



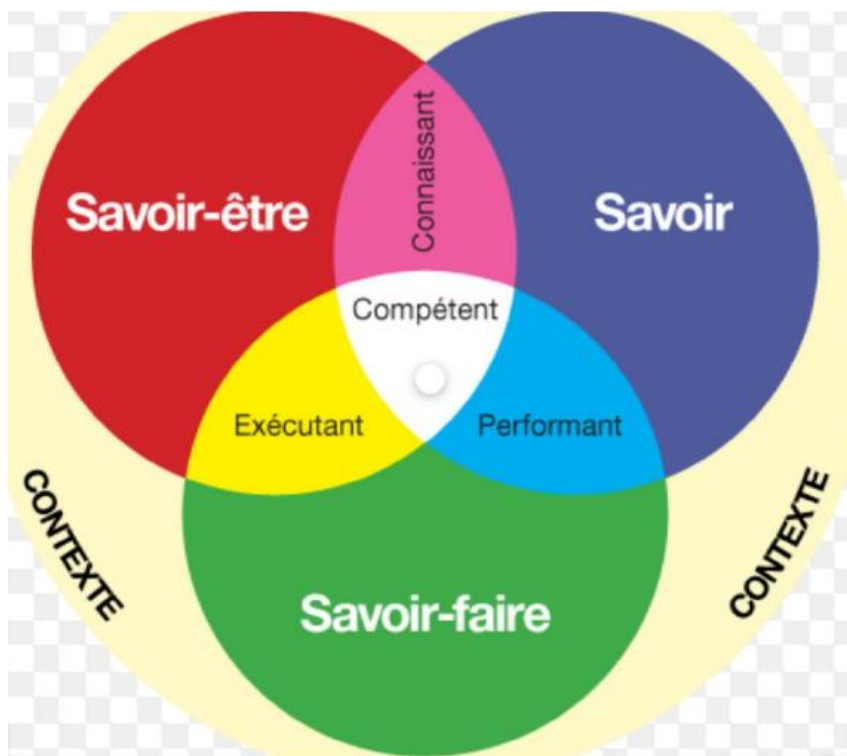
Année Scolaire

2019-2020

SUJETS DE MATHS AU BACC & TI 2020

DOCUMENT DE TRAVAIL

Pour une préparation intense à l'examen !!!



Bonne Réussite au Baccalauréat 2020



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N° 1

EXERCICE 1 : 5 points

- P est un polynôme à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + 3iz - 5 + 5i$.
 - Vérifier que le nombre complexe $-1 - i$ est une racine de P . 0,25pt
 - Déterminer les complexes a et b tels que : $P(z) = (z + 1 + i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. 0,75pt
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 - i, z_B = 2 - i$ et $z_C = -1 + 2i$.
 - Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixes z tels que :
 $|z - 2 + i| = |z + 1 - 2i|$, puis vérifier que le point A appartient à $\mathcal{D}$. 0,75pt
 - Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. 0,75pt
 - En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,25pt
- On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C .
 - Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S . 0,5pt
 - Donner l'écriture complexe de S . 0,5pt
 - $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC . Déterminer les caractéristiques de $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par S . 0,75pt

EXERCICE 2 : 5 points

- A)** Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : cinq vertes, trois rouges et deux jaunes. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On considère les événements A : « les boules tirées sont vertes » ; B : « les boules tirées sont de la même couleur » ; C : « les boules tirées sont chacune de couleur différente ».
- Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$. 1,5pt
 - Soit X la variable aléatoire égale au nombre de couleurs obtenues après le tirage.
 - Déterminer la loi de probabilité de X . 1pt
 - Calculer l'espérance mathématique de X . 0,5pt
- B)** Une entreprise achète, utilise et vend des machines après un certain nombre x_i d'années. Après six années, l'évolution du prix de vente y_i d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation se présente comme suit :

Nombre d'années x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de FCFA	150	125	90	75	50	45

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x . **1,5pt**
2. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation. **0,5pt**

PROBLEME : 10 points

PARTIE A : 4,5 points

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à termes positifs définie par : $U_1 = 1$ et $\forall n \geq 1, (U_{n+1})^2 = 2U_n$.

1. Calculer U_2, U_3 et U_4 . On donnera les résultats sous la forme 2^r où $r \in \mathbb{Q}$. **0,75pt**
2. On pose pour tout $n \geq 1, V_n = \ln U_n - \ln 2$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.
 - (a) Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. **0,75pt**
 - (b) Donner l'expression de V_n , puis celle de U_n en fonction de n . **1pt**
3. On désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et par T_n le produit des premiers termes de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (a) Calculer S_n et T_n en fonction de n . **1pt**
 - (b) Etudier la convergence éventuelle des suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. **1pt**

PARTIE B : 5,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.

1. Etudier les variations de g . **0,75pt**
2. En déduire le signe de $g(x)$. **0,5pt**
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. **0,5pt**
4. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Démontrer que pour tout réel $x, f'(x) = e^{-x}g(x)$. **0,5pt**
 - (b) Dresser le tableau de variation de f . **0,5pt**
 - (c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que $-1 < \alpha < 0$. **0,5pt**
5. (a) Démontrer que la droite (T) d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. **0,5pt**
 - (a) Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite (T) . **0,5pt**

B) 1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$. **0,5pt**

2. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$. **0,75pt**



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N° 2

EXERCICE 1 : 4,25 points

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - (1+2i)z + 1+7i = 0$. 0,75pt
- On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3, z_B = -2+i$ et $z_C = 7-6i$.
 - Placer les points A, B et C dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. 0,5pt
 - Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$; en déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{AB}, \vec{AC})$. 0,75pt
- S est une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (-1+i)z + 6-3i$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S . 0,75pt
 - Déterminer l'image du point B par S . 0,25pt
 - $\mathcal{C}$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. Déterminer et construire l'image Γ de ce cercle par l'application S et donner son équation cartésienne. 1pt

EXERCICE 2 : 4,75 points

- A) Le tableau suivant donne la production agricole y_i en tonnes, en fonction de la taille x_i , en hectares de l'exploitation, pour un ensemble de six exploitations d'une localité d'un pays.

x_i (en ha)	1	2	3	4	5	6
y_i (en t)	12	30	42	60	48	54

- Construire le nuage de points associés à cette série statistique double. 0,75pt
(On prendra 1cm pour un hectare en abscisse et 1cm pour 10 tonnes en ordonnées)
 - Déterminer le point moyen G et le placer. 0,25pt
 - Calculer la variance de x et la covariance de x et y . 1pt
 - Donner une équation cartésienne de la droite de régression de y en x et la tracer. 0,5pt
 - Donner une estimation de la production d'un domaine de 8 hectares. 0,5pt
- B) Dans cette localité, il y a 2% de la population contaminée par un virus.
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
 - La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
- On note V l'évènement «la personne est contaminée par le virus» et T l'évènement «le test est positif». $\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T .
- Préciser les valeurs des probabilités suivantes : $P(V), P(T), P_{\bar{V}}(T)$. 0,75pt

2. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$. 0,5pt

3. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492. 0,5pt

PROBLEME : 11 points

Le problème comporte trois parties A, B et C.

PARTIE A : Résolution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = xe^x$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$. 0,5pt

2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

(a) Déterminer a et b pour que u soit solution de (E) . 0,5pt

(b) Montrer que v est solution de (E_0) si et seulement si $u + v$ est solution de (E) . 0,5pt

(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) . 0,25pt

3. Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par l'origine du repère. 0,5pt

PARTIE B : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$. On pose $h(x) = 2(e^x - 1)$ et on définit la suite (U_n) par $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = h(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. 0,75pt

2. (a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles dont l'une est 0 et l'autre est notée α . 0,5pt

(a) Montrer que $g(x) = 0$ équivaut à $x = h(x)$. 0,25pt

(b) Montrer que $-1,60 < \alpha < -1,59$. 0,5pt

(c) Montrer que $h([-2; -1]) \subset [-2; -1]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [-2; -1]$. 0,5pt

(d) Montrer que pour tout $x \in [-2; -1], |h'(x)| \leq 0,8$. 0,25pt

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq 0,8 |U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq (0,8)^n$. 0,5pt

(f) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite. 0,5pt

(g) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. 0,5pt

3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x . 0,25pt

PARTIE C : Etude de la fonction principale et Calcul d'aire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. 0,5pt

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe. 0,5pt

3. Dresser le tableau de variations de f . (on montrera que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$). 1pt

4. Etudier les branches infinies de la courbe de f et tracer $\mathcal{C}$. 1pt

5. Soit m un réel strictement inférieur à α . Interpréter graphiquement le réel $\int_{\alpha}^m f(x) dx$. 0,25pt

6. Calculer $\int_{\alpha}^m xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire $\int_{\alpha}^m f(x) dx$. 1pt



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N° 3

EXERCICE 1 : 4,5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z : z^2 + 8\sqrt{3}z + 64 = 0$. 0,5pt
- On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.
Calculer les distances OA, OB et AB puis en déduire la nature du triangle OAB . 0,75pt
- On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D . 0,5pt
- On appelle G le barycentre des points pondérés $(O; -1), (D; 1)$ et $(B; 1)$.
 - Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$. 0,25pt
 - Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1cm) 0,5pt
 - Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme. 0,5pt
- Justifier l'égalité : $\frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$. 0,5pt
 - En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$, ainsi que la valeur du rapport $\frac{GC}{GA}$. Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ? 1pt

EXERCICE 2 : 4,5 points

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$.

- Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0; 2]$ par $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$. 1pt
 - En déduire que pour tout $t \in [0; 2]$, on a : $\frac{3}{2} \leq f(t) \leq \frac{7}{4}$. 0,5pt
 - Montrer que : $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n \leq \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$ 0,5pt
 - Montrer que si (U_n) possède une limite l , alors $3 \leq l \leq \frac{7}{2}$. 0,5pt
- Vérifier que pour tout $t \in [0; 2]$, $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. 0,5pt
 - En déduire le nombre $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$. 0,5pt
 - Montrer que pour tout $t \in [0; 2]$, $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ et en déduire que $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$. 1pt

PROBLEME : 11 points

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

PARTIE A : 8 points

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x-1+x \ln x}{x}$.
 - (a) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations. **1pt**
 - (b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$. **0,5pt**
2. On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = e^{x-1} - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = (x-1) \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 - (a) Quel est le domaine de définition de f ? **0,5pt**
 - (b) Etudier la continuité de f en 1. **0,5pt**
 - (c) Etudier la dérivabilité de f en 1. **1pt**
 - (d) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **1pt**
 - (e) Construire la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 2cm) **1pt**
 - (f) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. **0,5pt**
 - (g) Construire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le repère précédent. **0,5pt**
3.
 - (a) Déterminer sur l'intervalle $[1; +\infty[$ les primitives de la fonction $h : x \mapsto (x-1) \ln x$. **0,5pt**
 - (b) Déterminer en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 1$ et $y = 1$ avec $\lambda < 1$. **0,75pt**
 - (c) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}$. **0,25pt**

PARTIE B : 3 points

Un élève de **Terminale TI** doit se rendre dans son Lycée chaque matin à 7h30. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : la moto ou le taxi. L'élève part tous les jours à 7h00 de son domicile et doit arriver à 7h20 à son lycée. Il prend la moto 7 jours sur 10 et le taxi le reste du temps. Le jour où il prend la moto, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le taxi, il arrive en retard dans 5% des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note M l'événement : « l'élève se rend au Lycée à moto », T l'événement : « l'élève se rend au Lycée en taxi » et R l'événement : « l'élève arrive en retard au Lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités. **1pt**
2. Déterminer la probabilité de l'événement $M \cap R$. **0,5pt**
3. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,0192. **0,75pt**
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au Lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en taxi ? **0,75pt**



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N° 4

EXERCICE 1 : 5 points

A) Un hôtel d'une ville africaine établit un lien entre le taux d'occupation des chambres exprimé en pourcentage (%) et le montant des frais de publicité (exprimé en centaines de milliers de francs). Les résultats de cette analyse sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Frais de publicité	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux d'occupation	52	45	67	55	76	48	32	72

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette distribution et donne une interprétation de ce résultat. 1,25pt
- Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x . 0,75pt
- Quelle estimation peut-on faire du taux d'occupation de cet hôtel si les frais de publicité étaient de 4.000.000 FCFA ? 0,5pt

B) z est nombre complexe quelconque et $\mathcal{S}$ le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- Développer et réduire l'expression $(z + 2)(z^2 - 6z + 34)$. 0,5pt
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0$. 0,75pt
- A, B et C sont trois points de $\mathcal{S}$ d'abscisses respectives $z_A = -2, z_B = 3 + 5i$ et $z_C = 3 - 5i$.
La droite (BC) coupe l'axe des abscisses en K et r désigne la rotation de centre K .
(a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse. 0,5pt
(b) Préciser la mesure principale de l'angle de la rotation r telle que $r(B) = A$. 0,75pt

EXERCICE 2 : 4 points

Un Lycée bilingue de 930 élèves comporte une section anglophone et une section francophone. 30% des élèves sont en section francophone ; 40% des élèves du Lycée sont des garçons ; 25% des élèves garçons du Lycée sont en section anglophone.

- Recopier et compléter le tableau suivant :

Catégorie d'élèves	Effectif
Elèves en section Anglophone	
Elèves en section Francophone	
Elèves garçons en section Anglophone	
Elèves filles du Lycée	

1pt

- On choisit au hasard un élève du Lycée. On suppose que tous les choix d'un élève sont équiprobables. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- (a) A : « choisir un élève de la section anglophone » 1pt
- (b) B : « choisir un garçon sachant qu'il est un élève de la section anglophone » 1pt
- (c) C : « choisir un élève de la section anglophone sachant qu'il est un garçon » 1pt

PROBLEME : 11 points

A) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. On considère la transformation R définie par : à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y + 1 \end{cases}$$

1. (a) Donner l'écriture complexe de R. 1pt
- (b) En déduire la nature exacte et les éléments géométriques de R. 0,75pt

2. Soit h l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = -2z + 3i$.
Montrer que h est une homothétie de centre Ω d'affixe i. 0,75pt

3. On pose : $S = h \circ R$.
Déterminer la nature et les éléments géométriques de S. 0,75pt

B) On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}$.

1. Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$. 0,5pt
2. (a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. 1pt
- (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1; +\infty[$. 0,5pt

C) Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^2} + \ln(x-1)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$. 0,5pt
2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$. 0,75pt
- (b) En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. 0,75pt
3. (a) Calculer $f(2)$ puis déterminer une équation de la tangente (T) en 2. 0,5pt
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation graphique du résultat. 0,5pt
- (c) Tracer (T) et C_f . 1pt

D) On considère la fonction F définie sur $]1; +\infty[$ par $F(x) = -\frac{1}{e^x} + (x-1)\ln(x-1) - \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)x$.

1. (a) Calculer $F'(x)$. 0,5pt
- (b) Montrer que F est une primitive de f sur $]1; +\infty[$. 0,5pt

2. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en cm^2 . 0,75pt



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N° 5

EXERCICE 1 : 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M_n d'affixes $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n , puis z_n en fonction de z_0 et de n . 1pt
2. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_0 et z_n . 1pt
3. Déterminer la distance OM_n en fonction de n . 0,5pt
4. On pose $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$. 0,75pt
(c) Exprimer L_n en fonction de n et calculer sa limite. 0,75pt

EXERCICE 2 : 5 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i, z_B = \frac{1}{2}i$ et $z_C = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$.
Pour $z \neq z_A$, on pose $Z' = \frac{2z - i}{z + 1 - i}$ et $z = x + iy$ où x, y sont des nombres réels.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z' en fonction de x et y . 0,75pt
2. Déterminer et construire l'ensemble (Σ) des points M d'affixes z tels que Z' soit réel. 0,5pt
3. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixes z tels que Z' soit imaginaire pur. 0,75pt
4. Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M d'affixes z tels que $|Z'| = 2$. 0,5pt
5. Le point B appartient-il à (Σ) et à (Γ) ? Justifier la réponse. 0,5pt
6. Soit M' le point d'affixe Z' .
(a) Montrer que $OM = \frac{\sqrt{2}DM'}{EM'}$ où D est le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et E un point dont on déterminera l'affixe. 0,75pt
(b) En déduire et construire l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M' d'affixe Z' tels que $|z| = \sqrt{2}$. 0,5pt
(c) Ecrire $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. 0,75pt

PROBLEME : 11 points

Le problème comporte trois parties A, B et C.

PARTIE A : 1,75 points

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.

1. Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$. (on pourra utiliser une intégration par parties) 1,25pt
2. En déduire les valeurs exactes de I et J . 0,5pt

PARTIE B : 5,5 points

On considère les fonctions g et h définies sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2 \ln x - xe + 1$ et $h(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$ où e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$. On note (Γ) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2cm.

1. Etudier les variations de g . 1pt
2. (a) Montrer que dans $[0, 5; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α . 0,5pt
 (b) Déterminer un encadrement de α à 0,1 près. 0,5pt
 (c) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x . 0,5pt
3. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition. 0,5pt
4. Soit h' la fonction dérivée de h .
 (a) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis que $h(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$. 1pt
 (b) Dresser le tableau de variation de h . 0,5pt
 (c) Construire la courbe (Γ) . 1pt

PARTIE C : 3,75 points

Répondre par **VRAI** ou **FAUX** aux différentes affirmations suivantes en y apportant à chaque fois une justification.

1. Toute suite positive et croissante est divergente, car elle tend vers $+\infty$. 0,75pt
2. f est la fonction définie sur $] -0,5; +\infty[$ par $f(x) = 2(x-1)\ln(2x+1)$.
 L'équation $f(x) = x-1$ admet une unique solution : $x = \frac{-1 + \sqrt{e}}{2}$. 1pt
3. L'équation différentielle : $y'' + 2y' - 3y = 0$ admet pour solution les fonctions f définies par $f(x) = e^x (A \cos 3x - B \sin 3x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$. 1pt
4. Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n$. On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$.
 (r_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1pt