les Séries d' Exercices

Nouveau

2 Suites Numériques

Nouvelle édition

Revue et corrigée

+ Groupe WhatsApp pour Discuter les difficultés

OUARZAZATE 2022

101 Exercices

Badr Eddine El FATIHI

2 Bac SM

MATHS 2022

Badr Eddine EL FATIHI
00212660344136
Professeurbadr.blogspot.com
Ouarzazate 2022

ROYAUME DU MAROC

SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2021-2022

Tome 2 : Suites Numériques

- **Montrer une limite par la définition**
- **Monotonie d'une suite numérique**
- **Les suites arithmétiques**
- **Les suites géométriques**
- **Les suites récurrentes**
- **Les suites adjacentes**
- **Le raisonnement par récurrence**
- **Manipuler des sommes finies et infinies**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI
Ouarzazate 2021
Samedi 10 juillet 2021

1 : Préface

Ce livre est un support d'exercices corrigés conçu en faveur des élèves de la 2ème année Bac SM du Maroc. J'ai y classé 101 exercices pour la leçon intitulée suites numériques. Les exercices proposés sont riches, variés et contiennent tout type de questions. C'est une plate-forme de travail pour les élèves qui auraient besoin d'un supplément de soutien très particulier. dans ce cadre, l'élève est invité à choisir le type d'exercices là où il se sent faible et de prendre son temps pour renforcé ses apprentissages. Mon objectif est d'aider ces élèves à parvenir à un niveau qui leurs permettrait de passer les devoirs, les examens et tout type de concours d'admission pour les écoles supérieurs avec succès.

Cette série contient entre autre un rappel de cours, les énoncés des exercices et les réponses détaillées qu'on devrait lire attentivement et en profiter au maximum les idées de résolution. J'ai y classé encore des moyens et des méthodes hors programme juste pour élargir son équilibre de connaissances. Sachez que, dans les concours d'admission et même dans les examens, la réponse finale compte plus que la méthode suivie. La vitesse de réalisation est aussi importante car vous serez certainement serrés par le temps. D'ailleurs les concours sont formulés sous la forme de questions à choix multiple. Bon courage à tout le monde et à bientôt ☺

2 : Méthodologie du travail

- **Considérer d'abord une séance d'exercice comme un jeu, car Apprendre par le jeu est le meilleur moyen existant de nos jours**
- **Choisir le type d'exercices voulu**
- **Lisez la question et essayer de trouver la réponse en 10 min en consultant de temps à autre le rappel de cours**
- **Consulter ma réponse sur ce livre**
- **Notez les lacunes et difficultés rencontrées**
- **Retourner pour refaire l'exercice à nouveau**
- **Passer à un autre exercice**

3 : Rappel de cours

Outil N° 1 :

Suite majorée ou minorée :

- Si $(u_n)_n$ est croissante et majorée c-à-d $(u_n \leq M)$ Alors $(u_n)_n$ est convergente vers un $l \in \mathbb{R}$
- Si $(u_n)_n$ est décroissante et minorée c-à-d $(u_n \geq m)$ Alors $(u_n)_n$ est convergente vers un $l \in \mathbb{R}$
- Si $(u_n)_n$ est croissante et non majorée Alors $\lim_{n\infty}(u_n) = +\infty$
- Si $(u_n)_n$ est décroissante et non minorée Alors $\lim_{n\infty}(u_n) = -\infty$

Outil N° 2 :

Monotonie d'une suite numérique :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; u_{n+1} \geq u_n \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \; est \; \nearrow$$
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; u_{n+1} \leq u_n \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \; est \; \searrow$$
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; u_{n+1} = u_n \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \; est \; cte$$

Outil N° 3 : Suite arithmétique :

$$\iff u_{n+1} = u_n + r \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$$
$$\iff u_n = u_p + (n-p)r \quad ; \quad p \in \mathbb{N}$$
$$\iff u_p + \cdots + u_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n) \;;\; p \in \mathbb{N}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Outil N° 4 : Suite géométrique :

$$\iff u_{n+1} = q\, u_n \quad ; \quad q \in \mathbb{R}^*$$
$$\iff u_n = u_p \times q^{n-p} \quad ; \quad n \geq p$$
$$\iff u_p + \cdots + u_n = \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) u_p \quad ; \quad n \geq p$$

Outil N° 5 :

Limite d'une suite par définition :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = +\infty$$
$$\iff (\forall A > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N) : u_n > A$$

$$\lim_{n\infty}(u_n) = -\infty$$
$$\iff (\forall A > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N) : u_n < -A$$

$$\lim_{n\infty}(u_n) = l \in \mathbb{R}$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N) : |u_n - l| < \varepsilon$$

Outil N° 6 :

La suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$; $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

- $\alpha > 0 \implies \lim_{n\infty}(n^\alpha) = +\infty$
- $\alpha < 0 \implies \lim_{n\infty}(n^\alpha) = 0$

Outil N° 7 : l'unicité de la limite :

La limite d'une suite numérique, quand elle existe, est unique.

Outil N° 8 : convergente ► bornée

$$\lim_{n\infty}(u_n) = l \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \quad (\exists M \in \mathbb{R}^+)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ |u_n| \leq M$$

Outil N° 9 : limites et ordre :

- $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\infty}(u_n) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\infty}(v_n) = +\infty$

- $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\infty}(v_n) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\infty}(u_n) = -\infty$

- $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\infty}(v_n) = \lim\limits_{n\infty}(w_n) = l \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\infty}(u_n) = l$

- $\begin{cases} u_n > a \\ \lim\limits_{n\infty}(u_n) = l \end{cases} \Longrightarrow l \geq a$

- $\begin{cases} u_n < a \\ \lim\limits_{n\infty}(u_n) = l \end{cases} \Longrightarrow l \leq a$

- $\begin{cases} u_n < v_n \\ \lim\limits_{n\infty}(u_n) = l \\ \lim\limits_{n\infty}(v_n) = l' \end{cases} \Longrightarrow l \leq l'$

Outil N° 10 : limite de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

- $si \quad q > 1 \quad Alors \quad \lim\limits_{n\infty}(q^n) = +\infty$
- $si \quad q = 1 \quad Alors \quad \lim\limits_{n\infty}(q^n) = 1$
- $si \quad -1 < q < 1 \quad Alors \quad \lim\limits_{n\infty}(q^n) = 0$
- $si \ q \leq -1 \ Alors \ \lim\limits_{n\infty}(q^n) = n'existe\ pas$

Outil N° 11 : La suite $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\left.\begin{array}{c} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \ continue \ sur \ I \subseteq \mathbb{R} \\ f(I) \subseteq I \ ; \ u_0 \in I \\ \lim\limits_{n\infty}(u_n) = l \in I \end{array}\right| \Longrightarrow \quad f(l) = l$$

Outil N° 12 :

La suite récurrente $v_n = f(u_n)$:

$$\left.\begin{array}{c} v_n = f(u_n) \\ f \ conti \ en \ l \\ l = \lim\limits_{n\infty}(u_n) \end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{n\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\infty}(u_n)\right)$$

Outil N° 13 : suites adjacentes :

$$\left|\begin{array}{c} (u_n)_n \ \ et \ \ (v_n)_n \\ sont \ \ adjacentes \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} (u_n) \ \ est \ \nearrow \\ (v_n) \ \ est \ \searrow \\ \lim\limits_{n\infty}(u_n - v_n) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c} (u_n)_n \ \ et \ \ (v_n)_n \\ sont \ \ adjacentes \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}(v_n) = l$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4 : Série d'exercices

Exercice N° 1 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

$$On\ pose \quad v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n > 3$
2) Montrer que (u_n) est décroissante.
3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 3 < u_n \leq 5$
4) Montrer que $(v_n)_n$ est arithmétique.
5) Écrire v_n *puis* u_n *en fonction de* n
6) Calculer : $\mathcal{S} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{2020}$

Exercice N° 2 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4\, u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Calculer u_1
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \neq \frac{3}{2}$
3) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
4) *On pose* $v_n = \dfrac{2}{2u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = \dfrac{3n + 6}{2n + 2}$

6) Calculer en fonction de n la somme :

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{2u_0 - 3} + \frac{1}{2u_1 - 3} + \cdots + \frac{1}{2u_n - 3}$$

Exercice N° 3 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{5}{3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$On\ pose \quad v_n = u_n - \frac{5}{2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) calculer les termes : $u_1 \; ; \; v_0 \; ; \; v_1$
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n < \frac{5}{2}$
3) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
4) Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.
5) Écrire v_n *puis* u_n *en fonction de* n
6) Calculer en fonction de n les sommes :

   - $\mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   - $\mathcal{T}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

7) *Calculer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(\mathcal{S}_n)$

Exercice N° 4 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 0 < u_n < 2$
2) $Mq \; : \; u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{(2 + u_n)}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) En déduire la monotonie de $(u_n)_n$
Et que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$: $1 \leq u_n < 2$

4) *On pose* $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$
Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.

5) Écrire v_n en fonction de n

6) *déduire* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n = \dfrac{4^{n+1} - 1}{1 + 2 \times 4^n}$

7) Calculer en fonction de n la somme :

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=2}^{k=n} v_k$$

Exercice N° 5 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $3 \leq u_n \leq 4$
2) Mq : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $(4 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$
3) En déduire : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
4) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice N° 6 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{\pi\, u_n}{\pi + 2u_n} + cos\left(\dfrac{\pi^2}{u_n}\right) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 2\pi \end{cases}$$

1) *Mq* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$: $\dfrac{\pi^2}{u_n} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *et* $u_n > 0$

2) *Mq la suite* $(v_n) = \left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ *est artithméique*

3) En déduire u_n *en fonction de n*
4) *Déterminer* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 7 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n^2 - n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n > 3$; $u_n > n$
2) *En déduire la limite* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$
3) Écrire u_n *en fonction de n*
On pourra utiliser les somme suivants :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad et \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice N° 8 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

1) soit $u_0 = 0$, Calculer les six premiers termes de la suite (u_n).
2) conjecturer une formule donnant l'expression de u_n en fonction de n.
3) Démontrer cette formule par récurrence
4) Soit $u_0 = 1$, Montrer que :
$\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n = 2^n + n$

Exercice N° 9 :

Soit $(v_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $0 \leq v_n \leq 2$
2) Montrer que (v_n) est croissante.
3) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(v_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 10 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$On\ pose \quad v_n = \dfrac{1}{u_n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; v_0 ; v_1 ; v_3
2) Montrer que (v_n) est arithmétique
3) Écrire u_n et v_n $en\ fonction\ de\ n$
4) Déterminer la monotonie de $(u_n)_n$
5) $Calculer \lim_{n\infty}(u_n)$ et $\lim_{n\infty}(v_n)$

Exercice N° 11 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 2 \leq u_n \leq 4$
2) Étudier la monotonie de (u_n) .
3) En déduire : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 3 \leq u_n \leq 4$
4) Mq : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad (4 - u_{n+1}) \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$
5) $déduire$: $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$
6) $Calculer\ la\ limite \lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 12 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

$On\ pose \quad v_n = u_n - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.
2) $Déduire$: $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$
3) Calculer en fonction de n la somme :
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
4) $Calculer\ la\ limite \lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 13 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - \dfrac{1}{2}u_{n-1} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \quad et \quad u_1 = 4 \end{cases}$$

$On\ pose \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

1) Montrer que (v_n) est géométrique
2) Donner v_n $en\ fonction\ de\ n$
3) Calculer la somme suivante :
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
4) $Déduire\ que$: $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = 7 - \dfrac{3}{2^{n-1}}$
5) $Calculer\ la\ limite \lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 14 :

On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{2x + 7}$$

1) Donner le tableau de variations de f
2) Soit (u_n) la suite numérique définie :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

3) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
4) Mq : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \left(u_{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{1}{8}\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$

5) *Déduire* : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

6) *Calculer la limite* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 15 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{(u_n)^2 + \dfrac{1}{(n+1)^2}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 0$
2) Montrer que (u_n) est croissante
3) *On pose* : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $v_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sqrt{1 + v_n}$
5) Déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq \sqrt{3}$

   Et que (u_n) est convergente.
6) Montrer que : $\forall k \geq 3$; $2^{k+1} \geq (k+1)^2$
7) En déduire que :

$$\forall k \geq 3 \quad ; \quad (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$$

8) En déduire encore que :

$$\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \lim_{n\infty}(u_n) \leq \sqrt{3}$$

Exercice N° 16 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - n - \dfrac{8}{3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) *On pose* : $v_n = u_n + \alpha n - 1$; $\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Déterminer la valeur du paramètre α pour que (v_n) soit géométrique.

Pour tout ce qui suit on travaille avec la valeur de α retrouvée dans la 1ère Ques

2) Calculer v_n *et* u_n en fonction de n
3) Exprimer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

   En fonction de n
4) *Calculer la limite* $\lim\limits_{n\infty}(S_n)$
5) Exprimer $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

   En fonction de n

Exercice N° 17 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + u_n)^2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante
2) *Montrer que* : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$
3) *Déduire que* : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$
4) *Déterminer la suite* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 18 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2 + 1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

On pose $v_n = (u_n)^2 - 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (v_n) est géométrique
2) Calculer u_n en fonction de n
3) On pose : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$

On pose encore : $T_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$

Calculer S_n *et* T_n en fonction de n

4) *Calculer les limites* $\lim_{n\infty}(u_n)$; $\lim_{n\infty}(\mathcal{T}_n)$

Exercice N° 19 :

Soit : $a \in \mathbb{N}$ *tel que* $a > 1$
Soient les suites (u_n) *et* (v_n) définies :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = a \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < u_n < v_n$
2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante
3) Mq : $0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$
4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 0 < v_n - u_n \leq \frac{a-1}{2^n}$$

5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \cdot v_n = a$
6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n < \sqrt{a} < v_n$

Exercice N° 20 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - (u_n)^2}} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n < \sqrt{3}$
2) Montrer que (u_n) est strictement $\nearrow$
3) *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2}$

   Montrer que (v_n) est arithmétique
4) Exprimer les termes généraux u_n *et* v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$
5) *En déduire la limite* $\lim_{n\infty}(u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 21 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{1 + u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 1$
2) *Mq* : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(1 - u_{n+1}) \leq \dfrac{2}{3}(1 - u_n)$
3) *Déduire* : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(1 - u_n) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
4) *Déduire la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 22 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a > 0 \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

1) *Mq* : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(u_{n+1})^2 - a = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4\,u_n^2}$
2) *Mq* : $n \geq 1 \implies \begin{cases} et \; u_n \geq \sqrt{a} \\ et \; (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \; est \; \searrow \end{cases}$
3) *En déduire que* $\lim_{n\infty}(u_n) = \sqrt{a}$
4) $u_{n+1}^2 - a = \left(u_{n+1} - \sqrt{a}\right)\left(u_{n+1} - \sqrt{a}\right)$

Utiliser cette identité pour déterminer une majoration de $\left(u_{n+1} - \sqrt{a}\right)$ en fonction de $\left(u_n - \sqrt{a}\right)$.
5) soient $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ *et* $n \geq 1$.

$$Montrer \; que \; : \; u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 23 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{3n-2}{4n+1} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

1) Montrer que (u_n) est majorée par $\frac{3}{4}$
2) montrer que (u_n) est minorée par -2
3) *Calculer la limite* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 24 :

Soit $(v_n)_n$ la suite définie par :

$$v_n = n^2 - 2n + 3 \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

1) Montrer que (v_n) est minorée par 2
2) Montrer que (v_n) n'est pas maojorée
3) *Calculer* $\lim\limits_{n\infty}(v_n)$; $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{v_n}{n^2}\right)$

Exercice N° 25 :

Soient $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ les suites définies par :

$$\begin{cases} v_n = (1-\alpha)^n & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad \alpha \,\epsilon\,]0,1[\\ w_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} v_k \end{cases}$$

1) Montrer que les suites (v_n) *et* (w_n) Convergent et calculer leurs limites.
2) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{v_n}{u_n} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n > 0$
3) Montrer que (u_n) est strictement $\nearrow$
4) *Montrer que* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n \leq u_0 + \dfrac{1}{\alpha u_0}$
5) En déduire que (u_n) est convergente

Exercice N° 26 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq 2$
2) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 27 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4^n & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

1) Calculer les termes : u_0 *et* u_2
2) On pose : $v_n = 4u_n - u_{n+1}$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$
Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $v_n = u_n - 4^n$
3) Montrer que (v_n) est géométrique.
4) Exprimer v_n *puis* u_n en fonction de n
5) *Calculer* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$ *et* $\lim\limits_{n\infty}(v_n)$

Exercice N° 28 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4u_n + \sqrt{1+24u_n}\right) & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pose : $v_n = \sqrt{1+24u_n}$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$
1) Mq : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $(v_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(v_n - 3)$
2) Calculer u_n en fonction de $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$
3) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 29 :

Soient (u_n) ; (v_n) ; (w_n) les suites définies ainsi :

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2+n}} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ v_n = \dfrac{3n+1}{n-1} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}\backslash\{1\} \\ w_n = n\sqrt{n} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer en utilisant la définition d'une limite d'une suite numérique que :

$$\begin{cases} Et \quad \lim\limits_{n\infty}(u_n) = 0 \\ Et \quad \lim\limits_{n\infty}(v_n) = 3 \\ Et \quad \lim\limits_{n\infty}(w_n) = +\infty \end{cases}$$

Exercice N° 30 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\infty} (n^3 - 5n^2 - 6n + 7)$

2) $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 5n + 2}{4 - n^3}\right)$

3) $\lim\limits_{n\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - n + 4} - n\right)$

4) $\lim\limits_{n\infty} \left(n^2 - n - \sqrt[3]{n} + 1\right)$

5) $\lim\limits_{n\infty} \left(n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{-1}{3}} \right)$

Exercice N° 31 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \;:\; 3 \leq u_n < 4$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) Puis en déduire qu'elle est convergente

3) Mq : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $(4 - u_{n+1}) \leq \frac{24}{25}(4 - u_n)$

4) *En déduire* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $(4 - u_n) \leq \left(\dfrac{24}{25}\right)^n$

Puis déterminer la limite $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

5) *On pose* $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique

6) Exprimer v_n *et* u_n en fonction de n

7) *Déterminer* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$ *à nouveau*

8) Exprimer $\mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ en fonction de $n \epsilon \mathbb{N}^*$

9) *En déduire la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(\mathcal{S}_n)$

Exercice N° 32 :

1) $\forall\, x \,\epsilon\,]0,1[$; *Calculer les limites* :

$$\lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} x^k\right) \quad ; \quad \lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} k \cdot x^k\right)$$

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1! + \cdots + n!}{n!}\right) \quad ; \quad \lim_{n\infty}\left(\frac{1! + \cdots + n!}{(n+1)!}\right)$$

3) soit (u_n) une suite bornée vérifiant :

$\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$ *et* $u_1 \geq u_0$

Montrer que : $\lim\limits_{n\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$

Exercice N° 33 :

Soit (u_n) une suite positive vérifiant pour tout $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$; $u_n \leq \frac{1}{2^n}$ on pose :

$$\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

Montrer que la suite $(\mathcal{S}_n)$ est convergente

Exercice N° 34 :

Soit $(\mathcal{S}_n)_{n\geq 1}$ la suite définie ainsi :

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

On note $\forall n \geq 1$; $\left| \begin{array}{l} a_n = \mathcal{S}_{2n} \\ b_n = \mathcal{S}_{2n+1} \end{array} \right.$

1) Mq $(a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes
2) Conclure sur la nature de $(\mathcal{S}_n)_{n\geq 1}$

Exercice N° 35 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1) montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $u_n \geq \sqrt{n}$
2) *Préciser la limite de* $(u_n)_{n\geq 1}$

Exercice N° 36 :

Soit $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{k=n} x^k$; $n \epsilon \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$

1) Montrer que le polynôme $P_n(x)$ admet une racine unique $\alpha_n \epsilon\,]0,1[$.
2) Étudier la monotonie de $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.
   $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est-elle convergent ?
3) Donner la valeur exacte de α_2 .
4) *Mq* : $\forall\, x \neq 1$; $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$
5) Déduire : $\forall n \geq 2$; $(\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$
6) Mq : $\forall x > 2$; $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2$
7) *En déduire* $\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 37 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

1) *Montrer que* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$: $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$
2) Montrer que la suite (u_n) est bornée
3) Étudier la monotonie de (u_n)
4) *Calculer* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 38 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1) Mq $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et ½
2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$
3) *Déterminer la limite* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 39 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 6 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n > 3$
2) Montrer que (u_n) est strictement ↘
3) En déduire que (u_n) est majorée
4) Montrer que (u_n) est convergente
5) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 40 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6 + \sqrt{u_n} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

1) Montrer que (u_n) est majorée par 9 et minorée par 1/4

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3) *Montrer que* $\lim_{n\infty}(u_n) = 9$

Exercice N° 41 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{n+1} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad ; \quad 0 < u_n < 1$
2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$
3) $Mq \quad : \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \dfrac{n}{n+1}$
4) *Calculer la limite* $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 42 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 + \dfrac{3}{4}u_n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \\ u_1 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < u_n < \frac{1}{4}$
2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$
3) *Déterminer la limite* $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 43 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{(u_n)^2}{3} + 2} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq \sqrt{3}$
2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$
3) *Déterminer la limite* $\lim_{n\infty}(u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 44 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 1 \leq u_n < 2$
2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$
3) $Mq \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < 2 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(2 - u_n)$
4) *En déduire* : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \; ; \; 0 < 2 - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}$
5) *Déterminer la limite* $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 45 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n^2 + 2}{3u_n + 1} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

1) Mq : $\quad 2 - u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 3u_n}(2 - u_n)$
2) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < u_n < 2$
3) *Montrer que* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \; ; \; \dfrac{3u_n}{1 + 3u_n} < \dfrac{6}{7}$
4) *Déduire* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \; ; \; 0 < 2 - u_n \leq \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}$
5) *En déduire la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 46 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

1) calculer les termes : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4

2) *Vérifier que* : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

3) Donner une expression simple de u_n

4) *Calculer la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 47 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$On\ pose \ : \ \mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1) simplifier l'expression de $\mathcal{S}_n$

2) *En déduire la limite* : $\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n)$

3) *Calculer la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 48 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = -2n^2 + 3 \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

2) *Calculer la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 49 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

1) Calculer les termes : u_1 ; u_2 ; u_3

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) Mq : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_n = n - \sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{k-1}{k}\right)$

4) Mq $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = (n+1)u_n - n$

Exercice N° 50 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+(u_n)^2} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) Calculer les termes : u_1 ; u_2

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0 < u_n < 1$

3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement $\nearrow$

4) Déduire : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n \geq \frac{1}{2}$

5) *Déterminer la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 51 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{n} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

1) *Exprimer* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *en fonction de* n

2) *Comparer* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *et* 1

Puis en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3) Montrer que : $\forall n \geq 2$; $3^n > n^2$

4) *Déterminer la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 52 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \end{cases}$$

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) Montrer que (v_n) est constante

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3) *Calculer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 53 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n^4}{2n^2+5}\right)$

2) $\lim\limits_{n\infty}\left(Arctan(n+1)-Arctan(n)\right)$

3) $\lim\limits_{n\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)$

4) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{2-8n^2+5n^3}{7n^3-3}\right)$

5) $\lim\limits_{n\infty} Arctan\left(\sqrt[3]{n+6}\right)$

6) $\lim\limits_{n\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-n\right)$

Exercice N° 54 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n=\frac{cos(3n)}{\sqrt{n}}\quad ;\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

1) *Vérifier que* : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ |u_n|\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) *En déduire la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 55 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

2) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{-5}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

3) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{7^n-5^n}{3^n}\right)$

4) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{7}{3}\right)^n-(2021)^n$

5) $\lim\limits_{n\infty}\left(\sqrt[5]{2^n}-\sqrt[3]{2^n}\right)$

6) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right)$

Exercice N° 56 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n=3+\frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n}\quad ;\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1) *Mq* : $\forall n\geq 2\ ;\ \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\leq u_n-3\leq\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$

2) *En déduire la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 57 :

Dans chacun des cas ci-dessous, Montrer que les suites (u_n) *et* (v_n) sont deux suites adjacentes :

1) $u_n=\dfrac{2n}{n+2}\quad ;\quad v_n=2+\dfrac{1}{n!}$

2) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!}\quad ;\quad v_n=u_n+\frac{1}{n\cdot n!}$

3) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(k+1)^2}\quad ;\quad v_n=u_n+\frac{1}{3n^2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 58 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n & ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 2 \end{cases}$$

On pose : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $\mathcal{S}_n = u_{n+1} + u_n$

1) Montrer que $(\mathcal{S}_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est géométrique puis exprimer $\mathcal{S}_n$ en fonction de $n\epsilon\mathbb{N}$
2) On pose : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $v_n = (-1)^n\, u_n$
Et on pose : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $w_n = v_{n+1} - v_n$
Exprimer w_n en fonction de $\mathcal{S}_n$
3) *Calculer* $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} w_i$ *en fonction de n*
4) Déduire u_n *et* v_n en fonction de n
5) *Déterminer la limite* : $\displaystyle\lim_{n\infty}\left(\frac{u_n}{2^n}\right)$

Exercice N° 59 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} & ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Calculer les termes : u_1 ; u_2 ; u_3
2) Montrer que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$
3) *Mq* $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$; $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$
4) On pose $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $\alpha_n = u_{2n}$ *et* $\beta_n = u_{2n+1}$
vérifier que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $\beta_n = 1 + \dfrac{1}{1+\alpha_n}$
5) Montrer que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $\alpha_n \leq \beta_n$
6) Montrer que (α_n) est croissante et montrer que (β_n) est décroissante.
7) Montrer que les suites (α_n) *et* (β_n) Convergent vers la même limite.
8) *Mq* : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \sqrt{2}|$
9) *En déduire la limite* : $\displaystyle\lim_{n\infty}(u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 60 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 5}{u_n + 3} & ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n < \sqrt{5}$
2) Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante
3) En déduire que (u_n) est convergente Puis déterminer sa limite

Exercice N° 61 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
2) vérifier que $\forall k \geq 2$ on ait :
$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad et \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
3) *Déduire* : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$; $0 < u_n < 2 - \dfrac{1}{n}$
4) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Exercice N° 62 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} & ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 \,\epsilon\, [0,1] \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 1$
2) Montrer que (u_n) est convergente

3) $On\ pose\ :\ u_0 = cos\theta\ ;\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$Montrer\ que\ :\ u_n = cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

5) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice N° 63 :

1) Montrer, par une méthode autre que la définition, les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{sin1 + sin2 + \cdots + \sin n}{n\sqrt{n}}\right) = 0$
- $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{cos1 + cos2 + \cdots + cosn}{n\sqrt{n}}\right) = 0$

2) soient $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ et\ (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement monotones et telles que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ 0 \leq u_n \leq 2\quad et\quad 0 \leq v_n \leq 3$

$$On\ suppose\ que\ :\ \lim_{n\infty}(u_n \cdot v_n) = 6$$

Que peut-on dire des suites $(u_n)\ et\ (v_n)$?

3) soient $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ et\ (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que :

$$\lim_{n\infty}\ (u_n^2 + u_n \cdot v_n + v_n^2) = 0$$

$$Montrer\ que\ :\ \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}(v_n) = 0$$

Exercice N° 64 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1 - 2u_n^2} & ;\quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = a\ \epsilon\ \left]0, \dfrac{1}{4}\right[\end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ 0 < u_n < \frac{1}{4}$
2) Montrer que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est décroissante
3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim(u_n) = 0$
4) $On\ pose\ :\ \forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ \mathcal{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k\, u_k$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

on pose : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ v_n = \mathcal{S}_{2n}\ et\ w_n = \mathcal{S}_{2n+1}$

Montrer que $(v_n)\ et\ (w_n)$ sont adjacentes

$$On\ pose\ alors\ :\ \lim_{n\infty}(v_n) = \lim_{n\infty}(w_n) = l$$

5) $Montrer\ que\ :\ \forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} \leq \frac{2}{7}u_n$

6) Déduire alors le résultat suivant :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}\quad ;\quad |\mathcal{S}_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$$

7) $En\ déduire\ que\ :\ \lim\limits_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = l$

On pourra remarquer que :

$$|\mathcal{S}_n - l| \leq |\mathcal{S}_n - v_n| + |v_n - l|$$

Exercice N° 65 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \sin n$

2) $\lim\limits_{n\infty} \frac{1}{n(3 - \sin n)}$

3) $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{n - \sin n}{n + \sin n}\right)$

4) $\lim\limits_{n\infty}\ (n + 1 - \sin(2n))$

5) $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{n - \cos n}{n^2 + 2n}\right)$

6) $\lim\limits_{n\infty}\ (2(-1)^n + 4n^2 + 3)$

Exercice N° 66 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k}\quad ;\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

1) $Mq \ : \ \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \ ; \ \dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

2) *En déduire la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 67 :

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$$

1) Déterminer $f(I)$
2) soit (u_n) la suite numérique définie :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{4}$

3) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$
4) En déduire que (u_n) est convergente
5) *Calculer la limite* $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 68 :

Soit $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + (u_n)^2 & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ est croissante
2) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas majorée
3) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 69 :

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \ ; \ 2^n \geq n+1$
2) on considère les suites définies par :

■ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k \cdot 2^k} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$

■ $v_n = u_n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n \cdot 2^n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ *et* $(v_n)_{n \geq 1}$ convergent et ont la même limite.

Exercice N° 70 :

Soit $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

1) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
2) En déduire que :

$$\exists \, n_0 \epsilon \, \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$$

3) $Mq \ : \ \forall n \geq n_0 \ ; \ u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$
4) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 71 :

Pour $n \geq 1 \ ; \ n \epsilon \mathbb{N}$ *on pose* :

■ $\mathcal{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ■ $u_n = 2\sqrt{n} - \mathcal{S}_n$

■ $v_n = 2\sqrt{n+1} - \mathcal{S}_n$

1) *Montrer que* : $\lim\limits_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = +\infty$
2) Montrer que les suites (u_n) *et* (v_n) Sont adjacentes de limite commune $L \geq 1$
3) *Calculer* : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\mathcal{S}_n}{n}\right) \ ; \ \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}}\right)$
4) Déduire la valeur de la limite suivante

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 72 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement ↗
2) *Montrer que* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
3) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Exercice N° 73 :

Soient $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ définies par :

- $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{3^k}\right) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$
- $v_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{k}{3^k}\right) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $3v_{n+1} = v_n + u_n$
2) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $v_n \leq 1$
3) Montrer que $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est convergente
4) *Déterminer la limite* : $\lim_{n\infty}(v_n)$

Exercice N° 74 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq \alpha$
2) Montrer que la suite (u_n) est ↗
3) En déduire que (u_n) est convergente
   Et déterminer sa limite

Exercice N° 75 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{(u_n)^2}{3} + 2} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n \geq \sqrt{3}$
2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3) En déduire que (u_n) est convergente
4) *Déterminer la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 76 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{1 + (u_n)^3}{8}} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{7}} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n \geq \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$
2) *En déduire que* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
3) Montrer que la suite (u_n) converge
4) *On pose* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $v_n = \frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}$
   Montrer que (v_n) est géométrique
5) Exprimer u_n en fonction de n
6) *Calculer la limite* : $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 77 :

On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = x^3 + nx - 1 \quad ; \quad \begin{matrix} \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \\ \forall x \epsilon \mathbb{R} \end{matrix}$$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$
   admet une solution unique $x_n \,\epsilon\,]0,1[$

2) Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement ↘
3) En déduire que (x_n) est convergente
4) *Montrer que* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $x_n < \frac{1}{n}$
5) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(x_n)$

Exercice N° 78 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{n+2}{n(n+1)} & ; \quad \forall n \geq 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $u_n \geq 1$
2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3) *Soit* $v_n = u_n + \frac{1}{n}$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$

   Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique
4) Exprimer u_n en fonction de n

   La suite (u_n) converge-t-elle ?
5) *Montrer que* $\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = (2^{n+1} - 2) - \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$
6) Montrer que : $\forall k \epsilon \mathbb{N}^*$; $2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$
7) *soit* $w_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \left(\dfrac{1}{u_k \cdot v_k}\right)$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$

   Montrer que $(w_n)_{n\epsilon \mathbb{N}^*}$ est convergente

Exercice N° 79 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

1) *Montrer que* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$
2) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement ↗
3) *Montrer que* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = +\infty$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 80 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On pose : $v_n = 2 - u_n$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$

1) Montrer que (v_n) est géométrique
2) Déterminer v_n *et* u_n en fonction de n
3) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$
4) *On pose* : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $\mathcal{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k$

   Exprimer $\mathcal{S}_n$ en fonction de n
5) *Calculer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(\mathcal{S}_n)$

Exercice N° 81 :

Soient (u_n) *et* (v_n) les suites définie par

- $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = \alpha \,\epsilon\, \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$
- $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ v_0 = 2\alpha \,\epsilon\, \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$

1) *Mq* : $\forall a > 0$; $\forall b > 0$: $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$
2) *Mq* : $\forall\,(0 < a \leq b)$; $\begin{cases} a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b \\ a \leq \sqrt{ab} \leq b \end{cases}$
3) Montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $0 < u_n \leq v_n$
4) Montrer que (u_n) *est* ↗ et (v_n) *est* ↘
5) Montrer que les suites (u_n) *et* (v_n) convergent vers la même limite

Exercice N° 82 :

Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} \quad ; \quad \forall\, x \in I =]1, +\infty[$$

1) Montrer que : $\forall x \in I \quad ; \quad g(x) \geq 3$
2) soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; u_n \geq 3$

3) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante
4) En déduire que (u_n) est convergente
5) *Calculer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 83 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$
2) Étudier la monotonie de (u_n)
3) En déduire que (u_n) est convergente
4) *En déduire la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 84 :

On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^2 - 1}\right) \quad et \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1) Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ *et* $(v_n)_{n \geq 2}$ sont deux suites adjacentes

2) Que peut-on en conclure ?

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) En remarquant que :

$$\forall k \geq 2 \quad ; \quad \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k - 1} - \frac{1}{k + 1}\right)$$

Donner une expression simplifiée de u_n

4) *En déduire la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 85 :

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{2 + (v_n)^2}{2v_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n > \sqrt{2}$
2) Étudier la monotonie de la suite (v_n)
3) *déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(v_n)$

Exercice N° 86 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq 5$
2) *Soit* : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$

Montrer que la suite (v_n) est arithmétique

3) Exprimer v_n *puis* u_n en fonction de n
4) Calculer la somme $\mathcal{S}_{10} = v_1 + \cdots + v_{10}$

Exercice N° 87 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{3u_n - 1} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n \neq 1$
2) *On pose* : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$

   Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique
3) Exprimer v_n *puis* u_n en fonction de n
4) Calculer $\mathcal{S}_n = v_1 + \cdots + v_n$ en fct de n
5) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\infty}(u_n) \quad ; \quad \lim_{n\infty}(v_n) \quad ; \quad \lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n)$$

Exercice N° 88 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) Calculer les termes : u_1 ; u_2
2) *On pose* : $v_n = u_n - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

   Montrer que (v_n) est géométrique
3) Exprimer v_n *puis* u_n en fonction de n
4) Calculer en fonction de n la somme :

$$\mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

5) Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{n\infty}(v_n) \quad ; \quad \lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) \quad ; \quad \lim_{n\infty}(u_n)$$

Exercice N° 89 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n < 0$
2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)
3) *On pose* : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

   Montrer que (v_n) est géométrique
4) Exprimer v_n *puis* u_n en fonction de n
5) Calculer en fonction de n la somme :

$$\mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

6) *Calculer* : $\lim_{n\infty}(v_n)$; $\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n)$; $\lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 90 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{16u_n}{\left(2 + \sqrt{u_n}\right)^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 4$
2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3) *on pose* : $v_n = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

   Montrer que (v_n) est géométrique
4) Exprimer v_n *et* u_n en fonction de n
5) *Calculer* $\lim_{n\infty}(u_n)$ *et* $\lim_{n\infty}(v_n)$

Exercice N° 91 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 + u_n - \sqrt{3 + (u_n)^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in [0,1] \end{cases}$$

1) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 1$
2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\sqrt{3} - 1\right)(1 - u_n)$$

4) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq 1 - u_n \leq \left(\sqrt{3} - 1\right)^n (1 - u_0)$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \sqrt{3 + u_k^2} \\ T_n = u_n + \mathcal{S}_n \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Déterminer la nature da la suite $(T_n)_{n\geq 1}$

6) Exprimer $\mathcal{S}_n$ en fonction de n ; u_0 ; u_n

Exercice N° 92 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{2}{(u_n)^2} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que (u_n) est minorée par 2
2) *Montrer que* : $(u_{n+1} - 2) < \dfrac{1}{4}(u_n - 2)$
3) *Déduire* : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $0 < u_n - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$
4) *Déterminer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 93 :

1) Montrer que pour tout $x\,\epsilon\,]0,1]$ on a :

$$\sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

2) Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + u_{n-1} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n

3) *Calculer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

4) *On pose* : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}}$

Montrer que : $v_n > n - 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$

5) *En déduire* : $\lim\limits_{n\infty}(v_n)$

Exercice N° 94 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \quad et \quad u_1 = 2 \end{cases}$$

1) Calculer les termes : u_2 ; u_3 ; u_4
2) (u_n) est-elle arithmétique ou géométr
3) montrer que pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$ on a :
$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+2} - u_{n+1}) \geq 0$$
4) En déduire la monotonie de (u_n)
5) soit (v_n) la suite définie par :
$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \; ; \; v_n = u_{n+1} - u_n$$
Montrer que $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est géométrique
6) Exprimer v_n en fonction de n
7) En déduire u_n en fonction de n
8) Montrer que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est bornée.
9) *Calculer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 95 :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 0 \quad et \quad u_1 = 1 \end{cases}$$

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}$

1) Montrer que (v_n) est géométrique
2) Écrire v_n en fonction de n
3) On pose : $\mathcal{S}_n = v_0 + \cdots + v_{n-1}$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$
Montrer que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$; $\mathcal{S}_n = u_n$
4) Écrire u_n en fonction de n
5) *Calculer la limite* : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 96 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$$

2) En déduire que (x_n) est minorée par $\sqrt{2}$
3) Montrer que (x_n) est strictement ↘
4) $Mq \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad ; \quad 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$
5) $En\ déduire\ la\ limite \quad : \quad \lim_{n\infty}(u_n)$

Exercice N° 97 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n^2+n}{3} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

1) Calculer les termes : u_1 ; u_2 ; u_3
2) Calculer u_n et u_{n+1} en fonction de n
3) En déduire que (u_n) est arithmétique

Exercice N° 98 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

1) Calculer les termes : u_1 ; u_2 ; u_3
2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$
3) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

4) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad ; \quad 1 < u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 99 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \left(\frac{2n+2}{3n}\right)u_n \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \\ u_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$On\ pose \quad : \quad v_n = \frac{u_n}{n} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

1) Calculer les termes : u_2 ; u_3
2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
3) Exprimer v_n $puis$ u_n en fonction de n
4) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n}$$

5) $En\ déduire\ la\ limite \quad : \quad \lim_{n\infty}(S_n)$

Exercice N° 100 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\sqrt{2})u_n + 2\sqrt{2} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

1) Calculer les termes : u_2 ; u_3
2) On pose : $v_n = u_n - 2$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$
   Montrer que (v_n) est géométrique
3) Exprimer v_n $puis$ u_n en fonction de n
4) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

5) $Calculer\ la\ limite \quad : \quad \lim_{n\infty}(s_n)$

Exercice N° 101 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n > 1$
2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3) Mq : $\forall n\in\mathbb{N}$; $(u_{n+1} - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1)$
4) $Déduire$: $\forall n\in\mathbb{N}$; $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$
5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$n < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < n + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

6) *En déduire la limite* : $\lim\limits_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5 : Corrigés des Exercices

Solution N° 1 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)\ :\ u_n > 3$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 5 > 3$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 3$

■ $$u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3$$

$$= \frac{4u_n - 9 - 3u_n + 6}{u_n - 2}$$

$$= \frac{u_n - 3}{u_n - 2} > 0$$

$$= \frac{strict\ positif}{strict\ positif} = strict\ positif$$

$\Longrightarrow\ \ u_{n+1} - 3 > 0$
$\Longrightarrow\ \ u_{n+1} > 3$
$\Longrightarrow\ \ P(n+1)\ est\ vraie$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ \ est\ vraie \\ P(n)\ \ \Longrightarrow\ \ P(n+1)\ \ ;\ \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ \ ;\ \ u_n > 3$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$, On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - \frac{u_n(u_n - 2)}{u_n - 2}$$

$$= \frac{-(u_n^2 - 6u_n + 9)}{u_n - 2}$$

$$= \frac{-(u_n - 3)^2}{u_n - 2} \leq 0$$

$\Longrightarrow\ \ \forall n\epsilon\mathbb{N}\ \ ;\ \ u_{n+1} - u_n \leq 0$
$\Longrightarrow\ \ \forall n\epsilon\mathbb{N}\ \ ;\ \ u_{n+1} \leq u_n$
$\Longrightarrow\ \ (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ \ est\ décroissante$

3) $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ \ est\ décroissante$
$\Longrightarrow\ \ u_n \leq u_{n-1} \leq u_{n-2} \leq \cdots \leq u_0$
$\Longrightarrow\ \ u_n \leq u_0\ \ ;\ \ \forall n\epsilon\mathbb{N}$
$\Longrightarrow\ \ \forall n\epsilon\mathbb{N}\ \ ;\ \ u_n \leq 5\ \ \rightsquigarrow (1)$

Or on a selon la question 1) :
$\forall n\epsilon\mathbb{N}\ \ ;\ \ u_n > 3\ \ \rightsquigarrow\ (2)$

$(1)\ et\ (2)\ \ \Longrightarrow\ \ 3 < u_n \leq 5\ \ ;\ \ \forall n\epsilon\mathbb{N}$

4) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{4u_n - 9}{u_n - 2}\right) - 3} - \frac{1}{u_n - 3}$$

$$= \frac{u_n - 2}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3}{u_n - 3} = 1\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + 1$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 1

5) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ \forall p \epsilon \mathbb{N} \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p + 1(n-p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + 1(n-0)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{2} + 1(n-0)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{2} + n$$

$$On\ a\ encore \quad : \quad v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{6n+5}{2n+1}$$

6) $\mathcal{S} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{2020}$

$$= \left(\frac{2020 - 1 + 1}{2}\right)(v_1 + v_{2020})$$

$$= (1010)\left(\frac{3}{2} + \frac{4041}{2}\right) = 2042220$$

Solution N° 2 :

1) $u_1 = 3 - \frac{9}{4u_0} = \frac{9}{4}$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition (P_n) définie ainsi : (P_n) : $u_n \neq \frac{3}{2}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 3 \neq 3/2$

Donc l'instance (P_0) est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance (P_n) soit vraie. C-à-d $u_n \neq \frac{3}{2}$

$$\blacksquare \ (P_n)\ est\ vraie \quad \Longrightarrow \quad u_n \neq \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad 4u_n \neq 6$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{4u_n} \neq \frac{1}{6} \quad ; \ u_n \neq 0\ facile$$

$$\Longrightarrow \quad 3 - \frac{9}{4u_n} \neq 3 - \frac{9}{6}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} \neq \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad (P_{n+1})\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \ \Longrightarrow \ (P_{n+1}) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n \neq \frac{3}{2}$

Remarque : Pour montrer que $u_n \neq 0$
On peut le faire par l'absurde :
Si $\exists\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}\ tel\ que\ \ u_n = 0$
$On\ aurait\ u_{n+1}\ n'existe\ pas$

$$Car \quad u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$$

3) D'abord on aurait besoin de montrer que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n > \frac{3}{2}$

1ère Méthode :

$$u_n \neq \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} oubien \quad u_n < \dfrac{3}{2} \\ \\ oubien \quad u_n > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$Si \quad u_n < \frac{3}{2} \quad Alors \quad u_0 = 3 < \frac{3}{2}$

Et c'est une contradiction claire

Donc la deuxième alternative est retenue

$$C-\text{à}-d \;:\; \forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; u_n > \frac{3}{2}$$

2ème Méthode :

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) \;:\; u_n > \frac{3}{2}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 5 > \frac{3}{2}$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > \frac{3}{2}$

■ $Q(n)\ est\ vraie \Rightarrow u_n > \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow 4u_n > 6$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4u_n} > \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{9}{4u_n} > 3 - \frac{9}{6}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \;;\; \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; u_n > \frac{3}{2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Revenons maintenant pour étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ on a alors :

■ $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n$

$$= \frac{12u_n - 9 - 4u_n^2}{4u_n}$$

$$= \frac{-(4u_n^2 - 12u_n + 9)}{4u_n}$$

$$= \frac{-(2u_n - 3)^2}{4u_n} < 0$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ décroissante$$

4) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ on procède comme suit :

■ $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{2u_{n+1} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3}$

$$= \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} - \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{8u_n}{12u_n - 18} - \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{4u_n}{3(2u_n - 3)} - \frac{2 \times 3}{3(2u_n - 3)}$$

$$= \frac{2(2u_n - 3)}{3(2u_n - 3)} = \frac{2}{3} \;\epsilon\; \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; v_{n+1} = v_n + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (v_n)\ est\ arithmétique\ de\ raison\ \frac{2}{3}$$

5) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p\epsilon\mathbb{N}\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p + \frac{2}{3}(n-p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + \frac{2}{3}(n-0)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n-0)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{2}{3}(n+1)$$

$Et\ comme\ :\quad v_n = \dfrac{2}{2u_n - 3} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$

$Alors\ :\quad u_n = \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{3}{2} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad u_n = \frac{3}{2(n+1)} + \frac{3(n+1)}{2(n+1)} = \frac{3n+6}{2n+2}$$

6) $\mathcal{S}_n = \dfrac{1}{2u_0 - 3} + \dfrac{1}{2u_1 - 3} + \cdots + \dfrac{1}{2u_n - 3}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2u_0 - 3} + \frac{2}{2u_1 - 3} + \cdots + \frac{2}{2u_n - 3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n-0+1}{2}\right)(v_0 + v_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2n}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+4)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 3 :

1) Calcul de quelques termes :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{5}{3} = 2$$

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$v_1 = u_1 - \frac{5}{2} = \frac{-1}{2}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)\ :\ u_n < \frac{5}{2}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 < \frac{5}{2}$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n < \frac{5}{2}$

■ $P(n)\ est\ vraie \quad \Longrightarrow \quad u_n < \dfrac{5}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}u_n < \frac{5}{6}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} < \frac{5}{6} + \frac{5}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} < \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ \text{est vraie} \\ P(n) \implies P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n < \frac{5}{2}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ on procède comme suit :

■ $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} - u_n$$

$$= \frac{-2}{3}u_n + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{-2}{3}\left(u_n - \frac{5}{2}\right) > 0$$

$\implies \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} > u_n$

$\implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est croissante*

4) soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{u_{n+1} - \frac{5}{2}}{u_n - \frac{5}{2}}\right) = \left(\frac{\frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} - \frac{5}{2}}{u_n - \frac{5}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{3}u_n - \frac{5}{6}}{u_n - \frac{5}{2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{5}{2}\right)}{\left(u_n - \frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

$\implies \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

$\implies (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{3}$

5) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0}$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ v_n = \frac{-3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

On a encore : $v_n = u_n - \frac{5}{2} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n = v_n + \frac{5}{2}$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n = \frac{-3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{5}{2}$$

6) $\mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)v_0$$

$$= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) \times \frac{-3}{2}$$

$$= \frac{-9}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$= \left(v_0 + \frac{5}{2}\right) + \left(v_1 + \frac{5}{2}\right) + \cdots + \left(v_n + \frac{5}{2}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (n+1) \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \frac{-9}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{5(n+1)}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

7) $$\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = \lim_{n\infty} \frac{-9}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{-9}{4}(1-0) = \frac{-9}{4}$$

Solution N° 4 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n > 0$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 > 0$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 0$

■ $P(n)\ est\ vraie \implies u_n > 0$

$$\implies 3u_n + 2 > 0 \quad et \quad u_n + 2 > 0$$

$$\implies \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} > 0$$

$$\implies u_{n+1} > 0$$

$$\implies P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \implies P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n > 0 \rightsquigarrow (1)$

On démontrera encore par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n < 2$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 < 2$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n < 2$

■ $$u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2$$

$$= \frac{u_n - 2}{u_n + 2} < 0$$

$$\implies u_{n+1} - 2 < 0$$

$$\implies u_{n+1} < 2$$

$$\implies Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \implies Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n < 2 \rightsquigarrow (2)$

De $(1)\ et\ (2)$ on déduit que :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n < 2$$

2) $$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2} \quad ; \quad avec \quad x = u_n$$

■ $\Delta = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \{2; -1\}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2} = \frac{-(x-2)(x+1)}{x+2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(2-x)(x+1)}{(x+2)} \quad ; \quad x = u_n$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{(u_n+2)}$$

3) comme : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n < 2$

$$Alors \quad : \begin{cases} Et & (1+u_n) > 0 \\ Et & (2+u_n) > 0 \\ Et & (2-u_n) > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{(u_n+2)} > 0$$

$$\Longrightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \quad est \quad croissante$$

$$\Longrightarrow \quad u_n \geq u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq \cdots \geq u_0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq u_0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 1 \leq u_n < 2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 2}\right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n + 1}\right)$

$$= \left(\frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} + 1}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2}\right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{4u_n + 4}{u_n + 2}\right) \times \left(\frac{u_n + 2}{u_n - 2}\right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n + 1}\right)$$

$$= \frac{4(u_n+1)(u_n+2)(u_n-2)}{(u_n+2)(u_n-2)(u_n+1)} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} = 4v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n) \ est \ géométrique \ de \ raison \ 4$$

5) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \times 4^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \times 4^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = -2 \cdot 4^n$$

6) $On \ a$: $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n \cdot u_n - 2v_n = u_n + 1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n \cdot u_n - u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad (v_n - 1)u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1 + 2v_n}{v_n - 1} = \frac{1 - 2 \cdot 2 \cdot 4^n}{-2 \cdot 4^n - 1}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1 - 4^{n+1}}{-2 \cdot 4^n - 1} = \frac{4^{n+1} - 1}{1 + 2 \cdot 4^n}$$

7) $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} v_k = v_2 + v_3 + \cdots + v_n$

$$= \left(\frac{1-4^{n-2+1}}{1-4}\right) v_2$$

$$= \frac{-1}{3}(1-4^{n-1})(-32)$$

$$= \frac{32}{3}(1-4^{n-1})$$

Solution N° 5 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n \leq 4$

L'initialisation :

On a : $u_1 = \sqrt{12} \leq 4$
Donc l'instance $P(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \leq 4$

■ $P(n)$ *est vraie* $\Longrightarrow u_n \leq 4$

$$\Longrightarrow u_n + 12 \leq 16$$

$$\Longrightarrow \sqrt{u_n + 12} \leq 4$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} \leq 4$$

$$\Longrightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $u_n \leq 4 \rightsquigarrow (1)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n \geq 3$

L'initialisation :

On a : $u_1 = \sqrt{12} \geq 3$
Donc l'instance $Q(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq 3$

■ $Q(n)$ *est vraie* $\Longrightarrow u_n \geq 3 > -3$

$$\Longrightarrow u_n \geq -3$$

$$\Longrightarrow 12 + u_n \geq 9$$

$$\Longrightarrow \sqrt{12 + u_n} \geq 3$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} \geq 3$$

$$\Longrightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Longrightarrow Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $u_n \geq 3 \rightsquigarrow (2)$

De (1) et (2) on tire finalement que :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad 3 \leq u_n \leq 4$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) soit f la fonction définie ainsi :

$$f(x) = \sqrt{x+12}$$

Cette fonction est définie et est continue sur l'intervalle $[-12,+\infty[$ Donc on peut appliquer le TAF sur l'intervalle $[u_n,4]$ Alors :

$$\exists\, c\, \epsilon\,]u_n,4[\quad ; \quad \frac{f(4)-f(u_n)}{4-u_n} = f'(c)$$

$$\Longrightarrow \quad u_n < c < 4 \quad et \quad \left(\frac{4-u_{n+1}}{4-u_n}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c+12}}$$

$$On\ a \ : \ \begin{vmatrix} u_n < c < 4 \\ u_n \geq 3 \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad c \geq 3 > -8$$

$$\Longrightarrow \quad c \geq -8$$

$$\Longrightarrow \quad c+12 \geq 4$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{c+12} \geq 2$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{c+12} \geq 4$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{c+12}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{4-u_{n+1}}{4-u_n}\right) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_{n+1}) \leq \frac{1}{4}(4-u_n)$$

3) **1ère Méthode** (la méthode descendante)

$$On\ a \ : \ (4-u_{n+1}) = \frac{1}{4}(4-u_n) \ ; \ \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

Pour $(n-1)\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$ on aurait :

$$(4-u_n) \leq \frac{1}{4}(4-u_{n-1})$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(4-u_{n-2})$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(4-u_{n-3})$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^4 (4-u_{n-4})$$

$$\Longrightarrow \quad \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \quad \cdots \ \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (4-u_{n-n})$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n 4 \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

2ème Méthode : la récurrence
(à vous de voir comment procéder)

4) Comme : $0 \leq 4-u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$Et\ comme \quad \lim_{n\infty} 0 = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduite que : $\lim(4-u_n) = 0$

$$Ainsi \ : \ \lim_{n\infty}(u_n) = 4$$

Solution N° 6 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \ : \ \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 2\pi \quad et \quad \frac{\pi^2}{2\pi} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $\frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

■ $P(n)\ est\ \ vraie \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$$\Longrightarrow \quad cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} = \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi^2}{u_{n+1}} = \frac{\pi^2}{u_n}\left(\frac{\pi + 2u_n}{\pi}\right)$$

$$On\ \ a \quad \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi^2}{u_n} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2u_n}{\pi} = \frac{4}{1+4k} \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi + 2u_n}{\pi} = \frac{4k+5}{1+4k} \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi^2}{u_{n+1}} = \frac{\pi^2}{u_n}\left(\frac{\pi + 2u_n}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi + 4k\pi}{2}\right)\left(\frac{4k+5}{1+4k}\right)$$

$$= \frac{\pi(4k+1)(4k+5)}{2(4k+1)}$$

$$= \frac{\pi}{2}(4k+5) = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi \quad ; \quad (k+1)\ \epsilon\ \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi^2}{u_{n+1}} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \Longrightarrow \quad P(n+1)\ \ est\ \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ \ est\ \ vraie \\ P(n) \ \Longrightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

$$C-\text{à}-d \ : \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)\ :\ u_n > 0$

L'initialisation :
On a : $u_0 = 2\pi > 0$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 0$

■ $Q(n)\ est\ \ vraie \quad \Longrightarrow \quad u_n > 0$

$$\Longrightarrow \quad \pi u_n > 0 \quad et \quad \pi + 2u_n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + 0 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1)\ \ est\ \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ \ est\ \ vraie \\ Q(n) \ \Longrightarrow \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

$$C-\text{à}-d \ : \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n > 0$$

2) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et procède ainsi :

■ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\pi + 2u_n}{\pi u_n} - \frac{1}{u_n}$

$$= \frac{\pi + 2u_n - \pi}{\pi u_n} = \frac{2}{\pi} \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; v_{n+1} = v_n + \frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \quad (v_n)$ *est arithmétique de raison* $\frac{2}{\pi}$

3) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p\epsilon\mathbb{N}\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p + \frac{2}{\pi}(n-p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + \frac{2}{\pi}(n-0)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \;;\; v_n = \frac{1}{2\pi} + \frac{2n}{\pi} = \frac{1}{2\pi}(4n+1)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2\pi}{4n+1}$$

4) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{2\pi}{4n+1}\right) = 0$

Solution N° 7 :

1) On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \;:\; u_n > n$

L'initialisation :

On a : $u_4 = 6 > 4$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$; $n > 3$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > n$

■ $P(n)$ *est vraie* $\Rightarrow \quad u_n > n \;\; et \;\; n > 3$

$$\Rightarrow \quad u_n > n \;\; et \;\; n > 3 \;\; et \;\; n-1 > 2$$

$$\Rightarrow \quad u_n > n \;\; et \;\; n(n-1) > 6 > 1$$

$$\Rightarrow \quad u_n > n \;\; et \;\; n(n-1) > 1$$

$$\Rightarrow \quad u_n > n \;\; et \;\; n^2 - n > 1$$

$$\Rightarrow \quad u_n + n^2 - n > n + 1$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} > n + 1$$

$$\Rightarrow \quad P(n) \; est \; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(4) \;\; est \;\; vraie \\ P(n) \;\; \Rightarrow \;\; P(n+1) \quad ; \quad \forall n > 3 \end{cases}$$

$$C-à-d \;\; : \;\; \forall n > 3 \quad ; \quad u_n > n$$

2) comme : $\forall n > 3$; $u_n > n$
Et comme $\lim\limits_{n\infty} n = +\infty$
Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que : $\lim(u_n) = +\infty$

3) par la méthode descendante on a :

$\hookrightarrow \quad u_n - u_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1)$
$\hookrightarrow \quad u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^2 - (n-2)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\hookrightarrow \quad u_3 - u_2 = 2^2 - 2$
$\hookrightarrow \quad u_2 - u_1 = 1^2 - 1$
$\hookrightarrow \quad u_1 - u_0 = 0^2 - 0$

On additionne ces égalités côte à côte on obtient après des élimination éventuelles :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{k=n-1} k$$

$$\Longrightarrow \quad u_n + 2 = \sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{k=n-1} k$$

$$\Longrightarrow \quad u_n + 2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad u_n = \frac{n(n-1)(2n-4)}{6} - 2 \;;\; \forall n \geq 3$$

Solution N° 8 :

1) calcul de quelques terme de la suite :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
0	1	2	3	4	5	6	7

2) d'après ce petit tableau en dessus on peut facilement conjecturer le prédicat suivant : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n = n$ à démontrer par la machine récurrence.

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n = n$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 0$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n = n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $P(n)$ *est vraie* $\Longrightarrow \quad u_n = n$

$$\Longrightarrow \quad 2u_n = 2n$$

$$\Longrightarrow \quad 2u_n + 1 - n = 2n + 1 - n$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} = n + 1$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1) \;;\; \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C-\text{à}-d \;:\; \forall n \epsilon \mathbb{N} \;;\; u_n = n$$

4) soit maintenant $u_0 = 1$
On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n = 2^n + n$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 = 2^0 + 0$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n = 2^n + n$

■ $Q(n)$ *est vraie* $\Longrightarrow \quad u_n = 2^n + n$

$$\Longrightarrow \quad 2u_n + 1 - n = 2(2^n + n) + 1 - n$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \implies Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

$$C-\grave{a}-d \ : \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = 2^n + n$$

Solution N° 9 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $v_n \geq 0$

L'initialisation :

On a : $v_0 = 1 \geq 1$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $v_n \geq 0$

■ $P(n)\ est\ vraie \implies v_n \geq 0$

$$\implies 2 + v_n \geq 2 > 0$$
$$\implies \sqrt{2+v_n} > 0$$
$$\implies \sqrt{2+v_n} \geq 0$$
$$\implies v_{n+1} \geq 0$$
$$\implies P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \implies P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $v_n \geq 0 \rightsquigarrow (1)$

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $v_n \leq 2$

L'initialisation :
On a : $v_0 = 1 \leq 2$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $v_n \leq 2$

■ $Q(n)\ est\ vraie \implies v_n \leq 2$

$$\implies 2 + v_n \leq 4$$
$$\implies \sqrt{2+v_n} \leq 2$$
$$\implies v_{n+1} \leq 2$$
$$\implies Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \implies Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

$$C-\grave{a}-d \ : \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n \leq 2 \rightsquigarrow (2)$$

De $(1)\ et\ (2)$ on déduit :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ 0 \leq v_n \leq 2$$

2) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $v_{n+1} - v_n = \sqrt{2+v_n} - v_n$

$$= \frac{\left(\sqrt{2+v_n}\right)^2 - (v_n)^2}{\sqrt{2+v_n} + v_n}$$

$$= \frac{-(v_n)^2 + v_n + 2}{\sqrt{2+v_n} + v_n}$$

$$= \frac{-(v_n - 2)(v_n + 1)}{\sqrt{2+v_n} + v_n} \geq 0$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ v_{n+1} \geq v_n$$

$$\implies (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ croissante$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) On : $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n} = f(v_n)$

Avec $f(x) = \sqrt{2+x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$

Et on : $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ et $v_0 = 1 \epsilon \mathbb{R}^+$

La suite (v_n) est convergente car croissante et étant majorée par 2.

On a encore $\lim(u_n) \epsilon \mathbb{R}^+$

Car : $0 \leq v_n \leq 2$

Donc la limite $l = \lim(v_n)$ vérifie l'équation $f(l) = l$

$$\Rightarrow \sqrt{2+l} = l$$

$$\Rightarrow 2 + l = l^2$$

$$\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (l-2)(l+1) = 0 \quad ; \quad \Delta = 9$$

$$\Rightarrow l \epsilon \{2 ; -1\}$$

$$\Rightarrow l = 2 \quad car \quad : \quad 0 \leq l \leq 2$$

Solution N° 10 :

1) calcul de quelque terme de la suite :

u_1	u_2	u_3	v_0	v_1	v_3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	3	4

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède ainsi :

■ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n+1}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = 1$

Ainsi : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \; ; \; v_{n+1} = v_n + 1$
c-à-d que (v_n) est arithmétique de raison 1

3) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ \forall p \epsilon \mathbb{N} \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p + 1(n-p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + 1(n-0)$$

$$\Rightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = 1 + n$$

$$\Rightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n+1}$$

4) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $n + 2 > n + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \; est \; décroissante$$

5) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$

$$\lim_{n\infty}(v_n) = \lim_{n\infty}(1+n) = +\infty$$

Solution N° 11 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \; : \; 2 \leq u_n \leq 4$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 3 \epsilon [2 ; 4]$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $2 \leq u_n \leq 4$

■ $P(n)\ est\ vraie \quad \Longrightarrow \quad 2 \leq u_n \leq 4$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} Et \quad (u_n - 4)\ est\ négatif \\ Et \quad (u_n - 2)\ est\ positif \end{cases}$$

■ $On\ a \quad u_{n+1} - 4 = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 4$

$$= \frac{8u_n - 8 - 4u_n - 8}{u_n + 2}$$

$$= \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - 4 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_{n+1} \leq 4} \rightsquigarrow (1)$$

■ $On\ a\ encore \quad u_{n+1} - 2 = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 2$

$$= \frac{8u_n - 8 - 2u_n - 4}{u_n + 2}$$

$$= \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_{n+1} \geq 2} \rightsquigarrow (2)$$

De $(1)\ et\ (2)$ on déduit : $2 \leq u_{n+1} \leq 4$
$\Longrightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \quad \Longrightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 2 \leq u_n \leq 4$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} - u_n$

$$= \frac{8u_n - 8 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-((u_n)^2 - 6u_n + 8)}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-(u_n - 4)(u_n - 2)}{(u_n + 2)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ \ est \ \ croissante$$

3) comme $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est croissante Alors :

$$u_n \geq u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq \cdots \geq u_0$$

$$\Longrightarrow \quad u_n \geq u_0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \geq 3$$

Donc d'après la 1ère question on déduit :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 3 \leq u_n \leq 4$$

4) comme : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ 3 \leq u_n \leq 4$ Alors :

$$\begin{cases} (3 - u_n)\ est\ négatif \\ (4 - u_n)\ est\ positif \end{cases}$$

■ $On\ a \quad : \quad (4 - u_{n+1}) - \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$

$$= 4 - \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$= \frac{16 - 4u_n}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$= \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$= (4-u_n)\left(\frac{4}{u_n+2}-\frac{4}{5}\right)$$

$$= (4-u_n)\left(\frac{12-4u_n}{5(u_n+2)}\right)$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{(4-u_n)(3-u_n)}{(u_n+2)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_{n+1})-\frac{4}{5}(4-u_n) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \; ; \; (4-u_{n+1}) \leq \frac{4}{5}(4-u_n)$$

5) 1ère Méthode : la méthode descendante

$$On \;\; a \;\; : \;\; \forall n\epsilon\mathbb{N} \;\; ; \;\; (4-u_{n+1}) \leq \frac{4}{5}(4-u_n)$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \frac{4}{5}(4-u_{n-1})$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}(4-u_{n-2})$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}(4-u_{n-3})$$

$$\Longrightarrow \quad \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots \qquad \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4-u_0)$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

2ème Méthode : la récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $4-u_n > \left(\frac{4}{5}\right)^n$

L'initialisation :

On a : $4-u_0 \leq (4/5)^0$ car $4-3 \leq 1$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $4-u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

■ $P(n) \;\; est \;\; vraie \quad \Longrightarrow \quad 4-u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{5}(4-u_n) \leq \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{5}(4-u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_{n+1}) \leq \frac{4}{5}(4-u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad (4-u_{n+1}) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \;\; est \;\; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \;\; est \;\; vraie \\ P(n) \;\; \Longrightarrow \;\; P(n+1) \;\; ; \;\; \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $4-u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

6) $Comme \;\; \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \quad car \; -1 < \frac{4}{5} < 1$

$$Et \;\; comme \; : \; \forall n\epsilon\mathbb{N} \;\; ; \;\; 0 \leq 4-u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$Donc \quad : \quad \lim_{n\infty}(4-u_n) = 0$$

$$Ou \;\; encore \quad : \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 4$$

Solution N° 12 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}u_n+2\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)-3\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(u_n+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\left(u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}=\frac{1}{4}\epsilon\,\mathbb{R}$$

$\Longrightarrow\quad\forall n\epsilon\mathbb{N}\quad;\quad v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$

$\Longrightarrow\quad (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{4}$

2) comme $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est géométrique alors :

$$\begin{array}{l}\forall n\epsilon\mathbb{N}\\ \forall p\leq n\end{array}\quad;\quad v_n=v_p\left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}$$

On choisit $p=0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}\quad;\quad v_n=v_0\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Longrightarrow\quad\forall n\epsilon\mathbb{N}\quad;\quad v_n=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Longrightarrow\quad\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ u_n=v_n+\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

3) $\mathcal{S}_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

$$=\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$=1\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)+1\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{3}{4}}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\frac{16}{3}-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{3}+3^{n+1}\right)$$

$$=\frac{16}{3}-\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\left(\frac{1}{3}+3^{n+1}\right)$$

4) $\lim\limits_{n\infty}(u_n)=\lim\limits_{\substack{n\infty\\ \frac{1}{4}<1}}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\lim\limits_{\substack{n\infty\\ \frac{3}{4}<1}}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0+0=0$

Solution N° 13 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n-\frac{3}{2}u_n+\frac{1}{2}u_{n-1}}{\frac{3}{2}u_n-\frac{1}{2}u_{n-1}-u_n}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}u_{n+1}-2u_n+\frac{1}{2}u_{n-1}}{\frac{1}{2}(u_n-u_{n-1})}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}u_n-\frac{1}{2}u_{n-1}\right)-2u_n+\frac{1}{2}u_{n-1}}{\frac{1}{2}(u_n-u_{n-1})}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n-1}}{\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})} = \frac{\frac{1}{4}(u_n - u_{n-1})}{\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n) \ est \ géométrique \ de \ raison \ \frac{1}{2}$$

2) comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3) $\mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

$$= v_0 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right) = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4) on procède par la méthode descendante on trouve les instances :

$$\hookrightarrow \quad v_0 = u_1 - u_0$$
$$\hookrightarrow \quad v_1 = u_2 - u_1$$
$$\hookrightarrow \quad v_2 = u_3 - u_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\hookrightarrow \quad v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$$
$$\hookrightarrow \quad v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

On additionne ces égalités côte à côte et en prenant en considération les éventuelles éliminations on trouve :

$$\mathcal{S}_n = u_n - u_0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = 6 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = 7 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

5) $On \ a \ d'abord \ : \ \lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

$Car \ : \ -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad Donc \ on \ trouve \ :$

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} \left(7 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 7 - 0 = 7$$

Solution N° 14 :

1) la fonction f est définie et est continue et dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-7}{2}\right\}$ car on a :

$$\forall x \neq \frac{-7}{2} \quad ; \quad f'(x) = \frac{8}{(2x+7)^2} > 0$$

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \ : \ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

L'initialisation :

On a : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1 \quad car \quad u_0 = 1$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

■ $On\ a\ :\quad u_{n+1} - 1 = \dfrac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - 1$

$$= \frac{2u_n + 3 - 2u_n - 7}{2u_n + 7} = \frac{-4}{2u_n + 7} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} \leq 1 \quad \rightsquigarrow \quad (1)$$

$On\ a\ encore\ :\quad u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{4u_n + 6 - 2u_n - 7}{2(2u_n + 7)} = \frac{2u_n - 1}{2(2u_n + 7)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} \geq \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad (2)$$

De $(1)\ et\ (2)$ on déduit que :

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \quad \Longrightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède ainsi :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - u_n$

$$= \frac{2u_n + 3 - 2u_n^2 - 7u_n}{2u_n + 7}$$

$$= \frac{-2u_n^2 - 5u_n + 3}{2u_n + 7}$$

$$= \frac{-\left(u_n - \frac{1}{2}\right)(u_n + 3)}{2u_n + 7} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \quad est\ décroissante$$

4) la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-7}{2}\right\}$ Donc elle est continue et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-7}{2}\right\}$ On peut donc appliquer le TAF sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; u_n\right]$:

$$\Longrightarrow \quad \exists\ c\ \epsilon\ \left]\frac{1}{2}, u_n\right[\quad ; \quad \frac{f(u_n) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{u_n - \frac{1}{2}} = f'(c)$$

$$\Longrightarrow \exists\ c\ \epsilon\ \left]\frac{1}{2}, u_n\right[\ ; \ \left(\frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_n - \frac{1}{2}}\right) = \frac{8}{(2c + 7)^2}$$

$$c < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2c > 1 \quad \Longrightarrow \quad 2c + 7 > 8$$

$$\Longrightarrow \quad (2c + 7)^2 > 64$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{(2c + 7)^2} < \frac{1}{64}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{8}{(2c + 7)^2} < \frac{1}{8}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_n - \frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{8}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad u_n \geq \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) 1ère Méthode : La méthode descendante

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(u_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\left(u_{n-2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{8}\right)^3\left(u_{n-3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Longrightarrow \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n\left(u_0-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

2ème Méthode : La récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \; : \; 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

<u>L'initialisation</u> :

On a : $0 \leq u_0 - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad car \quad u_0 = 1$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

<u>L'hérédité</u> :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$P(n) \text{ est vraie} \Longrightarrow \begin{cases} \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(u_n-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3(n+1)+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \left(u_{n+1}-\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3(n+1)+1}$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \text{ est vraie}$$

<u>La conclusion</u> :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

6) $comme \quad \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = 0 \quad car \; -1 < \frac{1}{2} < 1$

$$Et \; comme \quad 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \quad ; \; \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n\infty}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\infty}(u_n)=\frac{1}{2}$$

Solution N° 15 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n>0$

L'initialisation :
On a : $u_0=1>0$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n>0$

■ $P(n)\ est\ vraie \quad\Rightarrow\quad u_n>0$

$$\Rightarrow\quad (u_n)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2>0$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{(u_n)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}>0$$

$$\Rightarrow\quad u_{n+1}>0$$

$$\Rightarrow\quad P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases}P(0)\ est\ vraie\\ P(n)\ \Rightarrow\ P(n+1)\quad ;\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}\end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n>0$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$u_{n+1}-u_n=\sqrt{(u_n)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}-u_n$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(u_n)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}\right)^2-(u_n)^2}{\sqrt{(u_n)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}+u_n}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{\sqrt{(u_n)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}+u_n}>0$$

$$\Rightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}\quad ;\quad u_{n+1}>u_n$$

$$\Rightarrow\quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ strictement\ croissante$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $v_n\leq 2-\frac{1}{n}$

L'initialisation :

$$On\ a\ :\ v_1=\sum_{k=1}^{k=1}\frac{1}{k^2}=1\leq 2-\frac{1}{1}$$

Donc l'instance $P(1)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $v_n\leq 2-\frac{1}{n}$

$$v_{n+1}-\left(2-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k^2}-\left(2-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-2+\frac{1}{n+1}$$

$$=\left(v_n-2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$=\underbrace{\left[v_n-\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]}_{négatif}+\underbrace{\left[\frac{-1}{n(n+1)^2}\right]}_{négatif}\leq 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad v_{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad v_{n+1} \leq \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \;\; est \;\; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \;\; est \;\; vraie \\ P(n) \;\; \Longrightarrow \;\; P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n = \sqrt{1 + v_n}$

L'initialisation :

$On \;\; a$: $u_1 = \sqrt{1 + v_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Donc l'instance $Q(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n = \sqrt{1 + v_n}$

■ $Q(n) \;\; est \;\; vraie \quad \Longrightarrow \quad u_n = \sqrt{1 + v_n}$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)^2 = 1 + v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

$$\Longrightarrow (u_n)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{(u_n)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + v_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1) \;\; est \;\; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \;\; est \;\; vraie \\ Q(n) \;\; \Longrightarrow \;\; Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $u_n = \sqrt{1 + v_n}$

5) $On \;\; a$: $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \quad v_n + 1 \leq 3 - \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < v_n + 1 \leq 3 - \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{v_n + 1} \leq \sqrt{3 - \frac{1}{n}}$$

$Or \;\; on \;\; a$: $\frac{-1}{n} < 0 \quad \Longrightarrow \quad 3 - \frac{1}{n} < 3$

$$\Longrightarrow \quad 0 < 3 - \frac{1}{n} < 3$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{3 - \frac{1}{n}} < \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{v_n + 1} \leq \sqrt{3 - \frac{1}{n}} \leq \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{v_n + 1} \leq \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad u_n \leq \sqrt{3} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{matrix} (u_n) \ est\ convergente\ car\ croissante \\ et\ majorée\ par\ \sqrt{3} \end{matrix}$$

6) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(k)$ définie ainsi : $R(k)$: $2^{k+1} \geq (k+1)^2$

L'initialisation :

$On\ a\ :\ 2^{3+1} \geq (3+1)^2 \quad car \quad 16 \geq 16$
Donc l'instance $R(3)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $k \geq 3$; $k\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $R(k)$ soit vraie.
C-à-d $2^{k+1} \geq (k+1)^2$

■ $R(k)\ est\ vraie \quad \Longrightarrow \quad 2^{k+1} \geq (k+1)^2$

$$\Longrightarrow \quad 2 \cdot 2^{k+1} \geq 2(k+1)^2 \geq (k+2)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 2^{k+2} \geq (k+2)^2$$

$$\Longrightarrow \quad R(k+1)\ est\ vraie$$

Pour quoi $2(k+1)^2 \geq (k+2)^2$?

Voici pourquoi :

$On\ a\ :\ 2(k+1)^2 - (k+2)^2$

$$= (2k^2 + 4k + 2) - (k^2 + 4k + 4)$$

$$= k^2 - 2 \geq 2 \quad car \quad k \geq 3$$

$Donc\ :\ 2(k+1)^2 - (k+2)^2 \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad 2(k+1)^2 \geq (k+2)^2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

La conclusion :

$$\begin{cases} R(3)\ est\ vraie \\ R(k) \ \Longrightarrow\ R(k+1) \quad ; \quad \forall k \geq 3 \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \geq 3$; $2^{k+1} \geq (k+1)^2$

7) Soit $k \geq 3$; $k\epsilon\mathbb{N}$ et on procède :

■ $(u_{k+1})^2 - (u_k)^2$

$$= \left(\sqrt{(u_k)^2 + \left(\frac{1}{k+1}\right)^2}\right)^2 - (u_k)^2 = \left(\frac{1}{k+1}\right)^2$$

$Or\ on\ a\ :\ 0 \leq (k+1)^2 \leq 2^{k+1}$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall k \geq 3 \quad ; \quad (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$$

8) $On\ a\ \ \forall k \geq 3 \quad ; \quad (u_{k+1})^2 - (u_k)^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$

Par la méthode descendante on trouve :

$$\hookrightarrow \quad (u_4)^2 - (u_3)^2 \geq \frac{1}{2^4}$$

$$\hookrightarrow \quad (u_5)^2 - (u_4)^2 \geq \frac{1}{2^5}$$

$$\hookrightarrow \quad (u_6)^2 - (u_5)^2 \geq \frac{1}{2^6}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad (u_{n-1})^2 - (u_{n-2})^2 \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\hookrightarrow \quad (u_n)^2 - (u_{n-1})^2 \geq \frac{1}{2^n}$$

On additionne ces inégalités côte à côte et en prenant en considération les éven

Les éventuelles éliminations dans le côté de gauche on trouve alors :

$$\hookrightarrow \quad (u_n)^2 - (u_3)^2 \geq \sum_{k=4}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$On \;\; a \;\; : \;\; (u_3)^2 = 1 + v_3 = 1 + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{1}{k^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{85}{36}$$

$$On \;\; a \;\; encore \;\; \sum_{k=4}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = w_4 + w_5 + \cdots + w_n$$

$$Avec \;\; : \;\; w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (géométrique)$$

$$Donc \;\; : \;\; \sum_{k=4}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = w_4 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)^2 - \frac{85}{36} \geq \frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad u_n \geq \sqrt{\frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right) + \frac{85}{36}}$$

Par passage aux limites on trouve :

$$\lim_{n\infty}(u_n) \geq \sqrt{\frac{1}{8}(1-0) + \frac{85}{36}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) \geq \sqrt{\frac{179}{72}} \rightsquigarrow \quad (1)$$

$Or \;\; on \;\; a \;\; selon \;\; la \;\; question \;\; 5) \;\; :$

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \leq \sqrt{3}$$

Donc par passage aux limite on obtient :

$$\lim_{n\infty}(u_n) \leq \sqrt{3} \rightsquigarrow \quad (2)$$

De (1) et (2) on en déduit que :

$$\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \lim_{n\infty}(u_n) \leq \sqrt{3}$$

Solution N° 16 :

1) Pour que la suite (v_n) soit géométrique, il suffit qu'on ait :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = constante \;\; \epsilon \;\; \mathbb{R}$$

$$On \;\; a \;\; : \;\; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + \alpha(n+1) - 1}{u_n + \alpha n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} + \alpha(n+1) - 1}{u_n + \alpha n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n + (\alpha - 1)n + \left(\alpha - \frac{11}{3}\right)}{u_n + \alpha n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{2}(\alpha - 1)n + \frac{3}{2}\left(\alpha - \frac{11}{3}\right)\right)}{u_n + \alpha n - 1}$$

Et pour que cette dernière quantité soit constante il suffit qu'on ait les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} Et \quad \frac{3}{2}(\alpha-1)=\alpha \\ Et \quad \frac{3}{2}\left(\alpha-\frac{11}{3}\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Et \quad \alpha=3 \\ Et \quad \alpha=3 \end{cases}$$

Donc pour $\alpha=3$ on a la chose suivante

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{2}{3}(u_n+3n-1)}{(u_n+3n-1)}=\frac{2}{3}\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (v_n)\ est\ géométrique\ de\ raison\frac{2}{3}$$

5) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p\leq n\end{matrix} \quad ; \quad v_n=v_p\left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit $p=0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n=v_0\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

$$On\ a\ encore\ : \quad v_n=u_n+3n-1 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n=v_n-3n+1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-3n+1$$

3) $\mathcal{S}_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

$$=v_0\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

4) $Comme$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ est géométrique

$$Et\ comme\ \ \frac{2}{3}\,\epsilon\,]-1,1[\ \ Alors\ : \ \lim_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n)=\lim_{n\infty}3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=3\cdot1=3$$

5) $T_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\sum_{k=0}^{k=n}(v_k-3k+1)$

$$=\sum_{k=0}^{k=n}v_k-3\sum_{k=0}^{k=n}k+\sum_{k=0}^{k=n}1$$

$$=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)-\frac{3n(n+1)}{2}+1(n+1)$$

$$=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{(n+1)(2-3n)}{2}$$

Solution N° 17 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(1+u_n)^2-u_n$

$$=\frac{1}{2}(1+2u_n+(u_n)^2)-u_n$$

$$=\frac{1}{2}((u_n)^2+1)\geq0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1}-u_n\geq0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1}\geq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ croissante$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

L'initialisation :

On a : $u_1 - u_0 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

■ $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_{n+1})^2 - \frac{1}{2}(1 + u_n)^2$

$$= \frac{1}{2}((1 + u_{n+1})^2 - (1 + u_n)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + u_{n+1} - 1 - u_n)(1 + u_{n+1} + 1 + u_n)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n + 2)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u_n)^2 + 2u_n + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}u_n(u_n + 2)\right)$$

On a : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n \geq 0$ c'est trop facile de démontrer ce prédicat par récurrence en remarquant que la condition d'hérédité est triviale : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 \geq 0$

■ $u_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u_n(u_n + 2) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2} + \frac{1}{2}u_n(u_n + 2) \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}u_n(u_n + 2)\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (u_{n+2} - u_{n+1}) \geq \frac{25}{8} > \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (u_{n+2} - u_{n+1}) \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

1) 1ère Méthode : la méthode descendante

■ $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

$$\hookrightarrow \quad u_1 - u_0 \geq \frac{5}{2}$$
$$\hookrightarrow \quad u_2 - u_1 \geq \frac{5}{2}$$
$$\hookrightarrow \quad u_3 - u_2 \geq \frac{5}{2}$$
$$\hookrightarrow \quad u_4 - u_3 \geq \frac{5}{2}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\hookrightarrow \quad u_n - u_{n-1} \geq \frac{5}{2}$$

On additionne ces inégalités côte à côte et en prenant en considération les éventuelles éliminations on trouve ainsi :

$$u_n - u_0 \geq \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad u_n - 2 \geq \frac{5n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$$

2ème Méthode : On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 2 \geq 2 + \frac{5\times 0}{2}$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

■ $Q(n)$ *est vraie* $\Rightarrow u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

$$\Rightarrow u_n + 1 \geq 3 + \frac{5n}{2}$$

$$\Rightarrow (u_n + 1)^2 \geq 9 + \frac{25n^2}{4} + 15n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_n + 1)^2 \geq \frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}$$

Il nous reste à comparer les quantités :

$$\left(\frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}\right) \quad et \quad \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

$$On\ a\ : \left(\frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}\right) - \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

$$= \frac{25n^2}{8} + 5n > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{2} + \frac{25n^2}{8} + \frac{15n}{2}\right) > \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 \geq \left(\frac{9}{2} + \frac{5n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 2 + \frac{5(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

4) $comme\ u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

$Et\ comme\ \lim_{n\infty}\left(2 + \frac{5n}{2}\right) = +\infty$

Alors selon le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = +\infty$$

Ce qui veut dire que (u_n) est divergente

Solution N° 18 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(u_{n+1})^2 - 2}{(u_n)^2 - 2} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 + 1 - 2}{u_n^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(u_n^2 - 2)}{(u_n^2 - 2)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \quad et \quad u_n \neq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)\ est\ géométrique\ de\ raison\ \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p\left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$On\ a\ encore \quad : \quad v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{1}{2^{n-1}} = (u_n)^2 - 2$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \pm\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}} + 2}$$

Mais comme $u_n > 0$ est c'est facile à la démontrer par récurrence juste en remarquant que la condition d'hérédité est triviale $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} > 0$ on trouve finalement que :

$$\begin{cases} u_n = +\sqrt{\dfrac{1}{2^{n-1}} + 2} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

3) $\mathcal{S}_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$

$$= (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2)$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n} v_i + \sum_{k=0}^{k=n} 2$$

$$= v_0\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + (n+1)2$$

$$= 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$T_n = \prod_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$$

$$= 2 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{2^2} \times \cdots \times \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{n-1}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^{1+2+3+4+\cdots+(n-1)}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}\right) = 2^{\left(\frac{2-n^2+n}{2}\right)}$$

4) $On\ a \ \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \quad car \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$

$$Donc \quad \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2} = \sqrt{2}$$

$$Et\ on\ a \quad : \quad \lim_{n\infty}(T_n) = \lim_{n\infty} 2^{\left(\frac{2-n^2+n}{2}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} exp\left(\left(\frac{2 - n^2 + n}{2}\right)\ln 2\right)$$

$$= exp(-\infty) = 0^+ = 0$$

On verra ceci avec beaucoup plus de détails plus tard dans la leçon intitulée fonctions logarithmes et exponentielles.

Solution N° 19 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \ : \ 0 < u_n < v_n$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 \quad et \quad 0 < 1 < a = v_0$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n < v_n$

■ $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$$= \frac{4\,u_n\,v_n - (u_n + v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{-(u_n^2 - 2\,u_n\,v_n + v_n^2)}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{-(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - v_{n+1} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} < v_{n+1} \quad \rightsquigarrow \quad (1)$$

$Or\ on\ a\ :\quad u_n > 0 \quad et \quad v_n > 0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} > 0 \quad \rightsquigarrow \quad (2)$$

De (1) et (2) on peut en tirer :

$$0 < u_{n+1} < v_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \quad \Longrightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n < v_n$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} - u_n$

$$= \frac{2\,u_n\,v_n - u_n^2 - u_n\,v_n}{u_n + v_n}$$

$$= \frac{u_n\,v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{(u_n + v_n)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} \geq u_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{R}}\ est\ croissante$$

On suit le même procédé pour $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

■ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n$

$$= \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} - v_n \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ décroissante$$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $(v_{n+1} - u_{n+1}) - \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$

$$= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} - \frac{v_n - u}{2}$$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4\,u_n\,v_n - (v_n - u_n)(v_n + u_n)}{2(u_n + v_n)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{2\,u_n^2 - 2\,u_n\,v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{2u_n(u_n - v_n)}{2(u_n + v_n)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (v_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

4) 1ère Méthode : la méthode descendante

$$\blacksquare \quad 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\hookrightarrow \quad 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

$$\hookrightarrow \quad 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 (v_{n-2} - u_{n-2})$$

$$\hookrightarrow \quad 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 (v_{n-3} - u_{n-3})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$$

$$\hookrightarrow \quad 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (a - 1)$$

Pour un $m = n + 1 \;\epsilon\; \mathbb{N}^*$ on aurait :

$$0 < v_m - u_m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m (a - 1)$$

$$Ou\ encore\ :\ 0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - 1)$$

2ème Méthode : On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)\ :\ 0 < v_n - u_n < \frac{a-1}{2^n}$

L'initialisation :

On a : $0 < a - 1 \leq \frac{a-1}{2^0}$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < v_n - u_n < \frac{a-1}{2^n}$

$$\blacksquare \quad On\ a\ :\ 0 < (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{a-1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $0 < v_n - u_n \leq \frac{a-1}{2^n}$

5) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)\ :\ u_n \times v_n = a$

L'initialisation :

On a : $u_0 \times v_0 = 1 \times a = a$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n v_n = a$

■ $u_{n+1} \times v_{n+1} = \left(\dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\right) \times \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)$

$$= u_n \times v_n = a$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1) \ est \ \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \ est \ \ vraie \\ Q(n) \ \ \Longrightarrow \ \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n \times v_n = a$

6) On a : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0 < u_n < v_n$

$$\Longrightarrow \quad 0 \times u_n < u_n \times u_n < u_n \times v_n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < (u_n)^2 < u_n v_n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < (u_n)^2 < a$$

$$\Longrightarrow \quad u_n < \sqrt{a} \ \rightsquigarrow \ (1)$$

On a encore : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0 < u_n < v_n$

$$\Longrightarrow \quad 0 \times v_n < u_n \times v_n < v_n \times v_n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < u_n v_n < (v_n)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < a < (v_n)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{a} < v_n \ \rightsquigarrow \ (2)$$

De (1) et (2) on en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad ; \quad u_n < \sqrt{a} < v_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 20 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $0 \leq u_n < \sqrt{3}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 0 \ \ et \ \ 0 \leq 0 < \sqrt{3}$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $0 \leq u_n < \sqrt{3}$

$$On \ \ a \quad f(x) = \frac{3}{\sqrt{6 - x^2}} \ \ est \ continue \ et$$

$$strictement \ \ croissante \ \ sur \ \mathbb{R}^+$$

■ $P(n) \ est \ \ vraie \ \ \Longrightarrow \ \ 0 \leq u_n < \sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \quad f(0) \leq f(u_n) < f\left(\sqrt{3}\right) \ \ car \ f \ est \ \nearrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{6}} \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{3}{\sqrt{6}} \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \ est \ \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ \ vraie \\ P(n) \ \ \Longrightarrow \ \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0 \leq u_n < \sqrt{3}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} - u_n$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} - u_n\right)\left(\frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} + u_n\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} + u_n\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}}\right)^2 - (u_n)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} + u_n\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{9-6u_n^2+u_n^4}{6-u_n^2}\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} + u_n\right)}$$

$$= \frac{\frac{(u_n^2-3)^2}{6-u_n^2}}{\left(\frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} + u_n\right)} \geq 0$$

Car on a : $0 \leq u_n < \sqrt{3} < \sqrt{6}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq u_n < \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)^2 < 6$$

$$\Rightarrow \quad 6-(u_n)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$v_{n+1} - v_n = \frac{(u_{n+1})^2}{3-(u_{n+1})^2} - \frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{6-(u_n)^2}\right)}{\left(3 - \frac{9}{6-(u_n)^2}\right)} - \frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$$

$$= \left(\frac{9}{6-(u_n)^2}\right) \times \left(\frac{6-(u_n)^2}{18-3u_n^2-9}\right) - \frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$$

$$= \left(\frac{9}{6-3(u_n)^2}\right) - \left(\frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{3-(u_n)^2}\right) - \left(\frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{3-(u_n)^2}{3-(u_n)^2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1} - v_n = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1} = v_n + 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } 1$$

5) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p + 1(n-p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + 1(n-0)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = n$$

On a encore : $v_n = \dfrac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \quad n = \frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n - n(u_n)^2 = (u_n)^2 \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+n)(u_n)^2 = 3n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u_n)^2 = \frac{3n}{1+n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \pm\sqrt{\frac{3n}{1+n}} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = +\sqrt{\frac{3n}{1+n}} \quad car \quad u_n \geq 0$$

5) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\sqrt{\dfrac{3n}{n+1}} = \lim\limits_{n\infty}\sqrt{\dfrac{3n}{n}} = \sqrt{3}$

Solution N° 21 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n > 3$

L'initialisation :

On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 \leq u_n \leq 1$

■ $Q(n)$ est $vraie$ $\Rightarrow \begin{cases} Et & u_n \geq 0 \\ Et & u_n \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Et & \dfrac{1+u_n^2}{1+u_n} \geq 0 \\ Et & (u_n)^2 \leq u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Et & \dfrac{1+u_n^2}{1+u_n} \geq 0 \\ Et & 0 \leq 1 + (u_n)^2 \leq u_n + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Et & \dfrac{1+u_n^2}{1+u_n} \geq 0 \\ Et & \dfrac{1+(u_n)^2}{1+u_n} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1+(u_n)^2}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad Q(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \ est \ vraie \\ Q(n) \quad \Rightarrow \quad Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 1$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $1 - u_{n+1} = 1 - \dfrac{1+u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$

D'autre part on a ceci :

■ $\dfrac{u_n}{1+u_n} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3u_n - 2(1+u_n)}{3(1+u_n)}$

$$= \frac{u_n - 2}{3(1+u_n)} \leq 0 \quad car \quad u_n \leq 1 < 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_n}{1+u_n} - \frac{2}{3} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_n}{1+u_n} \leq \frac{2}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n} \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

$$\Rightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

3) 1ère Méthode : la méthode descendante

■ $$(1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

$$\hookrightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}(1-u_{n-1})$$

$$\hookrightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 (1-u_{n-2})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (1-u_0)$$

$$\hookrightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(1-\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\hookrightarrow \quad (1-u_n) \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

2èmeMéthode : On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $1-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

L'initialisation :

On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ *et* $1-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^0$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $1-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

■ $$On\ a \ : \quad (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$$

$$\Rightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $1-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

4) $comme \quad 0 \leq 1-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$Et\ comme \quad \lim\limits_{n\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad car \ -1 < \frac{2}{3} < 1$

Donc d'après le critère de comparaison On en déduit que $\lim(1-u_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 1$$

Solution N° 22 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$(u_{n+1})^2 - a = \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)^2 - a$$

$$= \frac{1}{4}\left((u_n)^2 + \frac{a^2}{(u_n)^2} + 2\cdot u_n\cdot\frac{a}{u_n}\right) - a$$

$$= \frac{1}{4}\left((u_n)^2 + \frac{a^2}{(u_n)^2}\right) - \frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{4(u_n)^2}\left((u_n)^4 + a^2 - \frac{4\cdot a\cdot u_n^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4(u_n)^2}((u_n^2)^2 - 2 \cdot u_n^2 \cdot a + a^2)$$

$$= \frac{1}{4(u_n)^2}(u_n^2 - a)^2$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n \geq \sqrt{a}$

L'initialisation :

$$On\ a\ :\quad u_1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) - \sqrt{a}$$

$$= \frac{u_0}{2} + \frac{a}{2u_0} - \sqrt{a}$$

$$= \frac{u_0^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2u_0\sqrt{a}}{2u_0}$$

$$= \frac{\left(u_0 - \sqrt{a}\right)^2}{2u_0} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_1 - \sqrt{a} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1 \geq \sqrt{a}$$

Donc l'instance $P(1)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq \sqrt{a}$

■ $On\ a$: $(u_{n+1})^2 - a = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad (u_{n+1})^2 - a \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad (u_{n+1})^2 \geq a > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} \geq \sqrt{a} \quad \Longrightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

La conclusion :

$$\begin{cases} P(1)\ est\ vraie \\ P(n)\ \Longrightarrow\ P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$; $u_n \geq \sqrt{a}$

Pour la monotonie de la suite (u_n) on se donne un entier naturel non nul n et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - u_n$

$$= \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(a - u_n)(a + u_n)}{2u_n} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ décroissante$$

3) $u_{n+1} = f(u_n)$ $avec$ $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^*$

On a aussi $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ et $u_0\ \epsilon\ \mathbb{R}^+$

La suite (u_n) est convergente car décroissante et étant minorée par $\sqrt{a}$ et sa limite $l\ \epsilon\ \mathbb{R}^+$ Donc cette limite l vérifie l'équation $f(l) = l$:

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) = l$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2l^2 - l^2 - a}{2l} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{l^2 - a}{2l} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (l-\sqrt{a})(l+\sqrt{a})=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} Oubien & l=\sqrt{a} \\ Oubien & l=-\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad l=\sqrt{a} \quad car \quad l \in \mathbb{R}^+$$

4) $On \ a \ : \quad (u_{n+1})^2 - a = \dfrac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$

$$(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a}) = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2\cdot(u_n+\sqrt{a})^2}{4u_n^2}$$

$$u_{n+1}-\sqrt{a} = (u_n-\sqrt{a})^2\cdot\frac{1}{4(u_{n+1}+\sqrt{a})}\cdot\left(\frac{u_n+\sqrt{a}}{u_n}\right)^2$$

$$u_{n+1}-\sqrt{a} \leq (u_n-\sqrt{a})^2\cdot\frac{1}{4(2\sqrt{a})}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad (u_{n+1}-\sqrt{a}) \leq (u_n-\sqrt{a})^2\cdot\frac{1}{8\sqrt{a}}\cdot(1+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad (u_{n+1}-\sqrt{a}) \leq (u_n-\sqrt{a})^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

La conclusion :

$$(u_{n+1}-\sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2$$

5) On a par la méthode descendante :

$$\hookrightarrow \quad (u_2-\sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_1-\sqrt{a})^2$$

$$\hookrightarrow \quad (u_3-\sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_2-\sqrt{a})^2$$

$$\hookrightarrow \quad (u_3-\sqrt{a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}(u_1-\sqrt{a})^2\right)^2$$

$$\hookrightarrow \quad (u_3-\sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^3\cdot(u_1-\sqrt{a})^4$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\hookrightarrow \quad (u_4-\sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^7\cdot(u_1-\sqrt{a})^8$$

$$\hookrightarrow \quad (u_5-\sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{15}\cdot(u_1-\sqrt{a})^{16}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad (u_n-\sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}-1}\cdot(u_1-\sqrt{a})^{2^{n-1}}$$

$$\hookrightarrow \quad (u_n-\sqrt{a}) \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\cdot k^{2^{n-1}}$$

$$\hookrightarrow \quad (u_n-\sqrt{a}) \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

Solution N° 23 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_n - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3n-2}{4n+1} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{12n-8-12n-3}{4(4n+1)}$

$$= \frac{-11}{4(4n+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n - \frac{3}{4} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad (u_n) \ est \ majorée \ par \ \frac{3}{4}$$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3(n+1)-2}{4(n+1)+1} - \dfrac{3n-2}{4n+1}$

$$= \frac{3n+1}{4n+5} - \frac{3n-2}{4n+1} = \frac{11}{(4n+1)(4n+5)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ \ est \ \ croissante$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq u_0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq -2$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ \ est \ \ minorée \ \ par \ -2$$

3) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right) = \lim\limits_{n\infty} \frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{3-\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}\right) = \frac{3-0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

Solution N° 24 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $v_n - 2 = n^2 - 2n + 3 - 2 = n^2 - 2n + 1$

$$= (n-1)^2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n - 2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ minorée \ par \ 2$$

2) 1ère Méthode :

$On \ a \quad : \quad \lim\limits_{n\infty}(v_n) = \lim\limits_{n\infty}(n^2 - 2n + 3)$

$$= \lim_{n\infty} n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(v_n) = +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall A > 0)\,(\exists N\epsilon\mathbb{N})\,(\forall n \geq N) \ : \ u_n > A$$

$$\Longrightarrow \quad \nexists M\epsilon\mathbb{R} \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \ : \ v_n \leq M$$

Puisque pour $A = M$ il existe N à partir duquel l'inégalité $v_n \leq M$ n'est plus valable.

2ème Méthode : (l'absurde)

On suppose que : $\exists M\epsilon\mathbb{R} \ ; \forall n\epsilon\mathbb{N} \ : \ v_n \leq M$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists M\epsilon\mathbb{R} \ ; \ n^2 - 2n + 3 - M \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta = 4(M-3) < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad M < 3 \quad et \quad n^2 - 2n + 3 - M \leq 0 \ ; \forall n$$

$$\Longleftrightarrow \quad M < 3 \quad et \quad 3 - m \leq 0 \quad pour \ \ n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad M < 3 \quad et \quad m \geq 3 \ (contradiction)$$

Donc ce qu'on a supposé être vrai ne l'est plus (hypothèse du début à rejeter)

3) $\lim\limits_{n\infty}(v_n) = \lim\limits_{n\infty}(n^2 - 2n + 3) = +\infty$

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{v_n}{n^2}\right) = \lim_{n\infty}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 1$$

Solution N° 25 :

1) la suite (v_n) est géométrique de raison $(1-\alpha)$ et on a $-1 < 1 - \alpha < 1$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\infty} (1-\alpha)^n = 0$$

$$w_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0\left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-0+1}}{1-(1-\alpha)}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{1}{\alpha}(1-(1-\alpha)^{n+1})$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(w_n) = \lim_{n\infty}\frac{1}{\alpha}(1-(1-\alpha)^{n+1}) = \frac{1}{\alpha}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n > 0$

L'initialisation :

On a : $u_0 > 0$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 0$

■ $P(n)$ *est vraie* $\Longrightarrow$ $u_n > 0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_n}{u_n} > 0 \quad car \quad v_n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_n + \frac{v_n}{u_n} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \ \Longrightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n > 0$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{v_n}{u_n} - u_n = \frac{v_n}{u_n} > 0$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ strictement \ croissante$$

4) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on a d'abord :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{v_n}{u_n}$$

Comme (u_n) est croissante Alors :

$$\Longrightarrow \quad u_k > u_0 \quad ; \quad \forall k\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{u_k} < \frac{1}{u_0} \quad ; \quad \forall k\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_k}{u_k} < \frac{v_k}{u_0} \quad ; \quad car \quad v_k \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{k+1} - u_k < \frac{v_k}{u_0} \quad ; \quad \forall k\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{u_0}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

$$\Longrightarrow \quad u_n - u_0 < \frac{1}{u_0}\, w_{n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n - u_0) \leq \frac{1}{u_0} \lim_{n\infty} (w_{n-1})$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n - u_0) \leq \frac{1}{u_0} \lim_{n\infty} \left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n - u_0) \leq \frac{1}{u_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot (1-0)$$

$$\Longrightarrow \quad u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$$

5) la suite (u_n) est une suite convergente car croissante et étant majorée par le nombre positif $\left(u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}\right)$

Solution N° 26 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $1 \leq u_n \leq 2$

L'initialisation :
On a : $u_0 = 1 \quad et \quad 1 \leq 1 \leq 2$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $1 \leq u_n \leq 2$

■ $Q(n)\ est\ vraie \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq u_n \leq 2$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}u_n \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$$

$$\Longrightarrow 1 < \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$$

$$\Longrightarrow 1 \leq \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$$

$$\Longrightarrow Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \quad \Longrightarrow \quad Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) D'abord (u_n) est croissante car :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2-u_n}{2} \geq 0$$

Donc la suite (u_n) converge car croissante et étant majorée par 2

Or : $u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a encore $f(I) \subseteq I$; $\forall I \subseteq \mathbb{R}$ Donc la limite $l = \lim(u_n)$ vérifie l'équation $f(l) = l$.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}l + 1 = l \quad \Longleftrightarrow \quad l = 2$$

Solution N° 27 :

1) $u_1 = 3u_0 + 4^0 \quad \Longleftrightarrow \quad 5 = 3 \cdot u_0 + 1$

$$\Longleftrightarrow \quad u_0 = \frac{4}{3}$$

$$u_2 = 3u_1 + 4^1 \quad \Longleftrightarrow \quad u_2 = 3 \cdot 5 + 4 = 19$$

2) $v_n = 4u_n - u_{n+1} = 4u_n - 3u_n - 4^n$
$= u_n - 4^n$

3) $Soit\ n\epsilon\mathbb{N}$; $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4^{n+1}}{u_n - 4^n}$

$$= \frac{3u_n + 4^n - 4^{n+1}}{u_n - 4^n}$$

$$= \frac{3u_n - 4^n(-1+4)}{u_n - 4^n}$$

$$= \frac{3(u_n - 4^n)}{u_n - 4^n} = 3 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = 3\, v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)\ est\ géométrique\ de\ raison\ 3$$

4) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot 3^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \cdot 3^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{3} \times 3^n = 3^{n-1}$$

$$On \ a \ encore \ : \ u_n = v_n + 4^n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = 3^{n-1} + 4^n$$

5) $\lim_{n\infty}(v_n) = \lim_{n\infty} 3^{n-1} = +\infty \quad car \quad 3 > 1$

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}(3^{n-1} + 4^n) = +\infty$$

Solution N° 28 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $$\frac{v_{n+1} - 3}{v_n - 3} = \frac{\sqrt{1 + 24\,u_{n+1}} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{24}{16}(1 + 4u_n + v_n)} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{16 + 24 + 96u_n + 24v_n}{16}} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sqrt{4(24u_n + 1) + 24v_n + 36} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{2}{4}\sqrt{v_n^2 + 6v_n + 9} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(v_n + 3)^2} - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}|v_n + 3| - 3}{v_n - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(v_n + 3) - 3}{v_n - 3}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}v_n - \frac{3}{2}}{v_n - 3}\right) = \frac{\frac{1}{2}(v_n - 3)}{(v_n - 3)} = \frac{1}{2} \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{v_{n+1} - 3}{v_n - 3} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad (v_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(v_n - 3)$$

2) Soit $(w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = v_n - 3$$

$$Comme \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \ ; \ (v_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(v_n - 3)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \ ; \ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$$

$$\Longrightarrow \quad (w_n) \ est \ géométrique \ de \ raison \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N}^* \\ \forall p \leq n\end{matrix} \quad : \quad w_n = w_p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

On prend $p = 1$ on trouve :

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = w_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = (v_1 - 3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = (5-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad w_n = 2^{2-n}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = w_n + 3 = 2^{2-n} + 3$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad \sqrt{1+24u_n} = 2^{2-n} + 3 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad 1+24u_n = (2^{2-n}+3)^2$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{(2^{2-n}+3)^2-1}{24}$$

3) $$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{2^{n-1}}+3\right)^2-1}{24}\right)$$

$$= \left(\frac{(0+3)^2-1}{24}\right) = \frac{1}{3}$$

Solution N° 29 :

Dans cet exercice on adoptera la définition d'une limite d'une suite numérique :

■ Soit $\varepsilon > 0$ et on procède comme suit

$$Si \quad |u_n| < \varepsilon \quad Alors \quad \left|\frac{1}{\sqrt{2+n}}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{2+n}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2+n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad 2+n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2$$

$$Soit \quad N = E\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2\right] + 1 \;\epsilon\; \mathbb{N}$$

Récapitulatif : Soit $\varepsilon > 0$ et on a :

$$n \geq N \Rightarrow n \geq E\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2\right] + 1 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad n+2 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n+2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |u_n - 0| < \varepsilon$$

La conclusion :

$$(\forall\varepsilon > 0)\left(\exists N = E\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - 2\right] + 1 \;\epsilon\; \mathbb{N}\right) :$$

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |u_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 0$$

■ Soit $\varepsilon > 0$ et on procède comme suit

$$Si \quad |v_n - 3| < \varepsilon \quad Alors \quad -\varepsilon < v_n - 3 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon < \frac{3n+1}{n-1} - 3 < \varepsilon$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{4}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n-1}{4} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad n > \frac{4}{\varepsilon} + 1$$

$$Soit \quad N = E\left[\frac{4}{\varepsilon} + 1\right] + 1 \ \epsilon \ \mathbb{N}$$

Récapitulatif : Soit $\varepsilon > 0$ et on a :

$$n \geq N \Longrightarrow n \geq E\left[\frac{4}{\varepsilon} + 1\right] + 1 > \frac{4}{\varepsilon} + 1$$

$$\Longrightarrow \quad n > \frac{4}{\varepsilon} + 1$$

$$\Longrightarrow \quad n - 1 > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{n-1} < \frac{\varepsilon}{4} \quad ; \quad n \geq N > 1$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{4}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{4}{n-1}\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{3n+1}{n-1} - 3\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad |v_n - 3| < \varepsilon$$

La conclusion :

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(\exists N = E\left[\frac{4}{\varepsilon} + 1\right] + 1 \ \epsilon \ \mathbb{N}\right) :$$
$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |v_n - 3| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(v_n) = 3$$

■ Soit $\varepsilon > 0$ et on procède comme suit

$$Si \quad |u_n| > A \quad Alors \quad n\sqrt{n} > A$$

$$\Longrightarrow \quad n^1 \cdot n^{\frac{1}{2}} > A$$

$$\Longrightarrow \quad n^{\frac{3}{2}} > A > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} > A^{\frac{2}{3}} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad n > A^{\frac{2}{3}}$$

$$Soit \quad N = E\left[A^{\frac{2}{3}}\right] + 1 \ \epsilon \ \mathbb{N}$$

Récapitulatif : Soit $A > 0$ et on a :

$$n \geq N \Longrightarrow n \geq E\left[A^{\frac{2}{3}}\right] + 1 > A^{\frac{2}{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad n > A^{\frac{2}{3}} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad n^{\frac{3}{2}} > \left(A^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad n^{\frac{3}{2}} > A$$

$$\Longrightarrow \quad n \cdot \sqrt{n} > A$$

$$\Longrightarrow \quad w_n > A$$

La conclusion :

$$(\forall A > 0) \left(\exists N = E\left[A^{\frac{2}{3}}\right] + 1 \ \epsilon \ \mathbb{N}\right) :$$

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad w_n > A$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(w_n) = +\infty$$

Solution N° 30 :

1) $\lim_{n\infty} (n^3 - 5n^2 - 6n + 7)$

$$= \lim_{n\infty} n^3 \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0 + 0) = +\infty$$

2) $\lim_{n\infty} \left(\frac{3n^2 - 5n + 2}{4 - n^3}\right) = \lim_{n\infty} \frac{n^2\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(\frac{4}{n^3} - 1\right)}$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^3} - 1}\right)$$

$$= (0) \times \left(\frac{3 - 0 + 0}{0 - 1}\right) = 0$$

3) $\lim_{n\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - n + 4} - n\right)$

$$= \lim_{n\infty} (n^3 - n + 4)^{\frac{1}{3}} - n$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{\left((n^3 - n + 4)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - n^3}{(n^3 - n + 4)^{\frac{2}{3}} + n\,(n^3 - n + 4)^{\frac{1}{3}} + n^2}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{4 - n}{\left(n^3\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)\right)^{\frac{2}{3}} + n\left(n^3\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}} + n^2}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n^2\left(\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + n^2\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + n^2}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{\left(\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{(0 - 0)}{(1 - 0 + 0)^{\frac{2}{3}} + (1 - 0 + 0)^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{0}{3} = 0$$

4) $\lim_{n\infty} \left(n^2 - n - \sqrt[3]{n} + 1\right)$

$$= \lim_{n\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n} - n^{\frac{-5}{3}} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0 + 0) = +\infty$$

5) $\lim_{n\infty} \left(n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{-1}{3}}\right) = \lim_{n\infty} \left(n^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) = +\infty$

Solution N° 31 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $3 \leq u_n < 4$

L'initialisation :
On a : $u_0 = 3$ *et* $3 \leq 3 < 4$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $3 \leq u_n < 4$

■ $P(n)$ *est vraie* $\Rightarrow 3 \leq u_n < 4$

$$\Rightarrow 5 \leq u_n + 2 < 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 4 < \frac{24}{u_n + 2} \leq \frac{24}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-24}{5} \leq \frac{-24}{u_n + 2} < -4$$

$$\Rightarrow 8 - \frac{24}{5} \leq 8 - \frac{24}{u_n + 2} < 8 - 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16}{5} < \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} < 4$$

$$\Rightarrow \quad 3 < \frac{16}{5} \leq u_{n+1} < 4$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ 3 \leq u_n < 4$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{8u_n - 8}{u_n+2} - u_n$

$$= \frac{8u_n - 8 - u_n^2 - 2u_n}{2+u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{2+u_n}$$

$$= \frac{-(u_n-4)(u_n-2)}{2+u_n} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \ est \ strictement \ croissante$$

Et comme elle est majorée par 4 alors c'est une suite convergente

3) $On \ a \ : \quad u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} = f(u_n)$

$Avec \ : \ f(x) = \dfrac{8(x-1)}{x+2} \quad ; \quad \forall x \neq \dfrac{-1}{2}$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ Donc on peut appliquer le TAF sur tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{-1}{2}\right\}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Soit l'intervalle $I = [u_n, 4]$ Alors on applique le TAF on déduit que :

$$\exists \ c \ \epsilon \ ]u_n, 4[\quad ; \quad \frac{f(4) - f(u_n)}{4 - u_n} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad 3 < c < 4 \quad et \quad \left(\frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n}\right) = \frac{24}{(c+2)^2}$$

■ $c > 3 \quad \Rightarrow \quad (c+2)^2 > 25$

$$\Rightarrow \quad \frac{24}{(c+2)^2} < \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow \quad f'(c) < \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(4 - u_{n+1})}{(4 - u_n)} < \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow \quad (4 - u_{n+1}) < \frac{24}{25}(4 - u_n) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

Remarque : On peut démontrer ce résultat en utilisant la machine récurrence.

4) 1ère Méthode : la méthode descendante

■ $(4 - u_{n+1}) < \dfrac{24}{25}(4 - u_n) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

$$\hookrightarrow \quad (4 - u_{n+1}) < \left(\frac{24}{25}\right)^2 (4 - u_{n-1})$$

$$\hookrightarrow \quad (4 - u_{n+1}) < \left(\frac{24}{25}\right)^3 (4 - u_{n-2})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad (4 - u_{n+1}) < \left(\frac{24}{25}\right)^{n+1} (4 - u_0)$$

$$\hookrightarrow \quad (4-u_{n+1}) < \left(\frac{24}{25}\right)^{n+1}$$

$$D'où \quad : \quad 0 < (4-u_n) \leq \left(\frac{24}{25}\right)^{n} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$Et\ comme\ \lim_{n\infty}\left(\frac{24}{25}\right)^{n} = 0 \quad car\ -1 < \frac{24}{25} < 1$$

Alors d'après le critère de comparaison On en déduit que : $\lim(4-u_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 4$$

5) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2}\right) \times \left(\frac{u_n-2}{u_n-4}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{8u_n-8}{u_n+2} - 4\right)}{\left(\frac{8u_n-8}{u_n+2} - 2\right)} \times \left(\frac{u_n-2}{u_n-4}\right)$$

$$= \frac{4(u_n-4)}{(u_n+2)} \times \frac{(u_n+2)}{6(u_n-2)} \times \frac{(u_n-2)}{(u_n-4)} = \frac{2}{3}\epsilon\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)\ est\ géométrique\ de\ raison\ \frac{2}{3}$$

6) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p\left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{u_n-4}{u_n-2} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = v_n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{2v_n-4}{v_n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

7) $$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}\right) = \frac{0+4}{0+1} = 4$$

8) $\mathcal{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

$$= v_0\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-0+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= -3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

9) $$\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = \lim_{n\infty} -3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$$

$$= -3(1-0) = -3$$

Solution N° 32 :

1) Soit la suite (u_n) définie ainsi :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = x^n \quad ; \quad 0 < x < 1$$

La suite (u_n) est géométrique de raison x

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{k=n} x^k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$= u_0\left(\frac{1-x^{n-0+1}}{1-x}\right) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} x^k\right) = \lim_{n\infty}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$$

$$= \left(\frac{1-0}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}$$

■ Soit $P_n(x)$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in\,]0,1[\quad ; \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$$

Par passage aux dérivées on trouve :

$$P_n'(x) = \left(\sum_{k=0}^{k=n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k\, x^{k-1} = \frac{-(1-x)(n+1)x^n + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$x\sum_{k=1}^{k=n} k\, x^{k-1} = \frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + (x-x^{n+2})}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k\, x^{k} = \frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + x - x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k\, x^{k} = \frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + x - x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Par passage aux limites on obtient :

$$\lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} k\, x^k\right)$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{-(1-x)(n+1)x^{n+1} + x - x^{n+2}}{(1-x)^2}\right)$$

$$On\ a \quad \lim_{n\infty} x^{n+2} = 0 \quad car \quad -1 < x < 1$$

$$Et\ on\ a\ : \ \lim_{n\infty}(n+1)x^{(n+1)} = \lim_{n\infty} n x^n = 0$$

On doit admettre cette dernière limite car son calcul se passe à travers des exponentielles les voici :

$$\lim_{n\infty} n x^n = \frac{1}{\ln x}\lim_{n\infty}\left(n\ln x\ e^{n\ln x}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln x}\lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=n\ln x}}\left(t\, e^t\right) = \frac{1}{\ln x}\times 0^- = 0$$

$$\lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} k\, x^k\right) = \frac{-(1-x)(n+1)0 + x - 0}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

$$2) \quad On\ pose \ : \ \forall n\in\mathbb{N} \ ; \ \begin{cases} u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!} \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}\end{cases}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} > u_n \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)\ est\ strictement\ croissante$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) \leq 0 \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)_{n\geq 1} \ \ est \ \ décroissante$$

$$On \ a \ encore \ \lim_{n\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$$Ainsi \quad : \quad \begin{cases} (u_n) \ est \ strictement \ \nearrow \\ (u_n) \ est \ strictement \ \searrow \\ \lim\limits_{n\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n) \ et \ (v_n) \ \ sont \ \ adjacentes$$

Alors ces deux suites sont convergentes et tendent toutes les deux vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. Pour en avoir une idée sur cette limite j'introduis le développement suivant :

$$e^x = \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad e^1 = \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1^k}{k!}$$

$$\Longrightarrow \quad e = \lim_{n\infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}\right) = e \\ \lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+1)!}\right) = e \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 33 :

$$On \ a \quad : \quad \forall k \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} 0 \leq \sum_{k=0}^{k=n} u_k \leq \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq \mathcal{S}_n \leq \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq \mathcal{S}_n \leq 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) < 2$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq \mathcal{S}_n \leq 2$$

$$Or \ on \ a \quad : \quad \mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n+1} u_k - \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} u_k - \sum_{k=0}^{k=n} u_k + u_{n+1} = u_{n+1} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \mathcal{S}_{n+1} \leq \mathcal{S}_n$$

$$\Longrightarrow \quad (\mathcal{S}_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \ \ est \ \ croissante$$

Donc $(\mathcal{S}_n)$ est convergente car croissante et étant majorée par 2.

Solution N° 34 :

1) Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $a_{n+1} - a_n = \mathcal{S}_{2n+4} - \mathcal{S}_{2n}$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n+4} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2n+4} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+5}}{2n+4}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad a_{n+1} > a_n$$

$$\Longrightarrow \quad (a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*} \ \ est \ \ strictement \ \ croissante$$

■ $b_{n+1} - b_n = \mathcal{S}_{2n+3} - \mathcal{S}_{2n+1}$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \sum_{k=2n+2}^{k=2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3}$$

$$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad b_{n+1} < b_n$$

$$\Longrightarrow \quad (b_n)_{n\geq 1} \ \ est \ \ strictement \ \ décroissante$$

■ $b_n - a_n = \mathcal{S}_{2n+1} - \mathcal{S}_{2n}$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\infty} \ (b_n - a_n) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Récapitulation :

$$\begin{cases} (a_n)_{n\geq 1} \ \ est \ \ strictement \ \ croissante \\ (b_n)_{n\geq 1} \ \ est \ \ strictement \ \ décroissante \\ \lim\limits_{n\infty} \ (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (a_n) \ \ et \ \ (b_n) \ \ sont \ \ adjacentes$$

Donc ces deux limites convergent vers une même limite réelle l

2) Quand n tend vers l'infini alors :

$$\lim_{n\infty} \ (\mathcal{S}_n) = \lim_{n\infty} \ (\mathcal{S}_{2n}) = \lim_{n\infty} (\mathcal{S}_{2n+1}) = l$$

Vous aurez l'occasion de montrer que cette limite l n'est autre que $\ln 2$ et ce serait exactement dans le cours des séries numériques.

Solution N° 35 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n \geq \sqrt{n}$

L'initialisation :

On a : $u_1 = 1 \geq \sqrt{1}$
Donc l'instance $Q(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq \sqrt{n}$

■ $u_n \geq \sqrt{n} \ \Longrightarrow \ u_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

■ $n > 0 \quad \Rightarrow \quad n+1 > 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (n+1) + \left(\frac{1}{n+1}\right) - 2 < n$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2 < \left(\sqrt{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} > \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad Q(n+1) \ \ est \ \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \ \ est \ \ vraie \\ Q(n) \quad \Rightarrow \quad Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n \geq \sqrt{n}$

2) Comme $u_n \geq \sqrt{n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$

$$Et \ \ comme \quad \lim_{n\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que : $\lim(u_n) = +\infty$
C'est à dire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente

Solution N° 36 :

1) On a $P_n(x)$ est continue sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ Car c'est un polynôme et on a encore :

$$\begin{cases} P_n(0) = -1 < 0 \\ P_n(1) = n-1 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_n(0) \times P_n(1) < 0$$

Donc d'après le TVI on déduit que :

$$\exists \ \alpha_n \epsilon \ [0,1] \quad : \quad P_n(\alpha_n) = 0$$

$$Et \ \ comme \ \ : \quad \begin{cases} Et \ \ P_n(0) = -1 \neq 0 \\ Et \ \ P_n(1) = n-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$Et \ \ comme \ P_n \ \ est \ \ strict \ \ \nearrow \ \ sur \ \ [0,1]$$
$$P_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 1 > 0$$

Alors on peut en déduire que :

$$\exists! \ \alpha_n \ \epsilon \ ]0,1[\quad : \quad P_n(\alpha_n) = 0 \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit :

■ $\alpha_n \ \epsilon \ ]0,1[\quad \Rightarrow \quad \alpha_n > 0$

$$\Rightarrow \quad (\alpha_n)^{n+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha_n)^{n+1} + 0 > 0$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha_n)^{n+1} + P_n(\alpha_n) > 0$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha_n)^{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_n)^k > 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad -1+\sum_{k=1}^{k=n+1}(\alpha_n)^k > 0$$

$$\Rightarrow \quad P_{n+1}(\alpha_n) > 0$$

$$\Rightarrow \quad P_{n+1}(\alpha_n) > \underbrace{P_{n+1}(\alpha_{n+1})}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_n > \alpha_{n+1} \quad car\ P_{n+1}\ est\ une\ biject\ \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*} \quad est \quad décroissante$$

La suite $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est convergente car décroissante et étant minorée par 0

3) On aurait besoin de déterminer la valeur exacte de α_2 on a :

$$P_2(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \Delta = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \epsilon \quad]0,1[$$

$$Voici\ pour\ quoi \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \epsilon \quad]0,1[$$

$$1<5<9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \quad 1<\sqrt{5}<3$$

$$\Rightarrow \quad 0<-1+\sqrt{5}<2$$

$$\Rightarrow \quad 0<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \epsilon \quad]0,1[$$

$$4)\ On\ a \quad : \quad P_n(x)=-1+\sum_{k=1}^{k=n}x^k$$

$$\Leftrightarrow \quad P_n(x)=-1+\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)x^1 \quad ; \quad x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad P_n(x)=\frac{x-1}{1-x}+\frac{x-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad P_n(x)=\frac{2x-1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad P_n(x)=\frac{x^{n+1}-2x+1}{x-1} \quad ; \quad x\neq 1$$

5) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ et on procède ainsi :

$$P_n(\alpha_n)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\alpha_n)^{n+1}-2\alpha_n+1}{\alpha_n-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha_n)^{n+1}-2\alpha_n+1=0 \quad ; \quad \alpha_n\neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha_n)^{n+1}-2\alpha_n+1=0 \quad ; \quad \forall n\geq 2$$

$$6)\ On\ a \quad : \quad P_n(x)=\frac{x^{n+1}-2x+1}{x-1} \quad ; \quad x\neq 1$$

$$\Rightarrow \quad P_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow \quad P_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-\left(\frac{1}{2}\right)}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0$$

$$\Rightarrow \quad P_n\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

$$\Rightarrow \quad P_n\left(\frac{1}{2}\right)<P_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow \quad P_n^{-1}\left(P_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)<P_n^{-1}\left(P_n(\alpha_n)\right) \quad ; \quad P_n^{-1}\ \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \alpha_n \quad \Rightarrow \quad 1 < 2\alpha_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 < 2\alpha_n - 1} \quad \rightsquigarrow (1)$$

$$Or\ on\ a \quad : \quad n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n \leq \alpha_2$$

Car la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

$$\Rightarrow \quad \alpha_n \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad car \quad \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha_n \leq -1+\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2\alpha_n - 1 \leq -2+\sqrt{5}} \quad \rightsquigarrow (2)$$

$$Comparons \quad \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad et \quad (-2+5)$$

$$On\ a \quad \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - (-2+5) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$9 > 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9} > \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad 3 > \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad 3-\sqrt{5} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - (-2+5) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) > (-2+5)} \quad \rightsquigarrow (3)$$

$$(2)\ et\ (3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{2\alpha_n - 1 < \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} (4)$$

$$(1)\ et\ (4) \quad \Rightarrow \quad 0 < 2\alpha_n - 1 < \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad 0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2 \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

7) $On\ pose \quad \lim_{n\infty}(\alpha_n) = l$

$$On\ a \quad : \quad 0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \alpha_n < \frac{\alpha_2+1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \alpha_n < \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < (\alpha_n)^{n+1} < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^{n+1}$$

On remarque que :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \quad et \quad \lim_{n\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^{n+1} = 0$$

$$Car \ -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad et \quad -1 < \frac{\sqrt{5}+1}{4} < 1$$

Donc d'après le critère de comparaison :

$$\lim_{n\infty} (\alpha_n)^{n+1} = 0$$

$$On\ a\ encore \quad : \quad (\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$$

Par passage aux limites on trouve :

$$\lim_{n\infty}((\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(\alpha_n)^{n+1} - 2\lim_{n\infty}(\alpha_n) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 - 2\,l + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(\alpha_n) = \frac{1}{2}$$

Solution N° 37 :

1) c'est un calcul simple à réaliser :

$$2-\frac{1}{n+1}=\frac{2(n+1)+1}{n+1}=\frac{2n+3}{n+1}=u_n$$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $n\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad 2n+3>0 \quad et \quad n+1>0$

$$\Longrightarrow\quad \frac{2n+3}{n+1}>0$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{u_n>0} \rightsquigarrow (1)$$

■ $n\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad n+1\geq 1$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{n+1}\leq 1$$

$$\Longrightarrow\quad 2+\frac{1}{n+1}\leq 3$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{u_n\leq 3} \rightsquigarrow (2)$$

$(1)\ et\ (2) \quad\Longrightarrow\quad 0<u_n\leq 3$

$$\Longrightarrow\quad (u_n)\ est\ born\acute{e}e$$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède ainsi :

■ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(n+1)+3}{n+2}-\dfrac{2n+3}{n+1}$

$$=\frac{2n+5}{n+2}-\frac{2n+3}{n+1}$$

$$=\frac{(2n+5)(n+1)-(n+2)(2n+3)}{(n+2)(n+1)}$$

$$=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}<0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1}<u_n$$

$$\Longrightarrow\quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ strictement\ d\acute{e}croissante$$

Autre Méthode :

■ $n\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad n+2>n+1$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow\quad 2+\frac{1}{n+2}<2+\frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow\quad u_{n+1}<u_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow\quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ strictement\ d\acute{e}croissante$$

4) d'abord (u_n) est convergente car décroissante et étant minorée par 0 et on a :

$$\lim_{n\infty}(u_n)=\lim_{n\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)=\lim_{n\infty}\frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

Solution N° 38 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $n\geq 1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\sqrt{n}\geq 1} \rightsquigarrow (1)$

■ $n\geq 1 \quad\Longrightarrow\quad n+1\geq 2>1$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{\sqrt{n+1}\geq 1} \rightsquigarrow (2)$$

■ $(1)+(2) \implies \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 2$

$$\implies 0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies 0 < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < 0$$

Car : $n < n+2 \implies \sqrt{n}-\sqrt{n+2} < 0$

3) D'abord (u_n) est convergente car décroissante et étant minorée par 0 et on a :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 39 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n > 3$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 6 > 3$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 3$

■ $P(n)\ est\ vraie \implies u_n > 3$

$$\implies \frac{1}{u_n} < \frac{1}{3}$$

$$\implies \frac{3}{u_n} < 1$$

$$\implies 4-\frac{3}{u_n} > 4-1$$

$$\implies u_{n+1} > 3$$

$$\implies P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \implies P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n > 3$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit

■ $u_{n+1}-u_n = 4-\dfrac{3}{u_n}-u_n$

$$= \frac{4u_n-3-u_n^2}{u_n}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{-(u_n - 3)(u_n - 1)}{u_n} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} < u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ strictement \ décroissante$$

3) comme (u_n) est décroissante Alors :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n < u_{n-1} < u_{n-2} < \cdots < u_0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n < u_0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n < 6$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n) \ est \ majorée \ par \ 6$$

4) la suite (u_n) est convergente car décroissante et étant minorée par 3. C'est-à-dire $u_n > 3$.

5) $u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad f(x) = 4 - \dfrac{3}{x}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^*$

Et on a $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+ \quad et \quad u_0 = 6 \,\epsilon\, \mathbb{R}^+$

On a vu que (u_n) est convergente vers une limite réelle $l \,\epsilon\, \mathbb{R}^+$ car $3 < u_n < 6$
Donc l vérifie l'équation $f(l) = l$.

$$\Longleftrightarrow \quad l = 4 - \frac{3}{l} \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad l - 4 + \frac{3}{l} = 0 \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{l^2 - 4l + 3}{l} = 0 \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (l-3)(l-1) = 0 \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad l \,\epsilon\, \{3\,;1\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad l = 3 \quad car \quad 3 \leq l \leq 6$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 3$$

Solution N° 40 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) \ : \ \frac{1}{4} < u_n < 9$

L'initialisation :
On a : $\frac{1}{4} < u_0 = 4 < 9$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $\frac{1}{4} < u_n < 9$.

■ $Q(n) \ est \ vraie \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{4} < u_n < 9$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} < \sqrt{u_n} < 3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{13}{2} < 6 + \sqrt{u_n} < 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{4} < \frac{13}{2} < u_{n+1} < 9$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \ est \ vraie \\ Q(n) \ \Longrightarrow \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{1}{4} < u_n < 9$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = 6 + \sqrt{u_n} - u_n$

On pose : $\varphi(x) = 6 + \sqrt{x} - x \quad ; \quad \forall x \geq 0$

La fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car c'est la somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$

$$\varphi'(x) = \left(6 + \sqrt{x} - x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad \forall x\epsilon\mathbb{R}_*^+$$

■ $x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}} \leq 0$

$$\Rightarrow \varphi'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est décroissante sur } \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$$

$On\ a \ : \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{1}{4} < u_n < 9$

$$\Rightarrow \varphi(9) < \varphi(u_n) < \varphi(1/4) \ ; \ \varphi \searrow \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$$

$$\Rightarrow \varphi(9) < \varphi(u_n)$$

$$\Rightarrow 9 < 6 + \sqrt{u_n} - u_n$$

$$\Rightarrow 0 < 9 < 6 + \sqrt{u_n} - u_n$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} - u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) On a : $u_{n+1} = f(u_n)$

Avec $f(x) = 6 + \sqrt{x} \quad ; \quad \forall x \geq 0$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$
et on a : $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$
et encore que : $u_0 = 4 \epsilon \mathbb{R}^+$

la suite (u_n) est convergente car croissante et étant majorée par 9 et soit $l = \lim(u_n)$ alors $l \epsilon\mathbb{R}^+$ vérifie l'équation :

$$\Leftrightarrow \quad 6 + \sqrt{l} = l$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 + \sqrt{l} - l = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(l) = \varphi(9)$$

$$\Leftrightarrow \quad l = 9 \quad car\ \varphi\ est\ bijective$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty} (u_n) = 9}$$

Solution N° 41 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(n)$ définie ainsi : $R(n) \ : \ 0 < u_n < 1$

L'initialisation :

On a : $0 < u_1 = \frac{1}{2} < 1$

Donc l'instance $R(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $R(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n < 1$

■ $R(n)\ est\ vraie \quad \Rightarrow \quad 0 < u_n < 1$

$$\Rightarrow 0 < n\,u_n < n \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 < n\,u_n + 1 < n + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n\,u_n+1} < 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{n\,u_n+1}{n+1} < \frac{n\,u_n+1}{n\,u_n+1} < \frac{n\,u_n+1}{1}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow \quad R(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} R(1) \ est \ vraie \\ R(n) \ \Rightarrow \ R(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $0 < u_n < 1$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et on procède ainsi :

■ $$u_{n+1} - u_n = \frac{n\,u_n+1}{n+1} - u_n$$

$$= \frac{n\,u_n + 1 - n\,u_n - u_n}{n+1}$$

$$= \frac{1-u_n}{n+1} > 0 \quad car \quad u_n < 1$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\geq 1} \ est \ strictement \ croissante$$

3) Soit $n \geq 1$ et on procède comme suit

■ $$u_n - 1 = \frac{nu_n+1}{n+1} - 1 = \frac{nu_n + 1 - n - 1}{n+1}$$

$$= \frac{nu_n - n}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)(u_n - 1)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad : \quad \frac{u_{n+1}-1}{u_n - 1} = \frac{n}{n+1}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) d'après cette dernière formule on a :

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{u_2-1}{u_1-1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{u_3-1}{u_2-1}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{u_4-1}{u_3-1}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{u_n-1}{u_{n-1}-1}\right) = \frac{n-1}{n}$$

On multiplie ces égalités côte à côte on obtient par la suite :

$$\frac{(u_2-1)(u_3-1)(u_4-1)\cdots(u_n-1)}{(u_1-1)(u_2-1)(u_3-1)\cdots(u_{n-1}-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}$$

En prenant en considération des facteurs qui vont disparaître par le processus de réduction On obtient alors

$$\frac{u_n-1}{u_1-1} = \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_n-1}{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n - 1 = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{-1}{2n} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{-1}{2n} + 1\right) = 1$$

Solution N° 42 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $0 < u_n < \frac{1}{4}$

L'initialisation :

On a : $0 < u_1 = \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

Donc l'instance $Q(1)$ est vraie.

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n < \frac{1}{4}$

■ $$Q(n) \ est \ vraie \implies 0 < u_n < \frac{1}{4}$$

$$\implies 0 < u_n < \frac{1}{4} \quad et \quad \frac{3}{4} < u_n + \frac{3}{4} < 1$$

$$\implies 0 < u_n\left(u_n + \frac{3}{4}\right) < 1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\implies 0 < (u_n)^2 + \frac{3}{4}(u_n) < \frac{1}{4}$$

$$\implies 0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$$

$$\implies Q(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \ est \ vraie \\ Q(n) \implies Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ 0 < u_n < \frac{1}{4}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $$u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 + \frac{3}{4}u_n - u_n$$

$$= (u_n)^2 + \frac{1}{4}u_n$$

$$= u_n\left(u_n - \frac{1}{4}\right) < 0$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} < u_n$$

$$\implies (u_n)_n \ est \ strictement \ décroissante$$

3) On a : $\forall n \geq 1 \ ; \ u_{n+1} = f(u_n)$

$$Avec \ : \ f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ car c'est un polynôme à coefficients réels. On a aussi $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ et c'est très facile à la démontrer en remarquant que : $0 < u_n < \frac{1}{4}$ et $u_n \in \mathbb{R}^+$

$$On \ a \ aussi \ : \ u_1 = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}^+$$

On a encore (u_n) converge car décroissante et étant minorée par 0.

$$Soit \quad l = \lim_{n\infty}(u_n)$$

$$On \ a \quad l \in \mathbb{R}^+ \ car \quad 0 < u_n < \frac{1}{4}$$

Donc l vérifie l' équation $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow l^2 + \frac{3}{4}l = l$$

$$\Leftrightarrow l^2 + \frac{3}{4}l - l = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 + \frac{1}{4}l = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad l\left(l-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad l \in \left\{0\,,\frac{1}{4}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad l=0 \quad car \quad (u_n) \ est \ \searrow$$

Solution N° 43 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n \geq \sqrt{3}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 2 \geq \sqrt{3}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq \sqrt{3}$

■ $P(n)\ est\ vraie \quad \Rightarrow \quad u_n \geq \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad (u_n)^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(u_n)^2}{3} \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(u_n)^2}{3}+2 \geq 3$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1) \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n \geq \sqrt{3}$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1}-u_n = \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}-u_n$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}-u_n\right)\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}+u_n\right)}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}+u_n}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}\right)^2-(u_n)^2}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}+u_n}$$

$$= \frac{\frac{(u_n)^2}{3}+2-(u_n)^2}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}+u_n}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(3-u_n^2)}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3}+2}+u_n} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1}-u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ décroissante$$

3) On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3}+2} \quad ; \quad \forall x\epsilon\mathbb{R}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions sur $\mathbb{R}^+$.

On a aussi $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ facile à démontrer car $\forall x \epsilon \mathbb{R}$; $f(x) \epsilon \mathbb{R}^+$

La suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est convergente car décroissante et étant minorée par $\sqrt{3}$ et sa limite $l \epsilon \mathbb{R}^+$ car $u_n \geq \sqrt{3}$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$

On a encore $u_0 = \frac{1}{5} \epsilon \mathbb{R}^+$

Donc la limite $l = \lim(u_n)$ vérifie l'équation : $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{l^2}{3} + 2} = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2}{3} + 2 = l^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - 2l^2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(3 - l^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - l^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow l = +\sqrt{3} \epsilon \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\infty} (u_n) = \sqrt{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 44 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $1 \leq u_n < 2$

L'initialisation :

On a : $1 \leq u_0 = 1 < 2$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $1 \leq u_n < 2$

■ $P(n)$ *est vraie* $\Rightarrow 1 \leq u_n < 2$

$$\Rightarrow 3 \leq u_n + 2 < 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $1 \leq u_n < 2$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n$

$$= \frac{(\sqrt{2 + u_n} - u_n)(\sqrt{2 + u_n} + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{2 + u_n})^2 - (u_n)^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

$$= \frac{2 + u_n - (u_n)^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n) \ est \ strictement \ croissante$$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - 2 = \sqrt{2+u_n} - 2$

$$= \frac{(\sqrt{2+u_n} - 2)(\sqrt{2+u_n} + 2)}{\sqrt{2+u_n} + 2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2+u_n}\ )^2 - 2^2}{\sqrt{2+u_n} + 2}$$

$$= \frac{u_n - 2}{\sqrt{2+u_n} + 2}$$

$$\Longrightarrow \quad (u_{n+1} - 2) = \frac{1}{\sqrt{2+u_n} + 2}(u_2 - 2)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(u_{n+1} - 2)}{(u_2 - 2)} = \frac{1}{\sqrt{2+u_n} + 2} \quad ; \quad u_n \neq 2$$

■ $\sqrt{2+u_n} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2+u_n} + 2 \geq 2$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2+u_n} + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2 - u_{n+1}}{2 - u_n} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad (2 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(2 - u_n) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) 1ère Méthode : la méthode descendante

$$On \ a \quad : \quad (2 - u_n) \leq \frac{1}{2}(2 - u_0)$$

$$\hookrightarrow \quad (2 - u_2) \leq \frac{1}{2}(2 - u_1) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2 - u_0)$$

$$\hookrightarrow \quad (2 - u_3) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2 - u_0)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad (2 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - 1)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < (2 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

2ème Méthode : la récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) \ : \ 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

<u>L'initialisation</u> :

On a : $0 < u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

<u>L'hérédité</u> :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

■ $Q(n) \ est \ vraie \quad \Longrightarrow \quad 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{2}(2 - u_n) \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{2}(2-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < 2-u_{n+1} < \frac{1}{2}(2-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < 2-u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1) \ \ est \ \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \ \ est \ \ vraie \\ Q(n) \ \ \Longrightarrow \ \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $0 < 2-u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5) On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec :

$$f(x) = \sqrt{2+x} \quad ; \quad \forall x \geq -2$$

On a f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset]-2,+\infty[$ Car c'est une composition bien définie de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

On a aussi $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ facile à démontrer car $\forall x \geq 0$; $f(x) \geq 0$

On a aussi : $u_0 = 1 \, \epsilon \, \mathbb{R}^+$

Et on finalement (u_n) est une suite convergente car croissante et étant majorée par 2 et sa limite $l \, \epsilon \, \mathbb{R}^+$

Donc on en déduite que l vérifie l'équation : $f(l) = l$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{2+l} = l$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2+l = l^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad l^2 - l - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (l-2)(l+1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad l \, \epsilon \, \{ 2 \, ; \, -1 \}$$

$$\Longleftrightarrow \quad l = 2 \ \epsilon \ \mathbb{R}^+$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 2$$

Solution N° 45 :

1) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$(2-u_{n+1}) = 2 - \frac{3u_n^2+2}{3u_n+1}$$

$$= \frac{6u_n + 2 - 3u_n^2 - 2}{3u_n+1}$$

$$= \frac{6u_n - 3u_n^2}{3u_n+1}$$

$$= \left(\frac{3u_n}{3u_n+1}\right)(2-u_n)$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $0 < u_n < 2$

L'initialisation :

On a : $0 < u_1 = 1 < 2$

Donc l'instance $Q(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n < 2$

■ $$Q(n) \ \ est \ \ vraie \quad \Longrightarrow \quad 0 < u_n < 2$$

$$\Longrightarrow \quad u_n > 0 \quad et \quad u_n < 2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad \frac{3u_n}{1+3u_n} > 0 \quad et \quad 2-u_n > 0$$

$$et \quad \frac{3u_n^2+2}{3u_n+1} > 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{3u_n}{1+3u_n}\right)(2-u_n) > 0 \quad et \quad \frac{3u_n^2+2}{3u_n+1} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad (2-u_{n+1}) > 0 \quad et \quad u_{n+1} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} < 2 \quad et \quad u_{n+1} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 2$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \ est \ vraie \\ Q(n) \ \Longrightarrow \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \;;\; 0 < u_n < 2$

3) Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $$\frac{3u_n}{1+3u_n} - \frac{6}{7} = \frac{21u_n - 6(1+3u_n)}{7(1+3u_n)}$$

$$= \frac{3u_n - 6}{7(1+3u_n)} = \frac{3(u_n-2)}{7(1+3u_n)} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{3u_n}{1+3u_n} - \frac{6}{7} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

4) $On \ a \ : \ (2-u_{n+1}) = \left(\frac{3u_n}{3u_n+1}\right)(2-u_n)$

$$Et \ on \ a \ : \ \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\Longrightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \ ; \ \frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n) < \frac{6}{7}(2-u_n)$$

$$\Longrightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \ ; \ (2-u_{n+1}) < \frac{6}{7}(2-u_n)$$

Et par la méthode descendante on a :

$$\hookrightarrow \quad (2-u_2) < \frac{6}{7}(2-u_1)$$

$$\hookrightarrow \quad (2-u_3) < \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7}(2-u_1)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad (2-u_n) < \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} (2-u_1)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < 2-u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

Autre Méthode : la récurrence

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(n)$ définie ainsi : $R(n) \ : \ 0 < 2-u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

L'initialisation :

On a : $0 < 2-u_1 \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{1-1}$

Donc l'instance $R(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $R(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < 2-u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

■ $R(n) \ est \ vraie \ \Longrightarrow \ 0 < 2-u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{6}{7}(2-u_n) \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < 2-u_{n+1} < \frac{6}{7}(2-u_n) \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < 2-u_{n+1} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad R(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} R(1) \ est \ vraie \\ R(n) \ \Longrightarrow \ R(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < 2-u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

5) $comme \ : \quad 0 < (2-u_n) \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$

$Et \ comme \ \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} = 0 \ car \ -1 < \frac{6}{7} < 1$

$Alors \ : \ \lim\limits_{n\infty}(2-u_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{n\infty} u_n = 2$

Solution N° 46 :

1) calcul de quelques termes de la suite

u_1	u_2	u_3	u_4
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

2) $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

3) $$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{n}{n+1}$$

4) $$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{1+0} = 1$$

Solution N° 47 :

1) On peut remarquer facilement que :

■ $2n+1-2\sqrt{n(n+1)}$

$$= \left(\sqrt{n}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} + \left(\sqrt{n+1}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\,\right)^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left|\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \mathcal{S}_n = \sqrt{n+1}$$

2) $\lim\limits_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = \lim\limits_{n\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

3) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty} \sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}$

$$= \lim_{n\infty} \sqrt{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\infty} \left|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0$$

Solution N° 48 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit

$$u_{n+1}-u_n = \left(-2(n+2)^2+3\right)-\left(-2n^2+3\right)$$

$$= -2(n+1)^2+2n^2 = -4n-2 < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} < u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{est strictement décroissante}$$

2) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(-2n^2+3\right) = -\infty$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 49 :

1) calcul de quelques termes de la suite

u_1	u_2	u_3
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$

2) soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

- $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\geq 1} \ \textit{est strictement croissante}$$

3) soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède ainsi :

$$n-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right) = n-\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$= n-\sum_{k=1}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

$$= n-\sum_{k=1}^{k=n}1+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

$$= n-n+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} = u_n$$

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(n)$ définie ainsi : $R(n)$: $(n+1)u_n - n$

L'initialisation :

On a : $1 = (1+1)u_1 - 1$

Donc l'instance $R(1)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $R(n)$ soit vraie. C-à-d $\mathcal{S}_n = (n+1)u_n - n$

■ $R(n)\ est\ vraie \implies \mathcal{S}_n = (n+1)u_n - n$

$$\implies \mathcal{S}_n + u_{n+1} = nu_n + u_n - n + u_{n+1}$$

$$\implies \mathcal{S}_{n+1} = nu_n + u_n - n + u_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\implies \mathcal{S}_{n+1} = (n+2)u_n + \frac{1}{n+1} - n$$

$$\implies \mathcal{S}_{n+1} = (n+2)u_n + \frac{1-n^2-n}{n+1} \rightsquigarrow (1)$$

■ $Or\ on\ a\ :\ (n+2)u_{n+1} - (n+1)$

$$= (n+2)\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right) - (n+1)$$

$$= (n+2)u_n + \frac{n+2}{n+1} - (n+1)$$

$$= (n+2)u_n + \frac{(n+2)-(n+1)^2}{n+1}$$

$$= (n+2)u_n + \frac{1-n^2-n}{n+1} \rightsquigarrow (2)$$

$(1)\ et\ (2) \implies \mathcal{S}_{n+1} = (n+2)u_{n+1} - (n+1)$

$$\implies R(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} R(1)\ est\ vraie \\ R(n) \implies R(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ \mathcal{S}_n = (n+1)u_n - n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 50 :

1) calcul de quelques termes de la suite

u_0	u_1	u_2
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{40}{41}$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)\ :\ 0 < u_n < 1$

L'initialisation :
On a : $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n < 1$

■ $P(n)\ est\ vraie \implies 0 < u_n < 1$

$$\implies 2u_n > 0 \quad et \quad 1 + (u_n)^2 > 0$$

$$\implies \frac{2u_n}{1+(u_n)^2} > 0 \rightsquigarrow (1)$$

$$Or\ on\ a\ :\ \frac{2u_n}{1+(u_n)^2} - 1 = \frac{2u_n - 1 - (u_n)^2}{1+(u_n)^2}$$

$$= \frac{-(u_n-1)^2}{1+(u_n)^2} < 0$$

$$\implies \frac{2u_n}{1+(u_n)^2} - 1 < 0$$

$$\implies \frac{2u_n}{1+(u_n)^2} < 1 \rightsquigarrow (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \implies 0 < \frac{2u_n}{1+(u_n)^2} < 1$$

$$\implies 0 < u_{n+1} < 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \ \Longrightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n < 1$

3) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{1+(u_n)^2} - u_n$

$$= u_n \left(\frac{2}{1+(u_n)^2} - 1 \right)$$

$$= u_n \left(\frac{2 - 1 - (u_n)^2}{1+(u_n)^2} \right)$$

$$= u_n \left(\frac{1 - (u_n)^2}{1+(u_n)^2} \right)$$

$$= \frac{u_n(1-u_n)(1+u_n)}{1+(u_n)^2} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \ est \ strictement \ croissante$$

4) comme (u_n) est strictement croissante Alors : $\forall n \geq 0 \quad ; \quad u_n \geq u_0$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq \frac{1}{2}$$

5) $On \ a$: $u_{n+1} = f(u_n)$ avec :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ car c'est le quotient de deux fonctions bien définies et continues sur $\mathbb{R}^+$. En plus On a $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ facile à démontrer car $\forall x \geq 0 \ ; \ \frac{2x}{1+x^2} \geq 0$

$$On \ a \ encore \quad u_0 = \frac{1}{2} \epsilon \mathbb{R}^+$$

Et on a la suite (u_n) est convergente car croissante et étant majorée par 1 et sa limite $l \epsilon \mathbb{R}^+ \ car \ \ 0 < u_n < 1$

Donc la limite l vérifie : $f(l) = l$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2l}{1+l^2} = l$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2l}{1+l^2} - l = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{l(1-l)(1+l)}{1+l^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad l \epsilon \{ 0 ; 1 ; -1 \}$$

$$\Longleftrightarrow \quad l \epsilon \{ 0 ; 1 \} \quad car \quad l \epsilon \mathbb{R}^+$$

$$\Longleftrightarrow \quad l = 1 \quad car \quad car \ (u_n) \ est \ \nearrow$$

Solution N° 51 :

1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{3^{n+1}}{n+1} \right) \times \left(\dfrac{n}{3^n} \right) = \dfrac{3n}{n+1}$

2) $On \ a$: $\left(\dfrac{3n}{n+1} \right) - 1 = \dfrac{2n-1}{n+1}$

$$On \ remarque \ que \ : \ \forall n \geq 1 \ ; \ \frac{2n-1}{n+1} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad \frac{3n}{n+1} > 1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad u_{n+1} > u_n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\geq 1} \ est \ strictement \ croissante$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $3^n > n^2$

L'initialisation :
On a : $3^2 > 2^2$
Donc l'instance $P(2)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n \geq 2$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $3^n > n^2$

■ $P(n) \ est \ vraie \quad \Longrightarrow \quad 3^n > n^2$

$$\Longrightarrow \quad 3^{n+1} > 3n^2$$

$$\Longrightarrow \quad 3^{n+1} - (n+1)^2 > 3n^2 - (n+1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 3^{n+1} - (n+1)^2 > 3n^2 - 2n - 1$$

$$3^{n+1} - (n+1)^2 > 2\left(n - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(n - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

■ $n \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} n - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \geq 2 - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ n - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \geq 2 - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} n - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \geq \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} > 0 \\ n - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \geq \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad 2\left(n - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(n - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow \quad 3^{n+1} - (n+1)^2 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad 3^{n+1} > (n+1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(2) \ est \ vraie \\ P(n) \ \Longrightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 3^n > n^2$

4) ■ $\forall n \geq 2 \quad ; \quad 3^n > n^2$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 2 \quad ; \quad \frac{3^n}{n} > \frac{n^2}{n} \quad ; \quad car \ n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 2 \quad ; \quad u_n > n$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = +\infty \quad car \quad \lim_{n\infty} n = +\infty$$

Solution N° 52 :

1) on a d'après la définition de la suite numérique $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$:

$$u_{n+2} = 2u_{n-1} - u_n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+1} = v_n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ constante$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = u_1 - u_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = 2$$

2) On a : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $v_n = 2$

$$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n = 2 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = u_n + 2 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est\ arithmétique\ de\ raison\ 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p\epsilon\mathbb{N}\end{matrix} \quad ; \quad u_n = u_p + 2(n-p)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = u_0 + 2(n-0) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = 2n+1 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est\ strictement\ croissante$$

3) $\lim\limits_{n\infty} (u_n) = \lim\limits_{n\infty}(1+2n) = +\infty$

Solution N° 53 :

1) $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 6n^4}{2n^2+5}\right)$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n^4\left(\frac{3}{n^2} - 6\right)}{n^2\left(2 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\infty} \left(\frac{\frac{3}{n^2} - 6}{2 + \frac{5}{n^2}}\right) n^2$$

$$= \left(\frac{0-6}{2+0}\right)(+\infty) = (-3)(+\infty) = -\infty$$

2) $\lim\limits_{n\infty} \left(Arctan(n+1) - Arctan(n)\right)$

$$= \lim_{n\infty} Arctan(n+1) - \lim_{n\infty} Arctan(n)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

3) $\lim\limits_{n\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1} \right)$

$$= \lim_{n\infty} \left((n+1)^{\frac{1}{3}} - (n-1)^{\frac{1}{3}}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{n\infty} \frac{\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left((n-1)^{\frac{1}{3}}\right)^3}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n^2-1)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{(n+1) - (n-1)}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n^2-1)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{2}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n^2-1)^{\frac{1}{3}} + (n-1)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

4) $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{2 - 8n^2 + 5n^3}{7n^3 - 3}\right)$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n^3\left(\frac{2}{n^3} - \frac{8}{n} + 5\right)}{n^3\left(7 - \frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\infty} \left(\frac{\frac{2}{n^3} - \frac{8}{n} + 5}{7 - \frac{3}{n^3}}\right)$$

$$= \frac{0-0+5}{7-0} = \frac{5}{7}$$

5) $\lim\limits_{n\infty} Arctan\left(\sqrt[3]{n+6} \right)$

$$= \lim_{n\infty} Arctan\left((n+6)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{m\infty \\ m=(n+6)^{\frac{1}{3}}}} Arctan(m) = \frac{\pi}{2}$$

6) $\lim\limits_{n\infty} \left(\sqrt{n^2+n-1} - n\right)$

$$= \lim_{n\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n-1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n-1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n-1} + n\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n-1}\right)^2 - n^2}{\left(\sqrt{n^2+n-1} + n\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n^2+n-1-n^2}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+n}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n-1}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+n}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1-0}{\sqrt{1+0-0}+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Solution N° 54 :

1) Rappel : $\forall n \epsilon \mathbb{R}$; $|\cos x| < 1$

Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit :

■ $|u_n| = \left|\frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{|\sqrt{n}|} \cdot |\cos(3n)|$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot |\cos(3n)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $comme$: $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$; $0 < |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$Et\ comme$ $\lim_{n\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que : $\lim(u_n) = 0$

Solution N° 55 :

1) $\lim_{n\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \lim_{n\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \lim_{n} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$= 0 + (+\infty) = +\infty$$

2) $\lim_{n\infty} \left(\frac{-5}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n = \lim_{n\infty} \left(\frac{-5}{3}\right)^n + \lim_{n} \left(\frac{2}{9}\right)^n$

$$= n'existe\ pas\ \ car\ \frac{-5}{3} < -1$$

3) $\lim_{n\infty} \left(\frac{7^n - 5^n}{3^n}\right) = \lim_{n\infty} \frac{7^n\left(1-\frac{5^n}{7^n}\right)}{3^n}$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^n \cdot \left(1-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right)$$

$$= (+\infty)(1-0) = +\infty$$

4) $\lim_{n\infty} \left(\left(\frac{7}{3}\right)^n - 2022^n\right)$

$$= \lim_{n\infty} 2022^n \left(\left(\frac{7}{3 \times 2022}\right)^n - 1\right)$$

$$= (+\infty)(0-1) = -\infty$$

5) $\lim_{n\infty} \left(\sqrt[5]{2^n} - \sqrt[3]{2^n}\right)$

$$= \lim_{n\infty} \left(2^{\frac{n}{5}} - 2^{\frac{n}{3}}\right) = \lim_{n\infty} 2^{\frac{n}{3}}\left(2^{\frac{-2n}{15}} - 1\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{n\infty} \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^n \times \left(\left(2^{\frac{-2}{15}}\right)^n - 1\right)$$

$$= (+\infty) \times (0-1) = -\infty$$

$$Car \quad 2^{\frac{1}{3}} > 1 \quad et \quad -1 < 2^{\frac{-2}{15}} < 1$$

6) $$\lim_{n\infty} \left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) = \lim_{n\infty} \frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)$$

$$= 0(0+1) = 0$$

Solution N° 56 :

1) d'abord : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \;;\; -1 \leq (-1)^n \leq 1$

Car : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \;;\; (-1)^n = \pm 1$

$$\Rightarrow \quad n-1 \leq n+(-1)^n \leq 1+n \;;\; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1} \;;\; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1} \;;\; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1} \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

2) $comme \quad \lim_{n\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) = \lim_{n\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right) = 0$

$Alors \;:\; \lim_{n\infty} (u_n - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\infty} u_n = 3$

Remarque :

- $$\lim_{n\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{1}{+\infty+0} = 0$$

- $$\lim_{n\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = \lim_{n\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{1}{+\infty-0} = 0$$

Solution N° 57 :

1) On a $(u_n)\; est \nearrow \; et \; (v_n)\; est \searrow$

$$Car \;:\; u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{n+3} - \frac{2n}{n+2}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+2) - 2n(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{4}{(n+2)(n+3)} > 0$$

$$Et \;:\; v_{n+1} - v_n = 2 + \frac{1}{(n+1)!} - 2 - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{n! - (n+1)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{n! - (n+1)\,n!}{n!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{n!}{n!\,(n+1)!}\big(1-(n+1)\big)$$

$$= \frac{-n!}{n!\,(n+1)!} < 0$$

On a encore la chose suivante :

$$\lim_{n\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\infty}\left(2 + \frac{1}{n!} - \frac{2n}{n+2}\right) = 0$$

La conclusion : $(u_n)\ et\ (u_n)$ sont adjacentes

2) on a $(u_n)\ est\ \nearrow\ et\ (v_n)\ est\ \searrow$ car :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{1}{(n+1)!} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Et on a encore :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On a aussi :

$$\lim_{n\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n\,n!}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont adjacentes

3) on a $(u_n)\ est\ \nearrow\ et\ (v_n)\ est\ \searrow$ car :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0$$

Et encore que :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - u_n - \frac{1}{3n^2}$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2}$$

$$= \frac{3 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2(1-n)}{3n^2(n+1)^2} \leq 0 \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

Et on a encore :

$$\lim_{n\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$$

Donc $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont adjacentes

Solution N° 58 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n = u_{n+2} + u_{n+1} - u_{n+1} - u_n$

$$= 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} - u_{n+1} - u_n$$

$$= 7u_{n+1} + 8u_n - u_n$$

$$= 7u_{n+1} + 7u_n$$

$$= 7(u_{n+1} + u_n) = 7\mathcal{S}_n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n = 7\mathcal{S}_n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \mathcal{S}_{n+1} = 8\mathcal{S}_n$$

$$\Longrightarrow \quad (\mathcal{S}_n) \ \textit{est géométrique de raison } 8$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{matrix} \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_p \cdot 8^{n-p}$$

On prend $p = 0$ on trouve que :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_0 \cdot 8^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \mathcal{S}_n = 2 \cdot 8^n = 2^{3n+1}$$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$w_n = v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1}u_{n+1} - (-1)^n u_n$$

$$= -(-1)^n \cdot u_{n+1} - (-1)^n \cdot u_n$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot u_n$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (u_{n+1} + u_n)$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \mathcal{S}_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) On a : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad w_n = v_{n+1} - v_n$

$$\hookrightarrow \quad w_0 = v_1 - v_0$$
$$\hookrightarrow \quad w_1 = v_2 - v_1$$
$$\hookrightarrow \quad w_2 = v_3 - v_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad w_{n-1} = v_n - v_{n-1}$$

On effectue la somme entre ces égalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui vont disparaître on trouve :

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} = v_n - v_0$$

$$\Leftrightarrow \quad w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} = v_n - 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} = (-1)^n \cdot u_n$$

4) d'abord on a : $\forall k\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad w_k = (-1)^{k+1} \cdot \mathcal{S}_k$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad w_k = (-1)^{k+1} \cdot 2^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad w_k = (-1)^{k+1} \cdot 2^{3k+1} \cdot (-1)^{2k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad w_k = (-1)^{3k+1} \cdot 2^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad w_k = (-2)^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-1)^n \cdot u_n = -2 \sum_{k=0}^{n-1} (-8)^k$$

$$\Leftrightarrow \quad (-1)^n \cdot u_n = -2 \left(\frac{1 - (-8)^{n-1-0+1}}{1 - (-8)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (-1)^n \cdot u_n = -2 \left(\frac{1 - (-8)^n}{9} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{-2}{9}\left(\frac{1}{(-1)^n} - \frac{(-8)^n}{(-1)^n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{-2}{9}\left((-1)^n - 8^n\right)$$

Et on a aussi : $v_n = (-1)^n\, u_n \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; v_n = \frac{-2(-1)^n}{9}\left((-1)^n - 8^n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; v_n = \frac{-2}{9}\left(1 - (-1)^n \cdot 8^n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; v_n = \frac{-2}{9}\left(1 - (-8)^n\right)$$

2) $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\infty} \dfrac{-2}{9}\left(\dfrac{(-1)^n}{2^n} - \dfrac{8^n}{2^n}\right)$

$$= \lim_{n\infty} \frac{-2}{9}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 4^n\right)$$

$$= \frac{-2}{9}\left(0 - (+\infty)\right) = +\infty$$

Solution N° 59 :

1) Calcul de quelques termes de la suite

u_0	u_1	u_2	u_3
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \; : \; 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

L'initialisation :

On a : $1 \leq u_0 = 1 \leq \frac{3}{2}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

■ $P(n)\; est\; vraie \;\; \Rightarrow \;\; 1 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq 1 + u_n \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{5} \leq \frac{1}{1 + u_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{5} + 1 \leq 1 + \frac{1}{1 + u_n} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \frac{7}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1)\; est\; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\; est\; vraie \\ P(n) \;\; \Rightarrow \;\; P(n+1) \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on procède ainsi :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{1 + u_n} - u_n\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{1 + u_{n-1}} - u_{n-1}\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \left(\frac{2-(u_n)^2}{1+u_n}\right) \times \left(\frac{1+u_{n-1}}{2-(u_{n-1})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2-\left(1+\frac{1}{1+u_{n-1}}\right)^2}{1+1+\frac{1}{1+u_{n-1}}}\right) \times \left(\frac{1+u_{n-1}}{2-(u_{n-1})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{(1+u_{n-1})^2-1-2(1+u_{n-1})}{(1+u_{n-1})^2}}{\frac{2(1+u_{n-1})+1}{1+u_{n-1}}}\right) \times \left(\frac{1+u_{n-1}}{2-(u_{n-1})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{(u_{n-1})^2-2}{(1+u_{n-1})^2}}{\frac{3+2u_{n-1}}{1+u_{n-1}}}\right) \times \left(\frac{1+u_{n-1}}{2-(u_{n-1})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{(u_{n-1})^2-2}{(1+u_{n-1})^2}\right)\left(\frac{1+u_{n-1}}{3+2u_{n-1}}\right)\left(\frac{1+u_{n-1}}{2-(u_{n-1})^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{3+2u_{n-1}}$$

■ $1 \leq u_{n-1} \leq \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \leq 2u_{n-1} \leq 3$

$$\Rightarrow \quad 5 \leq 3+2u_{n-1} \leq 6$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3+2u_{n-1}} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3+2u_{n-1}} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{-1}{3+2u_{n-1}}\right| = \frac{1}{3+2u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{-1}{3+2u_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad |u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{4}\,|u_n-u_{n-1}|$$

4) $On\ a \;:\; u_{n+1} = 1+\frac{1}{1+u_n} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad u_{2n+1} = 1+\frac{1}{1+u_{2n}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_n = 1+\frac{1}{1+\alpha_n} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

5) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\beta_n-\alpha_n = 1+\frac{1}{1+\alpha_n}-\alpha = \frac{2-(\alpha_n)^2}{1+\alpha_n}$

$$= \frac{(\sqrt{2}-\alpha_n)(\sqrt{2}+\alpha_n)}{1+\alpha_n} \geq 0$$

Remarque : On peut très facilement montrer que : $\forall n\epsilon\mathbb{R} \;;\; \alpha_n \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad : \quad \beta_n-\alpha_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad : \quad \beta_n \geq \alpha_n$$

6) $\alpha_{n+1}-\alpha_n = u_{2n+2}-u_{2n}$

$$= 1+\frac{1}{1+u_{2n+1}}-u_{2n}$$

$$= 1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+u_{2n}}\right)}-u_{2n}$$

$$= 1+\frac{1}{\left(\frac{2+2u_{2n}+1}{1+u_{2n}}\right)}-u_{2n}$$

$$= 1+\left(\frac{1+u_{2n}}{3+2u_{2n}}\right)-u_{2n}$$

$$= \frac{3+2u_{2n}+1+u_{2n}-3u_{2n}-2(u_{2n})^2}{3+2u_{2n}}$$

$$= \frac{4-2(u_{2n})^2}{3+2u_{2n}} = \frac{4-2(\alpha_n)^2}{3+2\alpha_n}$$

$$= \frac{2(2-(\alpha_n)^2)}{3+2\alpha_n} = \frac{2(\sqrt{2}-\alpha_n)(\sqrt{2}+\alpha_n)}{3+2\alpha_n} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \alpha_{n+1}-\alpha_n \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \alpha_{n+1} \geq \alpha_n$$

$$\Longrightarrow \quad (\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ \ est \ \ croissante$$

$De\ même\ :\ \ \beta_{n+1}-\beta_n$

$$= 1+\frac{1}{1+\alpha_{n+1}} - 1 - \frac{1}{1+\alpha_n}$$

$$= \frac{(1+\alpha_n)-(1+\alpha_{n+1})}{(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1})}$$

$$= \frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1})} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \beta_{n+1}-\beta_n \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \beta_{n+1} \leq \beta_n$$

$$\Longrightarrow \quad (\beta_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ \ est \ \ décroissante$$

7) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

$$\blacksquare \quad |u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n-u_{n-1}|$$

$$\Longrightarrow \quad |u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}|u_{n-1}-u_{n-2}|$$

$$\Longrightarrow \quad |u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}|u_{n-2}-u_{n-3}|$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad |u_{n+1}-u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_1-u_0|$$

$$\Longrightarrow \quad |u_{n+1}-u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \left|\frac{3}{2}-1\right|$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad |u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad |u_{2n+1}-u_{2n}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad |\beta_n-\alpha_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$Comme\ :\ \ \lim_{n\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = 0$ Alors :

$$\lim_{n\infty} |\beta_n-\alpha_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(\beta_n-\alpha_n)$$

Finalement on a pu montrer les assertions

$$\begin{cases} (\alpha_n)\ est\ \nearrow et\ \ (\beta_n)\ est\ \searrow \\ \lim\limits_{n\infty}(\beta_n-\alpha_n) = 0 \end{cases}$$

Donc les suites $(\alpha_n)\ et\ (\beta_n)$ sont adjacentes et ont la même limite.

8) D'abord on peut montrer facilement par récurrence que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ u_n \leq \sqrt{2}$

On a : $u_{n+1} = f(u_n) \ \ ; \ \ \forall n\epsilon\mathbb{N}$

$$Avec \quad f(x) = 1+\frac{1}{1+x} \quad ; \quad \forall x \neq -1$$

La fonction f est continue et dérivable sur n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ Donc On peut appliquer le TAF à f sur l'intervalle $[u_n, \sqrt{2}]$:

$$\Longrightarrow \quad \exists\ c\ \epsilon\ ]u_n,\sqrt{2}[\ : \ \frac{f(u_n)-f(\sqrt{2})}{u_n-\sqrt{2}} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq u_n < c \leq \sqrt{2} \\ f'(c) = \dfrac{f(u_n) - f(\sqrt{2})}{u_n - \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq c \leq \sqrt{2} \\ \left|\dfrac{f(u_n) - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}\right| = \left|\dfrac{-1}{(c+1)^2}\right| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq c \leq \sqrt{2} \\ \left|\dfrac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}\right| = \dfrac{1}{(c+1)^2} \end{cases}$$

$$1 \leq c \leq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2 < (c+1) < \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad 4 \leq (c+1)^2 \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} \leq \left(\frac{1}{c+1}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(c+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$$

Remarque : On peut démontrer cette inégalité à l'aide de la machine récurrence

9) ■ $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

$$\Rightarrow \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\left|u_{n-1} - \sqrt{2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left|u_{n-2} - \sqrt{2}\right|$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \left|u_1 - \sqrt{2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right|$$

$$Comme \; : \; \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right| = 0$$

$$Alors \; \lim_{n\infty}(u_n) = \sqrt{2}$$

Solution N° 60 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n < \sqrt{5}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = -2 < \sqrt{5}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n < \sqrt{5}$

■ $P(n)$ *est vraie* $\Rightarrow$ $u_n < \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \quad u_n + 3 < \sqrt{5} + 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3+u_n} > \frac{1}{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-4}{3+u_n} < \frac{-4}{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad 3 - \frac{4}{3+u_n} < 3 - \frac{4}{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3u_n+5}{u_n+3} < \frac{9+3\sqrt{5}-4}{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} < \frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} < \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+3)}{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n < \sqrt{5}$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède ainsi :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n+5}{u_n+3} - u_n$

$$= \frac{3u_n+5-(u_n)^2-3u_n}{u_n+3}$$

$$= \frac{-(u_n)^2+5}{u_n+3}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-u_n)(\sqrt{5}+u_n)}{u_n+3} > 0$$

On peut facilement montrer par récurrence que : $\forall n \geq 2$; $u_n > 0$ et voici comment :

Soit la proposition : $Q(n)$: $u_n > 0$

L'initialisation :
On a : $u_2 = 1 > 0$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 0$

■ $Q(n) \ est \ vraie \quad \Rightarrow \quad u_n > 0$

$$\Rightarrow \quad 3u_n+5>0 \quad et \quad u_n+3>0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3u_n+5}{u_n+3} > 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \quad Q(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \ est \ vraie \\ Q(n) \ \Rightarrow \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n > 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\sqrt{5}-u_n)(\sqrt{5}+u_n)}{u_n+3} > 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0 \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\geq 2} \ est \ croissante$$

3) la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente car croissante et étant majorée par $\sqrt{5}$

On a : $u_{n+1} = g(u_n)$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}$ avec :

$$g(x) = \frac{3x+5}{x+3} \quad ; \quad \forall x \neq -3$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}\backslash\{-3\}$
Car c'est le quotient de deux fonctions

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Continues et bien définies sur $\mathbb{R}^+$
On aussi : $g(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$
Car : $\forall x \geq 0$; $g(x) \geq 0$

On a aussi : $u_2 = 1 \in \mathbb{R}^+$
Et (u_n) convergente et sa limite $l \in \mathbb{R}^+$
Car : $0 < u_n < \sqrt{5} \Rightarrow 0 \leq l \leq \sqrt{5}$

Donc on peut en déduire que l vérifie :

$$g(l) = l \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3l+5}{l+3} = l$$

$$\Leftrightarrow \quad 3l + 5 = l^2 + 3l$$

$$\Leftrightarrow \quad l^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (l - \sqrt{5})(l + \sqrt{5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad l \in \{-\sqrt{5} \ ; \sqrt{5}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt{5} \quad car \quad 0 \leq l \leq \sqrt{5}$$

Solution N° 61 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \ est \ strictement \ \nearrow$$

2) Soit $k \geq 2$ et on procède comme suit

■ $$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

On a : $k^2 - (k^2 - k) = k > 0$

$$\Rightarrow \quad k^2 > k^2 - k$$

$$\Rightarrow \quad k^2 > k(k-1) > 0 \quad ; \quad \forall k \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \quad ; \quad k \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad ; \quad k \geq 2$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on procède ainsi :

■ $$(2 - u_n) = 2 - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

$$= 2 - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

On a encore : $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{k^2} > \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{-1}{k^2}\right) > \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^2}\right) > \frac{1}{n} - 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k^2}\right) > \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 2 - u_n > \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad u_n - 2 < \frac{-1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_n - 2 < \frac{-1}{n}} \rightsquigarrow (1)$$

$$Et\ comme\ \ k \geq 2\quad Alors\ \ \frac{1}{k^2} > 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad u_n > 0$$

De (1) *et* (2) *on en déduit que* :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < u_n < 2 - \frac{1}{n}$$

4) la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente car croissante et étant majorée par 2.
Voici pourquoi elle est majorée par 2 :

■ $\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 2 = -\frac{1}{n} < 0$

$$\Longrightarrow \left(2 - \frac{1}{n}\right) < 2$$

$$\Longrightarrow u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\Longrightarrow u_n < 2 \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

Remarque : *comme* $0 < u_n < 2 - \frac{1}{n}$

Par passage aux limites on obtient :

$$0 \leq \lim_{n\infty}(u_n) \leq \lim_{n\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leq \lim_{n\infty}(u_n) \leq 2$$

Plus tard vous verrez que cette limite est égale exactement à $\frac{\pi^2}{6}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 62 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$

L'initialisation :
On a : $0 \leq u_0 \leq 1$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $0 \leq u_n \leq 1$

■ $P(n)\ est\ vraie \Longrightarrow 0 \leq u_n \leq 1$

$$\Longrightarrow 1 \leq u_n + 1 \leq 2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n + 1}{2} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} \leq 1$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} \leq 1$$

$$\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$\Longrightarrow P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 1$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit

■ $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} - u_n$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)^2 - (u_n)^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)}$$

$$= \frac{1 + u_n - 2(u_n)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)}$$

$$= \frac{-2\left(u_n + \frac{1}{2}\right)(u_n - 1)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)}$$

$$= \frac{-\left(u_n + \frac{1}{2}\right)(u_n - 1)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ croissante$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

L'initialisation :

On a : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos\theta \leq 1$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $Q(n) \ est \ vraie \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 2\,cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 1}{2}} = \sqrt{cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$$

$$= \left|cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right| = cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} = cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \ est \ vraie \\ Q(n) \quad \Rightarrow \quad Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n = cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

5) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty} cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$= \lim_{n\infty} cos\left(\theta\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = cos\left(\theta \cdot \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= cos(\theta \cdot 0) = \cos 0 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 63 :

1) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq \sin k \leq 1 \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad ; \quad \begin{matrix} \forall k \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{-1}{n\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} 1 \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n\sqrt{n}} \cdot n \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot n$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k}{n\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$Car \ : \ \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$

De la même manière on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos k \leq 1 \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\cos k}{n\sqrt{n}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\cos k}{n\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$Car \ : \ \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$

2) On a : $0 \leq u_n \leq 2 \quad et \quad 0 \leq v_n \leq 3$
Donc $(u_n) \ et \ (v_n)$ sont bornées. Si de plus elle sont strictement monotones alors ells convergent et soit :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = l \quad ; \quad \lim_{n\infty}(v_n) = l'$$

■ $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 2 \\ 0 \leq v_n \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq u_n v_n \leq 2v_n \\ 0 \leq u_n v_n \leq 3u_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n \leq 2 \\ u_n v_n \leq 3u_n \end{cases} et \ \begin{cases} v_n \leq 3 \\ u_n v_n \leq 2v_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{n\infty}(u_n) \leq 2 \\ \lim_{n\infty} u_n v_n \leq 3 \lim_{n\infty} u_n \end{cases} ; \begin{cases} \lim_{n\infty}(v_n) \leq 3 \\ \lim_{n\infty}(u_n v_n) \leq 2 \lim_{n\infty} v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l \leq 2 \\ 6 \leq 3l \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} l' \leq 3 \\ 6 \leq 2l' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l \leq 2 \\ 2 \leq l \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} l' \leq 3 \\ 3 \leq l' \end{cases}$$

$$\Rightarrow l = 2 \quad et \quad l' = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty}(u_n) = 2 \quad et \quad \lim_{n\infty}(v_n) = 3$$

3) on a $(u_n) \ et \ (v_n)$ sont deux suites positif alors on aurait :

$$\begin{cases} oubien \ \lim(u_n) = +\infty \ et \ \lim(v_n) = +\infty \\ oubien \ \lim(u_n) = l \in \mathbb{R}^+ \ et \ \lim(v_n) = +\infty \\ oubien \ \lim(u_n) = l \in \mathbb{R}^+ \ et \ \lim(v_n) = l' \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

■ $Si \ \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}(v_n) = +\infty$

$$Alors \ \lim_{n\infty}(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = +\infty \ (absurde)$$

■ $Si \ \lim_{n\infty}(u_n) = l \in \mathbb{R}^+ \quad et \quad \lim_{n\infty}(v_n) = +\infty$

$$Alors \ \lim_{n\infty}(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = +\infty \ (absurde)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Donc le 3ème hypothèse qui reste plausible

$$\Rightarrow \lim_{n\infty}(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad l^2 + ll' + l'^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad l^2 + 2ll' + l'^2 = ll'$$

$$\Rightarrow \quad (l + l')^2 = ll' \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ll' \geq 0} \rightsquigarrow (1)$$

$$l^2 + ll' + l'^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l^2 + l'^2 = -ll' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{ll' \leq 0} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \ et \ (2) \quad \Rightarrow \quad ll' = 0 \quad \Rightarrow \quad l = l' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}(v_n) = 0$$

Solution N° 64 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(n)$ définie ainsi : $R(n) \ : \ 0 < u_n < \frac{1}{4}$

L'initialisation :

On a : $0 < u_0 = a < \frac{1}{4}$

Donc l'instance $R(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $R(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n < \frac{1}{4}$

■ $R(n) \ est \ vraie \quad \Rightarrow \quad 0 < u_n < \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad 0 < (u_n)^2 < \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < (u_n)^2 < \dfrac{1}{16} \\ \dfrac{-2}{16} < -2(u_n)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < (u_n)^2 < \dfrac{1}{16} \\ \dfrac{7}{8} < 1 - 2(u_n)^2 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < (u_n)^2 < \dfrac{1}{16} \\ 1 < \dfrac{1}{1 - 2(u_n)^2} < \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{(u_n)^2}{1 - 2(u_n)^2} < \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < \frac{1}{14} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad R(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} R(0) \ est \ vraie \\ R(n) \ \Rightarrow \ R(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ 0 < u_n < \frac{1}{4}$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ On procède ainsi :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n)^2}{1 - 2(u_n)^2} - u_n$

$$= \frac{(u_n)^2 - u_n(1 - 2(u_n)^2)}{1 - 2(u_n)^2}$$

$$= \frac{2(u_n)^3 + (u_n)^2 - u_n}{1 - 2(u_n)^2}$$

$$= \frac{2u_n\left(u_n - \frac{1}{2}\right)(u_n+1)}{1-2(u_n)^2}$$

■ $0 < u_n < \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) < \frac{-1}{4} < 0 \\ \frac{7}{8} < 1 - 2(u_n)^2 < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2u_n\left(u_n - \frac{1}{2}\right)(u_n+1)}{1-2(u_n)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ décroissante$$

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}$

$$Avec \ : \ f(x) = \frac{x^2}{1-2x^2}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \frac{-\sqrt{2}}{2}\right\}$

$f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+ \quad car \quad \forall x \geq 0 \ ; \ f(x) \geq 0$

$On \ a \ encore \ : \ u_0 = a \ \epsilon \ \left]0 \ ; \frac{1}{4}\right[\ \subset \mathbb{R}^+$

La suite (u_n) est convergente car décroissante et étant minorée par 0 et sa limite $l \geq 0 \ \ car \ \ 0 < u_n < \frac{1}{4}$.

Donc l vérifie l'équation : $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2}{1-2l^2} = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{l^2 - l(1-2l^2)}{1-2l^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2l\left(l - \frac{1}{2}\right)(l+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \ \epsilon \left\{0 \ ; \ \frac{1}{2} \ ; \ -1\right\}$$

$$\Leftrightarrow l \ \epsilon \left\{0 \ ; \ \frac{1}{2}\right\} \quad car \quad 0 \leq l \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow l = 0 \ \ car \ \ (u_n) \ est \ \searrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\infty}(u_n) = 0$$

4) ■ $v_{n+1} - v_n = \mathcal{S}_{2n+2} - \mathcal{S}_{2n}$

$$= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k + (-1)^{2n+1} \cdot u_{2n+1} +$$

$$+(-1)^{2n+2} \cdot u_{2n+2} - \sum_{0}^{2n}(-1)^k \cdot u_k$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \quad car \quad (u_n) \ est \ \searrow$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ décroissante$$

■ $w_{n+1} - w_n = \mathcal{S}_{2n+3} - \mathcal{S}_{2n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k + (-1)^{2n+2} \cdot u_{2n+2} +$$

$$+(-1)^{2n+3} \cdot u_{2n+3} - \sum_{0}^{2n+1}(-1)^k \cdot u_k$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0 \quad car \quad (u_n) \ est \ \searrow$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ w_{n+1} \geq w_n$$

$$\Rightarrow (w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ croissante$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $\lim\limits_{n\infty} (w_n - v_n) = \lim\limits_{n\infty} (\mathcal{S}_{2n+1} - \mathcal{S}_{2n})$

$$= \lim_{n\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k \right)$$

$$= \lim_{n\infty} (-1)^{2n+1} \cdot u_{2n+1}$$

$$= -\lim_{n\infty} u_{2n+1} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ \searrow \\ (w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ \nearrow \\ \lim\limits_{n\infty}(w_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

Donc $(v_n) \ et \ (w_n)$ sont adjacentes et ont par la suite la même limite $l \in \mathbb{R}$.

5) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{u_n}{1-(u_n)^2} - \dfrac{2}{7}$

$$= \frac{4(u_n)^2 + 7u_n - 2}{7(1-2(u_n)^2)}$$

$$= \frac{4(u_n+2)\left(u_n - \frac{1}{4}\right)}{7(1-2(u_n)^2)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{2}{7} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2}{7}$$

$$\Longrightarrow \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} \leq \frac{2}{7} u_n \ ; \ u_n > 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $|v_n - \mathcal{S}_n| = |\mathcal{S}_{2n} - \mathcal{S}_n|$

$$= \left| \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} |(-1)^k u_k|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} |u_k|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{7} |u_{k-1}|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} |u_{k-2}|$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k |u_{k-k}|$$

$$\leq a \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$$

7) On a : $|\mathcal{S}_n - l| = |\mathcal{S}_n - v_n + v_n - l|$

$$\leq |\mathcal{S}_n - v_n| + |v_n - l|$$

$$\leq a \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - l|$$

$$\leq a \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{2-(n+1)+1}}{1 - \frac{2}{7}} \right) + |v_n - l|$$

$$\leq a\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\cdot\frac{7}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n}\right)+|v_n-l|$$

$$On\ a\ :\ \lim_{n\infty}|v_n-l|=0$$

$$Et\ encore\ :\ \lim_{n\infty}\frac{7a}{5}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n}\right)$$

$$=\frac{7a}{5}\cdot 0\cdot(1-0)=0$$

Donc par passage aux limites et d'après le critère de comparaison on en déduit :

$$\lim_{n\infty}|\mathcal{S}_n-l|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n)=l$$

Solution N° 65 :

1) d'abord je rappelle que :

$$\forall x\epsilon\mathbb{R}\quad;\quad -1\leq\sin x\leq 1$$

$$\Rightarrow\quad\forall n\epsilon\mathbb{N}\quad;\quad -1\leq\sin n\leq 1$$

$$\Rightarrow\quad\forall n\epsilon\mathbb{N}\quad;\quad -\left(\frac{3}{4}\right)^n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\sin n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$Comme\quad\lim_{n\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0\quad car\quad -1<\frac{3}{4}<1$$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\sin n\right)=0$$

2) $-1\leq\sin n\leq 1\quad\Rightarrow\quad -1\leq-\sin n\leq 1$

$$\Rightarrow\quad 2\leq 3-\sin n\leq 4$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{4}\leq\frac{1}{3-\sin n}\leq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{4n}\leq\frac{1}{n(3-\sin n)}\leq\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{n\infty}\frac{1}{n(3-\sin n)}=0$$

$$Car\ :\ \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{4n}\right)=\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)=0$$

3) On a : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ :\ \begin{cases}-1\leq\sin n\leq 1\\-1\leq-\sin n\leq 1\end{cases}$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}n-1\leq n+\sin n\leq n+1\\n-1\leq n-\sin n\leq n+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{1}{n-1}\leq\dfrac{1}{n+\sin n}\leq\dfrac{1}{n+1}\quad;\quad\forall n\geq 2\\ n-1\leq n-\sin n\leq n+1\quad;\quad\forall n\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{n-1}{n+1}\leq\frac{n-\sin n}{n+\sin n}\leq\frac{n+1}{n-1}\quad;\quad\forall n\geq 2$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{n\infty}\left(\frac{n-\sin n}{n+\sin n}\right)=1$$

$$Car\ :\ \lim_{n\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=\lim_{n\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=1$$

4) On a : $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ :\ -1\leq\sin 2n\leq 1$

$$\Rightarrow\quad -1\leq-\sin 2n\leq 1$$

$$\Rightarrow\quad n\leq(n+1-\sin 2n)\leq n+2$$

$$\Rightarrow\quad\underbrace{n}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\leq(n+1-\sin 2n)$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{n\infty}(n+1-\sin 2n)=+\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) d'abord on a : $-1 \leq \cos n \leq 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty} \left(\frac{\cos n}{n^2}\right) = 0$$

$$Car \ : \quad \lim_{n\infty} \left(\frac{-1}{n^2}\right) = \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty} \left(\frac{n - \cos n}{n^2 + 2n}\right) = \lim_{n\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos n}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{\frac{1}{n} - \frac{\cos n}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}}\right) = \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

6) $\lim\limits_{n\infty} \ (2(-1)^n + 4n^2 + 3)$

$$= \lim_{n\infty} n^2 \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} + 4 + \frac{3}{n^2}\right)$$

$$= (+\infty)(0^{\pm} + 4 + 0^{+}) = +\infty$$

Solution N° 66 :

1) soit $k\epsilon\mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$ et on procède

$$1 \leq k \leq n \quad \Rightarrow \quad 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n + n^2} \leq \frac{1}{k + n^2} \leq \frac{1}{1 + n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{n + n^2} \leq \frac{n}{k + n^2} \leq \frac{n}{1 + n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1 + n} \leq \frac{n}{k + n^2} \leq \frac{n}{1 + n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{1 + n}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{k + n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{1 + n^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1 + n}\right) \sum_{k=1}^{k=n} 1 \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{k + n^2}\right) \leq \left(\frac{n}{1 + n^2}\right) \sum_{k=1}^{k=n} 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{1 + n}\right) n \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{k + n^2}\right) \leq \left(\frac{n}{1 + n^2}\right) n$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n}{1 + n}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{k + n^2}\right) \leq \left(\frac{n^2}{1 + n^2}\right)$$

2) ■ $\left(\frac{n}{1 + n}\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{k + n^2}\right) \leq \left(\frac{n^2}{1 + n^2}\right)$

$$comme \ : \quad \lim_{n\infty} \left(\frac{n}{1 + n}\right) = \lim_{n\infty} \left(\frac{n^2}{1 + n^2}\right) = 1$$

Alors d'après le critère de comparaison :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{k + n^2}\right) = 1$$

Solution N° 67 :

1) $On \ a \ : \quad f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

La fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ car elle est dérivable et sa dérivée $f'(x) = 2x + \frac{3}{4} > 0$ sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$

$$D'où \ f(I) = f\left(\left[0;\frac{1}{4}\right]\right) = \left[f(0)\,; f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \left[0\,;\frac{1}{4}\right] = I$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

L'initialisation :

On a : $0 \leq u_0 = \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

■ $P(n)\ est\ vraie \implies 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

$$\implies u_n \, \epsilon \, I$$

$$\implies f(u_n) \, \epsilon \, I \ ; \ car\ f(I) = I$$

$$\implies u_{n+1} \, \epsilon \, I$$

$$\implies 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$$

$$\implies P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \implies P(n+1) \ ; \ \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

3) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 + \frac{3}{4} u_n - u_n$

$$= (u_n)^2 - \frac{1}{4} u_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= u_n \left(u_n - \frac{1}{4} \right) \leq 0$$

$$\implies \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\implies \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} \leq u_n$$

$$\implies (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}\ est\ décroissante$$

4) la suite $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ est convergente car décroissante et étant minorée par 0.

5) $On\ a$: $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$

La fonction f est continue sur I et on a aussi $f(I) \subseteq I$ et $u_0 = \frac{1}{5} \, \epsilon \, I$.

La suite (u_n) est convergente et sa limite $l = \lim(u_n) \, \epsilon \, I$ Donc l vérifie :

$$f(l) = l \iff l^2 + \frac{3}{4} l - l = 0$$

$$\iff l^2 - \frac{1}{4} l = 0$$

$$\iff l \left(l - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\iff l \, \epsilon \left\{ 0 \, ; \frac{1}{4} \right\}$$

$$\iff l = 0 \ \ car\ (u_n)\ est\ \searrow$$

$$\iff \lim_{n\infty} (u_n) = 0$$

Solution N° 68 :

1) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = u_n + (u_n)^2 - u_n$

$$= (u_n)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{R} \ ; \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{R} \ ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \ est \ croissante$$

2) On suppose que (u_n) soit majorée par un réel positif M Alors on en déduit

$$u_n \leq M \quad et \quad u_{n+1} \leq M \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

■ $\left| \begin{array}{l} u_n \leq M \\ u_n^2 \leq M^2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad u_n + (u_n)^2 \leq M + M^2$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} \leq M + M^2$$

$$\Rightarrow \quad M + M^2 \leq M$$

Car tous les termes de (u_n) vérifie $u_n \leq M$

$$\Rightarrow \quad m^2 \leq 0 \quad ; \quad contradiction$$

$$\Rightarrow \quad notre \ supposition \ est \ fausse$$

$$\Rightarrow \quad (u_n) \ n'est \, pas \ majorée$$

3) comme (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim(u_n) = +\infty$.

Solution N° 69 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \ : \ 2^n \geq n+1$

L'initialisation :
On a : $2^1 \geq 1+1$
Donc l'instance $P(1)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $2^n \geq n+1$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $P(n) \ est \ vraie \quad \Rightarrow \quad 2^n \geq n+1$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq 2n+2$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq n+2$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \ est \ vraie \\ P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ 2^n \geq n+1$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit

■ $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k \cdot 2^k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$

$$= \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*} \ est \ strictement \ \nearrow$$

■ $v_{n+1} - v_n$

$$= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1) - 2^n}{n(n+1)2^n} \leq 0 \quad car \quad 2^n \geq n+1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_{n+1} - v_n \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*} \ est\ décroissante$$

■ $\lim_{n\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n \cdot 2^n}\right)$

$$= \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0(1-0) = 0$$

<u>**La conclusion**</u> :

$$\begin{cases} (u_n)\ est\ \nearrow\ et\ (v_n)\ est\ \searrow \\ \lim_{n\infty}(v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Donc (u_n) *et* (v_n) sont adjacentes et ont par conséquent la même limite.

<u>Solution N° 70</u> :

1) $\lim_{n\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2}\right)$

$$= \lim_{n\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1+0)^2 = \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) *On a* : $\lim_{n\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1}{2}$

Donc d'après la définition d'une limite d'une suite on en déduit que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \epsilon \mathbb{N})\ (\forall n \geq N) \ : \ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$ *on aurait* :

$$(\exists\ n_0\ \epsilon\ \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0) \ : \ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall n \geq n_0) \ : \ \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall n \geq n_0) \ : \ \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(n)$ définie ainsi : $R(n)$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$

<u>**L'initialisation**</u> :

On a : $u_{n_0} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n_0-n_0} \cdot u_{n_0}$

Donc l'instance $R(n_0)$ est vraie

<u>**L'hérédité**</u> :

Soit $n \geq n_0$ fixé et on supposeque l'instance $R(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$

■ $R(n)\ est\ vraie \ \Longrightarrow\ u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-n_0} u_{n_0}$$

$$\Longrightarrow \quad R(n+1)\ est\ vraie$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

La conclusion :

$$\begin{cases} R(n_0) \ \ est \ \ vraie \\ R(n) \ \ \Longrightarrow \ \ R(n+1) \quad ; \quad \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \geq n_0 \quad ; \quad u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$

4) Quand $n \to +\infty$ Alors $n \geq n_0 > 0$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0} \leq 0 \quad ; \quad \forall n \geq n_0$$

$$comme : \quad \lim_{n\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = 0 \cdot u_{n_0} = 0$$

Alors selon le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = 0$$

Solution N° 71 :

1) Soit $1 \leq k \leq n$ et on procède ainsi :

$$1 \leq k \leq n \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} 1 \leq \mathcal{S}_n \leq \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{\sqrt{n}} \leq \mathcal{S}_n \leq n$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{n} \leq \mathcal{S}_n \leq n$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{n} \leq \mathcal{S}_n \quad et \quad \lim_{n\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = +\infty$$

2) $u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{n+1} - \mathcal{S}_{n+1} - 2\sqrt{n} + \mathcal{S}_n$

$$= (\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n+1}) + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\geq 1} \ \ est \ \ croissante$$

■ $v_{n+1} - v_n = 2\sqrt{n+2} - \mathcal{S}_{n+1} - 2\sqrt{n+1} + \mathcal{S}_n$

$$= (\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n+1}) + 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2\left(\left(\sqrt{n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{n+1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{-\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{n+2}+3\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad v_{n+1} - v_n \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad v_{n+1} \leq v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)_{n\geq 1} \ est\ décroissante$$

■ $\lim\limits_{n\infty}(v_n - u_n)$

$$= \lim_{n\infty} \left(2\sqrt{n+1} - \mathcal{S}_n\right) - \left(2\sqrt{n} - \mathcal{S}_n\right)$$

$$= \lim_{n\infty} 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{2\left(\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$$

<u>La conclusion</u> :

$$\begin{cases} (u_n)\ est\ \nearrow\ et\ (v_n)\ est\ \searrow \\ \lim\limits_{n\infty}(v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Donc $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont deux suites adjacentes et ont par conséquent la même limite L.

3) $u_n = 2\sqrt{n} - \mathcal{S}_n \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathcal{S}_n}{n} \\ \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 2 - \dfrac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} \end{cases}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \begin{cases} Et \quad \dfrac{\mathcal{S}_n}{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{u_n}{n} \\ Et \quad \dfrac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} = 2 - \dfrac{u_n}{n} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Et \quad \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\mathcal{S}_n}{n}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) - \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{u_n}{n}\right) \\ Et \quad \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\infty} 2 - \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Et \quad \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\mathcal{S}_n}{n}\right) = 0 - L \times 0 = 0 \\ Et \quad \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}}\right) = 2 - 0 \times L = 2 \end{cases}$$

4) $\mathcal{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Longrightarrow \mathcal{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{2n} = \mathcal{S}_n + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{2n} - \mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathcal{S}_{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{2}\cdot\frac{\mathcal{S}_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) = \sqrt{2}\lim_{n\infty}\frac{\mathcal{S}_{2n}}{\sqrt{2n}} - \lim_{n\infty}\frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \lim_{\substack{m\infty \\ m=2n}} \left(\frac{\mathcal{S}_m}{\sqrt{m}} \right) - \lim_{n\infty} \left(\frac{\mathcal{S}_n}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2 - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Remarque : plus tard vous verrez comment calculer ce genre de limites dites sommes de Riemann voici un exemple :

- $\displaystyle \lim_{n\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

$$= \lim_{n\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \right)$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \right)$$

$$= \lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n} \right) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left((1+x)^{\frac{1}{2}} \right)' dx$$

$$= 2 \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1$$

$$= 2 \left((1+1)^{\frac{1}{2}} - (1+0)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 72 :

1) Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

- $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k^3} \right) - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k^3} \right)$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n) \ est \ strictement \ \nearrow$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

L'initialisation :

On a : $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$

Donc l'instance $Q(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

- $\displaystyle Q(n) \ est \ vraie \quad \Longrightarrow \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \quad u_n + \frac{1}{(n+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \quad \rightsquigarrow (*)$$

$$Or \ on \ a \ \left(2 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{(n+1)^3 - n(n+1)^2 - 1}{n(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^2 + 2n}{n(n+1)^3} = \frac{n+2}{(n+1)^3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(2-\frac{1}{n+1}\right)-\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\geq 0$$

$$\Rightarrow \left(2-\frac{1}{n+1}\right)\geq\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$\Rightarrow u_n+\frac{1}{(n+1)^3}\geq 2-\frac{1}{n+1} \quad selon(*)$$

$$\Rightarrow u_{n+1}\geq 2-\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n \leq 2-\frac{1}{n}$

3) Soit (v_n) la suite définie par :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = 2-\frac{1}{n}$$

Cette suite (v_n) est décroissante car :

$$v_{n+1}-v_n = \left(2-\frac{1}{n+1}\right)-\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n(n+1)}>0 \quad ; \quad n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad v_{n+1}>v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty}(v_n)\geq v_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 2\geq v_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 2\geq v_n\geq u_n \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow u_n\leq 2 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est majorée par } 2$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est convergente car } \nearrow \text{ et majorée}$$

Solution N° 73 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit

- $$3v_{n+1}=3\sum_{k=0}^{k=n+1}\left(\frac{k}{3^k}\right)=\sum_{k=0}^{k=n+1}\left(\frac{3k}{3^k}\right)$$

$$=\left(\frac{3\cdot 0}{3^0}\right)+\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(\frac{3k}{3^k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(\frac{k}{3^{k-1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(\frac{k-1+1}{3^{k-1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(\frac{k-1}{3^{k-1}}+\frac{1}{3^{k-1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(\frac{k-1}{3^{k-1}}\right)+\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{k}{3^k}\right)+\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{3^k}\right)=v_n+u_n$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 3\,v_{n+1}=v_n+u_n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $H(n)$ définie ainsi : $H(n)$: $v_n < 1$

L'initialisation :

On a : $v_0 = 0 < 1$

Donc l'instance $H(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $H(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n < 1$

■ $u_n = \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) < \frac{3}{2} \quad car \quad 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} < 1$$

■ $H(n)$ $est\ vraie \implies v_n < 1$

$$\implies \frac{v_n}{3} < \frac{1}{3} \quad et \quad u_n < \frac{3}{2}$$

$$\implies \frac{v_n}{3} < \frac{1}{3} \quad et \quad \frac{u_n}{3} < \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{v_n}{3} + \frac{u_n}{3} < \frac{5}{6} < 1$$

$$\implies v_{n+1} < 1$$

$$\implies H(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} H(0)\ est\ vraie \\ H(n) \implies H(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $v_n < 1$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{k=n+1}\left(\frac{k}{3^k}\right) - \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{k}{3^k}\right)$

$$= \frac{n+1}{3^{n+1}} > 0 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} > v_n$$

$$\implies (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est\ strictement\ \nearrow$$

Et comme $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est majorée par 1 Alors c'est une suite convergente.

$$Soit \quad : \quad l = \lim_{n\infty}(v_n)$$

4) On a : $3\,v_{n+1} = v_n + u_n$

Comme $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont convergentes Alors par passage aux limites on écrit:

$$\lim_{n\infty}(3v_{n+1}) = \lim_{n\infty}(v_n + u_n)$$

$$\iff 3\lim_{n\infty}(v_{n+1}) = \lim_{n\infty}(u_n) + \lim_{n\infty}(v_n)$$

$$\iff 3l = \frac{3}{2} + l$$

$$\iff 2l = \frac{3}{2} \iff l = \frac{3}{4}$$

$$finalement \quad : \quad \lim_{n\infty}(v_n) = \frac{3}{4}$$

Remarque :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 74 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $1 \leq u_n \leq \alpha$

L'initialisation :

On a : $1 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $1 \leq u_n \leq \alpha$

■ $Q(n)\ est\ vraie \implies 1 \leq u_n \leq \alpha$

$$\implies 2 \leq 1 + u_n \leq \alpha + 1$$

$$\implies \frac{1}{\alpha+1} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{1+u_n} \leq \frac{-1}{\alpha+1}$$

$$\implies 2 - \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{1+u_n} \leq 2 - \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\implies \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = f(\alpha)$$

$$\implies 1 \leq \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \alpha \ ;\ car\ f(\alpha) = \alpha$$

$$\implies Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \implies Q(n+1) \ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq \alpha$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{1+u_n} - u_n$$

$$= \frac{2u_n + 1 - u_n(1+u_n)}{1+u_n}$$

$$= \frac{-(u_n)^2 + u_n + 1}{1+u_n}$$

$$= \frac{-(u_n - \alpha)\left(u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1+u_n} \geq 0$$

$Car\ on\ a$: $u_n \geq 1 > \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\implies u_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0$$

$On\ a\ aussi$: $(u_n - \alpha) \leq 0$

$$\implies \frac{-(u_n - \alpha)\left(u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1+u_n} \geq 0$$

$$\implies \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ;\ u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\implies \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ;\ u_{n+1} \geq u_n$$

$$\implies (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}\ est\ croissante$$

Remarque : j'ai abusivement utiliser le fait que : $f(\alpha) = \alpha$ je vous propose de voir la démonstration maintenant :

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = \frac{2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1}$$

$$= \left(\frac{2+\sqrt{5}}{1}\right) \times \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{2(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(6-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5)}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$$

3) comme (u_n) est croissante et étant majorée par α Alors (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

Pour déterminer la limite l on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

On peut facilement vérifier les assertions suivantes :

- ⋆ f *continue sur* $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$
- ⋆ $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$
- ⋆ $l \in \mathbb{R}^+$

Donc on conclut que l vérifie l'équation :

$$f(l) = l \iff \frac{2l+1}{l+1} = l$$

$$\iff \frac{-l^2+l+1}{l+1} = 0$$

$$\iff \frac{-\left(l-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(l-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{l+1} = 0$$

$$\iff l \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \; ; \; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\iff l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad car \quad (u_n) \; est \nearrow$$

$$\iff \lim_{n\infty}(u_n) = \alpha$$

Solution N° 75 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(n)$ définie ainsi : $R(n) \; : \; u_n \geq \sqrt{3}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 2 \geq \sqrt{3}$

Donc l'instance $R(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $R(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq \sqrt{3}$

■ $R(n) \; est \; vraie \implies u_n \geq \sqrt{3}$

$$\implies (u_n)^2 \geq 3$$

$$\implies \frac{(u_n)^2}{3} \geq 1$$

$$\implies 2 + \frac{(u_n)^2}{3} \geq 3$$

$$\implies \sqrt{2 + \frac{(u_n)^2}{3}} \geq \sqrt{3}$$

$$\implies R(n+1) \; est \; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} R(0) \; est \; vraie \\ R(n) \implies R(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \; ; \; u_n \geq \sqrt{3}$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{R}$ et on procède comme suit

■ $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} - u_n$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)}$$

$$= \frac{\frac{(u_n)^2}{3} + 2 - (u_n)^2}{\left(\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n\right)}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{3}(3 - (u_n)^2)}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n}\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(\sqrt{3} + u_n)(\sqrt{3} - u_n)}{\sqrt{\frac{(u_n)^2}{3} + 2} + u_n} \leq 0 \quad car \quad \sqrt{3} \leq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{R} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{R} \quad ; \quad u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \ est \ décroissante$$

3) comme (u_n) est décroissante et étant minorée par $\sqrt{3}$ Alors (u_n) est une suite convergente et soit $l = \lim(u_n)$

4) $u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3} + 2}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$
$f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R} \quad et \quad l \in \mathbb{R}^+ \ car \ u_n \geq 3$
On a aussi : $u_0 = 2 \in \mathbb{R}^+$

Donc on en déduit que :

$$f(l) = l \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{l^2}{3} + 2} = l$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l^2}{3} + 2 = l^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l^2}{3} + 2 - l^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}(\sqrt{3} - l)(\sqrt{3} + l) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad l \in \{\sqrt{3} \ ; -\sqrt{3}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt{3} \quad car \quad u_n \geq \sqrt{3}$$

Solution N° 76 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

■ $P(n) \ est \ vraie \quad \Longrightarrow \quad u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)^3 > \frac{1}{7}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad (u_n)^3 + 1 > \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(u_n)^3 + 1}{8} > \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{(u_n)^3 + 1}{8}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1 + u_{n+1}^3}{8}}}{\sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}}} = \sqrt[3]{\frac{1 + u_{n+1}^3}{1 + u_n^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1 + \frac{1 + u_n^3}{8}}{1 + u_n^3}} = \sqrt[3]{\frac{9 + u_n^3}{8 + 8u_n^3}}$$

$$Comparons \quad \frac{9 + u_n^3}{8 + 8u_n^3} \quad et \quad 1$$

■ $$1 - \left(\frac{9 + u_n^3}{8 + 8u_n^3}\right) = \frac{8 + 8u_n^3 - 9 - u_n^3}{8 + 8u_n^3}$$

$$= \frac{7u_n^3 - 1}{8 + 8u_n^3} > 0$$

$$Car \ : \quad u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \quad \Rightarrow \quad u_n^3 > \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad 7u_n^3 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7u_n^3 - 1}{8 + 8u_n^3} > 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{9 + u_n^3}{8 + 8u_n^3}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{9 + u_n^3}{8 + 8u_n^3}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

3) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad (u_n) \ est \ strictement \ \searrow$$

On a en plus (u_n) est minoré par $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

Donc (u_n) est convergente.

4) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{7}{8}(u_{n+1})^3 - \frac{1}{8}}{\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{7}{8}\left(\frac{1 + u_n^3}{8}\right) - \frac{1}{8}}{\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{8} \ \epsilon \ \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{8} v_n$$

$$\Rightarrow \ (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ \ géométrique \ de \ raison \ \frac{1}{8}$$

5) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{array}{l}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n\end{array} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{8}\right)^{n-0}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} = \frac{7}{8}(u_n)^3 - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad (u_n)^3 = \frac{8}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{n} + \frac{1}{7}}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{n} + 1\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{n} + 1\right)}$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{7}(0+1)} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

Solution N° 77 :

1) $f_n(x) = x^3 + nx - 1 \quad ; \quad n\epsilon\mathbb{N}^*$

On a f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme à coefficients réels Donc f_n est continue sur $]0,1[\subset \mathbb{R}$
Et on a encore :

$$f_n(0) \cdot f_n(1) = (-1)(n) = -n < 0$$

D'où d'après le TVI on déduit :

$$\exists \, x_n \, \epsilon \, [0,1] \quad ; \quad f_n(x_n) = 0$$

Comme $f_n(0) \neq 0 \quad et \quad f_n(1) \neq 0$
Alors on peut écrire $x_n \, \epsilon \,]0,1[$

On a de plus : $f_n'(x) = 3x^2 + n \ ; \ \forall x\epsilon\mathbb{R}$
On remarque que : $f_n'(x) > 0 \ ; \ \left|\begin{array}{l}\forall x\epsilon\mathbb{R} \\ \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\end{array}\right.$

Donc $f_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue de plus bien entendu
Alors f_n est une bijection de n'importe quel intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ vers son image $f(I)$

D'où x_n est unique car 0 admet un seul antécédent par f_n dans $]0,1[$

Autrement-dit : comme $f_n : [0,1] \longmapsto [-1, n]$
Est bijective Alors :

$$(\forall y\epsilon[-1,n]) \, (\exists! \, x \, \epsilon \, [0,1]) \ : \ f_n(x) = y$$

$$(pour \ 0 \, \epsilon \, [-1,n]) \, (\exists! \, x_n \, \epsilon \, [0,1]) : \ f_n(x_n) = 0$$

2) Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$ On a :

■ $Si\ m\leq n \implies mx\leq nx \ ;\ x>0$

$$\implies (x^3+mx-1)\leq(x^3+nx-1)$$

$$\implies f_m(x)\leq f_n(x)$$

On en déduit l'implication suivante :

$$\boxed{m\leq n \implies f_m(x)\leq f_n(x)} \rightsquigarrow (*)$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit :

$$n\in\mathbb{N}^* \implies n+1>n$$

$$\implies f_{n+1}(x)>f_n(x) \ ;\ \forall x>0$$

$$\implies f_{n+1}(x_n)>f_n(x_n) \ ;\ car\ x_n\in\,]0,1[$$

$$\implies f_{n+1}(x_n)>0 \ ;\ car\ f_n(x_n)=0$$

$$\implies f_{n+1}(x_n)>\underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{0}$$

$$\implies f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_n))>f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_{n+1}))$$

$$\implies x_n>x_{n+1} \ ;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ est\ strictement\ décroissante$$

3) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente car décroissante et étant minorée par 0 car : $x_n\in\,]0,1[\implies x_0>0$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^3+n\left(\frac{1}{n}\right)-1=\left(\frac{1}{n}\right)^3>0$$

$$\implies f_n\left(\frac{1}{n}\right)>0$$

$$\implies f_n\left(\frac{1}{n}\right)>f_n(x_n) \ ;\ car\ f_n(x_n)=0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\implies f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)>f_n^{-1}(f_n(x_n)) \ ;\ f_n\ bij\ \nearrow$$

$$\implies \frac{1}{n}>x_n \ ;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

5) $On\ a\ :\ \forall\, n\in\mathbb{N}^* \ ;\ 0<x_n<\frac{1}{n}$

$$Comme\ :\ \lim_{n\infty}0=\lim_{n\infty}\frac{1}{n}=0$$

Alors d'après le critère de comparaison des suites on en déduit que :

$$\lim_{n\infty}(x_n)=0$$

Solution N° 78 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)\ :\ u_n\geq 1$

L'initialisation :

On a : $u_1=1\geq 1$
Donc l'instance $Q(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n\geq 1$

■ $Q(n)\ est\ vraie \implies u_n\geq 1$

$$\implies 2u_n+\frac{n+2}{n(n+1)}\geq 2+\frac{n+2}{n(n+1)}$$

$$\implies 2u_n+\frac{n+2}{n(n+1)}\geq\frac{2n^2+3n+2}{n(n+1)}$$

$$Comparons\ maintenant\ \frac{2n^2+3n+2}{n(n+1)}\ et\ 1$$

$$\frac{2n^2+3n+2}{n(n+1)}-1=\frac{2n^2+3n+2-n(n+1)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{n^2+2n+2}{n(n+1)}>0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{2n^2+3n+1}{n(n+1)}-1>0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{2n^2+3n+1}{n(n+1)}>1$$

$$\Longrightarrow\quad 2u_n+\frac{n+2}{n(n+1)}>1$$

$$\Longrightarrow\quad u_{n+1}>1$$

$$\Longrightarrow\quad Q(n+1)\ est\ vraie$$

<u>La conclusion</u> :

$$\begin{cases} Q(1)\ est\ vraie \\ Q(n)\ \Longrightarrow\ Q(n+1)\quad ;\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ u_n\geq 1$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $u_{n+1}-u_n=2u_n+\dfrac{n+2}{n(n+1)}-u_n$

$$=u_n+\frac{n+2}{n(n+1)}>0$$

$$Car\quad u_n\geq 1\quad et\quad \frac{n+2}{n(n+1)}>0$$

$$\Longrightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ u_{n+1}-u_n>0$$

$$\Longrightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ u_{n+1}>u_n$$

$$\Longrightarrow\quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ strictement\ croissante$$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{u_{n+1}+\dfrac{1}{n+1}}{u_n+\dfrac{1}{n}}$

$$=\frac{2u_n+\dfrac{n+2}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n+1}}{u_n+\dfrac{1}{n}}$$

$$=\frac{2u_n+\dfrac{2(n+1)}{n(n+1)}}{u_n+\dfrac{1}{n}}$$

$$=\frac{2\left(u_n+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(u_n+\dfrac{1}{n}\right)}=2\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ \frac{v_{n+1}}{v_n}=2$$

$$\Longrightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ v_{n+1}=2v_n$$

$$\Longrightarrow\ (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ géométrique\ de\ raison\ 2$$

4) comme $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N}\\ \forall p\leq n\end{matrix}\quad ;\quad v_n=v_p\cdot 2^{n-p}$$

On choisit $p=1$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ v_n=v_1\cdot 2^{n-1}$$

$$\Longrightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ v_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$$\Longrightarrow\quad 2^n=u_n+\frac{1}{n}\quad ;\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad u_n = 2^n - \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

La suite (u_n) est divergente car :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(2^n - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\infty} 2^n - \lim_{n\infty}\frac{1}{n}$$

$$= +\infty - 0 = +\infty$$

5) $$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n}\left(2^k - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

$$= 2^1\left(\frac{1-2^{n-1+1}}{1-2}\right) - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

$$= -2(1-2^n) - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

$$= (2^{n+1}-2) - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

6) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(k)$ définie ainsi : $P(k)$: $2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$

L'initialisation :

On a : $2^1 \geq 1 + \frac{1}{1}$

Donc l'instance $P(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $k \epsilon \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $P(k)$ soit vraie. C-à-d $P(k)$: $2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$

■ $P(k)\ est\ vraie \quad \Longrightarrow \quad 2^k \geq 1 + \dfrac{1}{k}$

$$\Longrightarrow \quad 2 \cdot 2^k \geq 2\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 2^{k+1} \geq \left(2 + \frac{2}{k}\right)$$

$$Comparons \quad \left(2+\frac{2}{k}\right) \quad et \quad \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$$

■ $\left(2+\dfrac{2}{k}\right) - \left(1+\dfrac{1}{k+1}\right) = 1 + \left(\dfrac{2}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$= 1 + \frac{k+2}{k(k+1)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(2+\frac{2}{k}\right) > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 2^{k+1} > 1 + \frac{1}{k+1}$$

$$\Longrightarrow \quad P(k+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(1)\ est\ vraie \\ P(k) \quad \Longrightarrow \quad P(k+1) \quad ; \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall k \epsilon \mathbb{N}^*$; $2^k \geq 1 + \frac{1}{k}$

Remarque : On peut démontrer cette même inégalité sans utiliser la machine récurrence et voici comment :

■ $u_k \geq 1 \quad et \quad v_k = u_k + \dfrac{1}{k}$; $\forall k \epsilon \mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \quad v_k - \frac{1}{k} = u_k \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad v_k - \frac{1}{k} \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad v_k \geq 1 + \frac{1}{k}$$

$$\Longrightarrow \quad 2^k \geq 1 + \frac{1}{k} \quad ; \quad \forall k \epsilon \mathbb{N}^*$$

7) $On\ a\ :\ 2^k \geq 1 + \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad 2^k - \frac{1}{k} \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^k - \frac{1}{k}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k - \frac{1}{k}}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^k\left(2^k - \frac{1}{k}\right)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v_k u_k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{v_k u_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad w_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad w_n \leq 1 \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \quad (w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ majorée\ par\ 1$$

La conclusion : la suite (w_n) est convergente car croissante et étant majorée par 1.

Solution N° 79 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et $n+1 \leq k \leq 2n.$

■ $n+1 \leq k \leq 2n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2n}(2n-n-1+1) \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1}(2n-n-1+1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k} \leq \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} + u_n \leq \sum_{k=1}^{k=2n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} + u_n \leq u_{2n}$$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ strictement\ croissante$$

3) Par l'absurde on suppose que (u_n) converge c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = l\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

On a : $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Par passage aux limites on trouve :

$$\lim_{n\infty}(u_{2n}) \geq \frac{1}{2} + \lim_{n\infty}(u_n)$$

$$\Longrightarrow \quad l \geq \frac{1}{2} + l \quad \Longrightarrow \quad 0 \geq \frac{1}{2} \ \ contradiction$$

Alors ce qu'on a supposé et faux
Et comme elle est strictement croissante
Alors elle tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\infty}(u_n) = +\infty$$

Solution N° 80 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2-u_{n+1}}{2-u_n} = \left(\frac{2-\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}}{2-u_n}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}u_n}{2-u_n}\right) = \frac{\frac{2}{3}(2-u_n)}{(2-u_n)} = \frac{2}{3} \ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

$$\Longrightarrow \ (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est\ géométrique\ de\ raison \frac{2}{3}$$

2) comme $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors on trouve :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = v_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-0}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = 2 - v_n = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

3) $$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(2-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$= 2 - \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 - 0 = 2$$

4) $$\mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n}\left(2-\left(\frac{2}{3}\right)^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} 2 - \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= 2(n-0+1) - \left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= 2n + 2 - 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 2n - 1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

5) $$\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = \lim_{n\infty}\left(2n-1+2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$= 2\lim_{n\infty} n - 1 + 2\lim_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= +\infty - 1 + 2 \times 0 = +\infty$$

Solution N° 81 :

1) Soit $a > 0 \;\; et \;\; b > 0$ et on a :

■ $\left.\begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \geq 4ab$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

2) ■ $0 \leq a \leq b \;\; \Rightarrow \begin{cases} Et \;\; \dfrac{a}{2} \leq \dfrac{a}{2} \leq \dfrac{b}{2} \\ Et \;\; \dfrac{a}{2} \leq \dfrac{b}{2} \leq \dfrac{b}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a \leq \frac{a+b}{2} \leq b}$$

■ $0 \leq a \leq b \;\; \Rightarrow \begin{cases} Et \;\; \sqrt{a} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \\ Et \;\; \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{b} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{a} \leq \sqrt{a} \times \sqrt{b} \leq \sqrt{b} \times \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq b$$

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) \; : \; 0 < u_n \leq v_n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

L'initialisation :

On a : $0 < \alpha \leq 2\alpha$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n \leq v_n$

■ $Q(n) \; est \; vraie \;\; \Rightarrow \;\; 0 < u_n \leq v_n$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n v_n} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} > 0} \rightsquigarrow (1)$$

■ $Q(n) \; est \; vraie \;\; \Rightarrow \;\; 0 < u_n \leq v_n$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} \;\; ; \;\; selon \; Q(2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{u_n v_n} \leq v_{n+1}} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \; et \; (2) \;\; \Rightarrow \;\; 0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$$

$$\Rightarrow \;\; Q(n+1) \; est \; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \; est \; vraie \\ Q(n) \;\; \Rightarrow \;\; Q(n+1) \;\; ; \;\; \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \;\; ; \;\; 0 < u_n \leq v_n$

4) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $0 < u_n \leq v_n \;\; \Rightarrow \begin{cases} u_n \leq \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n \\ u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \leq v_n \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n \;\; ; \;\; \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \;\; ; \;\; \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} \leq v_n & ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_n \leq u_{n+1} & ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Et \quad (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ décroissante \\ Et \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ croissante \end{cases}$$

5) comme (v_n) est décroissante Alors :

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ v_n \leq v_0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ v_n \leq 2\alpha$$

On a de plus : $0 < u_n \leq v_n$

$$\Rightarrow \quad 0 < u_n \leq v_n \leq 2\alpha$$

Donc (v_n) est convergente car décroissante et étant minorée par 0
Et encore que (u_n) est aussi convergente car croissante et étant majorée par 2α et on prend alors :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = l \qquad et \qquad \lim_{n\infty}(v_n) = l'$$

■ $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \ \Rightarrow \ \lim\limits_{n\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\infty} \sqrt{u_n v_n}$

$$\Rightarrow \quad l = \sqrt{ll'} \quad \Rightarrow \quad l^2 = ll' \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = l'}$$

■ $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ \Rightarrow \ \lim\limits_{n\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$$\Rightarrow \quad l' = \frac{l + l'}{2} \quad \Rightarrow \quad 2l' = l + l' \quad \Rightarrow \quad \boxed{l' = l}$$

D'où finalement on en déduit que les suites $(u_n) \ et \ (v_n)$ ont la même limite

Remarque : $(u_n) \ est \ \nearrow \ et \ (v_n) \ est \ \searrow$
J'aurais pu montrer que $(u_n) \ et \ (v_n)$ sont adjacentes en rajoutant l'assertion :

$$\lim_{n\infty}(u_n - v_n) = 0$$

Mais je n'ai pas pu le prouver ☹
C'est malheureux ☹

Remarque : voici une 2ème méthode pour démontrer la condition d'hérédité pour la 3ème Question :

■ $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + \left(\sqrt{v_n}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{u_n} \cdot \sqrt{v_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1} \geq u_{n+1}$$

Solution N° 82 :

1) Soit $x \, \epsilon \,]1, +\infty[$ et on procède ainsi :

■ $g(x) - 3 = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} - 3$

$$= \frac{x^2 - 3x + 6 - 3(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 1}$$

$$= \frac{(x - 3)^2}{x - 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x\epsilon I \quad ; \quad g(x) - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x\epsilon I \quad ; \quad g(x) \geq 3$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n \geq 3$

L'initialisation :
On a : $u_1 = 4 \geq 3$
Donc l'instance $P(1)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq 3$

■ $P(n)\ est\ vraie \implies u_n \geq 3 > 1$

$$\implies u_n\ \epsilon\ I$$

$$\implies g(u_n) \geq 3$$

$$\implies u_{n+1} \geq 3$$

$$\implies P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(1)\ est\ vraie \\ P(n) \implies P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$; $u_n \geq 3$

3) soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n)^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1} - u_n$

$$= \frac{(u_n)^2 - 3u_n + 6 - (u_n)^2 + u_n}{u_n - 1}$$

$$= \frac{6 - 2u_n}{u_n - 1} = \frac{2(3 - u_n)}{u_n - 1} \leq 0$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \quad ; \quad u_{n+1} \leq u_n$$

$$\implies (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ décroissante$$

4) la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est convergente car décroissante et étant minorée par 3

5) on a : $u_{n+1} = g(u_n)$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}$
La fonction g est continue sur $I \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$
On a aussi : $g(I) \subseteq I$ et ce parce que :

$$\forall x > 1 \quad ; \quad g(x) \geq 3 > 1$$

On a aussi : $u_0 = 5\ \epsilon\ I$
La suite (u_n) est convergente et sa limite $l\ \epsilon\ I$ car $u_n \geq 3$

Donc on déduit que l vérifie :

$$g(l) = l \iff \frac{l^2 - 3l + 6}{l - 1} = l$$

$$\iff l^2 - 3l + 6 = l^2 - l$$

$$\iff 6 - 2l = 0$$

$$\iff l = 3\ \epsilon\ I$$

Solution N° 83 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $H(n)$ définie ainsi : $H(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$

L'initialisation :
On a : $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$
Donc l'instance $H(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $H(n)$ soit vraie. C-à-d $0 \leq u_n \leq 1$

■ $H(n)\ est\ vraie \implies 0 \leq u_n \leq 1$

$$\implies 1 \leq 3u_n + 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{1} \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} \leq \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad H(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} H(0) \ est \ vraie \\ H(n) \ \Rightarrow \ H(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 1$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt[3]{3u_n + 1} - 1}{u_n}$

$$= \frac{\left((3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left((3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{u_n\left((3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

$$= \frac{(3u_n + 1) - 1}{u_n\left((3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

$$= \frac{3}{(3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1} \leq 1$$

Car : $u_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (3u_n + 1) \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} et \quad (3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} \geq 1 \\ et \quad (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} \geq 1 \\ et \quad 1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \geq 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1} \leq \frac{1}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{(3u_n + 1)^{\frac{2}{3}} + (3u_n + 1)^{\frac{1}{3}} + 1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \ est \ décroissante$$

3) la suite $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ est convergente car décroissante et étant minorée par 0.

4) On a : $u_{n+1} = g(u_n)$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$

Avec : $g(x) = \sqrt[3]{3x + 1} - 1$

La fonction g est continue sur $D_g = \mathbb{R}$

Alors g est continue sur $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$

On a $g(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ car $g(x) \geq 0$; $\forall x \geq 0$

On a aussi : $u_0 = 1 \, \epsilon \, \mathbb{R}^+$

Et encore la suite (u_n) est convergente et sa limite $l \, \epsilon \, \mathbb{R}^+$ car $0 \leq u_n \leq 1$

Donc l vérifie l'équation : $g(l) = l$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{3l + 1} - 1 = l$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{3l + 1} = l + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3l + 1 = (l + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3l + 1 = l^3 + 3l^2 + 3l + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad l^3 + 3l^2 + 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad l(l^2+3l+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad l(l+1)(l+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad l \in \{0\,;\,-1\,;\,-2\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{l=0} \quad car \quad l \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n)=0$$

Solution N° 84 :

1) Soit $n \geq 2$ et on procède comme suit

■ $$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=2}^{k=n+1}\frac{1}{k^2-1} - \sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^2-1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n(n+2)} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 2 \;;\; u_{n+1}-u_n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 2 \;;\; u_{n+1} > u_n$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\geq 2} \; est \; strictement \; croissante$$

■ $$v_{n+1}-v_n = \left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{n}\right)$$
$$= (u_{n+1}-u_n)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n(n+2)}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$= \frac{n+1+n(n+2)-(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+2)} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq 2 \;;\; v_{n+1}-v_n < 0$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)_{n\geq 2} \; est \; strictement \; décroissante$$

■ $$\lim_{n\infty}(v_n-u_n) = \lim_{n\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$Ainsi \; : \; \begin{cases} (u_n)_{n\geq 2} \; est \; \nearrow \; et \; (v_n)_{n\geq 2} \; est \; \searrow \\ \lim\limits_{n\infty}(v_n-u_n)=0 \end{cases}$$

Donc (u_n) *et* (v_n) sont adjacentes et ont par conséquent la même limite.

2) les suites convergent vers une même limite et Soit $\lim(u_n)=\lim(v_n)=l \in \mathbb{R}$

3) Soit $n \geq k \geq 2$ *et* $n \geq 2$ et on a :

■ $$u_n = \sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k^2-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\Bigg)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{3n^2-n-2}{4n^2+4n} \quad ; \quad n \geq 2$$

4) $$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{3n^2-n-2}{4n^2+4n}\right)$$

$$= \lim_{n\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{4}{n}\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{4}{n}} \right) = \left(\frac{3-0-0}{4+0} \right) = \frac{3}{4}$$

Solution N° 85 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $v_n > \sqrt{2}$

L'initialisation :

On a : $v_0 = 3 > \sqrt{2}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $v_n > \sqrt{2}$

■ $$v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{2 + (v_n)^2}{2v_n} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{(v_n)^2 - 2\sqrt{2}\, v_n + 2}{2v_n}$$

$$= \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n} > 0 \quad ; \quad v_n \neq \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \quad v_{n+1} - \sqrt{2} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad v_{n+1} > \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est\ vraie \\ P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $v_n > \sqrt{2}$

2ème Méthode : utiliser la bijection

On a : $v_{n+1} = f(v_n)$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}$

Avec : $f(x) = \frac{2+x^2}{2x}$; $x\epsilon\mathbb{R}^*$

Sur l'intervalle $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ on remarque que f est continue et strictement croissante :

Continue car c'est le quotient de deux fonctions bien définies et continues sur $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ et **croissante** car :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4}{(2x)^2} = \frac{\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{2x^2} > 0$$

Donc f réalise une bijection de $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ vers son image $f\left(\left]\sqrt{2}, +\infty\right[\right)$ avec :

$$f\left(\left]\sqrt{2}, +\infty\right[\right) = \left]f\left(\sqrt{2}\right) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

Donc f : $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[\longmapsto \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ est une bijection croissante.

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé tel que : $v_n > \sqrt{2}$

$$\Longrightarrow \quad v_n \ \epsilon \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

$$\Longrightarrow \quad f(v_n) \ \epsilon \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

$$\Longrightarrow \quad v_{n+1} \ \epsilon \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

$$\Longrightarrow \quad v_{n+1} > \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(0) \ est\ vraie \\ P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n > \sqrt{2}$$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $$v_{n+1} - v_n = \frac{2+(v_n)^2}{2v_n} - v_n$$

$$= \frac{2+(v_n)^2 - 2(v_n)^2}{2v_n} = \frac{2-(v_n)^2}{2v_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-v_n)(\sqrt{2}+v_n)}{2v_n} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} - v_n < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} < v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)_{n\geq 0} \; est \;\; strictement \;\; décroissante$$

3) On a : $v_{n+1} = f(v_n) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$

On vérifie facilement que :

- f est continue sur $[\sqrt{2}, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$
- $f\left([\sqrt{2}, +\infty[\right) \subseteq [\sqrt{2}, +\infty[$
- $\lim(v_n) = l \,\epsilon\, [\sqrt{2}, +\infty[$

Donc on déduit que l vérifie l'équation

$$f(l) = l \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2+l^2}{2l} = l \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2+l^2}{2l} - l = 0 \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\sqrt{2}-l)(\sqrt{2}+l)}{2l} = 0 \quad ; \quad l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad l \,\epsilon \left\{ \sqrt{2} \,;\, -\sqrt{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt{2} \quad ; \quad car \;\; l \geq \sqrt{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 86 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $u_n \neq 5$

L'initialisation :
On a : $u_0 = 2 \neq 5$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \neq 5$

■ $$u_{n+1} = 5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} = 5$$

$$\Longrightarrow \quad 7u_n - 25 = 5u_n - 15$$

$$\Longrightarrow \quad 2u_n = 10$$

$$\Longrightarrow \quad u_n = 5$$

Ainsi on a pu montrer l'implication :

$$u_{n+1} = 5 \quad \Longrightarrow \quad u_n = 5$$

Par passage à la contraposée on écrit :

$$Non(u_n = 5) \quad \Longrightarrow \quad Non(u_{n+1} = 5)$$

C'est à dire que :

$$u_n \neq 5 \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} \neq 5$$

Ou encore que :

$$Q(n) \quad \Longrightarrow \quad Q(n+1)$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \;\; est \;\; vraie \\ Q(n) \quad \Longrightarrow \quad Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq 5$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 5} - \frac{1}{u_n - 5}$$

$$= \frac{u_n - 3}{2(u_n - 5)} - \frac{1}{u_n - 5}$$

$$= \frac{u_n - 3 - 2}{2(u_n - 5)} = \frac{(u_n - 5)}{2(u_n - 5)} = \frac{1}{5} \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (v_n) \ est \ arithmétique \ \ de \ raison \, 1/2$$

3) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p\epsilon\mathbb{N} \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p + \frac{1}{2}(n - p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + \frac{1}{2}(n - 0)$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} n$$

$$On \ a \ encore \quad : \quad v_n = \frac{1}{u_n - 5} \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} + 5 = \frac{1}{\frac{1}{2}n - \frac{1}{3}} + 5$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{15n - 4}{3n - 2}$$

4) $$S_{10} = \sum_{k=1}^{k=10} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_{10}$$

$$= (v_1 + v_{10}) \left(\frac{10 - 1 + 1}{2} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{14}{3} \right) \left(\frac{10 - 1 + 1}{2} \right) = \frac{145}{6}$$

Solution N° 87 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $R(n)$ définie ainsi : $R(n)$: $u_n \neq 1$

L'initialisation :
On a : $u_1 = 0 \neq 1$
Donc l'instance $R(1)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $R(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \neq 1$

■ $$u_{n+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 5u_n - 3 = 3u_n - 1$$

$$\Rightarrow \quad 2u_n = 2$$

$$\Rightarrow \quad u_n = 1$$

Ainsi on a pu montrer l'implication :

$$u_{n+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad u_n = 1$$

Par passage à la contraposée on écrit :

$$Non(u_n = 1) \quad \Rightarrow \quad Non(u_{n+1} = 1)$$

C'est à dire que :

$$u_n \neq 1 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \neq 1$$

Ou encore que :

$$R(n) \quad \Rightarrow \quad R(n+1)$$

La conclusion :

$$\begin{cases} R(1) \ est \ vraie \\ R(n) \implies R(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \ ; \ u_n \neq 1$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1} - \dfrac{u_n+1}{u_n-1}$

$$= \frac{\left(\frac{8u_n-4}{3u_n-1}\right)}{\left(\frac{2u_n-2}{3u_n-1}\right)} - \left(\frac{u_n+1}{u_n-1}\right)$$

$$= \frac{8u_n-4}{2(u_n-1)} - \frac{2(u_n+1)}{2(u_n-1)}$$

$$= \frac{8u_n-4-2(u_n+1)}{2(u_n-1)}$$

$$= \frac{6(u_n-1)}{2(u_n-1)} = 3 \ \epsilon \ \mathbb{R}$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \ ; \ v_{n+1} - v_n = 3$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \ ; \ v_{n+1} = v_n + 3$$

$$\implies (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*} \ est \ arithmétique \ de \ raison \ 3$$

3) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p\epsilon\mathbb{N} \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p + 3(n-p)$$

On choisit $p = 1$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ v_n = v_1 + 3(n-1)$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ v_n = -1 + 3(n-1)$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ v_n = 3n - 4$$

$On \ a \ aussi \ : \ \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \ ; \ v_n = \dfrac{u_n+1}{u_n-1}$

$$\iff v_n(u_n - 1) = u_n + 1$$

$$\iff u_n v_n - v_n = u_n + 1$$

$$\iff u_n(v_n - 1) = v_n + 1$$

$$\iff u_n = \frac{v_n+1}{v_n-1} \quad ; \quad v_n \neq 1$$

$$\iff u_n = \frac{3n-4+1}{3n-4-1} = \frac{3n-3}{3n-5}$$

4) $\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$

$$= (v_1 + v_n)\left(\frac{n-1+1}{2}\right)$$

$$= (-1 + 3n - 4)\left(\frac{n-1+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n(3n-5)}{2}$$

5) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{3n-3}{3n-5}\right) = \lim\limits_{n\infty}\dfrac{n\left(3-\frac{3}{n}\right)}{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}$

$$= \frac{\left(3-\frac{3}{n}\right)}{\left(3-\frac{5}{n}\right)} = \left(\frac{3-0}{3-0}\right) = 1$$

$$\lim_{n\infty}(v_n) = \lim_{n\infty}(3n-4) = +\infty$$

$$\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = \lim_{n\infty}\frac{n(3n-5)}{2}$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \lim_{n\infty}(3n-5) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 88 :

1) calcul de quelques termes de la suite

u_0	u_1	u_2
2	1	$\frac{5}{8}$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = \frac{1}{4} \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4}$$

3) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0} = 1\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On a encore : $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$; $\forall n\epsilon\mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

4) $$\mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{3} + 3^{n+1}\right)$$

5) $$\lim_{n\infty}(v_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad car \quad -1 < \frac{1}{4} < 1$$

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{n\infty}(S_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times 0 + 4 - 4\times 0 = \frac{16}{3}$$

Solution N° 89 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n < 0$

L'initialisation :

On a : $u_0 = \frac{-1}{2} < 0$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n < 0$

■ $P(n)\ est\ vraie \implies u_n < 0$

$$\implies u_n < 0 \quad et \quad 3 - 2u_n > 3$$

$$\implies u_n < 0 \quad et \quad 3 - 2u_n > 0$$

$$\implies \frac{u_n}{3-2u_n} < 0$$

$$\implies u_{n+1} < 0$$

$$\implies P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \implies P(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}$; $u_n < 0$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3-2u_n} - u_n$$

$$= \frac{u_n - u_n(3-2u_n)}{3-2u_n}$$

$$= \frac{2(u_n)^2 - 2u_n}{3-2u_n}$$

$$= \frac{2u_n(u_n-1)}{3-2u_n} > 0$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} > u_n$$

$$\implies (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ strictement\ croissante$$

3) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}\right)\times\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)$$

$$= \left(\frac{u_n}{3-2u_n}\right)\times\left(\frac{3-2u_n}{3u_n-3}\right)\times\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)$$

$$= \frac{u_n\cdot(3-2u_n)\cdot(u_n-1)}{(3-2u_n)\cdot 3\cdot(u_n-1)\cdot u_n} = \frac{1}{3}\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$$

$$\implies \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

$$\implies (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\ est\ géométrique\ de\ raison \frac{1}{3}$$

4) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \le n\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

On a encore : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad v_n(u_n - 1) = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad v_n u_n - v_n = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad u_n(v_n - 1) = v_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad u_n = \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

5) $\mathcal{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$= v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

6) $\lim\limits_{n\infty}(v_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$; $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$

$$\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = \lim_{n\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}\right)$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}}\right)$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{1 - 3^{n+1}}\right) = \frac{1}{1 - \infty} = 0$$

Solution N° 90 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $0 \leq u_n \leq 4$

L'initialisation :

On a : $Q(0)$: $0 \leq u_0 = 1 \leq 4$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d : $0 \leq u_n \leq 4$

■ $Q(n)$ *est vraie* $\Longrightarrow$ $0 \leq u_n \leq 4$

$$\Longrightarrow \quad 16u_n \geq 0 \quad et \quad \left(2 + \sqrt{u_n}\right)^2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} = \frac{16u_n}{\left(2 + \sqrt{u_n}\right)^2} \geq 0 \rightsquigarrow (1)$$

■ $u_{n+1} - 4 = \dfrac{16u_n}{\left(2 + \sqrt{u_n}\right)^2} - 4$

$$= \frac{16u_n - 4\left(2 + \sqrt{u_n}\right)^2}{\left(2 + \sqrt{u_n}\right)^2}$$

$$= \frac{12u_n - 16\sqrt{u_n} - 16}{\left(2 + \sqrt{u_n}\right)^2}$$

$$= \frac{4\left(3\left(\sqrt{u_n}\right)^2 - 4\sqrt{u_n} - 4\right)}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{u_n} - 2\right)\left(\sqrt{u_n} + \frac{2}{3}\right)}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} \leq 4 \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \ et \ (2) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

$$\Rightarrow \quad Q(n+1) \ est \ vraie$$

<u>La conclusion</u> :

$$\begin{cases} Q(0) \ est \ vraie \\ Q(n) \ \Rightarrow \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 4$

2) soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{16u_n}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2} - u_n$

$$= \frac{16u_n - u_n\left(4 + 4\sqrt{u_n} + u_n\right)}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2}$$

$$= \frac{12u_n - 4\sqrt{u_n} \cdot u_n - (u_n)^2}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2}$$

$$= \frac{-u_n\left(\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + 4\sqrt{u_n} - 12\right)}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2}$$

$$= \frac{-u_n\left(\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + 4\sqrt{u_n} - 12\right)}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ croissante$$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit

■ $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n + 1}}}{1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}}\right) = \dfrac{1 - \dfrac{2}{\left(\dfrac{4\sqrt{u_n}}{2+\sqrt{u_n}}\right)}}{1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}}$

$$= \left(\frac{\dfrac{2\sqrt{u_n} - 4}{4\sqrt{u_n}}}{1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}}\right) = \left(\frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}}{1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}\right)}{\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}\right)} = \frac{1}{2} \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

$$\Rightarrow \quad (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est \ géométrique \ de \ raison \ \frac{1}{2}$$

4) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\begin{matrix} \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = -1\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{u_n}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{u_n}}{2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{u_n} = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \left(\frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2 \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

5) $\lim\limits_{n\infty}(v_n) = \lim\limits_{n\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{2}{1+0}\right)^2 = 4$$

Solution N° 91 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $H(n)$ définie ainsi : $H(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$

L'initialisation :
On a : $0 \leq u_0 \leq 1 \quad car \quad u_0 \, \epsilon \, [0,1]$
Donc l'instance $H(0)$ est vraie

L'hérédité :
Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $H(n)$ soit vraie. C-à-d $0 \leq u_n \leq 1$

■ $H(n) \; est \; vraie \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_n \leq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq -\sqrt{3 + u_n^2} \leq -\sqrt{3} \\ 2 \leq u_n + 2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq u_n + 2 - \sqrt{3 + u_n^2} \leq 3 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \leq u_{n+1}} \rightsquigarrow (1)$$

$Or \; on \; a$: $u_{n+1} - 1 = 2 + u_n - \sqrt{3 + u_n^2}$

$$= (1 + u_n) - \sqrt{3 + (u_n)^2}$$

$$= \frac{(1 + u_n)^2 - \left(\sqrt{3 + (u_n)^2}\right)^2}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + (u_n)^2}}$$

$$= \frac{(1 + u_n)^2 - (3 + (u_n)^2)}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + (u_n)^2}}$$

$$= \frac{2(u_n - 1)}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + (u_n)^2}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_{n+1} \leq 1} \rightsquigarrow (2)$$

$(1) \; et \; (2) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

$$\Rightarrow \quad H(n+1) \; est \; vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} H(0) \; est \; vraie \\ H(n) \Rightarrow H(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 1$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = 2 - \sqrt{3+(u_n)^2}$

$$= \frac{2^2 - \left(\sqrt{3+u_n^2}\,\right)^2}{2+\sqrt{3+u_n^2}}$$

$$= \frac{1-(u_n)^2}{2+\sqrt{3+u_n^2}}$$

$$= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2+\sqrt{3+u_n^2}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est\ croissante$$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 - u_{n+1} \leq 0} \rightsquigarrow (1)$

■ $(1-u_{n+1}) - (\sqrt{3}-1)(1-u_n)$

$$= -1 - u_n + \sqrt{3+u_n^2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}u_n + 1 - u_n$$

$$= \sqrt{3+u_n^2} + (\sqrt{3}-2)u_n - \sqrt{3}$$

■ $0 \leq u_n \leq 1$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{3} \leq \sqrt{3+u_n^2} \leq 2 \\ (\sqrt{3}-2) \leq (\sqrt{3}-2)u_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{3} - 2 \leq \sqrt{3+u_n^2} + (\sqrt{3}-2)u_n \leq 2$$

$$\sqrt{3} - 2 \leq \sqrt{3+u_n^2} + (\sqrt{3}-2)u_n - \sqrt{3} \leq 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3+u_n^2} + (\sqrt{3}-2)u_n - \sqrt{3} \leq 2 - \sqrt{3} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3+u_n^2} + (\sqrt{3}-2)u_n - \sqrt{3} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-u_{n+1}) - (\sqrt{3}-1)(1-u_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-u_{n+1}) \leq (\sqrt{3}-1)(1-u_n) \rightsquigarrow (2)$$

D'après les résultat (1) et (2) on déduit

$$0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3}-1)(1-u_n)$$

4) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ dans cette question on a le choix d'utiliser la récurrence ou encore de choisir la méthode descendante :

■ $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3}-1)(1-u_n)$

$$\hookrightarrow \quad 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\sqrt{3}-1\right)^2(1-u_{n-1})$$

$$\hookrightarrow \quad 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\sqrt{3}-1\right)^3(1-u_{n-2})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\sqrt{3}-1\right)^{n+1}(1-u_{n-n})$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\sqrt{3}-1\right)^{n+1}(1-u_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \leq 1 - u_n \leq \left(\sqrt{3}-1\right)^n(1-u_0)}$$

5) Soit $n \geq 1$ et on procède comme suit

■ $T_{n+1} - T_n = (u_{n+1} + \mathcal{S}_{n+1}) - (u_n + \mathcal{S}_n)$

$$= (u_{n+1} - u_n) + (\mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n)$$

$$= \left(2 - \sqrt{3+u_n^2}\right) + \left(\sum_{k=0}^{k=n}\sqrt{3+u_k^2} - \sum_{k=0}^{k=n-1}\sqrt{3+u_k^2}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \left(2 - \sqrt{3 + u_n^2}\right) + \sqrt{3 + u_n^2} = 2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad T_{n+1} = T_n + 2$$

$$\Longrightarrow \quad (T_n)_{n\geq 1} \ \text{est arithmétique de raison } 2$$

6) comme $(T_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad T_n = T_p + 2(n - p)$$

On choisit $p = 1$ Alors :

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad T_n = T_1 + 2(n-1)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad T_n = u_1 + \mathcal{S}_1 + 2(n-1)$$

$$= 2 + u_0 - \sqrt{3 + u_0^2} + \sqrt{3 + u_0^2} + 2(n-1)$$

$$= 2n + u_0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n + \mathcal{S}_n = 2n + u_0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \mathcal{S}_n = 2n - u_n + u_0$$

Solution N° 92 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n \geq 2$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 3 > 2$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 2$

■ $u_{n+1} - 2 = 2 + \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{2}{u_n^2} - 2 = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{2}{u_n^2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{u_n - 2}{u_n^2} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - 2 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} > 2$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \ \text{est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ \text{est vraie} \\ P(n) \ \Longrightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 2$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{est minorée par } 2$$

2) **1ère Méthode :**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$Avec \ : \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad ; \quad \forall x \neq 0$$

La fonction f est continue sur $\left[2, \sqrt{u_n}\right] \subset \mathbb{R}^*$

La fonction f est dérivable sur $\left]2, \sqrt{u_n}\right[$

Alors d'après le TAF on écrit :

$$\exists\, c \in \left]2, u_n\right[\quad ; \quad \frac{f(u_n) - f(2)}{u_n - 2} = f'(c)$$

$$\Longrightarrow \quad 2 < c < u_n \quad ; \quad \left(\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2}\right) = \frac{4 - c}{c^3}$$

$$f'(c) = \frac{-1}{c^2} + \frac{4}{c^3} = \frac{4 - c}{c^3}$$

■ $2 < c < u_n \quad \Longrightarrow \quad -u_n < -c < -2$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{4 - u_n < 4 - c < 2} \rightsquigarrow (1)$$

■ $2 < c < u_n \quad \Longrightarrow \quad 8 < c^3 < u_n^3$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{u_n^3} < \frac{1}{c^3} < \frac{1}{8}} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{4 - u_n}{u_n^3} < \frac{4 - c}{c^3} < \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4 - c}{c^3} < \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(c) < \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2}\right) < \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad (u_{n+1} - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

2ème Méthode :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2} = \frac{u_n - 2}{u_n^2}$$

■ $u_n > 2 \quad \Longrightarrow \quad u_n^2 > 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{u_n^2} < \frac{1}{4}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2) \quad ; \quad u_n > 2$$

$$\Longrightarrow \quad (u_{n+1} - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $Q(n)$: $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

L'initialisation :

On a : $Q(0)$: $0 < 3 - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

■ $Q(n)\ est\ vraie \quad \Longrightarrow \quad 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{4}(u_n - 2) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < (u_{n+1} - 2) < \frac{1}{4}(u_n - 2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < (u_{n+1} - 2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \quad \Longrightarrow \quad Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) comme : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$Et\ comme\ \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad car\ -1 < \frac{1}{4} < 1$$

Alors d'après le critère de comparaison :

$$\lim_{n\infty}(u_n - 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = 2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 93 :

1) Soit $x \in]0,1]$ et on procède ainsi :

■ $x \in]0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$
$\Rightarrow -1 \leq -x < 0$
$\Rightarrow 0 \leq 1 - x < 1$
$\Rightarrow \boxed{0 \leq \sqrt{1-x} < 1} \rightsquigarrow (1)$

■ $x \in]0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$
$\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{2}x < 0$
$\Rightarrow \boxed{\frac{-1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}x < 1} \rightsquigarrow (2)$

■ $x \in]0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$
$\Rightarrow 1 \leq x + 1 < 2$
$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} < \sqrt{2}$
$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 1} \rightsquigarrow (3)$

La conclusion : d'après les trois résultats ci-dessus on en déduit que :

$$\begin{cases} et \quad \sqrt{1-x} \geq 0 \\ et \quad 1 - \frac{1}{2x} > 0 \\ et \quad \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 0 \end{cases}$$

C'est à dire trois quantités positives

■ $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = \frac{x^2}{4} > 0$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2 > 0$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 > \left(\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{1}{2}x > \sqrt{1-x}} \rightsquigarrow (4)$

■ $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2$

$= \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right)$

$= \frac{4 - 4(x+1) + 4x(x+1) - x^2(x+1)}{4(x+1)}$

$= \frac{-x^3 + 3x^2}{4(x+1)} = \frac{x^2(3-x)}{4(x+1)} > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 > \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} > 1 - \frac{1}{2}x} \rightsquigarrow (5)$

$(4)\ et\ (5) \Rightarrow \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on procède ainsi :

■ $u_n - u_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^n}$

Ainsi par la méthode descendante on a :

$\hookrightarrow u_1 - u_0 = 1 - \frac{1}{2^1}$

$\hookrightarrow u_2 - u_1 = 1 - \frac{1}{2^2}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\hookrightarrow u_n - u_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^n}$

On effectue l'addition entre ces égalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui s'en vont on trouve :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{k=n} 1 - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n - \frac{1}{2} = n - \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n - \frac{1}{2} = n - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = n - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

3) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(n - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$$= \lim_{n\infty} n - \lim_{n\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= +\infty - \frac{1}{2} + 0 = +\infty$$

4) Soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et $k \epsilon \mathbb{N}^*$; $1 \leq k \leq n$

$On\ a\ :\quad \forall\, x \,\epsilon\,]0,1] \quad ; \quad 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$Pour \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad on\ aurait\ :$

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Par passage à la somme on trouve :

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) < \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n - \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{2}\right)^k < v_n$$

$$\Rightarrow \quad n - \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) < v_n$$

$$\Rightarrow \quad n - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < v_n$$

$$\Rightarrow \quad n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n < v_n$$

5) $Comme \quad \lim\limits_{n\infty}\left(n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = +\infty$

Alors selon le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n\infty}(v_n) = +\infty$$

Solution N° 94 :

1) calcul de quelques termes de la suite

u_0	u_1	u_1	u_3
1	**2**	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$

2) la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est un suite ni arithmétique ni géométrique.

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède ainsi :

■ $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n)$

$$= \left(\frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{2}u_{n+1}\right)(u_{n+1} - u_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)(u_{n+1} - u_n)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} - u_n)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)^2 \geq 0$$

4) comme $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n)$ est une quantité positive alors nécessairement les quantités :

$(u_{n+2} - u_{n+1})$ et $(u_{n+1} - u_n)$

Auraient le même signe c'est à dire les deux sont à la fois positives ou négatives pour tout n de $\mathbb{N}$.

Comme $(u_1 - u_0) = (2 - 1) = 1 \geq 0$

Alors toutes les quantités $(u_{n+1} - u_n) \geq 0$

C'est à dire : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n \geq 0$

C'est à dire : $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_{n+1} \geq u_n$

C'est à dire $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est croissante.

5) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(u_{n+2} - u_{n+1})}{(u_{n+1} - u_n)} = \frac{(u_{n+2} - u_{n+1})}{(u_{n+1} - u_n)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - u_n)} = \frac{1}{2} \ \epsilon \ \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\Longrightarrow \quad (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ \textit{est géométrique de raison} \frac{1}{2}$$

6) comme (v_n) est géométrique Alors :

$$\begin{matrix} \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On prend $p = 0$ on trouve :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

7) comme $v_n = u_{n+1} - u_n$ Alors :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = u_{n+1} - u_n$$

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = u_1 - u_0$$

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^1 = u_2 - u_1$$

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = u_3 - u_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

On additionne ces égalités côte à côte et en prenant en considération les termes qui s'en vont dans le côté de droite on trouve :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = u_n - u_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

■ $0<\frac{1}{2}<1 \quad \Rightarrow \quad 0<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1 \;;\; \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad -1<-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<0 \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad 2<3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3 \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad 2<u_n<3 \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n\geq 1} \ est \ born\acute{e}e$$

9) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$$= 3-\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3-0 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \quad car \quad -1<\frac{1}{2}<1$$

Solution N° 95 :

1) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}$

$$= \frac{\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}$$

$$= \frac{\frac{-1}{2}(u_{n+1}-u_n)}{(u_{n+1}-u_n)} = \frac{-1}{2} \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{-1}{2}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n\geq 0} \ est \ g\acute{e}om\acute{e}trique \ de \ raison \ \frac{-1}{2}$$

2) Comme (v_n) est géométrique Alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N} \\ \forall p \leq n\end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-p}$$

On prend $p=0$ on trouve alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad v_n = 1\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n}$$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède ainsi :

■ $v_n = u_{n+1}-u_n$

$\hookrightarrow \quad v_0 = u_1 - u_0$

$\hookrightarrow \quad v_1 = u_2 - u_1$

$\hookrightarrow \quad v_2 = u_3 - u_2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\hookrightarrow \quad v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

En additionnant ces égalités côte à côte et bien entendu en prenant en considération les termes qui s'en vont on trouve alors :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} v_i = u_n - u_0 \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = u_n - 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

4) On a : $\mathcal{S}_n = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} v_i = u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^i = u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^0 \left(\frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1-0+1}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}\right) = u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

5) $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty} \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$$= \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}$$

Solution N° 96 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2}$

$$= \frac{(x_n)^2 + 2}{2x_n} - \frac{\sqrt{2}(2x_n)}{2x_n}$$

$$= \frac{(x_n)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x_n + \left(\sqrt{2}\right)^2}{2x_n}$$

$$= \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2x_n}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) \; : \; x_n > \sqrt{2}$

L'initialisation :

On a : $x_0 = \frac{\sqrt{9}}{2} > \frac{\sqrt{8}}{2}$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $x_n > \sqrt{2}$

■ $P(n)\ est\ vraie \quad \Rightarrow \quad x_n > \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad \left(x_n - \sqrt{2}\right)^2 > 0 \quad et \quad 2x_n > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2x_n} > 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} - \sqrt{2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} > \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad x_n > \sqrt{2}$

C'est à dire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par le nombre $\sqrt{2}$

3) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $x_{n+1} - x_n = (x_{n+1} - \sqrt{2}) - (x_n - \sqrt{2})$

$$= \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} - (x_n - \sqrt{2})$$

$$= \left(\frac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n}\right)(x_n - \sqrt{2} - 2x_n)$$

$$= \left(\frac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n}\right)(-x_n - \sqrt{2})$$

$$= \frac{-(x_n - \sqrt{2})(x_n + \sqrt{2})}{2x_n} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad x_{n+1} - x_n < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \quad ; \quad x_{n+1} < x_n$$

$$\Longrightarrow \quad (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \ est\ strictement\ décroissante$$

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n)\ :\ 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

L'initialisation :

On a : $0 < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

■ $\dfrac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_n - \sqrt{2}} = \dfrac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}x_n}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $x_n > \sqrt{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}\cdot x_n > 0$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{2}\cdot x_n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}\cdot x_n} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot x_n} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}\cdot x_n} < \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_n - \sqrt{2}}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad (x_{n+1} - \sqrt{2}) < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2})$$

■ $Q(n)\ est\ vraie \ \Longrightarrow \ (x_n - \sqrt{2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2}) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \quad (x_{n+1} - \sqrt{2}) < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{(x_{n+1} - \sqrt{2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \rightsquigarrow (1)$$

$On\ a\ encore \ : \ \boxed{x_{n+1} - \sqrt{2} > 0} \rightsquigarrow (2)$

$$(1)\ et\ (2) \quad \Longrightarrow \quad 0 < x_{n+1} - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad Q(n+1)\ est\ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n) \ \Longrightarrow \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n\epsilon\mathbb{N} \ ; \ 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5) $on\ a\ :\ 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$Comme\ \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\ car\ -1 < \frac{1}{2} < 1\ Alors:$

$$\lim_{n\infty}\left(x_n - \sqrt{2}\right)$$

Et ce d'après le critère de comparaison

$$\Leftrightarrow \lim_{n\infty}(x_n) = \sqrt{2}$$

Solution N° 97 :

1) calcul de quelques termes de la suite

u_0	u_1	u_2	u_3
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}_{\frac{n(n-1)}{3}} + u_n = \frac{n(n+1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{3} + u_n = \frac{n(n+1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{n(n+1)}{3} - \frac{n(n-1)}{3} = \frac{2n}{3}$$

De la même manière on a :

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{\frac{n(n+1)}{3}} + u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{3} + u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{3} = \frac{2(n+1)}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $On\ a\ :\ u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\ et\ u_n = \frac{2n}{3}$

■ $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{3} - \frac{2n}{3} = \frac{2}{3}\ \epsilon\ \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n\geq 0}\ est\ arithmétique\ de\ raison\ \frac{2}{3}$$

Solution N° 98 :

1) calcul de quelques termes de la suite

u_1	u_2	u_3
1	$\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$	$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$

2) Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k\sqrt{k}}$

$$= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ strictement\ croissante$$

3) Soit $p \geq 2$ et on procède ainsi :

■ $\left(\sqrt{\frac{p}{p-1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2p} + 1\right)^2$

$$= \frac{p}{p-1} - \frac{1}{4p^2} - 1 - \frac{1}{p}$$

$$= \frac{4p^3 - (p-1) - 4p^2(p-1) - 4p(p-1)}{4p^2(p-1)}$$

$$= \frac{3p+1}{4p^2(p-1)} > 0 \quad car \quad p \geq 2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p}{p-1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2p} + 1\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p}{p-1}}\right)^2 > \left(\frac{1}{2p} + 1\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{p}{p-1}} > \frac{1}{2p} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{p}{p-1}} - 1 > \frac{1}{2p}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}} - \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p-1}} > \frac{1}{2p}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}{\sqrt{p-1}} > \frac{1}{2p}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p-1}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) $On\ a \quad \forall p \geq 2 \ ; \quad \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} > \frac{1}{2p\sqrt{p}}$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2 \cdot 3\sqrt{3}}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} > \frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{4}}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2 \cdot n\sqrt{n}}$$

On additionne ces inégalités côte à côte en prenant en considération les termes qui vont disparaître dans le côté de gauche on trouve alors :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1 > 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} > \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(3 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) > u_n} \rightsquigarrow (1)$$

Or on a (u_n) est strictement croissante

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > u_0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad \boxed{u_n > 1} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \ \Longrightarrow \ \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \ ; \ 1 < u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Remarque : (u_n) est convergente car croissante et étant majorée par 3
Pourquoi majorée par 3 ?

$$Car \ : \ u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} < 3$$

Et en plus et par passage aux limites on obtient un encadrement de $\lim(u_n)$

■ $1 < u_n < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leq \lim_{n\infty}(u_n) \leq \lim_{n\infty}\left(3 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leq \lim_{n\infty}(u_n) \leq 3$$

Solution N° 99 :

1) Calcul de quelques termes de la limite

u_1	u_2	u_3
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$

2) soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{u_n} = \frac{\left(\frac{2n+2}{3n}\right)u_n}{n+1} \times \frac{n}{u_n}$$

$$= \frac{2(n+1)n}{3n(n+1)} = \frac{2}{3} \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

$$\Longrightarrow \ (v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*} \ est\ géométrique\ de\ raison \frac{2}{3}$$

3) comme $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ est géométrique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \\ \forall p \leq n \end{matrix} \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 1$ Alors :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = v_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$On\ a\ encore \quad : \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{u_n}{n} \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

4) $\mathcal{S}_n = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n}$

$$= v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{2}{3}}\right)$$

$$= 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n) = \lim_{n\infty} 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 2(1-0) = 2$$

Solution N° 100 :

1) Calcul de quelques termes de la limite

u_1	u_2	u_3
1	$\sqrt{2}+1$	$2\sqrt{2}-1$

2) soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et on procède comme suit

■ $$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{(1-\sqrt{2})u_n+2\sqrt{2}-2}{u_n-2}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2})\left(u_n+\frac{2\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}}\right)}{u_n-2}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2})(u_n+2)}{u_n-2}=(1-\sqrt{2})\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ \frac{v_{n+1}}{v_n}=(1-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow\quad \forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ v_{n+1}=(1-\sqrt{2})v_n$$

$(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ *est géométrique de raison* $1-\sqrt{2}$

3) comme $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est géométrique alors :

$$\begin{matrix}\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\\ \forall p\leq n\end{matrix}\ ;\ v_n=v_p\cdot(1-\sqrt{2})^{n-p}$$

On choisit $p=1$ Alors :

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ v_n=v_1(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ v_n=-(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ -(1-\sqrt{2})^{n-1}=u_n-2$$

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\ ;\ u_n=2-(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

4) $$\mathcal{S}_n=\sum_{k=1}^{k=n}u_k=\sum_{k=1}^{k=n}\left(2-(1-\sqrt{2})^{k-1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}2-\sum_{k=1}^{k=n}(1-\sqrt{2})^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}2-\sum_{k=0}^{k=n-1}(1-\sqrt{2})^{k}$$

$$=2n-(1-\sqrt{2})^0\left(\frac{1-(1-\sqrt{2})^{n-1-0+1}}{1-(1-\sqrt{2})}\right)$$

$$=2n-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-(1-\sqrt{2})^n\right)$$

5) $$\lim_{n\infty}(\mathcal{S}_n)=\lim_{n\infty}2n-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\infty}\left(1-(1-\sqrt{2})^n\right)$$

$$=+\infty-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-0)=+\infty$$

Solution N° 101 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n)$: $u_n>1$

L'initialisation :

On a : $u_0=\frac{3}{2}>1$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n>1$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n)^2 + u_n}{(u_n)^2 + 1} - 1$

$$= \frac{(u_n)^2 + u_n - (u_n)^2 - 1}{(u_n)^2 + 1}$$

$$= \frac{u_n - 1}{(u_n)^2 + 1} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} - 1 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} > 1$$

$$\Longrightarrow \quad P(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \ \Longrightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_n > 1$

2) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit

■ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n)^2 + u_n}{(u_n)^2 + 1} - u_n$

$$= \frac{(u_n)^2 + u_n - (u_n)^3 - u_n}{(u_n)^2 + 1}$$

$$= \frac{(u_n)^2 (1 - u_n)}{(u_n)^2 + 1} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} < u_n$$

$$\Longrightarrow (u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}} \ est \ strictement \ décroissante$$

3) Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

■ $\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \dfrac{\left(\dfrac{(u_n)^2 + u_n}{(u_n)^2 + 1}\right) - 1}{u_n - 1}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \left(\frac{u_n - 1}{(u_n)^2 + 1}\right) \times \left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = \frac{1}{(u_n)^2 + 1}$$

■ $u_n > 1 \quad \Longrightarrow \quad (u_n)^2 > 1$

$$\Longrightarrow \quad 1 + (u_n)^2 > 2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{1 + (u_n)^2} < \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} < \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad (u_{n+1} - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

4) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) \ : \ 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

L'initialisation :

On a : $0 < u_0 - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

■ $Q(n) \ est \ vraie \quad \Longrightarrow \quad 0 < u_n - 1 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{2}(u_n - 1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < u_{n+1} - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad Q(n+1) \ est \ vraie$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \ est \ vraie \\ Q(n) \ \Rightarrow \ Q(n+1) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) $Soit \ \ k \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 < u_k - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\Rightarrow \quad 1 < u_k < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} 1 < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < \sum_{k=0}^{k=n-1} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad n < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < n + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad n < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + n$$

6) $Comme \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k > n \quad et \quad \lim_{n\infty} n = +\infty$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que :

$$\lim_{n\infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k \right) = +\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

ROYAUME DU MAROC

SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2021-2022

Tome 3 : Dérivation et étude de fonctions

- **Dérivabilité en un point, sur un intervalle**
- **Approximation affine d'une fonction**
- **Théorème de Rolle**
- **Théorème des accroissements finis**
- **Variations d'une fonction numérique**
- **Branches infinies d'une courbe d'une fonction**
- **Concavité d'une fonction numérique**
- **Travailler avec la règle de l'Hôpital**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI
Ouarzazate 2021
Pour Novembre 2021