

# *les* **Séries** *d'Exercices*

*Dernière  
Mise à jour  
28/10/2022*

*Nouvelle  
édition*

*Revue et corrigée*

*+ Groupe WhatsApp pour  
Discuter les difficultés*

**2**

Suites  
Numériques



**2** OUARZAZATE 2023

*101 Exercices*

**Badr Eddine EL FATIHI**

**Bac SM**

**MATHS  
2023**

*Badr Eddine EL FATIHI  
00212660344136  
Professeurbadr.blogspot.com  
Ouarzazate 2023*



# **SÉRIES D'EXERCICES**

## **« 2ème Année Bac – SM »**

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

## **Projet de livre 2022-2023**

### ***Tome 2 : Suites Numériques***

- **Montrer une limite par la définition**
- **Monotonie d'une suite numérique**
- **Les suites arithmétiques**
- **Les suites géométriques**
- **Les suites récurrentes**
- **Les suites adjacentes**
- **Le raisonnement par récurrence**
- **Manipuler des sommes finies et infinies**

**Professeur Badr Eddine EL FATIHI**

**Ouarzazate 2022**

**Vendredi 28 Octobre 2022**

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Badr Eddine EL FATIHI', written over a horizontal line.



# 1 : Préface

Ce livre est un support d'exercices corrigés conçu en faveur des élèves de la 2ème année Bac SM du Maroc. J'ai y classé 101 exercices pour la leçon intitulée suites numériques. Les exercices proposés sont riches, variés et contiennent tout type de questions. C'est une plate-forme de travail pour les élèves qui auraient besoin d'un supplément de soutien très particulier. dans ce cadre, l'élève est invité à choisir le type d'exercices là où il se sent faible et de prendre son temps pour renforcé ses apprentissages. Mon objectif est d'aider ces élèves à parvenir à un niveau qui leurs permettrait de passer les devoirs, les examens et tout type de concours d'admission pour les écoles supérieurs avec succès.

Cette série contient entre autre un rappel de cours, les énoncés des exercices et les réponses détaillées qu'on devrait lire attentivement et en profiter au maximum les idées de résolution. J'ai classé dedans encore des moyens et des méthodes hors programme juste pour élargir son équilibre de connaissances. Sachez que, dans les concours d'admission et même dans les examens, la réponse finale compte plus que la méthode suivie. La vitesse de réalisation est aussi importante car vous serez certainement serrés par le temps. D'ailleurs les concours sont formulés sous la forme de questions à choix multiple. Bon courage à tout le monde et à bientôt 😊

# 2 : Méthodologie du travail

- Considérer d'abord une séance d'exercice comme un jeu, car Apprendre par le jeu est le meilleur moyen existant de nos jours
- Choisir le type d'exercices voulu
- Lisez la question et essayer de trouver la réponse en 10 min en consultant de temps à autre le rappel de cours
- Consulter ma réponse sur ce livre
- Notez les lacunes et difficultés rencontrées
- Retourner pour refaire l'exercice à nouveau
- Passer à un autre exercice

# 3 : Rappel de cours

## Outil N° 1 :

Suite majorée ou minorée :

- Si  $(u_n)_n$  est croissante et majorée c-à-d  $(u_n \leq M)$  Alors  $(u_n)_n$  est convergente vers un  $l \in \mathbb{R}$
- Si  $(u_n)_n$  est décroissante et minorée c-à-d  $(u_n \geq m)$  Alors  $(u_n)_n$  est convergente vers un  $l \in \mathbb{R}$
- Si  $(u_n)_n$  est croissante et non majorée Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$
- Si  $(u_n)_n$  est décroissante et non minorée Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\infty$

## Outil N° 2 :

Monotonie d'une suite numérique :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} &\geq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } \nearrow \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} &\leq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } \searrow \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} &= u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est cte} \end{aligned}$$

## Outil N° 3 : Suite arithmétique :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_{n+1} &= u_n + r ; r \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow u_n &= u_p + (n - p)r ; p \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow u_p + \dots + u_n &= \left( \frac{n - p + 1}{2} \right) (u_p + u_n) ; p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

## Outil N° 4 : Suite géométrique :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_{n+1} &= q u_n ; q \in \mathbb{R}^* \\ \Leftrightarrow u_n &= u_p \times q^{n-p} ; n \geq p \\ \Leftrightarrow u_p + \dots + u_n &= \left( \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right) u_p ; n \geq p \end{aligned}$$

## Outil N° 5 :

Limite d'une suite par définition :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= +\infty \\ \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) &: u_n > A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= -\infty \\ \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) &: u_n < -A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= l \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) &: |u_n - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

## Outil N° 6 :

La suite  $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} ; \alpha \in \mathbb{Q}^*$

$$\begin{aligned} \blacksquare \alpha > 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha) = +\infty \\ \blacksquare \alpha < 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha) = 0 \end{aligned}$$

## Outil N° 7 : l'unicité de la limite :

La limite d'une suite numérique, quand elle existe, est unique.

**Outil N° 8** : convergente ► bornée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n| \leq M$$

**Outil N° 9** : limites et ordre :

$$\blacksquare \begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\infty$$

$$\blacksquare \begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_n > a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \end{cases} \Rightarrow l \geq a$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_n < a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \end{cases} \Rightarrow l \leq a$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_n < v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l'$$

**Outil N° 10** : limite de  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 

$$\blacksquare \text{ si } q > 1 \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = +\infty$$

$$\blacksquare \text{ si } q = 1 \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = 1$$

$$\blacksquare \text{ si } -1 < q < 1 \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = 0$$

$$\blacksquare \text{ si } q \leq -1 \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = n' \text{ existe pas}$$

**Outil N° 11** : La suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ continue sur } I \subseteq \mathbb{R} \\ f(I) \subseteq I ; u_0 \in I \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in I \end{array} \right\} \Rightarrow f(l) = l$$

**Outil N° 12** :

La suite récurrente  $v_n = f(u_n)$  :

$$\left. \begin{array}{l} v_n = f(u_n) \\ f \text{ conti en } l \\ l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)\right)$$

**Outil N° 13** : suites adjacentes :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (u_n) \text{ est } \nearrow \\ (v_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l$$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

# 4 : Série d'exercices

## Exercice N° 1 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

On pose  $v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > 3$
- 2) Montrer que  $(u_n)$  est décroissante.
- 3) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 3 < u_n \leq 5$
- 4) Montrer que  $(v_n)_n$  est arithmétique.
- 5) Écrire  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- 6) Calculer :  $S = v_1 + v_2 + \dots + v_{2020}$

## Exercice N° 2 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

- 1) Calculer  $u_1$
- 2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq \frac{3}{2}$
- 3) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 4) On pose  $v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{3n + 6}{2n + 2}$

- 6) Calculer en fonction de  $n$  la somme :

$$S_n = \frac{1}{2u_0 - 3} + \frac{1}{2u_1 - 3} + \dots + \frac{1}{2u_n - 3}$$

## Exercice N° 3 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On pose  $v_n = u_n - \frac{5}{2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) calculer les termes :  $u_1 \quad ; \quad v_0 \quad ; \quad v_1$
- 2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n < \frac{5}{2}$
- 3) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 4) Montrer que  $(v_n)_n$  est géométrique.
- 5) Écrire  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- 6) Calculer en fonction de  $n$  les sommes :

$$\begin{cases} \blacksquare S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ \blacksquare T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$

- 7) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$

## Exercice N° 4 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n < 2$

- 2) Mq :  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{(2 + u_n)}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) En déduire la monotonie de  $(u_n)_n$

Et que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n < 2$

4) On pose  $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que  $(v_n)_n$  est géométrique.

5) Écrire  $v_n$  en fonction de  $n$

6) déduire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{4^{n+1} - 1}{1 + 2 \times 4^n}$

7) Calculer en fonction de  $n$  la somme :

$$S_n = \sum_{k=2}^{k=n} v_k$$

### Exercice N° 5 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 3 \leq u_n \leq 4$

2) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N} ; (4 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$

3) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

4) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$

### Exercice N° 6 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + \cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2\pi \end{cases}$$

1) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $u_n > 0$

2) Mq la suite  $(v_n) = \left(\frac{1}{u_n}\right)$  est arithmétique

3) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

4) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 7 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n^2 - n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n > 3 ; u_n > n$

2) En déduire la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

3) Écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

On pourra utiliser les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

### Exercice N° 8 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) soit  $u_0 = 0$ , Calculer les six premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

2) conjecturer une formule donnant l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3) Démontrer cette formule par récurrence

4) Soit  $u_0 = 1$ , Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 2^n + n$$

### Exercice N° 9 :

Soit  $(v_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq v_n \leq 2$

2) Montrer que  $(v_n)$  est croissante.

3) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### **Exercice N° 10 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On pose  $v_n = \frac{1}{u_n}$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Calculer  $u_1$  ;  $u_2$  ;  $u_3$  ;  $v_0$  ;  $v_1$  ;  $v_2$
- 2) Montrer que  $(v_n)$  est arithmétique
- 3) Écrire  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$
- 4) Déterminer la monotonie de  $(u_n)_n$
- 5) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty}(v_n)$

### **Exercice N° 11 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $2 \leq u_n \leq 4$
- 2) Étudier la monotonie de  $(u_n)$ .
- 3) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $3 \leq u_n \leq 4$
- 4) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $(4 - u_{n+1}) \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$
- 5) déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
- 6) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### **Exercice N° 12 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

On pose  $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que  $(v_n)_n$  est géométrique.
- 2) Déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$
- 3) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  
$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$
- 4) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### **Exercice N° 13 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 4 \end{cases}$$

On pose  $v_n = u_{n+1} - u_n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique
- 2) Donner  $v_n$  en fonction de  $n$
- 3) Calculer la somme suivante :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

- 4) Déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n = 7 - \frac{3}{2^{n-1}}$
- 5) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### **Exercice N° 14 :**

On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{2x + 7}$$

- 1) Donner le tableau de variations de  $f$
- 2) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

- 3) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 4) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

5) Dédire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

6) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### Exercice N° 15 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{(u_n)^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$

2) Montrer que  $(u_n)$  est croissante

3) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

4) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = \sqrt{1 + v_n}$

5) Dédire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \sqrt{3}$

Et que  $(u_n)$  est convergente.

6) Montrer que :  $\forall k \geq 3 ; 2^{k+1} \geq (k+1)^2$

7) En déduire que :

$$\forall k \geq 3 ; (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$$

8) En déduire encore que :

$$\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty}(u_n) \leq \sqrt{3}$$

### Exercice N° 16 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) On pose :  $v_n = u_n + \alpha n - 1 ; \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Déterminer la valeur du paramètre  $\alpha$  pour que  $(v_n)$  soit géométrique.

Pour tout ce qui suit on travaille avec la valeur de  $\alpha$  retrouvée dans la 1<sup>ère</sup> Ques

2) Calculer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$

3) Exprimer  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$   
En fonction de  $n$

4) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}(S_n)$

5) Exprimer  $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$   
En fonction de  $n$

### Exercice N° 17 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante

2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

3) Dédire que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

4) Déterminer la suite  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### Exercice N° 18 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

On pose  $v_n = (u_n)^2 - 2 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique

2) Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$

3) On pose :  $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

On pose encore :  $T_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

Calculer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$

4) Calculer les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$  ;  $\lim_{n \rightarrow \infty}(\mathcal{T}_n)$

### Exercice N° 19 :

Soit :  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a > 1$

Soient les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = a \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $0 < u_n < v_n$
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que  $(v_n)$  est décroissante
- 3) Mq :  $0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$
- 4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < v_n - u_n \leq \frac{a-1}{2^n}$$

- 5) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n \cdot v_n = a$
- 6) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n < \sqrt{a} < v_n$

### Exercice N° 20 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - (u_n)^2}} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq u_n < \sqrt{3}$
- 2) Montrer que  $(u_n)$  est strictement  $\nearrow$
- 3) On pose  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $v_n = \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2}$   
Montrer que  $(v_n)$  est arithmétique
- 4) Exprimer les termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$
- 5) En déduire la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Exercice N° 21 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{1 + u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq u_n \leq 1$
- 2) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $(1 - u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(1 - u_n)$
- 3) Déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $(1 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- 4) Déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### Exercice N° 22 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 > 0 \end{cases} \quad ; \quad a > 0$$

- 1) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $(u_{n+1})^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$
- 2) Mq :  $n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{et } u_n \geq \sqrt{a} \\ \text{et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } \searrow \end{cases}$
- 3) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n) = \sqrt{a}$
- 4)  $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$   
Utiliser cette identité pour déterminer une majoration de  $(u_{n+1} - \sqrt{a})$  en fonction de  $(u_n - \sqrt{a})$ .
- 5) soient  $u_1 - \sqrt{a} \leq k$  et  $n \geq 1$ .  
Montrer que :  $u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Exercice N° 23 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$u_n = \frac{3n - 2}{4n + 1} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que  $(u_n)$  est majorée par  $\frac{3}{4}$
- 2) montrer que  $(u_n)$  est minorée par  $-2$
- 3) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 24 :**

Soit  $(v_n)_n$  la suite définie par :

$$v_n = n^2 - 2n + 3 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que  $(v_n)$  est minorée par 2
- 2) Montrer que  $(v_n)$  n'est pas majorée
- 3) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$  ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v_n}{n^2}\right)$

**Exercice N° 25 :**

Soient  $(v_n)_n$  et  $(w_n)_n$  les suites définies par :

$$\begin{cases} v_n = (1 - \alpha)^n ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ & \alpha \in ]0,1[ \\ w_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k \end{cases}$$

- 1) Montrer que les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  Convergent et calculer leurs limites.
- 2) Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{v_n}{u_n} ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$

- 3) Montrer que  $(u_n)$  est strictement  $\nearrow$
- 4) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$
- 5) En déduire que  $(u_n)$  est convergente

**Exercice N° 26 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$
- 2) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 27 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4^n ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

- 1) Calculer les termes :  $u_0$  et  $u_2$
- 2) On pose :  $v_n = 4u_n - u_{n+1} ; \forall n \in \mathbb{N}$   
Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_n - 4^n$
- 3) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique.
- 4) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- 5) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$

**Exercice N° 28 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n}) ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pose :  $v_n = \sqrt{1 + 24u_n} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; (v_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(v_n - 3)$
- 2) Calculer  $u_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$
- 3) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Exercice N° 29 :

Soient  $(u_n)$  ;  $(v_n)$  ;  $(w_n)$  les suites définies ainsi :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{\sqrt{2+n}} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_n = \frac{3n+1}{n-1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ w_n = n\sqrt{n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer en utilisant la définition d'une limite d'une suite numérique que :

$$\begin{cases} \text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0 \\ \text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 3 \\ \text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = +\infty \end{cases}$$

### Exercice N° 30 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 5n^2 - 6n + 7)$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 5n + 2}{4 - n^3} \right)$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^3 - n + 4} - n \right)$

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n - \sqrt[3]{n} + 1)$

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{-1}{3}} \right)$

### Exercice N° 31 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq u_n < 4$

2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$   
Puis en déduire qu'elle est convergente

3) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N} ; (4 - u_{n+1}) \leq \frac{24}{25}(4 - u_n)$

4) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; (4 - u_n) \leq \left(\frac{24}{25}\right)^n$

Puis déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

5) On pose  $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique

6) Exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$

7) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$  à nouveau

8) Exprimer  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$

9) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$

### Exercice N° 32 :

1)  $\forall x \in ]0,1[ ;$  Calculer les limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n} x^k \right) ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n} k \cdot x^k \right)$$

2) soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & ; \quad u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \\ \forall n \in \mathbb{N} & ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes

### Exercice N° 33 :

Soit  $(u_n)$  une suite positive vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \frac{1}{2^n}$  on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} : S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

Montrer que la suite  $(S_n)$  est convergente

**Exercice N° 34 :**

Soit  $(S_n)_{n \geq 1}$  la suite définie ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

On note  $\forall n \geq 1$  ;  $\begin{cases} a_n = S_{2n} \\ b_n = S_{2n+1} \end{cases}$

- 1) Mq  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes
- 2) Conclure sur la nature de  $(S_n)_{n \geq 1}$

**Exercice N° 35 :**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- 1) montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $u_n \geq \sqrt{n}$
- 2) Préciser la limite de  $(u_n)_{n \geq 1}$

**Exercice N° 36 :**

Soit  $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{k=n} x^k$  ;  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

- 1) Montrer que le polynôme  $P_n(x)$  admet une racine unique  $\alpha_n \in ]0,1[$ .
- 2) Étudier la monotonie de  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ .  
 $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  est-elle convergente ?
- 3) Donner la valeur exacte de  $\alpha_2$ .
- 4) Mq :  $\forall x \neq 1$  ;  $P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$
- 5) Dédurre:  $\forall n \geq 2$  ;  $(\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$
- 6) Mq :  $\forall n > 2$  ;  $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2$
- 7) En déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Exercice N° 37 :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est bornée
- 3) Étudier la monotonie de  $(u_n)$
- 4) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 38 :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

- 1) Mq  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée par 0 et  $\frac{1}{2}$
- 2) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
- 3) Déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 39 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 6 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n > 3$
- 2) Montrer que  $(u_n)$  est strictement  $\searrow$
- 3) En déduire que  $(u_n)$  est majorée
- 4) Montrer que  $(u_n)$  est convergente
- 5) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 40 :**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6 + \sqrt{u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $(u_n)$  est majorée par 9 et minorée par  $\frac{1}{4}$

2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$

3) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 9$

### Exercice N° 41 :

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{n+1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \geq 1$  ;  $0 < u_n < 1$

2) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \geq 1}$

3) Mq :  $\forall n \geq 1$  ;  $\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{n}{n+1}$

4) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 42 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 + \frac{3}{4}u_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $0 < u_n < \frac{1}{4}$

2) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \geq 1}$

3) Déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 43 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n \geq \sqrt{3}$

2) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \geq 0}$

3) Déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Exercice N° 44 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $1 \leq u_n < 2$

2) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \geq 0}$

3) Mq  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$

4) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2^n}$

5) Déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 45 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n^2 + 2}{3u_n + 1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

1) Mq :  $2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 3u_n}(2 - u_n)$

2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $0 < u_n < 2$

3) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $\frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7}$

4) Déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

5) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 46 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) calculer les termes :  $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$
- 2) Vérifier que :  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- 3) Donner une expression simple de  $u_n$
- 4) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 47 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_n = \sqrt{2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On pose : } S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) simplifier l'expression de  $S_n$
- 2) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$
- 3) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 48 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_n = -2n^2 + 3 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 2) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 49 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Calculer les termes :  $u_1 ; u_2 ; u_3$
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = n - \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{k-1}{k} \right)$
- 4) Mq  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = (n+1)u_n - n$

**Exercice N° 50 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+(u_n)^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1) Calculer les termes :  $u_1 ; u_2$
- 2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < 1$
- 3) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement ↗
- 4) Déduire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq \frac{1}{2}$
- 5) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 51 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Exprimer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  en fonction de  $n$
- 2) Comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1

Puis en déduire la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- 3) Montrer que :  $\forall n \geq 2 ; 3^n > n^2$
- 4) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 52 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 & ; \quad u_1 = 3 \end{cases}$$

On pose :  $v_n = u_{n+1} - u_n$

- 1) Montrer que  $(v_n)$  est constante

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

- 2) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante  
 3) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### **Exercice N° 53 :**

Calculer chacune des limites suivantes :

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 6n^4}{2n^2 + 5} \right)$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n))$
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1})$
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - 8n^2 + 5n^3}{7n^3 - 3} \right)$
- 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arctan}(\sqrt[3]{n+6})$
- 6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - n)$

### **Exercice N° 54 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Vérifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
- 2) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### **Exercice N° 55 :**

Calculer chacune des limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{-1}{2} \right)^n + \left( \frac{3}{2} \right)^n \right)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{-5}{3} \right)^n + \left( \frac{2}{9} \right)^n \right)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7^n - 5^n}{3^n} \right)$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{7}{3} \right)^n - (2021)^n \right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{2^n} - \sqrt[3]{2^n})$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}} \right)$$

### **Exercice N° 56 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Mq :  $\forall n \geq 2 ; \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
- 2) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### **Exercice N° 57 :**

Dans chacun des cas ci-dessous, Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites adjacentes :

$$1) u_n = \frac{2n}{n+2} ; \quad v_n = 2 + \frac{1}{n!}$$

$$2) u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$3) u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Exercice N° 58 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 & ; \quad u_1 = 2 \end{cases}$$

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} ; S_n = u_{n+1} + u_n$

1) Montrer que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique puis exprimer  $S_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$

2) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = (-1)^n u_n$

Et on pose :  $\forall n \in \mathbb{N} ; w_n = v_{n+1} - v_n$

Exprimer  $w_n$  en fonction de  $S_n$

3) Calculer  $\sum_{i=0}^{i=n-1} w_i$  en fonction de  $n$

4) Déduire  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$

5) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{2^n} \right)$

**Exercice N° 59 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Calculer les termes :  $u_1 ; u_2 ; u_3$

2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3) Mq  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} |u_n - u_{n-1}|$

4) On pose  $\forall n \in \mathbb{N} ; \alpha_n = u_{2n}$  et  $\beta_n = u_{2n+1}$

vérifier que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$

5) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; \alpha_n \leq \beta_n$

6) Montrer que  $(\alpha_n)$  est croissante et montrer que  $(\beta_n)$  est décroissante.

7) Montrer que les suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  Convergent vers la même limite.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

8) Mq :  $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$

9) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 60 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 5}{u_n + 3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < \sqrt{5}$

2) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 2}$  est croissante

3) En déduire que  $(u_n)$  est convergente  
Puis déterminer sa limite

**Exercice N° 61 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$

2) vérifier que  $\forall k \geq 2$  on ait :

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

3) Déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < u_n < 2 - \frac{1}{n}$

4) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente

**Exercice N° 62 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in [0,1] \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$

2) Montrer que  $(u_n)$  est convergente

3) On pose :  $u_0 = \cos\theta$  ;  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Montrer que :  $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

5) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

### **Exercice N° 63 :**

1) Montrer, par une méthode autre que la définition, les limites suivantes :

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n}{n\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n\sqrt{n}} \right) = 0$$

2) soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles strictement monotones et telles que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 2$  et  $0 \leq v_n \leq 3$

On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = 6$

Que peut-on dire des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ?

3) soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles positives telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^2 + u_n \cdot v_n + v_n^2) = 0$$

Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$

### **Exercice N° 64 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 - 2u_n^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = a \in \left]0, \frac{1}{4}\right[ \end{cases}$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < \frac{1}{4}$

2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

3) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et que  $\lim(u_n) = 0$

4) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} ; S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

on pose :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = S_{2n}$  et  $w_n = S_{2n+1}$

Montrer que  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont adjacentes

On pose alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = l$

5) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq \frac{2}{7}u_n$

6) Déduire alors le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |S_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$$

7) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = l$

On pourra remarquer que :

$$|S_n - l| \leq |S_n - v_n| + |v_n - l|$$

### **Exercice N° 65 :**

Calculer chacune des limites suivantes :

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \sin n$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(3 - \sin n)}$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - \sin n}{n + \sin n}\right)$

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1 - \sin(2n))$

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - \cos n}{n^2 + 2n}\right)$

6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2(-1)^n + 4n^2 + 3)$

### **Exercice N° 66 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$1) Mq : \forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

2) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 67 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = \left[0, \frac{1}{4}\right]$  par :

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$$

1) Déterminer  $f(I)$

2) soit  $(u_n)$  la suite numérique définie :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

3) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_n$

4) En déduire que  $(u_n)$  est convergente

5) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 68 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + (u_n)^2 & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

2) Montrer par l'absurde que la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée

3) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 69 :

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 2^n \geq n + 1$

2) on considère les suites définies par :

$$\blacksquare u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k \cdot 2^k} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\blacksquare v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n \cdot 2^n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  convergent et ont la même limite.

### Exercice N° 70 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$

2) En déduire que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} ; \quad \forall n \geq n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$$

3) Mq :  $\forall n \geq n_0 ; u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

4) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 71 :

Pour  $n \geq 1 ; n \in \mathbb{N}$  on pose :

$$\blacksquare S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \blacksquare u_n = 2\sqrt{n} - S_n$$

$$\blacksquare v_n = 2\sqrt{n+1} - S_n$$

1) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = +\infty$

2) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes de limite commune  $L$

3) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{S_n}{n} \right) ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)$

4) Déduire la valeur de la limite suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Exercice N° 72 :

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement ↗
- 2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
- 3) En déduire que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente

### Exercice N° 73 :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\blacksquare u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{3^k}\right) ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\blacksquare v_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{k}{3^k}\right) ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 3v_{n+1} = v_n + u_n$
- 2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n < 1$
- 3) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente
- 4) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$

### Exercice N° 74 :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} ; \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq \alpha$
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est ↗
- 3) En déduire que  $(u_n)$  est convergente  
Et déterminer sa limite

### Exercice N° 75 :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq \sqrt{3}$
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) En déduire que  $(u_n)$  est convergente
- 4) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 76 :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + (u_n)^3}{8}} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$
- 2) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
- 3) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge
- 4) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}$   
Montrer que  $(v_n)$  est géométrique
- 5) Exprimer  $u_n$  en fonction de n
- 6) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

### Exercice N° 77 :

On considère la fonction  $f_n$  définie par :

$$f_n(x) = x^3 + nx - 1 ; \quad \begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

- 1) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $x_n \in ]0,1[$

- 2) Montrer que  $(x_n)_{n \geq 1}$  est strictement  $\searrow$
- 3) En déduire que  $(x_n)$  est convergente
- 4) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; x_n < \frac{1}{n}$
- 5) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$

**Exercice N° 78 :**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} & ; \quad \forall n \geq 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \geq 1$
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) Soit  $v_n = u_n + \frac{1}{n} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est géométrique

- 4) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$   
La suite  $(u_n)$  converge-t-elle ?

- 5) Montrer que  $\sum_{k=1}^{k=n} u_k = (2^{n+1} - 2) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

- 6) Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^* ; 2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$

- 7) soit  $w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{u_k \cdot v_k} \right) ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente

**Exercice N° 79 :**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$
- 2) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement  $\nearrow$
- 3) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Exercice N° 80 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On pose :  $v_n = 2 - u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique
- 2) Déterminer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$
- 3) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

- 4) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} ; S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$

Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$

- 5) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$

**Exercice N° 81 :**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définie par

$$\blacksquare \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

$$\blacksquare \begin{cases} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 2\alpha \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

- 1) Mq :  $\forall a > 0 ; \forall b > 0 : \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

- 2) Mq :  $\forall (0 < a \leq b) ; \begin{cases} a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \\ a \leq \sqrt{ab} \leq b \end{cases}$

- 3) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n \leq v_n$
- 4) Montrer que  $(u_n)$  est  $\nearrow$  et  $(v_n)$  est  $\searrow$
- 5) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite

**Exercice N° 82 :**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} \quad ; \quad \forall x \in I = ]1, +\infty[$$

- 1) Montrer que :  $\forall x \in I \quad ; \quad g(x) \geq 3$
- 2) soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n \geq 3$

- 3) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante
- 4) En déduire que  $(u_n)$  est convergente
- 5) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 83 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 1$
- 2) Étudier la monotonie de  $(u_n)$
- 3) En déduire que  $(u_n)$  est convergente
- 4) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 84 :**

On pose pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \left( \frac{1}{k^2 - 1} \right) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

- 1) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 2}$  et  $(v_n)_{n \geq 2}$  sont deux suites adjacentes
- 2) Que peut-on en conclure ?

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) En remarquant que :

$$\forall k \geq 2 \quad ; \quad \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Donner une expression simplifiée de  $u_n$

4) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 85 :**

Soit  $(v_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2 + (v_n)^2}{2v_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 3 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n > \sqrt{2}$
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(v_n)$
- 3) déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$

**Exercice N° 86 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq 5$
- 2) Soit :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{u_n - 5}$

Montrer que la suite  $(v_n)$  est arithmétique

- 3) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- 4) Calculer la somme  $S_{10} = v_1 + \dots + v_{10}$

**Exercice N° 87 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \neq 1$
- 2) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$   
Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique
- 3) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- 4) Calculer  $S_n = v_1 + \dots + v_n$  en fct de  $n$
- 5) Calculer les limites suivantes :  
 $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n) ; \lim_{n \rightarrow \infty}(v_n) ; \lim_{n \rightarrow \infty}(S_n)$

**Exercice N° 88 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

- 1) Calculer les termes :  $u_1 ; u_2$
- 2) On pose :  $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$   
Montrer que  $(v_n)$  est géométrique
- 3) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- 4) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  
 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- 5) Calculer chacune des limites suivantes :  
 $\lim_{n \rightarrow \infty}(v_n) ; \lim_{n \rightarrow \infty}(S_n) ; \lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

**Exercice N° 89 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < 0$
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) On pose :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} ; \forall n \in \mathbb{N}$   
Montrer que  $(v_n)$  est géométrique
- 4) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

- 5) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  
 $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
- 6) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow \infty}(v_n) ; \lim_{n \rightarrow \infty}(S_n) ; \lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

**Exercice N° 90 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{16u_n}{(2 + \sqrt{u_n})^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 1) montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 4$
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) on pose :  $v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}} ; \forall n \in \mathbb{N}$

- Montrer que  $(v_n)$  est géométrique
- 4) Exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$
- 5) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty}(v_n)$

**Exercice N° 91 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 + u_n - \sqrt{3 + (u_n)^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in [0,1] \end{cases}$$

- 1) montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  
 $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$
- 4) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  
 $0 \leq 1 - u_n \leq (\sqrt{3} - 1)^n (1 - u_0)$
- 5) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{3 + u_k^2} \\ T_n = u_n + S_n \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Déterminer la nature de la suite  $(T_n)_{n \geq 1}$

6) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ ;  $u_0$ ;  $u_n$

### Exercice N° 92 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{(u_n)^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que  $(u_n)$  est minorée par 2

2) Montrer que :  $(u_{n+1} - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2)$

3) Déduire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### Exercice N° 93 :

1) Montrer que pour tout  $x \in ]0,1]$  on a :

$$\sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

2) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + u_{n-1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

3) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

4) On pose :  $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}}$

Montrer que :  $v_n > n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

5) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow \infty}(v_n)$

### Exercice N° 94 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 2 \end{cases}$$

1) Calculer les termes :  $u_2$  ;  $u_3$  ;  $u_4$

2)  $(u_n)$  est-elle arithmétique ou géométrique ?

3) montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+2} - u_{n+1}) \geq 0$$

4) En déduire la monotonie de  $(u_n)$

5) soit  $(v_n)$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_{n+1} - u_n$$

Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique

6) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$

7) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

8) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée.

9) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

### Exercice N° 95 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \end{cases}$$

On pose :  $v_n = u_{n+1} - u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique

2) Écrire  $v_n$  en fonction de  $n$

3) On pose :  $S_n = v_0 + \dots + v_{n-1} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n = u_n$

4) Écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

5) Calculer la limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Exercice N° 96 :**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$$

2) En déduire que  $(x_n)$  est minorée par  $\sqrt{2}$

3) Montrer que  $(x_n)$  est strictement  $\searrow$

4) *Mq* :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5) *En déduire la limite* :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

**Exercice N° 97 :**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n^2 + n}{3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

1) Calculer les termes :  $u_1 ; u_2 ; u_3$

2) Calculer  $u_n$  et  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$

3) En déduire que  $(u_n)$  est arithmétique

**Exercice N° 98 :**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

1) Calculer les termes :  $u_1 ; u_2 ; u_3$

2) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \geq 1}$

3) Montrer que pour  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$  on a :

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad 1 < u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

**Exercice N° 99 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \left(\frac{2n+2}{3n}\right) u_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{On pose : } v_n = \frac{u_n}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer les termes :  $u_2 ; u_3$

2) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique

3) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

4) Calculer en fonction de  $n$  la somme :

$$\mathcal{S}_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n}$$

5) *En déduire la limite* :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n)$

**Exercice N° 100 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \sqrt{2})u_n + 2\sqrt{2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

1) Calculer les termes :  $u_2 ; u_3$

2) On pose :  $v_n = u_n - 2$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que  $(v_n)$  est géométrique

3) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

4) Calculer en fonction de  $n$  la somme :

$$\mathcal{S}_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

5) *Calculer la limite* :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n)$

**Exercice N° 101 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 1$
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) *Mq* :  $\forall n \in \mathbb{N} ; (u_{n+1} - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1)$
- 4) *Déduire* :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 5) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$n < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < n + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

- 6) *En déduire la limite* :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k \right)$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

# 5 : Corrigés des Exercices

## Solution N° 1 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > 3$

### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 5 > 3$   
Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 3$

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - 3 &= \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3 \\ &= \frac{4u_n - 9 - 3u_n + 6}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n - 3}{u_n - 2} > 0 \\ &= \frac{\text{strict positif}}{\text{strict positif}} = \text{strict positif} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{n+1} - 3 &> 0 \\ \Rightarrow u_{n+1} &> 3 \\ \Rightarrow P(n+1) &\text{ est vraie} \end{aligned}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 3$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - \frac{u_n(u_n - 2)}{u_n - 2} \\ &= \frac{-(u_n^2 - 6u_n + 9)}{u_n - 2} \\ &= \frac{-(u_n - 3)^2}{u_n - 2} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n &\leq 0 \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} &\leq u_n \\ \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est décroissante} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est décroissante} \\ \Rightarrow u_n &\leq u_{n-1} \leq u_{n-2} \leq \dots \leq u_0 \\ \Rightarrow u_n &\leq u_0 ; \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n &\leq 5 \rightsquigarrow (1) \end{aligned}$$

Or on a selon la question 1) :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 3 \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 3 < u_n \leq 5 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

4) soit  $n \in \mathbb{N}$  On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{4u_n - 9}{u_n - 2}\right) - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3}{u_n - 3} = 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = v_n + 1$$

Donc  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison 1

5) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_p + 1(n - p) \end{aligned}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + 1(n - 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{2} + 1(n - 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{2} + n \end{aligned}$$

$$\text{On a encore} \quad : \quad v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{6n + 5}{2n + 1}$$

$$6) \quad S = v_1 + v_2 + \dots + v_{2020}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{2020 - 1 + 1}{2} \right) (v_1 + v_{2020}) \\ &= (1010) \left( \frac{3}{2} + \frac{4041}{2} \right) = 2042220 \end{aligned}$$

### Solution N° 2 :

$$1) \quad u_1 = 3 - \frac{9}{4u_0} = \frac{9}{4}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $(P_n)$  définie ainsi :  $(P_n) : u_n \neq \frac{3}{2}$

#### L'initialisation :

$$\text{On a} \quad : \quad u_0 = 3 \neq \frac{3}{2}$$

Donc l'instance  $(P_0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $(P_n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \neq \frac{3}{2}$

$$\blacksquare \quad (P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4u_n \neq 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4u_n} \neq \frac{1}{6} \quad ; \quad u_n \neq 0 \text{ facile}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{9}{4u_n} \neq 3 - \frac{9}{6}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq \frac{3}{2}$$

**Remarque :** Pour montrer que  $u_n \neq 0$

On peut le faire par l'absurde :

Si  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n = 0$

On aurait  $u_{n+1}$  n'existe pas

$$\text{Car} \quad u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$$

3) D'abord on aurait besoin de montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > \frac{3}{2}$

#### 1<sup>ère</sup> Méthode :

$$u_n \neq \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien} & u_n < \frac{3}{2} \\ \text{ou bien} & u_n > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Si  $u_n < \frac{3}{2}$  Alors  $u_0 = 3 < \frac{3}{2}$

Et c'est une contradiction claire

Donc la deuxième alternative est retenue

$$C - \grave{a} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n > \frac{3}{2}$$

### 2<sup>ème</sup> Méthode :

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie

ainsi :  $Q(n) : u_n > \frac{3}{2}$

### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 5 > \frac{3}{2}$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > \frac{3}{2}$

■  $Q(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n > \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow 4u_n > 6$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4u_n} > \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{9}{4u_n} > 3 - \frac{9}{6}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow Q(n+1)$  est vraie

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > \frac{3}{2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Revenons maintenant pour étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a alors :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n$$

$$= \frac{12u_n - 9 - 4u_n^2}{4u_n}$$

$$= \frac{-(4u_n^2 - 12u_n + 9)}{4u_n}$$

$$= \frac{-(2u_n - 3)^2}{4u_n} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

4) soit  $n \in \mathbb{N}$  on procède comme suit :

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = \frac{2}{2u_{n+1} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} - \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{8u_n}{12u_n - 18} - \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{4u_n}{3(2u_n - 3)} - \frac{2 \times 3}{3(2u_n - 3)}$$

$$= \frac{2(2u_n - 3)}{3(2u_n - 3)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = v_n + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{2}{3}$$

5) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned} ; \quad v_n = v_p + \frac{2}{3}(n - p)$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = v_0 + \frac{2}{3}(n - 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n - 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = \frac{2}{3}(n + 1)$$

Et comme :  $v_n = \frac{2}{2u_n - 3} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors :  $u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{3}{2} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{2(n+1)} + \frac{3(n+1)}{2(n+1)} = \frac{3n+6}{2n+2}$$

6)  $S_n = \frac{1}{2u_0 - 3} + \frac{1}{2u_1 - 3} + \dots + \frac{1}{2u_n - 3}$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{2u_0 - 3} + \frac{2}{2u_1 - 3} + \dots + \frac{2}{2u_n - 3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{n - 0 + 1}{2} \right) (v_0 + v_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{2} \right) \left( \frac{2}{3} + \frac{2n}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+4)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Solution N° 3 :

1) Calcul de quelques termes :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{5}{3} = 2$$

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$v_1 = u_1 - \frac{5}{2} = \frac{-1}{2}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n < \frac{5}{2}$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 1 < \frac{5}{2}$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n < \frac{5}{2}$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n < \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n < \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} < \frac{5}{6} + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < \frac{5}{2}$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} - u_n \\ &= \frac{-2}{3}u_n + \frac{5}{3} \\ &= \frac{-2}{3}\left(u_n - \frac{5}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

4) soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left( \frac{u_{n+1} - \frac{5}{2}}{u_n - \frac{5}{2}} \right) = \left( \frac{\frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} - \frac{5}{2}}{u_n - \frac{5}{2}} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{1}{3}u_n - \frac{5}{6}}{u_n - \frac{5}{2}} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{5}{2}\right)}{\left(u_n - \frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3}$$

5) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \leq n \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= v_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= \frac{-3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

On a encore :  $v_n = u_n - \frac{5}{2} ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = v_n + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{-3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{5}{2}$$

6)  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$= \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) v_0$$

$$= \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) \times \frac{-3}{2}$$

$$= \frac{-9}{4} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= \left(v_0 + \frac{5}{2}\right) + \left(v_1 + \frac{5}{2}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{5}{2}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (n+1) \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \frac{-9}{4} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) + \frac{5(n+1)}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9}{4} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{-9}{4} (1 - 0) = \frac{-9}{4}$$

### Solution N° 4 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > 0$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 1 > 0$   
Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 0$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > 0$$

$$\Rightarrow 3u_n + 2 > 0 \quad \text{et} \quad u_n + 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0 \rightsquigarrow (1)$

On démontrera encore par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n < 2$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 1 < 2$   
Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n < 2$

$$\blacksquare u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2$$

$$= \frac{u_n - 2}{u_n + 2} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < 2 \rightsquigarrow (2)$

De (1) et (2) on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < 2$$

$$2) u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2} \quad ; \quad \text{avec } x = u_n$$

$$\blacksquare \quad \Delta = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \{2; -1\}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2} = \frac{-(x - 2)(x + 1)}{x + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{(2 - x)(x + 1)}{(x + 2)} \quad ; \quad x = u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{(u_n + 2)}$$

3) comme :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n < 2$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \text{Et } (1 + u_n) > 0 \\ \text{Et } (2 + u_n) > 0 \\ \text{Et } (2 - u_n) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{(u_n + 2)} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow u_n \geq u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq \dots \geq u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 1 \leq u_n < 2$$

4) soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left( \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 2} \right) \times \left( \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \right)$$

$$= \left( \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} + 1}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2} \right) \times \left( \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \right)$$

$$= \left( \frac{4u_n + 4}{u_n + 2} \right) \times \left( \frac{u_n + 2}{u_n - 2} \right) \times \left( \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \right)$$

$$= \frac{4(u_n + 1)(u_n + 2)(u_n - 2)}{(u_n + 2)(u_n - 2)(u_n + 1)} = 4$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} = 4v_n$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est géométrique de raison } 4$$

5) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_p \times 4^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \times 4^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = -2 \cdot 4^n$$

$$6) \text{ On a } : \quad v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n \cdot u_n - 2v_n = u_n + 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n \cdot u_n - u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad (v_n - 1)u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1 + 2v_n}{v_n - 1} = \frac{1 - 2 \cdot 2 \cdot 4^n}{-2 \cdot 4^n - 1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1 - 4^{n+1}}{-2 \cdot 4^n - 1} = \frac{4^{n+1} - 1}{1 + 2 \cdot 4^n}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
 7) \quad S_n &= \sum_{k=2}^{k=n} v_k = v_2 + v_3 + \dots + v_n \\
 &= \left( \frac{1 - 4^{n-2+1}}{1 - 4} \right) v_2 \\
 &= \frac{-1}{3} (1 - 4^{n-1}) (-32) \\
 &= \frac{32}{3} (1 - 4^{n-1})
 \end{aligned}$$

### Solution N° 5 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n \leq 4$

#### L'initialisation :

On a :  $u_1 = \sqrt{12} \leq 4$

Donc l'instance  $P(1)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \leq 4$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n \leq 4$

$$\Rightarrow u_n + 12 \leq 16$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n + 12} \leq 4$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 4$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \leq 4 \rightsquigarrow (1)$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n \geq 3$

#### L'initialisation :

On a :  $u_1 = \sqrt{12} \geq 3$

Donc l'instance  $Q(1)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq 3$

■  $Q(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n \geq 3 > -3$

$$\Rightarrow u_n \geq -3$$

$$\Rightarrow 12 + u_n \geq 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{12 + u_n} \geq 3$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 3$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \geq 3 \rightsquigarrow (2)$

De (1) et (2) on tire finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; 3 \leq u_n \leq 4$$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

2) soit  $f$  la fonction définie ainsi :

$$f(x) = \sqrt{x + 12}$$

Cette fonction est définie et est continue sur l'intervalle  $[-12, +\infty[$  Donc on peut appliquer le TAF sur l'intervalle  $[u_n, 4]$  Alors :

$$\exists c \in ]u_n, 4[ \quad ; \quad \frac{f(4) - f(u_n)}{4 - u_n} = f'(c)$$

$$\Rightarrow u_n < c < 4 \text{ et } \left( \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \right) = \frac{1}{2\sqrt{c + 12}}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} u_n < c < 4 \\ u_n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow c \geq 3 > -8$$

$$\Rightarrow c \geq -8$$

$$\Rightarrow c + 12 \geq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{c + 12} \geq 2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{c + 12} \geq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c + 12}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \right) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (4 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$$

3) **1<sup>ère</sup> Méthode** (la méthode descendante)

$$\text{On a : } (4 - u_{n+1}) = \frac{1}{4}(4 - u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour  $(n - 1) \in \mathbb{N}^*$  on aurait :

$$(4 - u_n) \leq \frac{1}{4}(4 - u_{n-1})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} (4 - u_{n-2})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} (4 - u_{n-3})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left( \frac{1}{4} \right)^4 (4 - u_{n-4})$$

$$\Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left( \frac{1}{4} \right)^n (4 - u_{n-n})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left( \frac{1}{4} \right)^n 4 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

**2<sup>ème</sup> Méthode** : la récurrence

(à vous de voir comment procéder)

$$4) \text{ Comme : } 0 \leq 4 - u_n \leq \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

$$\text{Et comme } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1} = 0$$

Alors d'après le critère de comparaison

on en déduit que :  $\lim(4 - u_n) = 0$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 4$$

**Solution N° 6 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie

$$\text{ainsi : } P(n) : \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } u_0 = 2\pi \text{ et } \frac{\pi^2}{2\pi} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $\frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{u_{n+1}} = \frac{\pi^2}{u_n} \left(\frac{\pi + 2u_n}{\pi}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \frac{\pi^2}{u_n} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{\pi} = \frac{4}{1+4k} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi + 2u_n}{\pi} = \frac{4k + 5}{1 + 4k} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\pi^2}{u_{n+1}} &= \frac{\pi^2}{u_n} \left(\frac{\pi + 2u_n}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi + 4k\pi}{2}\right) \left(\frac{4k + 5}{1 + 4k}\right) \\ &= \frac{\pi(4k + 1)(4k + 5)}{2(4k + 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}(4k + 5) = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2(k + 1)\pi ; (k + 1) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{u_{n+1}} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow P(n + 1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n + 1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n > 0$

### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 2\pi > 0$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 0$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > 0$$

$$\Rightarrow \pi u_n > 0 \text{ et } \pi + 2u_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + 0 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + \cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow Q(n + 1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n + 1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$$

2) soit  $n \in \mathbb{N}$  et procède ainsi :

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\pi + 2u_n}{\pi u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{\pi + 2u_n - \pi}{\pi u_n} = \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = v_n + \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{2}{\pi}$$

3) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_p + \frac{2}{\pi}(n - p)$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + \frac{2}{\pi}(n - 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{2\pi} + \frac{2n}{\pi} = \frac{1}{2\pi}(4n + 1)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2\pi}{4n + 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi}{4n + 1} \right) = 0$$

### Solution N° 7 :

1) On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > n$

#### L'initialisation :

On a :  $u_4 = 6 > 4$

Donc l'instance  $P(4)$  est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  ;  $n > 3$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > n$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > n \text{ et } n > 3$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n > 3 \text{ et } n - 1 > 2$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n(n - 1) > 6 > 1$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n(n - 1) > 1$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n^2 - n > 1$$

$$\Rightarrow u_n + n^2 - n > n + 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > n + 1$$

$$\Rightarrow P(n + 1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(4) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n + 1) \quad ; \quad \forall n > 3 \end{cases}$$

$$C - \grave{a} - d : \quad \forall n > 3 \quad ; \quad u_n > n$$

2) comme :  $\forall n > 3 \quad ; \quad u_n > n$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :  $\lim(u_n) = +\infty$

3) par la méthode descendante on a :

$$\hookrightarrow u_n - u_{n-1} = (n - 1)^2 - (n - 1)$$

$$\hookrightarrow u_{n-1} - u_{n-2} = (n - 2)^2 - (n - 2)$$

$\vdots$   $\vdots$   $\vdots$

$$\hookrightarrow u_3 - u_2 = 2^2 - 2$$

$$\hookrightarrow u_2 - u_1 = 1^2 - 1$$

$$\hookrightarrow u_1 - u_0 = 0^2 - 0$$

On additionne ces égalités côte à côte on obtient après des élimination éventuelles :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{k=n-1} k$$

$$\Rightarrow u_n + 2 = \sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{k=n-1} k$$

$$\Rightarrow u_n + 2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{n(n-1)(2n-4)}{6} - 2 ; \forall n \geq 3$$

### Solution N° 8 :

1) calcul de quelques termes de la suite :

| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |

2) d'après ce petit tableau en dessus on peut facilement conjecturer le prédicat suivant :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = n$  à démontrer par la machine récurrence.

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n = n$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 0$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n = n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n = n$

$$\Rightarrow 2u_n = 2n$$

$$\Rightarrow 2u_n + 1 - n = 2n + 1 - n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = n + 1$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = n$$

4) soit maintenant  $u_0 = 1$

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n = 2^n + n$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 1 = 2^0 + 0$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n = 2^n + n$

■  $Q(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n = 2^n + n$

$$\Rightarrow 2u_n + 1 - n = 2(2^n + n) + 1 - n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 2^n + n$$

**Solution N° 9 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : v_n \geq 0$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } v_0 = 1 \geq 1$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $v_n \geq 0$

$$\begin{aligned} \blacksquare P(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow v_n \geq 0 \\ &\Rightarrow 2 + v_n \geq 2 > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{2 + v_n} > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{2 + v_n} \geq 0 \\ &\Rightarrow v_{n+1} \geq 0 \\ &\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d \text{ que : } \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \geq 0 \rightsquigarrow (1)$$

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : v_n \leq 2$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } v_0 = 1 \leq 2$$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $v_n \leq 2$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow v_n \leq 2$$

$$\Rightarrow 2 + v_n \leq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + v_n} \leq 2$$

$$\Rightarrow v_{n+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \leq 2 \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq v_n \leq 2$$

2) soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = \sqrt{2 + v_n} - v_n$$

$$= \frac{(\sqrt{2 + v_n})^2 - (v_n)^2}{\sqrt{2 + v_n} + v_n}$$

$$= \frac{-(v_n)^2 + v_n + 2}{\sqrt{2 + v_n} + v_n}$$

$$= \frac{-(v_n - 2)(v_n + 1)}{\sqrt{2 + v_n} + v_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} \geq v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$3) \text{ On : } v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} = f(v_n)$$

Avec  $f(x) = \sqrt{2+x}$  continue sur  $\mathbb{R}^+$

Et on :  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  et  $v_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$

La suite  $(v_n)$  est convergente car croissante et étant majorée par 2.

On a encore  $\lim(u_n) \in \mathbb{R}^+$

Car :  $0 \leq v_n \leq 2$

Donc la limite  $l = \lim(v_n)$  vérifie l'équation  $f(l) = l$

$$\Rightarrow \sqrt{2+l} = l$$

$$\Rightarrow 2+l = l^2$$

$$\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (l-2)(l+1) = 0 ; \Delta = 9$$

$$\Rightarrow l \in \{2; -1\}$$

$$\Rightarrow l = 2 \text{ car : } 0 \leq l \leq 2$$

### Solution N° 10 :

1) calcul de quelques termes de la suite :

| $u_1$         | $u_2$         | $u_3$         | $v_0$ | $v_1$ | $v_3$ |
|---------------|---------------|---------------|-------|-------|-------|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | 2     | 3     | 4     |

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = 1$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = v_n + 1$

c-à-d que  $(v_n)$  est arithmétique de raison 1

3) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{array} ; v_n = v_p + 1(n-p)$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 + 1(n-0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 1 + n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n+1}$$

4) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare n+2 > n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+n) = +\infty$$

### Solution N° 11 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 2 \leq u_n \leq 4$

**L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 3 \in [2; 4]$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $2 \leq u_n \leq 4$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 2 \leq u_n \leq 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } (u_n - 4) \text{ est négatif} \\ \text{Et } (u_n - 2) \text{ est positif} \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ On a } u_{n+1} - 4 = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 4$$

$$= \frac{8u_n - 8 - 4u_n - 8}{u_n + 2}$$

$$= \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 4 \leq 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \leq 4} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare \text{ On a encore } u_{n+1} - 2 = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 2$$

$$= \frac{8u_n - 8 - 2u_n - 4}{u_n + 2}$$

$$= \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \geq 2} \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on déduit :  $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 2 \leq u_n \leq 4$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{8u_n - 8 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{-((u_n)^2 - 6u_n + 8)}{u_n + 2} \\ &= \frac{-(u_n - 4)(u_n - 2)}{(u_n + 2)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

3) comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante Alors :

$$u_n \geq u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq \dots \geq u_0$$

$$\Rightarrow u_n \geq u_0 \Rightarrow u_n \geq 3$$

Donc d'après la 1<sup>ère</sup> question on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; 3 \leq u_n \leq 4$$

4) comme :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 3 \leq u_n \leq 4$  Alors :

$$\begin{cases} (3 - u_n) \text{ est négatif} \\ (4 - u_n) \text{ est positif} \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ On a : } (4 - u_{n+1}) - \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$= 4 - \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$= \frac{16 - 4u_n}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$= \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$= (4 - u_n) \left( \frac{4}{u_n + 2} - \frac{4}{5} \right)$$

$$= (4 - u_n) \left( \frac{12 - 4u_n}{5(u_n + 2)} \right)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{(4 - u_n)(3 - u_n)}{(u_n + 2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow (4 - u_{n+1}) - \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; (4 - u_{n+1}) \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

5) 1<sup>ère</sup> Méthode : la méthode descendante

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N} ; (4 - u_{n+1}) \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}(4 - u_{n-2})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}(4 - u_{n-3})$$

$$\Rightarrow \vdots \vdots \vdots \quad \vdots \vdots \vdots$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0)$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

2<sup>ème</sup> Méthode : la récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie

ainsi :  $P(n) : 4 - u_n > \left(\frac{4}{5}\right)^n$

**L'initialisation :**

On a :  $4 - u_0 \leq (4/5)^0$  car  $4 - 3 \leq 1$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance

$P(n)$  soit vraie. C-à-d  $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie } \Rightarrow 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \frac{4}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow (4 - u_{n+1}) \leq \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow (4 - u_{n+1}) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

6) Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{4}{5} < 1$

Et comme :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - u_n) = 0$$

$$\text{Ou encore : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 4$$

**Solution N° 12 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{4}u_n + 2\left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) - 3\left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\left(u_n + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{4}$

2) comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{aligned} ; v_n = v_p \left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = v_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$3) \mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{3}{4}}\right) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{16}{3} - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3} + 3^{n+1}\right) \\ &= \frac{16}{3} - \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{3} + 3^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 + 0 = 0$$

$\frac{1}{4} < 1$                        $\frac{3}{4} < 1$

**Solution N° 13 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} \\ &= \frac{\frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}}{\frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} - u_n} \\ &= \frac{\frac{3}{2}u_{n+1} - 2u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}}{\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1}\right) - 2u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}}{\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})} \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n-1}}{\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})} = \frac{\frac{1}{4}(u_n - u_{n-1})}{\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}$$

2) comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \leq n \quad ; \quad v_n = v_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3)  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$= v_0 \cdot \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= 3 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right) = 6 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4) on procède par la méthode descendante on trouve les instances :

$$\hookrightarrow v_0 = u_1 - u_0$$

$$\hookrightarrow v_1 = u_2 - u_1$$

$$\hookrightarrow v_2 = u_3 - u_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$$

$$\hookrightarrow v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

On additionne ces égalités côte à côte et en prenant en considération les éventuelles éliminations on trouve :

$$S_n = u_n - u_0$$

$$\Leftrightarrow 6 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = 6 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = 6 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n} + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = 7 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

5) On a d'abord :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

Car :  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  Donc on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 7 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = 7 - 0 = 7$$

### Solution N° 14 :

1) la fonction  $f$  est définie et est continue et dérivable et strictement croissante sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-7}{2} \right\}$  car on a :

$$\forall x \neq \frac{-7}{2} \quad ; \quad f'(x) = \frac{8}{(2x+7)^2} > 0$$

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

### L'initialisation :

On a :  $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$  car  $u_0 = 1$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

$$\blacksquare \text{ On a : } u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - 1$$

$$= \frac{2u_n + 3 - 2u_n - 7}{2u_n + 7} = \frac{-4}{2u_n + 7} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 1 \rightsquigarrow (1)$$

$$\text{On a encore : } u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4u_n + 6 - 2u_n - 7}{2(2u_n + 7)} = \frac{2u_n - 1}{2(2u_n + 7)} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{1}{2} \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on déduit que :

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - u_n$$

$$= \frac{2u_n + 3 - 2u_n^2 - 7u_n}{2u_n + 7}$$

$$= \frac{-2u_n^2 - 5u_n + 3}{2u_n + 7}$$

$$= \frac{-(u_n - \frac{1}{2})(u_n + 3)}{2u_n + 7} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

4) la fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-7}{2}\}$  Donc elle est continue et dérivable sur tout intervalle inclus dans  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-7}{2}\}$  On peut donc appliquer le TAF sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}; u_n]$  :

$$\Rightarrow \exists c \in ]\frac{1}{2}, u_n[ ; \frac{f(u_n) - f(\frac{1}{2})}{u_n - \frac{1}{2}} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in ]\frac{1}{2}, u_n[ ; \left( \frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_n - \frac{1}{2}} \right) = \frac{8}{(2c + 7)^2}$$

$$c < \frac{1}{2} \Rightarrow 2c > 1 \Rightarrow 2c + 7 > 8$$

$$\Rightarrow (2c + 7)^2 > 64$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2c + 7)^2} < \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{(2c + 7)^2} < \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_n - \frac{1}{2}} \right) \leq \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \left( u_{n+1} - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{1}{8} \left( u_n - \frac{1}{2} \right) ; u_n \geq \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) 1<sup>ère</sup> Méthode : La méthode descendante

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8} \left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8} \left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \left(u_{n-2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(u_{n-3} - \frac{1}{2}\right)$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\Rightarrow \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

2<sup>ème</sup> Méthode : La récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie

ainsi :  $P(n) : 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

**L'initialisation :**

On a :  $0 \leq u_0 - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1$  car  $u_0 = 1$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance

$P(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow \begin{cases} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3(n+1)+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3(n+1)+1}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

6) comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = 0$  car  $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Et comme  $0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( u_n - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \frac{1}{2}$$

### **Solution N° 15 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > 0$

#### **L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 1 > 0$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 0$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n > 0$

$$\Rightarrow (u_n)^2 + \left( \frac{1}{n+1} \right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(u_n)^2 + \left( \frac{1}{n+1} \right)^2} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$\Rightarrow P(n+1)$  est vraie

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > 0$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt{(u_n)^2 + \left( \frac{1}{n+1} \right)^2} - u_n$$

$$= \frac{\left( \sqrt{(u_n)^2 + \left( \frac{1}{n+1} \right)^2} \right)^2 - (u_n)^2}{\sqrt{(u_n)^2 + \left( \frac{1}{n+1} \right)^2} + u_n}$$

$$= \frac{\left( \frac{1}{n+1} \right)^2}{\sqrt{(u_n)^2 + \left( \frac{1}{n+1} \right)^2} + u_n} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

#### **L'initialisation :**

$$\text{On a : } v_1 = \sum_{k=1}^{k=1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$$

Donc l'instance  $P(1)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

$$v_{n+1} - \left( 2 - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \left( 2 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 + \frac{1}{n+1}$$

$$= \left( v_n - 2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \underbrace{\left[ v_n - \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \right]}_{\text{négatif}} + \underbrace{\left[ \frac{-1}{n(n+1)^2} \right]}_{\text{négatif}} \leq 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow v_{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow v_{n+1} \leq \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n = \sqrt{1+v_n}$

### L'initialisation :

$$\text{On a : } u_1 = \sqrt{1+v_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Donc l'instance  $Q(1)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n = \sqrt{1+v_n}$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n = \sqrt{1+v_n}$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 = 1 + v_n$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(u_n)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{1+v_{n+1}}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = \sqrt{1+v_n}$$

$$5) \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow v_n + 1 \leq 3 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0 < v_n + 1 \leq 3 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{v_n + 1} \leq \sqrt{3 - \frac{1}{n}}$$

$$\text{Or on a : } \frac{-1}{n} < 0 \Rightarrow 3 - \frac{1}{n} < 3$$

$$\Rightarrow 0 < 3 - \frac{1}{n} < 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3 - \frac{1}{n}} < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{v_n + 1} \leq \sqrt{3 - \frac{1}{n}} \leq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{v_n + 1} \leq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_n \leq \sqrt{3} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow (u_n)$  est convergente car croissante et majorée par  $\sqrt{3}$

6) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(k)$  définie ainsi :  $R(k) : 2^{k+1} \geq (k+1)^2$

### L'initialisation :

On a :  $2^{3+1} \geq (3+1)^2$  car  $16 \geq 16$   
Donc l'instance  $R(3)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $k \geq 3 ; k \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $R(k)$  soit vraie.

C-à-d  $2^{k+1} \geq (k+1)^2$

$$\blacksquare R(k) \text{ est vraie} \Rightarrow 2^{k+1} \geq (k+1)^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{k+1} \geq 2(k+1)^2 \geq (k+2)^2$$

$$\Rightarrow 2^{k+2} \geq (k+2)^2$$

$$\Rightarrow R(k+1) \text{ est vraie}$$

Pourquoi  $2(k+1)^2 \geq (k+2)^2$  ?

Voici pourquoi :

$$\text{On a : } 2(k+1)^2 - (k+2)^2$$

$$= (2k^2 + 4k + 2) - (k^2 + 4k + 4)$$

$$= k^2 - 2 \geq 2 \text{ car } k \geq 3$$

$$\text{Donc : } 2(k+1)^2 - (k+2)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2(k+1)^2 \geq (k+2)^2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### La conclusion :

$$\begin{cases} R(3) \text{ est vraie} \\ R(k) \Rightarrow R(k+1) ; \forall k \geq 3 \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall k \geq 3 ; 2^{k+1} \geq (k+1)^2$

7) Soit  $k \geq 3 ; k \in \mathbb{N}$  et on procède :

$$\blacksquare (u_{k+1})^2 - (u_k)^2$$

$$= \left( \sqrt{(u_k)^2 + \left(\frac{1}{k+1}\right)^2} \right)^2 - (u_k)^2 = \left(\frac{1}{k+1}\right)^2$$

Or on a :  $0 \leq (k+1)^2 \leq 2^{k+1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \forall k \geq 3 ; (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$8) \text{ On a } \forall k \geq 3 ; (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$$

Par la méthode descendante on trouve :

$$\hookrightarrow (u_4)^2 - (u_3)^2 \geq \frac{1}{2^4}$$

$$\hookrightarrow (u_5)^2 - (u_4)^2 \geq \frac{1}{2^5}$$

$$\hookrightarrow (u_6)^2 - (u_5)^2 \geq \frac{1}{2^6}$$

$\vdots$

$$\hookrightarrow (u_{n-1})^2 - (u_{n-2})^2 \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\hookrightarrow (u_n)^2 - (u_{n-1})^2 \geq \frac{1}{2^n}$$

On additionne ces inégalités côte à côte et en prenant en considération les éven

Les éventuelles éliminations dans le côté de gauche on trouve alors :

$$\Leftrightarrow (u_n)^2 - (u_3)^2 \geq \sum_{k=4}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } (u_3)^2 &= 1 + v_3 = 1 + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{1}{k^2} \\ &= 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{85}{36} \end{aligned}$$

$$\text{On a encore } \sum_{k=4}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = w_4 + w_5 + \dots + w_n$$

$$\text{Avec : } w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{géométrique})$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=4}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = w_4 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right)$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 - \frac{85}{36} \geq \frac{1}{8} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right)$$

$$\Rightarrow u_n \geq \sqrt{\frac{1}{8} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right) + \frac{85}{36}}$$

Par passage aux limites on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \geq \sqrt{\frac{1}{8}(1-0) + \frac{85}{36}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \geq \sqrt{\frac{179}{72}} \rightsquigarrow (1)$$

Or on a selon la question 5) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \leq \sqrt{3}$$

Donc par passage aux limites on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq \sqrt{3} \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on en déduit que :

$$\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq \sqrt{3}$$

### **Solution N° 16 :**

1) Pour que la suite  $(v_n)$  soit géométrique, il suffit qu'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + \alpha(n+1) - 1}{u_n + \alpha n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} + \alpha(n+1) - 1}{u_n + \alpha n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n + (\alpha - 1)n + \left(\alpha - \frac{11}{3}\right)}{u_n + \alpha n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \left( u_n + \frac{3}{2}(\alpha - 1)n + \frac{3}{2} \left( \alpha - \frac{11}{3} \right) \right)}{u_n + \alpha n - 1}$$

Et pour que cette dernière quantité soit constante il suffit qu'on ait les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{Et } \frac{3}{2}(\alpha - 1) = \alpha \\ \text{Et } \frac{3}{2}\left(\alpha - \frac{11}{3}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et } \alpha = 3 \\ \text{Et } \alpha = 3 \end{cases}$$

Donc pour  $\alpha = 3$  on a la chose suivante

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2}{3}(u_n + 3n - 1)}{(u_n + 3n - 1)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

$$\Leftrightarrow (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{3}$$

5) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} ; v_n = v_p \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On a encore :  $v_n = u_n + 3n - 1 ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = v_n - 3n + 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3n + 1$$

3)  $\mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$= v_0 \left( \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right)$$

4) Comme  $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$  est géométrique

Et comme  $\frac{2}{3} \in ]-1, 1[$  Alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$5) T_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} (v_k - 3k + 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} v_k - 3 \sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1$$

$$= 3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) - \frac{3n(n+1)}{2} + 1(n+1)$$

$$= 3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) + \frac{(n+1)(2-3n)}{2}$$

### **Solution N° 17 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 - u_n$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 2u_n + (u_n)^2) - u_n$$

$$= \frac{1}{2}((u_n)^2 + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

### L'initialisation :

On a :  $u_1 - u_0 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

$$\blacksquare u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_{n+1})^2 - \frac{1}{2}(1 + u_n)^2$$

$$= \frac{1}{2}((1 + u_{n+1})^2 - (1 + u_n)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + u_{n+1} - 1 - u_n)(1 + u_{n+1} + 1 + u_n)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n + 2)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u_n)^2 + 2u_n + 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \left( \frac{5}{2} + \frac{1}{2}u_n(u_n + 2) \right)$$

On a :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 0$  c'est trop facile de démontrer ce prédicat par récurrence en remarquant que la condition d'hérédité est triviale :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 \geq 0$

$$\blacksquare u_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n(u_n + 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{1}{2}u_n(u_n + 2) \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \left( \frac{5}{2} + \frac{1}{2}u_n(u_n + 2) \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow (u_{n+2} - u_{n+1}) \geq \frac{25}{8} > \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow (u_{n+2} - u_{n+1}) \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

1) 1<sup>ère</sup> Méthode : la méthode descendante

$$\blacksquare \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$$

$$\hookrightarrow u_1 - u_0 \geq \frac{5}{2}$$

$$\hookrightarrow u_2 - u_1 \geq \frac{5}{2}$$

$$\hookrightarrow u_3 - u_2 \geq \frac{5}{2}$$

$$\hookrightarrow u_4 - u_3 \geq \frac{5}{2}$$

$\vdots$

$$\hookrightarrow u_n - u_{n-1} \geq \frac{5}{2}$$

On additionne ces inégalités côte à côte et en prenant en considération les éventuelles éliminations on trouve ainsi :

$$u_n - u_0 \geq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{5}{2} \right) \Rightarrow u_n - 2 \geq \frac{5n}{2}$$

$$\Rightarrow u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$$

2<sup>ème</sup> Méthode : On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 2 \geq 2 + \frac{5 \times 0}{2}$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

■  $Q(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

$$\Rightarrow u_n + 1 \geq 3 + \frac{5n}{2}$$

$$\Rightarrow (u_n + 1)^2 \geq 9 + \frac{25n^2}{4} + 15n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_n + 1)^2 \geq \frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}$$

Il nous reste à comparer les quantités :

$$\left(\frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

$$\text{On a : } \left(\frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}\right) - \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

$$= \frac{25n^2}{8} + 5n > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}\right) > \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 \geq \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 2 + \frac{5(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

4) comme  $u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5n}{2}\right) = +\infty$

Alors selon le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$$

Ce qui veut dire que  $(u_n)$  est divergente

### Solution N° 18 :

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(u_{n+1})^2 - 2}{(u_n)^2 - 2} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 + 1 - 2}{u_n^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(u_n^2 - 2)}{(u_n^2 - 2)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_n \neq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}$$

2) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \leq n \quad ; \quad v_n = v_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a encore :  $v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{1}{2^{n-1}} = (u_n)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \pm \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}} + 2}$$

Mais comme  $u_n > 0$  est c'est facile à la démontrer par récurrence juste en remarquant que la condition d'hérédité est triviale  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} > 0$  on trouve finalement que :

$$\begin{cases} u_n = + \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}} + 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

3)  $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

$$= (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n} v_i + \sum_{k=0}^{k=n} 2$$

$$= v_0 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) + (n+1)2$$

$$= 4 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) + 2(n+1)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$T_n = \prod_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$= 2 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{2^2} \times \dots \times \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{n-1}} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2^{1+2+3+4+\dots+(n-1)}} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \right) = 2^{\left(\frac{2-n^2+n}{2}\right)}$$

4) On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$  car  $-1 < \frac{1}{2} < 1$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Et on a : } \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\left(\frac{2-n^2+n}{2}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\left(\frac{2-n^2+n}{2}\right) \ln 2\right)$$

$$= \exp(-\infty) = 0^+ = 0$$

On verra ceci avec beaucoup plus de détails plus tard dans la leçon intitulée fonctions logarithmes et exponentielles.

### **Solution N° 19 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 0 < u_n < v_n$

**L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 1$  et  $0 < 1 < a = v_0$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance

$P(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n < v_n$

$$\blacksquare \quad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{4 u_n v_n - (u_n + v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{-(u_n^2 - 2 u_n v_n + v_n^2)}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{-(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - v_{n+1} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < v_{n+1} \rightsquigarrow (1)$$

Or on a :  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on peut en tirer :

$$0 < u_{n+1} < v_{n+1} \Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < v_n$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n$$

$$= \frac{2 u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n}$$

$$= \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{(u_n + v_n)} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

On suit le même procédé pour  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\blacksquare \quad v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} - v_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad (v_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n} - \frac{v_n - u_n}{2}$$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4 u_n v_n - (v_n - u_n)(v_n + u_n)}{2(u_n + v_n)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{2u_n^2 - 2u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{2u_n(u_n - v_n)}{2(u_n + v_n)} \leq 0$$

$$\Rightarrow (v_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\Rightarrow 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

4) 1<sup>ère</sup> Méthode : la méthode descendante

$$\blacksquare 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\hookrightarrow 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

$$\hookrightarrow 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 (v_{n-2} - u_{n-2})$$

$$\hookrightarrow 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 (v_{n-3} - u_{n-3})$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\hookrightarrow 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$$

$$\hookrightarrow 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (a - 1)$$

Pour un  $m = n + 1 \in \mathbb{N}^*$  on aurait :

$$0 < v_m - u_m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m (a - 1)$$

$$\text{Ou encore : } 0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - 1)$$

2<sup>ème</sup> Méthode : On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 0 < v_n - u_n < \frac{a-1}{2^n}$

**L'initialisation** :

$$\text{On a : } 0 < a - 1 \leq \frac{a-1}{2^0}$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité** :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < v_n - u_n < \frac{a-1}{2^n}$

$$\blacksquare \text{ On a : } 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\Rightarrow 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{a-1}{2^n} \right)$$

$$\Rightarrow 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{a-1}{2^{n+1}}$$

$\Rightarrow P(n+1)$  est vraie

**La conclusion** :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < v_n - u_n \leq \frac{a-1}{2^n}$

5) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n \times v_n = a$

**L'initialisation** :

$$\text{On a : } u_0 \times v_0 = 1 \times a = a$$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n v_n = a$

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} \times v_{n+1} &= \left( \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \right) \times \left( \frac{u_n + v_n}{2} \right) \\ &= u_n \times v_n = a \\ \Rightarrow Q(n+1) &\text{ est vraie} \end{aligned}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \times v_n = a$

6) On a :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < v_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \times u_n &< u_n \times u_n < u_n \times v_n \\ \Rightarrow 0 &< (u_n)^2 < u_n v_n \\ \Rightarrow 0 &< (u_n)^2 < a \\ \Rightarrow u_n &< \sqrt{a} \rightsquigarrow (1) \end{aligned}$$

On a encore :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < v_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \times v_n &< u_n \times v_n < v_n \times v_n \\ \Rightarrow 0 &< u_n v_n < (v_n)^2 \\ \Rightarrow 0 &< a < (v_n)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{a} &< v_n \rightsquigarrow (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < \sqrt{a} < v_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Solution N° 20 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 0 \leq u_n < \sqrt{3}$

**L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 0$  et  $0 \leq 0 < \sqrt{3}$   
Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 \leq u_n < \sqrt{3}$

On a  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6-x^2}}$  est continue et

strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow 0 \leq u_n < \sqrt{3}$

$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) < f(\sqrt{3})$  car  $f$  est ↗

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{6}} \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{3}{\sqrt{6}} \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

$\Rightarrow P(n+1)$  est vraie

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n < \sqrt{3}$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} - u_n \\ &= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} - u_n\right) \left(\frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} + u_n\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} + u_n\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}}\right)^2 - (u_n)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} + u_n\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{9 - 6u_n^2 + u_n^4}{6 - u_n^2}\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} + u_n\right)} \\ &= \frac{\frac{(u_n^2 - 3)^2}{6 - u_n^2}}{\left(\frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} + u_n\right)} \geq 0 \end{aligned}$$

Car on a :  $0 \leq u_n < \sqrt{3} < \sqrt{6}$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n < \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 < 6$$

$$\Rightarrow 6 - (u_n)^2 > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{(u_{n+1})^2}{3 - (u_{n+1})^2} - \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{9}{6 - (u_n)^2}\right)}{\left(3 - \frac{9}{6 - (u_n)^2}\right)} - \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2} \\ &= \left(\frac{9}{6 - (u_n)^2}\right) \times \left(\frac{6 - (u_n)^2}{18 - 3u_n^2 - 9}\right) - \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2} \\ &= \left(\frac{9}{6 - 3(u_n)^2}\right) - \left(\frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{3 - (u_n)^2}\right) - \left(\frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2}\right) \\ &= \left(\frac{3 - (u_n)^2}{3 - (u_n)^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison 1}$$

5) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad ; \quad v_n = v_p + 1(n - p)$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + 1(n - 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = n$$

$$\text{On a encore : } v_n = \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 3n - n(u_n)^2 = (u_n)^2 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (1+n)(u_n)^2 = 3n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (u_n)^2 = \frac{3n}{1+n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \pm \sqrt{\frac{3n}{1+n}} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow u_n = + \sqrt{\frac{3n}{1+n}} \quad \text{car } u_n \geq 0$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n}{n}} = \sqrt{3}$$

### **Solution N° 21 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n > 3$

#### **L'initialisation :**

On a :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 \leq u_n \leq 1$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow \begin{cases} \text{Et } u_n \geq 0 \\ \text{Et } u_n \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \frac{1+u_n^2}{1+u_n} \geq 0 \\ \text{Et } (u_n)^2 \leq u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \frac{1+u_n^2}{1+u_n} \geq 0 \\ \text{Et } 0 \leq 1+(u_n)^2 \leq u_n+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \frac{1+u_n^2}{1+u_n} \geq 0 \\ \text{Et } \frac{1+(u_n)^2}{1+u_n} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1+(u_n)^2}{1+u_n} \leq 1$$

$\Rightarrow Q(n+1)$  est vraie

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1+u_n^2}{1+u_n} = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$$

D'autre part on a ceci :

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{u_n}{1+u_n} - \frac{2}{3} &= \frac{3u_n - 2(1+u_n)}{3(1+u_n)} \\ &= \frac{u_n - 2}{3(1+u_n)} \leq 0 \quad \text{car } u_n \leq 1 < 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{1+u_n} - \frac{2}{3} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{1+u_n} \leq \frac{2}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n} \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

$$\Rightarrow (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

3) 1<sup>ère</sup> Méthode : la méthode descendante

$$\blacksquare (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

$$\Leftrightarrow (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}(1-u_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow (1-u_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 (1-u_{n-2})$$

: : :

$$\Leftrightarrow (1-u_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (1-u_0)$$

$$\Leftrightarrow (1-u_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(1-\frac{1}{2}\right) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (1-u_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

2<sup>ème</sup> Méthode : On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 1-u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $1-u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\blacksquare \text{ On a : } (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

$$\Rightarrow (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow (1-u_{n+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1-u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

4) comme  $0 \leq 1-u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{2}{3} < 1$

Donc d'après le critère de comparaison

On en déduit que  $\lim(1-u_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$$

**Solution N° 22 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare (u_{n+1})^2 - a = \frac{1}{4} \left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)^2 - a$$

$$= \frac{1}{4} \left( (u_n)^2 + \frac{a^2}{(u_n)^2} + 2 \cdot u_n \cdot \frac{a}{u_n} \right) - a$$

$$= \frac{1}{4} \left( (u_n)^2 + \frac{a^2}{(u_n)^2} \right) - \frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{4(u_n)^2} \left( (u_n)^4 + a^2 - \frac{4 \cdot a \cdot u_n^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4(u_n)^2} ((u_n^2)^2 - 2 \cdot u_n^2 \cdot a + a^2)$$

$$= \frac{1}{4(u_n)^2} (u_n^2 - a)^2$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n \geq \sqrt{a}$

### L'initialisation :

On a :  $u_1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left( u_0 + \frac{a}{u_0} \right) - \sqrt{a}$

$$= \frac{u_0}{2} + \frac{a}{2u_0} - \sqrt{a}$$

$$= \frac{u_0^2 + (\sqrt{a})^2 - 2u_0\sqrt{a}}{2u_0}$$

$$= \frac{(u_0 - \sqrt{a})^2}{2u_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_1 - \sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow u_1 \geq \sqrt{a}$$

Donc l'instance  $P(1)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq \sqrt{a}$

■ On a :  $(u_{n+1})^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \geq 0$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 - a \geq 0$$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 \geq a > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{a} \Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \geq \sqrt{a}$

Pour la monotonie de la suite  $(u_n)$  on se donne un entier naturel non nul  $n$  et on procède comme suit :

■  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right) - u_n$

$$= \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(a - u_n)(a + u_n)}{2u_n} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}$$

3)  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^*$

On a aussi  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  et  $u_0 \in \mathbb{R}^+$

La suite  $(u_n)$  est convergente car décroissante et étant minorée par  $\sqrt{a}$  et sa limite  $l \in \mathbb{R}^+$  Donc cette limite  $l$  vérifie l'équation  $f(l) = l$  :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( l + \frac{a}{l} \right) = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{2l^2 - l^2 - a}{2l} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2 - a}{2l} = 0$$

$$\Leftrightarrow (l - \sqrt{a})(l + \sqrt{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Oubien } l = \sqrt{a} \\ \text{Oubien } l = -\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow l = \sqrt{a} \text{ car } l \in \mathbb{R}^+$$

$$4) \text{ On a : } (u_{n+1})^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$

$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2 \cdot (u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}$$

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = (u_n - \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{4(u_{n+1} + \sqrt{a})} \cdot \left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n}\right)^2$$

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq (u_n - \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{4(2\sqrt{a})} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow (u_{n+1} - \sqrt{a}) \leq (u_n - \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{8\sqrt{a}} \cdot (1 + 1)^2$$

$$\Rightarrow (u_{n+1} - \sqrt{a}) \leq (u_n - \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

**La conclusion :**

$$(u_{n+1} - \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (u_n - \sqrt{a})^2$$

5) On a par la méthode descendante :

$$\hookrightarrow (u_2 - \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (u_1 - \sqrt{a})^2$$

$$\hookrightarrow (u_3 - \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (u_2 - \sqrt{a})^2$$

$$\hookrightarrow (u_3 - \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} (u_1 - \sqrt{a})^2\right)^2$$

$$\hookrightarrow (u_3 - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^3 \cdot (u_1 - \sqrt{a})^4$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\hookrightarrow (u_4 - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^7 \cdot (u_1 - \sqrt{a})^8$$

$$\hookrightarrow (u_5 - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{15} \cdot (u_1 - \sqrt{a})^{16}$$

⋮

$$\hookrightarrow (u_n - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}-1} \cdot (u_1 - \sqrt{a})^{2^{n-1}}$$

$$\hookrightarrow (u_n - \sqrt{a}) \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}} \cdot k^{2^{n-1}}$$

$$\hookrightarrow (u_n - \sqrt{a}) \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

### **Solution N° 23 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_n - \frac{3}{4} = \frac{3n-2}{4n+1} - \frac{3}{4} = \frac{12n-8-12n-3}{4(4n+1)}$$

$$= \frac{-11}{4(4n+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n - \frac{3}{4} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est majorée par } \frac{3}{4}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)-2}{4(n+1)+1} - \frac{3n-2}{4n+1}$$

$$= \frac{3n+1}{4n+5} - \frac{3n-2}{4n+1} = \frac{11}{(4n+1)(4n+5)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq -2$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est minorée par } -2$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-2}{4n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 3 - \frac{2}{n} \right)}{n \left( 4 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - \frac{2}{n}}{4 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{3-0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

### **Solution N° 24 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare v_n - 2 = n^2 - 2n + 3 - 2 = n^2 - 2n + 1$$

$$= (n-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \geq 2$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est minorée par } 2$$

2) 1<sup>ère</sup> Méthode :

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 3)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$$

$$\Rightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) : u_n > A$$

$$\Rightarrow \nexists M \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{N} : v_n \leq M$$

Puisque pour  $A = M$  il existe  $N$  à partir duquel l'inégalité  $v_n \leq M$  n'est plus valable.

2<sup>ème</sup> Méthode : (l'absurde)

On suppose que :  $\exists M \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{N} : v_n \leq M$

$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} ; n^2 - 2n + 3 - M \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4(M-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow M < 3 \text{ et } n^2 - 2n + 3 - M \leq 0 ; \forall n$$

$$\Leftrightarrow M < 3 \text{ et } 3 - M \leq 0 \text{ pour } n = 0$$

$$\Leftrightarrow M < 3 \text{ et } M \geq 3 \text{ (contradiction)}$$

Donc ce qu'on a supposé être vrai ne l'est plus (hypothèse du début est à rejeter)

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 3) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{v_n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 1$$

### **Solution N° 25 :**

1) la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $(1 - \alpha)$  et on a  $-1 < 1 - \alpha < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha)^n = 0$$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \left( \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{1 - (1 - \alpha)} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{1}{\alpha} (1 - (1 - \alpha)^{n+1})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} (1 - (1 - \alpha)^{n+1}) = \frac{1}{\alpha}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > 0$

### L'initialisation :

On a :  $u_0 > 0$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 0$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{v_n}{u_n} > 0 \quad \text{car} \quad v_n > 0$$

$$\Rightarrow u_n + \frac{v_n}{u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{v_n}{u_n} - u_n = \frac{v_n}{u_n} > 0$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

4) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on a d'abord :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{v_n}{u_n}$$

Comme  $(u_n)$  est croissante Alors :

$$\Rightarrow u_k > u_0 ; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_k} < \frac{1}{u_0} ; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{v_k}{u_k} < \frac{v_k}{u_0} ; \text{ car } v_k \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{k+1} - u_k < \frac{v_k}{u_0} ; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

$$\Rightarrow u_n - u_0 < \frac{1}{u_0} w_{n-1}$$

$$\Rightarrow (u_n - u_0) \leq \frac{1}{u_0} \lim_{n \rightarrow \infty} (w_{n-1})$$

$$\Rightarrow (u_n - u_0) \leq \frac{1}{u_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{\alpha} \right)$$

$$\Rightarrow (u_n - u_0) \leq \frac{1}{u_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - 0)$$

$$\Rightarrow u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$$

5) la suite  $(u_n)$  est une suite convergente car croissante et étant majorée par le nombre positif  $(u_0 + \frac{1}{\alpha u_0})$

### **Solution N° 26 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 1 \leq u_n \leq 2$

#### **L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 1$  et  $1 \leq 1 \leq 2$   
Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $1 \leq u_n \leq 2$

■  $Q(n)$  est vraie  $\Rightarrow 1 \leq u_n \leq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} u_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} u_n + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} u_n + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2} u_n + 1 \leq 2$$

$\Rightarrow Q(n+1)$  est vraie

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) D'abord  $(u_n)$  est croissante car :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n}{2} \geq 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  converge car croissante et étant majorée par 2

$$\text{Or : } u_{n+1} = f(u_n) ; f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et on a encore  $f(I) \subseteq I ; \forall I \subseteq \mathbb{R}$  Donc la limite  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$  vérifie l'équation  $f(l) = l$ .

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}l + 1 = l \Leftrightarrow l = 2$$

### **Solution N° 27 :**

$$1) u_1 = 3u_0 + 4^0 \Leftrightarrow 5 = 3 \cdot u_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow u_0 = \frac{4}{3}$$

$$u_2 = 3u_1 + 4^1 \Leftrightarrow u_2 = 3 \cdot 5 + 4 = 19$$

$$2) v_n = 4u_n - u_{n+1} = 4u_n - 3u_n - 4^n = u_n - 4^n$$

$$3) \text{ Soit } n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4^{n+1}}{u_n - 4^n}$$

$$= \frac{3u_n + 4^n - 4^{n+1}}{u_n - 4^n}$$

$$= \frac{3u_n - 4^n(-1 + 4)}{u_n - 4^n}$$

$$= \frac{3(u_n - 4^n)}{u_n - 4^n} = 3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = 3 v_n$$

$\Rightarrow (v_n)$  est géométrique de raison 3

4) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot 3^{n-p}$$

$$\forall p \leq n$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \cdot 3^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{3} \times 3^n = 3^{n-1}$$

On a encore :  $u_n = v_n + 4^n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = 3^{n-1} + 4^n$$

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{n-1} = +\infty$  car  $3 > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n-1} + 4^n) = +\infty$$

### **Solution N° 28 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \quad \frac{v_{n+1} - 3}{v_n - 3} = \frac{\sqrt{1 + 24u_{n+1}} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{24}{16}(1 + 4u_n + v_n)} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{16 + 24 + 96u_n + 24v_n}{16}} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sqrt{4(24u_n + 1) + 24v_n + 36} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{2}{4}\sqrt{v_n^2 + 6v_n + 9} - 3}{v_n - 3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(v_n + 3)^2 - 3} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}|v_n + 3| - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(v_n + 3) - 3}{v_n - 3}$$

$$= \left( \frac{\frac{1}{2}v_n - \frac{3}{2}}{v_n - 3} \right) = \frac{\frac{1}{2}(v_n - 3)}{(v_n - 3)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{v_{n+1} - 3}{v_n - 3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad (v_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(v_n - 3)$$

2) Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = v_n - 3$$

$$\text{Comme } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad (v_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(v_n - 3)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$$

$$\Rightarrow (w_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall p \leq n \quad : \quad w_n = w_p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

On prend  $p = 1$  on trouve :

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = w_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = (v_1 - 3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; w_n = (5 - 3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; w_n = 2^{2-n}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = w_n + 3 = 2^{2-n} + 3$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; \sqrt{1 + 24u_n} = 2^{2-n} + 3 > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; 1 + 24u_n = (2^{2-n} + 3)^2$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = \frac{(2^{2-n} + 3)^2 - 1}{24}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\left(\frac{1}{2^{n-1}} + 3\right)^2 - 1}{24} \right)$$

$$= \left( \frac{(0 + 3)^2 - 1}{24} \right) = \frac{1}{3}$$

### Solution N° 29 :

Dans cet exercice on adoptera la définition d'une limite d'une suite numérique :

■ Soit  $\varepsilon > 0$  et on procède comme suit

$$\text{Si } |u_n| < \varepsilon \text{ Alors } \left| \frac{1}{\sqrt{2+n}} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{2+n}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 2+n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2$$

$$\text{Soit } N = E \left[ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2 \right] + 1 \in \mathbb{N}$$

**Récapitulatif :** Soit  $\varepsilon > 0$  et on a :

$$n \geq N \Rightarrow n \geq E \left[ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2 \right] + 1 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow n + 2 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$$

**La conclusion :**

$$(\forall \varepsilon > 0) \left( \exists N = E \left[ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2 \right] + 1 \in \mathbb{N} \right) :$$

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$$

■ Soit  $\varepsilon > 0$  et on procède comme suit

$$\text{Si } |v_n - 3| < \varepsilon \text{ Alors } -\varepsilon < v_n - 3 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{3n+1}{n-1} - 3 < \varepsilon$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{4}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{4} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} + 1$$

$$\text{Soit } N = E\left[\frac{4}{\varepsilon} + 1\right] + 1 \in \mathbb{N}$$

**Récapitulatif** : Soit  $\varepsilon > 0$  et on a :

$$n \geq N \Rightarrow n \geq E\left[\frac{4}{\varepsilon} + 1\right] + 1 > \frac{4}{\varepsilon} + 1$$

$$\Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} + 1$$

$$\Rightarrow n - 1 > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n-1} < \frac{\varepsilon}{4} \quad ; \quad n \geq N > 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{4}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{4}{n-1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3n+1}{n-1} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |v_n - 3| < \varepsilon$$

**La conclusion** :

$$(\forall \varepsilon > 0) \left( \exists N = E\left[\frac{4}{\varepsilon} + 1\right] + 1 \in \mathbb{N} \right) :$$

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - 3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 3$$

■ Soit  $\varepsilon > 0$  et on procède comme suit

$$\text{Si } |u_n| > A \quad \text{Alors } n\sqrt{n} > A$$

$$\Rightarrow n^1 \cdot n^{\frac{1}{2}} > A$$

$$\Rightarrow n^{\frac{3}{2}} > A > 0$$

$$\Rightarrow \left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} > A^{\frac{2}{3}} > 0$$

$$\Rightarrow n > A^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Soit } N = E\left[A^{\frac{2}{3}}\right] + 1 \in \mathbb{N}$$

**Récapitulatif** : Soit  $A > 0$  et on a :

$$n \geq N \Rightarrow n \geq E\left[A^{\frac{2}{3}}\right] + 1 > A^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow n > A^{\frac{2}{3}} > 0$$

$$\Rightarrow n^{\frac{3}{2}} > \left(A^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow n^{\frac{3}{2}} > A$$

$$\Rightarrow n \cdot \sqrt{n} > A$$

$$\Rightarrow w_n > A$$

**La conclusion** :

$$(\forall A > 0) \left( \exists N = E\left[A^{\frac{2}{3}}\right] + 1 \in \mathbb{N} \right) :$$

$$n \geq N \Rightarrow w_n > A$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = +\infty$$

**Solution N° 30 :**

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 5n^2 - 6n + 7)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( 1 - \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{7}{n^3} \right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0 + 0) = +\infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 5n + 2}{4 - n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^3 \left( \frac{4}{n^3} - 1 \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^3} - 1} \right)$$

$$= (0) \times \left( \frac{3 - 0 + 0}{0 - 1} \right) = 0$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^3 - n + 4} - n \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n + 4)^{\frac{1}{3}} - n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( (n^3 - n + 4)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - n^3}{(n^3 - n + 4)^{\frac{2}{3}} + n(n^3 - n + 4)^{\frac{1}{3}} + n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - n}{\left( n^3 \left( 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right) \right)^{\frac{2}{3}} + n \left( n^3 \left( 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right) \right)^{\frac{1}{3}} + n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)^{\frac{2}{3}} + n^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)^{\frac{1}{3}} + n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 1}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{(0 - 0)}{(1 - 0 + 0)^{\frac{2}{3}} + (1 - 0 + 0)^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{0}{3} = 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n - \sqrt[3]{n} + 1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 1 - \frac{1}{n} - n^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0 + 0) = +\infty$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{\frac{2}{3}} - n^{-\frac{1}{3}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \right) = +\infty$$

**Solution N° 31 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 3 \leq u_n < 4$

**L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 3$  et  $3 \leq 3 < 4$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $3 \leq u_n < 4$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow 3 \leq u_n < 4$

$$\Rightarrow 5 \leq u_n + 2 < 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 4 < \frac{24}{u_n + 2} \leq \frac{24}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-24}{5} \leq \frac{-24}{u_n + 2} < -4$$

$$\Rightarrow 8 - \frac{24}{5} \leq 8 - \frac{24}{u_n + 2} < 8 - 4$$

$$\Rightarrow \frac{16}{5} < \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} < 4$$

$$\Rightarrow 3 < \frac{16}{5} \leq u_{n+1} < 4$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 3 \leq u_n < 4$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{8u_n - 8 - u_n^2 - 2u_n}{2 + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{2 + u_n} \\ &= \frac{-(u_n - 4)(u_n - 2)}{2 + u_n} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}$$

Et comme elle est majorée par 4 alors c'est une suite convergente

$$3) \text{ On a : } u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} = f(u_n)$$

$$\text{Avec : } f(x) = \frac{8(x - 1)}{x + 2} ; \forall x \neq \frac{-1}{2}$$

La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$  Donc on peut appliquer le TAF sur tout intervalle  $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Soit l'intervalle  $I = [u_n, 4]$  Alors on applique le TAF on déduit que :

$$\exists c \in ]u_n, 4[ ; \frac{f(4) - f(u_n)}{4 - u_n} = f'(c)$$

$$\Rightarrow 3 < c < 4 \text{ et } \left( \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \right) = \frac{24}{(c + 2)^2}$$

$$\blacksquare c > 3 \Rightarrow (c + 2)^2 > 25$$

$$\Rightarrow \frac{24}{(c + 2)^2} < \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow f'(c) < \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{(4 - u_{n+1})}{(4 - u_n)} < \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow (4 - u_{n+1}) < \frac{24}{25}(4 - u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

**Remarque :** On peut démontrer ce résultat en utilisant la machine récurrence.

4) 1<sup>ère</sup> Méthode : la méthode descendante

$$\blacksquare (4 - u_{n+1}) < \frac{24}{25}(4 - u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\hookrightarrow (4 - u_{n+1}) < \left( \frac{24}{25} \right)^2 (4 - u_{n-1})$$

$$\hookrightarrow (4 - u_{n+1}) < \left( \frac{24}{25} \right)^3 (4 - u_{n-2})$$

⋮

$$\hookrightarrow (4 - u_{n+1}) < \left( \frac{24}{25} \right)^{n+1} (4 - u_0)$$

$$\hookrightarrow (4 - u_{n+1}) < \left(\frac{24}{25}\right)^{n+1}$$

$$D'où : 0 < (4 - u_n) \leq \left(\frac{24}{25}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$Et \text{ comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{24}{25}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{24}{25} < 1$$

Alors d'après le critère de comparaison  
On en déduit que :  $\lim(4 - u_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 4$$

5) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(\frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2}\right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n - 4}\right) \\ &= \left(\frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 4\right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n - 4}\right) \\ &= \frac{4(u_n - 4)}{(u_n + 2)} \times \frac{(u_n + 2)}{6(u_n - 2)} \times \frac{(u_n - 2)}{(u_n - 4)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{3}$$

6) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \leq n ; v_n = v_p \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{u_n - 4}{u_n - 2} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n = v_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{2v_n - 4}{v_n - 1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}\right) = \frac{0 + 4}{0 + 1} = 4$$

$$8) \mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$= v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{2}{3}}\right) = -\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= -3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} 9) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ &= -3(1 - 0) = -3 \end{aligned}$$

### **Solution N° 32 :**

1) Soit la suite  $(u_n)$  définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = x^n ; 0 < x < 1$$

La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= u_0 \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n} x^k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) \\ &= \left( \frac{1 - 0}{1 - x} \right) = \frac{1}{1 - x} \end{aligned}$$

■ Soit  $P_n(x)$  la fonction définie par :

$$\forall x \in ]0,1[ \quad ; \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k = \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)$$

Par passage aux dérivées on trouve :

$$P'_n(x) = \left( \sum_{k=0}^{k=n} x^k \right)' = \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)'$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k x^{k-1} = \frac{-(1-x)(n+1)x^n + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$x \sum_{k=1}^{k=n} k x^{k-1} = \frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + (x - x^{n+2})}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k x^k = \frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + x - x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k x^k = \frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + x - x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Par passage aux limites on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n} k x^k \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + x - x^{n+2}}{(1-x)^2} \right) \end{aligned}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2} = 0$  car  $-1 < x < 1$

Et on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x^{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$

On doit admettre cette dernière limite car son calcul se passe à travers des exponentielles les voici :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx^n &= \frac{1}{\ln x} \lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln x e^{n \ln x}) \\ &= \frac{1}{\ln x} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = n \ln x}} (t e^t) = \frac{1}{\ln x} \times 0^- = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n} k x^k \right) &= \frac{-(1-x)(n+1)0 + x - 0}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \quad ; \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

2) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \begin{cases} u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \\ v_n = u_n + \frac{1}{n!} \end{cases}$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (u_n)$  est strictement croissante

$$v_{n+1} - v_n = \left( u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \right) - \left( u_n + \frac{1}{n!} \right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!} \left( \frac{2}{n+1} - 1 \right) \leq 0 \quad ; \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \geq 0} \text{ est décroissante}$$

On a encore  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$

Ainsi :  $\begin{cases} (u_n) \text{ est strictement } \nearrow \\ (u_n) \text{ est strictement } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}$$

Alors ces deux suites sont convergentes et tendent toutes les deux vers une même limite  $l \in \mathbb{R}$ . Pour en avoir une idée sur cette limite j'introduis le développement suivant :

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1^k}{k!}$$

$$\Rightarrow e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{2}{n!} \right) = e \end{cases}$$

### Solution N° 33 :

On a :  $\forall k \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{k=0}^n 0 \leq \sum_{k=0}^{k=n} u_k \leq \sum_{k=0}^{k=n} \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq S_n \leq \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq S_n \leq 2 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) < 2$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq S_n \leq 2$$

Or on a :  $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{k=n+1} u_k - \sum_{k=0}^{k=n} u_k$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} u_k - \sum_{k=0}^{k=n} u_k + u_{n+1} = u_{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad S_{n+1} \leq S_n$$

$$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

Donc  $(S_n)$  est convergente car croissante et étant majorée par 2.

### Solution N° 34 :

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \quad a_{n+1} - a_n = S_{2n+4} - S_{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n+4} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2n+4} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+5}}{2n+4} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; a_{n+1} > a_n$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante

$$\blacksquare b_{n+1} - b_n = S_{2n+3} - S_{2n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \sum_{k=2n+2}^{k=2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3}$$

$$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; b_{n+1} < b_n$$

$\Rightarrow (b_n)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante

$$\blacksquare b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Récapitulation :

$$\begin{cases} (a_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement croissante} \\ (b_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes}$$

Donc ces deux limites convergent vers une même limite réelle  $l$

2) Quand  $n$  tend vers l'infini alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1}) = l$$

Vous aurez l'occasion de montrer que cette limite  $l$  n'est autre que  $\ln 2$  et ce serait exactement dans le cours des séries numériques.

### Solution N° 35 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n \geq \sqrt{n}$

#### L'initialisation :

$$\text{On a : } u_1 = 1 \geq \sqrt{1}$$

Donc l'instance  $Q(1)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq \sqrt{n}$

$$\blacksquare u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\blacksquare n > 0 \Rightarrow n + 1 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow (n+1) + \left(\frac{1}{n+1}\right) - 2 < n$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2 < (\sqrt{n})^2$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \geq \sqrt{n}$

$$2) \text{ Comme } u_n \geq \sqrt{n} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Et comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :  $\lim(u_n) = +\infty$   
C'est à dire que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est divergente

### **Solution N° 36 :**

1) On a  $P_n(x)$  est continue sur  $[0,1] \subset \mathbb{R}$   
Car c'est un polynôme et on a encore :

$$\begin{cases} P_n(0) = -1 < 0 \\ P_n(1) = n - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow P_n(0) \times P_n(1) < 0$$

Donc d'après le TVI on déduit que :

$$\exists \alpha_n \in [0,1] : P_n(\alpha_n) = 0$$

$$\text{Et comme : } \begin{cases} \text{Et } P_n(0) = -1 \neq 0 \\ \text{Et } P_n(1) = n - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Et comme } P_n \text{ est strict } \nearrow \text{ sur } [0,1] \\ P_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 1 > 0$$

Alors on peut en déduire que :

$$\exists! \alpha_n \in ]0,1[ : P_n(\alpha_n) = 0 ; \forall n \geq 2$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \alpha_n \in ]0,1[ \Rightarrow \alpha_n > 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} > 0 \Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} + 0 > 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} + P_n(\alpha_n) > 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_n)^k > 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow -1 + \sum_{k=1}^{k=n+1} (\alpha_n)^k > 0$$

$$\Rightarrow P_{n+1}(\alpha_n) > 0$$

$$\Rightarrow P_{n+1}(\alpha_n) > \underbrace{P_{n+1}(\alpha_{n+1})}_0$$

$\Rightarrow \alpha_n > \alpha_{n+1}$  car  $P_{n+1}$  est une bijection ↗

$\Rightarrow (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante

La suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0

3) On aurait besoin de déterminer la valeur exacte de  $\alpha_2$  on a :

$$P_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} ; \Delta = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in ]0,1[$$

Voici pour quoi  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in ]0,1[$

$$1 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{5} < 3$$

$$\Rightarrow 0 < -1 + \sqrt{5} < 2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in ]0,1[$$

$$4) \text{ On a : } P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{k=n} x^k$$

$$\Leftrightarrow P_n(x) = -1 + \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) x^1 ; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{x-1}{1-x} + \frac{x-x^{n+1}}{1-x} ; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{2x-1-x^{n+1}}{1-x} ; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{x^{n+1}-2x+1}{x-1} ; x \neq 1$$

5) Soit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  et on procède ainsi :

$$P_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1}{\alpha_n - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0 ; \alpha_n \neq 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0 ; \forall n \geq 2$$

$$6) \text{ On a : } P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1} ; x \neq 1$$

$$\Rightarrow P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\Rightarrow P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-\left(\frac{1}{2}\right)} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

$$\Rightarrow P_n\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow P_n\left(\frac{1}{2}\right) < P_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow P_n^{-1}\left(P_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) < P_n^{-1}(P_n(\alpha_n)) ; P_n^{-1} \nearrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \alpha_n \Rightarrow 1 < 2\alpha_n$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < 2\alpha_n - 1} \rightsquigarrow (1)$$

Or on a :  $n \geq 2 \Rightarrow \alpha_n \leq \alpha_2$

Car la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  est décroissante

$$\Rightarrow \alpha_n \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ car } \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha_n \leq -1 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\alpha_n - 1 \leq -2 + \sqrt{5}} \rightsquigarrow (2)$$

Comparons  $\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$  et  $(-2 + \sqrt{5})$

$$\text{On a } \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) - (-2 + \sqrt{5}) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$9 > 5 \Rightarrow \sqrt{9} > \sqrt{5} \Rightarrow 3 > \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 3 - \sqrt{5} > 0 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) - (-2 + \sqrt{5}) > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) > (-2 + \sqrt{5})} \rightsquigarrow (3)$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \boxed{2\alpha_n - 1 < \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)} (4)$$

$$(1) \text{ et } (4) \Rightarrow 0 < 2\alpha_n - 1 < \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2 ; \quad \forall n \geq 2$$

7) On pose  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = l$

On a :  $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \alpha_n < \frac{\alpha_2 + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \alpha_n < \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < (\alpha_n)^{n+1} < \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^{n+1}$$

On remarque que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^{n+1} = 0$$

$$\text{Car } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ et } -1 < \frac{\sqrt{5} + 1}{4} < 1$$

Donc d'après le critère de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^{n+1} = 0$$

$$\text{On a encore : } (\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$$

Par passage aux limites on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^{n+1} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 2l + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = \frac{1}{2}$$

**Solution N° 37 :**

1) c'est un calcul simple à réaliser :

$$2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1} = u_n$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare n \geq 0 \Rightarrow 2n+3 > 0 \text{ et } n+1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2n+3}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n > 0} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{n+1} \leq 3$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n \leq 3} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 0 < u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est bornée}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1}$$

$$= \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+5)(n+1) - (n+2)(2n+3)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}$$

**Autre Méthode :**

$$\blacksquare n \geq 0 \Rightarrow n+2 > n+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{n+2} < 2 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}$$

4) d'abord  $(u_n)$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0 et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 2 + \frac{3}{n} \right)}{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 2 + \frac{3}{n} \right)}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

**Solution N° 38 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare n \geq 1 \Rightarrow \boxed{\sqrt{n} \geq 1} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 > 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n+1} \geq 1} \rightsquigarrow (2)$$

$$\blacksquare (1) + (2) \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$$

$$\text{Car : } n < n+2 \Rightarrow \sqrt{n} - \sqrt{n+2} < 0$$

3) D'abord  $(u_n)$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0 et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Solution N° 39 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > 3$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 6 > 3$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 3$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{u_n} < 1$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{3}{u_n} > 4 - 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 3$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 3$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{3}{u_n} - u_n$$

$$= \frac{4u_n - 3 - u_n^2}{u_n}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{-(u_n - 3)(u_n - 1)}{u_n} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} < u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante

3) comme  $(u_n)$  est décroissante Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < u_{n-1} < u_{n-2} < \dots < u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n < u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n < 6$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est majorée par } 6$$

4) la suite  $(u_n)$  est convergente car décroissante et étant minorée par 3. C'est-à-dire  $u_n > 3$ .

$$5) u_{n+1} = f(u_n) ; f(x) = 4 - \frac{3}{x}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^*$

Et on a  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  et  $u_0 = 6 \in \mathbb{R}^+$

On a vu que  $(u_n)$  est convergente vers une limite réelle  $l \in \mathbb{R}^+$  car  $3 < u_n < 6$   
Donc  $l$  vérifie l'équation  $f(l) = l$ .

$$\Leftrightarrow l = 4 - \frac{3}{l} ; l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow l - 4 + \frac{3}{l} = 0 ; l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2 - 4l + 3}{l} = 0 ; l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (l - 3)(l - 1) = 0 ; l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \{3; 1\}$$

$$\Leftrightarrow l = 3 \text{ car } 3 \leq l \leq 6$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 3$$

### Solution N° 40 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : \frac{1}{4} < u_n < 9$

#### L'initialisation :

On a :  $\frac{1}{4} < u_0 = 4 < 9$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $\frac{1}{4} < u_n < 9$ .

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow \frac{1}{4} < u_n < 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{u_n} < 3$$

$$\Rightarrow \frac{13}{2} < 6 + \sqrt{u_n} < 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{13}{2} < u_{n+1} < 9$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{1}{4} < u_n < 9$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = 6 + \sqrt{u_n} - u_n$$

On pose :  $\varphi(x) = 6 + \sqrt{x} - x$  ;  $\forall x \geq 0$

La fonction  $\varphi$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  car c'est la somme de fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}^+$

$$\varphi'(x) = (6 + \sqrt{x} - x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_*^+$$

$$\blacksquare x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) \leq 0$$

$\Rightarrow \varphi$  est décroissante sur  $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

On a :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $\frac{1}{4} < u_n < 9$

$\Rightarrow \varphi(9) < \varphi(u_n) < \varphi(1/4)$  ;  $\varphi \searrow \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

$$\Rightarrow \varphi(9) < \varphi(u_n)$$

$$\Rightarrow 9 < 6 + \sqrt{u_n} - u_n$$

$$\Rightarrow 0 < 9 < 6 + \sqrt{u_n} - u_n$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} - u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) On a :  $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\text{Avec } f(x) = 6 + \sqrt{x} ; \quad \forall x \geq 0$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

et on a :  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$

et encore que :  $u_0 = 4 \in \mathbb{R}^+$

la suite  $(u_n)$  est convergente car croissante et étant majorée par 9 et soit  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$  alors  $l \in \mathbb{R}^+$  vérifie l'équation :

$$\Leftrightarrow 6 + \sqrt{l} = l$$

$$\Leftrightarrow 6 + \sqrt{l} - l = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(l) = \varphi(9)$$

$$\Leftrightarrow l = 9 \text{ car } \varphi \text{ est bijective}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 9}$$

### **Solution N° 41 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(n)$  définie ainsi :  $R(n) : 0 < u_n < 1$

#### **L'initialisation :**

On a :  $0 < u_1 = \frac{1}{2} < 1$

Donc l'instance  $R(1)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $R(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n < 1$

$$\blacksquare R(n) \text{ est vraie } \Rightarrow 0 < u_n < 1$$

$$\Rightarrow 0 < n u_n < n ; \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 < n u_n + 1 < n + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n u_n + 1} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{n u_n + 1}{n+1} < \frac{n u_n + 1}{n u_n + 1} < \frac{n u_n + 1}{1}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow R(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} R(1) \text{ est vraie} \\ R(n) \Rightarrow R(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < u_n < 1$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \frac{n u_n + 1}{n+1} - u_n$$

$$= \frac{n u_n + 1 - n u_n - u_n}{n+1}$$

$$= \frac{1 - u_n}{n+1} > 0 \quad \text{car } u_n < 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement croissante}$$

3) Soit  $n \geq 1$  et on procède comme suit

$$\blacksquare u_{n+1} - 1 = \frac{n u_n + 1}{n+1} - 1 = \frac{n u_n + 1 - n - 1}{n+1}$$

$$= \frac{n u_n - n}{n+1} = \left( \frac{n}{n+1} \right) (u_n - 1)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{n}{n+1}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) d'après cette dernière formule on a :

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u_2 - 1}{u_1 - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u_3 - 1}{u_2 - 1} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u_4 - 1}{u_3 - 1} \right) = \frac{3}{4}$$

$\vdots$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u_n - 1}{u_{n-1} - 1} \right) = \frac{n-1}{n}$$

On multiplie ces égalités côte à côte on obtient par la suite :

$$\frac{(u_2 - 1)(u_3 - 1)(u_4 - 1) \cdots (u_n - 1)}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)(u_3 - 1) \cdots (u_{n-1} - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}$$

En prenant en considération des facteurs qui vont disparaître par le processus de réduction On obtient alors

$$\frac{u_n - 1}{u_1 - 1} = \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_n - 1}{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow u_n - 1 = \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{n} \right)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1}{2n} + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2n} + 1 \right) = 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Solution N° 42 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 0 < u_n < \frac{1}{4}$

**L'initialisation :**

On a :  $0 < u_1 = \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

Donc l'instance  $Q(1)$  est vraie.

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n < \frac{1}{4}$

$$\blacksquare \quad Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4} < u_n + \frac{3}{4} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < u_n \left( u_n + \frac{3}{4} \right) < 1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < (u_n)^2 + \frac{3}{4}(u_n) < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < u_n < \frac{1}{4}$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \quad u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 + \frac{3}{4}u_n - u_n$$

$$= (u_n)^2 + \frac{1}{4}u_n$$

$$= u_n \left( u_n - \frac{1}{4} \right) < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_n \text{ est strictement décroissante}$$

3) On a :  $\forall n \geq 1 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$

$$\text{Avec : } f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$  car c'est un polynôme à coefficients réels. On a aussi  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  et c'est très facile à la démontrer en remarquant que :  $0 < u_n < \frac{1}{4}$  et  $u_n \in \mathbb{R}^+$

$$\text{On a aussi : } u_1 = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}^+$$

On a encore  $(u_n)$  converge car décroissante et étant minorée par 0.

$$\text{Soit } l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$$

$$\text{On a } l \in \mathbb{R}^+ \text{ car } 0 < u_n < \frac{1}{4}$$

Donc  $l$  vérifie l'équation  $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow l^2 + \frac{3}{4}l = l$$

$$\Leftrightarrow l^2 + \frac{3}{4}l - l = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 + \frac{1}{4}l = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow l\left(l - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$$

$$\Leftrightarrow l = 0 \text{ car } (u_n) \text{ est } \searrow$$

### **Solution N° 43 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n \geq \sqrt{3}$

#### **L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 2 \geq \sqrt{3}$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq \sqrt{3}$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{(u_n)^2}{3} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{(u_n)^2}{3} + 2 \geq 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

### **La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq \sqrt{3}$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} - u_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2}\right)^2 - (u_n)^2}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n}$$

$$= \frac{\frac{(u_n)^2}{3} + 2 - (u_n)^2}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(3 - u_n^2)}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

3) On a :  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3} + 2} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$  car c'est une composition bien définie de deux fonctions sur  $\mathbb{R}^+$ .

On a aussi  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  facile à démontrer car  $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; f(x) \in \mathbb{R}^+$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente car décroissante et étant minorée par  $\sqrt{3}$  et sa limite  $l \in \mathbb{R}^+$  car  $u_n \geq \sqrt{3} ; \forall n \in \mathbb{N}$

On a encore  $u_0 = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}^+$

Donc la limite  $l = \lim(u_n)$  vérifie l'équation :  $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{l^2}{3} + 2} = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2}{3} + 2 = l^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - 2l^2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(3 - l^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - l^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow l = +\sqrt{3} \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \sqrt{3}$$

### Solution N° 44 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 1 \leq u_n < 2$

#### L'initialisation :

On a :  $1 \leq u_0 = 1 < 2$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $1 \leq u_n < 2$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 1 \leq u_n < 2$$

$$\Rightarrow 3 \leq u_n + 2 < 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n < 2$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{2 + u_n} - u_n)(\sqrt{2 + u_n} + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{2 + u_n})^2 - (u_n)^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

$$= \frac{2 + u_n - (u_n)^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$\Rightarrow (u_n)$  est strictement croissante

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - 2 = \sqrt{2 + u_n} - 2$$

$$= \frac{(\sqrt{2 + u_n} - 2)(\sqrt{2 + u_n} + 2)}{\sqrt{2 + u_n} + 2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2 + u_n})^2 - 2^2}{\sqrt{2 + u_n} + 2}$$

$$= \frac{u_n - 2}{\sqrt{2 + u_n} + 2}$$

$$\Rightarrow (u_{n+1} - 2) = \frac{1}{\sqrt{2 + u_n} + 2} (u_n - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{(u_{n+1} - 2)}{(u_n - 2)} = \frac{1}{\sqrt{2 + u_n} + 2} ; u_n \neq 2$$

$$\blacksquare \sqrt{2 + u_n} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2 + u_n} + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 + u_n} + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 - u_{n+1}}{2 - u_n} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (2 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(2 - u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) 1<sup>ère</sup> Méthode : la méthode descendante

$$\text{On a : } (2 - u_n) \leq \frac{1}{2}(2 - u_0)$$

$$\hookrightarrow (2 - u_2) \leq \frac{1}{2}(2 - u_1) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2 - u_0)$$

$$\hookrightarrow (2 - u_3) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2 - u_0)$$

$\vdots$

$$\hookrightarrow (2 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - 1)$$

$$\Rightarrow 0 < (2 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

2<sup>ème</sup> Méthode : la récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } 0 < u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(2 - u_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(2 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < 2 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) On a  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec :

$$f(x) = \sqrt{2+x} ; \forall x \geq -2$$

On a  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset ]-2, +\infty[$   
Car c'est une composition bien définie de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}^+$ .

On a aussi  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  facile à démontrer car  $\forall x \geq 0 ; f(x) \geq 0$

On a aussi :  $u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$

Et on finalement  $(u_n)$  est une suite convergente car croissante et étant majorée par 2 et sa limite  $l \in \mathbb{R}^+$

Donc on en déduite que  $l$  vérifie l'équation :  $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+l} = l$$

$$\Leftrightarrow 2+l = l^2$$

$$\Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (l-2)(l+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \{2; -1\}$$

$$\Leftrightarrow l = 2 \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 2$$

### Solution N° 45 :

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare (2 - u_{n+1}) &= 2 - \frac{3u_n^2 + 2}{3u_n + 1} \\ &= \frac{6u_n + 2 - 3u_n^2 - 2}{3u_n + 1} \\ &= \frac{6u_n - 3u_n^2}{3u_n + 1} \\ &= \left(\frac{3u_n}{3u_n + 1}\right)(2 - u_n) \end{aligned}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 0 < u_n < 2$

### L'initialisation :

On a :  $0 < u_1 = 1 < 2$

Donc l'instance  $Q(1)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n < 2$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n < 2$$

$$\Rightarrow u_n > 0 \text{ et } u_n < 2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{3u_n}{1+3u_n} > 0 \quad \text{et} \quad 2 - u_n > 0$$

$$\text{et} \quad \frac{3u_n^2 + 2}{3u_n + 1} > 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{3u_n}{1+3u_n} \right) (2 - u_n) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{3u_n^2 + 2}{3u_n + 1} > 0$$

$$\Rightarrow (2 - u_{n+1}) > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < u_n < 2$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \quad \frac{3u_n}{1+3u_n} - \frac{6}{7} = \frac{21u_n - 6(1+3u_n)}{7(1+3u_n)}$$

$$= \frac{3u_n - 6}{7(1+3u_n)} = \frac{3(u_n - 2)}{7(1+3u_n)} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{3u_n}{1+3u_n} - \frac{6}{7} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$4) \text{ On a : } (2 - u_{n+1}) = \left( \frac{3u_n}{3u_n + 1} \right) (2 - u_n)$$

$$\text{Et on a : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{3u_n}{1+3u_n} (2 - u_n) < \frac{6}{7} (2 - u_n)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; (2 - u_{n+1}) < \frac{6}{7} (2 - u_n)$$

Et par la méthode descendante on a :

$$\hookrightarrow (2 - u_2) < \frac{6}{7} (2 - u_1)$$

$$\hookrightarrow (2 - u_3) < \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} (2 - u_1)$$

⋮

$$\hookrightarrow (2 - u_n) < \left( \frac{6}{7} \right)^{n-1} (2 - u_1)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < 2 - u_n \leq \left( \frac{6}{7} \right)^{n-1}$$

### Autre Méthode : la récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(n)$  définie ainsi :  $R(n) : 0 < 2 - u_n \leq \left( \frac{6}{7} \right)^{n-1}$

#### L'initialisation :

$$\text{On a : } 0 < 2 - u_1 \leq \left( \frac{6}{7} \right)^{1-1}$$

Donc l'instance  $R(1)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $R(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < 2 - u_n \leq \left( \frac{6}{7} \right)^{n-1}$

$$\blacksquare \quad R(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < 2 - u_n \leq \left( \frac{6}{7} \right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{6}{7}(2 - u_n) \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < 2 - u_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - u_n) \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < 2 - u_{n+1} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$\Rightarrow R(n+1)$  est vraie

### La conclusion :

$$\begin{cases} R(1) \text{ est vraie} \\ R(n) \Rightarrow R(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

5) comme :  $0 < (2 - u_n) \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} = 0$  car  $-1 < \frac{6}{7} < 1$

Alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$

### Solution N° 46 :

1) calcul de quelques termes de la suite

| $u_1$         | $u_2$         | $u_3$         | $u_4$         |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ |

$$2) \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$3) u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = \frac{n}{n+1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{1+0} = 1$$

### Solution N° 47 :

1) On peut remarquer facilement que :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)} \\ &= (\sqrt{n})^2 - 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + (\sqrt{n+1})^2 \\ &= (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{2k+1 - 2\sqrt{k(k+1)}}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} |\sqrt{k} - \sqrt{k+1}|$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{S}_n = \sqrt{n+1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt{n} - \sqrt{n+1}|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0$$

### **Solution N° 48 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit

$$u_{n+1} - u_n = (-2(n+2)^2 + 3) - (-2n^2 + 3)$$

$$= -2(n+1)^2 + 2n^2 = -4n - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} < u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^2 + 3) = -\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### **Solution N° 49 :**

1) calcul de quelques termes de la suite

| $u_1$ | $u_2$         | $u_3$          |
|-------|---------------|----------------|
| 1     | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{6}$ |

2) soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} > u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante

3) soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède ainsi :

$$n - \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = n - \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{k-1}{k} \right)$$

$$= n - \sum_{k=1}^{k=n} \left( 1 - \frac{1}{k} \right)$$

$$= n - \sum_{k=1}^{k=n} 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$$

$$= n - n + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = u_n$$

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(n)$  définie ainsi :  $R(n) : (n+1)u_n - n = \mathcal{S}_n$

### **L'initialisation :**

$$\text{On a : } 1 = (1+1)u_1 - 1$$

Donc l'instance  $R(1)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $R(n)$  soit vraie. C-à-d  $\mathcal{S}_n = (n+1)u_n - n$

$$\blacksquare R(n) \text{ est vraie} \Rightarrow \mathcal{S}_n = (n+1)u_n - n$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_n + u_{n+1} = nu_n + u_n - n + u_{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{n+1} = nu_n + u_n - n + u_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{n+1} = (n+2)u_n + \frac{1}{n+1} - n$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{n+1} = (n+2)u_n + \frac{1-n^2-n}{n+1} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare \text{ Or on a : } (n+2)u_{n+1} - (n+1)$$

$$= (n+2) \left( u_n + \frac{1}{n+1} \right) - (n+1)$$

$$= (n+2)u_n + \frac{n+2}{n+1} - (n+1)$$

$$= (n+2)u_n + \frac{(n+2) - (n+1)^2}{n+1}$$

$$= (n+2)u_n + \frac{1-n^2-n}{n+1} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \mathcal{S}_{n+1} = (n+2)u_{n+1} - (n+1)$$

$$\Rightarrow R(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} R(1) \text{ est vraie} \\ R(n) \Rightarrow R(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \mathcal{S}_n = (n+1)u_n - n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Solution N° 50 :**

1) calcul de quelques termes de la suite

| $u_0$         | $u_1$         | $u_2$           |
|---------------|---------------|-----------------|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{40}{41}$ |

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 0 < u_n < 1$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } 0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n < 1$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n < 1$$

$$\Rightarrow 2u_n > 0 \text{ et } 1 + (u_n)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{1 + (u_n)^2} > 0 \rightsquigarrow (1)$$

$$\text{Or on a : } \frac{2u_n}{1 + (u_n)^2} - 1 = \frac{2u_n - 1 - (u_n)^2}{1 + (u_n)^2}$$

$$= \frac{-(u_n - 1)^2}{1 + (u_n)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{1 + (u_n)^2} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{1 + (u_n)^2} < 1 \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 0 < \frac{2u_n}{1 + (u_n)^2} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$\Rightarrow P(n+1)$  est vraie

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < 1$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{1 + (u_n)^2} - u_n \\ &= u_n \left( \frac{2}{1 + (u_n)^2} - 1 \right) \\ &= u_n \left( \frac{2 - 1 - (u_n)^2}{1 + (u_n)^2} \right) \\ &= u_n \left( \frac{1 - (u_n)^2}{1 + (u_n)^2} \right) \\ &= \frac{u_n(1 - u_n)(1 + u_n)}{1 + (u_n)^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} > u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

4) comme  $(u_n)$  est strictement croissante

Alors :  $\forall n \geq 0 ; u_n \geq u_0$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq \frac{1}{2}$$

5) On a :  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$  car c'est le quotient de deux fonctions bien définies et continues sur  $\mathbb{R}^+$ . En plus On a  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  facile à démontrer car  $\forall x \geq 0 ; \frac{2x}{1+x^2} \geq 0$

On a encore  $u_0 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$

Et on a la suite  $(u_n)$  est convergente car croissante et étant majorée par 1 et sa limite  $l \in \mathbb{R}^+$  car  $0 < u_n < 1$

Donc la limite  $l$  vérifie :  $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow \frac{2l}{1+l^2} = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{2l}{1+l^2} - l = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{l(1-l)(1+l)}{1+l^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \{0; 1; -1\}$$

$$\Leftrightarrow l \in \{0; 1\} \text{ car } l \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow l = 1 \text{ car } (u_n) \text{ est } \nearrow$$

**Solution N° 51 :**

$$1) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left( \frac{3^{n+1}}{n+1} \right) \times \left( \frac{n}{3^n} \right) = \frac{3n}{n+1}$$

$$2) \text{ On a : } \left( \frac{3n}{n+1} \right) - 1 = \frac{2n-1}{n+1}$$

On remarque que :  $\forall n \geq 1 ; \frac{2n-1}{n+1} > 0$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 ; \frac{3n}{n+1} > 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 ; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 ; u_{n+1} > u_n > 0$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement croissante}$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 3^n > n^2$

### L'initialisation :

$$\text{On a : } 3^2 > 2^2$$

Donc l'instance  $P(2)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \geq 2$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $3^n > n^2$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 3^n > n^2$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} > 3n^2$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} - (n+1)^2 > 3n^2 - (n+1)^2$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} - (n+1)^2 > 3n^2 - 2n - 1$$

$$3^{n+1} - (n+1)^2 > 2 \left( n - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \left( n - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\blacksquare n \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} n - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \geq 2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ n - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \geq 2 - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \geq \frac{3-\sqrt{3}}{2} > 0 \\ n - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \left( n - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \left( n - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) > 0$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} - (n+1)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} > (n+1)^2$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(2) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; 3^n > n^2$$

$$4) \blacksquare \forall n \geq 2 ; 3^n > n^2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2 ; \frac{3^n}{n} > \frac{n^2}{n} ; \text{ car } n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2 ; u_n > n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

### Solution N° 52 :

1) on a d'après la définition de la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_1 - u_0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) On a :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 2$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 2 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison 2

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{matrix} ; u_n = u_p + 2(n - p)$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_0 + 2(n - 0) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2n + 1 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2n) = +\infty$

### **Solution N° 53 :**

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 6n^4}{2n^2 + 5} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left( \frac{3}{n^2} - 6 \right)}{n^2 \left( 2 + \frac{5}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{3}{n^2} - 6}{2 + \frac{5}{n^2}} \right) n^2$$

$$= \left( \frac{0 - 6}{2 + 0} \right) (+\infty) = (-3)(+\infty) = -\infty$$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Arctan}(n + 1) - \text{Arctan}(n))$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arctan}(n + 1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arctan}(n)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n+1)^{\frac{1}{3}} - (n-1)^{\frac{1}{3}} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( (n+1)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - \left( (n-1)^{\frac{1}{3}} \right)^3}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n^2-1)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - (n-1)}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n^2-1)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n^2-1)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - 8n^2 + 5n^3}{7n^3 - 3} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left( \frac{2}{n^3} - \frac{8}{n} + 5 \right)}{n^3 \left( 7 - \frac{3}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2}{n^3} - \frac{8}{n} + 5}{7 - \frac{3}{n^3}} \right)$$

$$= \frac{0 - 0 + 5}{7 - 0} = \frac{5}{7}$$

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arctan}(\sqrt[3]{n+6})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arctan} \left( (n+6)^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m=(n+6)^{\frac{1}{3}}}} \text{Arctan}(m) = \frac{\pi}{2}$$

6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n - 1} - n)(\sqrt{n^2 + n - 1} + n)}{(\sqrt{n^2 + n - 1} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n - 1})^2 - n^2}{(\sqrt{n^2 + n - 1} + n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n - 1} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n - 1} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{|n| \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + 1\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + 1} \right) \\
&= \left( \frac{1 - 0}{\sqrt{1 + 0 - 0} + 1} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**Solution N° 54 :**

1) Rappel :  $\forall n \in \mathbb{R} ; |\cos x| < 1$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad |u_n| &= \left| \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{|\sqrt{n}|} \cdot |\cos(3n)| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot |\cos(3n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 1 \\
\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_n| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$2) \text{ comme : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Et comme } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :  $\lim(u_n) = 0$

**Solution N° 55 :**

$$\begin{aligned}
1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2} \right)^n + \left( \frac{3}{2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2} \right)^n + \lim_n \left( \frac{3}{2} \right)^n \\
&= 0 + (+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-5}{3} \right)^n + \left( \frac{2}{9} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-5}{3} \right)^n + \lim_n \left( \frac{2}{9} \right)^n \\
&= \text{ n' existe pas car } \frac{-5}{3} < -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7^n - 5^n}{3^n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n \left(1 - \frac{5^n}{7^n}\right)}{3^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{3} \right)^n \cdot \left( 1 - \left( \frac{5}{7} \right)^n \right) \\
&= (+\infty)(1 - 0) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{7}{3} \right)^n - 2022^n \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2022^n \left( \left( \frac{7}{3 \times 2022} \right)^n - 1 \right) \\
&= (+\infty)(0 - 1) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[5]{2^n} - \sqrt[3]{2^n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{\frac{n}{5}} - 2^{\frac{n}{3}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n}{3}} \left( 2^{\frac{-2n}{15}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^n \times \left(\left(2^{\frac{-2}{15}}\right)^n - 1\right)$$

$$= (+\infty) \times (0 - 1) = -\infty$$

$$\text{Car } 2^{\frac{1}{3}} > 1 \quad \text{et} \quad -1 < 2^{\frac{-2}{15}} < 1$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)}{3^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)$$

$$= 0(0 + 1) = 0$$

### Solution N° 56 :

$$1) \text{ d'abord : } \forall n \in \mathbb{N} ; -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\text{Car : } \forall n \in \mathbb{N} ; (-1)^n = \pm 1$$

$$\Rightarrow n - 1 \leq n + (-1)^n \leq 1 + n ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1} ; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1} ; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1} ; \forall n \geq 2$$

$$2) \text{ comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right) = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 3) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$$

### Remarque :

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{1}{+\infty + 0} = 0$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

### Solution N° 57 :

1) On a  $(u_n)$  est  $\nearrow$  et  $(v_n)$  est  $\searrow$

$$\text{Car : } u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{n+3} - \frac{2n}{n+2}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+2) - 2n(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{4}{(n+2)(n+3)} > 0$$

$$\text{Et : } v_{n+1} - v_n = 2 + \frac{1}{(n+1)!} - 2 - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{n! - (n+1)!}{n! (n+1)!} = \frac{n! - (n+1)n!}{n! (n+1)!}$$

$$= \frac{n!}{n! (n+1)!} (1 - (n+1))$$

$$= \frac{-n}{(n+1)!} < 0$$

On a encore la chose suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{n!} - \frac{2n}{n+2} \right) = 0$$

La conclusion :  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes

2) on a  $(u_n)$  est  $\nearrow$  et  $(v_n)$  est  $\searrow$  car :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left( 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) + \frac{1}{(n+1)!} \\ &\quad - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \end{aligned}$$

Et on a encore :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} \\ &\quad - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n \cdot n!} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes

3) on a  $(u_n)$  est  $\nearrow$  et  $(v_n)$  est  $\searrow$  car :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Et encore que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - u_n - \frac{1}{3n^2} \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\ &= \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\ &= \frac{3 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2(1-n)}{3n^2(n+1)^2} \leq 0 \quad ; \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Et on a encore :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n^2} = 0$$

Donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes

**Solution N° 58 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n = u_{n+2} + u_{n+1} - u_{n+1} - u_n$$

$$= 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} - u_{n+1} - u_n$$

$$= 7u_{n+1} + 8u_n - u_n$$

$$= 7u_{n+1} + 7u_n$$

$$= 7(u_{n+1} + u_n) = 7\mathcal{S}_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n = 7\mathcal{S}_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{S}_{n+1} = 8\mathcal{S}_n$$

$\Rightarrow (\mathcal{S}_n)$  est géométrique de raison 8

$$\Rightarrow \begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} ; \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_p \cdot 8^{n-p}$$

On prend  $p = 0$  on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_0 \cdot 8^n$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{S}_n = 2 \cdot 8^n = 2^{3n+1}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$w_n = v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1}u_{n+1} - (-1)^n u_n$$

$$= -(-1)^n \cdot u_{n+1} - (-1)^n \cdot u_n$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot u_n$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (u_{n+1} + u_n)$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \mathcal{S}_n$$

3) On a :  $\forall n \in \mathbb{N} ; w_n = v_{n+1} - v_n$

$$\Leftrightarrow w_0 = v_1 - v_0$$

$$\Leftrightarrow w_1 = v_2 - v_1$$

$$\Leftrightarrow w_2 = v_3 - v_2$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\Leftrightarrow w_{n-1} = v_n - v_{n-1}$$

On effectue la somme entre ces égalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui vont disparaître on trouve :

$$w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = v_n - v_0$$

$$\Leftrightarrow w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = v_n - 0$$

$$\Leftrightarrow w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = (-1)^n \cdot u_n$$

4) d'abord on a :  $\forall k \in \mathbb{N} ; w_k = (-1)^{k+1} \cdot \mathcal{S}_k$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} ; w_k = (-1)^{k+1} \cdot 2^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} ; w_k = (-1)^{k+1} \cdot 2^{3k+1} \cdot (-1)^{2k}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} ; w_k = (-1)^{3k+1} \cdot 2^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} ; w_k = (-2)^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \cdot u_n = -2 \sum_{k=0}^{n-1} (-8)^k$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \cdot u_n = -2 \left( \frac{1 - (-8)^{n-1-0+1}}{1 - (-8)} \right)$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \cdot u_n = -2 \left( \frac{1 - (-8)^n}{9} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2}{9} \left( \frac{1}{(-1)^n} - \frac{(-8)^n}{(-1)^n} \right)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2}{9} ((-1)^n - 8^n)$$

Et on a aussi :  $v_n = (-1)^n u_n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{-2(-1)^n}{9} ((-1)^n - 8^n)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{-2}{9} (1 - (-1)^n \cdot 8^n)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{-2}{9} (1 - (-8)^n)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{9} \left( \frac{(-1)^n}{2^n} - \frac{8^n}{2^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{9} \left( \left( \frac{-1}{2} \right)^n - 4^n \right)$$

$$= \frac{-2}{9} (0 - (+\infty)) = +\infty$$

### Solution N° 59 :

1) Calcul de quelques termes de la suite

| $u_0$ | $u_1$         | $u_2$         | $u_3$           |
|-------|---------------|---------------|-----------------|
| 1     | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{17}{12}$ |

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

### L'initialisation :

On a :  $1 \leq u_0 = 1 \leq \frac{3}{2}$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow 2 \leq 1 + u_n \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{1 + u_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} + 1 \leq 1 + \frac{1}{1 + u_n} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{7}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow P(n+1)$  est vraie

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède ainsi :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{1 + u_n} - u_n\right)}{\left(1 + \frac{1}{1 + u_{n-1}} - u_{n-1}\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{2 - (u_n)^2}{1 + u_n} \right) \times \left( \frac{1 + u_{n-1}}{2 - (u_{n-1})^2} \right) \\
 &= \left( \frac{2 - \left(1 + \frac{1}{1 + u_{n-1}}\right)^2}{1 + 1 + \frac{1}{1 + u_{n-1}}} \right) \times \left( \frac{1 + u_{n-1}}{2 - (u_{n-1})^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{(1 + u_{n-1})^2 - 1 - 2(1 + u_{n-1})}{(1 + u_{n-1})^2}}{\frac{2(1 + u_{n-1}) + 1}{1 + u_{n-1}}} \right) \times \left( \frac{1 + u_{n-1}}{2 - (u_{n-1})^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{(u_{n-1})^2 - 2}{(1 + u_{n-1})^2}}{\frac{3 + 2u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}} \right) \times \left( \frac{1 + u_{n-1}}{2 - (u_{n-1})^2} \right) \\
 &= \left( \frac{(u_{n-1})^2 - 2}{(1 + u_{n-1})^2} \right) \left( \frac{1 + u_{n-1}}{3 + 2u_{n-1}} \right) \left( \frac{1 + u_{n-1}}{2 - (u_{n-1})^2} \right) \\
 &= \frac{-1}{3 + 2u_{n-1}}
 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad 1 \leq u_{n-1} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \leq 2u_{n-1} \leq 3$$

$$\Rightarrow 5 \leq 3 + 2u_{n-1} \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3 + 2u_{n-1}} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3 + 2u_{n-1}} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-1}{3 + 2u_{n-1}} \right| = \frac{1}{3 + 2u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-1}{3 + 2u_{n-1}} \right| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} |u_n - u_{n-1}|$$

$$4) \text{ On a : } u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{2n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_{2n}}$$

$$\Rightarrow \beta_n = 1 + \frac{1}{1 + \alpha_n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

5) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad \beta_n - \alpha_n = 1 + \frac{1}{1 + \alpha_n} - \alpha = \frac{2 - (\alpha_n)^2}{1 + \alpha_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - \alpha_n)(\sqrt{2} + \alpha_n)}{1 + \alpha_n} \geq 0$$

Remarque : On peut très facilement montrer que :  $\forall n \in \mathbb{R} ; \alpha_n \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \beta_n - \alpha_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \beta_n \geq \alpha_n$$

$$6) \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n = u_{2n+2} - u_{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + u_{2n+1}} - u_{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + u_{2n}}\right)} - u_{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{\left(\frac{2 + 2u_{2n} + 1}{1 + u_{2n}}\right)} - u_{2n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1 + u_{2n}}{3 + 2u_{2n}}\right) - u_{2n}$$

$$= \frac{3 + 2u_{2n} + 1 + u_{2n} - 3u_{2n} - 2(u_{2n})^2}{3 + 2u_{2n}}$$

$$= \frac{4 - 2(u_{2n})^2}{3 + 2u_{2n}} = \frac{4 - 2(\alpha_n)^2}{3 + 2\alpha_n}$$

$$= \frac{2(2 - (\alpha_n)^2)}{3 + 2\alpha_n} = \frac{2(\sqrt{2} - \alpha_n)(\sqrt{2} + \alpha_n)}{3 + 2\alpha_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \alpha_{n+1} - \alpha_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \alpha_{n+1} \geq \alpha_n$$

$$\Rightarrow (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

De même :  $\beta_{n+1} - \beta_n$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \alpha_{n+1}} - 1 - \frac{1}{1 + \alpha_n}$$

$$= \frac{(1 + \alpha_n) - (1 + \alpha_{n+1})}{(1 + \alpha_n)(1 + \alpha_{n+1})}$$

$$= \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{(1 + \alpha_n)(1 + \alpha_{n+1})} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \beta_{n+1} - \beta_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \beta_{n+1} \leq \beta_n$$

$$\Rightarrow (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

7) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} |u_n - u_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} |u_{n-1} - u_{n-2}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} |u_{n-2} - u_{n-3}|$$

⋮  
⋮  
⋮

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

$$\Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_1 - u_0|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \left|\frac{3}{2} - 1\right|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; |\beta_n - \alpha_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

Comme :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = 0$  Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n - \alpha_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$$

Finalement on a pu montrer les assertions

$$\begin{cases} (\alpha_n) \text{ est } \nearrow \text{ et } (\beta_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0 \end{cases}$$

Donc les suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont adjacentes et ont la même limite.

8) D'abord on peut montrer facilement par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \sqrt{2}$

On a :  $u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Avec } f(x) = 1 + \frac{1}{1+x} ; \forall x \neq -1$$

La fonction  $f$  est continue et dérivable sur n'importe quel intervalle de  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$   
Donc On peut appliquer le TAF à  $f$  sur l'intervalle  $[u_n, \sqrt{2}]$  :

$$\Rightarrow \exists c \in ]u_n, \sqrt{2}[ : \frac{f(u_n) - f(\sqrt{2})}{u_n - \sqrt{2}} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq u_n < c \leq \sqrt{2} \\ f'(c) = \frac{f(u_n) - f(\sqrt{2})}{u_n - \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq c \leq \sqrt{2} \\ \left| \frac{f(u_n) - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} \right| = \left| \frac{-1}{(c+1)^2} \right| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq c \leq \sqrt{2} \\ \left| \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{(c+1)^2} \end{cases}$$

$$1 \leq c \leq \sqrt{2} \Rightarrow 2 < (c+1) < \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow 4 \leq (c+1)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2} \leq \left( \frac{1}{c+1} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(c+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} \right| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$$

Remarque : On peut démontrer cette inégalité à l'aide de la machine récurrence

$$9) \blacksquare |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} |u_{n-1} - \sqrt{2}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left( \frac{1}{4} \right)^3 |u_{n-2} - \sqrt{2}|$$

$$\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left( \frac{1}{4} \right)^n |u_1 - \sqrt{2}|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left( \frac{1}{4} \right)^n \left| \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \sqrt{2}| \leq \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1} \left| \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right|$$

$$\text{Comme : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1} \left| \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right| = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \sqrt{2}$$

### **Solution N° 60 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n < \sqrt{5}$

#### **L'initialisation :**

On a :  $u_0 = -2 < \sqrt{5}$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n < \sqrt{5}$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie } \Rightarrow u_n < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow u_n + 3 < \sqrt{5} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 + u_n} > \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3 + u_n} < \frac{-4}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{4}{3 + u_n} < 3 - \frac{4}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{3u_n + 5}{u_n + 3} < \frac{9 + 3\sqrt{5} - 4}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{5 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 3)}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < \sqrt{5}$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède ainsi :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n + 5}{u_n + 3} - u_n \\ &= \frac{3u_n + 5 - (u_n)^2 - 3u_n}{u_n + 3} \\ &= \frac{-(u_n)^2 + 5}{u_n + 3} \\ &= \frac{(\sqrt{5} - u_n)(\sqrt{5} + u_n)}{u_n + 3} > 0 \end{aligned}$$

On peut facilement montrer par récurrence que :  $\forall n \geq 2 ; u_n > 0$  et voici comment :

Soit la proposition :  $Q(n) : u_n > 0$

### L'initialisation :

On a :  $u_2 = 1 > 0$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 0$

■  $Q(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n > 0$

$$\Rightarrow 3u_n + 5 > 0 \text{ et } u_n + 3 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3u_n + 5}{u_n + 3} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{5} - u_n)(\sqrt{5} + u_n)}{u_n + 3} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 ; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n ; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 2} \text{ est croissante}$$

3) la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est convergente car croissante et étant majorée par  $\sqrt{5}$

On a :  $u_{n+1} = g(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$  avec :

$$g(x) = \frac{3x + 5}{x + 3} ; \forall x \neq -3$$

La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R} \setminus \{-3\}$   
Car c'est le quotient de deux fonctions

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Continues et bien définies sur  $\mathbb{R}^+$

On aussi :  $g(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$

Car :  $\forall x \geq 0 ; g(x) \geq 0$

On a aussi :  $u_2 = 1 \in \mathbb{R}^+$

Et  $(u_n)$  convergente et sa limite  $l \in \mathbb{R}^+$

Car :  $0 < u_n < \sqrt{5} \Rightarrow 0 \leq l \leq \sqrt{5}$

Donc on peut en déduire que  $l$  vérifie :

$$g(l) = l \Leftrightarrow \frac{3l+5}{l+3} = l$$

$$\Leftrightarrow 3l+5 = l^2+3l$$

$$\Leftrightarrow l^2-5=0$$

$$\Leftrightarrow (l-\sqrt{5})(l+\sqrt{5})=0$$

$$\Leftrightarrow l \in \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

$$\Leftrightarrow l = \sqrt{5} \text{ car } 0 \leq l \leq \sqrt{5}$$

### **Solution N° 61 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement } \nearrow$$

2) Soit  $k \geq 2$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\text{On a : } k^2 - (k^2 - k) = k > 0$$

$$\Rightarrow k^2 > k^2 - k$$

$$\Rightarrow k^2 > k(k-1) > 0 ; \forall k \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} ; k \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} ; k \geq 2$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare (2 - u_n) = 2 - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

$$= 2 - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{On a encore : } \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{k^2} > \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{-1}{k^2}\right) > \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$$

$$\Rightarrow -\sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^2}\right) > \frac{1}{n} - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^2}\right) > \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 2 - u_n > \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow u_n - 2 < \frac{-1}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n - 2 < \frac{-1}{n}} \rightsquigarrow (1)$$

Et comme  $k \geq 2$  Alors  $\frac{1}{k^2} > 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} > 0 \Rightarrow u_n > 0$$

De (1) et (2) on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < u_n < 2 - \frac{1}{n}$$

4) la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente car croissante et étant majorée par 2.

Voici pourquoi elle est majorée par 2 :

$$\blacksquare \left(2 - \frac{1}{n}\right) - 2 = -\frac{1}{n} < 0$$

$$\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{n}\right) < 2$$

$$\Rightarrow u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\Rightarrow u_n < 2 ; \forall n \geq 1$$

Remarque : comme  $0 < u_n < 2 - \frac{1}{n}$

Par passage aux limites on obtient :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq 2$$

Plus tard vous verrez que cette limite est égale exactement à  $\frac{\pi^2}{6}$

### Solution N° 62 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$

#### L'initialisation :

On a :  $0 \leq u_0 \leq 1$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 \leq u_n \leq 1$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_n + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n + 1}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} - u_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)^2 - (u_n)^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} \\
&= \frac{1 + u_n - 2(u_n)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} \\
&= \frac{-2\left(u_n + \frac{1}{2}\right)(u_n - 1)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} \\
&= \frac{-\left(u_n + \frac{1}{2}\right)(u_n - 1)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

#### L'initialisation :

On a :  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos \theta \leq 1$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 1}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \\
&= \left|\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right| = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \geq 0 \\
&\Rightarrow u_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \\
&\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$\begin{aligned}
5) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\theta \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \cos\left(\theta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&= \cos(\theta \cdot 0) = \cos 0 = 1 \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1
\end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Solution N° 63 :**

1) On a :  $\forall x \in \mathbb{R} ; -1 \leq \sin x \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq \sin k \leq 1 ; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} ; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{-1}{n\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} 1 \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n\sqrt{n}} \cdot n \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot n$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$

De la même manière on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos k \leq 1 ; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{\cos k}{n\sqrt{n}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} ; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\cos k}{n\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$

2) On a :  $0 \leq u_n \leq 2$  et  $0 \leq v_n \leq 3$   
Donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bornées. Si de plus elle sont strictement monotones alors elles convergent et soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l ; \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l'$$

$$\blacksquare \begin{cases} 0 \leq u_n \leq 2 \\ 0 \leq v_n \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq u_n v_n \leq 2v_n \\ 0 \leq u_n v_n \leq 3u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n \leq 2 \\ u_n v_n \leq 3u_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_n \leq 3 \\ u_n v_n \leq 2v_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n \leq 3 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \end{cases} ; \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) \leq 3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l \leq 2 \\ 6 \leq 3l \end{cases} \text{ et } \begin{cases} l' \leq 3 \\ 6 \leq 2l' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l \leq 2 \\ 2 \leq l \end{cases} \text{ et } \begin{cases} l' \leq 3 \\ 3 \leq l' \end{cases}$$

$$\Rightarrow l = 2 \text{ et } l' = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 3$$

3) on a  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites positif alors on aurait :

$$\begin{cases} \text{ou bien } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty \\ \text{ou bien } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty \\ \text{ou bien } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l' \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = +\infty \text{ (absurde)}$$

$$\blacksquare \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = +\infty \text{ (absurde)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Donc le 3<sup>ème</sup> hypothèse qui reste plausible

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$$

$$\Rightarrow l^2 + ll' + l'^2 = 0$$

$$\Rightarrow l^2 + 2ll' + l'^2 = ll'$$

$$\Rightarrow (l + l')^2 = ll' \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{ll' \geq 0} \rightsquigarrow (1)$$

$$l^2 + ll' + l'^2 = 0 \Leftrightarrow l^2 + l'^2 = -ll' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ll' \leq 0} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow ll' = 0 \Rightarrow l = l' = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$$

### **Solution N° 64 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(n)$  définie ainsi :  $R(n) : 0 < u_n < \frac{1}{4}$

#### **L'initialisation :**

On a :  $0 < u_0 = a < \frac{1}{4}$

Donc l'instance  $R(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $R(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n < \frac{1}{4}$

$$\blacksquare R(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < (u_n)^2 < \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < (u_n)^2 < \frac{1}{16} \\ \frac{-2}{16} < -2(u_n)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < (u_n)^2 < \frac{1}{16} \\ \frac{7}{8} < 1 - 2(u_n)^2 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < (u_n)^2 < \frac{1}{16} \\ 1 < \frac{1}{1 - 2(u_n)^2} < \frac{8}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{(u_n)^2}{1 - 2(u_n)^2} < \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{14} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow R(n+1) \text{ est vraie}$$

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} R(0) \text{ est vraie} \\ R(n) \Rightarrow R(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < \frac{1}{4}$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  On procède ainsi :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{(u_n)^2}{1 - 2(u_n)^2} - u_n \\ &= \frac{(u_n)^2 - u_n(1 - 2(u_n)^2)}{1 - 2(u_n)^2} \\ &= \frac{2(u_n)^3 + (u_n)^2 - u_n}{1 - 2(u_n)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2u_n \left(u_n - \frac{1}{2}\right) (u_n + 1)}{1 - 2(u_n)^2}$$

$$\blacksquare 0 < u_n < \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) < \frac{-1}{4} < 0 \\ \frac{7}{8} < 1 - 2(u_n)^2 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n \left(u_n - \frac{1}{2}\right) (u_n + 1)}{1 - 2(u_n)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

$$\text{On a : } u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Avec : } f(x) = \frac{x^2}{1 - 2x^2}$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{-\sqrt{2}}{2} \right\}$

$$f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+ \text{ car } \forall x \geq 0 ; f(x) \geq 0$$

$$\text{On a encore : } u_0 = a \in \left] 0 ; \frac{1}{4} \right[ \subset \mathbb{R}^+$$

La suite  $(u_n)$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0 et sa limite  $l \geq 0$  car  $0 < u_n < \frac{1}{4}$ .

Donc  $l$  vérifie l'équation :  $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2}{1 - 2l^2} = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2 - l(1 - 2l^2)}{1 - 2l^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2l \left(l - \frac{1}{2}\right) (l + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \left\{ 0 ; \frac{1}{2} ; -1 \right\}$$

$$\Leftrightarrow l \in \left\{ 0 ; \frac{1}{2} \right\} \text{ car } 0 \leq l \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow l = 0 \text{ car } (u_n) \text{ est } \searrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$$

$$4) \blacksquare v_{n+1} - v_n = \mathcal{S}_{2n+2} - \mathcal{S}_{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k + (-1)^{2n+1} \cdot u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} \cdot u_{2n+2} - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot u_k$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \text{ car } (u_n) \text{ est } \searrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

$$\blacksquare w_{n+1} - w_n = \mathcal{S}_{2n+3} - \mathcal{S}_{2n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k + (-1)^{2n+2} \cdot u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} \cdot u_{2n+3} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot u_k$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0 \text{ car } (u_n) \text{ est } \searrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; w_{n+1} \geq w_n$$

$$\Rightarrow (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_{2n+1} - \mathcal{S}_{2n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} \cdot u_{2n+1}$$

$$= - \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } \searrow \\ (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } \nearrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

Donc  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont adjacentes et ont par la suite la même limite  $l \in \mathbb{R}$ .

5) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{2}{7} = \frac{u_n}{1 - (u_n)^2} - \frac{2}{7}$$

$$= \frac{4(u_n)^2 + 7u_n - 2}{7(1 - 2(u_n)^2)}$$

$$= \frac{4(u_n + 2) \left(u_n - \frac{1}{4}\right)}{7(1 - 2(u_n)^2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{2}{7} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq \frac{2}{7} u_n ; u_n > 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare |v_n - \mathcal{S}_n| = |\mathcal{S}_{2n} - \mathcal{S}_n|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} |(-1)^k u_k|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} |u_k|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{7} |u_{k-1}|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} |u_{k-2}|$$

⋮

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k |u_{k-k}|$$

$$\leq a \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$$

7) On a :  $|\mathcal{S}_n - l| = |\mathcal{S}_n - v_n + v_n - l|$

$$\leq |\mathcal{S}_n - v_n| + |v_n - l|$$

$$\leq a \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - l|$$

$$\leq a \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \cdot \left( \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{2n - (n+1) + 1}}{1 - \frac{2}{7}} \right) + |v_n - l|$$

$$\leq a \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \cdot \frac{7}{5} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n\right) + |v_n - l|$$

On a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - l| = 0$

Et encore :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7a}{5} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n\right)$

$$= \frac{7a}{5} \cdot 0 \cdot (1 - 0) = 0$$

Donc par passage aux limites et d'après le critère de comparaison on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = l$$

### **Solution N° 65 :**

1) d'abord je rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; -\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \sin n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{3}{4} < 1$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \sin n \right) = 0$$

2)  $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin n \leq 1$

$$\Rightarrow 2 \leq 3 - \sin n \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{n(3 - \sin n)} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(3 - \sin n)} = 0$$

Car :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n}\right) = 0$

3) On a :  $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} -1 \leq \sin n \leq 1 \\ -1 \leq -\sin n \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - 1 \leq n + \sin n \leq n + 1 \\ n - 1 \leq n - \sin n \leq n + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n+\sin n} \leq \frac{1}{n+1} ; \forall n \geq 2 \\ n-1 \leq n-\sin n \leq n+1 ; \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n-\sin n}{n+\sin n} \leq \frac{n+1}{n-1} ; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-\sin n}{n+\sin n} \right) = 1$$

Car :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n-1} \right) = 1$

4) On a :  $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq \sin 2n \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sin 2n \leq 1$$

$$\Rightarrow n \leq (n+1 - \sin 2n) \leq n+2$$

$$\Rightarrow \underbrace{n}_{+\infty} \leq (n+1 - \sin 2n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1 - \sin 2n) = +\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) d'abord on a :  $-1 \leq \cos n \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos n}{n^2} \right) = 0$$

Car :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n - \cos n}{n^2 + 2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{\cos n}{n^2} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{2}{n} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{n} - \frac{\cos n}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2(-1)^n + 4n^2 + 3)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{2(-1)^n}{n^2} + 4 + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$= (+\infty)(0^\pm + 4 + 0^+) = +\infty$$

### Solution N° 66 :

1) soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n$  et on procède

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n + n^2} \leq \frac{1}{k + n^2} \leq \frac{1}{1 + n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n + n^2} \leq \frac{n}{k + n^2} \leq \frac{n}{1 + n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + n} \leq \frac{n}{k + n^2} \leq \frac{n}{1 + n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{1+n} \right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{k+n^2} \right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{1+n^2} \right)$$

$$\left( \frac{1}{1+n} \right) \sum_{k=1}^{k=n} 1 \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{k+n^2} \right) \leq \left( \frac{n}{1+n^2} \right) \sum_{k=1}^{k=n} 1$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{1+n} \right) n \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{k+n^2} \right) \leq \left( \frac{n}{1+n^2} \right) n$$

$$\Rightarrow \left( \frac{n}{1+n} \right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{k+n^2} \right) \leq \left( \frac{n^2}{1+n^2} \right)$$

$$2) \blacksquare \left( \frac{n}{1+n} \right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{k+n^2} \right) \leq \left( \frac{n^2}{1+n^2} \right)$$

comme :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{1+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{1+n^2} \right) = 1$

Alors d'après le critère de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{k+n^2} \right) = 1$$

### Solution N° 67 :

1) On a :  $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$  car elle est dérivable et sa dérivée  $f'(x) = 2x + \frac{3}{4} > 0$  sur  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

$$D' \text{ où } f(I) = f\left(\left[0; \frac{1}{4}\right]\right) = \left[f(0); f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \left[0; \frac{1}{4}\right] = I$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } 0 \leq u_0 = \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4}$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow u_n \in I$$

$$\Rightarrow f(u_n) \in I ; \text{ car } f(I) = I$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in I$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 + \frac{3}{4}u_n - u_n$$

$$= (u_n)^2 - \frac{1}{4}u_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= u_n \left( u_n - \frac{1}{4} \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

4) la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0.

$$5) \text{ On a : } u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $I$  et on a aussi  $f(I) \subseteq I$  et  $u_0 = \frac{1}{5} \in I$ .

La suite  $(u_n)$  est convergente et sa limite  $l = \lim(u_n) \in I$  Donc  $l$  vérifie :

$$f(l) = l \Leftrightarrow l^2 + \frac{3}{4}l - l = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 - \frac{1}{4}l = 0$$

$$\Leftrightarrow l \left( l - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \left\{ 0 ; \frac{1}{4} \right\}$$

$$\Leftrightarrow l = 0 \text{ car } (u_n) \text{ est } \searrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$$

**Solution N° 68 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = u_n + (u_n)^2 - u_n$$

$$= (u_n)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{R} ; u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{R} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

2) On suppose que  $(u_n)$  soit majorée par un réel positif  $M$  Alors on en déduit

$$u_n \leq M \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq M ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_n \leq M \\ u_n^2 \leq M^2 \end{cases} \Rightarrow u_n + (u_n)^2 \leq M + M^2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq M + M^2$$

$$\Rightarrow M + M^2 \leq M$$

Car tous les termes de  $(u_n)$  vérifie  $u_n \leq M$

$$\Rightarrow m^2 \leq 0 ; \text{ contradiction}$$

$$\Rightarrow \text{notre supposition est fausse}$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ n'est pas majorée}$$

3) comme  $(u_n)$  est croissante et non majorée alors  $\lim(u_n) = +\infty$ .

### Solution N° 69 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : 2^n \geq n + 1$

#### L'initialisation :

$$\text{On a : } 2^1 \geq 1 + 1$$

Donc l'instance  $P(1)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $2^n \geq n + 1$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 2^n \geq n + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2(n + 1)$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 2$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \geq n + 2$$

$$\Rightarrow P(n + 1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n + 1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; 2^n \geq n + 1$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k \cdot 2^k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$$

$$= \frac{1}{(n + 1) \cdot 2^{n+1}} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement } \nearrow$$

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1) - 2^n}{n(n+1)2^n} \leq 0 \quad \text{car} \quad 2^n \geq n+1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_{n+1} - v_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n \cdot 2^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) = 0(1 - 0) = 0$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est } \nearrow \text{ et } (v_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et ont par conséquent la même limite.

### Solution N° 70 :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 0)^2 = \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$2) \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \frac{1}{2}$$

Donc d'après la définition d'une limite d'une suite on en déduit que :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) : \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Pour  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  on aurait :

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) : \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq n_0) : \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq n_0) : \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(n)$  définie ainsi :  $R(n) : u_n \leq \left( \frac{3}{4} \right)^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$

### L'initialisation :

$$\text{On a : } u_{n_0} \leq \left( \frac{3}{4} \right)^{n_0-n_0} \cdot u_{n_0}$$

Donc l'instance  $R(n_0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \geq n_0$  fixé et on suppose que l'instance  $R(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \leq \left( \frac{3}{4} \right)^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$

$$\blacksquare R(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \leq \left( \frac{3}{4} \right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} u_n \leq \left( \frac{3}{4} \right) \left( \frac{3}{4} \right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n \leq \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1-n_0} u_{n_0}$$

$$\Rightarrow R(n+1) \text{ est vraie}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### La conclusion :

$$\begin{cases} R(n_0) \text{ est vraie} \\ R(n) \Rightarrow R(n+1) ; \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \geq n_0 ; u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$

4) Quand  $n \rightarrow +\infty$  Alors  $n \geq n_0 > 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0} \leq 0 ; \forall n \geq n_0$$

comme :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = 0 \cdot u_{n_0} = 0$

Alors selon le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$$

### Solution N° 71 :

1) Soit  $1 \leq k \leq n$  et on procède ainsi :

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow 1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \sum_{k=1}^n 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} 1 \leq \mathcal{S}_n \leq \sum_{k=1}^n 1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \leq \mathcal{S}_n \leq n$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq \mathcal{S}_n \leq n$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq \mathcal{S}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) = +\infty$$

$$2) u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{n+1} - \mathcal{S}_{n+1} - 2\sqrt{n} + \mathcal{S}_n$$

$$= (\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n+1}) + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{-\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante}$$

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = 2\sqrt{n+2} - \mathcal{S}_{n+1} - 2\sqrt{n+1} + \mathcal{S}_n$$

$$= (\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n+1}) + 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2((\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2)}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{-\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{-(\sqrt{n+2} + 3\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 ; v_{n+1} - v_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 ; v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante}$$

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n+1} - \mathcal{S}_n) - (2\sqrt{n} - \mathcal{S}_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2((\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est } \nearrow \text{ et } (v_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites adjacentes et ont par conséquent la même limite  $L$ .

$$3) u_n = 2\sqrt{n} - \mathcal{S}_n \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_n}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{\mathcal{S}_n}{n} \\ \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 2 - \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \frac{\mathcal{S}_n}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{u_n}{n} \\ \text{Et } \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} = 2 - \frac{u_n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathcal{S}_n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\sqrt{n}} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{n} \right) \\ \text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{\sqrt{n}} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathcal{S}_n}{n} \right) = 0 - L \times 0 = 0 \\ \text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} \right) = 2 - 0 \times L = 2 \end{cases}$$

$$4) \mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \mathcal{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{2n} = \mathcal{S}_n + \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{2n} - \mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{S}_{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{\mathcal{S}_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{S}_{2n}}{\sqrt{2n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \\ = \sqrt{2} \cdot \lim_{m=2n}^{\frac{\mathcal{S}_m}{\sqrt{m}}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} \right) \\ = \sqrt{2} \cdot 2 - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

**Remarque** : plus tard vous verrez comment calculer ce genre de limites dites sommes de Riemann voici un exemple :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \int_0^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ = 2 \int_0^1 \left( (1+x)^{\frac{1}{2}} \right)' dx \\ = 2 \left[ (1+x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 \\ = 2 \left( (1+1)^{\frac{1}{2}} - (1+0)^{\frac{1}{2}} \right) \\ = 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### **Solution N° 72 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \left( \frac{1}{k^3} \right) - \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{k^3} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (u_n)$  est strictement  $\nearrow$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

#### **L'initialisation :**

On a :  $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$

Donc l'instance  $Q(1)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \blacksquare Q(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \\ \Rightarrow u_n + \frac{1}{(n+1)^3} &\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \rightsquigarrow (*) \end{aligned}$$

Or on a  $\left( 2 - \frac{1}{n+1} \right) - \left( 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(n+1)^3 - n(n+1)^2 - n}{n(n+1)^3} \\ &= \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^3} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \geq \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$\Rightarrow u_n + \frac{1}{(n+1)^3} \geq 2 - \frac{1}{n+1} \text{ selon(*)}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3) Soit  $(v_n)$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = 2 - \frac{1}{n}$$

Cette suite  $(v_n)$  est décroissante car :

$$v_{n+1} - v_n = \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_{n+1} > v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) \geq v_n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 2 \geq v_n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 2 \geq v_n \geq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow u_n \leq 2 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est majorée par } 2$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est convergente car } \nearrow \text{ et majorée}$$

### Solution N° 73 :

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \quad 3v_{n+1} = 3 \sum_{k=0}^{k=n+1} \left(\frac{k}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \left(\frac{3k}{3^k}\right)$$

$$= \left(\frac{3 \cdot 0}{3^0}\right) + \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{3k}{3^k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k}{3^{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k-1+1}{3^{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k-1}{3^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k-1}{3^{k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{k}{3^k}\right) + \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{3^k}\right) = v_n + u_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; 3v_{n+1} = v_n + u_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $H(n)$  définie ainsi :  $H(n) : v_n < 1$

### L'initialisation :

On a :  $v_0 = 0 < 1$

Donc l'instance  $H(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $H(n)$  soit vraie. C-à-d  $v_n < 1$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_n &= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) < \frac{3}{2} \quad \text{car } 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} < 1 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad H(n) \text{ est vraie} \Rightarrow v_n < 1$$

$$\Rightarrow \frac{v_n}{3} < \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad u_n < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_n}{3} < \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{3} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_n}{3} + \frac{u_n}{3} < \frac{5}{6} < 1$$

$$\Rightarrow v_{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow H(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} H(0) \text{ est vraie} \\ H(n) \Rightarrow H(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n < 1$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{k=n+1} \left(\frac{k}{3}\right) - \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{k}{3}\right)$$

$$= \frac{n+1}{3^{n+1}} > 0 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} > v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement } \nearrow$$

Et comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 1  
Alors c'est une suite convergente.

$$\text{Soit} : l = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$$

4) On a :  $3v_{n+1} = v_n + u_n$

Comme  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes  
Alors par passage aux limites on écrit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3v_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n + u_n)$$

$$\Leftrightarrow 3 \lim_{n \rightarrow \infty} (v_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$$

$$\Leftrightarrow 3l = \frac{3}{2} + l$$

$$\Leftrightarrow 2l = \frac{3}{2} \Leftrightarrow l = \frac{3}{4}$$

$$\text{finalement} : \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \frac{3}{4}$$

### Remarque :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) = \frac{3}{2} (1 - 0) = \frac{3}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**Solution N° 74 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 1 \leq u_n \leq \alpha$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } 1 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $1 \leq u_n \leq \alpha$

$$\blacksquare \quad Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 1 \leq u_n \leq \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \leq 1 + u_n \leq \alpha + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha + 1} \leq \frac{1}{1 + u_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{1 + u_n} \leq \frac{-1}{\alpha + 1}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{1 + u_n} \leq 2 - \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1} = f(\alpha)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \alpha ; \text{ car } f(\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq \alpha$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 1}{1 + u_n} - u_n \\ &= \frac{2u_n + 1 - u_n(1 + u_n)}{1 + u_n} \\ &= \frac{-(u_n)^2 + u_n + 1}{1 + u_n} \\ &= \frac{-(u_n - \alpha) \left( u_n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{1 + u_n} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car on a : } u_n \geq 1 > \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow u_n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) > 0$$

$$\text{On a aussi : } (u_n - \alpha) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-(u_n - \alpha) \left( u_n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{1 + u_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

Remarque : j'ai abusivement utiliser le fait que :  $f(\alpha) = \alpha$  je vous propose de voir la démonstration maintenant :

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1} = \frac{2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 1}{\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{2 + \sqrt{5}}{1} \right) \times \left( \frac{2}{3 + \sqrt{5}} \right) \\
 &= \frac{2(2 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} \\
 &= \frac{2(6 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5)}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \\
 &= \frac{2(1 + \sqrt{5})}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha
 \end{aligned}$$

3) comme  $(u_n)$  est croissante et étant majorée par  $\alpha$  Alors  $(u_n)$  est convergente. Soit  $l$  sa limite.

Pour déterminer la limite  $l$  on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

On peut facilement vérifier les assertions suivantes :

- \*  $f$  continue sur  $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$
- \*  $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$
- \*  $l \in \mathbb{R}^+$

Donc on conclut que  $l$  vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}
 f(l) = l &\Leftrightarrow \frac{2l + 1}{l + 1} = l \\
 &\Leftrightarrow \frac{-l^2 + l + 1}{l + 1} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-\left(l - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(l - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}{l + 1} = 0 \\
 &\Leftrightarrow l \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ car } (u_n) \text{ est } \nearrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

### Solution N° 75 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(n)$  définie ainsi :  $R(n) : u_n \geq \sqrt{3}$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 2 \geq \sqrt{3}$

Donc l'instance  $R(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $R(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq \sqrt{3}$

$$\blacksquare \quad R(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (u_n)^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{(u_n)^2}{3} \geq 1$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{(u_n)^2}{3} \geq 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + \frac{(u_n)^2}{3}} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R(n+1) \text{ est vraie}$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} R(0) \text{ est vraie} \\ R(n) \Rightarrow R(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq \sqrt{3}$

2) Soit  $n \in \mathbb{R}$  et on procède comme suit

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_{n+1} - u_n &= \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} - u_n\right) \left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)} \\ &= \frac{\frac{(u_n)^2}{3} + 2 - (u_n)^2}{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}(3 - (u_n)^2)\right)}{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}(\sqrt{3} + u_n)(\sqrt{3} - u_n)}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n} \leq 0 \quad \text{car } \sqrt{3} \leq u_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{R} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{R} \quad ; \quad u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

3) comme  $(u_n)$  est décroissante et étant minorée par  $\sqrt{3}$  Alors  $(u_n)$  est une suite convergente et soit  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

$$4) \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3} + 2}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$   
 $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}$  et  $l \in \mathbb{R}^+$  car  $u_n \geq 3$

On a aussi :  $u_0 = 2 \in \mathbb{R}^+$

Donc on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{l^2}{3} + 2} = l \\ &\Leftrightarrow \frac{l^2}{3} + 2 = l^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{l^2}{3} + 2 - l^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sqrt{3} - l)(\sqrt{3} + l) = 0 \\ &\Leftrightarrow l \in \{\sqrt{3} ; -\sqrt{3}\} \\ &\Leftrightarrow l = \sqrt{3} \quad \text{car } u_n \geq \sqrt{3} \end{aligned}$$

### Solution N° 76 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

#### L'initialisation :

$$\text{On a : } u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

$$\blacksquare \quad P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

$$\Rightarrow (u_n)^3 > \frac{1}{7}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow (u_n)^3 + 1 > \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{(u_n)^3 + 1}{8} > \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{(u_n)^3 + 1}{8}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

$\Rightarrow P(n+1)$  est vraie

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1+u_{n+1}^3}{8}}}{\sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}}} = \sqrt[3]{\frac{1+u_{n+1}^3}{1+u_n^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1 + \frac{1+u_n^3}{8}}{1+u_n^3}} = \sqrt[3]{\frac{9+u_n^3}{8+8u_n^3}}$$

Comparons  $\frac{9+u_n^3}{8+8u_n^3}$  et 1

$$\blacksquare 1 - \left(\frac{9+u_n^3}{8+8u_n^3}\right) = \frac{8+8u_n^3-9-u_n^3}{8+8u_n^3}$$

$$= \frac{7u_n^3-1}{8+8u_n^3} > 0$$

$$\text{Car : } u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \Rightarrow u_n^3 > \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow 7u_n^3 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{7u_n^3-1}{8+8u_n^3} > 0$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{9+u_n^3}{8+8u_n^3}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9+u_n^3}{8+8u_n^3}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est strictement } \searrow$$

On a en plus  $(u_n)$  est minoré par  $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

Donc  $(u_n)$  est convergente.

4) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{7}{8}(u_{n+1})^3 - \frac{1}{8}}{\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{7}{8}\left(\frac{1+u_n^3}{8}\right) - \frac{1}{8}}{\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{8} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{8} v_n$$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{8}$

5) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \leq n ; v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \left(\frac{1}{8}\right)^{n-0}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} = \frac{7}{8} (u_n)^3 - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; (u_n)^3 = \frac{8}{7} \left( \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} + \frac{1}{8} \right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{7}}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7} \left( \left(\frac{1}{8}\right)^n + 1 \right)}$$

$$\begin{aligned} 6) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{7} \left( \left(\frac{1}{8}\right)^n + 1 \right)} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{7} (0 + 1)} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \end{aligned}$$

### **Solution N° 77 :**

$$1) f_n(x) = x^3 + nx - 1 ; n \in \mathbb{N}^*$$

On a  $f_n$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est un polynôme à coefficients réels Donc  $f_n$  est continue sur  $]0,1[ \subset \mathbb{R}$   
Et on a encore :

$$f_n(0) \cdot f_n(1) = (-1)(n) = -n < 0$$

D'où d'après le TVI on déduit :

$$\exists x_n \in [0,1] ; f_n(x_n) = 0$$

Comme  $f_n(0) \neq 0$  et  $f_n(1) \neq 0$   
Alors on peut écrire  $x_n \in ]0,1[$

On a de plus :  $f'_n(x) = 3x^2 + n ; \forall x \in \mathbb{R}$

On remarque que :  $f'_n(x) > 0 ; \left| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

Donc  $f_n(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et continue de plus bien entendu  
Alors  $f_n$  est une bijection de n'importe quel intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$  vers son image  $f(I)$

D'où  $x_n$  est unique car 0 admet un seul antécédent par  $f_n$  dans  $]0,1[$

Autrement-dit : comme  $f_n : [0,1] \mapsto [-1, n]$   
Est bijective Alors :

$$(\forall y \in [-1, n]) (\exists! x \in [0,1]) : f_n(x) = y$$

$$(pour 0 \in [-1, n]) (\exists! x_n \in [0,1]) : f_n(x_n) = 0$$

2) Soit  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$  On a :

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ Si } m \leq n &\Rightarrow mx \leq nx ; x > 0 \\ &\Rightarrow (x^3 + mx - 1) \leq (x^3 + nx - 1) \\ &\Rightarrow f_m(x) \leq f_n(x) \end{aligned}$$

On en déduit l'implication suivante :

$$\boxed{m \leq n \Rightarrow f_m(x) \leq f_n(x)} \rightsquigarrow (*)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit :

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n + 1 > n$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) > f_n(x) ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) ; \text{ car } x_n \in ]0,1[$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) > 0 ; \text{ car } f_n(x_n) = 0$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) > \underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_0$$

$$\Rightarrow f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_n)) > f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_{n+1}))$$

$$\Rightarrow x_n > x_{n+1} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement décroissante

3) la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0

$$\text{car : } x_n \in ]0,1[ \Rightarrow x_0 > 0$$

4) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^3 + n\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^3 > 0$$

$$\Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0$$

$$\Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) > f_n(x_n) ; \text{ car } f_n(x_n) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right) > f_n^{-1}(f_n(x_n)) ; f_n \text{ bij } \nearrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} > x_n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$5) \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < x_n < \frac{1}{n}$$

$$\text{Comme : } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Alors d'après le critère de comparaison des suites on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 0$$

### **Solution N° 78 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n \geq 1$

#### **L'initialisation :**

$$\text{On a : } u_1 = 1 \geq 1$$

Donc l'instance  $Q(1)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq 1$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie } \Rightarrow u_n \geq 1$$

$$\Rightarrow 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} \geq 2 + \frac{n+2}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} \geq \frac{2n^2 + 3n + 2}{n(n+1)}$$

Comparons maintenant  $\frac{2n^2 + 3n + 2}{n(n+1)}$  et 1

$$\frac{2n^2 + 3n + 2}{n(n+1)} - 1 = \frac{2n^2 + 3n + 2 - n(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 2}{n(n+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} > 1$$

$$\Rightarrow 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} > 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 1$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \geq 1$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} - u_n$$

$$= u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} > 0$$

Car  $u_n \geq 1$  et  $\frac{n+2}{n(n+1)} > 0$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} > u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + \frac{1}{n+1}}{u_n + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}}{u_n + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{2u_n + \frac{2(n+1)}{n(n+1)}}{u_n + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{2\left(u_n + \frac{1}{n}\right)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)} = 2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_{n+1} = 2v_n$$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique de raison 2

4) comme  $(v_n)_{n \geq 1}$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall p \leq n \quad ; \quad v_n = v_p \cdot 2^{n-p}$$

On choisit  $p = 1$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = v_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\Rightarrow 2^n = u_n + \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow u_n = 2^n - \frac{1}{n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La suite  $(u_n)$  est divergente car :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= +\infty - 0 = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \sum_{k=1}^{k=n} u_k &= \sum_{k=1}^{k=n} \left( 2^k - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \\ &= 2^1 \left( \frac{1 - 2^{n-1+1}}{1 - 2} \right) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \\ &= -2(1 - 2^n) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \\ &= (2^{n+1} - 2) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

6) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(k)$  définie ainsi :  $P(k) : 2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$

### L'initialisation :

$$\text{On a : } 2^1 \geq 1 + \frac{1}{1}$$

Donc l'instance  $P(1)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $P(k)$  soit vraie. C-à-d  $P(k) : 2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad P(k) \text{ est vraie} &\Rightarrow 2^k \geq 1 + \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow 2 \cdot 2^k \geq 2 \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^{k+1} \geq \left( 2 + \frac{2}{k} \right)$$

Comparons  $\left( 2 + \frac{2}{k} \right)$  et  $\left( 1 + \frac{1}{k+1} \right)$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \left( 2 + \frac{2}{k} \right) - \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) &= 1 + \left( \frac{2}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + \frac{k+2}{k(k+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left( 2 + \frac{2}{k} \right) > \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\Rightarrow 2^{k+1} > 1 + \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow P(k+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(k) \Rightarrow P(k+1) ; \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall k \in \mathbb{N}^* ; \quad 2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$$

Remarque : On peut démontrer cette même inégalité sans utiliser la machine récurrence et voici comment :

$$\blacksquare \quad u_k \geq 1 \quad \text{et} \quad v_k = u_k + \frac{1}{k} ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow v_k - \frac{1}{k} = u_k \geq 1$$

$$\Rightarrow v_k - \frac{1}{k} \geq 1$$

$$\Rightarrow v_k \geq 1 + \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow 2^k \geq 1 + \frac{1}{k} ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$7) \text{ On a : } 2^k \geq 1 + \frac{1}{k} \Rightarrow 2^k - \frac{1}{k} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k - \frac{1}{k}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k} \left( \frac{1}{2^k - \frac{1}{k}} \right) \leq \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k \left( 2^k - \frac{1}{k} \right)} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_k u_k} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{v_k u_k} \right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

$$\Rightarrow w_n \leq \left( \frac{1}{2} \right)^1 \left( \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow w_n \leq 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \leq 1$$

$$\Rightarrow w_n \leq 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est majorée par } 1$$

La conclusion : la suite  $(w_n)$  est convergente car croissante et étant majorée par 1.

### Solution N° 79 :

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n+1 \leq k \leq 2n$ .

$$\blacksquare \quad n+1 \leq k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} (2n - n - 1 + 1) \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} (2n - n - 1 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} \leq \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + u_n \leq \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + u_n \leq u_{2n}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}$$

3) Par l'absurde on suppose que  $(u_n)$  converge c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a : } u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Par passage aux limites on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{2n}) \geq \frac{1}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$$

$$\Rightarrow l \geq \frac{1}{2} + l \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2} \text{ contradiction}$$

Alors ce qu'on a supposé est faux

Et comme elle est strictement croissante

Alors elle tend vers  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$$

### Solution N° 80 :

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 - u_{n+1}}{2 - u_n} = \left( \frac{2 - \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}}{2 - u_n} \right)$$

$$= \left( \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}u_n}{2 - u_n} \right) = \frac{\frac{2}{3}(2 - u_n)}{(2 - u_n)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{3}$$

2) comme  $(v_n)_{n \geq 1}$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \leq n ; v_n = v_p \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = v_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{n-0}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{n-0} = \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = 2 - v_n = 2 - \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$= 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 2 - 0 = 2$$

$$4) S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left( 2 - \left( \frac{2}{3} \right)^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} 2 - \sum_{k=0}^{k=n} \left( \frac{2}{3} \right)^k$$

$$= 2(n - 0 + 1) - \left( \frac{2}{3} \right)^0 \left( \frac{1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n-0+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right)$$

$$= 2n + 2 - 3 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)$$

$$= 2n - 1 + 2 \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n - 1 + 2 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n - 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

$$= +\infty - 1 + 2 \times 0 = +\infty$$

**Solution N° 81 :**

1) Soit  $a > 0$  et  $b > 0$  et on a :

$$\blacksquare \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \geq 4ab$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{(a + b)^2}{4} \geq ab$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

$$2) \blacksquare 0 \leq a \leq b \Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \\ \text{Et } \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a \leq \frac{a + b}{2} \leq b}$$

$$\blacksquare 0 \leq a \leq b \Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \sqrt{a} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \\ \text{Et } \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{a} \leq \sqrt{a} \times \sqrt{b} \leq \sqrt{b} \times \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq b$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 0 < u_n \leq v_n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

**L'initialisation :**

On a :  $0 < \alpha \leq 2\alpha$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n \leq v_n$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n \leq v_n$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n v_n} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} > 0} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n \leq v_n$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} ; \text{ selon } Q(2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{u_n v_n} \leq v_{n+1}} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n \leq v_n$

4) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare 0 < u_n \leq v_n \Rightarrow \begin{cases} u_n \leq \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n \\ u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \leq v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_n \leq \sqrt{u_n v_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} \leq v_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_n \leq u_{n+1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \text{Et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \end{cases}$$

5) comme  $(v_n)$  est décroissante Alors :

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \leq v_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \leq 2\alpha$$

On a de plus :  $0 < u_n \leq v_n$

$$\Rightarrow 0 < u_n \leq v_n \leq 2\alpha$$

Donc  $(v_n)$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0

Et encore que  $(u_n)$  est aussi convergente car croissante et étant majorée par  $2\alpha$  et on prend alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l'$$

$$\blacksquare u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{u_n v_n}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{l l'} \Rightarrow l^2 = l l' \Rightarrow \boxed{l = l'}$$

$$\blacksquare v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$\Rightarrow l' = \frac{l + l'}{2} \Rightarrow 2l' = l + l' \Rightarrow \boxed{l' = l}$$

D'où finalement on en déduit que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont la même limite

**Remarque** :  $(u_n)$  est  $\nearrow$  et  $(v_n)$  est  $\searrow$   
J'aurais pu montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes en rajoutant l'assertion :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$$

Mais je n'ai pas pu le prouver ☹

C'est malheureux ☹

**Remarque** : voici une 2<sup>ème</sup> méthode pour démontrer la condition d'hérédité pour la 3<sup>ème</sup> Question :

$$\blacksquare v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left( (\sqrt{u_n})^2 + (\sqrt{v_n})^2 - 2 \cdot \sqrt{u_n} \cdot \sqrt{v_n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow v_{n+1} \geq u_{n+1}$$

### **Solution N° 82 :**

1) Soit  $x \in ]1, +\infty[$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare g(x) - 3 = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} - 3$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 6 - 3(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 1}$$

$$= \frac{(x - 3)^2}{x - 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in I ; g(x) - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in I ; g(x) \geq 3$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n \geq 3$

**L'initialisation :**

On a :  $u_1 = 4 \geq 3$

Donc l'instance  $P(1)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \geq 3$

■  $P(n)$  est vraie  $\Rightarrow u_n \geq 3 > 1$

$$\Rightarrow u_n \in I$$

$$\Rightarrow g(u_n) \geq 3$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 3$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \geq 3$

3) soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\text{■ } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1} - u_n$$

$$= \frac{(u_n)^2 - 3u_n + 6 - (u_n)^2 + u_n}{u_n - 1}$$

$$= \frac{6 - 2u_n}{u_n - 1} = \frac{2(3 - u_n)}{u_n - 1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} - u_n \leq 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}$$

4) la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente car décroissante et étant minorée par 3

5) on a :  $u_{n+1} = g(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$

La fonction  $g$  est continue sur  $I \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$

On a aussi :  $g(I) \subseteq I$  et ce parce que :

$$\forall x > 1 ; g(x) \geq 3 > 1$$

On a aussi :  $u_0 = 5 \in I$

La suite  $(u_n)$  est convergente et sa limite  $l \in I$  car  $u_n \geq 3$

Donc on déduit que  $l$  vérifie :

$$g(l) = l \Leftrightarrow \frac{l^2 - 3l + 6}{l - 1} = l$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 3l + 6 = l^2 - l$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow l = 3 \in I$$

**Solution N° 83 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $H(n)$  définie ainsi :  $H(n) : 0 \leq u_n \leq 1$

**L'initialisation :**

On a :  $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$

Donc l'instance  $H(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $H(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 \leq u_n \leq 1$

■  $H(n)$  est vraie  $\Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \leq 3u_n + 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1} \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} \leq \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow H(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} H(0) \text{ est vraie} \\ H(n) \Rightarrow H(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt[3]{3u_n + 1} - 1}{u_n} \\ &= \frac{\left( (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \left( (3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)}{u_n \left( (3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \\ &= \frac{(3u_n + 1) - 1}{u_n \left( (3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \\ &= \frac{3}{(3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } u_n \geq 0 \Rightarrow (3u_n + 1) \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et } (3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} \geq 1 \\ \text{et } (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} \geq 1 \\ \text{et } 1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1} \leq \frac{1}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \frac{3}{(3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

3) la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente car décroissante et étant minorée par 0.

4) On a :  $u_{n+1} = g(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Avec : } g(x) = \sqrt[3]{3x + 1} - 1$$

La fonction  $g$  est continue sur  $D_g = \mathbb{R}$

Alors  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$

On a  $g(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$  car  $g(x) \geq 0 ; \forall x \geq 0$

On a aussi :  $u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$

Et encore la suite  $(u_n)$  est convergente et sa limite  $l \in \mathbb{R}^+$  car  $0 \leq u_n \leq 1$

Donc  $l$  vérifie l'équation :  $g(l) = l$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3l + 1} - 1 = l$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3l + 1} = l + 1$$

$$\Leftrightarrow 3l + 1 = (l + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow 3l + 1 = l^3 + 3l^2 + 3l + 1$$

$$\Leftrightarrow l^3 + 3l^2 + 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow l(l^2 + 3l + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow l(l+1)(l+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \{0; -1; -2\}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l=0} \text{ car } l \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$$

### **Solution N° 84 :**

1) Soit  $n \geq 2$  et on procède comme suit

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k^2 - 1} - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n(n+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2 ; u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2 ; u_{n+1} > u_n$$

$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 2}$  est strictement croissante

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n+1 + n(n+2) - (n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+2)} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2 ; v_{n+1} - v_n < 0$$

$\Rightarrow (v_n)_{n \geq 2}$  est strictement décroissante

$$\blacksquare \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ainsi :  $\begin{cases} (u_n)_{n \geq 2} \text{ est } \nearrow \text{ et } (v_n)_{n \geq 2} \text{ est } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$

Donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et ont par conséquent la même limite.

2) les suites convergent vers une même limite et Soit  $\lim(u_n) = \lim(v_n) = l \in \mathbb{R}$

3) Soit  $n \geq k \geq 2$  et  $n \geq 2$  et on a :

$$\blacksquare u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^2 - 1}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{3n^2 - n - 2}{4n^2 + 4n} ; n \geq 2$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - n - 2}{4n^2 + 4n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(4 + \frac{4}{n}\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{4}{n}} \right) = \left( \frac{3 - 0 - 0}{4 + 0} \right) = \frac{3}{4}$$

### **Solution N° 85 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : v_n > \sqrt{2}$

#### **L'initialisation :**

On a :  $v_0 = 3 > \sqrt{2}$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $v_n > \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \blacksquare v_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{2 + (v_n)^2}{2v_n} - \sqrt{2} \\ &= \frac{(v_n)^2 - 2\sqrt{2}v_n + 2}{2v_n} \\ &= \frac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n} > 0 \quad ; \quad v_n \neq \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - \sqrt{2} > 0$$

$$\Rightarrow v_{n+1} > \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n > \sqrt{2}$

### **2<sup>ème</sup> Méthode :** utiliser la bijection

On a :  $v_{n+1} = f(v_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Avec :  $f(x) = \frac{2+x^2}{2x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^*$

Sur l'intervalle  $] \sqrt{2}, +\infty[$  on remarque que  $f$  est continue et strictement croissante :

**Continue** car c'est le quotient de deux fonctions bien définies et continues sur  $] \sqrt{2}, +\infty[$  et **croissante** car :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4}{(2x)^2} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2} > 0$$

Donc  $f$  réalise une bijection de  $] \sqrt{2}, +\infty[$  vers son image  $f(] \sqrt{2}, +\infty[)$  avec :

$$f(] \sqrt{2}, +\infty[) = ]f(\sqrt{2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = ] \sqrt{2}, +\infty[$$

Donc  $f : ] \sqrt{2}, +\infty[ \mapsto ] \sqrt{2}, +\infty[$  est une bijection croissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé tel que :  $v_n > \sqrt{2}$

$$\Rightarrow v_n \in ] \sqrt{2}, +\infty[$$

$$\Rightarrow f(v_n) \in ] \sqrt{2}, +\infty[$$

$$\Rightarrow v_{n+1} \in ] \sqrt{2}, +\infty[$$

$$\Rightarrow v_{n+1} > \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n > \sqrt{2}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{2 + (v_n)^2}{2v_n} - v_n \\ &= \frac{2 + (v_n)^2 - 2(v_n)^2}{2v_n} = \frac{2 - (v_n)^2}{2v_n} \\ &= \frac{(\sqrt{2} - v_n)(\sqrt{2} + v_n)}{2v_n} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} - v_n < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} < v_n$$

$\Rightarrow (v_n)_{n \geq 0}$  est strictement décroissante

3) On a :  $v_{n+1} = f(v_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On vérifie facilement que :

- $f$  est continue sur  $[\sqrt{2}, +\infty[ \subseteq \mathbb{R}$
- $f([\sqrt{2}, +\infty[) \subseteq [\sqrt{2}, +\infty[$
- $\lim(v_n) = l \in [\sqrt{2}, +\infty[$

Donc on déduit que  $l$  vérifie l'équation

$$f(l) = l \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 + l^2}{2l} = l \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2 + l^2}{2l} - l = 0 \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\sqrt{2} - l)(\sqrt{2} + l)}{2l} = 0 \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad l \in \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt{2} \quad ; \quad \text{car } l \geq \sqrt{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Solution N° 86 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : u_n \neq 5$

#### L'initialisation :

On a :  $u_0 = 2 \neq 5$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \neq 5$

$$\blacksquare \quad u_{n+1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} = 5$$

$$\Rightarrow \quad 7u_n - 25 = 5u_n - 15$$

$$\Rightarrow \quad 2u_n = 10$$

$$\Rightarrow \quad u_n = 5$$

Ainsi on a pu montrer l'implication :

$$u_{n+1} = 5 \quad \Rightarrow \quad u_n = 5$$

Par passage à la contraposée on écrit :

$$\text{Non}(u_n = 5) \quad \Rightarrow \quad \text{Non}(u_{n+1} = 5)$$

C'est à dire que :

$$u_n \neq 5 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \neq 5$$

Ou encore que :

$$Q(n) \quad \Rightarrow \quad Q(n+1)$$

#### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq 5$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 5} - \frac{1}{u_n - 5} \\ &= \frac{u_n - 3}{2(u_n - 5)} - \frac{1}{u_n - 5} \\ &= \frac{u_n - 3 - 2}{2(u_n - 5)} = \frac{(u_n - 5)}{2(u_n - 5)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (v_n)$  est arithmétique de raison  $1/2$

3) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= v_p + \frac{1}{2}(n - p) \end{aligned}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= v_0 + \frac{1}{2}(n - 0) \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

On a encore :  $v_n = \frac{1}{u_n - 5} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} + 5 = \frac{1}{\frac{1}{2}n - \frac{1}{3}} + 5$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{15n - 4}{3n - 2}$$

$$4) \quad \mathcal{S}_{10} = \sum_{k=1}^{k=10} v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_{10}$$

$$= (v_1 + v_{10}) \left( \frac{10 - 1 + 1}{2} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \left( \frac{1}{6} + \frac{14}{3} \right) \left( \frac{10 - 1 + 1}{2} \right) = \frac{145}{6}$$

### Solution N° 87 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $R(n)$  définie ainsi :  $R(n) : u_n \neq 1$

#### L'initialisation :

On a :  $u_1 = 0 \neq 1$

Donc l'instance  $R(1)$  est vraie

#### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et on suppose que l'instance  $R(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n \neq 1$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_{n+1} = 1 &\Rightarrow \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1} = 1 \\ &\Rightarrow 5u_n - 3 = 3u_n - 1 \\ &\Rightarrow 2u_n = 2 \\ &\Rightarrow u_n = 1 \end{aligned}$$

Ainsi on a pu montrer l'implication :

$$u_{n+1} = 1 \Rightarrow u_n = 1$$

Par passage à la contraposée on écrit :

$$\text{Non}(u_n = 1) \Rightarrow \text{Non}(u_{n+1} = 1)$$

C'est à dire que :

$$u_n \neq 1 \Rightarrow u_{n+1} \neq 1$$

Ou encore que :

$$R(n) \Rightarrow R(n + 1)$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} R(1) \text{ est vraie} \\ R(n) \Rightarrow R(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \neq 1$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 1} - \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{8u_n - 4}{3u_n - 1}\right)}{\left(\frac{2u_n - 2}{3u_n - 1}\right)} - \left(\frac{u_n + 1}{u_n - 1}\right)$$

$$= \frac{8u_n - 4}{2(u_n - 1)} - \frac{2(u_n + 1)}{2(u_n - 1)}$$

$$= \frac{8u_n - 4 - 2(u_n + 1)}{2(u_n - 1)}$$

$$= \frac{6(u_n - 1)}{2(u_n - 1)} = 3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_{n+1} - v_n = 3$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_{n+1} = v_n + 3$$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est arithmétique de raison 3

3) comme  $(v_n)$  est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{matrix} ; v_n = v_p + 3(n - p)$$

On choisit  $p = 1$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_1 + 3(n - 1)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = -1 + 3(n - 1)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 3n - 4$$

$$\text{On a aussi : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow v_n(u_n - 1) = u_n + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n v_n - v_n = u_n + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = v_n + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{v_n - 1} ; v_n \neq 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3n - 4 + 1}{3n - 4 - 1} = \frac{3n - 3}{3n - 5}$$

$$4) S_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

$$= (v_1 + v_n) \left( \frac{n - 1 + 1}{2} \right)$$

$$= (-1 + 3n - 4) \left( \frac{n - 1 + 1}{2} \right)$$

$$= \frac{n(3n - 5)}{2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n - 3}{3n - 5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 3 - \frac{3}{n} \right)}{n \left( 3 - \frac{5}{n} \right)}$$

$$= \frac{\left( 3 - \frac{3}{n} \right)}{\left( 3 - \frac{5}{n} \right)} = \left( \frac{3 - 0}{3 - 0} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 4) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3n - 5)}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 5) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Solution N° 88 :

1) calcul de quelques termes de la suite

| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$         |
|-------|-------|---------------|
| 2     | 1     | $\frac{5}{8}$ |

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4}$$

3) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \leq n \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0} = 1 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On a encore :  $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$4) \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}\right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 4 - 4 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{3} + 3^{n+1}\right)$$

$$5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{1}{4} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} + 4 - 4 \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times 0 + 4 - 4 \times 0 = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

**Solution N° 89 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n < 0$

**L'initialisation :**

$$\text{On a : } u_0 = \frac{-1}{2} < 0$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n < 0$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n < 0$$

$$\Rightarrow u_n < 0 \quad \text{et} \quad 3 - 2u_n > 3$$

$$\Rightarrow u_n < 0 \quad \text{et} \quad 3 - 2u_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{3 - 2u_n} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < 0$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; u_n < 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned}\blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{3 - 2u_n} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n(3 - 2u_n)}{3 - 2u_n} \\ &= \frac{2(u_n)^2 - 2u_n}{3 - 2u_n} \\ &= \frac{2u_n(u_n - 1)}{3 - 2u_n} > 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}$$

3) soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned}\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left( \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} \right) \times \left( \frac{u_n - 1}{u_n} \right) \\ &= \left( \frac{u_n}{3 - 2u_n} \right) \times \left( \frac{3 - 2u_n}{3u_n - 3} \right) \times \left( \frac{u_n - 1}{u_n} \right) \\ &= \frac{u_n \cdot (3 - 2u_n) \cdot (u_n - 1)}{(3 - 2u_n) \cdot 3 \cdot (u_n - 1) \cdot u_n} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3}$$

4) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \leq n ; v_n = v_p \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

On a encore :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow v_n(u_n - 1) = u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow v_n u_n - v_n = u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = v_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$5) \mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= v_0 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 ; -1 < \frac{1}{3} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - 3^{n+1}} \right) = \frac{1}{1 - \infty} = 0$$

### **Solution N° 90 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 0 \leq u_n \leq 4$

#### **L'initialisation :**

On a :  $Q(0) : 0 \leq u_0 = 1 \leq 4$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d :  $0 \leq u_n \leq 4$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 4$$

$$\Rightarrow 16u_n \geq 0 \text{ et } (2 + \sqrt{u_n})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{16u_n}{(2 + \sqrt{u_n})^2} \geq 0 \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare u_{n+1} - 4 = \frac{16u_n}{(2 + \sqrt{u_n})^2} - 4$$

$$= \frac{16u_n - 4(2 + \sqrt{u_n})^2}{(2 + \sqrt{u_n})^2}$$

$$= \frac{12u_n - 16\sqrt{u_n} - 16}{(2 + \sqrt{u_n})^2}$$

$$= \frac{4 \left( 3(\sqrt{u_n})^2 - 4\sqrt{u_n} - 4 \right)}{(2 + \sqrt{u_n})^2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{u_n} - 2) \left( \sqrt{u_n} + \frac{2}{3} \right)}{(2 + \sqrt{u_n})^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 4 \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 4$$

2) soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{16u_n}{(2 + \sqrt{u_n})^2} - u_n \\ &= \frac{16u_n - u_n(4 + 4\sqrt{u_n} + u_n)}{(2 + \sqrt{u_n})^2} \\ &= \frac{12u_n - 4\sqrt{u_n} \cdot u_n - (u_n)^2}{(2 + \sqrt{u_n})^2} \\ &= \frac{-u_n \left( (\sqrt{u_n})^2 + 4\sqrt{u_n} - 12 \right)}{(2 + \sqrt{u_n})^2} \\ &= \frac{-u_n \left( (\sqrt{u_n})^2 + 4\sqrt{u_n} - 12 \right)}{(2 + \sqrt{u_n})^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left( \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}} \right) = \frac{1 - \frac{2}{\left( \frac{4\sqrt{u_n}}{2 + \sqrt{u_n}} \right)}}{1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}}$$

$$= \left( \frac{\frac{2\sqrt{u_n} - 4}{4\sqrt{u_n}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}} \right) = \left( \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{u_n}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}} \right)}{\left( 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}} \right)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}$$

4) comme  $(v_n)$  est géométrique alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{aligned} ; v_n = v_p \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 0$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = -1 \left( \frac{1}{2} \right)^n = - \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{u_n}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{u_n}}{2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n} = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_n = \left(\frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{2}{1 + 0}\right)^2 = 4$$

### **Solution N° 91 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $H(n)$  définie ainsi :  $H(n) : 0 \leq u_n \leq 1$

#### **L'initialisation :**

On a :  $0 \leq u_0 \leq 1$  car  $u_0 \in [0,1]$

Donc l'instance  $H(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $H(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 \leq u_n \leq 1$

$$\blacksquare H(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq -\sqrt{3 + u_n^2} \leq -\sqrt{3} \\ 2 \leq u_n + 2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n + 2 - \sqrt{3 + u_n^2} \leq 3 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1}} \rightsquigarrow (1)$$

$$\text{Or on a : } u_{n+1} - 1 = 2 + u_n - \sqrt{3 + u_n^2}$$

$$= (1 + u_n) - \sqrt{3 + (u_n)^2}$$

$$= \frac{(1 + u_n)^2 - (\sqrt{3 + (u_n)^2})^2}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + (u_n)^2}}$$

$$= \frac{(1 + u_n)^2 - (3 + (u_n)^2)}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + (u_n)^2}}$$

$$= \frac{2(u_n - 1)}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + (u_n)^2}} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} \leq 1} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow H(n+1) \text{ est vraie}$$

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} H(0) \text{ est vraie} \\ H(n) \Rightarrow H(n+1) ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = 2 - \sqrt{3 + u_n^2}$$

$$= \frac{2^2 - (\sqrt{3 + u_n^2})^2}{2 + \sqrt{3 + u_n^2}}$$

$$= \frac{1 - (u_n)^2}{2 + \sqrt{3 + u_n^2}}$$

$$= \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{2 + \sqrt{3 + u_n^2}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} \geq 1 \Rightarrow \boxed{1 - u_{n+1} \leq 0} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare (1 - u_{n+1}) - (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$$

$$= -1 - u_n + \sqrt{3 + u_n^2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}u_n + 1 - u_n$$

$$= \sqrt{3 + u_n^2} + (\sqrt{3} - 2)u_n - \sqrt{3}$$

$$\blacksquare 0 \leq u_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \leq \sqrt{3 + u_n^2} \leq 2 \\ (\sqrt{3} - 2) \leq (\sqrt{3} - 2)u_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3} - 2 \leq \sqrt{3 + u_n^2} + (\sqrt{3} - 2)u_n \leq 2$$

$$\sqrt{3} - 2 \leq \sqrt{3 + u_n^2} + (\sqrt{3} - 2)u_n - \sqrt{3} \leq 2 - \sqrt{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \sqrt{3 + u_n^2} + (\sqrt{3} - 2)u_n - \sqrt{3} \leq 2 - \sqrt{3} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3 + u_n^2} + (\sqrt{3} - 2)u_n - \sqrt{3} \leq 0$$

$$\Rightarrow (1 - u_{n+1}) - (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow (1 - u_{n+1}) \leq (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n) \rightsquigarrow (2)$$

D'après les résultat (1) et (2) on déduit

$$0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$$

4) Soit  $n \in \mathbb{N}$  dans cette question on a le choix d'utiliser la récurrence ou encore de choisir la méthode descendante :

$$\blacksquare 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$$

$$\hookrightarrow 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)^2(1 - u_{n-1})$$

$$\hookrightarrow 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)^3(1 - u_{n-2})$$

⋮

$$\hookrightarrow 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)^{n+1}(1 - u_{n-n})$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)^{n+1}(1 - u_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq 1 - u_n \leq (\sqrt{3} - 1)^n(1 - u_0)}$$

5) Soit  $n \geq 1$  et on procède comme suit

$$\blacksquare T_{n+1} - T_n = (u_{n+1} + \mathcal{S}_{n+1}) - (u_n + \mathcal{S}_n)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + (\mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n)$$

$$= \left(2 - \sqrt{3 + u_n^2}\right) + \left(\sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{3 + u_k^2} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \sqrt{3 + u_k^2}\right)$$

$$= \left(2 - \sqrt{3 + u_n^2}\right) + \sqrt{3 + u_n^2} = 2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; T_{n+1} = T_n + 2$$

$\Rightarrow (T_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique de raison 2

6) comme  $(T_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique alors :

$$\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{array} ; T_n = T_p + 2(n - p)$$

On choisit  $p = 1$  Alors :

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; T_n = T_1 + 2(n - 1)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; T_n = u_1 + S_1 + 2(n - 1)$$

$$\begin{aligned} &= 2 + u_0 - \sqrt{3 + u_0^2} + \sqrt{3 + u_0^2} + 2(n - 1) \\ &= 2n + u_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n + S_n = 2n + u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n = 2n - u_n + u_0$$

### **Solution N° 92 :**

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n \geq 2$

#### **L'initialisation :**

On a :  $u_0 = 3 > 2$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 2$

$$\blacksquare u_{n+1} - 2 = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2} - 2 = \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{u_n - 2}{u_n^2} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 2$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 2$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est minorée par } 2$$

#### **2) 1<sup>ère</sup> Méthode :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

On a :  $u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Avec : } f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} ; \forall x \neq 0$$

La fonction  $f$  est continue sur  $]2, \sqrt{u_n}] \subset \mathbb{R}^*$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]2, \sqrt{u_n}[$

Alors d'après le TAF on écrit :

$$\exists c \in ]2, u_n[ ; \frac{f(u_n) - f(2)}{u_n - 2} = f'(c)$$

$$\Rightarrow 2 < c < u_n ; \left(\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2}\right) = \frac{4 - c}{c^3}$$

$$f'(c) = \frac{-1}{c^2} + \frac{4}{c^3} = \frac{4 - c}{c^3}$$

$$\blacksquare 2 < c < u_n \Rightarrow -u_n < -c < -2$$

$$\Rightarrow \boxed{4 - u_n < 4 - c < 2} \rightsquigarrow (1)$$

$$\blacksquare 2 < c < u_n \Rightarrow 8 < c^3 < u_n^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{u_n^3} < \frac{1}{c^3} < \frac{1}{8}} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{4 - u_n}{u_n^3} < \frac{4 - c}{c^3} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{4 - c}{c^3} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f'(c) < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} \right) < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (u_{n+1} - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

### 2<sup>ème</sup> Méthode :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2} = \frac{u_n - 2}{u_n^2}$$

$$\blacksquare u_n > 2 \Rightarrow u_n^2 > 4 \Rightarrow \frac{1}{u_n^2} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2) ; u_n > 2$$

$$\Rightarrow (u_{n+1} - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

### L'initialisation :

$$\text{On a : } Q(0) : 0 < 3 - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{4}(u_n - 2) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < (u_{n+1} - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < (u_{n+1} - 2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) comme :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{1}{4} < 1$

Alors d'après le critère de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### Solution N° 93 :

1) Soit  $x \in ]0,1]$  et on procède ainsi :

$$\begin{aligned} \blacksquare x \in ]0,1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq -x < 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - x < 1 \\ &\Rightarrow \boxed{0 \leq \sqrt{1-x} < 1} \rightsquigarrow (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare x \in ]0,1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{2}x < 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}x < 1} \rightsquigarrow (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare x \in ]0,1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq x + 1 < 2 \\ &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} < \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 1} \rightsquigarrow (3) \end{aligned}$$

La conclusion : d'après les trois résultats ci-dessus on en déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et } \sqrt{1-x} \geq 0 \\ \text{et } 1 - \frac{1}{2x} > 0 \\ \text{et } \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 0 \end{array} \right.$$

C'est à dire trois quantités positives

$$\begin{aligned} \blacksquare \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - (\sqrt{1-x})^2 &= \frac{x^2}{4} > 0 \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - (\sqrt{1-x})^2 &> 0 \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 &> (\sqrt{1-x})^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{1}{2}x > \sqrt{1-x}} \rightsquigarrow (4)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 & \\ &= \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) \\ &= \frac{4 - 4(x+1) + 4x(x+1) - x^2(x+1)}{4(x+1)} \\ &= \frac{-x^3 + 3x^2}{4(x+1)} = \frac{x^2(3-x)}{4(x+1)} > 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 &> 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 &> \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 \\ \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} > 1 - \frac{1}{2}x} \rightsquigarrow (5) \end{aligned}$$

$$(4) \text{ et } (5) \Rightarrow \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare u_n - u_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Ainsi par la méthode descendante on a :

$$\hookrightarrow u_1 - u_0 = 1 - \frac{1}{2^1}$$

$$\hookrightarrow u_2 - u_1 = 1 - \frac{1}{2^2}$$

$\vdots$

$$\hookrightarrow u_n - u_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

On effectue l'addition entre ces égalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui s'en vont on trouve :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{k=n} 1 - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow u_n - \frac{1}{2} = n - \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n - \frac{1}{2} = n - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n = n - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= +\infty - \frac{1}{2} + 0 = +\infty$$

4) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  ;  $1 \leq k \leq n$

On a :  $\forall x \in ]0,1[$  ;  $1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Pour  $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$  on aurait :

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}}$$

Par passage à la somme on trouve :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left( 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right) < \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}} \right)$$

$$\Rightarrow n - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k < v_n$$

$$\Rightarrow n - \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) < v_n$$

$$\Rightarrow n - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < v_n$$

$$\Rightarrow n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n < v_n$$

$$5) \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = +\infty$$

Alors selon le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$$

### **Solution N° 94 :**

1) calcul de quelques termes de la suite

| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$         | $u_3$          |
|-------|-------|---------------|----------------|
| 1     | 2     | $\frac{5}{2}$ | $\frac{11}{4}$ |

2) la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite ni arithmétique ni géométrique.

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare (u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{2}u_{n+1} \right) (u_{n+1} - u_n) \\
&= \left( \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) (u_{n+1} - u_n) \\
&= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} - u_n) \\
&= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

4) comme  $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n)$  est une quantité positive alors nécessairement les quantités :

$$(u_{n+2} - u_{n+1}) \quad \text{et} \quad (u_{n+1} - u_n)$$

Auraient le même signe c'est à dire les deux sont à la fois positives ou négatives pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

$$\text{Comme } (u_1 - u_0) = (2 - 1) = 1 \geq 0$$

Alors toutes les quantités  $(u_{n+1} - u_n) \geq 0$

C'est à dire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n \geq 0$

C'est à dire :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$

C'est à dire  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

5) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(u_{n+2} - u_{n+1})}{(u_{n+1} - u_n)} = \frac{(u_{n+2} - u_{n+1})}{(u_{n+1} - u_n)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - u_n)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

6) comme  $(v_n)$  est géométrique Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \leq n ; v_n = v_p \left( \frac{1}{2} \right)^{n-p}$$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

On prend  $p = 0$  on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 1 \left( \frac{1}{2} \right)^n = \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

7) comme  $v_n = u_{n+1} - u_n$  Alors :

$$\left( \frac{1}{2} \right)^n = u_{n+1} - u_n$$

$$\hookrightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^0 = u_1 - u_0$$

$$\hookrightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^1 = u_2 - u_1$$

$$\hookrightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^2 = u_3 - u_2$$

⋮  
⋮  
⋮

$$\hookrightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

On additionne ces égalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui s'en vont dans le côté de droite on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2} \right)^k = u_n - u_0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^0 \left( \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = 3 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\blacksquare 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} < 1 ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow -1 < -\left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} < 0 ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow 2 < 3 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} < 3 ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow 2 < u_n < 3 ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ est bornée}$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$$

$$= 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = 3 - 0 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

### **Solution N° 95 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - u_n)} = \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{-1}{2} v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \geq 0} \text{ est géométrique de raison } \frac{-1}{2}$$

2) Comme  $(v_n)$  est géométrique Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \leq n ; v_n = v_p \cdot \left( \frac{-1}{2} \right)^{n-p}$$

On prend  $p = 0$  on trouve alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \left( \frac{-1}{2} \right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 1 \cdot \left( \frac{-1}{2} \right)^n = \left( \frac{-1}{2} \right)^n$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare v_n = u_{n+1} - u_n$$

$$\hookrightarrow v_0 = u_1 - u_0$$

$$\hookrightarrow v_1 = u_2 - u_1$$

$$\hookrightarrow v_2 = u_3 - u_2$$

⋮  
⋮  
⋮

$$\hookrightarrow v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

En additionnant ces égalités côte à côte et bien entendu en prenant en considération les termes qui s'en vont on trouve alors :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} v_i = u_n - u_0 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow S_n = u_n - 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow S_n = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

4) On a :  $S_n = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n-1} v_i = u_n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^i = u_n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)}\right) = u_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \\ &= \frac{2}{3} (1 - 0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### **Solution N° 96 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2}$$

$$= \frac{(x_n)^2 + 2}{2x_n} - \frac{\sqrt{2}(2x_n)}{2x_n}$$

$$= \frac{(x_n)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x_n + (\sqrt{2})^2}{2x_n}$$

$$= \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : x_n > \sqrt{2}$

#### **L'initialisation :**

$$\text{On a : } x_0 = \frac{\sqrt{9}}{2} > \frac{\sqrt{8}}{2}$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie

#### **L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $x_n > \sqrt{2}$

$$\blacksquare \quad P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow x_n > \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (x_n - \sqrt{2})^2 > 0 \quad \text{et} \quad 2x_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} > 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - \sqrt{2} > 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1} > \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

#### **La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad x_n > \sqrt{2}$

C'est à dire que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par le nombre  $\sqrt{2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare x_{n+1} - x_n = (x_{n+1} - \sqrt{2}) - (x_n - \sqrt{2})$$

$$= \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} - (x_n - \sqrt{2})$$

$$= \left( \frac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n} \right) (x_n - \sqrt{2} - 2x_n)$$

$$= \left( \frac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n} \right) (-x_n - \sqrt{2})$$

$$= \frac{-(x_n - \sqrt{2})(x_n + \sqrt{2})}{2x_n} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; x_{n+1} - x_n < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; x_{n+1} < x_n$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie

ainsi :  $Q(n) : 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

### L'initialisation :

$$\text{On a : } 0 < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

### L'hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\blacksquare \frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_n - \sqrt{2}} = \frac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}x_n}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\blacksquare x_n > \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot x_n > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot x_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x_n} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot x_n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x_n} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_n - \sqrt{2}} \right) < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (x_{n+1} - \sqrt{2}) < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2})$$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow (x_n - \sqrt{2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2}) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow (x_{n+1} - \sqrt{2}) < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_{n+1} - \sqrt{2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \rightsquigarrow (1)$$

$$\text{On a encore : } \boxed{x_{n+1} - \sqrt{2} > 0} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 0 < x_{n+1} - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

### La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$5) \text{ on a : } 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  car  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \sqrt{2})$$

Et ce d'après le critère de comparaison

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \sqrt{2}$$

### **Solution N° 97 :**

1) calcul de quelques termes de la suite

| $u_0$ | $u_1$         | $u_2$         | $u_3$ |
|-------|---------------|---------------|-------|
| 0     | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 2     |

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}_{\frac{n(n-1)}{3}} + u_n = \frac{n(n+1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{3} + u_n = \frac{n(n+1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{n(n+1)}{3} - \frac{n(n-1)}{3} = \frac{2n}{3}$$

De la même manière on a :

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_n}_{\frac{n(n+1)}{3}} + u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{3} + u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{3} = \frac{2(n+1)}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$3) \text{ On a : } u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3} \text{ et } u_n = \frac{2n}{3}$$

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{3} - \frac{2n}{3} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ est arithmétique de raison } \frac{2}{3}$$

### **Solution N° 98 :**

1) calcul de quelques termes de la suite

| $u_1$ | $u_2$                             | $u_3$   |
|-------|-----------------------------------|---|
| 1     | $\frac{2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}$ | $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$ |

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}$$

3) Soit  $p \geq 2$  et on procède ainsi :

$$\blacksquare \left( \sqrt{\frac{p}{p-1}} \right)^2 - \left( \frac{1}{2p} + 1 \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{p-1} - \frac{1}{4p^2} - 1 - \frac{1}{p} \\
&= \frac{4p^3 - (p-1) - 4p^2(p-1) - 4p(p-1)}{4p^2(p-1)} \\
&= \frac{3p+1}{4p^2(p-1)} > 0 \quad \text{car } p \geq 2 \\
&\Rightarrow \left( \sqrt{\frac{p}{p-1}} \right)^2 - \left( \frac{1}{2p} + 1 \right)^2 > 0 \\
&\Rightarrow \left( \sqrt{\frac{p}{p-1}} \right)^2 > \left( \frac{1}{2p} + 1 \right)^2 \\
&\Rightarrow \sqrt{\frac{p}{p-1}} > \frac{1}{2p} + 1 \\
&\Rightarrow \sqrt{\frac{p}{p-1}} - 1 > \frac{1}{2p} \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}} - \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p-1}} > \frac{1}{2p} \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}{\sqrt{p-1}} > \frac{1}{2p} \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p-1}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}} \\
&\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \text{ On a } \forall p \geq 2 ; \quad & \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2 \cdot 3\sqrt{3}} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} > \frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{4}} \\
& \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2 \cdot n\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

On additionne ces inégalités côte à côte en prenant en considération les termes qui vont disparaître dans le côté de gauche on trouve alors :

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \\
& \Rightarrow 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \\
& \Rightarrow 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + 1 > 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \\
& \Rightarrow 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} > \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \\
& \Rightarrow \boxed{\left( 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) > u_n} \rightsquigarrow (1)
\end{aligned}$$

Or on a  $(u_n)$  est strictement croissante

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n > u_0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \boxed{u_n > 1} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad 1 < u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Remarque :  $(u_n)$  est convergente car croissante et étant majorée par 3

Pourquoi majorée par 3 ?

$$\text{Car : } u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} < 3$$

Et en plus et par passage aux limites on obtient un encadrement de  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

$$\blacksquare \quad 1 < u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq 3$$

### Solution N° 99 :

1) Calcul de quelques termes de la suite

| $u_1$         | $u_2$         | $u_3$         |
|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{8}{9}$ |

2) soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\blacksquare \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{u_n} = \frac{\left(\frac{2n+2}{3n}\right) u_n}{n+1} \times \frac{n}{u_n}$$

$$= \frac{2(n+1)n}{3n(n+1)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{3}$$

3) comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall p \leq n \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit  $p = 1$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = v_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{On a encore : } \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{u_n}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$4) \quad \mathcal{S}_n = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n}$$

$$= v_1 + v_2 + \dots + v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left( \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right)$$

$$= 2 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) = 2(1 - 0) = 2$$

**Solution N° 100 :**

1) Calcul de quelques termes de la suite

| $u_1$ | $u_2$          | $u_3$           |
|-------|----------------|-----------------|
| 1     | $\sqrt{2} + 1$ | $2\sqrt{2} - 1$ |

2) soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on procède comme suit

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{(1 - \sqrt{2})u_n + 2\sqrt{2} - 2}{u_n - 2} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2}) \left( u_n + \frac{2\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}} \right)}{u_n - 2} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2})(u_n + 2)}{u_n - 2} = (1 - \sqrt{2}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = (1 - \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = (1 - \sqrt{2})v_n$$

 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique de raison  $1 - \sqrt{2}$ 3) comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall p \leq n ; v_n = v_p \cdot (1 - \sqrt{2})^{n-p}$$

On choisit  $p = 1$  Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = v_1 (1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = -(1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; -(1 - \sqrt{2})^{n-1} = u_n - 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = 2 - (1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$\begin{aligned} 4) \mathcal{S}_n &= \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} \left( 2 - (1 - \sqrt{2})^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} 2 - \sum_{k=1}^{k=n} (1 - \sqrt{2})^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} 2 - \sum_{k=0}^{k=n-1} (1 - \sqrt{2})^k \\ &= 2n - (1 - \sqrt{2})^0 \left( \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^{n-0+1}}{1 - (1 - \sqrt{2})} \right) \\ &= 2n - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - (1 - \sqrt{2})^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2n - \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - (1 - \sqrt{2})^n \right) \\ &= +\infty - \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

**Solution N° 101 :**1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $P(n)$  définie ainsi :  $P(n) : u_n > 1$ **L'initialisation :**

$$\text{On a : } u_0 = \frac{3}{2} > 1$$

Donc l'instance  $P(0)$  est vraie**L'hérédité :**Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $P(n)$  soit vraie. C-à-d  $u_n > 1$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad u_{n+1} - 1 &= \frac{(u_n)^2 + u_n}{(u_n)^2 + 1} - 1 \\
 &= \frac{(u_n)^2 + u_n - (u_n)^2 - 1}{(u_n)^2 + 1} \\
 &= \frac{u_n - 1}{(u_n)^2 + 1} > 0 \\
 &\Rightarrow u_{n+1} - 1 > 0 \\
 &\Rightarrow u_{n+1} > 1 \\
 &\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}
 \end{aligned}$$

**La conclusion :**

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 1$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{(u_n)^2 + u_n}{(u_n)^2 + 1} - u_n \\
 &= \frac{(u_n)^2 + u_n - (u_n)^3 - u_n}{(u_n)^2 + 1} \\
 &= \frac{(u_n)^2(1 - u_n)}{(u_n)^2 + 1} < 0 \\
 &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n < 0 \\
 &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} < u_n \\
 &\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}
 \end{aligned}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on procède comme suit :

$$\blacksquare \quad \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{\left(\frac{(u_n)^2 + u_n}{(u_n)^2 + 1}\right) - 1}{u_n - 1}$$

---

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

---

$$= \left(\frac{u_n - 1}{(u_n)^2 + 1}\right) \times \left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = \frac{1}{(u_n)^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad u_n > 1 &\Rightarrow (u_n)^2 > 1 \\
 &\Rightarrow 1 + (u_n)^2 > 2 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{1 + (u_n)^2} < \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (u_{n+1} - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition  $Q(n)$  définie ainsi :  $Q(n) : 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**L'initialisation :**

On a :  $0 < u_0 - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^0$   
Donc l'instance  $Q(0)$  est vraie

**L'hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et on suppose que l'instance  $Q(n)$  soit vraie. C-à-d  $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad Q(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(u_n - 1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
 &\Rightarrow 0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
 &\Rightarrow 0 < u_{n+1} - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q(n+1)$  est vraie

**La conclusion :**

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  ;  $0 < u_k - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\Rightarrow 1 < u_k < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{k=n-1} 1 < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < \sum_{k=0}^{k=n-1} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow n < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < n + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow n < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + n$$

6) Comme  $\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k > n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k \right) = +\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

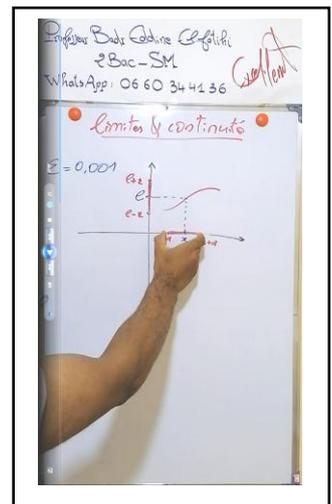
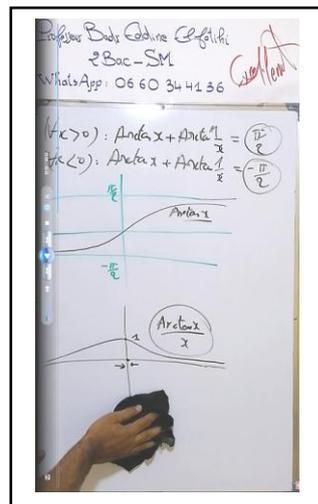
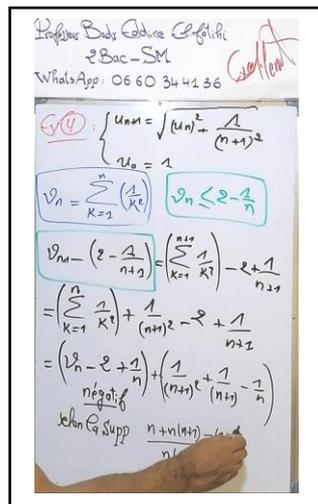
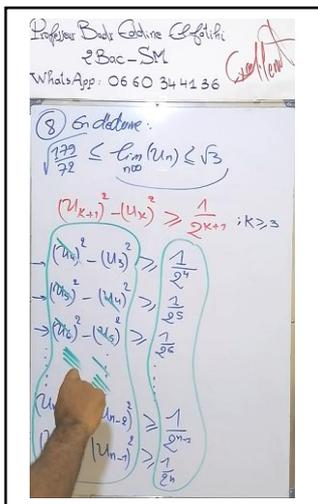
## عروض السنة الدراسية : 2023/2022

### عرض الدروس :

- 12 ساعة فيديوهات لشرح كل درس بالتفاصيل و بعض التمارين المحلولة
- يرسل كل درس في بطاقة ذاكرة من فئة 32Go أو 64Go
- بإمكانكم اقتناء فقط الدروس التي تمثل عائق في البرنامج
- بإمكان التلاميذ المترشحوں الأحرار و الرسميون الاستفادة من العرض
- ينصح بمشاهدة كل حصة مرتين على الأقل لضبط المفاهيم جيدا

### عرض الامتحانات التجريبية المصححة :

- يتكون من 12 امتحان تجريبي متوسط الصعوبة كلها مصححة بالتفاصيل
- يرسل العرض في بطاقة ذاكرة من فئة 64Go ( 12 امتحان في بطاقة واحدة )
- الشروحات صالحة للتخصير للمباريات الوطنية ( 20 ساعة شرح تقريبا )
- الإرسال يتم عبر البريد ( خدمة أمانة المغرب )



Radio - SM

12/07/2022

Vous avez changé l'icône de ce grou...

### Groupe WhatsApp pour discussions 2BAC SM : Biof 2022/2023

| leçon                          | support            | Durée                  | Prix   |
|--------------------------------|--------------------|------------------------|--------|
| Limites et continuité          | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| Suites numériques              | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| Dérivation, étude de fonctions | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| Logarithme népérien            | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| L'exponentielle                | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| Le calcul d'intégrales         | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| Nombres complexes              | Carte mémoire 64Go | 14h cours et exercices | 300 DH |
| Arithmétiques                  | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| Structures algébriques         | Carte mémoire 64Go | 14h cours et exercices | 300 DH |
| Équations différentielles      | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| Calcul de probabilités         | Carte mémoire 32Go | 12h cours et exercices | 300 DH |
| 12 Examens Blancs Corrigés     | Carte mémoire 64Go | 20h Examens corrigés   | 500 DH |

التوصيل سوف يتم عن طريق خدمة AMANA للإرساليات (بريد المغرب)



# **SÉRIES D'EXERCICES**

## **« 2ème Année Bac – SM »**

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

### **Projet de livre 2022-2023**

#### ***Tome 3 : Dérivation et étude de fonctions***

- **Dérivabilité en un point, sur un intervalle**
- **Approximation affine d'une fonction**
- **Théorème de Rolle**
- **Théorème des accroissements finis**
- **Variations d'une fonction numérique**
- **Branches infinies d'une courbe d'une fonction**
- **Concavité d'une fonction numérique**
- **Travailler avec la règle de l'Hôpital**

**Professeur Badr Eddine EL FATIHI**

**Ouarzazate 2022**

**Pour Novembre 2022**