CALCUL SUR LES POLYNÔMES

Exercice 1

1. Trouver un polynôme $p(x)$ qui a pour racines -2 ; $\frac{1}{2}$ et 3.
2. Étudier le signe du polynôme $q(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 3$.

Exercice 2

Soit un polynôme p défini par :
$p(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$, avec α et β des réels.

1. Déterminer les réels α et β pour que $p(x)$ soit divisible par $(x+1)^2$.
2. Mettre $p(x)$ en produit de trois facteurs du premier degré.
3. On pose $q(x) = \dfrac{p(x)}{(x+1)(x^2-4)}$.
   a) Simplifier l'expression de $q(x)$.
   b) Étudier le signe de $q(x)$.
   c) En déduire le signe $q(1-\sqrt{2})$ et $q(-1+2\pi)$.

Exercice 3

Soit le polynôme p défini par : $p(x) = 16 - (x+1)^4$.

1. Montrer que $p(x)$ est divisible par $(x-1)$.
2. Déterminer un polynôme q tels que : $p(x) = (x-1)q(x)$.
3. Montrer que -3 est un zéro du polynôme $q(x)$.
4. En déduire la factorisation de $p(x)$.

Exercice 4

Soit p un polynôme défini par :
$p(x) = x^2 - (2a+b)x + 3a - 2b$.
Déterminer a et b pour que -2 et 3 soient racines de p.

Exercice 5

Soit $p(x)$ un polynôme défini par : $p(x) = \alpha - (x+2)^4$ avec α un nombre réel.

1. Déterminer le réel α pour que $p(x)$ soit divisible par $(x-1)$.
2. Montrer que pour tout réel x, on a : $p(x) = -(x-1)(x+5)(x^2+4x+13)$.

Exercice 6

Soit $g(x)$ un polynôme du troisième degré tel que : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x+1) - g(x) = x^2 \end{cases}$

1. Montrer que $g(1) = 0$ et $g(-1) = -1$.
2. Déterminer le polynôme $g(x)$.
3. En déduire de ce qui précède l'expression en fonction de n de : $g(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$
4. Calculer la valeur de $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$.
5. Déterminer la factorisation de $g(x)$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \geq 0$.
8. Simplifier la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2 - 3x + 1}$.

Exercice 7

Soit $p(x)$ et $q(x)$ deux polynômes définis par :
$p(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$ et $q(x) = 3x^3 + 8x^2 - x - 10$.

1. a) Quand dit-on qu'un nombre réel α est une racine du polynôme $p(x)$?
   b) Calculer $p(1)$ et $p(-2)$.
   c) Déterminer les réels a et b tels que : $p(x) = (x-1)(x+2)(ax+b)$.
2. a) Montrer que $q(x)$ est divisible par $(x-1)$ et $(x+2)$.
   b) Factoriser $q(x)$.
3. On pose $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$.
   a) Simplifier l'expression de $R(x)$.
   b) Étudier le signe de $R(x)$, puis déduire le signe de $R(-\frac{\pi}{4})$.

Exercice 8

Soit f un polynôme tel que :
$f_m(x) = x^4 - x^3 + mx^2 + x + 12$ où m est un paramètre réel.

1. Détermine la valeur de m pour que le reste de la division euclidienne de f_m par $(x+1)$ soit égal à $-5m+2$
2. On pose $m = -13$.
   Montrer que f_{-13} est factorisable par $(x-1)$ et $(x+1)$.
3. Déterminer les réels a, b et c pour que : $f_{-13}(x) = (x+1)(x-1)(ax^2 + bx + c)$.

Exercice 9

On considère deux polynômes P et Q définis par :
$P(x) = 6x^3 + ax^2 + bx - 10$ et
$Q(x) = -3x^3 - 11x^2 + 24x + 20$ où a et b sont des nombres réels

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que : $P(-5) = 0$ et $P(-1) = 12$.
2. Déterminer les nombres réels c et d, pour que : $(3x^2 + cx + d)(2-x) = -3x^3 - 11x^2 + 24x + 20$.
3. Calculer $P(\frac{1}{2})$ et $Q(-5)$, puis déduire la factorisation de $P(x)$ et $Q(x)$.
4. Simplifier la fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Exercice 10

Soit p un polynôme tel que $p(x) = x^3 - x + 2a$ avec a un réel.

1. Déterminer le réel a pour que $p(x)$ soit factorisable par $(x+3)$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $p(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.

Exercice 11

Soit a et b deux nombres réels distincts.
On considère le polynôme p défini par :
$p(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b)$.

1. Calculer $p(a)$ et $p(b)$.

2. Quel est le degré de $p(x)$?
3. Déterminer polynôme p_1 tel que, pour tout nombre réel x : $p(x) = (x-a)(x-b)p_1(x)$.
4. Quel est le degré de $p_1(x)$?

Exercice 12

Sur une droite (Δ) munie d'un repère $(O; \overrightarrow{i})$, on considère des points fixes A, B et C d'abscisses respectives α, $1+\alpha$, $2+\alpha$. Soit M un point de (Δ) d'abscisses x.

1. Exprimer en fonction de α et x le nombre : $p(x) = MA^2 \times \overline{BC} + MB^2 \times \overline{CA} + MC^2 \times \overline{BA} + \overline{BC} \times \overline{CA} \times \overline{AB}$.
2. On considère le polynôme $p(x)$ défini par : $p(x) = (x-\alpha)^2 - 2(x-\alpha-1)^2 + (x-\alpha-2)^2 - 2$.
   a) Quel est le degré maximal du polynôme $p(x)$?
   b) Calculer $p(\alpha)$, $p(\alpha+1)$ et $p(\alpha+2)$.
   c) En déduire que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $p(x) = 0$.

Exercice 13

On donne $f(x) = (x-1)^5$ et $g(x) = x(x-1)(2x-1)$.

1. Développer $f(x)$ et $g(x)$.
2. On considère le polynôme h défini par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $h(x) = (x-1)^{2n+1} + x^{2n+1} - 2x + 1$. Sachant que $P(x)$ est factorisable par $(x-a)$ si $P(a) = 0$.
   Montrer que $h(x)$ est factorisable par $g(x)$.
3. On pose $n = 2$.
   a) Déterminer le polynôme du second degré $Q(x)$ tel que : $h(x) = g(x)Q(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation, $Q(x) = 3$.

Exercice 14

Soit le polynôme : $P(x) = 10x^3 + 29x^2 - 41x + 12$.

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - \frac{1}{2}$. En déduire le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - \frac{1}{2})$.
2. On définit la fonction rationnelle par : $f(x) = \dfrac{P(x)}{1-8x^3}$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Simplifier $f(x)$.
   (On notera $h(x)$, l'écriture simplifier de $f(x)$).
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $h(x) \geq 0$.
   En déduire les signe de $h(1-2\sqrt{5})$.

Exercice 15

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$.

1. Calculer $P(3)$.
2. Déterminer trois α, β et γ tels que : $P(x) = (x^2 - 3x)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{P(x)}{x^2-1} \leq 0$.

Exercice 16

Soit $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.
Montrer que les nombres réels $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ sont des racines de $p(x)$.

Exercice 17

On considère le polynôme défini pour tout réel x : $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 14x + 24$.

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x+1)$ et par $(x+2)$.
2. Déterminer un polynôme Q tel que : $P(x) = (x+1)(x+2)Q(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) < 0$.
4. Sans calculer, déterminer le signe du réel $P(1-\sqrt{5})$.

Exercice 18

On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + 4$, où α est un réel.

1. Déterminer le réel α tel que $P(x)$ soit divisible par $(x-2)$.
   Dans la suite de l'exercice, on pose $\alpha = -7$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ et l'inéquation $P(x) \leq 0$.
4. En déduire le signe de $P(\sqrt{3} - 2)$.

Exercice 19

Soit p un polynôme défini pour tout $x \neq 0$ par : $p(\frac{1}{x}) = \dfrac{1}{x^n}p(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer que, si n est impair, alors -1 est racine de p.
2. Montrer que si α est racine de p, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi racine de p.
3. On donne $p(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1$.
   a) Montrer que $p(x)$ est divisible par $(x-2)$.
   b) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $p(\frac{1}{x}) = -\dfrac{1}{x^3}p(x)$.
   c) En déduire que $\frac{1}{2}$ est aussi racine de $p(x)$.
   d) Déterminer deux réels a et b tels que : $p(x) = (x-2)(x-\frac{1}{2})(ax+b)$.
4. Étudier le signe du polynôme $p(x)$.
5. En déduire le signe de $p(\sqrt{2}-1)$ et $p(\pi - \frac{1}{2})$.

Exercice 20

Considère le polynôme $p(x) = 2x^5 - ax^4 - 21x^3 + bx^2 + 27x - 18$.

1. Déterminer les réels a et b pour que $p(x)$ soit divisible par $(2x-1)$ et que le reste de sa division par $(x-1)$ soit égal à 16.
2. Achever la factorisation de $p(x)$.

Exercice 21

1. Vérifier que, pour tout réel x, $x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 16$.
   a) Montrer que 2 est une racine de P.
   b) En utilisant $P(2) = 2^3 + 3\times2^2 - 2\times2 - 16$, factoriser $P(x) - P(2)$.
   c) Montrer que $P(x) = (x-2)Q(x)$, où Q est un polynôme que l'on déterminera.
3. Le polynôme P peut-il s'exprimer comme produit de facteurs du premier degré ?

Exercice 22

On considère le polynôme $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ où a et b sont des réels.

1. Déterminer les réels a et b sachant que 1 et -3 sont des racines de $p(x)$.
2. Achever la factorisation de $p(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $p(x) = 0$.
3. Pour $t \neq 0$, déduire les solutions de l'équation $(\frac{1}{t})^3 + 4(\frac{1}{t})^2 + (\frac{1}{t}) - 6 = 0$.

Exercice 23

On considère deux polynômes p et q définis par :
$p(x) = 2x^4 - 4x^3 - 33x^2 + ax + b$ et $q(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$.

1. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme p soit divisible par $x^2 - x + 12$.
2. Achever la factorisation de p.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $p(x) = 0$, puis l'inéquation $p(x) \geq 0$.
4. Montrer que q peut s'écrire sous la forme $q(t) = t^2 - 3t + 2$ où $t = x + \frac{1}{x}$.
5. Montrer que si α est une racine q, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ l'est aussi.
6. Montrer que $q(t)$ est divisible par $(t-1)$, puis déduire sa forme factorisée.
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $q(x) = 0$.

Exercice 24

Soit $f(x) = x^5 + ax^4 + b$ un polynôme, où a et b sont des réels.

1. Déterminer les réels a et b pour qu'il existe un polynôme g tel que : $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ pour tout réel x.
2. On donne $p(x) = x^3 - (3+t)x^2 + (2+3t)x - 2t$ où t est un réel.
   a) Démontrer que le réel t est un zéro de $p(x)$.
   b) Factoriser $p(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 - (3+\sqrt{2})x^2 + (2+3\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} \leq 0$.

Exercice 25

Soit $p(x) = 5x^3 - 5x^2 - 20x + 20$.

1. Calculer $p(1)$ et $p(2)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $p(x) = (x-1)(x-2)(ax+b)$.
3. Étudier le signe de $p(x)$.
4. Soit $AB = 5cm$.
   a) Déterminer suivant les valeurs du réel x, la nature de l'ensemble des points M du plan tels que : $(E) : 2MA^2 + 3MB^2 = 5x^3 - 5x^2 - 20x + 20$.
   b) Déterminer précisément puis construire si possible les ensemble (E) pour $x = 2$; $x = -4$; $x = 3$ et $x = 0$.

Exercice 26

Soit le polynôme T défini pour tout réel x par :
$T(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x + 14$.

1. Déterminer deux polynômes $P(x)$ et $R(x)$ tels que : $T(x) = (x^2 - 4x + 1)P(x) + Q(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
3. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $T(x)$ par $x - 2 - \sqrt{3}$.
4. Calculer $T(2 - \sqrt{3})$.

Exercice 27

On considère le polynôme p de degré 3 défini par :
$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. Quelles conditions doivent satisfaire les réels a, b, c et d pour que :
   a) $x_0 = 1$ soit racine de $p(x)$.
   b) $x_1 = -1$ soit racine de $p(x)$.
2. On suppose que : $p(x) = x^3 - (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})x - \sqrt{6}$.
   a) Sans calculer $p(1)$, montrer que $p(1) = 0$
   b) Déterminer les réels α, β et γ tel que : $p(x) = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $p(x) = 0$

Exercice 28

Soit f un polynôme défini par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

1. a) Vérifier que 0 n'est pas racine de $f(x)$.
   b) Montrer que pour $x \neq 0$; $f(x) = x^4 f(\frac{1}{x})$.
   c) En déduire que si a est racine de $f(x)$, alors $\dfrac{1}{a}$ l'est aussi.
2. On pose $y = x + \frac{1}{x}$.
   a) Montrer que pour $x \neq 0$; $f(x) = x^2(y^2 - 2y + 1)$.
   b) $f(x)$ admet-il des racines dans $\mathbb{R}$?

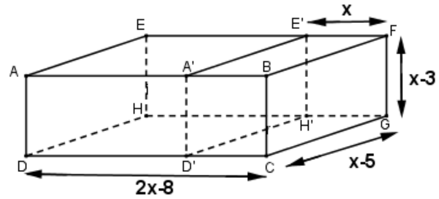
Exercice 29

Soit $p(x)$ un polynôme défini par : $p(x) = \alpha - (x+2)^4$ avec α un nombre réel.

1. Déterminer le réel α pour que $p(x)$ soit divisible par $(x-1)$.
2. Montrer que pour tout réel x, on a : $p(x) = -(x-1)(x+5)(x^2+4x+13)$.
3. Soit $q(x) = -2x^3 - 10x^2 + 2x + 10$.
   a) Démontrer que $q(x)$ est factorisable par $(x-1)$ et $(x+5)$.
   b) Déterminer deux réels α et β tels que : $q(x) = (x-1)(x+5)(\alpha x + \beta)$.
4. On pose $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition de h.
   b) Simplifier l'expression de h.

Exercice 30

La figure ci-dessous est celle d'un récipient qui a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$.



On rappelle que le volume d'un pavé droit est $V = L \times l \times h$.

1. Calculer le volume $p_1(x)$ du récipient $ABCDEFGH$ en fonction de x.
2. Calculer le volume $p_2(x)$ du petit récipient $A'BCD'E'FGH'$ en fonction de x.
3. Démontrer que le volume p du récipient $AA'D'DEE'H'H$ est $p(x) = x^3 - 16x^2 + 79x - 120$.
4. Montrer que $p(x)$ est factorisable par $(x-3)$.
5. Mettre $p(x)$ en produit de facteurs premier.
6. Pour quelles valeurs de x le volume $p(x)$ est nul ?

Exercice 31
On considère les polynômes p et q définis par :
$p(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ et $q(x) = x^2 - x + a$ avec a un nombre réel.

1. Déterminer a pour que $q(x)$ soit divisible par $(x-4)$.
2. Déterminer l'autre racine de $q(x)$ puis donner sa factorisation.
3. Calculer $p(1)$ et $p(-1)$.
4. Déterminer trois réels non nuls α, β et γ tels que : $p(x) = (x-1)(x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$.
5. Mettre $p(x)$ en produit de quatre facteurs du premier degré.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $p(x) = 0$.

Exercice 32
Soit p et f deux polynômes définis par :
$p(x) = 3x^4 + 16x^3 + 26x^2 + 16x + 3$ et $f(\frac{1}{x}) = \dfrac{1}{x^n} f(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si n est impair, -1 est une racine de $f(x)$.
2. Montrer que si a est racine de $f(x)$, alors $\dfrac{1}{a}$ l'est aussi.
3. Calculer $p(-3)$. Que peut-on déduire ?
4. Montrer que pour $x \neq 0$; $p(x) = x^4 p(\frac{1}{x})$.
5. En déduire que $-\dfrac{1}{3}$ est aussi racine de $p(x)$.

Exercice 33
On donne le polynôme f défini par : $f(x) = x^3 - 14x + 8$.
On admet que f a trois racines distinctes notées α ; β et γ.

1. Sans calculer α ; β et γ, déterminer $A = \alpha\beta\gamma$,
$B = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$, $C = \alpha + \beta + \gamma$, $D = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
2. Calculer $f(-4)$. En déduire les trois racines de f.

LE SECOND DEGRÉ

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$(x^2+x+1)^2 - 2(x^2+x+1) - 3 = 0$; $\left(\dfrac{8-x}{x-2}\right)^2 = 5\left(\dfrac{8-x}{x-2}\right)$;
$(x+\frac{1}{x})^2 = 3(x+\frac{1}{x}) - \frac{5}{4}$; $(x^2-5x)^2 = x^2 - 5x + 42$;
$(x^2+x+1)^2 = (x^2+x+2)^2 - 9$.

Exercice 2
Soit l'équation $(E) : x^2 - 3x + 6 = 5\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et on pose $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : y^2 - 5y + 4 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E') : y^2 - 5y + 4 = 0$.
3. En déduire la résolution de l'équation (E).

Exercice 3

1. Calculer $A = (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{6})x + 2\sqrt{3} = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{6})x + 2\sqrt{3} \leq 0$.

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; $-x^4 + 18x^2 - 32 = 0$; $x^4 + x^2 - 2 = 0$; $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $x^4 - 2x^2 - 15 > 0$; $3x^4 - 5x^2 + 22 \leq 0$; $3x^4 - 11x^2 + 18 \geq 0$; $4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0$.

Exercice 6
Factoriser les polynômes $p(x)$ suivants :
$p(x) = 2x^4 - 21x^2 + 10$; $p(x) = x^4 - 15x^2 - 16$;
$p(x) = 4x^4 - 20x^2 + 25$; $p(x) = 2x^4 - 5x^2 + 2$

Exercice 7
Déterminer les valeurs de m, pour que les équations suivantes aient deux solutions strictement positives.
a) $2x^2 - x + m + 2 = 0$; *b)* $(m-3)x^2 + (2m-1)x - 2 + 4m = 0$.

Exercice 8
Placer le réel α par rapport aux racines des équations suivantes :

1. $5x^2 + 3x - 2 = 0$; $\alpha = -3$.
2. $3x^2 - 4x + m - 1 = 0$; $\alpha = 4$

Exercice 9
Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence et signe des racines de l'équation $mx^2 - 2(m+1)x + 2(m+1) = 0$

Exercice 10
On considère l'équation $(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 9 = 0$.

1. Montrer que son discriminant est un produit de trois facteurs du premier degré en m.
2. Étudier son signe ainsi que celui de la somme et du produit de x' et x'' puis l'existence et le signe de ces derniers.
3. Trouver une relation indépendante de m qui existe entre x' et x'' puis en déduire les valeurs de chacune des racines doubles de l'équation.
4. On donne $Y = \dfrac{1}{x'+1} + \dfrac{1}{x''+1}$. Calculer Y en fonction de m.
5. Trouver les valeurs de m pour lesquelles on a : $Y = -16$.

Exercice 11
Les racines d'une équations du second degré vérifient les

relations : $\begin{cases} x' + x'' - 2x'x'' = 0 \\ mx'x'' - (x' + x'') = 2m + 1 \end{cases}$

1. Former cette équation.
2. Déterminer m pour que cette équation soit du premier degré.
3. Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines ?
4. Pour quelles valeurs de m cette équation admet des racines doubles.
5. Déterminer m de façon que les deux racines soient positives.
6. Dans ce cas, on considère le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectivement x' et x''. Déterminer m de façon que l'hypoténuse de ce triangle soit égale à $\sqrt{2}$.

Exercice 12

On donne S et P respectivement la somme et le produit des racines x' et x'' d'une équation du second degré définie par : $m = \dfrac{3S + 4\sqrt{2}}{S + 2\sqrt{2}} = \dfrac{3P - 1}{P}$.

1. Forme cette équation.
2. Étudier l'existence et le signe de racines de cette équation.
3. Déterminer m pour que l'on ait : $x'' = \dfrac{1}{x'}$.
4. Déterminer m pour que l'on ait : $2x' - 3x'' = 5$.

Exercice 13

1. Déterminer l'équation du second degré (E) dont les solutions x' et x'' vérifient le système :
$\begin{cases} 2x'x'' + 4 = 3x' + 3x'' \\ 3x' + 3x'' + 2(m+2)x'x'' = 2m + 2 \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{R}. \end{cases}$
2. On considère le trinôme T_m définit par :
$T_m(x) = (3m+9)x^2 - (6m+10)x + 3m - 3$ avec $m \in \mathbb{R}$
   a) Pour quelles valeurs de m ce trinôme admet-il :
   ▷ Deux racines distinctes.
   ▷ Une racine unique.
   b) Étudier l'existence et le signe des racines.
   c) Pour quelles valeurs de m, les racines de ce trinôme sont des signes contraires.
   d) Établir une relation indépendante de m entre x' et x''.
3. Déterminer les coordonnées du point fixe A associe au trinôme $T_m(x)$.

Exercice 14

On considère l'équation (E) d'inconnue x où m désigne un paramètre réel : $(E) : (m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$.

1. Déterminer m pour que $x = -1$ soit racine de (E).
En déduire l'autre racine.
2. Résoudre (E) pour $m = -1$; $m = -3$ puis pour $m = 3$.
Dans la suite, on suppose $m \neq -1$.
3. Montrer que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (m-1)(5m+3)$.
Dresser le tableau des signes du discriminant Δ;
du produit P et de la somme S des racine lorsqu'elles existent.
4. Pour quelles valeurs de m, l'équation (E) admet :
   a) deux racines ;
   b) deux racines positives ;
   c) deux racines de même signe ;
   d) deux racines x' et x'' telles que $\dfrac{2}{x'} + \dfrac{2}{x''} = -\dfrac{16}{5}$
5. Déterminer une relation indépendant entre les racines x' et x'' de (E).

Exercice 15

On considère l'équation $(m+3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0$ où m est un paramètre réel.

1. Déterminer m pour que l'équation admette deux racines réelles distinctes x' et x''.
2. Déterminer m pour que $(2x'-1)(2x''-1) = 16$.
3. Former une équation du second degré ayant pour racines $\alpha = 3x' - 2$ et $\beta = 3x'' - 2$.
4. Déterminer une relation indépendante de m liant les racines x' et x'' de la première équation.

Exercice 16

Soit l'équation (E) définie par
$(E) : 3(m+3)x^2 - 2(3m+5)x + 3m - 3 = 0$, où m est un paramètre réel.

1. Trouver m pour que $x = -2$ soit racine de (E).
En déduire l'autre racine.
2. Résoudre (E) pour $m = -\frac{1}{2}$. Dans la suite on pose $m \neq 3$
3. Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence et le signe des racines x' et x'' de l'équation (E).
4. Pour quelle valeurs de m (E) admet deux racines de signes contraires.
5. On pose :
$B = \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$, x' et x'' les racines de l'équation (E).
   a) Exprimer B en fonction de m.
   b) Déterminer m pour que l'on ait $B = 3$.
   c) Déterminer la relation indépendante de m entre les racines x' et x'' de (E).

Exercice 17

On considère le système (S) de deux équations à deux inconnues x et y suivant :
$\begin{cases} (x+y)^2 - 3(x+y) - 2xy = -2 \\ 2(x+y) - xy = 5 \end{cases}$

1. On pose $S = x + y$ et $P = xy$.
   a) Montrer que S et P vérifient le système :
   $\begin{cases} S^2 - 3S - 2P = -2 \\ 2S - P = 5 \end{cases}$
   b) Déterminer S et P.
2. Justifier que x et y sont les racines d'une équation du second degré de la forme : $X^2 - SX + P = 0$.
3. En déduire les solutions du système (S).

Exercice 18

1. Développer $(x+\frac{1}{x})^2$.
2. Montrer que l'équation $(E) : x^2-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-1=0$ est équivalente à l'équation $(E') : X^2-2X-3=0$, avec $X=x+\frac{1}{x}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E').
4. En déduire la résolution de l'équation (E).

Exercice 19

Soit l'équation $(E) : 2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=0$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de cette équation.
2. En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 2x^2-9x+8-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$.
3. Développer $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.
4. Monter qu'en posant $X=x+\frac{1}{x}$, l'équation (E') devient $2X^2-9X+4=0$.
5. Résoudre l'équation (E').
6. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 20

On considère l'équation (E) définit par :
$(E) : x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

1. Montrer que 0 n'est pas racine de (E).
2. En mettant x^2 en facteur montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : (x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})-6=0$.
3. Par un changement de variable, résoudre (E') ; puis déduire les solutions de (E).

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS IRRATIONNELLES ET AVEC VALEURS ABSOLUES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x+3|=-x+2$.
2. $\sqrt{x^3+2x+1}=x+1$.
3. $3x-3+3\sqrt{x+11}=0$.
4. $\sqrt{2x^2+x+1}<\sqrt{x+3}$.
5. $x+\sqrt{-1+x^2}>0$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+3}=2$.
2. $\sqrt{x+5}=-2018$.
3. $\sqrt{4x+1}=x+1$.
4. $\sqrt{x^2-5x+6}=-x+4$.
5. $\sqrt{x+3}=\sqrt{4x+7}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{(x-3)(4-x)}<5$.
2. $\sqrt{2x^2-9x-1}>2$.
3. $\sqrt{2x^2-9x-1}<2$.
4. $\sqrt{(x-3)(4-x)}>-1$.
5. $\sqrt{(x-3)(4-x)}<-1$.
6. $\sqrt{-2x^2+5x+3}<2x+1$.
7. $\sqrt{3-x}\geq x-1$.
8. $x+\sqrt{2x-2}\leq 4$.
9. $\sqrt{2x+1}>\sqrt{x}$.
10. $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\leq\sqrt{4x-1}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+1|=2$.
2. $|3x+6|=-8$.
3. $|2x+5|=3x-1$.
4. $|4x-2|=|x+1|$.
5. $|x-\sqrt{2}|=2\left(|x-\sqrt{2}|+3\right)$.
6. $|x+5|\geq 2(|x+5|+1)$.
7. $|x+5|\geq 2(|x+5|+1)$.
8. $|x+5|\geq 2(|x+5|+1)$.
9. $|3x+2|\leq 2$.
10. $|2x-1|>3$.
11. $|4x+2|\leq x+1$.
12. $|5x+8|\geq x+1$.
13. $|x+1|>2x+3$.
14. $|4x+2|\leq|x+1|$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{(x+1)(3-x)}=3x-1$.
2. $\sqrt{x^2-5x+6}=-x+4$.
3. $\sqrt{3x^2-11x+21}=2x-3$.
4. $\sqrt{4x+1}=x+1$.
5. $\sqrt{2x^2+2}\leq 3-x$.
6. $\sqrt{-2x^2+5x+3}<2x+1$.
7. $2x+1-\sqrt{7-6x}>0$.
8. $\sqrt{5x+1}-1\leq 0$.
9. $\sqrt{2x^2-9x-1}>2$.
10. $\sqrt{2x^2-9x-1}<2$.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=-6 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} 2x-(m+1)y=-m \\ (m+1)x-2my=2m-4 \end{cases}$

$m \in \mathbb{R}$; $(S_3)\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=9 \\ x+2y=1 \end{cases}$; $(S_4)\begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ 2x+y+z=-2 \end{cases}$;

$(S_5)\begin{cases} mx+2y-z=m \\ 2x+my-2z=2 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$;

$(S_6)\begin{cases} x+2y^2+3z^3=7 \\ 2x+3y^2+4z^3=11 \\ x-y^2-z^3=0 \end{cases}$; $(S_7)\begin{cases} x^3+y^3=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :
   $(S)\begin{cases} x+y+z=2m \\ x+y-z=2 \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2}m^2 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$
2. Les triplets (x, y, z) solutions du système (S) peuvent-ils représenter les longueurs des côtés d'un triangle T ? Discuter suivant les valeurs du paramètre m.
3. a) Existe-t-il des triangles T isocèles ?
   b) Existe-t-il des triangles T rectangle dont z est la longueur de l'hypoténuse ?

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} -2x+5y=21 \\ 3x-7y=-29 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+-7y=13 \\ x-2y=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 9x-5y=39 \\ 15x-3y=81 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+1,5y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$

Exercice 4

On donne le système suivant :

$(S) : \begin{cases} 3x-y=15 \\ \frac{1}{2}x-y=5 \end{cases}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système (S).
2. En déduire la solution du système (S') : $\begin{cases} \frac{3}{x-1}-\frac{1}{y}=15 \\ \frac{1}{2x-2}-\frac{1}{y}=5 \end{cases}$

Exercice 5

On donne le système $(S) : \begin{cases} x+y+z+t=-1 \\ 4x+3y+2z+t=-5 \\ 8x+4y+2z+t=-8 \\ 32x+12y+4z+t=-30 \end{cases}$

1. Transformer le système (S), en un système triangulaire.
2. En déduire les solutions du système (S).

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} -x^2+y^2=5 \\ -x^2+2y^2=14 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x}-3\sqrt{y}=-3 \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=23 \end{cases}$; $\begin{cases} 2|x|-3|y|=1 \\ 5|x|+-8|y|=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x^2+\frac{3}{y+1}=1 \\ 5x^2+\frac{8}{y+1}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{2}{x^2}+\frac{3}{(y+1)^2}=1 \\ \frac{5}{x^2}+\frac{8}{(y+1)^2}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+4y^2=8 \\ x+2y=4 \end{cases}$

Exercice 7

Préciser, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions des systèmes suivants :

$\begin{cases} 2x+my=2 \\ -x+3y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2mx+4y=2m \\ (2m-3)x+(m-1)y=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} mx+y=-2m \\ x+my=m-1 \end{cases}$; $\begin{cases} mx+3y=2m+3 \\ 3x+my=-m \end{cases}$;

$\begin{cases} (m+1)x-(m-1)y=2 \\ 3x-5y=-2 \end{cases}$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} x+z=8 \\ y+z=10 \\ x+y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 4y+3z=-1 \\ 3x-6y-5z=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x+2y-3z=1 \\ 8x-4y+3z=-5 \\ 2x-5y+4z=-6 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+6z=3 \\ 2x-9y+12z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 4x+5y-20z=-2 \\ -3x+5y+5z=4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ -4x-5y+7z=1 \\ 2x+y-3z=9 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x+y+3z=0 \\ x-2y-z=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-3y=9 \\ x+2y=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \\ x-3y=0 \end{cases}$;

ARITHMÉTIQUES

Exercice 1
On donne $\alpha_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer α_0 ; α_1 et α_2.
2. Démontrer que α_n est divisible par 7.

Exercice 2

1. Vérifier que $(n+1)^3 = n^2(n+3) + 3n + 1$.
2. Pour tout entier naturel n, le reste de la division de $(n+1)^3$ par n^2 est-il $3n+1$?

Exercice 3
On considère les nombres a et b tels que : $a = 137$ et $b = 73$.
Déterminer les restes des divisions euclidiennes de $a+b$; ab ; $3a-2b$ et a^2+3b^3 par 25.

Exercice 4
Soit n un entier naturel.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 suivant les valeurs de n.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de 5^{2018} et 5^{2019} par 7.

Exercice 5
La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

Exercice 6
Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

Exercice 7
Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que : $a+b+r = 3025$ et $q = 50$. Déterminer a ; b et r.

Exercice 8
On donne deux entiers naturels A et B tels que : $A = n^2 - n + 1$ et $B = (2753)^2 - 2753 + 1$ avec n un entier naturel.

1. Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de A par 7.
2. En déduire les entiers n tels que le nombre A soit divisible par 7.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de B par 7.

Exercice 9
Déterminer le $PGCD$ des entiers a et b dans chacun des cas suivants : $a = 1455$ et $b = 335$; $a = 3604$ et $b = 4452$; $a = 13860$ et $b = 4438$; $a = 323232$ et $b = 232323$

Exercice 10
Déterminer le $PPCM$ des entiers a et b dans chacun des cas suivants : $a = 48$ et $b = 32$; $a = 1640$ et $b = 492$; $a = 168$ et $b = 2160$; $a = 343$ et $b = 1225$

Exercice 11
Vérifier si les nombres suivants sont premiers : 103 ; 119 ; 137 ; 211 ; $2^7 - 1$ et $2^{11} - 1$.

Exercice 12
Déterminer le $PGCD(-304939; -151097)$, puis déduire le $PPCM(-304939; -151097)$.

Exercice 13
Un fleuriste a reçu 924 roses et 1092 tulipes.
Il désire confectionner des bouquets en respectant les consignes suivantes :
▹ le nombre de bouquets confectionnés doit être le plus grand possible ;
▹ chaque bouquet doit comporter le même nombre de roses et le même nombre de tulipes ;
▹ toutes les fleures reçues doivent être utilisées dans la confection des bouquets.

1. Déterminer le nombre de bouquets que pourra confectionner le fleuriste.
2. Déterminer le nombre de roses et le nombre de tulipes dans chaque bouquet.

Exercice 14
Un ouvrier dispose d'une plaque de métal de $110cm$ de longueur et $88cm$ de largeur.
Il a reçu le consigne suivante : " Découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte. "

1. Déterminer la longueur du côté d'un carré.
2. Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

Exercice 15

1. Déterminer le $PGCD$ des nombres 10780 et 3520.
2. Rendre irréductible la fraction $F = \dfrac{3520}{10780}$.
3. Déterminer l'entier naturel n tel que : $n^2 = 49 \times F$.
4. Déterminer les entiers relatifs p tel que : $p^2 = 49 \times F$.

Exercice 16
On donne $A = 72$.

1. Décomposer A en produit des facteurs premiers.
2. Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ?
3. Déterminer l'ensemble de diviseurs positifs de A.

Exercice 17
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} PGCD(x,y) = 12 \\ x+y = 60 \end{cases}$; $\begin{cases} PPCM(x,y) = 98280 \\ x-y = 22932 \end{cases}$;

$\begin{cases} PGCD(x,y) = 504 \\ x+y = 135 \end{cases}$; $\begin{cases} PGCD(x,y) = 42 \\ PPCM(x,y) = 1680 \end{cases}$

SYSTÈME DE NUMÉROTATION

Exercice 1
Soit a un entier naturel défini par : $a = 34512$

1. Écrire a comme somme de puissance de 10.
2. Dans le système binaire un nombre b s'écrit $b = (100011)_2$.
   a) Écrire b comme somme de puissance de 2.
   b) Trouver ce nombre dans le système décimal.

Exercice 2
Soit a et b deux entiers naturels tels que :
$a = 34$ et $b = (100111)_2$.

1. Effectuer les divisions successives de a par 2.
2. Déterminer a base 10 en base 2.
3. Écrire b comme somme de puissance de 2.
4. Déterminer le nombre b dans la base décimal.

Exercice 3

1. Dans un système décimal, un nombre entier nature N s'écrit $x43y$. Déterminer les couples (x, y) tels que N soit divisible par 2 et 9.
2. Dans un système décimal, un nombre entier nature N s'écrit $28x75y$. Déterminer les couples (x, y) tels que N soit divisible par 3 et 11.
3. Dans un système décimal, un nombre entier nature N s'écrit $1x1yxy$. Déterminer les couples (x, y) tels que N soit divisible par 63.

Exercice 4

1. Écrire dans le système décimal le nombre $A = \overline{F0A5}^{16}$.
2. Écrire le nombre $B = 64206$ en base seize.

Exercice 5
p et q sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. Parmi les nombres suivants, un seul est divisible par 7 quelles que soient les valeurs de p et q. Trouver ce nombre.
a) $\overline{qqppqp}$; *b)* $\overline{qqqppp}$; *c)* $\overline{qpqqpp}$; *d)* $\overline{qpqpqp}$

Exercice 6
Déterminer les couples (x, y) de chiffres tels que le nombre d'écriture décimale $\overline{724xy}$ soit multiple de 9.

Exercice 7

1. Écrire en base deux les nombres suivants :
   85 ; 104 ; 3607.
2. Écrire dans le système décimal les nombres suivants : $\overline{10110}^2$; $\overline{111000}^2$; $\overline{1010101010}^2$; $\overline{110100011}^2$.

Exercice 8

1. Écrire $A = 2^6 - 1$ en base deux.
2. Soit b un entier naturel supérieur à 1.
   Écrire $(b+1)^2$ en base b. On distinguera deux cas : $b = 2$ et $b \neq 2$

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Exercice 1
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans le cas suivants :
$f(x) = \sqrt{x^2 + |x|}$; $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $f(x) = 54x^7 + 47x^5 + 2$; $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$; $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{-x+5}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{-2x+3}}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-1}}$; $f(x) = \dfrac{x}{x+|x|}$;
$f(x) = \dfrac{1}{|x| + m}$ avec $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans le cas suivants :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1 + \dfrac{1}{2-x}, & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2\sqrt{x+1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2+3x+3}{2x+2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = -x - 9 + 6\sqrt{x+3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin(\pi x), & \text{si } -5 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x - \sqrt{x^2-1}, & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = 2\cos(\pi x), & \text{si } -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 3
Soit f et g deux fonctions définies par :
$f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$. On pose $h = g \circ f$.

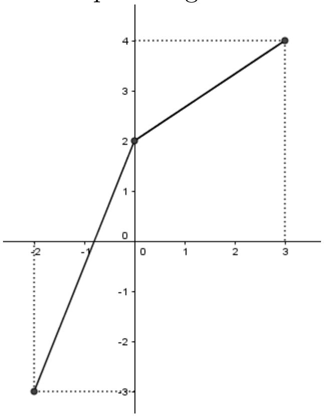
1. Déterminer l'ensemble de définition de h et calculer $h(x)$.
2. Soit k une fonction définie par : $k(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$.
   les fonctions h et k sont-elles égales ?
3. k est-elle bijective ? si oui déterminer $k^{-1}(x)$.

Exercice 4
On donne $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^2 - 2$ et $h(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$, puis calculer $h \circ g \circ f(x)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ h \circ f$, puis calculer $g \circ h \circ f(x)$.

Exercice 5

Soit f l'application dont la représentation graphique $(\mathscr{C})$ est donnée par la figure ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer l'expression de $f(x)$ sur son ensemble de définition.
3. Démontrer que f est bijective.
4. Déterminer la réciproque de f notée f^{-1}.
5. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$ et construire la courbe $(\mathcal{C}')$ sur le même graphique.

Exercice 6

Soit f la fonction donnée par son tableau de variation ci-contre

x	-6		-1		3		4
			-1				5
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-5				-3		

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la monotonie de f sur chacun des intervalles.
3. Déterminer $f(-6)$; $f(-1)$; $f(3)$ et $f(4)$.
4. Déterminer le maximum et le minimum de f.
5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 7

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2$.
2. On considère la fonction g définie par : $g(x) = 2x^2 - 8x + 9$. On désigne $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le plan.
   a) Utiliser la forme canonique du trinôme du second degré pour déterminer les réels a, b et c tels que : $g(x) = a(x-b)^2 + c$.
   b) En posant $y = g(x)$, montrer que le changement de variables $X = x - b$, $Y = y - c$, entraine $Y = aX^2$.
   c) Par quelle transformation simple la courbe $(\mathscr{C}')$ se déduit-elle de $(\mathscr{C})$?
   d) Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ sur la même figure que $(\mathscr{C})$.

Exercice 8

Soit f le polynôme de second degré défini par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. On désigne par $(\mathscr{P})$ la parabole représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Tracer la parabole $(\mathscr{P})$.
4. Soit $(\mathscr{P}')$ la parabole représentant la fonction g telle que $g(x) = x^2$ et on désigne par $(\mathscr{D})$ la droite de pente m passant par le sommet de $(\mathscr{P}')$ et qui coupe $(\mathscr{P})$ en deux points M et N.
   a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
   b) Déterminer en fonction de m, les coordonnées des points d'intersection M et N de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$.
   c) Trouver m pour que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux.

Exercice 9

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation : $y = -x^2 + 2x + 3$. Pour tout réel m, on considère la droite $(\mathscr{D}_m)$ d'équation : $y = x + m$.

1. Donner la forme canonique de $(\mathscr{P})$.
2. En déduire les coordonnées de son sommet S.
3. Construire, sur le même graphique, la parabole $(\mathscr{P})$ ainsi que les droites $(\mathscr{D}_4)$ et $(\mathscr{D}_0)$.
4. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{D}_m)$ et de $(\mathscr{P})$.
5. Soit E l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $(\mathscr{D}_m)$ et $(\mathscr{P})$ ont deux points communs A et B, distincts ou confondus.
6. On désigne par M le milieu du segment $[AB]$. Déterminer le lieu du point M lorsque m décrit E.

Exercice 10

Soit f une fonction définition par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Déterminer les nombres réels α et β tels que : $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-1}$.
   b) Montrer que le point $I(1,2)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
2. On considère les points $M(x,y)$; $I(1,2)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Exprimer X et Y en fonction de x et y.
   b) En déduire que $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique, dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction h que l'on déterminera.
   c) Étudier la parité de h, puis donner une interprétation géométrique.
3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 11

Soit g une fonction définie par : $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Déterminer les nombres réels α et β tels que :
$g(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x^2+2}$.
3. a) Démontrer que $-1 < g(x) < 2$.
   b) En déduire que la fonction g est bornée.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 5$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 13

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Démontrer que le point $A(1,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 14

1. Démontrer que la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{|x|+1}{x}$ est une fonction paire. Que peut-on dire de la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f ?
2. Démontrer que la fonction g telle que $g(x) = x^3 + x + \dfrac{1}{x}$ est une fonction impaire. Que peut-on dire de la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction g ?
3. Démontrer que la fonction h définie par :
$h(x) = x^4 - 2x + 1$ n'est ni paire, ni impaire.

Exercice 15

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 3$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ où x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $x_2 > x_1$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation.
5. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
6. Préciser le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des ordonnées.
7. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	2	$-\sqrt{3}$	-1		1	$\sqrt{3}$	2
$f(x)$				-3			

8. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 16

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = 4x^2 - 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Compléter le tableau suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$					3

3. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
4. Calculer $f(\frac{1}{2}x)$.
5. On définit la fonction g par : $g(x) = 2x^2 - 2$.
   a) Quel est l'ensemble de définition de g ?
   b) Montrer que pour tout réel x, $g(x) = 2f(\frac{1}{2}x)$.
   c) Quelle est la transformation simple qui permet de construire la courbe $(\mathscr{C}')$ de g à partir de la courbe $(\mathscr{C})$ de f ?
   d) Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Exercice 17

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x - nE\left(\dfrac{x}{n}\right)$ avec $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Démontrer que la fonction f est périodique de période à préciser.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $0 \leq f(x) < n$.

Exercice 18

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère les paraboles $(\mathscr{P}_a)$ définies par :
$y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2ax - 2a(1-a)$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel a, $(\mathscr{P}_a)$ est l'image de $(\mathscr{P}_0)$ par la translation de vecteur
$\overrightarrow{u} = -2a(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
2. Construire les paraboles $(\mathscr{P}_0)$, $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.
3. Déterminer la droite décrite par les sommes $\mathscr{S}_a$ des paraboles $(\mathscr{P}_a)$.
4. Déterminer une droite $(\mathscr{D})$ tangente à toutes les paraboles.

Exercice 19

Soit f et g deux fonctions définies par :
$f(x) = \dfrac{3}{x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b) Déterminer deux réels α et β tels que :
   $g(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-1}$.
   c) Montrer que le point $\Omega(1;2)$ est un centre de symétrie à $(\mathscr{C}_g)$.
3. On considère les points $M(x,y)$; $\Omega(1;2)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $M(x';y')$ dans $(\Omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   a) Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
   b) En déduire que $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par une transformation simple que l'on précisera.
   c) Tracer $(\mathscr{C}_g)$.

CALCUL DES LIMITES D'UNE FONCTION

Exercice 1

Calculer les limités suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x^3-x+6}{x^2-x-6}\ ;\quad \lim_{x\longrightarrow 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}\ ;\quad \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x+3}\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x-3-\sqrt{x^2-5x+2}}{x+3+\sqrt{3x^2-x+2}}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2-1}}\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1}.$$

Exercice 2

Calculer les limités suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2-x}}{x}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(x+\sqrt{x}+|x|\right)\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty}\frac{-x+\sqrt{x^2+1}}{x}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow 9^{\pm}}\left(\frac{2-\sqrt{x}}{9-x}\right)\ ;\ \lim_{x\longrightarrow 9^{+}}\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{9-x}\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty}\frac{x^2-|x|+2}{|x|}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow -1}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2-x}}{3(x+1}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{5x|x-1|}{x+3}\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{5-3\sqrt{x^2+4}}{2x}\ ;\quad \lim_{x\longrightarrow -\infty}(5-3x^2)^3(2x+4)^5\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x+3}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(x-2)^2}{1-3x^2}\ ;\ \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^3-4x^2+2x+3}{x^4-x-6}\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}\ ;\quad \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{5-x}-1}\ ;\quad \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4}(x+2-\sqrt{x^2-3x+1}).$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)\ ;\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{mx^2+3}{nx+2}\ ;\ \text{si } m<0,\ n<0\ ;$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\ ;\quad \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3-\dfrac{x^2}{2}-x}{8-\dfrac{x^3}{5}}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}};\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right);$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1};\ \lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2};\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2};\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2-3x+1}\right);\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1};\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1};\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}};\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{(x+1)^3}-1}{x}.$$

Exercice 4

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1-E(x)}{x}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

On rappelle que $E(x)\leq x<1+E(x)$.

1. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{1+E(x)}{x}\leq\dfrac{x+1}{x}$.
2. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{1+E(x)}{x}<1$.
3. En déduire que $1\leq\dfrac{1+E(x)}{x}\leq\dfrac{x+1}{x}$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Déterminer la limite de f à gauche et à droite de n.

Exercice 6

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+E(x)}{x}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Démontrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a :
   $2\leq f(x)\leq\dfrac{2x+1}{x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 7

Soit g une fonction définie par :

$g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{ax^2+bx+1}{(x^2-1)^2}$.

1. Donner l'expression de $\varphi(X)$, de $g(x)$ en fonction de la nouvelle variable $X=x-1$.
2. Utiliser $\varphi(X)$ pour étudier suivant les valeurs de a et de b la limite de $g(x)$ quand x tend vert 1.

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi};\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}};\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x};\ \lim_{x\to-2}\frac{\tan\pi x}{x+2};\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\tan^2 2x};\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\tan 6x}{1-2\sin x};$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3x-\pi};\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1};\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{3+\cos x};\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\sin x};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 9

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et donner une écriture simplifier de $f(x)$.
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

Exercice 10

Soit f une fonction définie par : $f(x)=xE(\frac{1}{x})$ où E désigne la partie entière.

1. Montrer que pour $x<0$; $1\leq f(x)<1-x$ et pour $x>0$; $1-x\leq f(x)<1$.
2. En déduire la limite de f en 0.

CONTINUITÉS ET DÉRIVABILITÉS

Exercice 1

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2+4; & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 3x+2; & \text{si } x > 2 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité de f en 2.

Exercice 2

On considère deux fonctions f et g définies par :

$\begin{cases} f(x) = x^2 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}; & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}; & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g.
2. f et g sont-elles continues en 0 ?
3. f et g sont-elles dérivables en 0 ?
4. Donner une interprétation géométrique des points $A(0,1)$ et $B(0,-1)$.

Exercice 3

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$\begin{cases} f(x) = x^2+x-6 & si\ x < 2 \\ f(x) = 2x-a & si\ x > 2 \\ f(2) = b \end{cases}$

Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 3

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}; & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2+x+a; & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer a pour que f soit continuité de f en 0.

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de E_f.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.
4. Montrer que la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
5. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$.
6. Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.

Exercice 4

Soit g une fonction définie par : $g(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Vérifier que g n'est pas définie en 0.
3. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g(x)$.
4. Montrer que g peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$ par une fonction h que l'on déterminera.
5. Déterminer l'ensemble de définition de h.

Exercice 5

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Vérifier que f n'est pas définie en 1.
3. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x)$.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_1 = 1$ par une fonction g que l'on déterminera.
5. Déterminer l'ensemble de définition de g.

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 4[x-E(x)][E(x)+1-x]$ où E est la partie entière.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x+1) = f(x)$.
2. Que peut-on déduire de f ?
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
4. Étudier la dérivabilité de f.

Exercice 7

Soit $g(x) = \dfrac{1}{2}E(x)[2x-E(x)-1]$ où E est la partie entière.
Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x+4-\frac{1}{x-1}; & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2-1}; & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté E_f.
2. Calculer les limites aux bornes de E_f.
3. Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
5. Donner l'ensemble de continuité de f.
6. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
7. Donner l'ensemble de dérivabilité de f.

Exercice 9

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 2019$; $f(x) = 24x^5+2x-7$; $f(x) = \dfrac{4x^3-3x+1}{x+2}$;

$f(x) = \sqrt{x(x+2)}+3x^2+2$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{x^3}}$; $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$;

$f(x) = \cos(3x)+\sqrt{2x^2+4}$; $f(x) = (x^3+2x-1)^2$;

$f(x) = |x+2|$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2x+1}}$;

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $f(x) = x+\sqrt{x^2+x+1}$;

$f(x) = (x+2)\sqrt{x-1}$; $f(x) = (x-1)^4+\dfrac{1}{x-1}$

Exercice 10

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ où a est un réel.

1. Donner son ensemble de définition de f.
2. Calculer f', f'', f''' les dérivées de f.

ÉTUDES DES FONCTIONS

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+2}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f.
3. Montrer que pour tout $x\neq -2$; $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)^2}$ puis étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in E_f$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.
6. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $y=x-1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ et préciser l'autre asymptote.
7. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.
8. Déterminer les points d'intersections de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes du repères.
9. Tracer $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

Exercice 2

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

1. Déterminer a et b, sachant que la courbe $(\mathscr{C})$ de f passe par le point $A(0,3)$ et admet en ce point une tangente d'équation $y=4x+3$.
   Dans la suite on prendra $a=4$ et $b=3$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Calculer les limites de f aux bornés de son ensemble de définition.
4. Démontrer que $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$; puis étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
7. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 3

Soit g une fonction définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}, \text{ si } x\leq 0\\ g(x)=x^3+3x, \text{ si } x>0\end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Calculer les limites aux bornes de E_g.
3. Étudier la continuité de g en $x_0=0$.
4. Étudier la dérivabilité de g en $x_0=0$.
5. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
6. a) Déterminer les équations de demi-tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ de g en $x_0=0$.
   b) Donner la nature du point $O(0,0)$.
7. Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$.
8. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de g.

Exercice 4

Soit p une parabole d'équation $p(x)=ax^2+bx+c$, avec a, b et c des réels.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que p :
   ▷ passe par le point $A(0,-3)$;
   ▷ ait un sommet d'abscisse -1 ;
   ▷ admette, au point d'abscisse 1, une tangente de coefficient directeur 4.
2. Construire les courbes représentatives $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ des fonctions f et g respectivement définies par : $f(x)=x^2+2x-3$ et $g(x)=1-x^2$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection B et C de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
4. Donner une équation de la droite (BC).
5. Étudier graphiquement le signe de : $h(x)=x^2+2x-3-(1-x^2)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x-2+\sqrt{-x}, & \text{si } x\leq 0\\ f(x)=\dfrac{x-a}{1-x}, & \text{si } x>0\end{cases}$
où a est un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le réel a pour que f soit continuité en $x=0$.
3. Étudier la dérivabilité de f en $x=0$.
4. En déduire les équations des demi-tangentes à $(\mathscr{C}_f)$, courbe représentative de f, au point d'abscisse $x=0$.
5. Étudier les variations de f.
6. Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.
7. Construire soigneusement la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Exercice 6

On considère les fonctions f_α définie par : $f_\alpha(x)=\alpha x^3-3x+1$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. On désigne par $(\mathscr{C}_\alpha)$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ unité $2cm$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_α.
2. Calculer les limites de f_α aux bornes de son ensemble de définition suivant les valeurs de α.
3. Démontrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_\alpha)$ passent par un point fixe Ω,
   dont on déterminera les coordonnées.
4. Montrer que Ω est un centre de symétrie de toutes les courbes $(\mathscr{C}_\alpha)$.
5. Calculer la dérivée f'_α de f_α.

6. Étudier, suivant les valeurs de α, les variations de f_α et dresser son tableau de variation de chaque cas.
7. Tracer dans le même repère les courbes $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$ et $(\mathscr{C}_{-\frac{1}{2}})$ des fonctions $f_{\frac{1}{2}}$ et $f_{-\frac{1}{2}}$.

Exercice 7

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3x+3}$ et $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$.
4. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
5. Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3x(x+2)}{(x^2+3x+3)^2}$.
6. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.

Exercice 8 (Les parties A et B sont indépendantes)

Partie A :

On considère la famille des fonctions définies par :
$f_m(x) = \dfrac{mx+1}{x^2-m}$, m désigne un paramètre réel et $(\mathscr{C}_m)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Préciser l'ensemble de définition de f_m dans les cas suivants : *a)* $m < 0$; *b)* $m > 0$.
2. Démontrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent par un point fixe A, dont on déterminera les coordonnées.
3. Calculer la dérivée f'_m de f_m.

Partie B :

On considère la fonction g définie par :
$g(x) = \dfrac{-x^2}{x^2+3x+3}$.

1. Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$ de g puis étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.
4. Calculer la dérivée g' de g puis dresser son tableau de variation de g.
5. Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique $2cm$.

Exercice 9

Soit f_n la famille des fonctions définies par :
$f_n(x) = \dfrac{x^2-(n+1)x+2n}{x-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n.
2. Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
4. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f_n(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
5. Montrer que la droite $(\mathscr{D}_n)$ d'équation $y = x - n$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_n)$ et étudier la position de $(\mathscr{C}_n)$ par rapport à $(\mathscr{D}_n)$.
6. Montrer que $\forall\ x \neq 1$, $f'_n(x) = \dfrac{x^2-2x+1-n}{(x-1)^2}$.
7. Dresser le tableau de variation de f_n.
8. Tracer $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{C}_1)$

Exercice 10

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{1-\dfrac{1}{|x|}}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le plan muni à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Écrire $f(x)$ sans barre de valeur absolue.
3. Étudier la dérivabilité de f en -1 et 1 puis interpréter les résultats obtenus.
4. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
5. Étudier branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 11

Partie A

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de E_f.
3. Vérifier que la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux asymptotes dont on donnera leurs équations.
4. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 3.
7. Construire les asymptotes,$(\mathscr{T})$ et $(\mathscr{C})$.

Partie B

On considère la famille des fonctions g_m définie par : $g_m(x) = (-m+2)x^2 + 2(m-1)x - 2$ où $m \in \mathbb{R}$.
On désigne par (Γ_m) sa représentation graphique.

8. Démontrer que toutes les courbes (Γ_m) passent par deux points dont les coordonnées sont indépendantes de m.
9. m étant différent de 2, calculer les coordonnées du sommet $(\mathscr{S}_m)$ de (Γ_m).
10. Démontrer pour tout m différent de 2, $(\mathscr{S}_m)$ appartient $(\mathscr{C})$.

Exercice 12

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^{2n+1} + x + n$ où n est un entière naturel.

1. Déterminer l'ensemble de définie de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 2}{3x}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{3x}$.
6. Montrer que la droite $(\mathscr{D}) : y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$.
7. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
8. Préciser l'autre asymptote à $(\mathscr{C})$.
9. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.
10. Montrer que le point $K\left(0; -\dfrac{5}{3}\right)$ est le centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$.
11. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que les droites d'asymptotes.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x + 4}{x - 2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$.
6. Montrer que la droite $(d) : y = x + 3$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$.
7. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
8. Préciser l'autre asymptote à $(\mathscr{C})$.
9. Montrer que le point $K(2, 1)$ est le centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$.
10. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.
11. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que ses d'asymptotes.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$.
6. Montrer que la droite $(\mathscr{D}) : y = x + 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$.
7. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
8. Préciser l'autre asymptote à $(\mathscr{C})$.
9. Montrer que le point $I(0; 1)$ est le centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$.
10. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que les droites d'asymptotes.

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 6}{x + 2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 2}$.
6. Montrer que la droite $(\mathscr{D}) : y = 2x - 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$.
7. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
8. Préciser l'autre asymptote à $(\mathscr{C})$.
9. Déterminer les points d'intersection $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.
10. Montrer que le point $I(-2; -5)$ est le centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$.
11. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que les droites d'asymptotes.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.
6. Déterminer les branches infinies à $(\mathscr{C})$.
7. Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'asymptote oblique.
8. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I $(\mathscr{C})$ deux asymptotes.
9. Montrer que le point I est le centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$.
10. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que son asymptote oblique.

Exercice 18

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{1-x}$.
6. Déterminer les branches infinies à $(\mathscr{C})$.
7. Préciser les points d'intersection $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.
8. Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'asymptote oblique.
9. Déterminer les coordonnées du point I intersection des deux asymptotes.
10. Montrer que le point I est le centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$.
11. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que son asymptote oblique .

Exercice 19

Partie A

Soit f une fonction de variable réelle x définie par :
$f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f admet un point d'inflexion.
3. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (unité : $2cm$)

Partie B

6. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]1;2[$.
7. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
8. Montrer que f admet une réciproque que l'on notera f^{-1}.
9. Quel est le sens de variation de f^{-1} sur I ?
10. Sans expliciter f^{-1}, calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.
11. Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Partie C

Soit g la fonction définie par $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -f(x)$.

12. Dresser le tableau de variation de g.
13. Tracer la courbe (Γ) de g dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Exercice 20

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = -x + 3 + \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Préciser l'autre asymptote.
5. Calculer la dérivée f' de f.
6. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser lev tableau de variation de f.
7. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 21

$E(x)$ désigne la fonction partie entière de x. Soit g la fonction définie par : $g(x) = [x - E(x)]^2$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Montrer que pour tout réel x, $E(x+1) = 1 + E(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x, $E(-x) = -1 - E(x)$.
3. Étudier la parité de g.
4. Montrer g est une fonction périodique de période $p = 1$.
5. En déduire que on peut réduire l'ensemble d'étude de g à l'intervalle $[0;1]$.
6. Construire la courbe $(\mathscr{C}_0)$ de la restriction de g à l'intervalle $[0;1]$.
7. En déduire le tracer de $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-3;3]$.

Exercice 22

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 + E\left[\dfrac{1}{1-E(x^2)}\right]$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que f peut s'écrire sous la forme :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; \text{ si } x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[\\ f(x) = x^2 + 1; \text{ si } x \in]-1;1[\end{cases}$$
3. Étudier la continuité de f aux points $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$ et $x = -1$.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 23

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+4x+7}{2x+2}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x+2}$.
   b) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$.
   c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport la droite $(\mathscr{D})$.
   d) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une asymptote verticale $(\mathscr{D}')$ dont on précisera l'équation.

3. Montrer que pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que le point $A(-1;1)$ est un centre de symétrie.
6. Déterminer le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des ordonnées.
7. Tracer la droite $(\mathscr{D})$; la droite $(\mathscr{D}')$ et la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 24

Soit g une fonction dont le tableau des variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-5	↗	-1

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E_g de g.
2. Déterminer les limites de g aux bornés de son ensemble de définition.
3. Répondre par vrai ou faux, la fonction est dérivable en $x_0 = -3$.
4. Déterminer les équations des asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$ de g.
5. Placer les points $A\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$; $B\left(0;-\dfrac{7}{2}\right)$, puis tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 25

Soit f une fonction dont le tableau des variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-3 ‖ -1	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	-1

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornés de son ensemble de définition.
3. Déterminer les équations des asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. a) Déterminer les nombres dérivées de f en $x_0 = -2$.
   b) La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = -2$.

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
2. Étudier le sens de variation de la suite (v_n).
3. a) Démontrer que la suite (v_n) est majorée par 5.
   b) Démontrer que la suite (v_n) est minorée par 2.
   c) En déduire que la suite (v_n) est bornée.
4. Étudier la convergence de la suite (v_n).

Exercice 2

On donne $u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(3i+4)$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
2. On donne $v_n = 3n-8$.
   a) Calculer v_0, v_1, v_2 et $v_{n+1} - v_n$.
   b) En déduire que (V_n) est une suite croissante.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Déterminer le terme général de la suite (u_n).
4. On donne $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Calculer s_n en fonction de n.

Exercice 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. Soit (w_n) une suite définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n). Que peut-on en déduire ?
4. On considère la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 5

Soit la suite numérique (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = -\frac{3}{2} \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \end{cases}$

On pose $w_n = 2v_n + 6$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire le sens de variation de la suite (w_n).
3. Donner les expressions de (w_n) et (v_n) en fonction de n.
4. Calculer $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$ en fonction de n.

Exercice 6

Soit (u_n) et v_n deux suites numériques définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 11 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{2u_n+3v_n}{5} \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer w_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
   c) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).
2. a) Démontrer que : $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}w_n$ et que $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{5}w_n$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la la suite (v_n) est décroissante.
   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   d) Que peut-on déduire des suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 7

On considère la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (s_n), $n \in \mathbb{N}$ définie par : $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.
2. En déduire s_n en fonction de n.
3. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite (t_n), $n \in \mathbb{N}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 8

On considère la suite la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Soit (v_n) une suite numérique définie par : $v_n = 4u_n - 6n + 15$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire que : $u_n = \frac{19}{4}.\frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. On pose $w_n = \frac{19}{4}.\frac{1}{3^n}$ et $t_n = \frac{6n-15}{4}$.
   a) Donner la nature des suites (w_n) et (t_n), en précisant la raison et le premier terme.
   b) Calculer les sommes suivantes : $S'_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$ et $S''_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$ en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.

Exercice 9

Soit u_n et v_n deux suites numériques définies par : $u_n = \dfrac{5^n - 7n + 5}{4}$ et $v_n = \dfrac{5^n + 7n - 5}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1, v_0 et v_1.
2. On désigne par (α_n) une suite définie par : $\alpha_n = u_n - v_n$.
   a) Calculer α_0 et α_1.
   b) Donner l'expression de α_n en fonction de n.
   c) Montrer que (α_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
   d) Calculer en fonction de n la somme s_n définie par : $s_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
3. On désigne par (β_n) une suite définie par : $\beta_n = u_n + v_n$.
   a) Calculer β_0 et β_1.
   b) Donner l'expression de β_n en fonction de n.
   c) Montrer que (β_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   d) Calculer en fonction de n la somme s'_n définie par : $s'_n = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$.
4. On pose $t_n = 2u_n$ et $s''_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_n$.
   a) Vérifier que $t_n = \alpha_n + \beta_n$.
   b) En déduire s''_n en fonction de n.

Exercice 10

On considère une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ tel que $u_0 = -1$.

1. Soit s_n le réel défini par : $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Exprimer s_n en fonction de u_n et n.
2. On pose $s_n = n^2 - 1$. Calculer u_n en fonction de n.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Déterminer le terme général de v_n.

c) On pose $t_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. Calculer t_n, puis $\lim_{n\to+\infty} t_n$.

Exercice 11

On donne la suite (u_n) définie par : $u_n = 5^n + 3 - n$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Soit (v_n) et (w_n) deux suites définie par : $v_n = 5^n$ et $w_n = 3 - n$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer en fonction de n, l'expression de la somme $s'_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.
   c) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   d) Déterminer en fonction de n, l'expression de la somme $s''_n = w_0 + w_1 + v_2 + ... + w_n$.
4. Calculer en fonction de n, $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par : $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par : $v_0 = u_n - 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer en fonction de n, la somme $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.
5. Calculer en fonction de n, la somme $s'_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Exercice 13

Soit (u_n) une suite géométrique décroissante telle que : $u_0.u_3 = 128$ et $u_0 + u_1 = 36$.

1. Démontrer que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.
2. Calculer u_0 et u_3.
3. Calculer la raison q de cette suite.
4. Calculer en fonction de n la somme s_n des n premiers termes de cette suite.
5. En déduire la limite de s_n en $+\infty$.

Exercice 14

Soit (u_n) une suite définie par : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par (v_n) une suite définie par : $v_n = u_n - a$ où a est un réel.

1. Déterminer le réel a pour que (v_n) soit une suite géométrique.
2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3. Calculer $s_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ en fonction de n.
4. Calculer $s'_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n.

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - n^2 + n$.

1. Déterminer un polynôme du second degré p tel que la suite de terme général $\alpha_n = p(n)$ vérifie la relation de récurrence précédente.
2. Démontrer que la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
4. Étudier la convergence des suites (v_n) et (u_n).

Exercice 16

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 8 \end{cases}$

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) sachant que (u_n) est une suite géométrique alternée.
2. Calculer u_2 et u_4.
3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ayant les mêmes conditions que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   a) Déterminer son terme général sachant que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique.
   b) Calculer v_2 et v_4.

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :
$u_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + ... + (\frac{1}{2})^n$.

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Prouver que $u_n = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$.
   c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. On pose $S_0 = 1$ et pour tout naturel n : $S_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n$.
   a) Prouver que pour tout naturel n : $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.
   b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 18

Au 1er janvier 2000, la population d'une ville était de 50.000 habitants. Chaque année, cette population augment de 2%, et 500 personnes supplémentaires viennent s'installer définitivement dans la ville. On désigne par u_n la population de la ville au 1er janvier de l'année $(2000 + n)$.

1. Déterminer la population de la ville au 1er janvier 2001 et au 1er janvier 2002.
2. On se propose d'exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
   b) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 25000$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   c) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3. Quelle sera la population de la ville au 1er janvier 2020 ?

Exercice 19

On place un capital de 200.000 francs cfa dans une caisse d'épargne en 2019 à un taux d'intérêts composés de 8% l'an. Pour tout entier naturel n, on désigne par $c(n)$ le capital en francs cfa, en $2019+n$.

1. Calculer $c(n)$ pour $n=1$ et $n=2$.
2. Exprimer $c(n)$ en fonction de $c(n-1)$ pour tout entier naturel n non nul.
3. En déduire que la suite $(c(n))$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Exprimer $c(n)$ en fonction de n.
5. Quel sera le capital en 2030 ?

Exercice 20

On considère un placement qui rapporte 20% par an. Ainsi si l'on appelle $f(0)$ le capital initial et $f(n)$ le capital acquis après n années de placement $(n>0)$, on a :

$$\begin{cases} f(1) = f(0) + \dfrac{1}{5}f(0) \\ f(n) = f(n-1) + \dfrac{1}{5}f(n-1) \end{cases}$$

1. Calculer $f(n)$ en fonction de $f(0)$.
2. Quel capital obtient-on après un placement de 2 ans si le capital initial est de 2000 francs cfa ?

Exercice 21

On place un capital de 100.000 francs cfa dans une caisse d'épargne en 2019 à intérêt simple au taux annuel de 4% durant 5 ans. Calculer la valeur acquise.

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Exercice 1

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f suivantes :
$f(x)=2019$; $f(x)=3x+7$; $f(x)=\frac{x}{x+1}$; $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$; $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^3-3x+1}}$; $f(x)=\frac{x^3+2x-1}{x^3}$; $f(x)=\tan^2(x)$.

Exercice 2

Soit f, g, h, p ; k et q des fonctions définies par :
$f(x)=3x^3+5x^2+3x-1$; $g(x)=(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}$; $p(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$; $k(x)=\frac{\pi}{\cos^2\pi x}$; $q(x)=\dfrac{x-2}{(x^2-4x+9)^2}$.
Déterminer une primitive de chacune de ces fonctions.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2+4x-1$.

1. Déterminer une primitive F de f.
2. Déterminer une primitive F de f qui prend la valeur 1 en 0.
3. Déterminer une primitive F de f qui s'annule en 2.

Exercice 4

Soit f et F deux fonctions définies par :
$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $F(x)=\sqrt{x^2+1}$.

1. Montrer que F est une primitive de f.
2. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :
$A=\displaystyle\int_0^1 x^4dx$; $B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$; $C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx$; $D=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx$.

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :
$I=\displaystyle\int_0^4 |x-2|dx$;$J=\displaystyle\int_{-1}^4 (x-|x-1|)\,dx$; $K=\displaystyle\int_0^4 |x-2|dx$; $L=\displaystyle\int_{-4}^5 |x^2-9|dx$.

Exercice 7

On donne $E=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x dx$ et $F=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$.

1. Calculer $E+F$ et $E-F$.
2. En déduire E et F.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^4 x$.

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.
2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$.

Exercice 9

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=(3x^2+5)(x^3+5x-2)$.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f.

Exercice 10

On donne $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$; $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x dx$ et $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\cos^2 x dx$.

1. Calculer $I-J$ et $I+J+K$.
2. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3. En déduire la valeur de $I+J-3K$.
4. Calculer I, J et K.

Exercice 11

Soit $f(x)=cotan^2 x$.

1. Déterminer une primitive F de f.
2. Déterminer une primitive F de f qui prend la valeur $-\frac{\pi}{2}$ en $x=\frac{\pi}{2}$.
3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

DÉNOMBREMENT

Exercice 1
Soit E l'ensemble défini par : $\{1;2;3;4\}$.

1. Écrire tous les nombres de tris chiffres distincts à l'aide des éléments de E.
2. Combien y en a-t-il ?
3. Parmi ces nombres, combien sont divisibles par 6 ?
4. Parmi ces nombres, combien sont divisibles par 9 ?

Exercice 2
Dans une classe de 40 élèves, on relève les données suivantes :
▷ il y a 16 filles parmi lesquelles 12 apprennent l'anglais et 6 apprennent l'arabe ;
▷ 26 élèves suivent les cours d'anglais, 17 suivent les cours d'arabe, 7 suivent les deux cours ;
▷ 2 garçons ne suivent aucun de ces deux cours.
Déterminer le nombre de filles qui ne suivent aucune de ces deux cours.

Exercice 3
Dans un groupe de 30 personnes, 15 jouent au basket-ball, 10 jouent au football et 5 pratiquent ces deux sports.

1. Déterminer le nombre de personnes qui jouent seulement au football.
2. Déterminer le nombre de personnes qui jouent seulement au basket-ball.
3. Déterminer le nombre de personnes qui ne pratiquent aucun de ces deux sports.

Exercice 4
Soit E un ensemble non vide défini par $E = \{10;20;30;40\}$

1. Déterminer le cardinal de E.
2. Déterminer l'ensemble des parties de l'ensemble E notés $\mathscr{P}(E)$.
3. Déterminer le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 5
Soit $E = \{1;2;a;b\}$

1. Déterminer l'ensemble des parties de l'ensemble E notés $\mathscr{P}(E)$.
2. Déterminer le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.
3. Soit F un ensemble défini par :
   $F = \{4;8;9;10;15;16;21\}$. On désigne Par G et H les sous-ensembles de F qui sont respectivement multiples de 2 et de 3.
   a) Déterminer les sous-ensembles G et H de F.
   b) Démontrer que G et H forment une partition de F.

Exercice 6
Soit A et B deux ensembles finis tels que : $Card(A) = 7$; $Card(B) = 9$ et $Card(A\cup B) = 10$. Calculer $Card(A\cap B)$.

Exercice 7
Soit E et F deux ensembles définis par :
$E = \{1;2;3;5;7\}$ et $E = \{1;3;4;5;6;8\}$.

1. Déterminer le cardinal des ensembles E et F.
2. Déterminer les ensembles A et B tels que : $A = E\cup F$ et $B = E\cap F$.
3. Déterminer $Card(E\setminus F)$ et $Card(F\setminus E)$.
4. Déterminer cardinal des ensembles A et B.
5. Déterminer les ensembles $G = A\cup B$ et $H = A\cap B$.
6. Déterminer cardinal des ensembles G et H.

Exercice 8
Dans une soirée on a trois filles et deux garçons.
Combien de couples peut-on former ?

Exercice 9
Combien de mots différents peut-on former les noms suivants : ANE ? ; ANNE ; ACCRA ; BAOBAB ?

Exercice 10

1. Calculer les nombres suivants : $A = 3!$; $B = 5!$; $C = 20!$ et $D = 25!$.
2. Calculer les arrangements suivants : A_8^4 ; A_7^2 et A_n^1 avec $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Calculer les combinaisons suivantes : C_8^4 ; C_5^2 et C_n^1 avec $n\in\mathbb{N}^*$.
4. Démontrer que : $A_n^p = p!\times C_n^p$.

Exercice 11
Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que : $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n^2}{(n+1)!}$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :
   $C_n^2 = 190$; $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$; $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \dfrac{7}{2}n$; $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 38n$; $C_{n+10}^{n+4} = C_{n+10}^{2n-10}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant :
   $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+1} \\ 4C_x^y = 5C_x^{y-1} \end{cases}$

Exercice 12
Soit n un entier naturel non nul.

1. Développer $(1+x)^n$.
2. En déduire la valeur des sommes suivantes :
   $S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^p + ... + C_n^n$.
   $S_2 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^p C_n^p + ... + (-1)^n C_n^n$.
   $S_3 = C_n^0 + 2C_n^1 + C_n^2 + ... + 2^p C_n^p + ... + 2^n C_n^n$.

Exercice 13
On veut élire un comité de quatre membres parmi les 45 élèves d'une classe de première.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quel est le nombre de comité contenant exactement 2 filles, sachant qu'il y a 25 filles dans cette classe ?
3. Quel est le nombre de comité contenant au moins une fille ?

Exercice 14
Une urne contient 12 boules numérotés de 1 à 12. On tire 3 boules de cette urne. Calculer le nombre de tirages distincts dans les trois cas suivants :

1. les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
2. les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.
3. les tris boules sont tirées simultanément.

Exercice 15
Déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble E dans le cas suivants :

a) le nombre de couples de E est 56.
b) le nombre de triplets de E est 120.

Exercice 16
Un sac contient 8 billes blanches numérotés de 1 à 8 et 6 billes jaunes numérotés de 1 à 6. Ces billes sont indiscernables au toucher. On tire simultanément de ce sac 4 billes.

1. Combien de tirages peut-on effectuer en tout ?
2. Combien de tirages peut-on effectuer de façon à obtenir :
   a) 4 billes de même couleur ?
   b) 2 billes blanches ?
   c) 4 billes portant des numéros diviseurs de 18 ?

Exercice 17
On dispose de quatre pièces de monnaie : une de $10f$; une de $25f$; une de $50f$ et une de $100f$.
Quelles sont toutes les sommes possibles que l'on peut constituer avec ces pièces.

STATISTIQUES

Exercice 1
On considère la série statistique :

x	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3

1. Quel est l'effectif total
2. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulés croissantes.
3. Déterminer la valeur de la médiane de la série statistique.
4. Déterminer le premier et le troisième quartiles de la série statistique.
5. Quel est l'écart interquartile ?
6. Quel est l'intervalle interquartile ?
7. Quel est le pourcentage des termes de la série appartenant à l'intervalle interquartile ?
8. Déterminer le premier et le neuvième déciles de la série statistique.
9. Quel est l'écart interdécile ?
10. Quel est l'intervalle interdécile ?
11. Construire le diagramme en boite.

Exercice 2
Lors d'un tournoi de tennis, on étudie le temps moyen d'une partie. On obtient les chiffres suivants :

Classe (en min)	$[30;50[$	$[50;80[$	$[80;120[$	$[120;300]$
Nombre de parties	14	16	22	8

1. Dresser le tableau des fréquences et des fréquences cumulés croissantes.
2. Tracer le graphique des fréquences cumulés croissantes.
3. En déduire la valeur de la médiane de la série.
4. Déterminer le premier et le troisième quartiles de la série.
5. Quel est l'intervalle interquartile ?
6. Calculer la densité de chaque classe.

Exercice 3
Soit le tableau statistique suivant :

x_i	15	17	20	22	23	27	30	33
n_i	10	8	12	9	5	14	20	3

1. Quel est l'effectif total ?
2. Calculer la moyenne m et l'écart-type σ de cette série statistique.
3. On considère la série statistique définie par :
   $y_i = \dfrac{x_i - m}{\sigma}$.
   En déduire des questions précédentes la moyenne m' et l'écart-type σ' de cette nouvelle série statistique.

Exercice 4
Le tableau suivant statistique suivant :

x_i	-3	-1	0	5
y_i	1	-1	4	2

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3. Déterminer les équations des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ de régressions respectivement de y en x et de x en y.
4. Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

Exercice 5
Soit le tableau statistique linéaire suivante :

x	0	1	0	2	1	0	2
y	0	2	1	0	1	1	0

1. Présenter ces données dans un tableau à double entrée.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G.
3. Calculer la variance de x et y.

Exercice 6

Soit la série statistique suivante :

y \ x	-1	0	2
1	2	5	3
2	2	1	1

1. Présenter ces données dans un tableau linéaire.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G.
3. Calculer la variance de x et y.

Exercice 7

Soit la série statistique suivante :

y \ x	0	1	2
-1	2	5	3
0	2	1	1
1	0	2	0

1. Déterminer la loi marginale de x et y.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G.
3. Calculer la variance de x et y.
4. calculer la covariance de du couple $(x;y)$.
5. Déterminer la droite de régression y en x.
6. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

Exercice 8

La série statistique ci-dessous concerne les ventes annuelles exprimées en milliers de francs CFA de 2013 à 2018 d'un magasin de pagnes, x_i en année et y_i vente en milliers de francs CFA.

x_i	2013	2014	2015	2016	2017	2018
y_i	3400	2800	3200	3800	4300	4700

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Déterminer la variance de x et la variance de y.
3. Calculer la covariance du couple (x,y).
4. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire. Interpréter le résultat.
5. Déterminer la droite de régression qui permet d'estimer le prix de vente à partir de l'année.
6. Quelle prévision de vente annuelle le magasin de pagne peut-il espérer atteindre en 2021 ?

Exercice 9

Soit tableau statistique suivant :

x_i	2	4	6	8
n_i	0	2	5	3

1. Calculer la moyenne de cette série.
2. Déterminer la variation et l'écart-type de cette série.
3. Calculer le coefficient de variation

Exercice 10

Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la taille en mètre (m) d'un manguier en fonction du nombre de mois depuis son plantage.

x_i (mois)	1	2	3	4	5	6
y_i (taille en m)	3	4,66	6,32	7,98	9,64	11,30

1. Représenter dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le nuage des points $M_i(x_i,y_i)$.
2. La série statistique est partagée en deux séries S_1 et S_2 d'effectifs égaux.
   a) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 respectifs des séries S_1 et S_2
   b) Montrer que l'équation cartésienne de la droite (G_1G_2) est : $y = 1,66x + 1,34$.
3. a) Quelle est la taille de l'arbre au moment du plantage.
   b) En combien de mois, l'arbre atteindra-t-il $34,54m$?

Exercice 11

Soit la série statistique suivante :

x \ y	[0 ; 2[	[2,4[	[4, 6[
[2, 4[	2	4	0
[4, 6[	0	1	1
[6, 8[	1	2	0

1. Calculer les coordonnées du point moyen G.
2. Calculer la variance de x et y.
3. calculer la covariance de du couple $(x;y)$.
4. Déterminer la droite de régression y en x.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

Exercice 12

Une entreprise achète, utilise et vend des machines après un certain nombres x_i d'années. Après six années, l'évolution y_i en milliers de $FCFA$ du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suite :

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	150	125	90	75	50	45

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G, puis les variances de X et Y
2. Calculer l'inertie par rapport au point moyen G, puis déduire celui du point $A(0, -1)$.
3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Exercice 13

Le tableau ci-dessous donne la production x (en litres) de lait caillé en fonction du poids y (en grammes) d'une certaine levure utilisée.

Production de lait (x_i)	10	11	12	13	14	15
Poids de levure (y_i)	122	130	135	144	150	153

1. Quel est l'effectif total ?
2. Représenter dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le nuage des points $M_i(x_i,y_i)$.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
4. La série statistique est partagée en deux séries S_1 et S_2 d'effectifs égaux.
   a) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 respectifs des séries S_1 et S_2
   b) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (G_1G_2).
5. En déduire une estimation du poids de levure nécessaire pour produire 20 litres de lait caillé.

OUTILS VECTORIELS DU PLAN

Exercice 1
M, B et G trois points non alignés du plan. Les points A et C du plan sont tels que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BG}$.

1. Placer les points A et C.
2. Montrer que le point B est milieu du segment $[MA]$.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires.

Exercice 2
Soit A, B et C trois points non alignés du plan et I un point défini par $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. a) Montrer que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$. Que peut-on dire du point I?
   b) Placer le point I dans la figure.
   c) Construire le point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. On définit les points D et E par : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$.
   a) Placer les points D et E dans la figure.
   b) Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EM}$. En déduire la nature du quadrilatère $ADME$.
5. Construire le point N du plan tel que : $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AB}$.
6. Exprimer $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.
7. On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   Déterminer les coordonnées des points M, N, D et E.

Exercice 3
Le plan vectoriel est muni d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les vecteurs
$\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$; $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$; $\overrightarrow{a} = (m+1)\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{b} = 150\overrightarrow{i} + (m-1)\overrightarrow{j}$.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base.
2. Déterminer les valeurs de m pour que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ forme une base.
3. Exprimer $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 4
On considère deux vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que : $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer a pour que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base.
2. Exprimer $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ en fonction de a, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
3. On donne $\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ un vecteur du plan.
   Exprimer $\overrightarrow{X}$ en fonction de a, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

Exercice 5
$ABCD$ est un parallélogramme, les points E, F, G et H sont définis de la façon suivante : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AF}$. En supposant le plan rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, montrer que les droites (AC) ; (FG) et (EH) sont concourantes.

Exercice 6
ABC est un triangle quelconque.

1. Construire les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les droites (AK), (BI) et (CJ) sont concourantes.

Exercice 7
$ABCD$ est un parallélogramme de centre I.

1. Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est une base du plan vectoriel.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{W}$ tel que :
   $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) - 2(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA})$

Exercice 8
Soit ABC un triangle. Les points D et E sont tels que : $\overrightarrow{AD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Montrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
3. On considère les points F et G du plan tels que $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC}$, on désigne par H le milieu du segment $[DE]$.
   a) Placer les points F, G et H.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, F et H sont alignés.
4. Soit I et J les centres de gravité respectifs des triangles ABC et ADE.
   a) Exprimer $\overrightarrow{GI}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{GJ}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GD}$. En déduire que $3\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 9
Soit A, B et C trois points non alignés du plan. D est le point du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Les droites (AC) et (BD) se coupent au point I.

1. Faire une figure que l'on complétera.
2. Justifier que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est une base du plan vectoriel.
3. Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC})$.
   a) Démontrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DB}$.
   b) En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$
4. Construire le point E défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
5. Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E et I dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle. Les points I et J sont tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure
2. Montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
3. Soit D et L les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[IJ]$.
   a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) Déduire que les points A, D et L sont alignés.

Exercice 11

Soit ABC un triangle équilatéral de côte 6 et on note par G le barycentre du système des points pondérés $(A;4)$; $(B;-1)$ et $(C;-1)$. On considère le point I tel que : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. Construire le point I.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?
4. On considère la fonction scalaire de LEIBNIZ f définie par : $f(M) = 4MA^2 - MB^2 - MC^2$ où M est un point du plan.
   a) Montrer que $f(M) = 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2$.
   b) Déterminer et construire si possible l'ensemble des points M tel que : $f(M) = -103$.

Exercice 12

Soit ABC un triangle isocèle en A de hauteur le segment $[AI]$, tel que $AI = BC = 4cm$ et I milieu de $[BC]$.
On considère le système des points pondérés suivants : $(A,2)$; $(B,1)$ et $(C,1)$.

1. a) Faire une figure que l'on complétera.
   b) Placer le point G barycentre de ce système.
2. On donne $\overrightarrow{g}(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ la fonction vectorielle de LEIBNIZ.
   a) Donner la nature de cette fonction vectorielle de LEIBNIZ.
   b) Montrer que : $2\overrightarrow{g}(A) - \overrightarrow{g}(B) - \overrightarrow{g}(C) = \overrightarrow{O}$.
3. On pose $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   a) Montrer que la norme de $\overrightarrow{u}$ est 8.
   b) Déterminer et construire l'ensemble (E) tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{u}\|$.
4. On considère le système des points pondérés suivants : $(A,2)$; (B,n) et (C,n) où n est un entier naturel fixé.
   a) Démontrer que le barycentre G_n de ces points existe.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AG_n}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et n.
   c) Placer G_0 ; G_1 et G_2.
   d) En déduire que les points A, G_n et I sont alignés.
   e) Calculer la distance AG_n en fonction de n.
5. Soit (E_n) l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\overrightarrow{u}\|$.
   a) Prouver que (E_n) est un cercle qui passe par A.
   b) Préciser le centre et le rayon noté r_n de (E_n).
   c) Construire (E_2).

Exercice 13

Unité graphique est le centimètre.
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 4$. On considère les points I ; J et K définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et K milieu du segment $[BC]$.

1. Faire une figure que l'on complétera.
2. Soit $G = bar\{(A;3);(B;3);(C;-2)\}$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis construire le point G.
   b) Prouver que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$. En déduire la nature exacte de $IGJA$.
3. Le plan est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
   Déterminer les coordonnées des points I ; J et G.
4. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tel que :
   $\|3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = 8$.

Exercice 14

ABC est un triangle quelconque. I, J et K sont les points tels que :
▷ I est le barycentre des points $(A;2)$ et $(C;1)$;
▷ J est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;2)$;
▷ K est le barycentre des points $(C;1)$ et $(B;-4)$.

1. Démontrer que B est le barycentre de $(C;1)$ et $(K;3)$.
2. Démontrer que J est le barycentre de $(A;2)$; $(K;3)$ et $(C;1)$.
3. En déduire que les points I ; J ; K sont alignés et que J est le milieu du segment $[IK]$.
4. L est le milieu du segment $[CI]$ et M le milieu du segment$[KC]$. Démontrer que $IJML$ est un parallélogramme dont dont le centre sera noté G.
5. Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

Exercice 15

Déterminer les réels α, β et γ pour que le point G défini par : $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$ soit le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ).

Exercice 16

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu du segment $[BC]$. On considère les points D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; soit J milieu du segment $[DE]$.

1. Faire une figure.
2. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan.
3. On prend $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ comme repère du plan.
   a) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.
   b) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$.
   c) Que peut-on déduire pour I relativement au triangle ADE.
4. Soit K le point défini par : $5\overrightarrow{KI} - 2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{O}$.
   a) Déterminer les coordonnées du point K.
   b) Montrer que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.
   c) Que peut-on déduire du point K ?

OUTILS VECTORIELS D'ESPACE

Exercice 1
Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{k}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$; $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\overrightarrow{OD} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OF} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et F.
2. Placer ces points dans ce repère.
3. Déterminer les composantes scalaires des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CF}$.
4. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
5. Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
6. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par le point A des vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2
Dans l'espace $\mathcal{E}$, on donne les points $A(2,3,0)$; $B(3,2,1)$ et $C(a,b,2)$. Déterminer a et b pour que les points A, B et C soient alignés.

Exercice 3
Dans l'espace $\mathcal{E}$, on donne les vecteurs $\vec{u}(-6,-4,2)$; $\vec{v}(-1,3,-1)$ et $\vec{w}(4,10,-4)$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace.

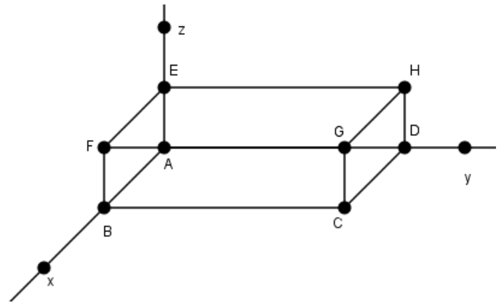
1. A quelle condition $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base ?
2. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}(0,-1,1)$; $\vec{v}(-2,-1,3)$ et $\vec{w}(-1,-1,-1)$ forment une base.

Exercice 5
On considère les points $A(3,2,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(3,1,-2)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'équation cartésien du plan (ABC).
3. Déterminer le réel a pour que le point $D(a,1,3)$ appartient au plan (ABC).

Exercice 6
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle, I milieu du segment $[EH]$, J et K les points tels que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et G et les composantes scalaires des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{GK}$.
2. Montrer que les points I, J, K et G sont coplanaires.
3. Écrire les équations cartésiennes du plan (IJK) et de la droite (AB).
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (AB).



Exercice 7
$ABCD$ est un tétraèdre et I, J, K, L sont les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Calculer le vecteur $\vec{U} = 9\overrightarrow{IJ} - 8\overrightarrow{IK} - 4\overrightarrow{IL}$. En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.
4. Démontrer que le point P, barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,3)$ et $(D,6)$ appartient aux droites (IJ) et (KL).
5. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
6. a) Démontrer que les droites (IK) et (JL) sont sécantes en un point Q de la droite (BD).
   b) Démontrer que : $3\overrightarrow{QI} - 8\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{QB} - 6\overrightarrow{QD} = \vec{O}$.
   c) En déduire l'expression de $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 8
L'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,0,2)$, $\vec{v}(0,3,6)$, $\vec{w}(3,6,\alpha)$.

1. Placer les points A, B et C dans ce repère.
2. Déterminer α pour que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Déterminer l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$.
5. Calculer la distance du point B par rapport à $(\mathscr{P})$.

Exercice 9

1. Déterminer géométriquement chacun des quatre ensembles suivants :
$(\mathscr{E}_1) : \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+t \\ z = -1+3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$; $(\mathscr{E}_2) : \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+t \\ z = -1+3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}_+$;
$(\mathscr{E}_3) : \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+t \\ z = -1+3t \end{cases}$; $t \in [0;1]$

et $(\mathscr{E}_4) : \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+t \\ z = -1+3t \end{cases} ; t \in [-1;2]$

2. Déterminer les ensembles suivants :

$(\mathscr{E}_1) : \begin{cases} x = 1-5t+2t' \\ y = t+t' \\ z = -3+t+t' \end{cases} \quad (t,t') \in \mathbb{R}^2 ;$

$(\mathscr{E}_2) : \begin{cases} x = -2+t \\ y = -t+2t' \\ z = 1+t+t' \end{cases} \quad (t,t') \in \mathbb{R}^2$

Exercice 10

Soient les points $A(2;-3;4)$, $B(-3;1;2)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(-1;2;3)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par B et perpendiculaire à $(\mathscr{D})$.
3. a) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.
   b) Calculer la distance du point A au plan $(\mathscr{P})$.
4. a) Quel est projeté orthogonal de B sur $(\mathscr{D})$?
   b) Calculer la distance du point B à la droite $(\mathscr{D})$

Exercice 11

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On donne les points $A(1,-1,1)$; $B(1,1,1)$; $C(-1,1,1)$; $D(-1,-1,1)$; $E(1,-1,0)$; $F(1,1,0)$; $G(-1,1,0)$ et $H(-1,-1,0)$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. Montrer que les points A, B, G et H sont coplanaires.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABH).
4. Vérifier que le point G appartient au plan (ABH).
5. Écrire équation cartésienne de la droite (DF).
6. Déterminer les coordonnées du d'intersection I de la droite (DF) avec le plan (ABH).

Exercice 12

Soit $ABCDEFGH$ un cube de base $ABCD$ d'arête a. On désigne par I et J les points de l'espace tels que I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$ et K et L et K tels que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EL} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{EH}$.

1. Faire une figure.
2. Justifier que le quadruplet $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
3. Calculer en fonction de a les produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{BF}$.
4. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L. dans ce repère.
5. a) Déterminer deux réels α et β tels que : $\overrightarrow{IL} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$.
   b) Que peut-on dire des points I, J, K et L ?
6. a) Déterminer une équation cartésienne du plan (JKL).
   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (EC).
   c) Déterminer les coordonnées du d'intersection S de la droite (EC) avec le plan (JKL).
7. Calculer la distance du point F par rapport au plan (JKL).

Exercice 13

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(-1,2,3)$; $B(0,4),4)$ et $C(2,0,2)$.

1. Calculer le produit vectoriel suivant : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer en unité d'aire l'aire du triangle ABC.
3. Calculer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ avec $\alpha = \widehat{BAC}$.

Exercice 14

L'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $M(x,y,z)$ un point de $(\mathscr{E})$, on note $(\mathscr{P})$ l'ensemble des points M de $(\mathscr{E})$ tels que : $\begin{cases} x = 1-t-s \\ y = t-s \\ z = -1+2t \end{cases}, (t,s) \in \mathbb{R}^2$

1. Donner les coordonnées des points A, B et C de $(\mathscr{P})$.
2. a) Justifier que le système précédent détermine un plan de l'espace.
   b) Déterminer l'équation du plan $(\mathscr{P})$.
3. Calculer la distance du point $D(2,-1,0)$ au plan $(\mathscr{P})$.

PRODUITS SCALAIRES ET SES APPLICATIONS

Exercice 1

Soit $ABCD$ un carré de centre O. On désigne par I et J les milieux des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}$; $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{IJ}$.
2. En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AC}$, calculer l'angle $\alpha = \widehat{JAC}$.

Exercice 2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. a) Calculer S tel que : $S = 2(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v})^2 - (3\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 - 5\overrightarrow{v}^2$
   b) En déduire que $S = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
2. a) Calculer $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2$.
   b) En déduire que : $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2$ si est seulement si $\overrightarrow{u}$

et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

3. Soit ABC un triangle tel que : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. En utilisant l'égalité précédente, déduire la nature du théorème obtenu.
4. On donne $AB = 6$ et $AC = 8$. Calculer la distance BC.
5. Soit $ABCD$ un losange tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a.
   a) Faire une figure.
   b) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MB^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}a^2$.

Exercice 3

ABC est un triangle tel que $AB = 2; AC = 5$ et $\widehat{A} = 120°$.

1. Calculer $BC, \cos\widehat{B}$ et $\cos\widehat{C}$.
2. En déduire en degré les valeurs de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que : $BC = 2a$ et $AB = a$ avec $a > 0$. Soient K le pied de la hauteur issue de B et H le pied de la hauteur issue de A tel que : $\overrightarrow{BH} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Calculer en fonction de a les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les mesures en degrés des angles $\widehat{A}$; $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ à 10^{-2} près.
3. Soit A'; B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$.
   Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} = 0$

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de côté a et DCE est un triangle équilatéral et H le projeté orthogonal de E sur la droite (AB). On s'intéresse au triangle BDE. Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1. Faire une figure.
2. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de a.
   b)) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de a.
   c) En déduire que $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE} = -\dfrac{a^2}{2}(1-\sqrt{3})$.
   d) Utiliser ce résultat pour calculer BE^2. On pourra décomposer $\overrightarrow{BE}$ en $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$.
   e) Démontrer que : $BE = \dfrac{a}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

2) Calculer, en fonction de a, l'aire exacte des triangles :
   a) ECD.
   b) ECB. (On pourra appliquer la formule de sinus).

3. Calculer en fonction de a, l'aire du quadrilatère $DBCE$.
4. Montrer que l'aire exacte du triangle EDB est égale à $\dfrac{a^2}{4}(1+\sqrt{3})$.

Exercice 6

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A.
On donne $AB = 4cm$ et $\widehat{ABC} = 50°$.
Calculer en cm^2 l'aire S du triangle ABC.

Exercice 7

Soit ABC un triangle quelconque.
On désigne par $BC = a, AC = b$ et $AB = c$.
On appelle p son demi-périmètre et S son aire. On se propose de calculer S en fonction de a, b et c.

1. a) Faire une figure que l'on complètera
   b) Démontrer que : $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
   c) En déduire $\sin\widehat{A}$ en fonction de a, b et c.
2. Démontrer que :
   $\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}$.
3. Démontrer que :
   $\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16} = p(p-a)(p-b)(p-c)$.
4. En déduire que : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
5. On appelle r le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ inscrit dans le triangle ABC.
   a) Démontrer que : $S = pr$.
   b) En déduire que : $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.
6. On appelle R le rayon du cercle $(\mathscr{C}')$ circonscrit au triangle ABC. Déterminer R en fonction de a, b et c.

Exercice 8

Soit ABC un triangle quelconque tels que $BC = a, AC = b$ et $AB = c$. On désigne par S l'aire du triangle ABC, R le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.

1. Montrer que :
   a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cos\widehat{A}$.
   b) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$.
   c) $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$.
   d) $S = \dfrac{abc}{4R}$.
2. On note r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC et p le demi-périmètre de ce triangle; $2p = a+b+c$.
   a) Démontrer que $S = pr$.
   b) En déduire que, lorsque le triangle ABC est équilatéral, alors $R = 2r$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$. Les longueurs sont calculées au millimètre près et les angles au degré près.

1. Calculer $\widehat{A}$; $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sachant que $a = 5cm$; $b = 3cm$ et $c = 4,1cm$.
2. On donne $\widehat{A} = 42°$; $b = 4cm$ et $c = 2,5cm$.
   Calculer a ; $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
3. On donne $\widehat{A} = 18°$; $\widehat{B} = 130°$ et $c = 6,2cm$.
   Calculer a ; b et $\widehat{C}$.

Exercice 10
Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des côtes $[BC]$; $[CA]$ et $[AB]$. On suppose que les médianes (BK) et (CJ) sont perpendiculaires en G.

1. Montrer que : $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.
2. On suppose que $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.
   a) Montrer que pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}\left(GB^2 + GC^2 - BC^2\right)$.
   c) En déduire que : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = 0$.

Exercice 11
Soit $ABCD$ un quadrilatère.

1. Démontrer que : $AB^2+CD^2 = AD^2+BC^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.
2. En déduire que les diagonales de $ABCD$ sont orthogonales si et seulement si $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Exercice 12
Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 5$ et $BC = 6$. Le point O milieu de $[BC]$ se projette. orthogonalement sur (AC) en H. Soit I le milieu de $[OH]$ et J celui de $[HC]$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.
3. Calculer l'aire S du triangle ABC.
4. Dans cette partie, on veut démontrer, en utilisant un repère orthonormé, que les droites (AI) et (BH) sont perpendiculaires.
   a) Calculer AO puis justifier que $\left(O; \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}, \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right)$ est un repère orthonormé.
   b) Déterminer dans ce repère les coordonnées des points A ; B et C.
   c) Déterminer les équations des droites (AC) et (OH).
   d) En déduire les coordonnées du point H puis calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH}$. Conclure.

ÉQUATION DU CERCLE

Exercice 1
Déterminer l'équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $I(2,5)$ et de rayon $r = 3$.

Exercice 2
Étudier les ensembles suivants :
$(\mathscr{C}_1) : x^2+y^2+4x+4y-1 = 0$; $(\mathscr{C}_2) : x^2+y^2+2x+5y+\frac{29}{5} = 0$;
$(\mathscr{C}_3) : x^2 + y^2 - 4x + 8y + 46 = 0$.

Exercice 3
Discuter suivants les valeurs du paramètre réel m ;
la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble
$(\mathscr{C}_m) : x^2 + y^2 - 2(m-1)x + 2(m+3)y + 10 = 0$.

Exercice 4
Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A, B et C de coordonnées $A(1,0)$; $B(0,1)$ et $C(3,0)$.

1. placer les points A, B et C.
2. Calculer les longueur AB, AC et BC.
3. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Déterminer l'équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.
   b) En déduire son centre et son rayon.
   c) Déterminer les équations des tangentes (T_1) ; (T_2) à $(\mathscr{C})$ en B et en C.
   d) Tracer (T_1) et (T_2).

Exercice 5
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne $(E_k) : (x + y + k)^2 = 2xy$; $k \in \mathbb{R}$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E_k).
2. Construire (E_1), (E_{-1}) et (E_0)

Exercice 6
Soit la représentation paramétrique de
$(\mathscr{C}) : \begin{cases} x = -2 + 3\cos t \\ y = 4 + 3\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

1. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C})$.
3. Soit $(\mathscr{D}_m)$ la droite d'équation $y = mx + 2$; $m \in \mathbb{R}$. Étudier suivant les valeurs du réel m la position $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = mx + 2$; $m \in \mathbb{R}$.
4. Soit $P(-5;2)$ un point du plan.
   a) Le point P appartient-il au cercle $(\mathscr{C})$?
   b) Montrer que le point P est extérieur du cercle $(\mathscr{C})$.
5. Déterminer une équation des tangentes $(\mathscr{T})$ et $(\mathscr{T}')$ à $(\mathscr{C})$ passant par le point P.

Exercice 7
Soit $A(-1;2)$; $B(3;4)$ deux points du plan et $(\mathscr{D}) : y = x - 5$ une droite du plan.

1. Déterminer l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et tangente à $(\mathscr{D})$.
3. Déterminer l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ passant par A ; de rayon 3 et dont le centre C appartient à $(\mathscr{D})$.

Exercice 8
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation $x^2+y^2-10x+15 = 0$ et $Q(0;15)$ un point du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D}_m)$ passant par Q et de coefficient directeur m où $m \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs de m, la nombre de points communs à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D}_m)$.

3. En déduire une équation des tangentes $(\mathscr{T})$ et $(\mathscr{T}')$ à $(\mathscr{C})$ passant par le point Q.

Exercice 9

Dans le plan $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(2,1)$; $B(5;7)$; $C(3;-1)$ et $D(5;5)$. On note $(\mathscr{D})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ de $(\mathscr{P})$ tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 27$ et $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[CD]$.

1. Placer ces points dans ce repère.
2. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.
3. Vérifier que $H(-1;7)$ est un point de $(\mathscr{D})$ et que $E(1;1)$ est un point de $(\mathscr{C})$.
4. Construire $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.
5. a) Résoudre le système suivant :
$$(S) : \begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$$
   b) Que peut-on en déduire ?
6. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ au point E puis la tracer.
7. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{T})$ avec les axes du repère.

Exercice 11

Dans le plan $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1,-2)$; $B(4;-1)$ et $C(4;4)$.

1. a) Déterminer une équation de la médiatrice $(\mathscr{D}_1)$ du segment $[AB]$.
   b) Déterminer une équation de la médiatrice $(\mathscr{D}_2)$ du segment $[BC]$.
   c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$.
   d) Que représente le point I pour le triangle ABC ?
2. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$.
   a) Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ ainsi que son rayon.
   b) Que remarques-tu ?
3. Montrer que $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 12

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon r.
On appelle puissance d'un point M par rapport à $(\mathscr{C})$, le réel $\mathscr{P}(M) = M\Omega^2 - r^2$.

1. Calculer $\mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathscr{P}(K)$ où $K \in (\mathscr{C})$.
2. On suppose que $(\mathscr{C})$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
   a) Démontrer que si $M_0(x_0;y_0)$, alors $\mathscr{P}(M_0) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$.
   b) On donne $(\mathscr{C}) : x^2+y^2-2ax-2by+c = 0$; $A(0;7)$ et $B(3;1)$. Calculer $\mathscr{P}(A)$ et $\mathscr{P}(B)$.
3. Une droite passant par M coupe $(\mathscr{C})$ en deux points A et B. Démontrer que $\mathscr{P}(M) = \overline{MA}.\overline{MB}$.
4. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que les droites (AB) et (CD) se coupent en M. Montrer que $ABCD$ est inscriptible si, et seulement si : $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$.

Exercice 13

1. Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites d'équations respectives : $3x - 4y + 6 = 0$ et $-6x + 8y + 9 = 0$.
   a) Démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles.
   b) Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ tangent à ces deux droites et dont le centre a une ordonnée nulle.
2. Soit $(\mathscr{D}_m) : x - my + \sqrt{1+m^2} = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que $(\mathscr{D}_m)$ est tangente à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Exercice 14

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$; $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre $O'(0,2)$ et de rayon 1.

1. Démontrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants en deux points A et B, dont on précisera les coordonnées.
2. Démontrer qu'en ces deux points, les tangentes à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$ sont perpendiculaires.
3. Déterminer une équation normale, de chacune des tangentes communes à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$.

Exercice 15

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On définit les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ par les équations suivantes :
$(\mathscr{C}) : x^2+y^2+4x-y-2 = 0$ et $(\mathscr{C}') : x^2+y^2-6x-6y+7 = 0$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
2. Montrer que les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants.
3. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection I et J avec I d'abscisse nulle.
4. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{T}')$ à $(\mathscr{C}')$ en A.
5. Montrer que les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont orthogonaux.

Exercice 16

On considère l'ensemble $(\mathscr{C}_m)$ des points $M(x;y)$ tels que :
$(\mathscr{C}_m) : x^2 + y^2 - 2(3m+2)x + 2(m-1)y + 9m^2 + 8m + 5 = 0$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_1)$.
2. Déterminer suivant les valeurs de m la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C}_m)$.
3. On admet que $m \in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$.
   a) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{D})$ des centres $(\mathscr{C}_m)$.
   b) Construire $(\mathscr{C}_1)$; $(\mathscr{C}_{-2})$ et $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_{-3})$.

Exercice 17

Le plan étant rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point $A(2,4)$ et la droite $(\triangle)$ d'équation : $3x + 4y - 12 = 0$.

1. Calculer la distance du point A par rapport à la droite $(\triangle)$.
2. Former l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ qui admet pour centre A et qui est tangente à la droite $(\triangle)$.
3. Calculer les coordonnées du point de contact I.

Équations d'une sphère ; d'un cône de révolution et d'un cylindre de révolution

Exercice 1

1. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère $(\mathscr{S})$ de centre $I(2;1;-3)$ et de rayon 4.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère $(\mathscr{S})$ de centre $J(0;-1;3)$ et de rayon 2.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère $(\mathscr{S})$ de centre $K(0;1;0)$ et de rayon 3.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace défini par :

1. $(\mathscr{E}_1) : x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$.
2. $(\mathscr{E}_2) : x^2+y^2+z^2-10x+y+2z+30=0$.
3. $(\mathscr{E}_3) : x^2+y^2+z^2-8x+4y+12z+56=0$.

Exercice 3

Soit $A(3;0;-1)$ et $B(-1;2;-2)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$. Déterminer l'équation de la sphère $(\mathscr{S})$ de diamètre $[AB]$.

Exercice 4

Soit $I(4;3;1)$ et $J(2;-1;-1)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. Déterminer une équation de la sphère de diamètre $[IJ]$.
2. Montrer que le point $K(2;2;2)$ se trouve sur cette sphère.

Exercice 5

On considère le point $A(1;-3;-2)$ et l'ensemble
$(\mathscr{E}) : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-12=0$.

1. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble $(\mathscr{E})$.
2. Montrer que $(\mathscr{E})$ est une sphère dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Déterminer une équation du plan $(\mathscr{P})$ tangent en A à $(\mathscr{E})$.

Exercice 6

Le plan $(\mathscr{P})$ a pour équation $2x-y+2z+1=0$. $(\mathscr{S})$ est la sphère de centre $I(2;-3;-1)$ et de rayon $r=3$.

1. Montrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{S})$ sont sécants.
2. Donner le rayon et le centre du cercle d'intersection.

Exercice 7

Déterminer une équation de la sphère de centre $A(-2;-3;4)$ et tangent au plan $(\mathscr{P}) : 2x+y+3z+2=0$.

Exercice 8

Soit x, y et z trois réels tels que $21x+26y-30z=1$.
Déterminer la plus petite valeur entière $m>0$ telle que $x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{1}{m}$.

Exercice 9

Soit $(\mathscr{S})$ la sphère de centre O et de rayon 2.

1. Montrer qu'il existe des points de $(\mathscr{S})$ ayant pour abscisse 1 et situés dans le plans $(\mathscr{P})$ d'équation $z=1$.
2. On désigne par A celui de ces points ayant des coordonnées positives. Trouver les coordonnées de l'intersection B de (OA) avec le plan $(')$ d'équation $z=2$.

Exercice 10

Soit $A(-4;3;10)$ un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cône $(\mathscr{C})$ d'axe (Oz), de sommet O passant par A.
2. Calculer une valeur approchée au degré prés, de l'angle α des génératrices de $(\mathscr{C})$ avec d'axe (Oz).

Exercice 11

Déterminer une équation du cône de révolution de sommet O et dont les génératrices font un angle α avec son axe :

1. L'axe $(O;\overrightarrow{j})$ et $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$;
2. L'axe $(O;\overrightarrow{i})$ et $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$;
3. L'axe $(O;\overrightarrow{k})$ et $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 12

Soit $(\mathscr{C})$ un cône de révolution d'équation $x^2+y^2=4z^2$ et $(\mathscr{P})$ un plan d'équation $z=2$ dans lequel on conscrit le repère $(\Omega;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ avec $\Omega(0;0;2)$. Déterminer l'intersection de $(\mathscr{C})$ avec $(\mathscr{P})$.

Exercice 13

Déterminer une équation du cylindre $(\mathscr{C})$ dont la base est le cercle de centre O et dont

1. L'axe $(O;\overrightarrow{i})$ et le rayon est 5 ;
2. L'axe $(O;\overrightarrow{k})$ et le rayon est 2 ;
3. L'axe $(O;\overrightarrow{i})$ et le rayon $\sqrt{3}$.

Exercice 14

Soit $(\mathscr{C})$ un cône de révolution d'équation $x^2+y^2=\tan^2\alpha z^2$ où α l'angle que font ses génératrices et son axe.

1. Préciser son axe.
2. En déduire l'équation de $(\mathscr{C})$ dans les cas suivants : $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$; $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.
3. Cette équation existe t-elle quand $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$?

Exercice 15

Déterminer une équation du cylindre $(\mathscr{C})$ dont la base est un cercle de centre O et de rayon 3 :

1. L'axe $(O;\overrightarrow{k})$;
2. L'axe $(O;\overrightarrow{j})$;
3. L'axe $(O;\overrightarrow{i})$.

Exercice 16

Le cylindre $(\mathscr{C})$ a pour axe (Oz) et son cercle de base a pour rayon $\sqrt{3}$; le cône $(\mathscr{H})$ a pour axe (Ox) et ses génératrices font un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ avec (Ox). Y a-t-il des points communs à $(\mathscr{H})$ et à $(\mathscr{C})$ situés dans le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $z=1$?

Exercice 17

On considère le cylindre d'axe (Oz) passant par le point $A(1;2;3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de ce cylindre.
2. On coupe ce cylindre par le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $y=2$. Déterminer la nature de l'intersection.

LIGNES ET SURFACES DE NIVEAUX

Exercice 1

Soit A et B deux points tel que $AB = 8$.

1. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tel que : $\dfrac{MA}{MB} = 3$.
2. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C}')$ des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -32$.

Exercice 2

Soit A et B deux points du plan $(\mathscr{P})$ tel que $AB = 8$. On considère l'application f de $(\mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

1. a) Construire G l'isobarycentre du système $\{(A,1);(B,1)\}$.
   b) Démontrer que $f(M) = 2MG^2 - 32$.
2. Déterminer puis construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan $(\mathscr{P})$ tel que : $f(M) = 18$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle tels que $AB = 6$; $AC = 3$ et $BC = 7$. On désigne par G le barycentre des points $(A,2)$ et $(B,-1)$.

1. Placer le point G.
2. Simplifier l'écriture du vecteur $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
4. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
   a) Placer le point D.
   b) Déterminer puis construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tel que : $\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right) = 24$.

Exercice 4

Soit un triangle ABC tel que $AC = 12$, $AB = 10$ et $CB = 8$.

1. Construire le barycentre G du système $S = \{(A;1),(B;2),(C;1)\}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$.
3. Soit $(\mathscr{C}_1)$ l'ensemble des points N tels que : $\|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = \|\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\|$.
   a) Montrer que le point B appartient à $(\mathscr{C}_1)$.
   b) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C}_1)$.
4. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C}_2)$ des points P tels que : $\|\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\| = \|3\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}\|$.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que : $AB = 5, BC = 4$ et $\widehat{CBA} = 60°$.

1. Faire la figure
2. Soit f une application de $(\mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BM}$.
   a) Calculer $f(A)$; $f(B)$ et $f(C)$.
   b) Déterminer et construire les lignes de niveau 26 ,-8 de f.
3. Déterminer k de façon que D appartient à (L_k).

Exercice 6

Soient A et B deux points distincts du plan. On appelle ligne de niveau $k(k > 0)$, de la fonction $f \longmapsto \dfrac{MA}{MB}$ l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = \dfrac{MA}{MB} = k$.

1. Si $k = 1$, quelle est la ligne de niveau 1 de la fonction f ?
2. On suppose que $k \neq 1$. Montrer que pour tout point M du plan, $\dfrac{MA}{MB} = k$ si et seulement si $(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$.
3. On désigne de I et J respectivement les barycentres des systèmes $\{(A,1);(B,k)\}$ et $\{(A,1);(B,-k)\}$.
   a) Déterminer les lignes de niveau k de la fonction.
   b) En déduire la ligne pour $k = 2$.
4. On pose : $AB = 3$ et on désigne par G le barycentre des points $(A,1)$ et $(B,2)$.
   a) Démontrer que $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 6$.
   b) Déterminer puis construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points tels que : $MA^2 + 2MB^2 = 9$.
5. On choisit un repère orthonormal de manière que A soit l'origine du
   repère et B est pour coordonnées $(3,0)$.
   Retrouver analytiquement l'ensemble $(\mathscr{C})$.

Exercice 7

Soit A et B deux points distincts du plan tels que $AB = 4$. On désigne par I ; J et K les points du plan tels que I barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,-k)$;
J barycentre des points pondérés $(A,1)$ et (B,k) et K milieu du segment $[AB]$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Soit $(\mathscr{C})$, l'ensemble de point M du point tels que : $\dfrac{MA}{MB} = k$, $k \neq 0$.
   a) Montrer l'équivalence : $\dfrac{MA}{MB} = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$.
   b) Pour $k = 2$, construire les points I et J.
   c) Déterminer puis construire l'ensemble $(\mathscr{C})$.
3. Soit $(\mathscr{C}_1)$, l'ensemble de point M du point tels que : $MA^2 + MB^2 = k'$.
   a) Montrer l'équivalence : $MA^2 + MB^2 = k' \Longleftrightarrow MK^2 = \dfrac{k'}{2} - \dfrac{AB^2}{4}$.
   b) Pour $k' = 26$, déterminer puis construire l'ensemble $(\mathscr{C}_1)$.
   c) Calculer la puissance de J par rapport à $(\mathscr{C}_1)$.
4. (Γ) désigne l'ensemble de point M du point M du plan appartenant à l'intérieur commun de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$. Hachurer (Γ).

Exercice 8

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points $A(-2,2)$ et $B(2,2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
2. Démontrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.
3. Démontrer que l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle de centre I et de rayon 4.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$.
5. Soit a un réel négatif. Comment choisir a pour que le point $C(\sqrt{7}; a)$ soit sur le cercle $(\mathscr{C})$.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersections de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 9

Dans le plan $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit A, B, C, D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ et G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs 1, 2, 3. Soit f l'application du plan $(\mathscr{P})$ définie par : $f(M) = 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{MD})$ où λ est un paramètre réel.

1. a) Déterminer λ pour que f soit une application constante.
   b) Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan $(\mathscr{P})$, quel est l'ensemble des points M du plan $(\mathscr{P})$ tels que : $f(M) = \vec{u}$ lorsque λ varie ?
2. Soit g l'application de $(\mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(M) = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 6MD^2$.
   Quel est l'ensemble des points M du plan $(\mathscr{P})$ tels que : $g(M) = GA^2 + 2GB^2 + 3GC^2$.

Exercice 10

On donne trois points non alignés A, B et C du plan. I est le milieu de $[BC]$. On note G_k le barycentre de (A,k), $(B,1)$ et $(C,1)$ où k est réel différent de -2.

1. Déterminer et construire les points G_{-1}, G_0 et G_1.
2. Montrer que G_k est le barycentre de A et I avec des coefficients que l'on déterminera.
3. En déduire l'expression de $\overrightarrow{AG_k}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
4. Déterminer l'ensemble des points G_k lorsque k décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.
5. Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $\| -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = AB$.
   a) Montrer que le point C appartient à $(\mathscr{C})$.
   b) Montrer que $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre G_{-1}.
   c) Construire le cercle $(\mathscr{C})$.
6. $(\mathscr{C}_k)$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $\|k\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.
   a) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C}_k)$.
   b) Construire $(\mathscr{C}_{-1})$.

Exercice 11

On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 12$.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que : $3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 60$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que : $2\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MB}^2 = 0$.
3. On donne l'ensemble (Γ_k) des points M du plan tels que : $\dfrac{MA}{MB} = k$. Déterminer et construire (Γ_k) tels que : $k = \dfrac{4}{3}; k = \dfrac{1}{2}$ et $k = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 12

On considère un triangle vérifiant : $AB = 5cm$, $AC = 6cm$ et $BC = 4cm$. G est le barycentre de $(A,1)$,$(B,2)$, $(C,-1)$ et H est le barycentre de $(A,-3)$, $(C,1)$.

1. Faire la figure puis construire les points G et H.
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$.
3. Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points N tels que : $\|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}\| = \|-3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}\|$.
4. On note $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + x - 7y + 8 = 0$ et $(\mathscr{C}') : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
   a) Caractériser puis construire sur la même figure $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
   b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection J de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$. Placer J.

Exercice 13

On considère un triangle ABC tel que $AB = 7cm$, $AC = 5cm$ et $BC = 4cm$.

1. Construire le triangle ABC.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Démontrer que $AI = \sqrt{33}$.
3. Soit M un point du plan, pour quelle valeur de m, le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M ?
4. Déterminer alors le vecteur $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
5. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $(\mathscr{D}) : -2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$.
6. Soit $D = bar\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$.
   a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
   b) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

Exercice 14

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 ; B' est le milieu de $[AC]$ et D est le point défini par la relation : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

1. a) Démontrer que D est le barycentre du système $\{(A,3);(B,-2);(C,3)\}$.
   b) En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$.
3. Calculer DB^2 et DA^2.
4. a) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan vérifiant : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$.

b) Prouver que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à $(\mathscr{E})$.

c) Tracer $(\mathscr{E})$.

Exercice 15

ABC est un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 6.

1. Faire une figure.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2+MC^2=72$.
3. Que remarque-t-on ?
4. Justifier cette remarque.

Exercice 16

On considère les points $A(6;0;0)$; $B(0;6;0)$ et $C(0;0;4)$.

1. Déterminer le triplet de coordonnées du barycentre G des points massifs $(O,1)$; $(A,2)$, $(B,3)$.
2. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{S})$ des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MC}=0$.
3. Donner une équation cartésienne de $(\mathscr{S})$.
4. Déterminer l'intersection $(\mathscr{C})$ de $(\mathscr{S})$ et du plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x=0$.

Exercice 17

Soit A et B deux points distincts de l'espace $(\mathscr{E})$.
On se propose de déterminer l'ensemble $(\mathscr{S})$ des points M de l'espace tels que $\dfrac{MA}{MB}=2$.

1. Montrer que l'ensemble $(\mathscr{S})$ est équivaut à $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})=0$.
2. Justifier qu'il existe un unique point I tel que $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{O}$ et unique point J tel que $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{O}$.
3. En déduire que M appartient à $(\mathscr{S})$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$. Conclure.

Exercice 18

Soit un tétraèdre $ABCD$ régulier d'arête a. On note A' le centre de gravité du triangle BCB.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Déterminer le réel m tel que le point G, milieu de $[AA']$, soit le barycentre des points massifs (A,m) ; $(B,1)$; $(C,1)$; $(D,1)$.
3. Calculer GA^2 et GB^2 en fonction de a.
4. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{S})$ des points M de l'espace tels que : $6MA^2+2MB^2+2MC^2+2MD^2=5a^2$.
5. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $-3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=a^2$.
6. Vérifier que (Γ) est le plan médiateur de $[AA']$.
7. Déterminer l'intersection $(\mathscr{C})$ de $(\mathscr{S})$ et (Γ).
8. Prouver que les milieux respectifs I, J, K des segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ appartiennent à $(\mathscr{C})$. Tracer $(\mathscr{C})$.

ANGLES ORIENTES

Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\alpha=\dfrac{7\pi}{2}$; $\beta=\dfrac{202\pi}{3}$; $\gamma=\dfrac{-4\pi}{3}$; $\delta=\dfrac{-21\pi}{4}$; $\theta=\dfrac{101\pi}{4}$ et $\mu=3,5\pi$.

Exercice 2

Un mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est fixé.
Donner dans chaque cas une mesure principale de chacune des angles orientés indiqués.

1. $(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\pi}{2}$.
   a) $(-\vec{u};-\vec{v})$.
   b) $(2\vec{u};3\vec{v})$.
   c) $(-\vec{u};\vec{v})$.
   d) $(\vec{v};\vec{u})$.
2. $(\vec{u};\vec{v})=-\dfrac{\pi}{6}$.
   a) $(-\vec{v};2\vec{u})$.
   b) $(-32\vec{u};2\vec{v})$.
   c) $(-\vec{v};-3\vec{u})$.
   d) $(-\vec{v};-\vec{u})$.

Exercice 3

On donne $AB=4cm$; $BC=3cm$; $CD=2cm$; $DE=2cm$; $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=-\dfrac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=-\dfrac{\pi}{2}$; $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})=\dfrac{\pi}{3}$.

1. Construire la ligne brisée $ABCDE$.
2. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE})$.
3. Justifier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$.
4. En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4

Soient A, B, C, D et E cinq points définis par :
$AB=AC=1$; $AD=2$; $AE=3$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{23\pi}{12}$; $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\dfrac{119\pi}{4}$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=\dfrac{77\pi}{6}$.

1. Déterminer la mesure principale de l'angle suivants : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$.
2. Faire une figure.
3. Montrer que les points A, D et E sont alignés.
4. Calculer la longueur de DE.

Exercice 5

Soit A et B deux d'images respectives des nombres réels $-\dfrac{1999\pi}{6}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

1. Placer les points A et B sur le cercle trigonométriques.
2. Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.

Exercice 6

Soit ABC un triangle quelconque, on désigne par α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$. Donner, en fonction de α, une mesure des angles $(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA})$.

Exercice 7

Soit AIL un triangle équilatéral direct, les triangles BAL et CIL sont rectangles isocèles directs respectivement en L et en I.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la mesure de chacun des angles suivants : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AL})$, $(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AI})$ et $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC})$.
3. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 8

Le plan $(\mathscr{P})$ étant orienté, on considère le triangle équilatéral ABC tel que : $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB = 3cm$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Soit D un point du plan $(\mathscr{P})$ tel que : $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}) = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
   a) Montrer que les points A ; B et D sont alignés.
   b) Placer D sachant que $BD = 9cm$.
3. La parallèle à la droite (BC) passant par D coupe la droite (AC) en E.
   a) Comparer les mesures en radians des angles orientés $(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DB})$ et $(\overrightarrow{CE}\,;\overrightarrow{CB})$.
   b) En déduire que les points B ; C ; E ; D appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ de centre O que l'on construira.
4. F désigne le point d'intersection des tangentes à $(\mathscr{C})$ en E et en D.
   a) Démontrer que les points D ; O ; E et F sont cocycliques.
   b) Montrer que le triangle EDF est isocèle en F.

Exercice 9

Soit A et B deux points du plan tel que : $AB = 4cm$.

1. Construire le point C tel que : $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et $AB = AC$.
2. Soit D un point du plan tel que ACD soit un triangle équilatéral et $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CD}) = \dfrac{17\pi}{3}[2\pi]$
   a) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CD})$.
   b) Construire le point D.
3. Construire le point E tel que : $(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DC}) = \dfrac{11\pi}{12}[2\pi]$ et $DE = 3cm$.
4. Démontrer que les droites (AB) et $(ED$ sont parallèles.
5. Construire le point F tel que : A ; F et C sont alignés et $(\overrightarrow{BF}\,;\overrightarrow{CD}) = \dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$.
6. Démontrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

Exercice 10

Deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en A et en B.
Une droite passant par A coupe $(\mathscr{C})$ en M. Une droite passant par B coupe $(\mathscr{C}')$ en N.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Exercice 11

Dans le plan orienté $(\mathscr{P})$. On Considère un triangle ABC (non aplati).

1. Tracer $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Soit M un point du $(\mathscr{C})$ distinct des points A, B et C. On désigne par A', B' et C' les projeté orthogonaux de M respectivement sur les droites (BC),(AC) et (AB). Montrer que les points A',B' et C' sont alignés.
3. Placer les points A'',B'' et C'' les images des points A', B' et C' par l'homothétie de centre M et de rapport 2.
4. En utilisant une propriété caractéristique de l'homothétie, montrer que les points A'',B'' et C'' sont alignés.
5. Comment appelle-t-on la droite qui passe par A',B' et C' ?
6. Comment appelle-t-on la droite qui passe par A'',B'' et C'' ?

Exercice 12

ABC est un triangle quelconque et M un point du plan qui se projette orthogonalement sur (BC),(AC) et (AB) respectivement en P, Q et R.

1. Montrer que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QR})\ [2\pi]$, où M est distinct de P, Q et R.
2. Démontrer que les points P, Q et R sont alignés si et seulement si le point M est sur le cercle inscrit au triangle ABC.
3. Dans le cas où les points P, Q et R sont alignés, comment appelle-t-on la droite contenant les points P, Q et R ?

Exercice 13

On considéré un triangle ABC non rectangle en A, (Γ) son cercle circonscrit de centre O, et P et Q les pieds des hauteurs issues de B et C.

1. Montrer que l'on a : $(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = (\overline{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{AC}})[\pi]$.
2. En déduire que : $2(\overline{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{AC}}) = (\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})[\pi]$.
3. Soit T un point de la tangente en A à (Γ), $(T \neq A)$, montrer que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AT}$ sont colinéaires.
4. Établir que la droite (OA) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 14

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O. A et B sont deux points du cercle $(\mathscr{C})$ tels que le triangle OAB soit équilatéral de sens direct. M est un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B. (Δ) et (Δ') sont deux droites tangents à $(\mathscr{C})$ respectivement en A et B. La droite (Δ'') tangente à M coupe (Δ) et (Δ') en R et S.

1. Faire la figure.

2. Montrer que : $\overline{(\Delta;\Delta')} = \overline{(OA;OB)}[\pi]$.
3. En déduire deux mesures différentes de l'angle $\overline{(\Delta;\Delta')}$.
4. Montrer que : $\overline{(MA;MB)} = \dfrac{\pi}{6}[\pi]$.
5. Prouver que les points O, A, M, R appartient à un même cercle (Γ) que l'on tracera.
6. Justifier la cocyclicité des points O, M, S, B.

Exercice 15

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$. Soit D un point du cercle $(\mathscr{C})$ distinct de A, B et C. On désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux de D sur les droites (BC) ; (AC) et (AB) respectivement.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les points A', C, D, B' sont situés sur un même cercle $(\mathscr{C}')$ que l'on tracera.
3. Justifier la cocyclicité des ponts B, A', D, C'.
4. En déduire que :
   a) $2(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'D}) = 2(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD})[2\pi]$.
   b) $2(\overrightarrow{A'D};\overrightarrow{A'C'}) = 2(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})[2\pi]$.
5. En déduire l'alignement des points A, B' et C'.

Exercice 16

Soit ABC un triangle quelconque et H son orthocentre.
On note D le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite (BC).

1. Faire une figure.
2. Établir que : $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB})[2\pi]$.
3. Montrer que les points A ; B ; C et D sont cocycliques.

Exercice 17

Soit A et B deux points du plan tel que $AB = 4cm$.
Dans chacun des cas suivants ; déterminer et construire les ensembles $(\mathscr{C})$ des points M du plan $(\mathscr{P})$ tels que :

1. $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.
2. $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
3. $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
4. $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{3}[\pi]$.
5. $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{6}[\pi]$.
6. $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
7. $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

TRIGONOMÉTRIES

Exercice 1

1. Définir le cercle trigonométrique.
2. Quelle est la longueur du cercle trigonométrique ?
3. Qu'appelle t-on coordonnées polaire d'un point ?
4. Donner la relation qui existe entre coordonnées polaire et coordonnées cartésiennes d'un point.
5. Démontrer par trois méthodes différentes que : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, où θ est un réel.

Exercice 2

On donne $\alpha = \dfrac{104\pi}{4}$ et $\beta = -\dfrac{1999\pi}{6}$

1. Placer sur un cercle trigonométrique les lignes trigonométriques des angles remarquables et associés.
2. Calculer le cosinus ; le sinus et la tangente de nombre α et β.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On donne les points $A\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $B\left(\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$; $C\left(1;-\dfrac{\pi}{2}\right)$; $D\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $E\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. Déterminer les coordonnées rectangulaires des points A ; B et C.
3. Donner les coordonnées polaires des points D et E.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne les points $A\left(2;\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $B\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$. Soit S un point du plan tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. Donner les coordonnées du point S.
3. On donne les points $K(4;0)$; $L(0;4)$ et $S(4;4)$.
   Quelles sont leurs coordonnées polaires.

Exercice 5

Soit M et N deux points d'images respectives des nombres a et b sur le cercle trigonométrique.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de M et N.
2. Montrer que $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.
3. En déduire que $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
4. Montrer que $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$.
5. En déduire que $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$.

Exercice 6

1. Démontrer que pour tous nombres réels a et b ; on a : $2\sin a\sin b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.
2. En déduire que :
   $2\sin\dfrac{\pi}{7}\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7}\right) = \sin\dfrac{6\pi}{7}$.
3. Démontrer que : $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 7

1. Calculer en utilisant les formules d'addition les nombres suivants : $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{7\pi}{12}$.
2. Calculer en utilisant les formules de linéarisation les nombres suivants : $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel α, on a :
   a) $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0.$
   b) $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0.$

Exercice 8

Pour tout réel x non multiple de $\dfrac{\pi}{2}$,

1. Démontrer que $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=2$
2. Exprimer en fonction de $\cos 2x$
   a) $A=\dfrac{\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.
   b) $B=\dfrac{\sin 5x}{\sin x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}$.

Exercice 9

Soit p un polynôme défini par : $p(x)=2x^3-x^2-5x-2$.

1. Calculer $p(-1)$. Que peut-on en déduire ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $p(x)=0$.
3. On donne $(E): 2\cos^3(2x)-\cos^2(2x)-5\cos(2x)-2=0$.
   a) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation (E).
   b) Placer les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.
4. Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ les équations : $\tan(2x)=1$ et $\cot(3x)=\sqrt{3}$.
5. Calculer les valeurs exactes des cosinus; sinus et tangente des nombres suivants :
   $\dfrac{25\pi}{3}$; $\dfrac{-97\pi}{3}$; $\dfrac{-11\pi}{4}$ et $\dfrac{109\pi}{3}$.

Exercice 10

Soit l'équation $(E): -\sqrt{3}\cos x+\sin x=-\sqrt{2}$.

1. a) Montrer que : $-\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\dfrac{5\pi}{6}\right)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
2. On donne $f(x)=(\cos 2x+\sin 2x)(\cos 2x-\sin 2x)$.
   a) Montrer que : $\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$.
   b) Montrer que : $f(x)=\cos 4x$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   $2f(x)+1=0$ et $\dfrac{\sin 4x}{f(x)}=1$.
3. On pose $\beta=\dfrac{11\pi}{12}$.
   a) Vérifier que $\beta=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$.
   b) Calculer $\cos\beta$ et $\sin\beta$.

Exercice 11

1. Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\alpha=\dfrac{35\pi}{3}$ et $\beta=\dfrac{-105\pi}{4}$.
2. Soit $A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$ et $B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$.
   a) Calculer $A+B$ et $A-B$.
   b) En déduire A et B.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :
   $(S) : \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sin x+\sin y=1 \end{cases}$; $(S') : \begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ 4\sin x.\cos y=3 \end{cases}$;
   $(S'') : \begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \cos x+\cos y=\sqrt{3} \end{cases}$

Exercice 12

1. Démontrer que pour tout réel x ;
   $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$
   $(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=4\cos x.\sin x$.
2. Soit les équations trigonométriques suivantes :
   $(E): 2\cos(2x)-1=0$ et $(E'): \cos^2(x)=\sin^2(x)$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
   b) Placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E').
3. On considère la variable réelle x telle que : $x=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-u\right)$.
   a) Montrer que : $\sin u+\cos u=x\sqrt{2}$.
   b) Calculer $(\cos u+\sin u)^2$.
   c) En déduire l'expression de $\sin u\cos u$ en fonction de x.
4. On donne $f(x)=\dfrac{\sin u+\cos u}{\sqrt{2}\sin u\cos u}$.
   Exprimer $f(x)$ en fonction de x, puis calculer la dérivée f' de f.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin^2(2x+\dfrac{\pi}{6})=\cos^2(x+\dfrac{\pi}{3})$;
$3\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{6}=0$; $\cos(x-\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}$;
$4\cos^2 x-2(1+\sqrt{3})\cos x+\sqrt{3}=0$; $\sin(\dfrac{\pi}{6}-x)=\sin\dfrac{\pi}{5}$;
$cotan^2 x+(\sqrt{3}-1)cotan x=\sqrt{3}$, $\tan(3x+\dfrac{\pi}{3})=cotan(\dfrac{\pi}{3}-x)$;
$\cos(\dfrac{\pi}{4}-x)=\cos\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 14

1. Calculer $A=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$.
2. On donne l'équation $(E): 4x^2+2x(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{6}=0$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
   b) En déduire les solutions dans $[0;2\pi]$ de l'équation $(E'): 4\sin^2 x+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos x-\sqrt{6}-4=0$.
   c) Placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
   $2\sin x+\dfrac{2}{\sin x}+\dfrac{3}{\sin^2 x}-7=0$.

Exercice 15

1. Vérifier que : $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.
2. Soit x et y deux éléments de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tels que : $\sin x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   a) Calculer $\cos x$.
   b) Calculer $\sin y$. En déduire la valeur de y.
3. Calculer :
   a) $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$.
   b) $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$.
4. En déduire la valeur de x.

Exercice 16
On considère le système (S) d'équations :
$$(S):\begin{cases}\cos x.\cos y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}\\ \sin x.\sin y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\end{cases}$$
1. Démontrer que le système (S) est équivalente au système (S') suivante : $(S'):\begin{cases}\cos(x+y) = \dfrac{1}{2}\\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$
2. Résoudre le système (S).

Exercice 17
On considère le système (S) d'équations :
$$(S):\begin{cases}x+y = \dfrac{\pi}{6}\\ \sin x.\sin y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$
1. Démontrer que :
   a) $\cos(x+y)-\cos(x-y) = -2\sin x\times\sin y$.
   b) le système (S) est équivalente au système (S') suivante : $(S'):\begin{cases}x+y = \dfrac{\pi}{6}\\ \cos(x-y) = 0\end{cases}$
2. Résoudre le système (S).

Exercice 18
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$; $\cos 2x - \sin 2x = -1$; $\tan(2x).\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$; $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Exercice 19
1. Résoudre dans l'intervalle $[0,2\pi]$ les équations suivantes :
   $\tan(2x) = 1$; $\cot(3x) = \sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions des équations suivantes : $2\cos(2x)-1 = 0$; $\sqrt{2}.\sin(x) = -1$.

Exercice 20
1. Résoudre les équations suivantes :
   a) $\sin^2(2x+\dfrac{\pi}{6}) = \cos^2(x+\dfrac{\pi}{3})$.
   b) $\sin 2x = \cos\dfrac{x}{2}$.
   c) $tan\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right) = cotan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.
2. Résoudre et discuter l'équation suivante :
   $\cos x + m\sin x + m - 2 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis sur $]-\pi,\pi]$ les équations suivants :
   a) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.
   b) $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{7}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   c) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin x$.
   d) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 21
Résoudre l'inéquation $\sin x > 0$ sur les intervalles suivants : $]-\pi;\pi[$; $[0;2\pi[$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 22
Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes :
$\cos 2x \geq \dfrac{1}{2}$ et $\tan x < 1$.

Exercice 23
Résoudre dans $[0,2\pi]$ les inéquations suivantes :
1. $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2}-1)\cos x - \sqrt{2} \geq 0$.
2. $4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$.

Exercice 24
1. Résoudre dans $[0,2\pi]$ l'inéquation suivante :
   $2\cos^2(2x) - 5\cos(2x) - 3 \geq 0$.
2. a) Développer, puis réduire $(4+\sqrt{2})^2$.
   b) Résoudre dans $[0,2\pi]$ l'inéquation suivante :
   $2\sin^2(x) - (\sqrt{2}-4)\sin(x) - 2\sqrt{2} \geq 0$.
3. Résoudre dans $[0,2\pi]$ les inéquations suivantes :
   $-\sin(x)\,(2\cos(x)-1) \geq 0$; $\cos(x)\left(2\sin(x)+\sqrt{3}\right) \leq 0$

Exercice 25
1. a) Vérifier que : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
   $2t^2 + (1-\sqrt{2})t - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
   $2t^2 + (1-\sqrt{2})t - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
2. En déduire dans $\mathbb{R}$ la résolution de l'équation :
   $2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
3. Représenter les images des solutions de cette équation sur le cercle trigonométrique.
4. En déduire sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ la résolution de l'inéquation : $2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Exercice 26
Résoudre sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ les équations inéquations suivantes :
1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geq 0$.
2. $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0$.
3. $3\cos^2 x - \left(9+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\cos x + \dfrac{9}{\sqrt{2}} \leq 0$.

FONCTIONS CIRCULAIRES

Exercice 1
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \cos x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la période de la fonction f.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction f.
4. Démontrer que la fonction f est paire.
5. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur $J = [0;\pi]$.
6. Dresser le tableau de variation de f sur $J = [0;\pi]$.
7. En déduire le tableau de variation de f sur $K = [-\pi;\pi]$.
8. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$.

Exercice 2
Soit la fonction g définie par : $g(x) = \sin x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Déterminer la période de la fonction g.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction g.
4. Démontrer que la fonction g est impaire.
5. Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur $J = [0;\pi]$.
6. Dresser le tableau de variation de g sur $J = [0;\pi]$.
7. En déduire le tableau de variation de g sur $K = [-\pi;\pi]$.
8. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$.

Exercice 3
Soit la fonction g définie par : $g(x) = \tan x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Déterminer la période de la fonction g.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction g.
4. Démontrer que la fonction g est impaire.
5. Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
6. Dresser le tableau de variation de g sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
7. En déduire le tableau de variation de g sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4
Soit la fonction f définie par : $h(x) = \cos \pi x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Déterminer la période de la fonction h.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction h.
4. Étudier la parité de la fonction h.
5. Déterminer $h'(x)$ et étudier son signe sur $J = [-1;0]$.
6. Dresser le tableau de variation de h sur $J = [-1;0]$.
7. En déduire le tableau de variation de h sur $K = [-1;1]$.
8. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-3;3]$.

Exercice 5
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Démontrer que la fonction f est périodique de période $p = 4\pi$.
2. Démontrer que l'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $I = [-2\pi;2\pi]$.
3. Résoudre dans l'intervalle $I = [-2\pi;2\pi]$ les équations $\sin(\frac{1}{2}x) = 0$ et $\cos(\frac{1}{2}x) = 0$.
4. Calculer la dérivée $f'(x)$.
5. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $I = [-2\pi;2\pi]$.
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-4\pi;4\pi]$.

Exercice 6
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la période de la fonction f.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction f.
4. Étudier la parité de la fonction f.
5. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur $J = [-2;0]$.
6. Dresser le tableau de variation de f sur $J = [-2;0]$.
7. En déduire le tableau de variation de f sur $K = [-2;2]$.
8. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-4;4]$.

Exercice 7
Soit la fonction f définie par : $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Déterminer la période de la fonction f.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction f.
4. Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur $J=[-\pi;\pi]$.
5. Dresser le tableau de variation de g sur $J=[-\pi;\pi]$.
6. En déduire le tableau de variation de g sur $K=[-\pi;\pi]$.
7. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\cos\left(-4x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la période de la fonction f.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction f.
4. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur $J=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.
5. Dresser le tableau de variation de f sur $J=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.
6. En déduire le tableau de variation de g sur $K=[-\pi;\pi]$.
7. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 9

Soit g la fonction définie par $g(x)=\cos\pi x+\sin\pi x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Trouver les nombres réels α ; β et θ tels que : $g(x)=\alpha\cos(\beta x+\theta)$.
2. Montrer que la période de g est $p=2$.
3. Justifier que g peut être étudier sur l'intervalle $[-1;1]$.
4. Montrer que la dérivée $g'(x)=-\pi\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
5. Montrer que sur l'intervalle $[-1;1]$, l'équation $\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ admet pour solutions $x_0=-\dfrac{3}{4}$ et $x_1=-\dfrac{1}{4}$.
6. Donner le tableau de signe de $g'(x)$.
7. Dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $[-1;1]$.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de g sur l'intervalle $[-2;2]$.

Exercice 10

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\cos^3 x\cos(3x)$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Montrer que f est périodique de période π.
4. Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Montrer que la dérivée de f' de la fonction f est $f'(x)=-3\cos^2 x\sin(4x)$.
6. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
7. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 11

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sin^3 x\cos(3x)$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Montrer que f est périodique de période π.
4. Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
6. Déterminer la dérivée de f' de la fonction f puis étudier son signe sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
7. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ en indiquant la valeur exacte de $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$. On admettant que $f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{8}$.
8. Résoudre sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, l'équation $f(x)=0$.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 12

Soit h une fonction définie par : $h(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Montrer que la fonction h est périodique de période $p=2\pi$.
3. Déterminer la dérivée h' de la fonction h.
4. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x)=2\cos\frac{3x}{2}-3\cos x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer la période de la fonction f.
4. Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0;2\pi]$.
5. Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $[0;2\pi]$.

TRANSFORMATIONS PLANES

Exercice 1
Soit f une transformation plane et A un point du plan tel que $f(A) = A'$.

1. Donner $f^{-1}(A')$.
2. Déterminer $f^{-1} \circ f(A)$ et $f \circ f^{-1}(A')$.
3. Que peut-on déduire ?

Exercice 2
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les applications f et g définies analytiquement par : $f : \begin{cases} x' = -x - 3y + 5 \\ y' = -2x - 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = 2x + 3y + 5 \\ y' = x + 4y + 5 \end{cases}$

1. Montrer que f et g sont des transformations planes.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de f et g.

Exercice 3
Soit f et g deux applications définies par :
$f : \begin{cases} x' = x + y + 4 \\ y' = -2x + 3y + 7 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = 3x - 5y + 2 \\ y' = 2x - y + 5 \end{cases}$

1. Montrer que f et g sont des transformations planes.
2. a) Déterminer l'image B par f du point $A(2; 3)$.
   b) Déterminer l'antécédent C par f du point $D(6; 8)$.
3. Déterminer les ensembles des points invariants par f et g.
4. Déterminer l'expression analytique de f^{-1}.
5. Déterminer les expressions analytiques des applications suivantes : $g \circ f$; $f \circ g$; $g \circ f^{-1}$; $f \circ f$ et $f \circ g \circ f$.
6. Déterminer une droite $(\mathscr{D}')$ image de la droite $(\mathscr{D}) : y = 3x - 1$ par f.

Exercice 4
Déterminer l'expression analytique de la réflexion d'axe $(\mathscr{D})$ d'équation $x - y + 2 = 0$.

Exercice 5
Soit f une rotation de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et d'angle de mesure θ radians.

1. Démontrer que l'expression analytique de f est :
   $f : \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0 \end{cases}$
2. On donne $\Omega(2; 1)$. En déduire l'expression analytique de f pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \pi$.

Exercice 6
Soit t une translation de vecteur $\vec{u}(2; -5)$.

1. Déterminer l'expression analytique de t.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de t.
3. Déterminer les coordonnées du point B image de $A(0; 2)$ par t.

ISOMÉTRIES DU PLAN

Exercice 1

1. Qu'appelle t-on isométrie du plan ?
2. Citer les différentes types des isométries.
3. Qu'appelle t-on déplacement ? Donner les exemples.
4. Qu'appelle t-on antidéplacement ? Donner les exemples.

Exercice 2
Soit f une transformation plane définie par :
$f : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f est un déplacement.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
4. En déduire la nature de f.

Exercice 3
Soit f une transformation plane définie par : $f : \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f est un antidéplacement.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
4. En déduire la nature de f.

Exercice 4
Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et K le milieu du segment $[AC]$.

1. Faire une figure.
2. Donner la nature et les éléments caractéristiques des applications suivantes :
   $f = r\left(C; \frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(A; -\frac{\pi}{3}\right)$; $g = r\left(B; \frac{2\pi}{3}\right) \circ r\left(C; \frac{2\pi}{3}\right)$;
   $h = r\left(A; \frac{2\pi}{3}\right) \circ r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right)$ et $K = S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_A$.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un rectangle direct tel que $AB = 2AD$ et O est le milieu du segment $[CD]$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $f = S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$; $g = S_{(OA)} \circ S_{(OD)}$ et $h = f \circ S_{(OC)} \circ S_{(OD)}$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un carré. Déterminer les isométries suivantes :

1. $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.
2. $S_D \circ S_B \circ S_C \circ S_A$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. On désigne par I le milieu du segment $[BC]$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = S_{(OB)} \circ S_{(OC)}$.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f = S_{(OA)} \circ S_{(OB)} \circ S_{(OC)}$.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications suivantes :
$g = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ et $h = S_{(BC)} \circ S_{(OA)}$.
5. Soit $\varphi = h \circ t_{\overrightarrow{BC}}$. Caractériser φ.

Exercice 8

Soit A et B deux points distincts.

1. Déterminer et construire la droite $(\mathscr{D})$ telle que :
$r\left(A; -\dfrac{2\pi}{3}\right) = S_{(AB)} \circ S_{(\mathscr{D})}$.
2. Déterminer et construire la droite $(\mathscr{D}')$ telle que :
$r'\left(A; -\dfrac{2\pi}{3}\right) = S_{(\mathscr{D}')} \circ S_{(AB)}$.
3. On pose $f = r' \circ r$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 9

Dans le plan orienté, on considère un segment $[AD]$.
Soit r la rotation d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ qui transforme A en D.

1. Construire Ω le centre de la rotation r.
2. Soit B et C deux points du plan tels que $ABCD$ soit un carré direct de centre O. On désigne par I, J, K, L, E les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[\Omega D]$.
   a) Trouver toutes les isométries qui laissent globalement invariant le carré $ABCD$.
   b) Donner la nature puis caractériser les applications suivantes :
   $g_1 = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ r(O, \frac{\pi}{2})$; $g_2 = r(D, \frac{\pi}{2}) \circ r(O, -\frac{\pi}{2})$.
   $g_3 = r(O, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{BC}}$; $g_4 = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r(O, \frac{\pi}{2})$.
   $g_5 = S_{AD} \circ r(A, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{OB}}$; $g_6 = S_{BD} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.
   $g_7 = S_{AD} \circ r(O, \frac{\pi}{2})$; $g_8 = t_{\overrightarrow{OA}} \circ S_{BD}$.
   $g_9 = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{OI}$; $g_{10} = r(O, \dfrac{\pi}{2}) \circ S_{AC}$.

Exercice 10

Soit $ABCO$ un parallélogramme.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que : $S_B \circ S_A = S_C \circ S_O$.
3. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $f = S_C \circ S_B \circ S_A$.
4. Construire l'image de $ABCO$ par la transformation f.

Exercice 11

Soit $ABCD$ un rectangle de sens direct.

1. Faire la figure.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $f = S_{(AD)} \circ S_A \circ S_{(AB)}$; $g = S_{(CD)} \circ S_A \circ S_{(AB)}$ et $h = S_{(AD)} \circ S_C \circ S_{(AB)}$.

Exercice 12

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté au repère orthonormé$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ direct. Soit f l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe à tout point $M(x;y)$, le point $M'(x';y')$ tel que :
$f : \begin{cases} x' = -x+1 \\ y' = -y+2 \end{cases}$

1. Donner la définition d'une isométrie.
2. Montrer que f est une isométrie.
3. Montrer que f est un déplacement.
4. Montrer que f est une symétrie centrale dont on précisera le centre.
5. Soit $A(-1;1)$ et $B(2;1)$ deux points du plan $(\mathscr{P})$.
On désigne par (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$, C et D deux points de (Δ) situé sur le cercle telle que l'ordonnée de C soit positive.
   a) Écrire l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$. Tracer le cercle $(\mathscr{C})$.
   b) Donner les coordonnées des points C et D.
   c) Quelle est la nature du triangle ABC ?
6. On note $(\mathscr{C}')$ l'image du cercle $(\mathscr{C})$ par f.
   a) Donner le diamètre de $(\mathscr{C}')$.
   b) Que constate-t-on ?
7. Montrer que f est la composée des des symétries orthogonales $S_{(AB)}$ et $S_{(\Delta)}$.

Exercice 13

Le plan $(\mathscr{P})$ étant orienté. Soit $ABCD$ un carré de côté $4cm$ et de centre O. Soit I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

1. Faire une figure.
2. Soit r_1 une rotation de centre A qui transforme B en D et r_2 une rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.
Montrer que l'angle de r_1 est $\frac{\pi}{2}$.
3. On pose $f = r_1 \circ r_2$.
Montrer que f est une symétrie centrale dont on précisera le centre.
4. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
On muni le plan $(\mathscr{P})$ à un repère orthonormé $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
   a) Déterminer les coordonnées des points A et O et tracer $(\mathcal{C})$.
   b) Montrer que l'expression analytique de f est :
   $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y+2 \end{cases}$
   c) En déduire les coordonnées du point E image du point O par f.
5. Tracer le cercle $(\mathscr{C}')$ image de $(\mathscr{C})$ par f.

Exercice 14

Soit f la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(1;2)$ et g la symétrie de centre $I(4;1)$.

1. Donner l'expression analytique de f.
2. Donner l'expression analytique de g.

3. Soit h l'application définie par $h = g \circ f$. Si on note $M''(x'';y'')$ l'image du point $M(x;y)$ par h.
   a) Exprimer x'' et y'' en fonction de x et y.
   b) Montrer que h est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

Exercice 15

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté au repère orthonormé$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ direct. Soit f l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe à tout point $M(x;y)$, le point $M'(x';y')$ tel que :
$f : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f est un antidéplacement.
3. On suppose que f est la composée d'une symétrie orthogonale S d'axe $(\mathscr{D})$ et d'une translation t de vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(-1;1)$ qui dirige $(\mathscr{D})$.
   a) Donner l'expression analytique de la translation t.
   b) Montrer que $S = f \circ t_{-\overrightarrow{v}}$.
   c) Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale S.
   d) En déduire l'équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$.
4. Quelle est la nature de la l'application f ? Justifier.
5. Donner les éléments caractéristiques de f.

Exercice 16

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté au repère orthonormé$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ direct. Soit f l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe à tout point $M(x;y)$, le point $M'(x';y')$ tel que :
$f : \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f est un antidéplacement.
3. Montrer que f n'admet pas de points invariants.
4. En déduire la nature de f.
5. Montrer que l'application $T = f \circ f$ est une translation dont on précisera le vecteur $\overrightarrow{v}$.
6. Donner l'expression analytique de la translation t de vecteur $\overrightarrow{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.
7. Montrer que l'application $S = f \circ t$ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.
8. En déduire les éléments caractéristiques de f.

Exercice 17

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté au repère orthonormé$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ direct. Soit φ l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe à tout point $M(x;y)$, le point $M'(x';y')$ tel que :
$$\varphi : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un antidéplacement du plan.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de φ.
3. En déduire la nature de φ.
4. On se propose de déterminer les éléments caractéristiques de φ.
   a) Montrer que l'application $T = \varphi \circ \varphi$ est une translation dont on précisera le vecteur $\overrightarrow{v}$.
   b) Donner l'expression analytique de la translation t de vecteur $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.
   c) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ telle que $\varphi = t \circ S$.
   d) Donner l'équation de la droite $(\mathscr{D})$.
   (a) En déduire les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC. On désigne par I ; J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$ et $[CA]$. Soit C' le symétrique de C par rapport à la droite (AB) et φ la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 4cm$.
2. Quelle est la nature du triangle $AC'B$? Justifier votre réponse.
3. Quelles sont les images des points A ; B et C' par φ ?
4. On rapporte le le plan au repère orthonormé $(I; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans ce repère, les points A et B ont pour coordonnées $(-1;0)$ et $(1;0)$.
   a) Vérifier que l'expression analytique de φ est :
   $$\varphi : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - \dfrac{1}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
   b) En déduire les coordonnées des points C et C'.

Exercice 19

Dans un plan orienté $(\mathscr{P})$, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. Soit I le point tel que le CAI soit un triangle rectangle isocèle avec $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
On désigne par O le milieu du segment $[AI]$ et par D le symétrique de C par rapport à O.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 6cm$.
2. a) Quelle est la nature du quadrilatère $ACID$?
   b) Que représente le point O pour ce quadrilatère ?
3. Soit f une rotation laissant invariant le point D et qui transforme A en I.
   a) Déterminer la mesure de l'angle de f.
   b) Tracer le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au quadrilatère $ACID$.
4. On muni le plan $(\mathscr{P})$ à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OI}\right)$.
   a) Donner les coordonnées des points D, C, I, A.
   b) Déterminer l'expression analytique de f.
   c) Construire le cercle $(\mathscr{C}')$, image de $(\mathscr{C})$ par f.
5. On désigne par r la rotation de centre D d'angle de mesure $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, on pose $g = f \circ r$.

a) Déterminer la mesure principale de α.

b) Calculer $g(I)$.

c) Donner la nature exacte de g.

Exercice 20

On considère un triangle ABC équilatéral, inscrit sur un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. Soit I le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que $[AI]$ soit un diamètre. On désigne par A', B' et C' les milieux respects des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 4cm$ et on disposera (BC) horizontal.
2. Montrer que l'angle $(\overline{OA;OC'}) = \dfrac{\pi}{3}[\pi]$.
3. Soit l'application $\varphi = S_{(IA)} \circ S_{(CC')}$.
   a) Montrer que φ est une rotation.
   b) Déterminer l'angle et le centre de φ.
4. Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.
5. Déterminer la droite $(\mathscr{D})$ telle que $t_{\overrightarrow{CC'}} = S_{(AB)} \circ S_{(\mathscr{D})}$.
6. Soit f l'application du plan définie par : $g = S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{CC'}}$.
   a) Quelle est la nature de l'application f ?
   b) Déterminer l'image du point C par f.
   c) Donner les éléments caractéristiques de f
7. Les droites (AB) et (IC) se coupent en un point J.
   a) Montrer que l'angle $(\overline{JI;JB}) = \dfrac{\pi}{6}[\pi]$.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application g définie par : $g = S_{(IC)} \circ S_{(AB)}$.

Exercice 21

Soit ABC un triangle tel que : $AB = AC$ et $(\overline{AB;AC}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 4cm$.
2. Montrer que l'angle de la rotation R a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Déterminer les droites $(\mathscr{D})$; $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ telles que : $R = S_{(\mathscr{D}')} \circ S_{(\mathscr{D})}$ et $T = S_{(\mathscr{D}')} \circ S_{(\mathscr{D}'')}$.
4. Soit f la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer $f(J)$; $f(C)$ et $f(A)$.
   b) En déduire $f \circ f(C)$.

Exercice 22

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté au repère orthonormé$(O; \vec{i}, \vec{j})$ direct. Soit f_α l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe à tout point $M(x;y)$, le point $M'(x';y')$ tel que :

$$f_\alpha : \begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \alpha \\ \\ y' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f_α est un antidéplacement du plan.
2. Montrer que f_{-1} est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe $(\mathscr{D})$.
3. On pose $\alpha = 0$.
   a) Déterminer l'ensemble des points invariants de f_0.
   b) En déduire que f_0 est une symétrie glissée dont on précisera le vecteur et l'axe.

HOMOTHÉTIES DU PLAN

Exercice 1

Soit ABC un triangle. On désigne par h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapport respectif 2 et $-\dfrac{1}{3}$.

1. Démontrer que $h' \circ h$ est une homothétie dont on précisera son rapport.
2. Construire l'image de A par $h' \circ h$.
3. En déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice 2

Soit ABC un triangle. On désigne par h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapport respectif $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$.

1. Démontrer que $h' \circ h$ est une translation.
2. Construire l'image de A par $h' \circ h$.
3. En déduire une détermination du vecteur de cette homothétie.
4. Exprimer ce vecteur en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle. On désigne par h l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Justifier que $t \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.
2. Construire l'image de A par $t \circ h$.
3. En déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice 4

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2 et h' l'homothétie de centre O' et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

1. Démontrer que $h' \circ h$ est la symétrie de centre I tel que $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{OO'}$.
2. Déterminer la transformation $h \circ h'$.

Exercice 5

Soit O et O' deux points distincts du plan, k est un nombre réel non nul et différent de 1. On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport k et h' l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{k}$.

1. Démontrer que $h' \circ h$ est la translation de vecteur $\frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $h \circ h'$.

Exercice 6

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit h et h' les homothéties dont les expressions analytiques sont respectivement : $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$

1. Démontrer que les transformations $h' \circ h$ et $h \circ h'$ sont des homothéties.
2. Déterminer les expressions analytiques de $h' \circ h$ et $h \circ h'$ dans ce repère.
3. Déterminer les coordonnées des centres des ces homothéties.

Exercice 7

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit h l'homothétie de centre $\Omega(-2;1)$ et de rapport -3, t la translation de vecteur $\vec{u}(1;3)$ et φ la symétrie orthogonale d'axe des abscisses.

1. Déterminer les expressions analytiques de $t \circ h$ et $h \circ t$.
2. Déterminer les expressions analytiques de $\varphi \circ h$ et $h \circ \varphi$.

Exercice 8

Soit O un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur. On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport 2 et t la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. Soit M' l'image d'un point M par la transformation $h \circ t$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$.
   b) Soit Ω le centre de l'homothétie $h \circ t$. Exprimer $\overrightarrow{O\Omega}$ en fonction de $\vec{u}$.
2. Mêmes questions pour la transformation $t \circ h$.

Exercice 9

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2, S_A la symétrie de centre $A(-3;1)$.

1. Écrire les expressions analytiques de h et S_A.
2. Écrire l'expression analytique de la transformation $\varphi = S_A \circ h$.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $\varphi = S_A \circ h$.

Exercice 10

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1;-2)$ et de rapport $-\frac{3}{2}$, $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $A(3;2)$ et de rayon 2.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$.
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}')$ image du cercle $(\mathscr{C})$ par l'homothétie h.

Exercice 11

Soit OAB un triangle et A' le point définit par : $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$.
Soit C un point non situé sur les côtés du triangle.
On désigne par I le point d'intersection de (OB) et de la parallèle à (AB) passant par A'. La parallèle à (AC) passant par A' et la parallèle à (BC) passant par I se coupent en J.
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 3.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'image du point B par l'homothétie h.
3. Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par h.
4. Démontrer que les points O ; C et J sont alignés.

Exercice 12

Soit f l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe au point $M(x;y)$ le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 4x - 12 \\ y' = 4y + 3 \end{cases}$

1. Montrer que f admet un seul point invariant I, dont on déterminera les coordonnées.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires.
3. Donner la nature de l'application f.

Exercice 12

Soit f l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe au point $M(x;y)$ le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

1. Montrer, en calculant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, que f est une translation.
2. Déterminer une équation de l'image par f de la droite $(\mathscr{D})$ passant par $A(6;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;3)$.

Exercice 13

Soit g l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même qui associe au point $M(x;y)$ le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 2 \\ y' = \frac{1}{2}y - 1 \end{cases}$

1. Montrer que g est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. Déterminer les coordonnées des points A et B les images des points $E(1;4)$ et $F(0;6)$ par g.

CORRIGES DES EXERCICES

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS IRRATIONNELLE ET AVEC VALEURS ABSOLUES

Exercice 1

Résolvons dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1- $|2x+3| = -x+2$

Par définition, $|2x+3| = \begin{cases} 2x+3 \ si \ 2x+3 \ \geq 0 \\ -(2x+3) \ si \ 2x+3 \ \leq 0 \end{cases}$

$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3 \ si \ x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x-3 \ si \ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$

Ainsi :
Si $x \geq -\frac{3}{2}$, l'équation s'écrit
$2x+3 = -x+2$
$3x = -1$
$x = -\frac{1}{3} \ \epsilon \ \left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$
Si $x \leq -\frac{3}{2}$, l'équation s'écrit
$-2x-3 = -x+2$
$-2x+x = 3+2$
$-x = 5$
$x = -5 \ \epsilon \ \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Vérification

Pour $x = -\frac{1}{3}$
$|2(-\frac{1}{3}+3| = -(-\frac{1}{3})+2$
$|\frac{-2+9}{3}| = \frac{1}{3}+2$
$|\frac{7}{3}| = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$ **Vrai**
Pour $x = -5$
$|2(-5)+3| = -(-5)+2$
$|-10+3| = 5+2$
$|-7| = 7$
$7 = 7$ **Vrai**
D'où : $\boxed{S = \{-5;-\frac{1}{3}\}}$

2 - $\sqrt{x^3+2x+1} = x+1$

$\sqrt{x^3 2x+1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^3+2x+1 = (x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3+2x+1-x^2-2x-1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2(x-1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0 \ ou \ x = 1 \end{cases}$

Comme $\begin{cases} O \ \epsilon \ [-1;+\infty[\\ 1 \ \epsilon \ [-1;+\infty[\end{cases}$ alors $\boxed{S = \{0;1\}}$

4- $\sqrt{2x^2+x+1} < \sqrt{x+3}$

$\sqrt{2x^2+x+1} < \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x^2+x+1 \geq 0 \\ 2x^2+x+1 < x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ 2x^2+x+1 \geq 0 \ vrai \\ 2x^2-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ \epsilon \ [-3;+\infty[\ S_1 \\ x \ \epsilon \ ]-1;1[\ S_2 \end{cases}$

$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2$

GRAPHE

D'où : $\boxed{S =]-1;1[}$

Exercice 2

Résolvons dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1- $\sqrt{x+3} = 2$

$\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \ \epsilon \ [-3;+\infty[\\ x = 1 \ \epsilon \ [-3;+\infty[\end{cases}$

D'où : $\boxed{S = \{1\}}$

2- $\sqrt{x+5} = -2018$

Comme - 2018< 0 donc l'équation $\sqrt{x+5} = -2018$ n'a pas de solution par suite
$\boxed{S = \varnothing}$

3- $\sqrt{4x+1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (4x+1) = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ 4x+1 = x^2+2x+1 \end{cases}$

$,\Leftrightarrow \begin{cases} x \ \epsilon \ [-1;+\infty[\\ x^2-2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \epsilon \ [-1;+\infty[\\ x = 0 \ ou \ x = 2 \end{cases}$

Comme $\begin{cases} 0 \ \epsilon \ [-1;+\infty[\\ 2 \ \epsilon \ [-1;+\infty[\end{cases}$

D'où : $\boxed{S = \{0;2\}}$

5- $\sqrt{x+3} = \sqrt{4x+7}$

$\sqrt{x+3} = \sqrt{4x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \ (1) \\ 4x+7 \geq 0 \ (2) \\ x+3 = 4x+7 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{7}{4} \\ 4x+7-x-3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{7}{4} \\ 3x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \ \ (1) \\ x \geq -\frac{7}{4} \ \ (2) \\ x = -\frac{4}{3} \ \ (3) \end{cases}$

(1) et (2) $\Leftrightarrow$ **GRAPHE**

Comme $-\frac{4}{3} \ \epsilon \ \left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$

D'où : $\boxed{S = \{-\frac{4}{3}\}}$

Exercice 3

Résolvons dans $\mathbb{R}$, des inéquations suivantes :

1- $\sqrt{(x-3)(4-x)} < 5 \quad \sqrt{(x-3)(4-x)} < 5 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x-3)(4-x) \geq 0 \\ (x-3)(4-x) < 25 \end{cases}$

Soit

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \ \ (1) \\ x = 4 \ \ (2) \\ 4x-x^2-12+3x-25 < 0 \ (3) \end{cases}$

TABLEAU

$x \ \epsilon \ [3;4]$
Dans (3)
$-x^2+7x-37<0$
Posons : $-x^2+7x-37=0$
$\Delta = (7)^2-4(-1)(-37)$
$\Delta = 49-148$
$\Delta = -99<0$

x	$-\infty \qquad +\infty$
$-x^2+7x-37<0$	$-$

$x \ \epsilon \ ]-\infty;+\infty[$
Ainsi : **Graphe**
$\boxed{S=[3;4]}$

2- $\sqrt{2x^2-9x-1}>2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-9x-1\geq 0 \ (1) \\ 2x^2-9x-1>4 \ (2) \end{cases}$
Dans (1) : $2x^2-9x-1\geq 0$
Soit $2x^2-9x-1=0$
$\Delta=(-9)^2-4(2)(-1)$
$\Delta=81+8$
$\Delta=99>0 \ \exists \ x' \neq x"$
$\begin{cases} x'=\frac{9-\sqrt{99}}{4} \\ x"=\frac{9+\sqrt{99}}{4} \end{cases}$
Tableau
$x \ \epsilon \ \left]-\infty;\frac{9-\sqrt{99}}{4}\right] \cup \left[\frac{9+\sqrt{99}}{4};+\infty\right[$
Dans (2) : $2x^2-9x-1-4>0$
$2x^2-9x-5>0$
Posons : $2x^2-9x-5=0$
$\Delta=(-9)^2-4(2)(-5)$
$\Delta=81+40$
$\Delta=121>0 \ \exists \ x' \neq x"$
$\begin{cases} x'=\frac{9-11}{4}=-\frac{1}{2} \\ x"=\frac{9+11}{4}=5 \end{cases}$
Tableau
$x \ \epsilon \ ]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]5;+\infty[$
On remarque que toute solution de (2) est aussi solution de (1).
Donc $\boxed{S=]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]5;+\infty[}$

4- $\sqrt{(x-3)(4-x)}>-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(4-x)\geq 0 \ (1) \\ (x-3)(4-x)>1 \ (2) \end{cases}$
Dans (1) $(x-3)(4-x)\geq 0$ $x \ \epsilon \ [3;4]$
Dans (2) $(x-3)(4-x)-1>0$
$-x^2+7x-13>0$
Posons : $-x^2+7x-13=0$
$\Delta=(7)^2-4(-1)(-13)$
$\Delta=49-52$
$\Delta=-3<0$

x	$-\infty \qquad +\infty$
$-x^2+7x-13$	$-$

$x \ \epsilon \ [3;4]$ est donc l'ensemble de solution de l'inéquation
$\boxed{S=[3;4]}$

5- $\sqrt{(x-3)(4-x)}<-1$,
On sait que la racine carrée d'un nombre est toujours positive donc l'inéquation n'admet pas de solution. $\boxed{S=\varnothing}$

6- $\sqrt{-2x^2+5x+3}<2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+5x+3\geq 0 \quad (1) \\ 2x+1>0 \quad (2) \\ -2x^2+5x+3<(2x+1)^2 \quad (3) \end{cases}$
Dans (1) : $-2x^2+5x+3\geq 0$
Soit $-2x^2+5x+3=0$
$\Delta=(5)^2-4(-2)(3)$
$\Delta=25+24$
$\Delta=49>0 \ \exists \ x' \neq x"$
$\begin{cases} x'=\frac{-5-7}{-4}=\frac{-12}{-4}=3 \\ x"=\frac{-5+7}{-4}=-\frac{1}{2} \end{cases}$
TABLEAU
$x \ \epsilon \ \left[-\frac{1}{2};3\right]$
D'autre part $2x+1>0$
$x>-\frac{1}{2}$
GRAPHE
$x \ \epsilon \ \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$
Dans (3) : $2x^2+5x+3<(2x+1)^2$
$-2x^2+5x+3<(2x+1)(2x+1)$
$-2x^2+5x+3<4x^2+4x+1$
$-2x^2-4x^2+5x-4x+3-1<0$
$-6x^2+x+2<0$
$\Delta=1-4(-6)(2)$
$\Delta=1+48$
$\Delta=49>0, \ \exists \ x' \neq x"$
$\begin{cases} x'=\frac{-1-7}{-12}=-\frac{8}{-12}=\frac{2}{3} \\ x"=\frac{-1+7}{-12}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2} \end{cases}$
TABLEAU
$x \ \epsilon \ ]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3};+\infty[$
TABLEAU
$\boxed{S=]\frac{2}{3};3]}$

9- $\sqrt{2x+1}>\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\geq 0 \quad (1) \\ x\geq 0 \quad (2) \\ 2x+1>x \quad (3) \end{cases}$
Dans (1) : $x\geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \ \epsilon \ \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$
Dans (2) : $x\geq 0 \Rightarrow x \ \epsilon \ [0;+\infty[$
Dans (3) : $x>-1 \Rightarrow x \ \epsilon \ ]-1;+\infty[$
TABLEAU
D'où : $\boxed{S=[0;+\infty[}$

<u>Exercice 4</u>
Résolvons des équations et inéquations suivantes :
1- $|x+1|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$
D'où $\boxed{S=\{-3;1\}}$
2- $|3x+6|=-2$, la valeur absolue est toujours positive
Donc : $\boxed{S=\varnothing}$
4- $|4x-2|=|x+1|$
On a : $\begin{cases} 4x-2=x+1 \\ 4x-2=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ 5x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{5} \end{cases}$
D'où $\boxed{S=\{\frac{1}{5};1\}}$
5- $|x-\sqrt{2}|=2\left(|x-\sqrt{2}|+3\right)$
$|x-\sqrt{2}|=2|x-\sqrt{2}|+6$
$|x-\sqrt{2}|-2|x-\sqrt{2}|=6$
$|x-\sqrt{2}|=-6$ impossible

D'où : $\boxed{S=\varnothing}$

6- $|x+5|\geq 2(|x+5|+1)$
$|x+5|-2|x+5|\geq 2$
$-|x+5|\geq 2$
$|x+5|\leq -2$ impossible
$\boxed{S=\varnothing}$

9- $|3x-2|\leq 2$
$-2\leq 3x-2\leq 2$
$0\leq 3x\leq 4$
$0\leq x\leq \frac{4}{3}$
D'où : $\boxed{S=[0;\frac{4}{3}]}$

11- $|4x+2|\leq x+1$
$|4x+2|=\begin{cases}4x+2 \quad si\ 4x+2\geq 0\\ -4x-2 \quad si\ 4x+2\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2 \quad si\ x\geq -\frac{1}{2}\\ -4x-2 \quad si\ x\leq -\frac{1}{2}\end{cases}$
Si $x\geq -\frac{1}{2}$ l'inéquation devient :
$4x+2\leq x+1$
$4x-x\leq 1-2$
$3x\leq -1$
$x\leq -\frac{1}{3}$
GRAPHE
$x\ \epsilon\ [-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}]$
Si $x\leq -\frac{1}{2}$, l'inéquation devient
$4x-2\leq x+1$
$-4x-x\leq 1+2$
$-5x\leq 3$
$x\leq -\frac{3}{5}$
GRAPHE
$x\ \epsilon\ [-\frac{3}{5};-\frac{1}{2}]$
$S=[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}]\cup[-\frac{3}{5};-\frac{1}{2}]$
D'où : $\boxed{S=[-\frac{3}{5};-\frac{1}{3}]}$

14- $|4x+2|\leq |x+1|$
Vu que $|4x+2|$ et $|x+1|$ sont des réels positifs, on a :
$|4x+2|^2\leq |x+1|^2$
$\Leftrightarrow (4x+2)^2\leq (x+1)^2$
$\Leftrightarrow (4x+2)(4x+2)\leq (x+1)(x+1)$
$\Leftrightarrow 16x^2+8x+8x+4\leq x^2+2x+1$
$\Leftrightarrow 16x^2 16x+4-x^2-2x-1\leq 0$
$\Leftrightarrow 15x^2 14x+3\leq 0$
Soit $15x^2+14x+3=0$
$\Delta'=(7)^2-(15)(3)$
$\Delta'=49-45$
$\Delta'=4\ \exists\ x'\neq x"$
$\begin{cases}x'=\frac{-7-2}{15}=\frac{-9}{15}=-\frac{3}{5}\\ x"=\frac{-7+2}{15}=\frac{-5}{15}=-\frac{1}{3}\end{cases}$
TABLEAU
D'où : $\boxed{S=[-\frac{3}{5};-\frac{1}{3}]}$

<u>Exercice 5</u>

Résolution dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1- $\sqrt{(x+1)(3-x)}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}3x-1\geq 0 \quad (1)\\ (x+1)(3-x)=(3x-1)^2 \quad (2)\end{cases}$
Dans (1) : on pose : $3x-1=0$
$x=\frac{1}{3}$
GRAPHE
$x\ \epsilon\ [\frac{1}{3};+\infty[$
Dans (2) : $(x-1)(3-x)=(3x-1)^2$
$3x-x^2+3-x=9x^2-6x+1$
$9x^2-6x+1+x^2-3x+x-3=0$
$10x^2-8x-2=0$
$\Delta'=(-4)^2-(10)(-2)$
$=16+20$
$=36>0$
$\begin{cases}x'=\frac{4-6}{10}=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}\ \nexists\ [\frac{1}{3};+\infty[\\ x"=\frac{4+6}{10}=\frac{10}{10}=1\ \exists\ [\frac{1}{3};+\infty[\end{cases}$
D'où : $\boxed{S=\{1\}}$

2- $\sqrt{x^2-5x+6}=-x+4 \Leftrightarrow \begin{cases}-x+4\geq 0\\ x^2-5x+6=(-x+4)^2\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}x\leq 4\\ x^2-5x+6=(-x+4)(-x+4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ \epsilon\ ]-\infty;4]\\ x^2-5x+6=x^2-4x-4x\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ \epsilon\ ]-\infty;4]\\ -x+4x+6-16=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\epsilon\ ]-\infty;4]\\ 3x-10=0\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}x\epsilon\ ]-\infty;4]\\ x=\frac{10}{3}\end{cases}$
Comme $\frac{10}{3}\ \epsilon\ ]-\infty;4]$
D'où : $\boxed{S=\{\frac{10}{3}\}}$

4- $\sqrt{4x+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ 4x+1=(x+1)^2\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ \epsilon\ [-1;+\infty[\\ 4x+1-x^2-2x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ \epsilon\ [-1;+\infty[\\ -x^2+2x=0\end{cases}$
$\begin{cases}x\ \epsilon\ [-1;+\infty[\\ x(-x+1)=0\end{cases} \begin{cases}x\ \epsilon\ [-1;+\infty[\\ x=0\ ou\ x=2\end{cases}$
D'où : $\boxed{S=\{0;2\}}$

6- $\sqrt{-2x^2+5x+3}<2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x^2+5x+3\geq 0 \quad (1)\\ 2x+1>0 \quad (2)\\ -2x^2+5x+3<(2x+1)^2 \quad (3)\end{cases}$
Dans (1) : $\Delta=(5)^2-4(-2)(3)$
$\Delta=25+24$
$\Delta=49>0$
$\begin{cases}x'=\frac{-5+7}{-4}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}\\ x"=3\end{cases}$
Soit $x\ \epsilon\ [-\frac{1}{2};3]$
Dans (2) : $2x+1>0$
$x>-\frac{1}{2}$
$x\ \epsilon\ ]-\frac{1}{2};+\infty[$
Dans (3) : $-2x^2+5x+3<(2x+1)^2$
On trouve $\begin{cases}x'=\frac{2}{3}\\ x"=-\frac{1}{2}\end{cases}$
$x\ \epsilon\ ]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3};+\infty[$
Ainsi **GRAPHE**
$\boxed{S=]\frac{2}{3};3]}$

5- $\sqrt{2x^2+2}\leq 3-x \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+2\geq 0 \quad (1)\\ 3-x\geq 0 \quad (2)\\ 2x^2+2\leq (3-x)^2 \quad (3)\end{cases}$
Dans (1) : $2x^2+2\geq 0$ Vrai $\forall\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}$
$x\ \epsilon\ ]-\infty;+\infty[$

Dans (2) $3-x \geq 0$
$x \in]-\infty;3]$
Dans (3) : $2x^2+2 \leq (3-x)^2$
$2x^22-9+6x-x^2 \leq 0$
$x^2+6x-7 \leq 0$

On trouve $\begin{cases} x' = 1 \\ x" = -7 \end{cases}$
$x \in [-7;1]$
Ainsi **GRAPHE**
D'où : $\boxed{S = [-7;1]}$

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Exercice 1

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants

$(S_3) \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=9 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Considérons $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} 3x+3y=6 \\ 2x-3y=9 \end{cases} \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$

Par suite $y=-1$
Vérifions si le couple $(3;-1)$ est solution de (S_3)
$x+2y=1$
$3-2=1$
$1=1$ Vrai
$\boxed{S = \{(3;-1)\}}$

$(S_4) : \begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ 2x+y+z=-2 \end{cases}$

On peut fixer y ; soit

$\begin{cases} 2x-3y=2-y \\ 2x+z=-2-y \end{cases}$

Alors $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2-y & -3 \\ -2-y & 1 \end{vmatrix} = -4-4y$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2-y \\ 2 & -2-y \end{vmatrix} = -8$

$\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -\frac{4+4y}{8} = -\frac{1+y}{2} \\ y = \frac{\Delta z}{\Delta} = -1 \end{cases}$

$\boxed{S = \left\{(x,y,z)/x = -\frac{1+y}{2};-1\right\}}$

$(S_5) : \begin{cases} mx+2y-z=m \\ 2x+my-2z=2 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$

Fixons z ; soit

$\begin{cases} mx+2y=m+z \\ 2x+my=2+2z \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2-4$

Discussion :
Si $\Delta = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

Pour $m=2$, On a : $\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 2x+2y-2z=2 \end{cases}$

Soit en fixant x

$\begin{cases} 2y-z=2-2x \\ -2y+2z=-2+2x \end{cases}$

En faisant la somme, on trouve $z=0$
Par suite $y=1-x$
Soit $\boxed{S = \{(x;1-x;0), x \in \mathbb{R}\}}$
Pour $m=-2$, On a :

$\begin{cases} -2x-z=-2-2y \\ 2x-2z=2+2y \end{cases}$ En fixons y

En faisant la somme $z=0$
Alors $x=1+y$
$\boxed{S = \{(y+1,y,0); y \in \mathbb{R}\}}$
Si $\Delta \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+z & 2 \\ 2+2z & m \end{vmatrix} = m^2+mz-4-4z$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m+z \\ 2 & 2+2z \end{vmatrix} = 2z(m-1)$

Ainsi $\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} + \frac{m^2+mz-4-4z}{m^2-4} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2(m-1)z}{m^2-4} \end{cases}$

$\boxed{S = \left\{(\frac{m^2+mz-4z-4}{m^2-4}; \frac{2(m-1)y}{m^2-4}; z); z \in \mathbb{R}\right\}}$

$(S_6) \begin{cases} x+2y^2+3z^3=7 \\ 2x+3y^2+4z^3=11 \\ x-y^2-z^3=0 \end{cases}$

Il suffit de poser $X=x$ $Y=y$ avec $y \geq 0$ et $Z=z^3$

On a : $\begin{cases} X+2Y+3Z=7 \\ 2X+3Y+4Z=11 \\ X-Y-Z=0 \end{cases}$

Soit par pivot de gauss

$\begin{cases} X+2Y3Z=7 \\ -Y-2Z=-3 \\ Z=1 \end{cases}$

Par suite $Z=1$ $Y=1$ $Z=2$
Alors $X=x=2 \Rightarrow x=2$
$Y=y^2=1 \Rightarrow y=\pm$
$Z=z^3=1 \Rightarrow z=1$
D'où : $\boxed{S = \{(2,1,1);(2,-1,1)\}}$

Exercice 4

$(S) \begin{cases} 3x-y=15 \\ \frac{1}{2}x-y=5 \end{cases}$

1- Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -3+\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -15+5 = -10$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{vmatrix} = 15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-10}{-\frac{5}{2}} = \frac{20}{5} = 4 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\frac{15}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{15}{5} = -3 \end{cases}$

D'où : $\boxed{S = \{(4; -3)\}}$

2- Déduction de

$(S') \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{1}{y} = 15 \\ \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} \left(\frac{1}{x-1}\right)(3) - \frac{1}{y} = 15 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)(1) - \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$

En posant $\begin{cases} \frac{1}{x-1} = X \\ \frac{1}{y} = Y \end{cases}$ On a :

$\begin{cases} 3X - Y = 15 \\ \frac{1}{2}X - Y = 5 \end{cases}$ on trouve $X = 4\,;\, Y = -3$

$\frac{1}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 1 = 4x - 4$
$\Leftrightarrow 5 = 4x$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$
$\frac{1}{y} = -3 \Leftrightarrow 1 = -3y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}$

D'où : $\boxed{S = \left\{\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{3}\right)\right\}}$

Exercice 5

$(S) \begin{cases} x+y+z+t = -1 \\ 4x+3y+2z+t = -5 \\ 4x+3y+2z+t = -5 \\ 8x+4y+2z+t = -8 \\ 32x+12y+4z+t = -30 \end{cases}$

1- Transformons le système (S) en un système triangulaire

$\begin{cases} x+y+z+t = -1 \quad (1)L_1 \\ 4x+3y+2z+t = -5 \quad (2)L_2 \\ 8x+4y+2z+t = -8 \quad (3)L_3 \\ 32x+12y+4z+t = 30 \quad (4)L_4 \end{cases}$

$4L_1 - L_2 : y + 2z + 3t = 1 \ L_5$
$8L_1 - L_3 : 4y + 6z + 7t = 0 \ L_6$
$32L_1 - L_4 : 20y + 28z + 31t = -2 \ L_7$
Soit $4L_5 - L_6 : 2z + 5t = 4 \ L_8$
$20L_5 - L_7 : 12z + 29t = 22 \ L_9$
Soit $L_8 - L_7 : t = 2$

Soit $\boxed{\begin{cases} x+y+z+t = -1 \\ y+2z+3t = 1 \\ 2z+5t = 4 \\ t = 2 \end{cases}}$

2- Déduction des solutions

On a : $t = 2 \Rightarrow t = 2$
$2z + 5t = 4$
$2z + 5(2) = 4$
$2z = -10 + 4$
$2z = -6$
$z = -3$
$y = -2z - 3t + 1$
$= -2(-3) - 3(2) + 1$
$y = +6 - 6 + 1$
$y = 0 + 1$
$y = 1$
$x = -y - z - t - 1$
$= -1 - (-3) - (2) - 1$
$= -1 + 3 - 2 - 1$
$= 2 - 2 - 1$
$x = -1$

D'où : $\boxed{S = \{(-1; 1; -3; 2)\}}$

Exercice 6

Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Posons $X = x \ Y = 2y$

On a : $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 8 \quad (1) \\ X + Y = 4 \quad (2) \end{cases}$

Dans (1) $X^2 + Y^2 = 8$
Or $(X+Y)(X+Y) = X^2 + Y^2 + 2XY$
$(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$
$XY = \frac{-+16}{2} = 4$

$\begin{cases} X + Y = 4 \\ XY = 4 \end{cases}$

On a : $X^2 - 4X + 4 = 0$
Soit $X = 2 \ Y = 2$
Alors $X = x = 2 \Rightarrow x = 2$
$Y = 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

D'où $\boxed{S = \{(2; 1)\}}$

Exercice 2

1- Résolvons dans $\mathbb{R}^3$

$(S) \begin{cases} x+y+z = 2m \quad (1) \\ x+y-z = 2 \quad (2) \\ x^2+y^2+z^2 = \frac{3}{2}m^2 \quad (3) \end{cases}$

Soit (1) + (2) $2x + 2y = 2m + 2$
$x + y = m + 1(4)$
(4) dans (1) $\Leftrightarrow z + m + 1 = 2m$
Soit $z = m - 1$
Or $x^2y^2 + z^2 = \frac{3}{2}m^2$
$x^2 + y^2 + (m-1)^2 = \frac{3}{2}m^2$
$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}m^2 - (m-1)^2 - (m-1)^2$
$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}m^2 - m^2 + 2m - 1$
$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}m^2 + 2m - 1$
D'autre part $x + y = m + 1$
Alors $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2)$
$xy = \frac{(m+1)^2 - \frac{1}{2}m^2 - 2m + 1}{2}$
$xy = \frac{m^2 + 2m + 1 - \frac{1}{2} - 2m + 1}{2}$
$xy = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2}{2}$
$xy = \frac{m^2 + 4}{4}$
Soit $xy = \frac{m^2}{4} + 1$

On a donc $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy = \frac{m^2}{4} + 1 \end{cases}$

$X^2 - XS + P = 0$
$X^2 - (m+1)X + \frac{1}{4}m^2 + 1 = 0$
$\Delta = [-(m+1)]^2 - 4\left(\frac{1}{4}m^2 + 1\right)$

$\Delta = m^2 + 2m + 1 - m^2 - 4$
$\Delta = 2m - 3$
Discussion
Si $\Delta < 0$; alors le système n'admet pas de solution
Dans ce cas $\boxed{S = \varnothing}$
Si $\Delta = 0$, $m\frac{3}{2}$, on a une racine double
$X' = X" = -\frac{b}{2a} = \frac{m+1}{2}$
avec $m = \frac{3}{2} \Rightarrow X' = X" = \frac{\frac{3}{2}+1}{2} = \frac{5}{4}$
par suite $z = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
Soit $\boxed{S = \left\{\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right)\right\}}$
Si $\Delta > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{2}$
On a deux racines distinctes
$\begin{cases} X' = \frac{m+1-\sqrt{2m-3}}{2} \\ X" = \frac{m+1+\sqrt{2m-3}}{2} \end{cases}$
Alors
$\boxed{S = \left\{\frac{m-1-\sqrt{2m-3}}{2}; \frac{m-1-\sqrt{2m-3}}{2}; m-1\right\}}$
ou
$\boxed{S = \left\{\frac{m-1-\sqrt{2m-3}}{2}; \frac{m-1-\sqrt{2m-3}}{2}; m-1\right\}}$
2- Discussion
A - t - on les longueurs des côtés d'un triangle T
1^{er} Cas Si $\Delta < 0$, $\Rightarrow m < \frac{3}{2}$, le système n'admet pas de solution, dans ce cas on ne peut pas avoir les longueurs des côtés d'un triangle T.
2^{em} Cas Si $\Delta = 0$, $m = \frac{3}{2}$ le triplet (x, y, z) peut représenter les longueurs des côtés d'un triangle T.
3^{em} Cas : Si $\Delta > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{2}$ les nombres x, y et z sont distincts et sont positifs.
Donc, ils peuvent représenter les longueurs des côtés d'un triangle T.
3-a) Vérification
Pour $\Delta = 0$, $\Rightarrow m = \frac{3}{2}$ les longueurs x et y sont égales.
On en déduit que le triangle T est isocèle.
b) Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore c'est - à - dire $x^2 + y^2 = z^2$ car z est l'hypoténuse par suite
$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}m^2 + 2m - 1$ et $z = m - 1$
alors $\frac{1}{2}m^2 + 2m - 1 = (m-1)^2$
$\frac{1}{2}m^2 + 2m - 1 = m^2 - 2m + 1$
$-\frac{1}{2}m^2 + 4m - 2 = 0$
$\Delta = (4)^2 - 4(-\frac{1}{2})(-2)$
$\Delta = 16 - 4$
$\Delta = 12$
Soit $\Delta = (2\sqrt{3})^2 > 0$
$\begin{cases} m' = 4 - 2\sqrt{3} \\ m" = 4 + 2\sqrt{3} \end{cases}$
On en déduit que pour $m = 4 - 2\sqrt{3}$ et $m = 4 + 2\sqrt{3}$, nous avons un triangle T rectangle dont z est la longueur de l'hypoténuse.

SYSTÈME DE NUMÉRATION

Exercice 1
On donne $a = 34$ et $b = (100111)_2$
1- J'effectue la division successive de a par 2.
DIVISION SUCCESSIVE
2-Déterminons a base 10 en base 2.
D'après ce qui précède $\boxed{a = (100010)_2}$
3- J'écris b comme somme de puissance de 2.
$\boxed{b = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0}$
4- Déterminons b on a :
$b = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$
$b = 2^5 + 2^2 + 2 + 1$
$\boxed{b = 39}$
Exercice 3
1- Soit $N = x43y$
Déterminons les couples x et y tels que N est divisible par 2 et 9 .
Il faut que $x \neq 0$
Or N est divisible par 2 $\Leftrightarrow y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$
N est divisible par 9 $\Leftrightarrow x4 + 3 + y$ sont divisible par 9
Soit $x + y + 7$ soit divisible par 9
les deux conditions donnent : $(2;0)$; $(9;2)$; $(7;4)$; $(5;6)$; $(8;0)$
Car $x \neq 0$
2- $N = 28x75y$.
Déterminons les couples $(x;y)$ tels que N soit divisible par 3 et 11 on doit avoir
$\begin{cases} x + y + 1 \equiv 0 \ [3] \\ y - x + 8 \equiv \ [11] \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$
On trouve les couples $(x;y)$: $(1;4)$; $(4;7)$; $(8;0)$.
3- $N = 1x1yxy$.
Déterminons les couples $(x;y)$ tels que N soit divisible par 63 il suffit qu'il soit divisible par 7 et 9 c'est - à - dire $(7;1)$; $(0;8)$; $(9;8)$.
Exercice 4
1- J'écris le système décimal $A = \overline{FOA5}^{16}$ Or $F = 15$ et $A = 10$
On a : $\overline{FOA5}^{16} = 15 \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 5 \times 16^0$
$\boxed{\overline{FOA5}^{16} = 61605}$
2-J'écris $B = 64206$ en base Seize
On effectue la division successive **DIVISION SUCCESSIVE**
On a : $\boxed{64206 = \overline{FACE}^{16}}$
Exercice 7
1- J'écris en base deux les nombres suivants
On effectue les divisions $85 = \overline{1010101}^2$ $104 = \overline{1101000}^2$ $3607 = \overline{11100010111}^2$
2- J'écris dans le système décimal les nombres suivants :
$\overline{10110}^2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 23$
$\overline{111000}^2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 56$
$\overline{1010101010}^2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 170$
$\overline{110100011}^2 = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 419$

Exercice 8

1- J'écris $A = 2^6 - 1$ en base deux
$A = 2^6 - 1 = 63$
$A = \overline{111111}^2$

2- J'écris $(b+1)$ en base b
Si $b = 2 \Rightarrow (b+1)^2 = \overline{1001}^2$
Si $b \neq 2 \Rightarrow (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1 = \overline{121}^b$