P_2}{3} = \frac{P_3}{5} = \frac{P_4}{7} = C\pi = K \Rightarrow P_1 = K\ ;\ P_2 = 3K\ ;$$

$P_3 = 5K$; et $P_4 = 7K$

D'où les probabilités P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 d'atteindre respectivement les zones (1) ; (2) ; (3) ; (4) sont respectivement égales à K ; $3K$; $5K$; $7K$.

2) a- Déterminons les probabilités P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 et P_5 de manquer la cible.

Soit X la variable aléatoire telle que X= $\{4000\,;3000\,;2000\,;1000\,;\ -30\ 000\}$

On a : $P(\mathrm{X} = 4000) = P_1$ $P(\mathrm{X} = 3000) = P_2$ $P(\mathrm{X} = 2000) = P_3$ $P(\mathrm{X} = 1000)$

$= P_4$ $P(\mathrm{X} = -30\ 000) = P_5$

$P_1 = K$; $P_2 = 3K$; $P_3 = 5K$; $P_4 = 7K$.

$P_5 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 1 - 16K$

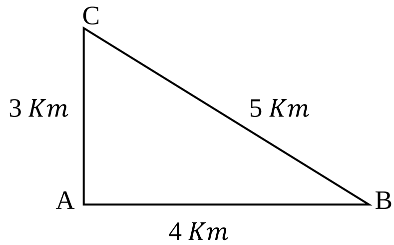
$E(\mathrm{X}) = 0 \Leftrightarrow 4000P_1 + 3000P_2 + 2000P_3 + 1000P_4 - 30\,000P_5 = 0 \Leftrightarrow$
$4K + 9K + 10K + 7K - 30(1 - 16K) = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{17}$

D'où $P_1 = \frac{1}{17}$; $P_2 = \frac{3}{17}$; $P_3 = \frac{5}{17}$; $P_4 = \frac{7}{17}$; $P_5 = \frac{1}{17}$

b- Donnons sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

x_i	$-30\,000$	1000	2000	3000	4000
$P(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$

II// Trois villages désignés par les lettres A ; B ; C sont disposés en triangle comme suit :
Le village A est à 4 km de B ; à 3 Km de C et le village B est à 5 Km de C.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages.
Déterminons son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.



Soit G le point représentant l'emplacement du forage. G est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
ABC étant un triangle rectangle en A alors on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc le segment $[BC]$ est le diamètre du cercle et G est le milieu de $[BC]$.

Par suite le forage est situé à égale distance des villages B et C, c'est-à-dire le milieu de $[BC]$ et la distance qui le sépare de chacun des villages est $2{,}5$ Km, c'est-à-dire $\frac{BC}{2}$

<u>Exercice 2</u>……………….……………………………………….(**5 points**)

I// α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

1) Prouvons que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

Le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de $N \Leftrightarrow$

$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1) \Leftrightarrow \alpha\beta - \beta - \alpha + 1 = 3 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$

2) Déduisons-en les valeurs de N.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3 \times 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 3 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\alpha = 2 \\ \beta = 4\end{cases}$ ou $\begin{cases}\alpha = 4 \\ \beta = 2\end{cases}$

Donc $N = 2^2 \times 3^2 = 324$ ou $N = 2^4 \times 3^2 = 144$

II// Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(o\,; \vec{u}\,;\ \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient $A\,; B\ \ et\ \ C$ trois points d'affixes respectives : $a = -1 + 3i$; $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par : $Z' = (2 - 2i)Z + 1$.
1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f.

Puisque la transformation f est de la forme $Z' = aZ + b$ avec $a = 2 - 2i$ et $b = 1$, alors f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Son rapport : $k = |a| = |2 - 2i\,| = 2\sqrt{2}$.
- Son angle θ : $\theta = arg(a) = -\frac{\pi}{4}$.
- Son centre Ω d'affixe $Z_\Omega\ = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-(2-2i)} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ => $\Omega\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$

2) Déterminons l'affixe du point B' image du point B par la transformation f.

$Z_{B'} = (2 - 2i)Z_B + 1$

$\quad = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -3 + 12i$ => $Z_{B'} = -3 + 12i$

Vérifions que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.
Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}\bullet\overrightarrow{CB'}\binom{-4}{8} = 0$

On a : $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}$ et $\overrightarrow{CB'}\binom{-4}{8}$. Donc $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}\bullet\overrightarrow{CB'}\binom{-4}{8} = 8 - 8 = 0$

__**Autre méthode :**__

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{Z_{\overrightarrow{CA}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}} = ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$

3) Soit Moù x et y sont des entiers relatifs et $M'\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix}$ son image par f.
Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

$Z_{M'} = (2 - 2i)Z_M + 1$

$\quad = (2 - 2i)(x + iy) + 1$

$\quad = (2x + 2y + 1\ \ ) + i(2y - 2x)$

=> $M'\begin{pmatrix}2x+2y+1 \\ 2y-2x\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2y-2x-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}$

$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CM'}\bullet\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow 4x - 4y - 2y + 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y = 0$. D'où $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si $x + 3y = 2$.

4) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$

$x + 3y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 3y \Leftrightarrow x \equiv 2[3] \Leftrightarrow x = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

En remplaçant $x = 3k + 2$ par sa valeur dans $x + 3y = 2$, on a : $y = -k$

D'où $S = \{3k + 2\,; -k\,\}$

En déduisons l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\,;5]$.

$-5 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3k + 2 \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq k \leq 1 \Rightarrow k \in \{-2\,;\,-1\,;0\,;1\}$

- Si $k = -2$ alors $x = -4$ et $y = 2M_1\binom{-4}{2}$.
- Si $k = -1$ alors $x = -1$ et $y = -M_2\binom{-1}{1}$.
- Si $k = 0$ alors $x = 2$ et $y = 0M_3\binom{-4}{2}$.
- Si $k = 1$ alors $x = 5$ et $y = -M_4\binom{5}{-1}$.

<u>Problème</u>……………………………………………………(10 *points*)

A// Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1) On désigne par $M\binom{x}{y}$ un point du plan, $M_1\binom{x_1}{y_1}$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$ et $M'\binom{x'}{y'}$ l'image de M_1 par la symétrie d'axe $(o\,;\,\vec{\imath}\,)$.

a- Exprimons x' et y' en fonction de x et y.

$M_1\binom{x_1}{y_1}$ image de $M\binom{x}{y}$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}$

$M'\binom{x'}{y'}$ image de $M_1\binom{x_1}{y_1}$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

b- Caractérisons l'application qui transforme M en M'.

Soit f: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

f transforme M en M' ⇔ $f(M) = M$ ⇔ $\begin{cases} x = y \\ y = -x \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$ => $x = 0$ et $y = 0$

L'ensemble des points invariants par f est donc $O\binom{0}{0}$

La matrice de l'application linéaire φ associée à f est $M_\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où f est une rotation de centre $O\binom{0}{0}$ et d'angle θ tel que $\begin{cases} cos\theta = 0 \\ sin\theta = -1 \end{cases}$ => θ= $-\frac{\pi}{2}$

c- On désigne par $\boldsymbol{r}$ l'application qui au point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M''\binom{x''}{y''}$ définie par :
$\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$.

Montrons que $\boldsymbol{r}$ est une rotation dont précisera le centre Ω et l'angle θ.
$Z'' = x'' + iy'' = 1 + y + i(1 - x) = -i(x + iy) + 1 + i$

$Z'' - 1 = -iZ + i = -i(Z - 1) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - 1)$ => $Z'' - Z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_\Omega)$ avec $Z_\Omega = 1$

D'où $\boldsymbol{r}$ est une rotation de centre $\Omega\binom{0}{1}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

2) Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$,

Déterminons l'ensemble décrit par le point M''

$M''\binom{x''}{y''}$ ⇔ $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$

$x'' + y'' = 2$ ⇔ $x'' + y'' - 2 = 0$

Donc l'ensemble décrit par le point M'' est la droite d'équation $x + y - 2 = 0$

Ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$.

Soit I le milieu du segment $[MM'']$ tel que I$\begin{pmatrix} \frac{x''+x}{2} \\ \frac{y''+y}{2} \end{pmatrix}$ => I$\begin{pmatrix} \frac{1+x+x}{2} \\ \frac{1-x+x}{2} \end{pmatrix}$=> I$\begin{pmatrix} \frac{1+2x}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D'où l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

3) Au point $M\binom{x}{y}$, on associe le point $M_2\binom{x_2}{y_2}$ définie par : $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$

a- Déterminons la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O.

L'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 1$

$\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x_2 - 1}{3} \\ x = \frac{1 - y_2}{2} \end{cases}$

Ainsi l'équation : $x^2 + y^2 = 1$ devient $\left(\frac{1-y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_2-1)^2}{4} + \frac{(y_2-1)^2}{9} = 1$

Donc l'ensemble (E) des points M_2 cherché est l'ellipse d'équation : $\frac{(x_2-1)^2}{4} + \frac{(y_2-1)^2}{9} = 1.$

b- Caractérisons l'image de (E) par la rotation $\boldsymbol{r}$ définie en 1) –c.

On a : (E): $\frac{(x_2-1)^2}{4} + \frac{(y_2-1)^2}{9} = 1$ et $\boldsymbol{r}$: $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x'' - 1 \\ x = 1 - y'' \end{cases}$

Dans (E), on a : $\frac{(1-y''-1)^2}{4} + \frac{(x''-1-1)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{(y'')^2}{4} + \frac{(x''-2)^2}{9} = 1$

D'où l'image de (E) par la rotation $\boldsymbol{r}$ est l'ellipse d'équation : $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y)^2}{9} = 1.$

Ainsi ces éléments caractéristiques sont :

- Centre : $\Omega\binom{2}{0}$
- Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- Sommets $A\binom{2}{0}$; $A'\binom{2}{0}$; $B\binom{0}{3}$; $B'\binom{0}{-2}$ dans le repère $(\Omega\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$.
- Foyers :$F\binom{0}{\sqrt{5}}$; $F'\binom{0}{-\sqrt{5}}$ dans le repère $(\Omega\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$.
- Directrice : $D: y = \frac{9}{\sqrt{5}}$ et $D': y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ dans le repère $(\Omega\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$.

B// Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = (2x - 1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1) Etudions les variations de f et traçons sa courbe Cf dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$.

D$f = [-1; +\infty[$ et $f(-1) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{-\frac{3}{2}}{0^+} = -\infty$

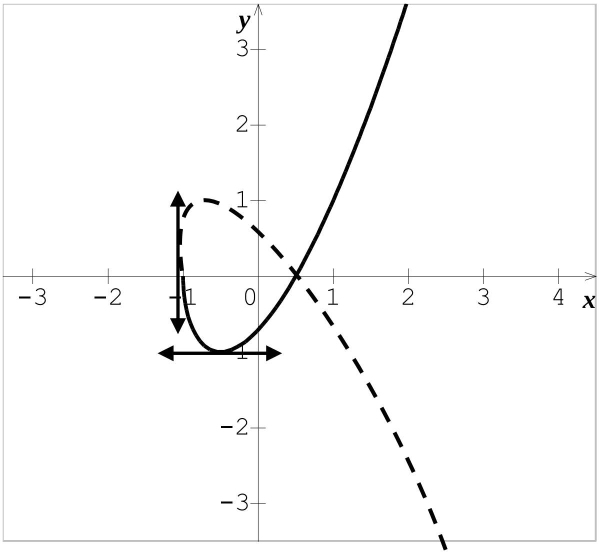
Alors f n'est pas dérivable au point d'abscisse $x_0 = -1$ mais admet en ce point une demi tangente verticale.

$\forall x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) = 2\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \frac{(2x-1)}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{8\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2x - 1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{6x+3}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}$

Alors le signe de $f'(x)$dépend du signe du numérateur $6x+3$ car $\forall x \in]-1;+\infty[, 2\sqrt{\frac{x+1}{2}} > 0$

Posons $6x+3=0$ => $x=-\frac{1}{2}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	-1	↗	$+\infty$



Précisons les tangentes à Cf aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$

Les tangentes à Cf ont pour équation : $x=-1$ aux points d'abscisse -1 et $y=-1$ aux points d'abscisse $-\frac{1}{2}$

2) Soit C$'f$ l'image de la courbe Cf par la symétrie orthogonale par rapport à $(o\,;\,\vec{\imath}\,)$.
On pose Γ= Cf ∪ C$'f$.

Traçons Γ dans le même repère que Cf.(voir figure)

3) On considère le point $A\binom{-1}{0}$ et la droite Δ d'équation $x=-2$. Soit m un paramètre non nul, D la droite d'équation $y=mx$

D' la droite orthogonale à D en $O\binom{0}{0}$ => $y=-\frac{1}{m}x$

Les droites D et D' coupent Δ en P et P' respectivement

$(\Delta) \cap$ (D): => $\begin{cases} x = -2 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2m \end{cases}$ => P$(-2\,;\,-2m)$

$(\Delta) \cap$ (D′): => $\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{m} \end{cases}$ => P′$\left(-2\,;\,\frac{2}{m}\right)$

Soit K le milieu du segment $[PP']$ => K$\left(-2\,;\,\frac{1-m^2}{m}\right)$

La droite (AK) coupe D et D' en M et M' respectivement.

a- Déterminons les coordonnées de M et M' en fonction de m.

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left(-1\,;\,\frac{1-m^2}{m}\right)$. Soit T$(x;y) \in$ (AK) et $\overrightarrow{\mathrm{AT}}(x+1\,;\,y)$

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ sont colinéaires si $det\left(\overrightarrow{\mathrm{AK}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AT}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ y & \frac{1-m^2}{m} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1-m^2}{m}x + \frac{1-m^2}{m} + y = 0 \Leftrightarrow (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$

(AK): $(1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$

$(AK) \cap (D)$: $\begin{cases} (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0 & \mathbf{(1)} \\ y = m & \mathbf{(2)} \end{cases}$

$\mathbf{(1)}$ $(1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$ => $x = m^2 - 1$

$\mathbf{(2)}$ $y = m(m^2-1)$ => $M\begin{pmatrix} m^2-1 \\ m(m^2-1) \end{pmatrix}$

$(AK) \cap (D')$: $\begin{cases} (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0 & \mathbf{(1)} \\ y = -\frac{1}{m}x & \mathbf{(2)} \end{cases}$

$\mathbf{(1)}$ $(1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$ => $x = \frac{1-m^2}{m^2}$

$\mathbf{(2)}$ $y = -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right)$ => $M'\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{m^2} \\ -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) \end{pmatrix}$

b- Soit Γ_1 , l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}^*$

Trouvons une relation entre Γ_1 et Γ_1'.

$\begin{cases} x = m^2 - 1 \\ y = m(m^2-1) \end{cases}$ => $\begin{cases} m^2 = x + 1 \\ y = x\sqrt{x+1} \end{cases}$ => Γ_1 a pour équation $y = x\sqrt{x+1}$.

Soit $\Gamma_1{}'$ celui des points M'lorsque $m \in \mathbb{R}^*$.

$\begin{cases} x = \frac{1-m^2}{m^2} \\ y = -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) \end{cases}$ => $\begin{cases} m^2 = \frac{1}{x+1} \\ y = -x\sqrt{x+1} \end{cases}$ => Γ'_1 a pour équation $y = -x\sqrt{x+1}$.

Ainsi Γ_1 et Γ'_1 sont symétriques par rapport à l'axe $(o\ ;\ \vec{\imath})$.

Sujet Bac 2016. (TSE - STI)

Exercice 1..($5\ \boldsymbol{points}$)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points *B*, *D* et *C* définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que *ABCD* soit un rectangle.

1°/ Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2°/ Soit E l'image de *B* par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe Z_E de *E*.
Construis *E*.

3°/ Détermine les nombres réels *a* et *b* tels que le point *F* d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points *A*, *B* et *C* affectés respectivement des coefficients *a*, *b* et 1.

4°/ On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ qui transforme *A* en *E* et *B* en *F*.

a-/ Exprime Z**'** en fonction de Z où Z**'** est l'affixe du point *M'* image de M par $\mathcal{S}$.

b-/ Détermine le centre **Ω**, l'angle θ et le rapport *k* de la similitude $\mathcal{S}$

c-/ Détermine les images de *C* et *D* par $\mathcal{S}$.

d-/ Calcule l'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle *ABCD*.

Exercice 2..($5\ \boldsymbol{points}$)

I-/ On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1°/ La distance comprise entre deux arbres.

2°/ Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

II-/ On considère l'équation (**E**) : $11x - 26y = 1$, où *x* et *y* désignent deux nombres entiers relatifs.

1°/ Vérifie que le couple $(-7 ; -3)$ est une solution de (**E**).

2°/ Résous alors l'équation (**E**).

3°/ En déduis le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$.

Problème..($10\ \boldsymbol{points}$)

A-// A l'instant $t = 0$ (*t* est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note Q(*t*) la quantité de substance présente dans le sang à l'instant *t*, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta.Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1°/ Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

2°/ Calcule la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

3°/ Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan $\mathcal{P}$.

4°/ Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

B-// Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par :

$f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1°/ Détermine l'ensemble de définition de *f*.
2°/ Etudie les variations de *f*.
3°/ Soit ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé (unité 2cm).
Montre que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote oblique dont précisera l'équation puis précise la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à l'asymptote oblique.
4°/ Montre que le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour ($\mathcal{C}$)
5°/ Donne une équation de la tangente en I à ($\mathcal{C}$).

Correction Bac 2016

Exercice 1..(**5** ***points***)

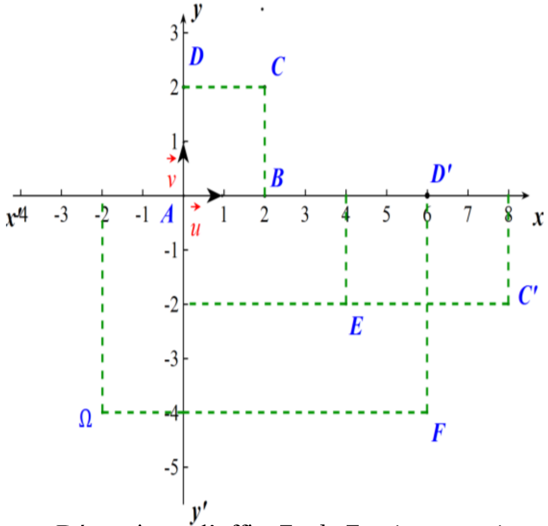
On considère les points A, B, C et D.

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$

1. Plaçons les points A, B, C et D

$Z_B = 2$; $Z_C = 2 + 2i$

$Z_D = 2i$



2. a-Déterminons l'affixe Z_E de E puis construisons E.

Soit T la Translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Première Méthode

$T(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow Z_E - Z_B = Z_B - Z_D \Leftrightarrow$

$Z_E = 2Z_B - Z_D \Longrightarrow Z_E = 4 - 2i$

Deuxième méthode :

On sait $T : Z' = Z + b$

$b = Z_{\overrightarrow{DB}} = Z_B - Z_D = 2 - 2i$

$T(B) = E \Leftrightarrow Z_E = Z_B + 2 - 2i$

$Z_E = 2 + 2 - 2i = 4 - 2i$

3. Déterminons les nombres réels a et b tel que $F = \mathrm{bar}\{(A\,,a);(B,b);(C,1)\}$
Avec $Z_F = 6 - 4i$.

$F = \mathrm{bar}\{(A\,,a);(B,b);(C,1)\}$ Signifie que $a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ et $a + b + 1 \neq 0$

Première Méthode

$$Z_F = \frac{aZ_A + bZ_B + Z_C}{a+b+1} \Leftrightarrow 6 - 4i = \frac{2b+2+2i}{a+b+1} \Leftrightarrow 6 - 4i = \frac{2b+2}{a+b+1} + \frac{2}{a+b+1}i$$

Par identification : $\begin{cases} \frac{2b+2}{a+b+1} = 6 \ (1) \\ \frac{2}{a+b+1} = -4 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -2 \\ -2a - 2b = 3 \end{cases}$

Dans (1) on a :$3 + 2b = -2 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$

Deuxième méthode : (coordonnées du barycentre).

$$\begin{cases} x_F = \frac{ax_A + bx_B + x_C}{a+b+1} \\ \text{et} \\ y_C = \frac{ay_A + by_B + y_C}{a+b+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = \frac{2b+2}{a+b+1} \\ \text{et} \\ -4 = \frac{2}{a+b+1} \end{cases} \Rightarrow a = 1 \quad \text{et} \quad b = -\frac{5}{2}$$

4. Soit S la similitude directe telle que :

$S(A) = E$ et $S(B) = F$

a. Exprimons Z' en fonction de Z.

$$\begin{aligned} S \ &: \ P \longrightarrow P \\ &M(Z) \longmapsto M'(Z') \end{aligned}$$

$S(A) = E \Leftrightarrow Z_E = \alpha Z_A + \beta$

$S(B) = F \Leftrightarrow Z_F = \alpha Z_B + \beta$

Par suite on a :

$$\begin{cases} \alpha(0) + b = 4 - 2i \\ 2\alpha + \beta = 6 - 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 - 2i \\ \alpha = \frac{6-4i-\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 - 2i \\ \alpha = \frac{6-4i-4+2i}{2} = 1 - i \end{cases}$$

D'où $Z' = (1 - i)Z + 4 - 2i$.

b. Déterminons le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de S.

$$\alpha = 1 - i = \left[\sqrt{2}\,;\, -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \text{ et } k = \sqrt{2}$$

Le centre Ω

Deuxième méthode :

$$Z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{4-2i}{1-1+i} = -2 - 4i$$

Deuxième méthode : Ω point invariant :

$Z' = Z \Leftrightarrow Z = (1 - i)Z + 4 - 2i$

$iZ = 4 - 2i$

$\Rightarrow Z = -2 - 4i$

c) Déterminons les images de C et D par S.

Posons $C' = S(C)$ et $D' = S(D)$

$S(C) = C'$

$Z_{C'} = (1 - i)Z_C + 4 - 2i = (1 + i)(2 + 2i) + 4 - 2i = 8 - 2i$

$S(D) = D'$

$Z_{D'} = (1 - i)Z_D + 4 - 2i = (1 + i)(2i) + 4 - 2i = 6$

d) Calculons l'aire de l'image du rectangle ABCD par S.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle :

$\mathcal{A} = AB \times AD = 4\ cm^2$

$\mathcal{A}' = S(\mathcal{A}) = k^2 = 2 \times 4\ cm^2 = 8\ cm^2$

Exercice 2……………….………………………………………(5 *points*)

I// $L = 525\ m\ ; l = 285\ m$

1) Calculons la distance comprise entre deux arbres :

La distance comprise entre deux arbres est le $PGCD(525\ ; 285) = 15$

L'espace entre deux arbres est 15 m

2) Calculons le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Le périmètre du champ :

$P = 2(L + l) = 2(525 + 285) = 1620$; $P = 1620\, m$

Le nombre d'arbres est : $n = \frac{1620}{15} = 108$

Nous avons 108 arbres.

II// On considère l'équation(E) : $11x - 26y = 1$où $x, y \in \mathbb{Z}$.

1) Vérifions que le couple$(-7\,;\,-3)$ est une solution de (E).

$11(-7) - 26(-3) = -77 + 78 = 1$

Donc le couple $(-7\,;\,-3)$ est une solution de (E).

2) Résolvons l'équation(E) :

<u>Première méthode : (Gauss)</u>

D'après 1°) on a :

$$\begin{cases} 11x - 29y = 1 \\ 11(-7) - 26(-3) = 1 \end{cases}$$

$11(x + 7) = 26(y + 3)$

$11/26(x + 3)$et $11 \wedge 26 = 1$ d'après Gauss il existe un entier relatif k tel que

$y + 3 = 11k \Longrightarrow y = 11k - 3$

$26/11(x + 7)$et$11 \wedge 26 = 1$ d'après Gauss il existe un entier relatif k tel que

$x + 7 = 26k \Longrightarrow x = 26k - 7$

$S = \{(26k - 7\,; 11k - 3)\,; k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Deuxième méthode : (congruence)</u>

$26y = 1 - 11x \Leftrightarrow 26y \equiv -1[11]$
$4y \equiv -1[11]$
$y \equiv -3[11]$Ou $y \equiv 8[11]$donc $y = 11k - 3$ ou $y = 11k + 8$
Si $y = 11k - 3$
$11x - 26(11k - 3) = 1$
$11x = 26 \times 11k - 3 \times 26 + 1$

$x = 26k - 7$
Si $y = 11k + 8$ on a :
$11x = 26 \times 11k + 209$
$x = 26k + 19$
$S = \{(26k - 7 ; 11k - 3) ; k \in \mathbb{Z}\}$Ou $S = \{(26k + 19 ; 11k + 8) ; k \in \mathbb{Z}\}$

3) Déduisons – en le couple(p , q) solution de(E) tel que $0 \leq p \leq 25$
D'après 2°) :
$p = 26k - 7$et $q = 11k - 3$
$0 \leq p \leq 25$
$0 \leq 26k - 7 \leq 25$
$7 \leq 26k \leq 32$
$\frac{7}{26} \leq k \leq \frac{32}{26}$
$0{,}26 \leq k \leq 1{,}25 \Rightarrow k = 1$. Donc $p = 26 - 7 = 19$ et $q = 8$ et $S = \{(19 ; 8)\}$.

<u>Problème</u>………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

A. On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t.
$t = 0$; $Q(0) = 2{,}5$; $Q'(t) = -\beta Q(t)$

1) Montrons qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$
$Q'(t) = -\beta Q(t) \Rightarrow Q(t) = Ce^{-\beta t}$
$Q(0) = 2{,}5 \Rightarrow C = 2{,}5$ D'où $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

2) Calculons la valeur de β.

<u>Première méthode :</u>

$Q(t + 1) = Q(t) - \frac{30}{100} \Leftrightarrow Q(t)Q(t + 1) = 0{,}7Q(t)$
Pour $t = 0$
$Q(1) = 0{,}7Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta}.= 0{,}7Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta} = 0{,}7 \times 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-\beta} = 0{,}7$
$\Longrightarrow -\beta = ln0{,}7$
$\beta = -ln0{,}7$
$\beta = 0{,}3567$

<u>Deuxième méthode :</u>

$Q(t) = 2{,}5e^{-\beta}$
Pour $t = 1$, on a :
$Q(1) = Q(0) - \frac{30}{100}Q(0)$
$Q(1) = 0{,}7 \times Q(0)$
$\beta = 0{,}3567$

3)Étudions le sens de variation de Q pour $t \geq 0$.

$D_Q = [0 , +\infty[$.
$Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$, Q est continue et dérivable pour $t \geq 0$.
$Q^{'}(t) = -2{,}5\beta e^{-\beta t}$
$\forall t \geq 0 , Q^{'(t)} < 0$ Alors Q est strictement décroissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} Q(t) = 0$

x	1	$+\infty$
$Q'(t)$	$-$	
$Q(t)$	$2{,}5$ ↘	0

3) Le temps au bout duquel la quantité du sang est réduite de moitié.

$Q(t) = \frac{1}{2}Q(0)$
$5{,}2e^{-\beta t} = \frac{1}{2} \times 2{,}5$
$e^{-\beta t} = \frac{1}{2}$
$t = \frac{ln2}{\beta} = -\frac{ln2}{ln0{,}7} = 1{,}94$
Le temps $t \approx 2\ heures$

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition :

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\,;1\} =]-\infty\,;0[\, \cup\,]0\,;1[\, \cup\,]1\,;+\infty[$$

2) Étudions les variations de f

$f$est continue et dérivable sur chacun des intervalles de son D_f
$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2+x+2x-2x+2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$

Signe de $f'(x)$

Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$

$x_1 = -1\,;\, x_2 = 2$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x(x-1)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$	

Pour tout $x \in]-\infty\,;\,-1] \cup]0\,;1[\cup [2\,;\,+\infty[$
Pour tout$x \in [-1\,;0[\cup]1\,;2]$, f est f est croissante.

3) Montrons que la courbe (C) admet une asymptote oblique :

Posons $y = -\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to -\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$

Donc $(D): y = -\frac{x}{2}$

Position de (C) par rapport (D)

$f(x) - y = ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

Première méthode :

Posons $g(x) = ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$D_g = D_f$

$g'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$

Tableau de variation$g(x)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\vdots$	$-$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

D'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$; $g(x) > 0$ et par conséquent $\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$; (C) est au-dessus de (D).

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$; $g(x) < 0$ et par conséquent $\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$; (C) est en dessous de (D).

Pour $x = \frac{1}{2}$, (C) et (D) sont confondues.

4) Montrons que le point I $\left(\frac{1}{2} ; \frac{-1}{4}\right)$ est centre de symétrie.

$2a - x = 1 - x$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 0$ et $-x \neq -1 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1$ et$1 - x \neq 0$ donc $1 - x \in D_f$

$f(1-x) + f(x) = \frac{x-1}{2} + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right| + \frac{x}{2} - \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| = -\frac{1}{2}$

$f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2}$

5) Donnons une équation de la tangente en I à(C) :

$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$ => $y = -\frac{9}{2}x + 2.$

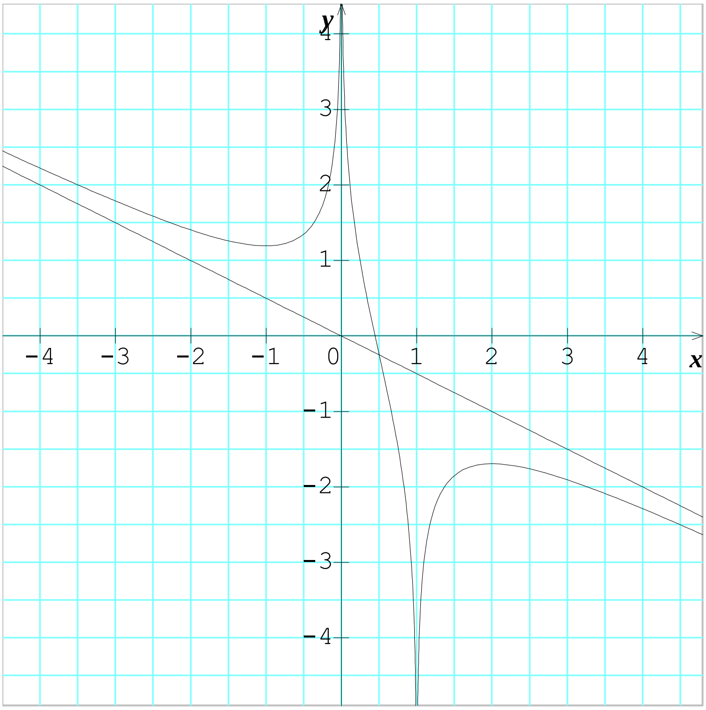
6) Construisons la courbe(C) :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + \infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \infty$;

Les extremums :
$f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2$ =1,19 $\approx 1,2$; $f(2) = -1 - \ln 2 = -1,69 \approx 1,7$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$1,2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1,17$	↘	$-\infty$

D'où la courbe



Sujet Bac 2017. (TSE - STI)

Exercice 1……………………………………………………($\mathbf{5}\ \boldsymbol{points}$)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes : $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n désigne un entier naturel.

1) Exprime Z_{n+1} en fonction Z_n puis Z_n en fonction de Z_0 et n.
2) Donne Z_0 ; Z_1; Z_2 ; Z_3 et Z_4 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
3) Place les points M_0 ; M_1; M_2 ; M_3 et M_4 (unité :4 cm).
4) Détermine la distance OM_n en fonction de n.
5) a- Montre que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b- On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire$L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots M_nM_{n+1}$).

Détermine L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

6) Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}\ ;\ \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n.
7) Pour quelles valeurs de n les points O ; M_0 et M_n sont ils alignés ?

Exercice 2……………………………………………………($\mathbf{5}\ \boldsymbol{points}$)

I) Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $\{(A;1)\ ;\ (B;m)\ ;\ (C;2m)\}$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montre que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.
2) Montre que les points G_1 ; J et C sont alignés.
3) Montre que pour tout point $M, \overrightarrow{V_M} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.
4) Montre que pour tout réel m distincte de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.
5) Montre que le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en B.

II) Dans le plan affine Euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f défini par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

1) Démontre que f est une isométrie.
2) Trouve l'ensemble des points invariants par f.
3) Caractérise géométriquement l'application f.

Problème……………………………………………………($\mathbf{10}\ \boldsymbol{points}$)

A) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.
   On appelle (C) la courbe représentative de f.

1) a- Calcule la fonction dérivée de f.
   b- Dresse le tableau de variation de f' sur $[0;+\infty[$ puis en déduis le signe de f' sur $[0;+\infty[$.
   c- Dresse le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
   d- Montre que (C) admet une asymptote (D) dont on déterminera une équation.
   e- Construit (C) et (D) sur un même graphique.
2) a- Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0;+\infty[$ une solution et une seule notée α.
   b- Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1;+\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.
   1) Etudie les variations de g sur J puis en déduis que pour tout $x \in J, g(x) \in J$.
   2) Montre que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.
      En déduis que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.
   3) Soit (u_n) la suite d'éléments de J définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier n positif ou nul.

a- Montre que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

b- En déduis que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

c- Détermine la limite de la suite u_n

d- Détermine un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.
   Calcule u_p à 10^{-3} près.

Correction Bac 2017

Exercice 1……………………………………………………………$(\mathbf{5\ points})$

1) Exprimons Z_{n+1} en fonction Z_n puis Z_n en fonction de Z_0 et n.

- $\boldsymbol{Z_{n+1}}$ **en fonction** $\boldsymbol{Z_n}$

$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ => $Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (1 + i\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}iZ_n$.
D'où $Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$.

- $\boldsymbol{Z_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{Z_0}$ **et** $\boldsymbol{n}$.

$Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$ Signifie que Z_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme Z_0.

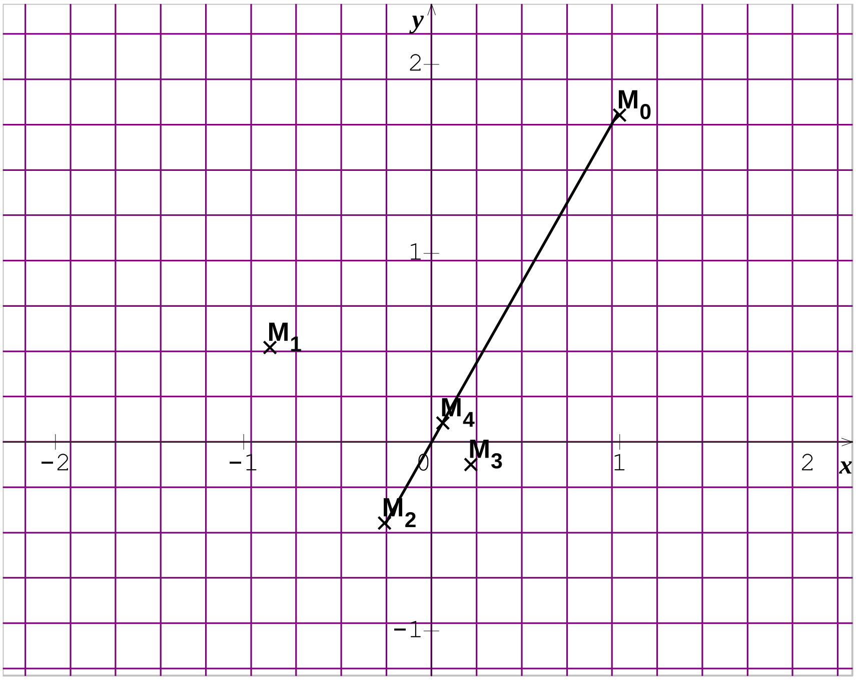
D'où $Z_n = Z_0\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}$

2) Donnons Z_0 ; Z_1; Z_2 ; Z_3 et Z_4 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

	Z_0	Z_1	Z_2
Forme algébrique	$1 + i\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$
Forme trigonométrique	$2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$	$cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)$

	Z_3	Z_4
Forme algébrique	$\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$	$\frac{1}{16} + i\frac{\sqrt{3}}{16}$
Forme trigonométrique	$\frac{1}{4}\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$	$\frac{1}{8}\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$

3) Plaçons les points M_0 ; M_1; M_2 ; M_3 et M_4 (unité :4 cm).



4) Déterminons la distance OM_n en fonction de n.

$$OM_n = |Z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

5) a- Montrons que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$M_nM_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_n| = \left|\frac{1}{2}iZ_n - Z_n\right| = \left|Z_n\left(\frac{1}{2}i - 1\right)\right| = |Z_n| \times \left|-1 + \frac{1}{2}i\right|$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

D'où $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$

b- On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$).

- Déterminons L_n en fonction de n

$$L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots M_nM_{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2^0} + \frac{\sqrt{5}}{2^1} + \frac{\sqrt{5}}{2^2} + \cdots + \frac{\sqrt{5}}{2^n} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{5} \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

- Déterminons la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2\sqrt{5} \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2\sqrt{5}$ Car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

6) Déterminons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}\,;\,\overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n.

$$Mes(\overrightarrow{OM_0}\,;\,\overrightarrow{OM_n}) = arg\left(\frac{Z_{M_n}-Z_0}{Z_{M_0}-Z_0}\right) = arg\left(\frac{Z_{M_n}}{Z_{M_0}}\right) = arg\left[\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right] = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où $Mes(\overrightarrow{OM_0}\,;\,\overrightarrow{OM_n}) = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

7) Déterminons les valeurs de n pour les quelles les points O ; M_0 et M_n sont ils alignés

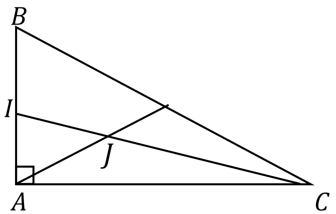
Les points O ; M_0 et M_n sont ils alignés si et seulement si $\frac{Z_{M_n}-Z_0}{Z_{M_0}-Z_0} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$arg\left(\frac{Z_{M_n}-Z_0}{Z_{M_0}-Z_0}\right) = k'\pi \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} + 2k\pi = k'\pi \Leftrightarrow n\pi + 4k\pi = 2k'\pi \Leftrightarrow n = 2k' - 4k$$

$\Leftrightarrow n = 2(k' - 2k)$. En posant $p = k' - 2k$, on a : $n = 2p$.

Exercice 2……………….……………………………………………(5 $points$)

I) Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.



Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $\{(A; 1)\ ;\ (B; m)\ ;\ (C; 2m)\}$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montrons que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.

G_1 est le milieu du segment $[CI]$ si et seulement si $\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

$G_m = \{(A;1)\ ;\ (B;m)\ ;\ (C;2m)\} \Leftrightarrow G_1 = \{(A;1)\ ;\ (B;1)\ ;\ (C;2)\} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$ (Introduisons le milieu I du segment $[AB]$ dans $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1I} + 2\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (Car I est le milieu du segment $[AB]$)

$\Rightarrow 2\overrightarrow{G_1I} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

D'où G_1 est le milieu du segment $[CI]$

2) Montrons que les points G_1 ; J et C sont alignés.

Les points G_1 ; J et C sont alignés si et seulement si $det\left(\overrightarrow{G_1J} + \overrightarrow{G_1C}\right) = 0$

Cherchons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{G_1J}$ et $\overrightarrow{G_1C}$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

J Le centre de gravité de $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (Introduisons le point A dans $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $J\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$

D'autre part $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Donc $G_1\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$

De même $C(0;1)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$

Ainsi $\overrightarrow{G_1J}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{G_1J}\begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G_1C}\begin{pmatrix}0 - \frac{1}{4}\\ 1 - \frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{G_1J}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow det\left(\overrightarrow{G_1J}\ ;\ \overrightarrow{G_1C}\right) = \begin{vmatrix}\frac{1}{12} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \left(\frac{1}{24}\right) - \left(\frac{1}{24}\right) = 0$

D'où Les points G_1 ; J et C sont alignés.

3) Montrons que pour tout point $M, \overrightarrow{V_M} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

$\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ (Introduisons le point A dans $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$)

=> $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{V_M} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_M} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.

D'où $\overrightarrow{V_M} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.

4) Montrons que pour tout réel m distincte de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

$\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$ si et seulement si $det(\overrightarrow{AG_m}\ ;\ \overrightarrow{AG_{-1}}) = 0$

Cherchons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AG_m}$ et $\overrightarrow{AG_{-1}}$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

$G_m = \{(A; 1)\ ;\ (B; m)\ ;\ (C; 2m)\} \Leftrightarrow (1+3m)\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AB} + 2m\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{1+3m}\overrightarrow{AB} + \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AC}$. D'où $G_m\left(\frac{m}{1+3m}\ ;\ \frac{2m}{1+3m}\right)$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Pour $m = -1$; on a : $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. D'où $G_{-1}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

=> $det(\overrightarrow{AG_m}\ ;\ \overrightarrow{AG_{-1}}) = \begin{vmatrix} \frac{m}{1+3m} & \frac{1}{2} \\ \frac{2m}{1+3m} & 1 \end{vmatrix} = \frac{m}{1+3m} \times 1 - \frac{2m}{1+3m} \times \frac{1}{2} = \frac{m}{1+3m} - \frac{m}{1+3m} = 0$

D'où $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$

5) Montrons que le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en B.

$IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en B si et seulement si en appliquant le théorème de Pythagore on a : $IB^2 + {BG_{-1/2}}^2 = {IG_{-1/2}}^2$

Calculons ainsi les distances IB ; $BG_{-1/2}$ et $IG_{-1/2}$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

On sait que $B(1\ ;0)$; I est le milieu de $[AB]$ donc $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $G_{-1/2}(1;\ 2)$

Donc : $IB = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$; $BG_{-1/2} = \sqrt{2^2} = 2$ et $IG_{-1/2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$IB^2 + {BG_{-1/2}}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

$IG_{-1/2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow {IG_{-1/2}}^2 = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

Puisque $IB^2 + {BG_{-1/2}}^2 = {IG_{-1/2}}^2 = \frac{17}{4}$; alors $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en B.

II) Dans le plan affine Euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f défini par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

1) Démontrons que f est une isométrie.

f étant une application affine, la matrice de l'endomorphisme associé à f est M_φ définie par :

$M_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ qui est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Vérifions ainsi si $det(M_\varphi) = -1$

$$det(M_\varphi) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{25}{25} = -1$$

2) Trouvons l'ensemble des points invariants par f.

L'ensemble des points invariants par f est tel que $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = (-3x + 4y + 4) \\ 5y = (4x + 3y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$.

3) Caractérisons géométriquement l'application f.

f Étant une isométrie et admettant la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$ comme point invariant, alors f est une symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$.

Problème……………………………………………………$(\mathbf{10\ points})$

A) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$. On appelle (C) la courbe représentative de f.

1) a- Calculons la fonction dérivée de f.

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \Rightarrow f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x} - 1 = -[1 + (2x + 1)e^{-2x}]$.

b- Dressons le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$

$Df = [0; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 1 = -1$ et $f'(0) = -2$

$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 1 \Rightarrow f''(x) = -(2 - 4x - 2)e^{-2x} = 4xe^{-2x}$

Ainsi pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$. D'où f est croissante.

D'où le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$ est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	-2 ↗	-1

En déduisons le signe de f' sur $[0; +\infty[$.

D'après le tableau de variation de f', pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

c- Dressons le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	2 ↘	$-\infty$

d- Montrons que (C) admet une asymptote (D) dont on déterminera une équation.

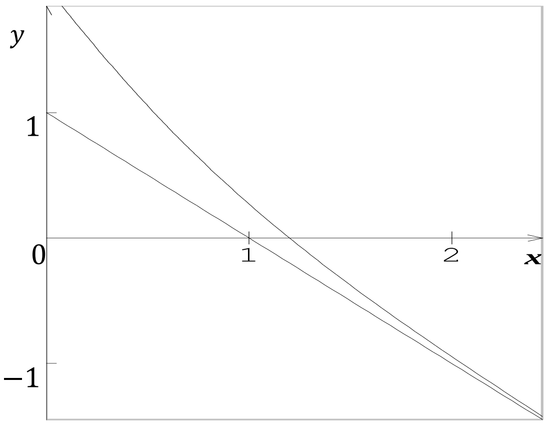
$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \Leftrightarrow f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + (1 - x) \Leftrightarrow$

$f(x) - (1 - x) = xe^{-2x} + e^{-2x}$ (Appliquons à cette égalité la limite en $+\infty$). On a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (1 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-2x} + e^{-2x}) = 0.$

Donc la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

e- Construisons (C) et (D) sur un même graphique.



2) a- Etablissons que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0;+\infty[$ une solution et une seule notée α.

D'après le tableau de variation de f, pour tout $x \in [0;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty\,;2]$. Or $0 \in]-\infty\,;2]$ donc il existe une solution unique $\alpha \in]-\infty\,;2]$ telle que $f(\alpha) = 0$

b- Justifions l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

$$\begin{cases} f(1) = 2e^{-2} > 0 \\ f(2) = \frac{3-e^4}{e^4} < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0.$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1;+\infty[$ par : $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudions les variations de g sur J

$g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 \Rightarrow g'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x} = -(2x+1)e^{-2x}$

Ainsi pour tout $x \in [1;+\infty[, g'(x) < 0$. Donc g est strictement décroissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 = 1$ et $g(1) = 1 + 2e^{-2}$

D'où le tableau de variation de f' sur $[0;+\infty[$ est le suivant :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$1+2e^{-2}$ $\searrow$ 1

En déduisons que pour tout $x \in J, g(x) \in J$.

D'après le tableau de variation de g, pour tout $x \in J$, $g(x) \in [1\,;\ 1 + 2e^{-2}[\subset J$.

D’où pour tout $x \in J, g(x) \in J$.

2) Montrons que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

$g'(x) = -(2x+1)e^{-2x}$ => $g''(x) = 4xe^{-2x} > 0$.

Donc pour tout $x \in J, g'(x)$ est strictement croissante.
$x \in J \Leftrightarrow x \geq 1$. Donc :

$g'(x) \geq g'(1) \Leftrightarrow g'(x) \geq -3e^{-2} \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Alors $|g'(x)| \leq |-3e^{-2}| \Leftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduisons que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

On sait que $\alpha \in [1\,;2] \subset J$ et $x \in J$ => $x \in [\alpha\,;x]$ et de plus pour tout $x \in J, |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En appliquant le théorème de l’inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l’intervalle $[\alpha\,;x]$, on a : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

D’autre part $f(x) = g(x) - x$ et $f(\alpha) = 0$ => $g(\alpha) = \alpha$. Par suite $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit (u_n) la suite d’éléments de J définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier n positif ou nul.

a-Montrons que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

D’après la question 2), on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|\ et$ en posant $x = u_n$, on a :

$|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$. Or $g(u_n) = u_{n+1}$ => $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

D’où pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

b-En déduisons que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

D’après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_{k+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_k - \alpha|$.

- Pour $k = 0$, on a : $\cancel{|u_1 - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}|u_0 - \alpha|$.
- Pour $k = 1$, on a : $\cancel{|u_2 - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_1 - \alpha|}$.
- Pour $k = 2$, on a : $\cancel{|u_3 - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_2 - \alpha|}$.

. . .

. . .

. . .

. . .

- Pour $k = n-2$, on a : $\cancel{|u_{n-1} - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_{n-2} - \alpha|}$.
- Pour $k = n-1$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_{n-1} - \alpha|}$.

En multipliant membre à membre puis en simplifiant les expressions de chaque égalité, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

D'autre part on a : $1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow$

$$-2 \leq -\alpha \leq -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - 2 \leq u_0 - \alpha \leq 1 - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq u_0 - \alpha \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq -(\alpha - u_0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq |-(\alpha - u_0)| \leq |-1| \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq |\alpha - u_0| \leq 1 \quad => \quad |\alpha - u_0| \leq 1$$

Donc $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n => |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

c-Déterminons la limite de la suite u_n

On a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n \Leftrightarrow |u_n - \alpha| = \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$(en appliquant la limite à chaque membre de l'égalité), on a : $\lim\limits_{n \to +\infty}|u_n - \alpha| = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

d-Déterminons un entier p pour le quel on est sûr d'avoir $\left|u_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}$.

On a : $\left(\frac{3}{e^2}\right)^p \leq 10^{-3} \Leftrightarrow p \geq \frac{-3ln10}{ln\left(\frac{3}{e^2}\right)} \Leftrightarrow p \geq 7{,}66$. donc $p = 8$.

Calculons u_p à 10^{-3} près : on a $u_8 = 1.200$.

Sujet Bac 2018. (TSE - STI)

Exercice 1…………………………………………………………$(6\ points)$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. (UA : $1cm$).

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue Z suivante : (E): $Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i) + 17i = 0$.

Partie A :

1) Montre que $-i$ est solution de (E).

2) Détermine les nombres réels a ; b et c tels que l'on ait l'égalité suivante :

$Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i) + 17i = (Z+i)(aZ^2 + bZ + c)$.

3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Partie B :

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $4+i$; $4-i$; $-i$.

1) Place les points sur une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice.

2) Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe Z, on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = iZ - 2i + 2$.

Le point K est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r.

Calcule l'affixe s de S.

3) Démontre que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Trace $\mathcal{C}$.

4) A tout point M d'affixe $Z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{iZ+10-2i}{Z-2}$.

a- Détermine les affixes des points A', B' et C' associés respectivement aux points A, B et C.

b- Vérifie que A', B' et C' appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}'$ de centre K' d'affixe i. Trace $\mathcal{C}'$.

c- Pour tout nombre complexe $Z \neq 2$, exprime $|Z' - i|$ en fonction de Z.

d) Soit un point M d'affixe Z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontre que $|Z' - i| = 2\sqrt{5}$.

e) En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 2…………………………………………………………$(4\ points)$

I// On considère l'équation (E): $8x + 5y = 1$, où $(x\ ;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1) a- Donne une équation particulière de l'équation (E).

b- Résous l'équation (E).

2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;b)$ de nombres entiers vérifiant le système suivant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a- Montre que le couple $(a\,;-b)$ est solution de (E).

b- Quel est le reste de la division de N par 40 ?

3) a- Résous l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\,;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b- Un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Commbien pouvait il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

II// On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+\ e^{-2x}}$

1) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x)\ = e^{2x} \times g(x)$.

Montre que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+\ e^{-2x}}$

2) En déduis toutes les solutions de (E).

<u>Problème</u>..$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

<u>Partie A :</u>

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)ln(x-1)$.

a- On admet que $\lim\limits_{x \to 0} xlnx = 0$. En déduis la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b- Calcule $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

c- Résous l'inéquation : $1 - ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

d- Etudie le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

e- Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle :

$[e+1\,;\ e^3+1]$ puis étudie le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2) Soit la fonction φ définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{ln(x^2-1)}{x}$.

a- Détermine $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

b- Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

c- Montre que φ est croissante sur l'intervalle $\left]1\,;\sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{\alpha}\,;+\infty\right[$.

<u>Partie B :</u>

On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{ln(e^{2x}-1)}{e^{2x}}$.

Soit Cf sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique : $5cm$ en abscisse et $10\ cm$ en ordonnée.

1) Vérifie que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f(x) = \varphi(e^x)$.

2) En déduis :

a- La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

b- La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

c- Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et le fait que f admet un maximum en $ln(\sqrt{\alpha})$.

3) Montre que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4) Reproduis puis complète le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5) Trace Cf. On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Correction Bac 2018

Exercice 1……………………………………………………………$(6\ points)$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. (UA : $1cm$).

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue Z suivante : (E): $Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i) + 17i = 0$.

Partie A :

1) Montrons que $-i$ est solution de (E).

$-i$ est solution de (E) si et seulement si $(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i) + 17i = 0$

$\Leftrightarrow$ $i + 8 - i - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ Vraie. Donc $-i$ est solution de (E).

2) Déterminons les nombres réels a ; b et c tels que l'on ait l'égalité suivante :

$Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i) + 17i = (Z+i)(aZ^2 + bZ + c)$.
Factorisons $Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i) + 17i$ En utilisant la méthode d'Horner

	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
$-i$		$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

Z_0 $\quad a$ $\quad b$ $\quad c$

=> $a = 1$; $b = -8$; $c = 17$

Ainsi l'équation devient (E) : $(Z+i)(Z^2 - 8Z + 17) = 0$.

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

$Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i) + 17i = 0 \Leftrightarrow (Z+i)(Z^2 - 8Z + 17) = 0 \Leftrightarrow$

$Z + i = 0 \ \Leftrightarrow Z = -i$

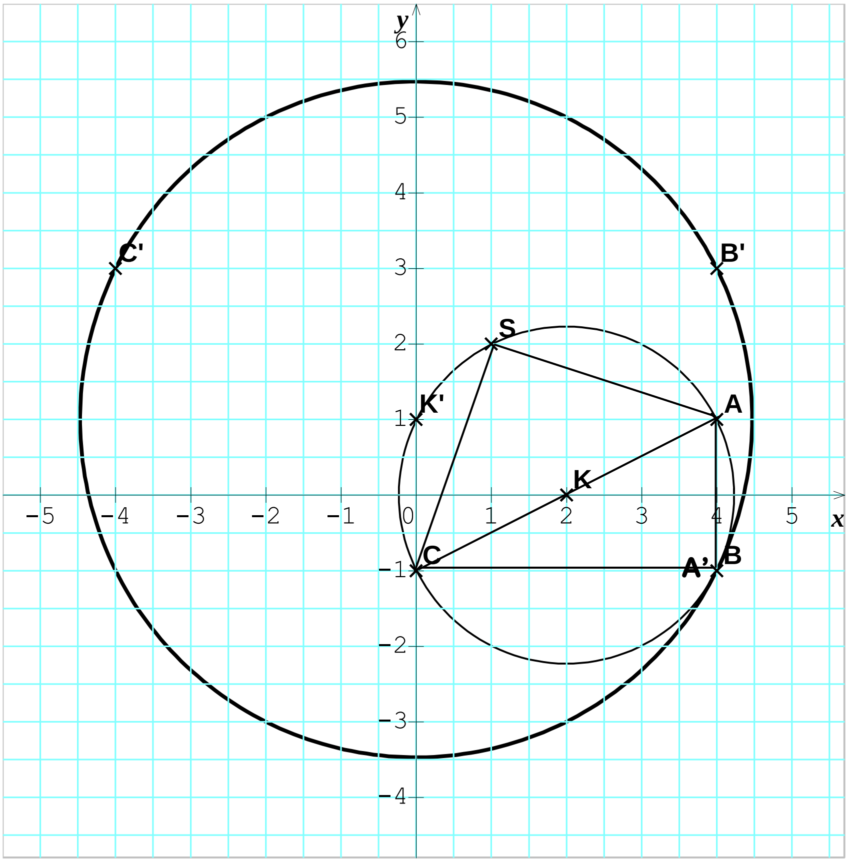
ou $Z^2 - 8Z + 17 = 0$ => $Z_1 = 4 - i$ et $Z_2 = 4 + i$

=> $S = \{-i\ ; 4 - i\ ; 4 + i\}$

Partie B :

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $4 + i$; $4 - i$; $-i$.

1) Plaçons les points sur une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice.



2) Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe Z, on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = iZ - 2i + 2$.

Le point K est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r.

Calculons l'affixe s de S.

$s = iZ_A - 2i + 2 = i(4 + i) - 2i + 2 = 1 + 2i$ => $s = 1 + 2i$

3)Démontrons que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Trace $\mathcal{C}$.

Soit K le centre de ce cercle. Les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ si :

$KB = KA = KS = KC = r$ où r est le rayon.

$KB = |Z_B - Z_K| = |(4 - i) - (2)| = |2 - i| = \sqrt{5}$

$KA = |Z_A - Z_K| = |(4 + i) - (2)| = |2 + i| = \sqrt{5}$

$KS = |Z_S - Z_K| = |(1 + 2i) - (2)| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$

$KC = |Z_C - Z_K| = |(-i) - (2)| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

D'où les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ de centre K et de rayon $r = \sqrt{5}$

4) A tout point M d'affixe $Z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{iZ+10-2i}{Z-2}$.

a- Déterminons les affixes des points A', B' et C' associés respectivement aux points A, B et C.

L'affixe du point A' est tel que $Z_{A'} = \frac{iZ_A+10-2i}{Z_A-2} = \frac{i(4+i)+10-2i}{(4+i)-2} = \frac{9+2i}{2+i} = 4-i$

L'affixe du point B' est tel que $Z_{B'} = \frac{iZ_B+10-2i}{Z_B-2} = \frac{i(4-i)+10-2i}{(4-i)-2} = \frac{11-2i}{2-i} = 4+3i$

L'affixe du point C' est tel que $Z_{C'} = \frac{iZ_C+10-2i}{Z_C-2} = \frac{i(-i)+10-2i}{(-i)-2} = \frac{11-2i}{-2-i} = -4+3i$

b- Vérifions que A', B' et C' appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}'$ de centre K' d'affixe i.

Soit K' le centre de ce cercle. Les points A', B' et C' appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}'$ si :

$K'A' = K'B' = K'C' = r$ où r est le rayon.

$K'A' = |Z_{A'} - Z_{K'}| = |(4-i)-(i)| = |4-2i| = 2\sqrt{5}$

$K'B' = |Z_{B'} - Z_{K'}| = |(4+3i)-(i)| = |4+2i| = 2\sqrt{5}$

$K'C' = |Z_{C'} - Z_{K'}| = |(-4+3i)-(i)| = |-4+2i| = 2\sqrt{5}$

D'où les points A', B' et C' appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}'$ de centre K' d'affixe i.

Traçons $\mathcal{C}'$ (voir figure)

c- Pour tout nombre complexe $Z \neq 2$, exprimons $|Z'-i|$ en fonction de Z.

$|Z'-i| = \left|\frac{iZ+10-2i}{Z-2} - i\right| = \left|\frac{iZ+10-2i-iZ+2i}{Z-2}\right| = \left|\frac{10}{Z-2}\right| = \frac{10}{|Z-2|}$

d- Soit un point M d'affixe Z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontrons que $|Z'-i| = 2\sqrt{5}$.

D'après la question c-), on a : $|Z'-i| = \frac{10}{|Z-2|}$

On sait également que $|Z-2| = \sqrt{5}$

Donc $|Z'-i| = \frac{10}{|Z-2|} \Leftrightarrow |Z'-i| = \frac{10}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |Z'-i| = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$.

D'où $|Z'-i| = 2\sqrt{5}$.

e- En déduisons à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle $\mathcal{C}$.

D'après la relation $|Z'-i| = 2\sqrt{5}$, l'ensemble des points M' appartiennent au cercle de centre K' et de rayon $2\sqrt{5}$

Exercice 2..($\mathbf{4\ points}$)

I// On considère l'équation $(E): 8x + 5y = 1$, où $(x\,; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1) a- Donnons une équation particulière de l'équation (E).

Le tableau d'Algorithme nous donne :

q	1	1	1	1
8	5	3	2	1
r	3	2	1	0

=> $1 = 3 - 1 \times 2$. Or $2 = 5 - 1 \times 3$

=> $1 = 3 - 1 \times (5 - 1 \times 3) \Leftrightarrow 1 = 3 - 5 + 1 \times 3$. Or $3 = 8 - 1 \times 5$

=> $1 = (8 - 1 \times 5) - 5 + 1 \times (8 - 1 \times 5) \Leftrightarrow 1 = 8 - 1 \times 5 - 5 + 1 \times 8 - 1 \times 5$

$\Leftrightarrow 1 = 8(1 + 1) + 5(-1 - 1 - 1) \Leftrightarrow 1 = 8(2) + 5(-3) \Leftrightarrow 8(2) + 5(-3) = 1$

Donc $(x_0\,;\, y_0) = (2\,;\, -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b- Résolvons l'équation (E).

Si $(x_0\,;\, y_0)$ est une solution particulière de l'équation $ax + by = c$; alors l'ensemble solution est de la forme $S = \{(bk + x_0\,;\, -ak + y_0)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc si $(x_0\,;\, y_0) = (2\,;\, -3)$ est une solution particulière de l'équation $(E): 8x + 5y = 1$,

Alors son ensemble solution est : $S = \{(5k + 2\,;\, -8k - 3)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\,; b)$ de nombres entiers vérifiant le système suivant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a- Montrons que le couple $(a\,; -b)$ est solution de (E).

D'après le système $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$, on a : $8a + 1 = 5b + 2 \Leftrightarrow 8(a) + 5(-b) = 1$

D'où le couple $(a\,; -b)$ est solution de (E).

b- Déterminons le reste de la division de N par 40

Si $(a\,; -b)$ est solution de (E) alors on a : $\begin{cases} a = 5k + 2 \\ -b = -8k - 3 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5k + 2 \\ b = 8k + 3 \end{cases}$

En remplaçant a et b par leur valeur dans le système $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$; on a :

$\begin{cases} N = 8(5k + 2) + 1 \\ N = 5(8k + 3) + 2 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} N = 40k + 17 \\ \quad ou \\ N = 40k + 17 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

D'où le reste de la division de N par 40 est 17.

3) a- Résolvons l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\ ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

$8x + 5y = 100 \Leftrightarrow 8x = 100 - 5y \Leftrightarrow 8x \equiv 100[5] \Leftrightarrow 2x \equiv 25[5] \Leftrightarrow 2x \equiv 30[5] \Leftrightarrow$
$x \equiv 15[5] \Leftrightarrow x = 5k + 15$

En remplaçant $x = 5k + 15$ par sa valeur dans l'équation $8x + 5y = 100$, on a :

$8(5k + 15) + 5y = 100 \Leftrightarrow 40k + 120 + 5y = 100 \Leftrightarrow 5y = 100 - 40k - 120 \Leftrightarrow$
$5y = -40k - 20 \Leftrightarrow y = -8k - 4$

=> $S = \{(5k + 15\ ;\ -8k - 4)\}$

b- Un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Déterminons le nombre d'hommes et de femmes dans le groupe

Soient x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes telque : $8x + 5y = 100$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5k + 15 \\ \quad et \\ y = -8k - 4 \end{cases}$$

Posons $5k + 15 > 0$ et $-8k - 4 > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{15}{5}$ et $k < -\frac{4}{8} \Leftrightarrow k > -3$ et $k < -\frac{1}{2}$

D'où $-3 < k < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -3 < k < -0{,}5 \Rightarrow k \in \{-3\ ;\ -1\}$

- Si $k = -3$ alors $\begin{cases} x = 5(-3) + 15 \\ \quad et \\ y = -8(-3) - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 + 15 \\ \quad et \\ y = 24 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ et \\ y = 20 \end{cases}$ à rejeté

- Si $k = -1$ alors $\begin{cases} x = 5(-1) + 15 \\ \quad et \\ y = -8(-1) - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 15 \\ \quad et \\ y = 8 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ et \\ y = 4 \end{cases}$ à retenir

D'où le nombre d'hommes est 10 et le nombre de femmes est 4

II// On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - 2y = \dfrac{-2}{1 + e^{-2x}}$

1) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

(E): $y' - 2y = \dfrac{-2}{1 + e^{-2x}}$

f est solution de (E) si et seulement si $f' - 2f = \dfrac{-2}{1+\ e^{-2x}}$

Or $f(x) = e^{2x}g(x)$ et $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) = e^{2x}[\ g'(x) + 2g(x)]$

$f' - 2f = \dfrac{-2}{1+\ e^{-2x}}. \Leftrightarrow\ e^{2x}[\ g'(x) + 2g(x)] - 2e^{2x}g(x) = \dfrac{-2}{1+\ e^{-2x}} \Leftrightarrow$

$e^{2x}\ g'(x) + 2e^{2x}g(x) - 2e^{2x}g(x) = \dfrac{-2}{1+\ e^{-2x}}\ \ \Leftrightarrow e^{2x}\ g'(x) = \dfrac{-2}{1+\ e^{-2x}} \Leftrightarrow$

$g'(x) = \dfrac{-2}{(1+\ e^{-2x})e^{2x}}$ => $g'(x) = \dfrac{-2e^{2x}}{1+\ e^{-2x}}$

D'où f est solution de (E) si et seulement si $f' - 2f = \dfrac{-2}{1+\ e^{-2x}}$

2) En déduisons toutes les solutions de (E).

D'après le question précédente, $g'(x) = \dfrac{-2e^{2x}}{1+\ e^{-2x}}$

Appliquons l'intégrale à chaque membre de l'égalité :

$\int g'(x)\ dx = \int \dfrac{-2e^{2x}}{1+\ e^{-2x}} dx \Leftrightarrow g(x) = ln(1\ +\ e^{-2x}) + k$. Avec $k \in \mathbb{R}$

D'où $g(x) = ln(1\ +\ e^{-2x}) + k$. Avec $k \in \mathbb{R}$

De même $f(x) = e^{2x}g(x) \Leftrightarrow\ f(x) = e^{2x}[ln(1\ +\ e^{-2x}) + k]$

$\Leftrightarrow\ f(x) = e^{2x}ln(1\ +\ e^{-2x}) + ke^{2x}$

Problème..**(10 *points*)**

Partie A :

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)ln(x-1)$.

a- On admet que $\lim\limits_{x \to 0} xlnx = 0$. En déduisons la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} 2x - (x-1)ln(x-1) = 2 - 0(-\infty) =$ " *Forme Indéterminée*"

Levons l'indétermination en posant $X = x - 1 \Leftrightarrow x = X + 1$

Si $x \to 1$ alors $X \to 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} 2x - (x-1)ln(x-1) \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to 0} 2(X+1) - XlnX \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to 0} 2X + 2 - XlnX = 2$

b- Calculons $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

$g(x) = 2x - (x-1)ln(x-1)$ => $g'(x) = 2 - ln(x-1) - 1 \Leftrightarrow g'(x) = 1 - ln(x-1)$.

c- Résolvons l'inéquation : $1 - ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

$1 - ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow -ln(x-1) > -1 \Leftrightarrow ln(x-1) < 1 \Leftrightarrow x - 1 < e \Leftrightarrow x < e + 1$.

Ainsi pour les $x < e + 1$ => $\forall x \in]1\,;\ +\infty[$, on a : $S =]1\,; e+1[$

d- Etudions le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signe de $g'(x)$, on a :

- $\forall x \in]1\,;\ 1+e[$, $g'(x) \geq 0$. Donc $\forall x \in]1\,;\ 1+e[$, g est croissante.

- $\forall x \in]1+e\,; +\infty[$, $g'(x) \leq 0$. Donc $\forall x \in]1+e\,; +\infty[$, g est décroissante.

e- Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle :

$[e+1\,;\ e^3+1]$

Pour cela, dressons le tableau de variation de g sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

x	1		$e+1$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
$g(x)$	2	$\nearrow$	$e+2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in [1+e\,; +\infty[$, g est définie, continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $[1+e\,; +\infty[$ vers $]-\infty\,; 2+e]$ et $0 \in]-\infty\,; 2+e]$.

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $g(\alpha) = 0$.

- De même $\begin{cases} g(e+1) = e+2 > 0 \\ g(e^3+1) = -e^3+2 < 0 \end{cases}$ => $g(e+1) \times g(e^3+1) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in [e+1\,;\ e^3+1]$

Etudions le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in [1\,;\alpha[\,, g(x) > 0$ et $\forall x \in [\alpha\,;+\infty[\,, g(x) < 0$

2) Soit la fonction φ définie sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{ln(x^2-1)}{x}$.

a- Déterminons la limite de $\varphi(x)$ en 1

$$\lim_{x \to 1} \varphi(x) = \lim_{x \to 1} \frac{ln(x^2-1)}{x} = -\infty$$

Prouvons que la limite de $\varphi(x)$ en 1 $+\infty$ est égale à 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2-1)}{x}$$

Effectuons un changement par variable en posant $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$

Si $x \to +\infty$ alors $X \to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2-1)}{x} \Leftrightarrow \lim_{X \to 0} X ln\left(\frac{1}{X^2} - 1\right) \Leftrightarrow \lim_{X \to 0} X ln\left(\frac{1-X^2}{X^2}\right) \Leftrightarrow \lim_{X \to 0} X[ln(1-X^2) - ln(X^2)]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{X \to 0} X[ln(1-X^2) - 2lnX] \Leftrightarrow \lim_{X \to 0} X ln(1-X^2) - 2XlnX = 0 - 2 \times 0 = 0$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2-1)}{x} = 0$

b- Calculons $\varphi'(x)$

$$\varphi(x) = \frac{ln(x^2-1)}{x} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{2x^2-(x^2-1)ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

Montrons que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

$\forall x \in]1\,;\ +\infty[\,, x^2(x^2-1) > 0$. Donc $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

c- Montrons que φ est croissante sur l'intervalle $]1\,;\sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

Posons $X = x^2$ avec $(X > 0)$. Ainsi d'après la question 1)e-), on a :

$\forall\, X \in [1\,;\alpha[\,, g(X) > 0$ Donc $1 \leq x^2 \leq \alpha$ et $\forall x \in \,]1\,;\,+\infty[$, on a : $1 \leq x \leq \sqrt{\alpha}$

Donc $g(x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) \geq 0$. D'où φ est croissante sur l'intervalle $\left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right]$.

De même $\forall\, X \in [\alpha\,;+\infty[\,, g(x) < 0$ Donc $x^2 > \alpha \Leftrightarrow x > \sqrt{\alpha}$ et $x \in \,]1\,;\,+\infty[\Leftrightarrow$

$x \in \left[\sqrt{\alpha}\,;+\infty\right[$. Donc $g(x^2) \leq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) \leq 0$. D'où φ est décroissante sur l'intervalle $\left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right]$.

Partie B :

On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2x}}$.

Soit Cf sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique : $5cm$ en abscisse et $10\ cm$ en ordonnée.

1) Vérifions que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f(x) = \varphi(e^x)$.

$\varphi(x) = \frac{ln\left(x^2-1\right)}{x} \Rightarrow \varphi(e^x) = \frac{ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2x}} = f(x)$

2) En déduisons :

a- La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2x}} = -\infty$$

b- La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2x}}$. Posons $X = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{X}$. Donc si $x \to +\infty$ alors $X \to 0^+$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2x}} \Leftrightarrow \lim_{X \to 0^+} X ln\left(\frac{1}{X^2} - 1\right) \Leftrightarrow \lim_{X \to 0^+} X ln\left(\frac{1-X^2}{X^2}\right) \Leftrightarrow \lim_{X \to 0^+} X[ln(1-X^2) - ln(X^2)]$

$\Leftrightarrow \lim_{X \to 0} X[ln(1-X^2) - 2lnX] \Leftrightarrow \lim_{X \to 0} Xln(1-X^2) - 2XlnX = 0 - 2 \times 0 = 0$

c- Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et le fait que f admet un maximum en $ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.

$f(x) = \frac{ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = \varphi'(e^x) \times e^x$

$\forall x \in \,]0\,;\,+\infty[\,, e^x > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi'(e^x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Posons $e^x = X$

- $\forall\, X \in \left]1\,;\, \sqrt{\alpha}\right], \varphi'(X) \geq 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in \left]0\,;\, ln\sqrt{\alpha}\,\right], \varphi'(e^x) \geq 0.$

Donc f est croissante sur $\left]0\,;\, ln\sqrt{\alpha}\,\right]$

- $\forall\, X \in \left[\sqrt{\alpha}\,;\, +\infty\right[, \varphi'(X) \leq 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in \left]ln\sqrt{\alpha}\,;\, +\infty\,\right], \varphi'(e^x) \leq 0.$

Donc f est décroissante sur $\left[ln\sqrt{\alpha}\,;\, +\infty\right[$

x	0		$ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(ln\sqrt{\alpha}\right)$	$\searrow$	$+\infty$

3) Montrons que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\, +\infty[$, on a : $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

$\forall x \in]0\,;\, +\infty[$, on a : $f(x) \leq f\left(ln\sqrt{\alpha}\right)$

Or $f\left(ln\sqrt{\alpha}\right) = \frac{ln\left(e^{2ln\sqrt{\alpha}}-1\right)}{e^{2ln\sqrt{\alpha}}} = \frac{ln\left(e^{2ln\sqrt{\alpha}}-1\right)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - (\alpha-1)ln(\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$

Donc $f\left(ln\sqrt{\alpha}\right) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

D'où $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4) Reproduisons puis complétons le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$	$-1,36$	0,33	0,68	0,66	0,54	0,30

5) Traçons Cf. On prendra 10 comme valeur approchée de α.


y
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
1
2
3
4
5
6
7
8
x

Sujet Bac 2019. (TSE - STI)

Exercice 1……………………………………………………………$(6\ points)$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. (UA : $5cm$).

On considère les points A et B d'affixes $Z_A = 1 + i$ et $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

On désigne par ($\mathcal{C}$) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donne la forme trigonométrique de Z_A et Z_B.

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de ($\mathcal{C}$) d'affixe $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0\ ; 2\pi[$.

On considère l'application f qui à tout point M de ($\mathcal{C}$), associe $f(M) = \text{MA}\times\text{MB}$.

a- Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}sin\alpha$.

b- Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

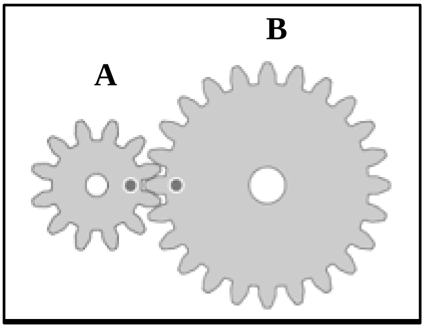
c- En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2sin\alpha\right)^2}$

3) a- En utilisant la question 2) c-, montre qu'il existe deux points M de ($\mathcal{C}$), dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.

b- En utilisant la question 2) c-, montre qu'il existe un seul point M de ($\mathcal{C}$), dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

Exercice 2……………………………………………………………$(4\ points)$

I// On considère une roue d'engrenage (A) a 12 dents en contact avec une autre une roue d'engrenage (B) a 18 dents comme l'indique la figure ci-dessous :



1) Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

2) La roue (A) est maintenant en contact avec une autre une roue d'engrenage (C) ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux roues sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position.

Détermine le nombre de dents de la roue (C).

II// On considère dans le plan un triangle ABC.
1) a- Détermine et construis le point G, barycentre de $\{(A\,;1)\,;\,(B\,;\,-1)\,;\,(C\,;1)\}$.
b- Détermine et construis le point G', barycentre de $\{(A\,;1)\,;\,(B\,;\,5)\,;\,(C\,;-2)\}$.

2) Soit J le milieu de $[AB]$.
a- Exprime $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB).
b- Montre que le barycentre I de $\{(B\,;\,2)\,;\,(C\,;-1)\}$ appartient à (GG').

3) Soit D un point quelconque du plan. Soit O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.
Détermine trois réels $a\,;d$ et c tels que K soit barycentre de $\{(A\,;a)\,;\,(B\,;\,d)\,;\,(C\,;c)\}$.

<u>Problème</u>………………………………………………………(10 *points*)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

<u>Partie A :</u>

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 + cosx)e^{1-x}$.

On note Cf la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1) Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2) a- Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = cosx + sinx$.

b- En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2 + cosx + sinx > 0$.

c- Montre que, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) a- Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} \le f(x) \le 3e^{1-x}$

b- En déduis les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

c- Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4) a- Montre que, sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

b- Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5) Représente Cf sur $[0\,;\,4]$.

<u>Partie B :</u>

On veut calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe Cf, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1) Montre que A= $2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t}cost)dt$.

2) On pose $I = \int_0^1 (e^{1-t}cost)dt$ et $J = \int_0^1 (e^{1-t}sint)dt$

a- A l'aide de deux intégrations par parties, montre que $I = e - J - cos1$ et $J = 1 - sin1$.

b- En déduis la valeur de I.

3) En déduis la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donne une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \frac{sinx}{2+cosx}$

1) a- Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

b- Calcule la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + ln3)$.

2) a- Détermine $ln\big(f(x)\big)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b- Etudie le sens de variation de la fonction H.

c- Détermine le tableau de variation de H.

3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto 1 - x + ln(2 + cosx)$. On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a- Etudie la position relative de Γ et de Δ.

b- Détermine les abscisses communs à Γ et Δ.

4) a- Etablis une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

b- Etudie la position relative de Γ et T.

5) Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par deux parallèles dont on donnera des équations.

Correction Bac 2019

Exercice 1...$(6\ points)$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. (UA : $5cm$).

On considère les points A et B d'affixes $Z_A = 1 + i$ et $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

On désigne par ($\mathcal{C}$) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donnons la forme trigonométrique de Z_A et Z_B.

$Z_A = 1 + i$ => $|Z_A| = \sqrt{2}$ et $arg(Z_A) = \frac{\pi}{4}$

D'où $Z_A = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ => $|Z_B| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $arg(Z_B) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

D'où $Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de ($\mathcal{C}$) d'affixe $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0\ ; 2\pi[$.

On considère l'application f qui à tout point M de ($\mathcal{C}$), associe $f(M) = MA \times MB$.

a- Montrons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}sin\alpha$.

$e^{i2\alpha} - 1 = e^{i\alpha} \times e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \times e^{-i\alpha}$

$= e^{i\alpha}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$. Or d'après les formules d'Euler, on a : $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2isin\alpha$

=> $e^{i2\alpha} - 1 = e^{i\alpha}(2isin\alpha) \Leftrightarrow e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}sin\alpha$.

D'où : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}sin\alpha$.

b- Montrons l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

On a : $f(M) = MA \times MB \Leftrightarrow f(M) = |Z_A - Z_M| \times |Z_B - Z_M| = |(Z_A - Z_M)(Z_B - Z_M)|$

$\Leftrightarrow f(M) = |Z_AZ_B - Z_AZ_M - Z_BZ_M + Z_M^2|$. Or $Z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z_M = e^{i\alpha}$

Donc $f(M) = \left|\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\alpha} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}\right|$

$= \left|e^{i\pi} - \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}\right| = \left|e^{2i\alpha} - 1 - \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)e^{i\alpha}\right|$

$= \left|e^{2i\alpha} - 1 - \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)e^{i\alpha}\right|$.

Or $Z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \quad et \quad Z_B \; \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

=> $f(M) = \left|e^{2i\alpha} - 1 - \left(1 + i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

$= \left|e^{2i\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

D'où $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c- En déduisons l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2sin\alpha\right)^2}$

$f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$. D'après la question 2) -a , on a : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}sin\alpha$

Donc $f(M) = \left|2ie^{i\alpha}sin\alpha - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

$$= \left|2ie^{i\alpha}sin\alpha - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$$

$$= \left|e^{i\alpha}\left(2isin\alpha - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)\right|$$

$$= \left|e^{i\alpha}\left(-\frac{1}{2} + i\left(2sin\alpha - \frac{3}{2}\right)\right)\right|$$

$$= \left|e^{i\alpha}\right| \times \left|-\frac{1}{2} + i\left(2sin\alpha - \frac{3}{2}\right)\right|$$

$$= 1 \times \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2sin\alpha - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 2sin\alpha\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2sin\alpha\right)^2}$$

D'où $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2sin\alpha\right)^2}$

3) a- En utilisant la question 2) c-, montrons qu'il existe deux points M de ($\mathcal{C}$), dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est minimal.

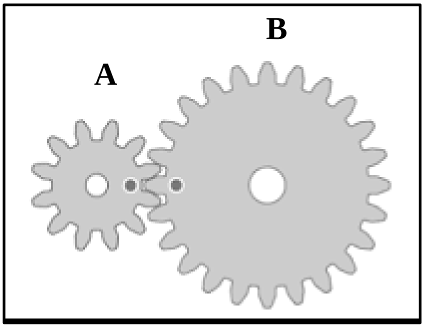
Donnons cette valeur minimale.

b- En utilisant la question 2) c-, montrons qu'il existe un seul point M de ($\mathcal{C}$), dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est maximal.

Donnons cette valeur maximale.

Exercice 2..$(4\ points)$

I// On considère une roue d'engrenage (A) a 12 dents en contact avec une autre une roue d'engrenage (B) a 18 dents comme l'indique la figure ci-dessous :



1) Déterminons le nombre de tours effectué par les roues (A) et (B).

Première methode:

Le nombre de tours effectué par la roue (A) est : $T_1 = \frac{PPMC(18\,;12)}{12} = 3$

Le nombre de tours effectué par la roue (B) est : $T_2 = \frac{PPMC(18\,;12)}{18} = 2$

Deuxième methode:

Nombres de tours	1	2	3
Roue A	$1 \times 12 = 12$	$2 \times 12 = 24$	$3 \times 12 = 36$
Roue B	$1 \times 18 = 18$	$2 \times 18 = 36$	$3 \times 18 = 54$

Donc d'après le tableau, Le nombre de tours effectué par la roue (A) est : $T_1 = 3$ et le nombre de tours effectué par la roue (B) est : $T_2 = 2$

2) La roue (A) est maintenant en contact avec une autre une roue d'engrenage (C) ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux roues sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position.

Déterminons le nombre de dents de la roue (C).

Soient x le nombre de dents et y le nombre de tours de la roue (C) telque :

Pour la roue (A), on a : $\frac{PPMC(A\,;C)}{12} = 10 \Leftrightarrow PPMC(A\,;\,C) = 120$

Pour la roue (C), on a : $\frac{PPMC(A\,;C)}{x} = y \quad \Leftrightarrow PPMC(A\,;\,C) = xy$

Par identification, on a :

$xy = 120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15$

Donc $(y = 1\ \ et\ \ x = 120)$ ou $(y = 2\ \ et\ \ x = 60)$ ou $(y = 3\ et\ \ x = 40)$

$(y = 4\ \ et\ \ x = 30)$ ou $(y = 5\ et\ \ x = 24)$ ou $(y = 6\ \ et\ \ x = 20)$ ou $(y = 8\ \ et\ \ x = 15)$

II// On considère dans le plan un triangle ABC.
1) a- Déterminons et construisons le point G, barycentre de $\{(A\,;1)\,;\ (B\,;\ -1)\ ;\ \ (C\,;1)\}$.

$1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$, alors G existe.

On a : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

=>$\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{1-1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1-1+1}\overrightarrow{AC}$

=>$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{-AB} + \overrightarrow{AC}$

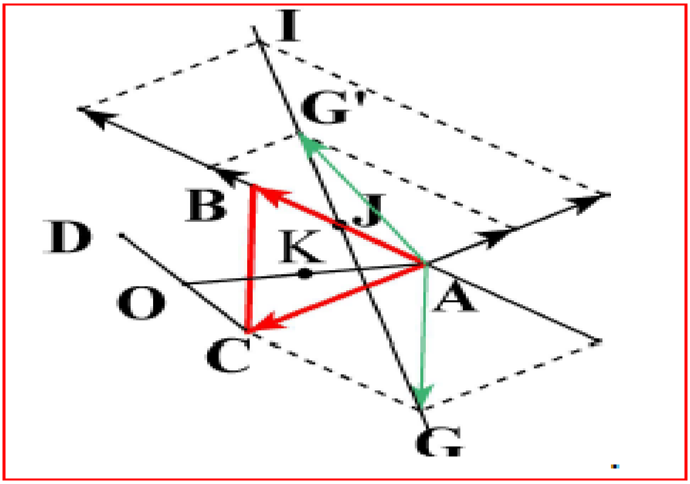
b- Déterminons et construisons le point G', barycentre de $\{(A\,;1)\,;\ (B\,;\ 5)\,;\ (C\,;-2)\}$.

$1 + 5 - 2 = 4 \neq 0$, alors G' existe.

On a: $\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$

=>$\overrightarrow{AG'} = \frac{5}{1+5-2}\overrightarrow{AB} + \frac{-2}{1+5-2}\overrightarrow{AC}$

=>$\overrightarrow{AG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Pour la construction, (voir figure)



2) Soit J le milieu de $[AB]$.

J est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

a- Exprimons $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB).

- Exprimons $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG'}=-\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

D'où $\overrightarrow{GG'}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

- Exprimons $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{JG'}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AG'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

D'où $\overrightarrow{JG'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

- En déduisons l'intersection des droites (GG') et (AB).

$$\overrightarrow{GG'}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=3\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=3\left(\overrightarrow{JG'}\right)=3\overrightarrow{JG'}\Leftrightarrow J\in(GG')\text{ et }J\in(AB)$$

$\Leftrightarrow (GG')\cap(AB)=\{J\}$

b- Montrons que le barycentre I de $\{(B\,;\,2)\,;\,(C\,;-1)\}$ appartient à (GG').

$\{(B\,;\,2)\,;\,(C\,;-1)\}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow I\binom{2}{-1}$

Vérifions que I appartient à (GG').

I appartient à $(GG')\Leftrightarrow 2x_I+3y_I=1\Leftrightarrow 2(2)+3(-1)=1\Leftrightarrow 1=1$ (vraie)

D'où le barycentre I de $\{(B\,;\,2)\,;\,(C\,;-1)\}$ appartient à (GG').

3) Soit D un point quelconque du plan.

O le milieu de $[CD]\Leftrightarrow \overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow$

K le milieu de $[OA]\Leftrightarrow \overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}=\vec{0}\Leftrightarrow$

Déterminons trois réels $a\,;d$ et c tels que K soit barycentre de $\{(A\,;a)\,;\,(B\,;\,d)\,;\,(C\,;c)\}$.

K soit barycentre de $\{(A\,;a)\,;\ (B\,;\ d)\ ;\ \ (C\,;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{KA}+d\overrightarrow{KD}+c\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

On a : $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CK}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-\overrightarrow{KC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KA}\right)$

$\Leftrightarrow -2\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-4\overrightarrow{KC}=2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KA}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KC}-2\overrightarrow{KD}-4\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{KA}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Or par hypothèse on a : $a\overrightarrow{KA}+d\overrightarrow{KD}+c\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Ainsi par identification, on a : $a=2$; $d=c=1$

<u>Problème</u>……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

<u>Partie A :</u>

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2+cosx)e^{1-x}$.

On note Cf la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1) Montrons que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)>0$.
D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$1+cosx\geq 0\ \Leftrightarrow$

$2+cosx\geq 1\ \Leftrightarrow$

$(2+cosx)e^{1-x}\geq e^{1-x}\geq 0$. D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

2) a- Montrons que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=cosx+sinx$.
$\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(cosx\times cos\frac{\pi}{4}+sinxsin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cosx+\frac{\sqrt{2}}{2}sinx\right)=cosx+sinx$
D'où $\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=cosx+sinx$

b- En déduisons que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2 + cosx + sinx > 0$.

$$2 + cosx + sinx = 2 + \sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left[\sqrt{2} + cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

D'où $2 + cosx + sinx > 0$

c- Montrons que, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Cherchons la fonction dérivée f'

$$f'(x) = -sinx \times e^{1-x} - (2 + cosx)e^{1-x} = -(2 + cosx + sinx)e^{1-x}$$

Or d'après b), on a : $2 + cosx + sinx > 0$ et $-e^{1-x} < 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, f est strictement décroissante.

3) a- Montrons que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$
On sait que : $-1 \leq cosx \leq 1 \Leftrightarrow$

$$1 \leq 2 + cosx \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$e^{1-x} \leq (2 + cosx)e^{1-x} \leq 3e^{1-x} \Leftrightarrow$$

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x} \Leftrightarrow$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$

b- En déduisons les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \mapsto -\infty} e^{1-x} \leq \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) \leq \lim_{x \mapsto -\infty} 3e^{1-x} \Leftrightarrow +\infty \leq \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) \leq +\infty$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \mapsto +\infty} e^{1-x} \leq \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) \leq \lim_{x \mapsto +\infty} 3e^{1-x} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) \leq 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$

c- Interprétons géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

4) a- Montrons que, sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

Posons $g(x) = f(x) - 3$.
Ainsi l'étude de la fonction g nous conduis au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	-3

D'après le tableau de variation, pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est définie, continue et strictement décroissante, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-3\,;\,+\infty[$. Or $0 \in]-3\,;\,+\infty[$.

Donc il existe une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telque $g(\alpha) = 0$. Par conséquent l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.

De plus $\begin{cases} g(0) = 3e - 3 \\ \quad et \\ g(\pi) = e^{1-\pi} - 3 \end{cases}$ => $g(0) \times g(\pi) < 0$.

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]0\,;\,\pi[$

b- Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

- Encadrement d'ordre 0

x	0	1
$g(x)$	0,15	$-0{,}46$

- Encadrement d'ordre 1

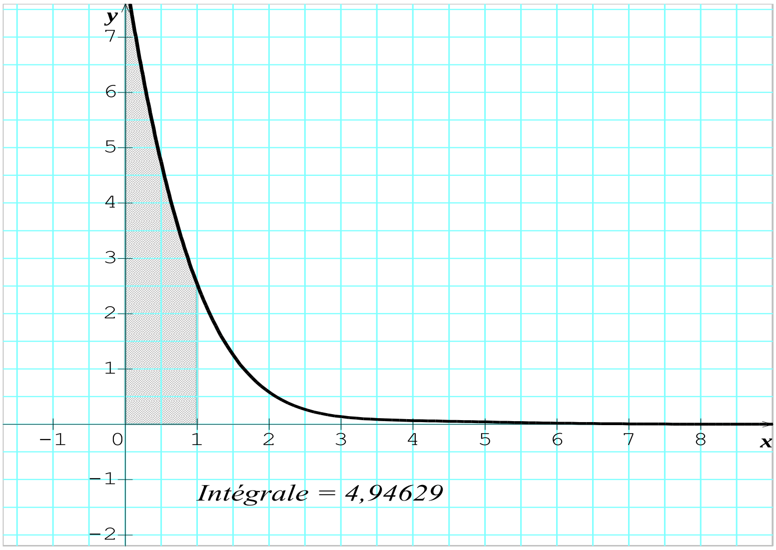
x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$g(x)$	0,37	3,63	2,32	1,92	1,74	1,21	0,73	0,29	$-0{,}10$

- Encadrement d'ordre 2

x	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
$g(x)$	0,25	0,21	0,17	0,13	0,09	0,05	0,01	0,01	$-0{,}03$

Donc $0{,}87 \leq \alpha \leq 0{,}88$

5) Représentons Cf sur $[0\,;\,4]$.



Partie B :

On veut calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe Cf, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1) Montrons que A= $2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t} cost)dt$.

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2 + cosx)e^{1-x}dx = 2\int_0^1 e^{1-x}dx + \int_0^1 cosxe^{1-x}dx$

$$= -2\int_0^1 -e^{1-x}dx + \int_0^1 cosxe^{1-x}dx$$

$$= -2[e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 cosxe^{1-x}dx = -2 + 2e + \int_0^1 cosxe^{1-x}dx$$

D'où $A = \left(-2 + 2e + \int_0^1 cosxe^{1-x}dx\right) \times Ua$

2) On pose $I = \int_0^1 (e^{1-t} cost)dt$ et $J = \int_0^1 (e^{1-t} sint)dt$

a- A l'aide de deux intégrations par parties, montrons que $I = e - J - cos1$ et $J = I - sin1$.
$I = \int_0^1 coste^{1-t}dt$
Posons $u = cost$ => $u' = -sint$

$v' = e^{1-t}$ => $u' = -e^{1-t}$

Donc $I = [-coste^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 sinte^{1-x}dx = -cos1 + e - J$. D'où $I = e - J - cos1$

$J = \int_0^1 sinte^{1-t}dt$

Posons $u = sint$ => $u' = cost$

$v' = e^{1-t}$ => $u' = -e^{1-t}$

Donc $J = [-sinte^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 -coste^{1-x}dx = -sin1 + I = I - sin1$

D'où $J = I - sin1$

b- En déduisons la valeur de I.
$I = e - J - cos1 = e - (I - sin1) - cos1 = e - I + sin1 - cos1$

$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2}(e + sin1 - cos1)$

3) En déduisons la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donnons une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

$$A = Ua \times \int_0^1 f(x)dx = (4\ cm)(2\ cm) \times \left[2e - 2 + \frac{1}{2}(e + sin1 - cos1)\right]$$
$$= 8\ cm^2 \times \left[2e - 2 + \frac{1}{2}(e + sin1 - cos1)\right] = 39{,}57\ cm^2$$

Partie C :

Soit h la fonction définie sur ℝ par $h(x) = -1 - \frac{sinx}{2+cosx}$

1) a- Montrons que la fonction h admet des primitives sur ℝ.
$Dh = \mathbb{R}$
On sait que $sinx$ et $2 + cosx$ sont continues sur ℝ donc $h(x) = -1 - \frac{sinx}{2 + cosx}$ est continue sur ℝ.

h est définie et continue sur ℝ, donc elle admet des primitives.

b- Calculons la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + ln3)$.
$H(x) = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \left(-1 - \frac{sinx}{2 + cosx}\right) dx = -x + ln|2 + cosx| + k.$

Donc $H(x) = -x + ln|2 + cosx| + k$. Or $H(0) = 1 + ln3 \Leftrightarrow k = 1$.

D'où $H(x) = -x + ln|2 + cosx| + 1$

2) a- Déterminons $ln\big(f(x)\big)$ pour tout x de ℝ.

$ln[f(x)] = ln[(2 + cosx)e^{1-x}] = ln(2 + cosx) + lne^{1-x} = ln(2 + cosx) + 1 - x.$

D'où $ln[f(x)] = ln(2 + cosx) + 1 - x.$

b- Etudions le sens de variation de la fonction H.

$$H'(x) = h(x) = -1 - \frac{sinx}{2 + cosx} = \frac{-2-cosx - sinx}{2 + cosx} = -\frac{2 + cosx + sinx}{2 + cosx}$$

D'après partie A), 2), c) , on a : $-(2 + cosx + sinx) < 0$. Donc $H'(x) < 0$ et par conséquent

H est strictement décroissante.

c- Déterminons le tableau de variation de H.

$\lim_{x \mapsto -\infty} H(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} ln[f(x)] = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} H(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} ln[f(x)] = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$H'(x)$	$-$	
$H(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur ℝ par :

$x \mapsto 1 - x + ln(2 + cosx)$. On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a- Etudions la position relative de Γ et de Δ.

Etudions le signe de $H(x) - y$

$H(x) - y = 1 - x + ln(2 + cosx) - (1 - x) = ln(2 + cosx)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $ln(2 + cosx) \geq 0 \Leftrightarrow H(x) - y \geq 0$. Donc (Γ) est au-dessus (Δ).

b- Déterminons les abscisses communs à Γ et Δ.

$H(x) = y \Leftrightarrow ln(2 + cosx) = 0 \Leftrightarrow 2 + cosx = 1 \Leftrightarrow cosx = -1 \;\; x = (2k + 1)\pi$. Avec $k \in \mathbb{Z}$

4) a- Etablissons une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

On a : $(T): y' = H'(0)(x - 0) + H(0) \Leftrightarrow y' = (-1)(x) + (1 + ln3) \Leftrightarrow y' = -x + 1 + ln3$

D'où l'équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0 est $y' = -x + 1 + ln3$

b- Etudions la position relative de Γ et T.

Etudions le signe de $H(x) - y'$

$H(x) - y' = 1 - x + ln(2 + cosx) - (-x + 1 + ln3) = ln(2 + cosx) - ln3 \Leftrightarrow$

$H(x) - y' = ln\left(\frac{2 + cosx}{3}\right)$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 \leq 2 + cosx \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2 + cosx}{3} \leq 1 \Leftrightarrow ln\frac{1}{3} \leq ln\left(\frac{2 + cosx}{3}\right) \leq ln1$

$\Leftrightarrow ln\frac{1}{3} \leq ln\left(\frac{2+cosx}{3}\right) \leq 0$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}, ln\left(\frac{2+cosx}{3}\right) \leq 0$.

Par conséquent la courbe Γ est en dessous de la tangente T.

5) Montrons que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par deux parallèles dont on donnera des équations.

D'après les questions précédentes, la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par les droites (Δ) et (T) car (Δ) est parallèles à (T).

Sujet Bac 2020. (TSE - STI)

Exercice 1……………………………………………………………$(5\ points)$

On désigne par A et B deux points d'affixes respectives $Z_A = 2 - i$ et $Z_B = -2i$ et pour tout nombre complexes z différent de Z_B, on pose $Z = \frac{z - Z_A}{z - Z_B}$.

1) Détermine dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ telque :
   a- Z soit un réel ;
   b- Z soit un imaginaire pure (éventuellement nul) ;
   c- Z soit de module 1
2) Calcule $|Z - 1| \times |z - Z_B|$ puis en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2……………………………………………………………$(5\ points)$

1) Démontre que pour tout entier naturel ℕ, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
   En déduis que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2) Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   a- Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
   b- Démontre que si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.
   c- Etudie le cas où $p = 3n + 2$.

Problème……………………………………………………………$(10\ points)$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1) Montre que pour tout réel x positif, $f(x) = 2x + ln(1 + 2e^{-3x})$.
2) a- Etudie la limite de f en $+\infty$.
   b- Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.
   c- Etudie la position de (Cf) et (D).
3) Etudie les variations de f.
4) Trace (Cf) et (D) dans le même repère.
5) Montre que pour tout réel α strictement positif, on a : $\int_0^{\alpha} e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.
6) Etablis que pour tout réel u positif ou nul , on a : $ln(1 + u) \leq u$.
7) En déduis que pour tout réel α strictement positif, on a : $\int_0^{\alpha} ln(1 + e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.
8) Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations : $x = 0\ ; x = \alpha\ ; y = 2x$ et la courbe (Cf).

En déduis des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α.

Partie B : Soit h la fonction définie sur $[2\,;4]$ par $h(x) = 2 - x + lnx$.

1) Etudie les variations de h puis en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.

2) Soit (u_n) la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + lnu_n \end{cases}$

Montre que l'image de l'intervalle $[2\,;4]$ par la fonction $g: x \mapsto 2 + lnx$ est incluse dans l'intervalle $[2\,;4]$.

3) Montre en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

3) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier naturel n, on a :

$|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

5) En déduis que (u_n) est convergence.

6) Détermine un entier N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

Correction Bac 2020

Exercice 1...$(6\ \boldsymbol{points})$

On désigne par A et B deux points d'affixes respectives $Z_A = 2 - i$ et $Z_B = -2i$ et pour tout nombre complexes z différent de Z_B, on pose $Z = \frac{z - Z_A}{z - Z_B}$.

1) Déterminons dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ telque :

On a : $Z = \frac{z - Z_A}{z - Z_B}$. Posons $z = x + iy$

Donc $Z = \frac{(x+iy)\ -(2-i)}{(x+iy)\ -\ (-2i)} \Leftrightarrow Z = \frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)} \Leftrightarrow Z = \frac{[(x-2)+i(y+1)][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow Z = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2} + i\frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}$

a- Z soit un réel

Z est un réel si $\mathrm{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x\ +\ 2y\ +\ 4 = 0$

D'où l'ensemble des points $M(z)$ cherché est une droite d'équation $-x\ +\ 2y\ +\ 4 = 0$ privé du point $B(0\ ;\ -2)$

b- Z soit un imaginaire pure

Z est un imaginaire pure si $\mathrm{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$

NB :

- **Equation cartésienne d'un cercle :** $x^2 +\ y^2 +\ ax + by + c = 0$

- **Equation réduite d'un cercle :** $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

Donc $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{-2}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{(-2)^2 + (3)^2 - 4(2)}{4}$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

D'où l'ensemble des points $M(z)$ cherché est un cercle de centre $\Omega\left(1\ ;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon

$r = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $B(0\ ;\ -2)$

c- Z soit de module 1

Z a pour module 1 si $\left|\frac{z-Z_A}{z-Z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-Z_A|}{|z-Z_B|} = 1 \Leftrightarrow |z-Z_A| = |z-Z_B|$

D'où l'ensemble des points $M(z)$ cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

2) Calculons $|Z-1| \times |z-Z_B|$

$$|Z-1| \times |z-Z_B| = \left|\frac{z-Z_A}{z-Z_B} - 1\right| \times |z-Z_B| = \left|\frac{z-Z_A-(z-Z_B)}{z-Z_B}\right| \times |z-Z_B|$$

$$= \left|\frac{z-Z_A-z+Z_B}{z-Z_B}\right| \times |z-Z_B| = \left|\frac{Z_B-Z_A}{z-Z_B}\right| \times |z-Z_B|$$

$$= \frac{|Z_B-Z_A|}{|z-Z_B|} \times |z-Z_B| = |Z_B - Z_A| = |(-2i)-(2-i)|$$

$$= |-2-i| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

En déduisons que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

$M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R si et seulement si $|z-Z_B| = \text{R}$

D'après la question précédente, $|Z-1| \times |z-Z_B| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |Z-1| = \frac{\sqrt{5}}{|z-Z_B|}$

Or $|z-Z_B| = \text{R}$. Donc $|Z-1| = \frac{\sqrt{5}}{R}$

Alors les points d'affixes Z appartiennent au cercle de centre $I(1\,;0)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{R}$

<u>Exercice 2</u>……………………………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1) Démontrons que pour tout entier naturel ℕ, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
Posons $A_n = 2^{3n}-1$.

- Pour $n=0$, on a : $A_0 = 2^0-1 = 1-1 = 0$ est un multiple de 7
- Pour $n=1$, on a : $A_1 = 2^3-1 = 8-1 = 7$ est un multiple de 7

Supposons la relation vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ c'es-à-dire montrons que $A_{n+1} = 2^{3n}-12^{3(n+1)}-1$ est un multiple de 7.

On a : $A_{n+1} = 2^{3(n+1)}-1 = 2^{3n+3}-1 = 2^{3n}\times 2^3-1 = 2^{3n}\times 8-1 = 2^{3n}\times(7+1)-1$

$$= 7\times 2^{3n}+2^{3n}-1 = (7\times 2^{3n})+(2^{3n}-1)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 de même (7×2^{3n}) est aussi un multiple de 7

D'où la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

En déduisons que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7.

$2^{3n+1} - 2 = 2^{3n} \times 2^1 - 2 = 2^{3n} \times 2 - 2 = 2(2^{3n} - 1) = 2A_n$

Or A_n est un multiple de 7. Donc $2A_n$ l'est aussi.

De même $2^{3n+2} - 4 = 2^{3n} \times 2^2 - 4 = 2^{3n} \times 4 - 4 = 4(2^{3n} - 1) = 4A_n$

Or A_n est un multiple de 7. Donc $4A_n$ l'est aussi.

Conclusion : $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.

2) Déterminons les restes de la division par 7 des puissances de 2.

$2^0 = 1 \equiv 1[7]$; $2^1 = 2 \equiv 2[7]$; $2^2 = 4 \equiv 4[7]$; $2^3 = 8 \equiv 1[7]$

Donc les restes possibles de la division par 7 des puissances de 2 sont : 1 ; 2 ; 4

De manière générale on a : $2^{3p} \equiv 1[7]$; $2^{3p+1} \equiv 2[7]$; $2^{3p+2} \equiv 4[7]$

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a- Si $p = 3n$, déterminons le reste de la division de A_p par 7

$A_{3n} = 2^{3n} + 2^{2(3n)} + 2^{3(3n)} = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n} = (2^3)^n + (2^3)^{2n} + (2^3)^{3n}$. Or $2^3 \equiv 1[7]$

=> $A_{3n} \equiv (1^n + 1^{2n} + 1^{3n})[7] \Leftrightarrow A_{3n} \equiv (3)[7]$

Donc si $p = 3n$, le reste de la division de A_p par 7 est 3

b- Démontrons que si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.

Pour $p = 3n + 1$, on a : $A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{2(3n+1)} + 2^{3(3n+1)}$

$$= 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$$

$$= 2^{3n} \times 2 + 2^{6n} \times 2^2 + 2^{9n} \times 2^3 .$$

Donc $A_{3n+1} \equiv ((2^3)^n \times 2 + (2^3)^{2n} \times 2^2 + (2^3)^{3n} \times 2^3)[7]$. Or $2^3 \equiv 1[7]$

=> $A_{3n+1} \equiv (1^n \times 2 + 1^{2n} \times 4 + 1^{3n} \times 8)[7] \Leftrightarrow$

$A_{3n+1} \equiv (1 \times 2 + 1 \times 4 + 8)[7] \Leftrightarrow$

$A_{3n+1} \equiv (14)[7] \Leftrightarrow A_{3n+1} \equiv (0)[7] \Leftrightarrow$

Donc si $p = 3n + 1$, le reste de la division de A_p par 7 est 0 ou A_p est divisible par 7.

c- Etudions le cas où $p = 3n + 2$.

Pour $p = 3n + 2$, on a : $A_{3n+2} = 2^{3n+2} + 2^{2(3n+2)} + 2^{3(3n+2)}$

$$= 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6}$$

$$= 2^{3n} \times 2^2 + 2^{6n} \times 2^4 + 2^{9n} \times 2^6 .$$

Donc $A_{3n+2} \equiv ((2^3)^n \times 2^2 + (2^3)^{2n} \times 2^4 + (2^3)^{3n} \times 2^6)[7]$. Or $2^3 \equiv 1[7]$

$\Leftrightarrow A_{3n+2} \equiv ((2^3)^n \times 2^2 + (2^3)^{2n} \times 2^4 + (2^3)^{3n} \times (2^3)^2)[7]$. Or $2^3 \equiv 1[7]$

$\Rightarrow A_{3n+2} \equiv (1^n \times 2^2 + 1^{2n} \times 2^4 + 1^{3n} \times 1^2)[7] \Leftrightarrow$

$A_{3n+2} \equiv (1 \times 4 + 1 \times 16 + 1 \times 1)[7] \Leftrightarrow$

$A_{3n+2} \equiv (21)[7] \Leftrightarrow A_{3n+1} \equiv (0)[7] \Leftrightarrow$

Donc si $p = 3n + 2$, le reste de la division de A_p par 7 est 0 ou A_p est divisible par 7.

Problème..$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, unité graphique 2 cm.

1) Montrons que pour tout réel x positif, $f(x) = 2x + ln(1 + 2e^{-3x})$.

$f(x) = ln(e^{2x} + 2e^{-x}) \Leftrightarrow f(x) = ln\left[e^{2x}\left(1 + \frac{2e^{-x}}{e^{2x}}\right)\right] = ln[e^{2x}(1 + 2e^{-x} \times e^{-2x})]$

$= ln[e^{2x}(1 + 2e^{-3x})] = lne^{2x} + ln(1 + 2e^{-3x}) = 2x + ln(1 + 2e^{-3x})$

D'où $f(x) = 2x + ln(1 + 2e^{-3x})$.

2) a- Etudions la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim 2x + ln(1 + 2e^{-3x}) = 2(+\infty) + ln(1 + 0) = +\infty$

b- Montrons que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.

La droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$ si et seulement si

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - y = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [2x + ln(1 + 2e^{-3x})] - (2x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} ln(1 + 2e^{-3x}) = ln(1 + 0) = 0$

D'où la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.

c- Etudions la position de (Cf) et (D).

Etudions le signe de $f(x) - y$

$f(x) - y = ln(1 + 2e^{-3x})$. Posons $f(x) - y > 0 \Leftrightarrow ln(1 + 2e^{-3x}) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2e^{-3x} > e^0$

$\Leftrightarrow 1 + 2e^{-3x} > 1 \Leftrightarrow 2e^{-3x} > 0$ Vraie.

Donc pour tout $x \in Df$, $f(x) - y > 0$ et par conséquent $\forall x \in Df$, la courbe (Cf) est au-dessus de la droite (D).

3) Etudions les variations de f.

$f(x) = ln(e^{2x} + 2e^{-x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^{-x}}{e^{2x} + 2e^{-x}}$.

$\forall x \in Df$, $e^{2x} - 2e^{-x} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $2e^{2x} + 2e^{-x}$.

Posons $2e^{2x} + 2e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - \frac{2}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 2e^{3x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{3x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{3x} > 1$

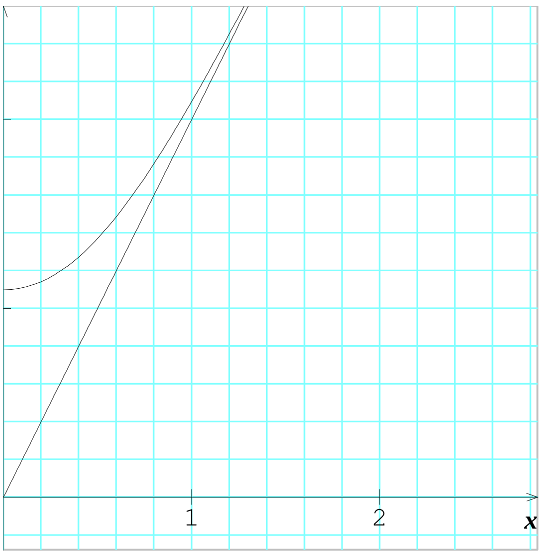
$\Leftrightarrow 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Alors pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$ln3$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Traçons (Cf) et (D) dans le même repère.



5) Montrons que pour tout réel α strictement positif, on a : $\int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

Posons $p(\alpha) = \int_0^\alpha e^{-3x}dx - \frac{1}{3} = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^\alpha - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}e^{-3\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}e^{-3\alpha} \leq 0$

=> $p(\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^\alpha e^{-3x}dx - \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$ (CQFD)

6) Etablissons que pour tout réel u positif ou nul, on a : $ln(1+u) \leq u$.

Posons $q(u) = ln(1+u) - u$

$q(0) = 0$ et $\lim_{u \mapsto +\infty} q(u) = \lim_{u \mapsto +\infty} u\left[\frac{ln(1+u)}{u} - 1\right] = (+\infty)(-1) = -\infty$

$q'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{1-1-u}{1+u} = \frac{-u}{1+u}$

Donc pour tout réel u positif ou nul, on a $q'(u) \leq 0$

u	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$q'(u)$	$-$
$q(u)$	0 $\searrow$ $-\infty$

D'après le tableau de variation de q, pour tout réel u positif ou nul, on a $q(u) \leq 0 \Leftrightarrow$ $ln(1+u) - u \leq 0 \Leftrightarrow ln(1+u) \leq u$. (CQFD)

7) En déduisons que pour tout réel α strictement positif, on a : $\int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.

On sait que $ln(1+u) \leq u$. Posons $e^{-3x} = u$ et $du = dx$

On a : $ln(1+e^{-3x}) \leq e^{-3x} \Leftrightarrow \int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \int_0^\alpha e^{-3x}dx$.

Or d'après 5), on a : $\int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

Donc $\int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$. (CQFD)

8) Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations :
$x = 0\,;\, x = \alpha\,;\, y = 2x$ et la courbe (Cf).

Déduction d'une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α.

D'après les questions précédentes, on a : $\int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$(2\ cm)^2 \int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3} \times (2\ cm)^2 \Leftrightarrow 4\ cm^2 \int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3} \times 4\ cm^2$

$\Leftrightarrow 4\ cm^2 \int_0^\alpha ln(1+e^{-3x})dx \leq \frac{8}{3}\ cm^2$. D'où $A(\alpha)$ est majoré par $\frac{8}{3}$

Partie B : Soit h la fonction définie sur [2 ; 4] par $h(x) = 2 - x + lnx$.

1) Etudions les variations de h puis en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.
On a : $h(x) = 2 - x + lnx$.

$h(2) = ln2$ et $h(4) = -2 + ln4$

$h'(x) = -1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow h'(x) = \frac{1-x}{x}$

$\forall x \in [2\,;4]$, $x > 0$ alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $1 - x$.

Posons $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	2	4
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$ln2$ $\searrow$	$-2 + ln4$

- D'après le tableau de variation de h , $\forall x \in \left]2\,;\,4\right[$ h est définie, continue et strictement décroissante. Alors h réalise une bijection de l'intervalle $\left]2\,;\,4\right[$ vers $\left]-2 + ln4\,;\,ln2\right[$ et puisque $0 \in \left]-2 + ln4\,;\,ln2\right[$ alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $h(\beta) = 0$.

2) Soit (u_n) la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + lnu_n \end{cases}$
Montrons que l'image de l'intervalle [2 ; 4] par la fonction $g\colon x \mapsto 2 + lnx$ est incluse dans l'intervalle [2 ; 4].

On a : $2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow$

$g(2) \leq g(x) \leq g(4) \Leftrightarrow$

$2 + ln2 \leq g(x) \leq 2 + ln4 \Leftrightarrow$

$2{,}69 \leq g(x) \leq 3{,}38 \Leftrightarrow$

$2 \leq 2{,}69 \leq g(x) \leq 3{,}38 \leq 4 \Leftrightarrow$

$2 \leq g(x) \leq 4$

D'où si $2 \leq x \leq 4$ alors $2 \leq g(x) \leq 4$

3) Montrons en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

On a : $2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow$

$g'(4) \leq g'(x) \leq g'(2)$. Or $g'(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{4} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\left|\frac{1}{4}\right| \leq |g'(x)| \leq \left|\frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Donc pour tout $x \in [2\,;4]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Ainsi on peut en déduis que pour tout $x \in [2\,;4]$, on a : $|g(x) - g(\beta)| \leq \frac{1}{2}|x - \beta|$.

D'après partie B) 1), on a : $h(\beta) = 0 \Leftrightarrow 2 - \beta + ln\beta = 0 \Leftrightarrow ln\beta = \beta - 2$

Donc $g(\beta) = 2 + ln\beta \Leftrightarrow g(\beta) = 2 + \beta - 2 = \beta$

D'où $|g(x) - g(\beta)| \leq \frac{1}{2}|x - \beta| \Leftrightarrow |g(x) - \beta| \leq \frac{1}{2}|x - \beta|$. Posons $u_n = x$

On a : $|g(u_n) - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta| \Leftrightarrow$

$|2 + lnu_n - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta| \Leftrightarrow$

$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$ (CQFD)

3) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouvons que pour tout entier naturel n, on a :

$|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On sait que $\beta \in [\,2\,;\,4] \Leftrightarrow 2 \leq \beta \leq 4$ et $u_0 = 2$

Il vient que : $2 - u_0 \leq \beta - u_0 \leq 4 - u_0$

$\Leftrightarrow 2 - 2 \leq \beta - u_0 \leq 4 - 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq \beta - u_0 \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \beta| \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^0$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a :
$|u_{n+1} - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'après **Partie B 3),** on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

Par suite $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta| \leq \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \Leftrightarrow |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où $|u_{n+1} - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (CQFD)

5) En déduisons que (u_n) est convergence.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, la suite de terme général $2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente et converge donc vers 0.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \beta| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \beta = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers β

6) Déterminons un entier N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

On sait que $|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et d'autre part $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

Par identification on a : $2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10^{-4}}{2} \Leftrightarrow e^{nln\frac{1}{2}} \leq \frac{10^{-4}}{2}$

$\Leftrightarrow nln\frac{1}{2} \leq ln\left(\frac{10^{-4}}{2}\right)$ => $-nln2 \leq ln(10^{-4}) - ln(2) \Leftrightarrow -nln2 \leq -4ln10 - ln2$

$\Leftrightarrow -nln2 \leq -9{,}90 \Leftrightarrow nln2 \geq 9{,}90 \Leftrightarrow n \geq \frac{9{,}90}{ln2} \Leftrightarrow n \geq 14{,}28$

On peut donc prendre $N = 15$