

EXERCICE 1

Partie A : Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 1[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & \text{si } -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

- 1 Étudier la continuité de f sur I .
- 2 Étudier la dérivabilité de f sur I et déterminer sa fonction dérivée f' .
- 3 Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .
- 4
 - a Construire dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative (C) de f . On précisera les demi-tangentes au point d'abscisse (-1) .
 - b Construire dans le même repère la courbe (C') de f^{-1} .
- 5 Calculer $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ puis écrire une équation de la tangente à la courbe (C') en son point d'abscisse $-\frac{1}{4}$.
- 6 Résoudre dans \mathbb{R} les équations :
 - a $(f(x))^6 = 64$
 - b $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt{2}$
 - c $(f(x))^5 = -4\sqrt{2}$

Partie B : Soit g la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, par $g(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$

- 1 Étudier la dérivabilité de g et montrer que : $(\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[), g(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$
- 2 Montrer que g réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $]0; +\infty[$.
- 3 Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $(\forall x \in]0; +\infty[); (g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$
- 4 Soit la fonction ϕ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\phi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - a Montrer que ϕ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.
 - b En déduire l'expression de $\phi(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

EXERCICE 2

Partie A: Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{x}{x-2}} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Montrer que f est continue en 0.
 - b Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
 - c Dresser le tableau de variations de f .
- 2
 - a Vérifier que : $(\forall x \in [1; +\infty[), \text{ on a } f'(x) \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}$.
 - b En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[1; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1; 2[$.
 - c Construire la courbe \mathcal{C}_f de f .
- 3
 - a Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $I =]0; 2[$. On note $g = f^{-1}$.
 - b Expliciter $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; 2[$.
 - c Construire la courbe \mathcal{C}' de g dans le même repère.
- 4 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
 - a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < \alpha$.
 - b Étudier la monotonie de la suite (u_n) , en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Partie B: Soit F la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par :

$$F(x) = \begin{cases} f(-2\tan^2(\pi x)) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1
 - a Montrer que F est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
 - b Vérifier que : $(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]), F(x) = 1 - \sin(\pi x)$.
 - c Dresser le tableau de variation de F .
- 2
 - a Montrer que F réalise une bijection de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Soit $G = F^{-1}$.
 - b Montrer que G est dérivable sur $]0; 1[$ et que $G'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

3 On pose $H(x) = G(1 - \sin(x)) + G(1 - \cos(x))$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- a Montrer que H est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- b Montrer que H est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.
- c Calculer $H(0)$. En déduire que $(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right])$, on a :

$$2G(1 - \sin(x)) + 2G(1 - \cos(x)) - 1 = 0$$

EXERCICE 3

Partie A : Soit la fonction f définie sur $]0; \pi[$, par $f(x) = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]^3$.

- 1
 - a Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - b Pour $x \in]0; \pi[$, calculer $f'(x)$.
- 2
 - a Montrer que f réalise une bijection de $]0; \pi[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b Écrire une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
 - c Construire \mathcal{C}_f et \mathcal{C}' dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 3 Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $f^{-1}'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$.
- 4 On pose $\phi(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
 - a Calculer $\phi'(x)$.
 - b En déduire que $\phi(x) = \pi$.

Partie B : Soit la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}}{x-1} & \text{si } x \in [0; +\infty[\setminus \{1\} \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

- 1
 - a Montrer que h est continue en 1.
 - b Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = 3x - 1$ admet une seule solution α et que $\alpha \in]0; 1[$.
- 2 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbf{N} par $u_0 = 1$ et $3u_{n+1} = 1 + f^{-1}(u_n)$.
 - a Montrer que (u_n) est décroissante.
 - b Montrer que : $(\forall n \in \mathbf{N}); 0 \leq u_n \leq 1$.
 - c Déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
- 3 Soient les suites (v_n) et (w_n) définies par : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(n+k)$ et $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{1}{n+k}\right)$ avec $g = f^{-1}$.

- a) Montrer que $g(n) \leq v_n \leq g(2n)$.
 - b) Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite.
- 4
- a) Calculer $v_n + w_n$.
 - b) Dédurre $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

EXERCICE 4

Partie A: On considère l'application f définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$.

- 1 Étudier les variations de f et construire sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2cm).
- 2 Montrer que f réalise une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
Soit g la bijection réciproque de f . Étudier ses variations; sa continuité et sa dérivabilité ainsi que $g(x)$. Calculer $g'(0)$ et $g'(1)$. Construire la courbe Γ de g dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie B: Soit ϕ la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $\phi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$.

- 1 Montrer que ϕ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- 2 Calculer pour $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\tan[\phi(x)] \cdot \tan[g(x)]$.
 - a) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), \phi(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$.
 - b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+), g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Retrouver alors le résultat : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), \phi'(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$.
 - c) Étudier les variations de ϕ .
- 3 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$.
Montrer que : $0 < \phi(a) - \phi(b) < \frac{\pi}{2}$ et $\tan[\phi(a) - \phi(b)] = \frac{b-a}{1+ab}$.

Partie C: Soit la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \phi(n^2 + 3n + 3)$.

- 1 Étudier la convergence de la suite (u_n) .
- 2 En utilisant (B-3) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \phi(n+1) - \phi(n+2)$.
- 3 Calculer $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ en fonction de $\phi(n+2)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 5

Partie A : Soit la fonction f définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. \mathcal{C}_f désigne la courbe de f dans un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2cm).

- 1 Étudier les variations de f puis construire \mathcal{C}_f (on précisera les demi-tangentes à \mathcal{C}_f aux

points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$).

- 2
 - a Montrer que f réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0; 1]$.
Pour la suite du problème g désigne sa bijection réciproque et \mathcal{C} la courbe de g dans le même repère.
 - b Construire \mathcal{C}' (on précisera les demi-tangentes à \mathcal{C}' aux points d'abscisses 0 et 1).
 - c Montrer que g est dérivable sur $[0; 1[$ et que $g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.
- 3 Soit ϕ et h les fonctions définies sur $[0; 1]$ par $\phi(x) = \sqrt[4]{1-x^4}$ et $h(x) = g(\phi(x))$. \mathcal{C}'' désigne la courbe de h dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - a Sur quel ensemble ϕ est dérivable et calculer $\phi'(x)$.
 - b Montrer que h est continue sur $[0; 1]$; dérivable sur $[0; 1[$ et que $h'(x) = -g'(x)$.
 - c Calculer $h(0)$, en déduire que $(\forall x \in [0; 1])$, $h(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$.
- 4 On pose (Δ) la droite d'équation $y = x$, (Δ_1) l'axe des abscisses et $\vec{u} = \frac{\pi}{2} \vec{j}$.
 - a Caractériser $t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta_1)}$ puis $t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta)}$.
 - b En déduire que \mathcal{C}'' est l'image de \mathcal{C}_f par une rotation dont on précisera l'angle et les coordonnées de son centre ω (on ne demande pas la construction de \mathcal{C}'').

Partie B : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n^2}\right)$

- 1 En utilisant le sens de variation de h , vérifier que pour tout $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ on a :
$$h\left(\frac{1}{n}\right) \leq h\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
- 2 En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite ℓ .

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Partie A:

- 1 Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2 Étudier les variations de f . En déduire que f réalise une bijection de $]-1; 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3
 - a Construire dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes \mathcal{C}_f de f et \mathcal{C}' de f^{-1} .
 - b Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Partie B:

- 1
 - a Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1; 1[$ une solution unique α .
 - b Prouver que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{5}$.

2 Montrer que $(\forall x \in]\frac{1}{2}; \frac{3}{5}[)$, $f(x) \in]\frac{1}{2}; \frac{3}{5}[$ et que $|f'(x)| < \frac{8}{9}$
 (on pourra remarquer que $(\forall x \in]-1; 1[)$, $f(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \cdot f(x)$)

3 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbf{N} par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbf{N})$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a Montrer que $(\forall n \in \mathbf{N})$, $\frac{1}{2} \leq u_n < \frac{3}{5}$.

b Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{8}{9}|u_n - \alpha|$. Déduire que la suite (u_n) est convergente vers α .

Partie C: $(\forall x \in [0; \pi[)$, on pose $g(x) = 1 - f(\cos(x))$.

1 a Prouver que g est continue sur $[0; \pi[$.

b Montrer que $(\forall x \in [0; \pi[)$, on a : $g(x) = 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

2 a Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur un intervalle E que l'on précisera. Trouver $h(0)$.

b Montrer que h est dérivable sur E et calculer $h'(x)$ pour $x \in E$.

3 Soit ϕ la fonction définie sur $] -\infty; 1[$ par : $\phi = h \circ k$ avec $k(x) = \frac{x}{x-1}$.

a Déterminer $k(] -\infty; 1[)$.

b Montrer que ϕ est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et que $\phi'(x) = -h'(x)$.

c En déduire que $(\forall x \in] -\infty; 1[)$ on a : $h\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi - h(x)$.

4 Soient (v_n) et (t_n) les suites définies par : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{k=2n} h\left(\frac{1}{k}\right)$ et $t_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{k=2n} h\left(\frac{1}{1-k}\right)$

a Montrer que $(\forall k \leq n)$ on a : $h\left(\frac{1}{n}\right) \leq h\left(\frac{1}{k}\right) \leq h\left(\frac{1}{2n}\right)$.

b En déduire un encadrement de v_n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

c Prouver de même que la suite (t_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

EXERCICE 7

Partie A: Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

1 a Dresser le tableau de variation de g .

b En déduire le signe de $g(x)$.

2 Montrer que pour tout $x \in [4; 6]$, $g(x) \leq \frac{3}{5}$.

Partie B: Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 4 - \sqrt{x^2 - 9}$ et soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Étudier la dérivabilité de f à gauche en -3 et interpréter graphiquement le résultat obtenu .
 - b Étudier la dérivabilité de f à droite en 3 et interpréter graphiquement le résultat obtenu .
- 2 Dresser le tableau de variation de f .
- 3
 - a Montrer que la droite $(\Delta) : y = 2x + 4$ est une asymptote à \mathcal{C}_f .
 - b Déterminer les points d'intersection de \mathcal{C}_f avec la droite $(D) : y = x$.
 - c Construire la courbe \mathcal{C}_f .
- 4 Soit h la restriction de f à $[3; +\infty[$.
 - a Montrer que h réalise une bijection de $[3; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
 - b Expliciter $h^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
 - c Construire la courbe \mathcal{C}' de h^{-1} dans le même repère .

Partie C: Soit la suite (u_n) définie sur \mathbf{N} par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $4 \leq u_n \leq 6$.
- 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - 5| \leq \frac{3}{5}|u_n - 5|$.
- 3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

Partie D: Soit ϕ la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $\phi(x) = g\left(\frac{3}{\cos(x)}\right)$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

- 1 Montrer que ϕ est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.
- 2 Montrer que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $\phi(x) = 1 - \frac{1}{\sin(x)}$.
- 3 Dresser le tableau de variation de ϕ et déduire que ϕ réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle que l'on déterminera .
- 4 Déterminer le domaine de dérivabilité de ϕ^{-1} et calculer $(\phi^{-1})'(x)$.
- 5 Soit la suite (v_n) définie sur \mathbf{N}^* par $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi^{-1}\left(-\frac{k}{n^2}\right)$.
 - a Montrer que : $(\forall n \in \mathbf{N})$, on a : $\phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \leq v_n \leq \phi^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
 - b En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite .

EXERCICE 8

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in \mathbf{R}$.

- 1** a) Montrer que f admet au moins une primitive sur \mathbb{R} .
 b) Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Montrer que F est impair.
- 2** $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; on pose $G(x) = F(\tan(x))$
- a) Montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $G(x)$. En déduire que $G(x) = x$.
 b) Calculer $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- 3** Soit H la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = F\left(\frac{1}{1+x}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$. Calculer $H'(x)$.
 En déduire que $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE 9

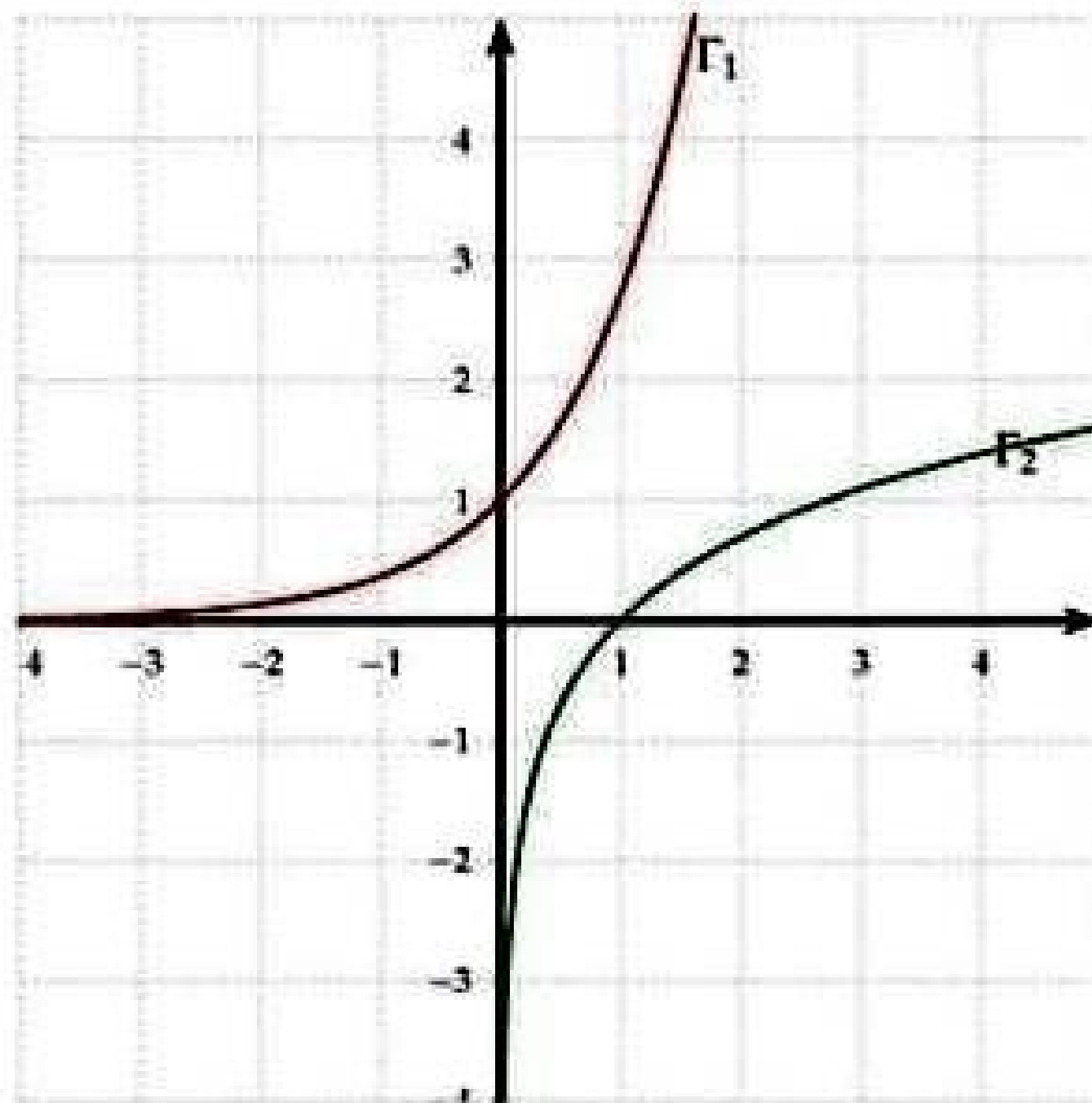
Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $x \in]1; +\infty[$

- 1** Montrer que f admet une primitive sur $]1; +\infty[$.
- 2** Soit F la primitive de f sur $]1; +\infty[$ qui s'annule en 1 et G la fonction définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$
- a) Montrer que G est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.
 b) En déduire que $(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[); G(x) = \tan(x) - x$
 c) Calculer $F(\sqrt{2})$ et $F(2)$.
- 3** Soit $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour $x \in]1; +\infty[$. Déterminer la primitive H de h sur $]1; +\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{3}$.

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = e^{\sqrt{x}}$. On désigne par \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1** Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 2** Dresser le tableau de variation de f
- 3** Dans la figure ci-dessous, on a représenté les courbes Γ_1 et Γ_2 d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln(x)$



- a Déterminer les points d'intersection de \mathcal{C}_f et Γ_1
 - b Montrer que \mathcal{C}_f est au dessus de Γ_1
 - c Construire la demi-tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
 - d Construire \mathcal{C}_f .
- 4 On se propose de déterminer l'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_f et Γ_1 .
- a Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b Tracer \mathcal{C}' la courbe de la réciproque de f .
 - c Montrer que $f^{-1}(x) = \ln^3(x)$ pour tout $x \in J$.
 - d Calculer : $\int_1^e \ln^3(x) dx$
 - e Conclure

EXERCICE 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par:
$$\begin{cases} f_n(x) = x \cdot \ln^n(x) & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{C}_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité 2cm).

Partie A

- 1
 - a Montrer que f_n est continue à droite en 0.
 - b Étudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.
 - c Calculer $f'_n(x)$ pour tout $x > 0$
- 2
 - a Dresser le tableau de variation de f_n , on distinguera deux cas suivant la parité de n .

- b** Montrer que toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par trois points fixes: l'origine du repère et deux autres points A et B tels que $0 < x_A < x_B$
- 3** **a** Étudier la position relative de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et construire ces deux courbes dans le même repère.
- b** Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$

Partie B

On pose $F_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_n(x) dx$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha \in]0;1[$.

- 1** **a** Sans calculer $F_n(\alpha)$, prouver que $F_n(\alpha)$ admet une limite finie u_n lorsque α tend vers 0^+
- b** Calculer $F_1(\alpha)$, en déduire que $u_1 = -\frac{1}{4}$
- 2** **a** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
- $$\forall \alpha \in]0;1[\text{ et pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \text{ on a: } F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} \ln^{n+1}(\alpha) - \frac{n+1}{2} F_n(\alpha)$$
- b** En déduire que: pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a: $u_{n+1} = -\frac{n+1}{2} u_n$
- 3** Soit \mathcal{A}_n , l'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_n , l'axe des abscisses et la droites d'équations: $x = 0$ et $x = 1$.
- a** Montrer que: $\mathcal{A}_n = 4|u_n| cm^2$
- b** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a: $\mathcal{A}_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$
- c** Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a: $\mathcal{A}_{n+1} \geq 2\mathcal{A}_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$

Partie C

On pose $G(x) = \int_1^{e^x} t \cdot \ln(t) dt$ avec $x \in \mathbf{R}$

- 1** **a** Sans calculer $G(x)$, montrer que G est dérivable sur \mathbf{R} et calculer $G'(x)$
- b** Déterminer le sens de variation de G .
- 2** **a** Calculer $G(x)$ en fonction de x .
- b** Dresser le tableau de variation de G .

EXERCICE 12

Partie A: Soit la fonction g définie sur $]0;1[$ par $g(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

- 1** **a** Étudier la dérivabilité de g à gauche en 1.
- b** Montrer que g est dérivable sur $]0;1[$, puis dresser le tableau de variation de g .
- c** Construire la courbe (\mathcal{C}) de g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
- 2** **a** Justifier que g réalise une bijection de $]0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

- b Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- c tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}

Partie B: On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

- 1 Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$
- 2 Étudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.
- 3 a Vérifier que: $\forall t \in [2; +\infty[$, on a: $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$
En déduire que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \leq \frac{1 - e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$
- b Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$
- 4 Montrer que F est majorée sur \mathbb{R} et que F possède une limite finie l en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite)

Partie C

- 1 Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $G(x) = F(x\sqrt{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 - a Montrer que G est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer $G'(x)$
 - b En déduire que $\int_0^1 e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$
- 2 a Montrer que: $\forall t \in \mathbb{R}$, on a: $e^t \geq 1 + t$ et que pour tout $t \geq 0$, on a: $e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$
- b En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \geq \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx \text{ et } \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Partie D: On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ et $v_n = (n+1)u_n \cdot u_{n+1}$

- 1 a Calculer u_1 et u_2
- b Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot u_n$. En déduire que (u_n) est décroissante
- 2 Montrer que: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \leq 1$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$
- 3 a Vérifier que: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $\sqrt{n}u_n = \sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}}} \cdot v_{n-1}$
- b En déduire que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot u_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- 4 Montrer que: $u_{2n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ et que $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx$
- 5 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\sqrt{n} \cdot u_{2n+1} \leq G(1) \leq \sqrt{n} \cdot u_{2n-2}$
- 6 Montrer alors que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(1) = l = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

EXERCICE 13

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- 1 Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1; 1[$ soit
- 2 Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in] -1; 1[$

Partie B

Soit $x \in \mathbb{R}^+$; on pose $I_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n(x) = \int_0^x (f(t))^n dt$

- 1 Calculer $I_1(x)$
- 2
 - a Montrer que $\forall n \geq 1$ on a: $0 \leq I_n(x) \leq x [f(x)]^n$
 - b En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x)$
- 3
 - a Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a: $f'(x) = 1 - [f(x)]^2$
 - b En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}$; on a: $I_{n+2}(x) = I_n(x) - \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1}$
 - c Montrer alors que: $\forall n \geq 1$ on a:

$$I_{2n}(x) = x - \left[f(x) + \frac{1}{3} (f(x))^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} (f(x))^{2n-1} \right]$$

- d Calculer alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \frac{1}{7 \times 3^7} + \dots + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$

EXERCICE 14

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1
 - a Étudier le dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement ce résultat.
 - b Dresser le tableau de variation de f
 - c Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
 - d Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$
 - e Construire dans le même repère les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' de f^{-1}

Partie B

Soit le fonction F définie sur $]0; 1[$ par $F(x) = \int_1^{1+\ln^2(x)} f(t) dt$

- 1 Montrer que F est dérivable sur $]0; 1[$ et que: $\forall x \in]0; 1[$; on a: $F'(x) = 2 \ln(x)$
- 2 En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x \in]0; 1[$
- 3 Soit $\lambda \in [1; +\infty[$. On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = \lambda$

- a Montrer que: $\mathcal{A}(\lambda) = F(f(\lambda))$
- b Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$
- c Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

EXERCICE 15

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{\frac{-1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu
 - b Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0
 - c Dresser le tableau de variation de f
- 2
 - a Montrer que la droite $\mathcal{D}: y = x - 1$ est une asymptote à \mathcal{C} au voisinage $+\infty$
 - b Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$, on a: $e^x - 1 \geq x$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on a: $e^{\frac{-1}{x}} - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$
 - c En déduire la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D}
 - d Construire \mathcal{C}
- 3 On pose $f_n(x) = x.e^{\frac{-1}{n}}$ pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 - a Montrer que f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
 - b En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique α_n
 - c Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$. En déduire que (α_n) est décroissante.
 - d Montrer que $\alpha_n \geq 1$ et que $\alpha_n \ln(\alpha_n) = \frac{1}{n}$
 - e En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie sur $I =]0; 1[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

- 1 Montrer que f est continue à gauche en 1.
- 2 Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.
- 3 Dresser le tableau de variations de f .
- 4
 - a Montrer que \mathcal{C}_f possède un point unique d'inflexion d'abscisse $\frac{e-1}{e}$
 - b Construire \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2cm)
- 5 Montrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $f(\alpha) = \alpha$.
- 6
 - a Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

- b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .
- c) Construire dans le même repère la courbe \mathcal{C}' de f^{-1} .

EXERCICE 17

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

- 1
 - a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$
 - b) En déduire que $(\forall k \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{1+k} < \ln(1+k) - \ln(k) < \frac{1}{k}$
 - c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$ puis déduire que:
 $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln(1+n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$

d) Déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- 2 On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = u_{n-1} - \ln(n)$
 - a) Étudier la monotonie de la suite (v_n)
 - b) Montrer que $(\forall n > 1); v_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$
 - c) En déduire que (v_n) est majorée et quelle est convergente.

EXERCICE 18

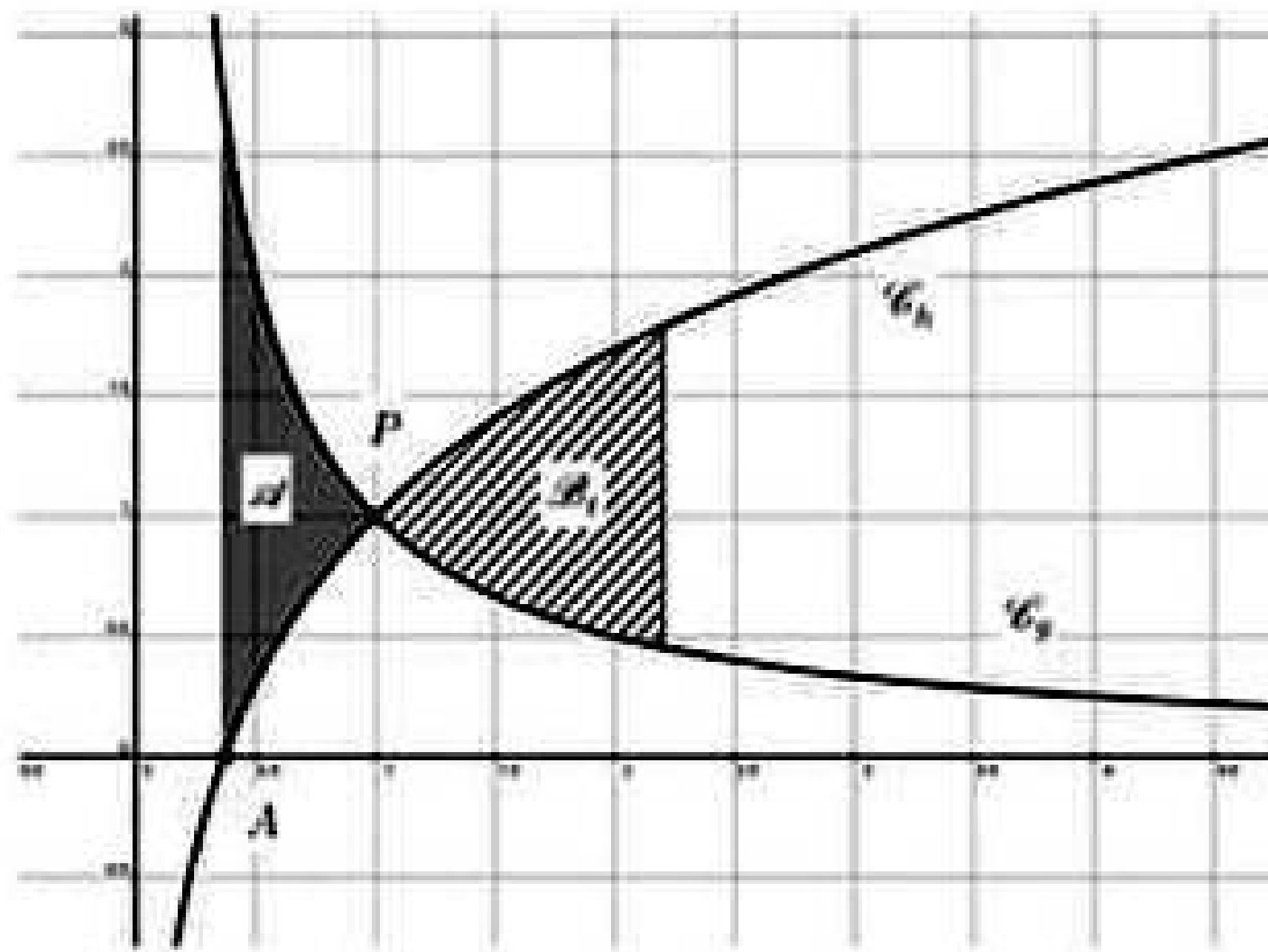
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$

- 1 Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2 Étudier les variations de f .
- 3 En déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$
- 4 Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(x) - \ln(x)$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- 5 Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 6 Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; +\infty[$

EXERCICE 19

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln(x) + 1$.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h représentatives des fonctions g et h .



- 1 A est le point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_h et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de A .
- 2 P est le point d'intersection des courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h . Justifier que les coordonnées du point P sont $(1;1)$.
- 3 On note \mathcal{A} l'aire du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_g , \mathcal{C}_h et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.
Montrer que: $\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{e}$
- 4 Soit t un réel de $]1; +\infty[$. On note \mathcal{B}_t l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h (domaine hachuré sur le graphique). On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_t$.
 - a Montrer que $\mathcal{B}_t = t \ln(t) - \ln(t)$
 - b Conclure.

EXERCICE 20

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - e^{-\sqrt{x}}$

- 1
 - a Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 - b Dresser le tableau de variation de f .
 - c Construire la courbe \mathcal{C} de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 2
 - a Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b Construire la courbe \mathcal{C}' de f^{-1} dans le même repère.
- 3 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-\sqrt{x}} dx$
 - a Interpréter graphiquement u_1 .
 - b Montrer que (u_n) est décroissante.

c Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

d Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4 Soit $F(x) = \int_0^{(\ln x)^2} e^{-\sqrt{t}} dt$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

a Montrer que F est dérivable sur $]0; 1]$ et que $F'(x) = 2 \ln(x)$

b En déduire que $F(x) = 2(x \ln(x) - x + 1)$ pour tout $x \in]0; 1]$

c Montrer que $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

d En déduire l'expression de $F(x)$ sur $[1; +\infty[$

e Calculer alors u_1 .

EXERCICE 21

1 Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2}$

a Dresser le tableau de variation de g .

b Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]0.5; 0.6[$

c En déduire le signe de $g(x)$.

2 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a Montrer que f est continue à droite en 0.

b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$

d Dresser le tableau de variation de f et tracer \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

EXERCICE 22

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(x) + \frac{x}{n} - 1$

1 a Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique α_n .

b Vérifier que $\alpha_n \in [1; e[$.

2 a Montrer que pour tout $n \geq 1$; on a: $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

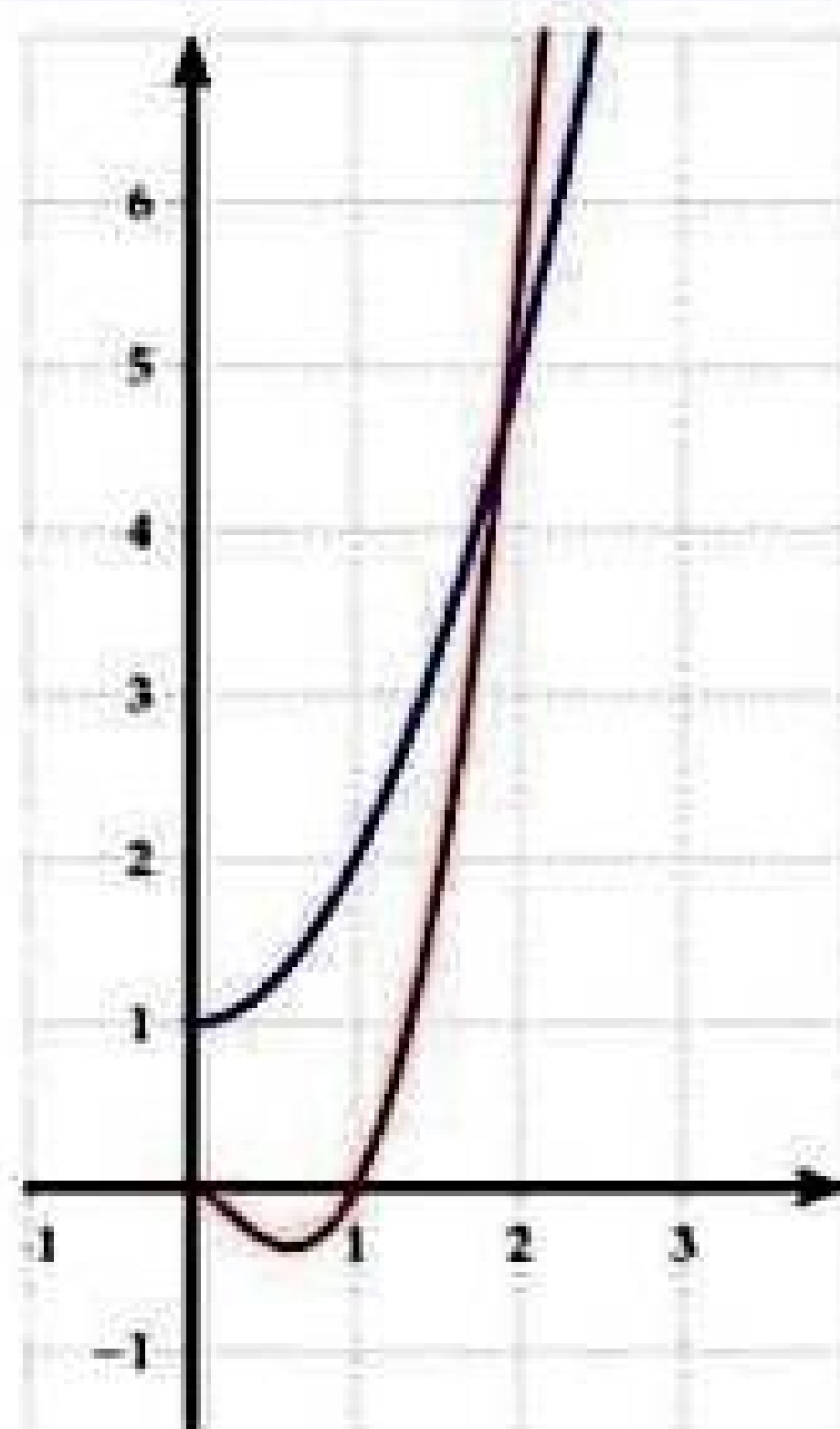
b En déduire que la suite α_n est strictement croissante.

c En déduire que la suite α_n est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 23

1 On pose $h(x) = 1 + x^2$ et $k(x) = 2x^2 \ln(x)$ où $x \in]0; +\infty[$. Le graphique suivant représente les courbes \mathcal{C}_h et Γ des fonctions h et k .

- a Identifier \mathcal{C}_h et Γ .
- b Déterminer graphiquement, suivant x , le signe de $h(x) - k(x)$. On désigne par α l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{C}_h et Γ .



2 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

- a Dresser le tableau de variation de f et vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.
- b Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 4cm en prend $\alpha = 1.9$).

3 Soit $g(x) = \int_1^x f(t) dt$ avec $x \in]0; +\infty[$.

- a Étudier le sens de variation de g et déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- b Vérifier que $(\forall t \geq 1)$ on a: $\frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.
- c Calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ puis déduire que: $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) \leq g(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$ avec $x \in]0; +\infty[$.
- d Prouver que $(\forall x > 0)$; on a: $g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$. En déduire que g est prolongeable par continuité en 0.

EXERCICE 24

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + (\ln(x))^2$.

- 1 a Étudier les variations de f .
- b Tracer \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2 Soit $\alpha \in]0; 1]$

- a Calculer en fonction de α , l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan :

$$\left\{ M(x; y) / \alpha \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

- b Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$

3 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \geq 2$

et $I_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt$ avec $1 \leq k \leq n-1$.

- a) Montrer que $(\forall n \geq 2)$ et $1 \leq k \leq n-1$: on a $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq I_k \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$
- b) En déduire que pour tout $n \geq 2$: on a: $u_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \mathcal{A}\left(\frac{1}{n}\right) \leq u_n - \frac{1}{n}f(1)$
- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- d) Montrer alors que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\ln^2(n) + \ln^2\left(\frac{n}{2}\right) + \ln^2\left(\frac{n}{3}\right) + \dots + \ln^2\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln^2\left(\frac{n}{n}\right) \right) = 2$$

EXERCICE 25

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ et $v_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+t^n} dt$.

- 1.
 - a) Calculer u_1 et vérifier que: $v_n + nu_n = n$.
 - b) Montrer que: $(\forall t \geq 0)$, on a: $1 - t^n \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$.
En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$.
 - c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
- 2.
 - a) En écrivant $\frac{nt^n}{1+t^n}$ sous la forme $\frac{nt^{n-1} \cdot t}{1+t^n}$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties que: $v_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$
 - b) Montrer que: $(\forall x \geq 0)$; on a: $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
En déduire que: $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \frac{1}{n+1}$
 - c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, en déduire que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u_n) = \ln(2)$

EXERCICE 26

- 1. Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$.
 - a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ on a: $\frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$
 - b) En déduire que $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq v_n \leq \ln(2)$.
 - c) Montrer que (v_n) est convergente et donner sa limite.
- 2. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
On pose $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.
 - a) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_n \leq 1 - \frac{1}{2n}$.
 - b) En déduire que la suite (a_n) est convergente, on note ℓ sa limite.

- c Montrer que $b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}$. En déduire que la suite (b_n) converge vers ℓ .
 - d Que peut-on conclure pour la suite (u_n) ?
- 3
- a Comparer $v_{n+1} - v_n$ et $a_{n+1} - a_n$.
 - b En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = a_n$.
 - c Que vaut ℓ ?

EXERCICE 27

Partie A: On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x\sqrt{x}}$ et on désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
- a Dresser le tableau de variation de f .
 - b Tracer \mathcal{C}_f .
- 2
- Calculer l'aire de la région du plan limitée par les droites $x = \frac{1}{e}$; $x = 1$; l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C}_f .

Partie B: On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{(\ln(x))^n}{x\sqrt{x}} dx$

- 1
- a Calculer I_1 .
 - b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n| \leq \frac{1}{n!2^n}$.
 - c Calculer la limite de I_n .
- 2
- a On pose pour tout $x \in \left[\frac{1}{e}; 1\right]$, $u(x) = \frac{(\ln(x))^n}{x}$. Déterminer une primitive de u .
 - b En intégrant I_n par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$.
- 3
- a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = -1 + \sqrt{e} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!2^k}$.
 - b En déduire la limite de la somme $S_n = 1 - \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!2^n}$.

EXERCICE 28

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x(\ln(x))^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- 1
- a Montrer que f est continue à droite en 0.
 - b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2
- a Dresser le tableau de variation de f .
 - b Construire la courbe \mathcal{C}_f de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité 2cm).

- 3** Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.
- a** Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
 - b** En intégrant deux fois par parties, exprimer $F(x)$ en fonction de x pour $x > 0$.
 - c** En déduire que $F(0) = \frac{1}{4}$.
 - d** Calculer, en cm^2 , l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_f , les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

EXERCICE 29

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité: $1cm$).

- 1** Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2**
 - a** Dresser le tableau de variation de f .
 - b** Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
 - c** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]1; 1,2[$.
 - d** Construire dans le même repère \mathcal{C}_f et \mathcal{C}'_f courbe de f^{-1} .
- 3** Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$

- a** Calculer I_2
- b** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$, on a:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$

- c** Calculer I_3
- d** Établir que pour tout $x \in [1, 2]$; on a $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$
- e** En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n) .

EXERCICE 30

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- 1** On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$
 - a** Étudier les variations de f et déduire que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$
 - b** En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$
 - c** La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?
- 2** On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = \ln(u_n)$

- a Exprimer v_n en fonction de n
- b Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
- c En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 31

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln(x)) + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité: 2cm).

Partie A :

- 1
 - a Montrer que f est continue à droite en 0.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2
 - a Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
 - b Dresser le tableau de variations de f .
- 3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $[0, +\infty[$ et vérifier que $4.6 < a < 4.7$
- 4
 - a Déterminer une équation de la tangente (T) à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
 - b Construire \mathcal{C}_f .

Partie B :

- 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln(x) dx$.
En utilisant une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n .
- 2 En déduire, en fonction de n , l'aire $\mathcal{A}(n)$ en cm^2 , de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.
- 3 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(n)$

EXERCICE 32

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Montrer que f est définie sur \mathbb{R}
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - c Montrer que f est une fonction impaire
 - d Dresser le tableau de variation de f
- 2 soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) - x$
 - a Dresser le tableau de variation de g

- b** Calculer $g(0)$ et déduire le signe de $g(x)$
- 3**
 - a** Montrer que \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion que l'on précisera
 - b** Écrire une équation de la tangente (T) au point d'inflexion et déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et (T)
 - c** Construire \mathcal{C}_f
- 4**
 - a** Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera
 - b** Construire \mathcal{C}'_f la courbe de f^{-1} dans le même repère.
 - c** Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

EXERCICE 33

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

- 1**
 - a** Prouver que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente
 - b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),$ on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2 Pour tout entier $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \cdot \sqrt{1+x^2} dx$

- a** Vérifier que pour tout $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$
- b** Par une intégration par parties sur I_n , montrer que pour tout $n \geq 3$, on a :

$$n \cdot u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$$

- c** En déduire que pour tout $n \geq 3$, on a : $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$
- d** Montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 34

Partie A: Soit la fonction f définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ par $f(x) = \tan(x)$ et g la fonction définie par :

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

- 1** Montrer que g est définie sur \mathbb{R} et qu'elle est impaire.
- 2** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
- 3** Soit $h = g \circ f$. Montrer que h est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ et déterminer sa fonction dérivée.
- 4** En déduire que $g = f^{-1}$. Calculer : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

Partie B: On considère la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} , par : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

1 A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2 En déduire que $(\forall n \in \mathbf{N})$, on a: $I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$

Partie C: Soit la suite (u_n) définie sur \mathbf{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 + \frac{1}{1 \times 3} \\ (\forall n \in \mathbf{N}), u_n = 1 + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{1 \times 3 \times 5} + \dots + \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} \end{cases}$$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a: $u_n = 2 \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} dt$

2 On pose $v_n = 2I - u_n$ où $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

a Exprimer v_n à l'aide d'une intégrale

b Montrer que pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a: $0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$

c Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 35

Partie A: Soit la fonction f par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|1+x|}{x} & \text{si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1 a Préciser l'ensemble de définition D_f de f b) Montrer que f est continue en 0.

2 On considère la fonction h définie sur $\mathbf{R} - \{-1\}$ par $h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln|1+x|$

a Calculer $h'(x)$

b Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α autre que 0 et que $-4,6 < \alpha < -4,5$

c Donner alors le signe de $h(x)$

3 a Calculer $f'(x)$

b Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$ et donner le tableau de variation de f .

4 Construire dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe \mathcal{C}_f de f . On prend $f(\alpha) = -0,28$

Partie B: Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R} - \{-1; 0\}$ par: $\begin{cases} g(x) = |1+x|^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ g(0) = e \end{cases}$

1 a Dresser le tableau de variation de g

b Construire dans un autre repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ la courbe \mathcal{C}_g

2 Soient les suite (u_n) et (v_n) . (u_n) est définie sur \mathbf{N}^* par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et (v_n) définie sur $\mathbf{N} - \{0;1\}$ par $v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

3 Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ puis donner un encadrement du nombre e pour $n = 100$.

Partie C:

1 Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

2 Soit $A(n) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

a Montrer que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = e$

3 Soit la suite B définie par $B(n) = \left(1 + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n^3}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^3}}\right) \cdots \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}\right)$

a Calculer $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

b Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} B(n) = e^{\frac{1}{3}}$

EXERCICE 36

Pour tout entier naturel n , on note f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ f_n(0) = 2(n+1) \end{cases}$$

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbf{N} par : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$

1 a Montrer que f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que (u_n) est bien définie.

b Montrer que $(\forall n \in \mathbf{N})$, on a : $u_{n+1} - u_n = 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$

2 a Montrer que $u_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Calculer $\int_0^1 dx$ et $\int_0^1 x^{2k} dx$.

En déduire que $u_n = 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

b Établir que $\left|u_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \leq \frac{2}{2n+3}$. En déduire que (u_n) est convergente.

EXERCICE 37

Soit la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx \end{cases}$$

- 1
 - a Calculer $I_0 + 2I_1$. En déduire I_1 en fonction de I_0
 - b Vérifier que $I_0 + I_1 + I_2 = 1$. En déduire I_2 en fonction de I_0 .
- 2
 - a Montrer que (I_n) est décroissante
 - b En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- 3
 - a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, on a : $\frac{1}{n(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
 - b Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, on a : $I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{(1+2x)x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2} dx$
 - c Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 3$
 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1)I_n \leq 1 + \frac{9}{n+2}$
- 4 Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nI_n$

EXERCICE 38

- 1
 - a Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$ on a : $x - \ln(x) \neq 0$
 - b Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x - \ln(x)}$. Étudier g et tracer sa courbe \mathcal{C}_g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 2 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_n^{2n} \frac{dx}{x - \ln(x)}$. Interpréter graphiquement la valeur de u_n .
- 3
 - a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln(2)$
 - b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n - \ln 2 = \int_n^{2n} \frac{\ln(x)}{x(x - \ln(x))} dx$
 - c Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $0 \leq u_n - \ln 2 \leq \frac{\ln(2n^2)}{n - \ln(n)}$
 - d Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$

EXERCICE 39

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et on désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Montrer que f est une fonction impaire
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

- c Dresser le tableau de variation de f et écrire une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
- d Construire \mathcal{C}
- e Calculer, en unité d'aire, l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par \mathcal{C} ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ln 3$

2 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par:
$$\begin{cases} u_0 = \ln 3 \\ u_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

- a Calculer u_1
- b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a: $0 \leq u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \ln 3$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- c Vérifier que pour tout $x \geq 0$ on a: $1 - f'(x) = (f(x))^2$ puis montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a: $u_{n+2} - u_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

d En déduire pour tout $n \geq 1$, on a:
$$\begin{cases} u_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ u_{2p+1} = \ln\left(\frac{5}{3}\right) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \end{cases}$$

3 Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{2n} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \left(\frac{4}{5}\right)^p$.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

EXERCICE 40

Partie A : Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

1 Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$
On note g^{-1} la fonction réciproque de g

2 Montrer que $g^{-1}(\sqrt{2}) = -\ln(\sqrt{2} - 1)$

3 a Vérifier que $(\forall x \in [0, +\infty[), g'(x) = \sqrt{g^2(x) - 1}$

b En déduire que g^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

4 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g^{-1}(x)}{x-1}$

5 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$

Partie B : Soit F la fonction définie sur $[e^{\sqrt{2}}, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \int_{e^2}^x \frac{1}{t \sqrt{\ln^2(t) - 2}} dt \text{ si } x \in]e^{\sqrt{2}}, +\infty[\\ F(e^{\sqrt{2}}) = \ln(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1 Montrer que F est dérivable sur $]e^{\sqrt{2}}, +\infty[$ et calculer $F'(x)$
- 2 Soit U la fonction définie sur $]e^{\sqrt{2}}, +\infty[$ par $U(x) = g^{-1}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)$
 - a Montrer que U est dérivable sur $]e^{\sqrt{2}}, +\infty[$ et que $U'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x) - 2}}$
 - b En déduire que $(\forall x \in]e^{\sqrt{2}}, +\infty[), F(x) = g^{-1}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right) + \ln(\sqrt{2} - 1)$
- 3 Étudier la dérivabilité de F à droite en $e^{\sqrt{2}}$
- 4 Dresser le tableau de variation de F
- 5 Déterminer la nature de la branche infinie de (C)
- 6 Tracer une allure de (C)

EXERCICE 41

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2 + x$. On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Dresser le tableau de variation de f .
 - b Montrer que \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique D
- 2
 - a Déterminer les points d'intersections de \mathcal{C}_f avec la droite $\Delta : y = x$.
 - b Préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à la droite Δ et à D . Tracer \mathcal{C}_f . Préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à la droite Δ et à D . Tracer \mathcal{C}_f .
- 3 Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \ln 2, \\ U_{n+1} = f(U_n), \end{cases}$
 - a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < U_n \leq \frac{1}{2} \ln 2$
 - b Montrer que U est décroissante, conclure.
- 4
 - a Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{U_k} - \frac{3}{2}\right)^2, n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que pour, tout $n, S_n = U_n - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{n}{4}$
 - b Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

EXERCICE 42

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x - e^{-x}$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Montrer que la fonction f est impaire.

b Dresser la tableau de variations de f sur \mathbb{R}_+ .

c Construire la courbe (\mathcal{C}) sur \mathbb{R}_+ .

2 Pour tout x de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose $h(x) = \ln(\tan x)$.

a Montrer que h réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . On note par $g = h^{-1}$.

b Calculer $g(0)$ et $g(\ln(\sqrt{3}))$.

c Montrer que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et que $g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

3 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par: $u_0 = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{dx}{f'(x)}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{[f(x)]^{2n}}{f'(x)} dx$.

a Calculer u_0 .

b Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, \ln(\sqrt{3})]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ et que $f'(x) \geq 1$.

c En déduire que pour tout entier naturel non nul n , on a: $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$.

d Calculer, alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{4^n}$.

EXERCICE 43

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par: $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. On note (\mathcal{C}_f) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique $2cm$).

1 **a** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$.

b Dresser le tableau de variation de f .

2 **a** Montrer que \mathcal{C}_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche infinie de direction celle de (O, \vec{j}) .

b Tracer \mathcal{C}_f .

3 Soit la fonction g définie sur $]e, +\infty[$ par $g(x) = \int_2^{\ln x} f(t) dt$. On note \mathcal{C}_g la courbe de g dans le repère orthonormé

a Montrer que g est dérivable sur $]e, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{x^2(1-\ln x)}$.

b En déduire le sens de variation de g .

c Écrire une équation de la tangente T à \mathcal{C}_g au point d'abscisse e^2 .

4 Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^{\{*\}} \setminus 1$ par: $U_n = \int_{-1}^0 \frac{e^{-x}}{(1-x)^n} dx$.

- a Montrer que U est décroissante.
- b En déduire que U est convergente.
- c Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $U_n = \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{e}{2^{n-1}} + U_{n-1} \right]$.
- d En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$.

EXERCICE 44

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

- 1 Étudier les variations de f_n .
- 2 Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n et que $u_n \in]0,1[$, on définit ainsi sur \mathbf{N}^* , une suite (u_n) .
- 3
 - a Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
 - b Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$.
 - c Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 4
 - a Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$
 - b Calculer la limite de suite (u_n)

EXERCICE 45

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

- 1 Étudier les variations de f_n .
- 2
 - a Montrer que l'équation, d'inconnue x , $f_n(x) = 0$, admet une unique solution a_n strictement positive.
 - b Montrer que pour tout réel x positif, $e^x \geq x + 1$. En déduire le signe de $f_n(1)$.
 - c Prouver que pour tout n , $\frac{1}{n} < a_n < 1$.
- 3
 - a Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} [n(e^{a_n} - 1) - 1]$
 - b Prouver que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) > 0$.
 - c En déduire que la suite (a_n) est décroissante et convergente.
- 4 On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
 - a Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\ell \leq a_n$ puis $\ell \leq ne^{-n\ell}$.
 - b En déduire que $\ell = 0$.

EXERCICE 46

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.

2 **a** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b En déduire que pour tout $x \geq 0$; $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II -

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0, \end{cases}$ On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1 **a** Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c Dresser le tableau de variation de f .

2 **a** Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}) .

b Donner une équation de la tangente T à la courbe (\mathcal{C}) au point I .

3 Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

a Construire I .

b Construire la tangente T .

c Tracer la courbe (\mathcal{C})

4 Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a En utilisant 1) b) montrer que :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

b Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$

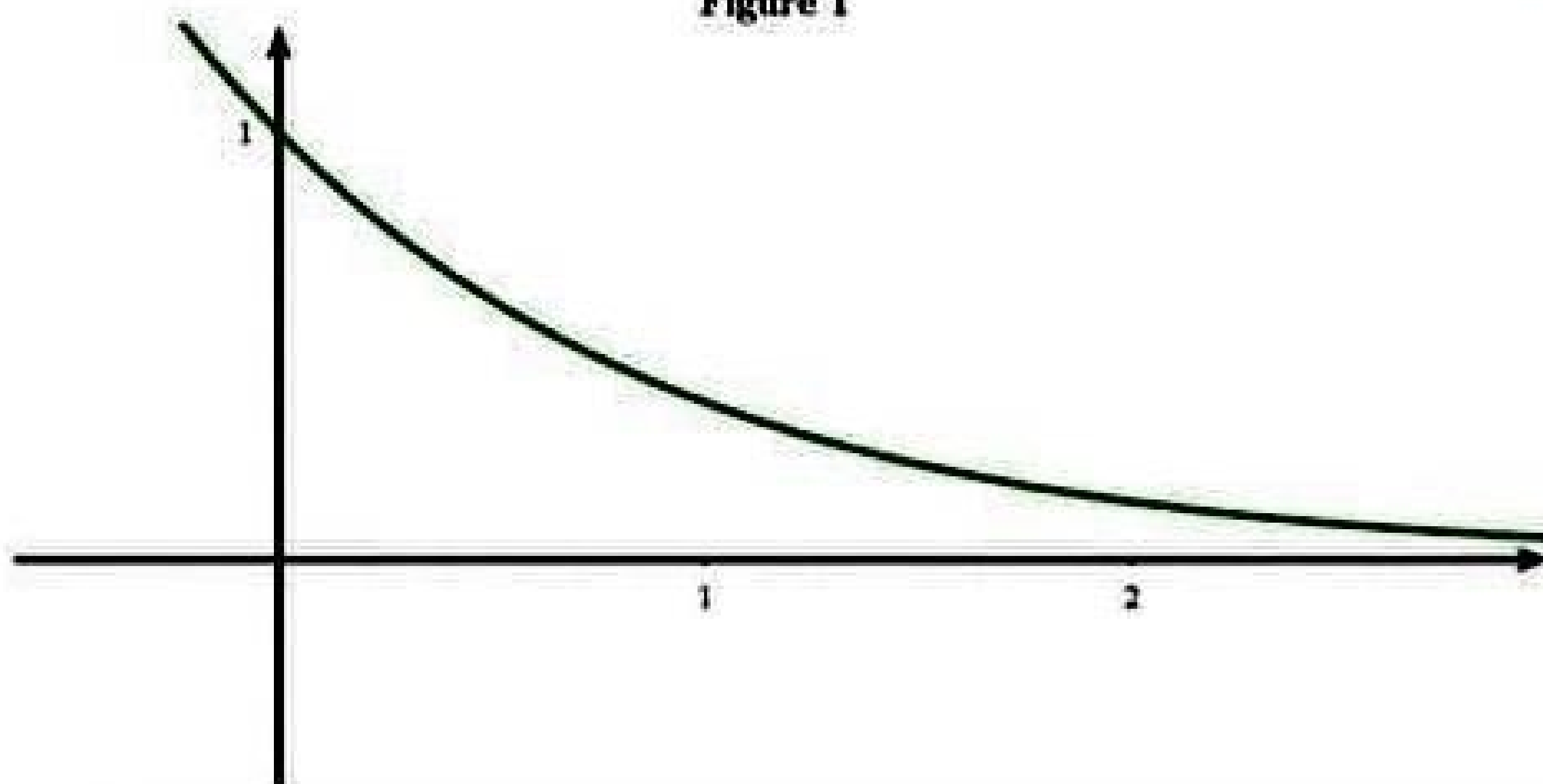
5 Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$

a Interpréter graphiquement S_n .

b Montrer que : $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln n}$, quand n tend vers l'infini.

Figure 1



EXERCICE 47

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$

On note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

x	0	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	$-\infty$

- 1
 - a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.
 - b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f . Tracer (\mathcal{C}_f) (On précisera la demi-tangente à (\mathcal{C}_f) en O).
- 2
 - a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, \infty[$ sur $] -\infty, 0]$. (On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et Γ sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})).
 - b) Tracer Γ . (On précisera la demi-tangente à Γ en O .
- 3
 - a) Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 0]$; $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$.
 - b) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations $x = -\ln 2$; $x = 0$ et $y = 0$.
 - c) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x})$.

EXERCICE 48

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$ et soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
 - b) Dresser le tableau de variation de f
 - c) Montrer que (\mathcal{C}) admet un point d'inflexion I . Écrire une équation de la tangente (T)

à (\mathcal{C}) en I.

- d Étudier la branche infinie de (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$
- e Utiliser la courbe de la fonction exponentielle tracée dans l'annexe ci-jointe figure 1, pour construire le point I, la tangente (T) et la courbe (\mathcal{C}) .

2 a Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle K que l'on déterminera.

- b Expliciter $f^{-1}(x)$, pour $x \in K$.

3 Soit n un entier non nul.

- a Montrer que l'équation $f(x) = \frac{n}{x-1}$ admet dans $]1, +\infty[$ une unique solution α_n .

- b Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$; $2 \leq \alpha_n \leq (\ln n)^2 + 1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

4 Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_1^{1+x^2} f(t) dt$

- a Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et que : $F'(x) = 2xe^{|x|}$

- b En intégrant par parties, calculer $F(x)$ pour $x \geq 0$.

- c Calculer \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

5 Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 0 et $n - 1$.

- a Montrer que : $\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

- b On pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

- i. Montrer que pour tout entier naturel non nul : $\mathcal{A} \leq U_n \leq \mathcal{A} - \frac{1}{n} + \frac{e}{n}$
- ii. En déduire la limite de la suite (U_n) .

EXERCICE 49

A)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1 a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

- b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2 a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

- b Dresser le tableau de variation de f .

- c Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) .

3 Soit λ un réel de $]0, 1[$. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. Calculer S_λ , en fonction de λ et déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda$.

B)

1 Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$. Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur l'intervalle I .

2 Soit n un entier naturel non nul

a Montrer que l'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0, +\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < \frac{1}{n} < \beta_n$. On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n , deux suites réelles (α_n) et (β_n) .

b Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3 On considère la fonction h définie sur par : $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right), & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ On note (\mathcal{C}_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a Montrer que h est continue à droite en 0.

b Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x > 0$.

4 Soit H la primitive de h sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

a Justifier que les fonctions $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$ et $v : x \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et dérivables sur $]0, +\infty[$.

b Montrer que pour tout $x \geq 0$, $u(x) = v(x)$.

c Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

5 Soit \mathcal{A}_n l'aire de la partie limitée par \mathcal{C}_h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$.

EXERCICE 50

(A) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1 **a** Vérifier que f est continue à droite en 0.

b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c Dresser le tableau de variation de f .

2 Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe Γ de la fonction $x \mapsto e^x$ et les droite Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

a Construire les points A et B de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives e et $\frac{1}{e}$.

- (b) Déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et Δ puis la position relative de \mathcal{C}_f et Δ' .
- (c) Tracer la courbe \mathcal{C}_f .

3 Soit S la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C}_f et les droites Δ et Δ' .
Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$.

(B) Soit n un entier naturel.

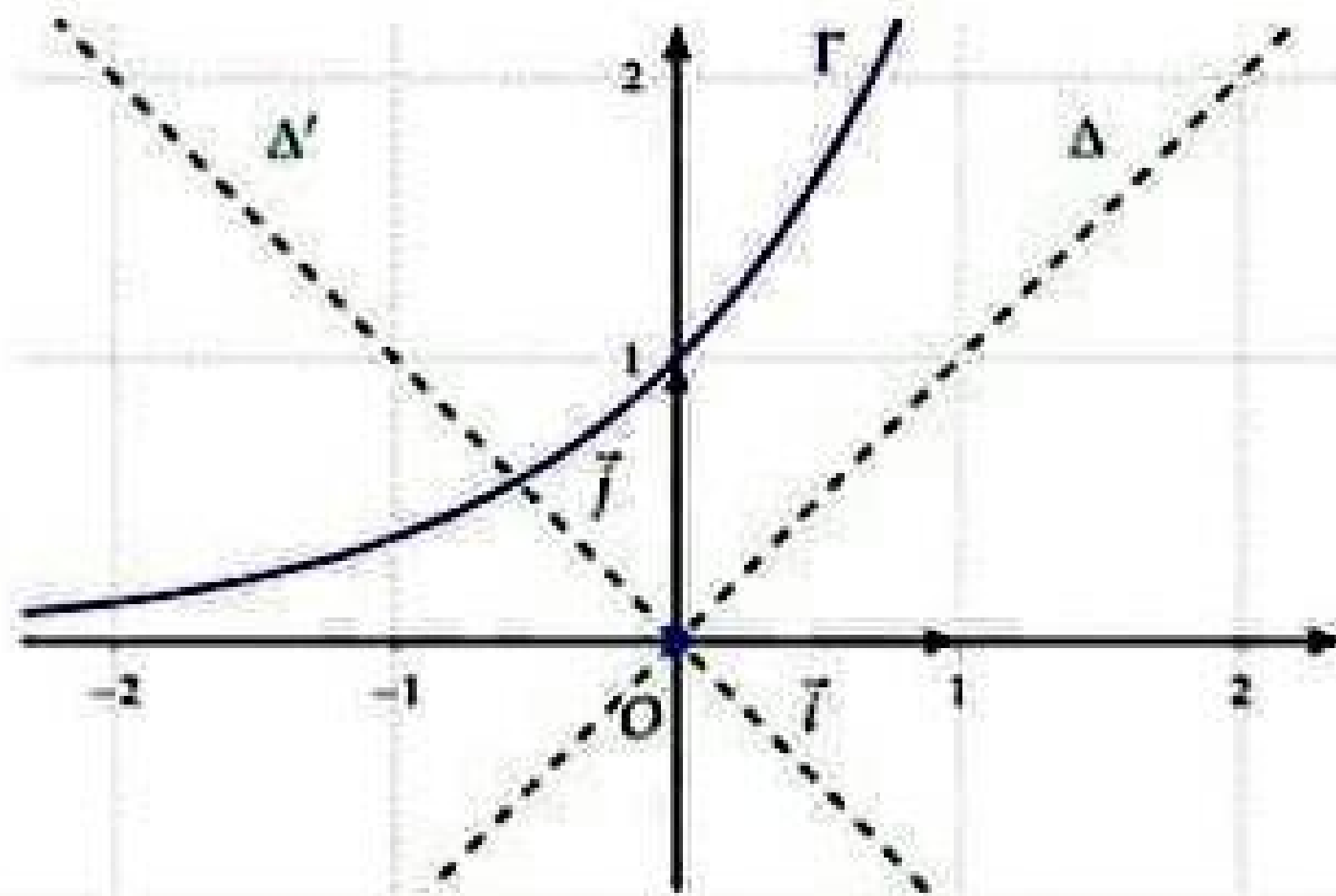
On pose $u_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t dt$ et $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t f(t) dt$.

- 1
 - (a) Montrer que : $u_n > 0$.
 - (b) Montrer que : $0 < u_n < \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (c) Montrer que : $u_{n+1} = e - \frac{1}{e^{n+1}} - (n+1)u_n$.
 - (d) Montrer alors que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n = e$.

- 2
 - (a) Montrer que $-\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 - (b) Vérifier que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = tf'(t) - t$.
Montrer alors que $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{n+1} e^t f'(t) dt - u_{n+1}$.
 - (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$(n+2)v_n = \frac{1}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$$

- (d) Montrer alors que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)v_n = 0$.
- 3
 - (a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$ tel que $f(\alpha_n) = \frac{v_n}{u_n}$.
 - (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.



EXERCICE 51

I. Soit la fonction φ définie sur \mathbb{R}^* par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et soit \mathcal{C}_φ sa courbe représentative dans repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1.
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
 - c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
 - d) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -\infty, 0[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

II.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + \ln x$. On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

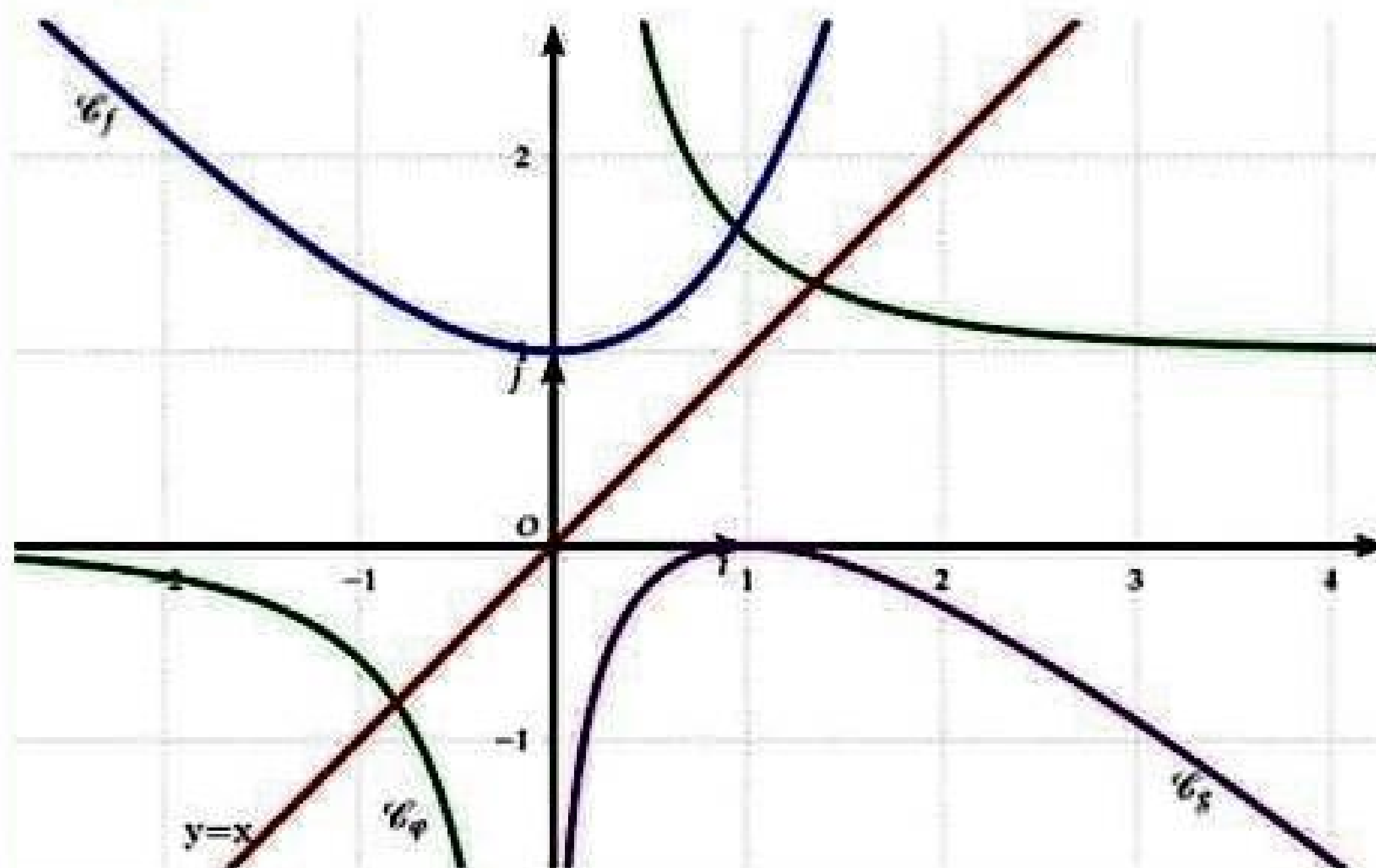
Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on a tracé dans le même repère les courbes \mathcal{C}_φ , \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g des fonctions φ , f et g et la droite d'équation $y = x$.

1. Soit a un réel et b un réel strictement positif. On désigne par Δ_a la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a et par D_b , la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B d'abscisse b .
 - a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b .
 - b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($b = e^{-a}$).

Dans la suite on suppose que Δ_a et D_b sont parallèles c'est-à-dire $b = e^{-a}$.

2.
 - a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si ($a \neq 0$ et $a = \frac{e^a}{e^a - 1}$).
 - b) En déduire que Δ_a est tangente à la courbe \mathcal{C}_f et à la courbe \mathcal{C}_g respectivement aux points $A(a, f(a))$ et $B(e^{-a}, g(e^{-a}))$. (a étant la valeur définie dans la question 1. 2))
 - c) Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.
3.
 - a) Construire dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), le point $A(a, f(a))$.

- b Vérifier que $e^{-x} = f(-x) - x$ puis construire $B(e^{-x}, g(e^{-x}))$.
- c Tracer Δ_x .



EXERCICE 52

1)-

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \ln(\tan x)$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Calculer les limites de f à droite en 0 et à gauche en $\frac{\pi}{2}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 - b Dresser le tableau de variations de f .
 - c Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- 2 Pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose : $g(x) = f(x) - 2x + \frac{\pi}{2}$.
 - a Étudier le sens de variation de g .
 - b Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs des réels x de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 3
 - a Écrire une équation de la tangente T à (C_f) en I .
 - b Étudier la position de T par rapport à (C_f) .
- 4 Tracer T et (C_f) .
- 5
 - a Montrer que f possède une fonction réciproque φ définie et dérivable sur \mathbf{R} .
 - b Préciser les limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - c Montrer que pour tout réel x , $\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{\pi}{2}$.

d) Montrer que pour tout réel x , $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$.

II)-

1) Pour tout réel x , on pose : $G(x) = \frac{1}{2}(\varphi'(x) + \varphi(x))$ et $g(x) = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2}$.

Montrer que G est une primitive de g sur \mathbb{R} .

2) On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_{-n}^n \frac{te^t}{(1 + e^{2t})^2} dt$.

a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 0$,

$$n(\varphi(n) + \varphi(-n)) - \int_{-n}^n \varphi(t) dt = \int_{-n}^n \left(\frac{\pi}{4} - \varphi(t)\right) dt$$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$U_n = n\varphi'(n) - \frac{1}{2}(\varphi(n) - \varphi(-n))$$

c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE 53

1) On pose pour tout réel $x > 0$; $g(x) = 1 + 2\ln x - \frac{1}{x}$

a) Étudier les variations de g .

b) Calculer $g(1)$. Déduire le signe de g sur \mathbb{R}_+^* .

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = 1 - x + (2x - 1)\ln x$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Étudier les variations de f .

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Conclure.

c) Tracer \mathcal{C}_f .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $U_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x > 1$, on a : $\frac{x-1}{2x-1} < \ln x < x-1$

b) Prouver que pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a : $\frac{k}{n^2 + 2n} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$

c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(U_n)$.

EXERCICE 54

Soit la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln x$, si $x > 0$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
 $f_n(0) = 0$,

- 1
 - a Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.
 - b Étudier les variations de f_n .
- 2
 - a Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha_n > 1$.
 - b Montrer que la suite (α_n) est décroissante.
- 3 On pose $T_n = (\alpha_n)^n$. Montrer que $T_n \ln(T_n) = n$.
- 4
 - a Montrer que $x - 1 \leq x \ln x$, puis que $1 \leq T_n \leq n + 1$; déduire un encadrement de la suite (α_n) .
 - b Déduire que (α_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.

EXERCICE 55

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \ln^2 x$. On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1
 - a Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - b Construire la courbe \mathcal{C} .
- 2 Soit $a > 0$. On pose $I(a) = \int_a^1 f(x) dx$
 - a Montrer que pour tout réel $a > 0$, on a $I(a) = 3(1 - a) + 2a \ln a - a \ln^2 a$.
 - b En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} et les droites: $x = 1, x = e$ et $y = 0$.
 - c Calculer la limite de $I(a)$ à droite en 0 et interpréter le résultat.
- 3 Soit n un entier naturel et $n \geq 2$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$, on pose $J_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx$ et $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
 - a Montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq J_k \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
 - b Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{f(1)}{n}$
 - c Calculer la limite de (S_n) .
 - d En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln^2\left(\frac{k}{n}\right) = 2$

EXERCICE 56

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ , par: $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

- 1 Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- 2 Dresser le tableau de variation de f et tracer \mathcal{C}_f .

- 3**
- a** Montrer que pour tout réel $t \geq 1$ on a : $f(t) \geq \frac{\ln t}{t}$
 - b** F est la primitive de f sur \mathbb{R}_+ telle que $F(1) = 0$, montrer que $F(x) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \geq 0$ pour tout $x \geq 1$.
 - c** Dédurre $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- 4**
- a** Soit n un entier tel que $n \geq 3$, montrer que pour tout $t \in [n, n+1]$ on a : $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$.
 - b** Dédurre que : $f(n+1) \leq F(n+1) - F(n) \leq f(n)$.
 - c** On pose $U_n = F(n+1) - F(n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} U_k$, montrer que $S_n = F(n)$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 57

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on considère les fonctions f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1+n \ln x}{x^2}$

- 1**
- a** Dresser le tableau de variation de f_n .
 - b** Calculer $\varphi(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire la position relative de \mathcal{C}_n et \mathcal{C}_{n+1} .
 - c** Tracer dans le même repère orthonormé \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 .
- 2** On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \sum_{k=2}^n \varphi(k)$
- a** Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $\ln x \leq \sqrt{x}$
 - b** Dédurre pour tout entier $k \geq 1$ on a : $\frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}$
 - c** Vérifier que pour tout entier $k \geq 2$ on a : $\frac{1}{2k\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$
 - d** En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $U_n \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$, et montrer la suite (U_n) est convergente.

EXERCICE 58

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ et $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

- 1**
- a** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$: puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
 - b** Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}$ puis calculer U_1 .
- 2** On pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n$ avec $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- a** Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b En déduire que $|V_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$. Puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

3 a En utilisant une intégration par parties pour U_n , montrer que:

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\ln 2 - V_n)$$

b En déduire que la suite (W_n) définie par: $W_n = (n+1)U_n$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 59

A/

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ par $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1 a Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ et que $f'(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(\ln x)^2}\right)$

b Dresser le tableau de variation de f et en déduire que : pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, on a : $|f(x)| \geq 2$.

2 a Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $]1, e[$ une solution unique α et que $2 < \alpha < e$.

b Préciser les branches infinies de \mathcal{C} puis tracer \mathcal{C} .

3 Soit (U_n) la suite définie sur \mathbf{N} par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $2 \leq U_n \leq e$

b Encadrer $(\ln x)^2$ sur $[2, e]$, et en déduire que pour tout $x \in [2, e]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{5}$

c Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_n - \alpha|$, en déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.

B/

Soit F la fonction définie sur $] -1, 0[$ par $\begin{cases} F(x) = xf(x^2), & \text{si } -1 < x < 0 \\ F(0) = 0, \end{cases}$

1 a Étudier la continuité et la dérivabilité de F à gauche en 0.

b Vérifier que $\forall x \in] -1, 0[$, et que : $F'(x) = f(x^2) + 2 - \frac{2}{(\ln x)^2}$

c Dresser alors le tableau de variation de F sur $] -1, 0[$.

2 a Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{n}$ admet dans une solution unique notée a_n .

b Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n < a_{n+1}$ et que (a_n) est convergente.

c Montrer que $\forall x \in] -1, 0[$, $F(x) \geq -2x$, en déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $-\frac{1}{2n} \leq a_n \leq 0$, puis donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

EXERCICE 60

A)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$.

1 Etudier les variations de f .

2 Tracer la courbe \mathcal{C} de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3 **a** Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

b Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} et les droites $x = 1, x = e$ et $y = 0$.

B)

Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

1 Soit $x \in [1, +\infty[$

a Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]; 0 \leq f(t) \leq \frac{(\ln 2x)^2}{t^2}$

b En déduire que $0 \leq F(x) \leq \frac{(\ln 2x)^2}{2x}$

c Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

2 Soit $x \in]0, \frac{1}{2}]$

a Montrer que $\frac{(\ln 2x)^2}{2x} \leq F(x)$.

b En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

3 Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $F'(x) = \frac{(\ln 2x)^2 - 2(\ln x)^2}{2x^2}$

EXERCICE 61

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}, & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0, \\ f(1) = 1, \end{cases}$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1 **a** Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2 Soit $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ et φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} (t-1)^2 - t \ln t - 1 + t$$

a Calculer $\varphi(x)$ et $\varphi(1)$. Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1 et x tel que $\varphi'(c) = 0$

- b En déduire que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$.
- c Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

3 Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 + 2x \ln x$

- a Dresser le tableau de variation de g' puis celui de g et en déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$.
- b Étudier la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente (T) .

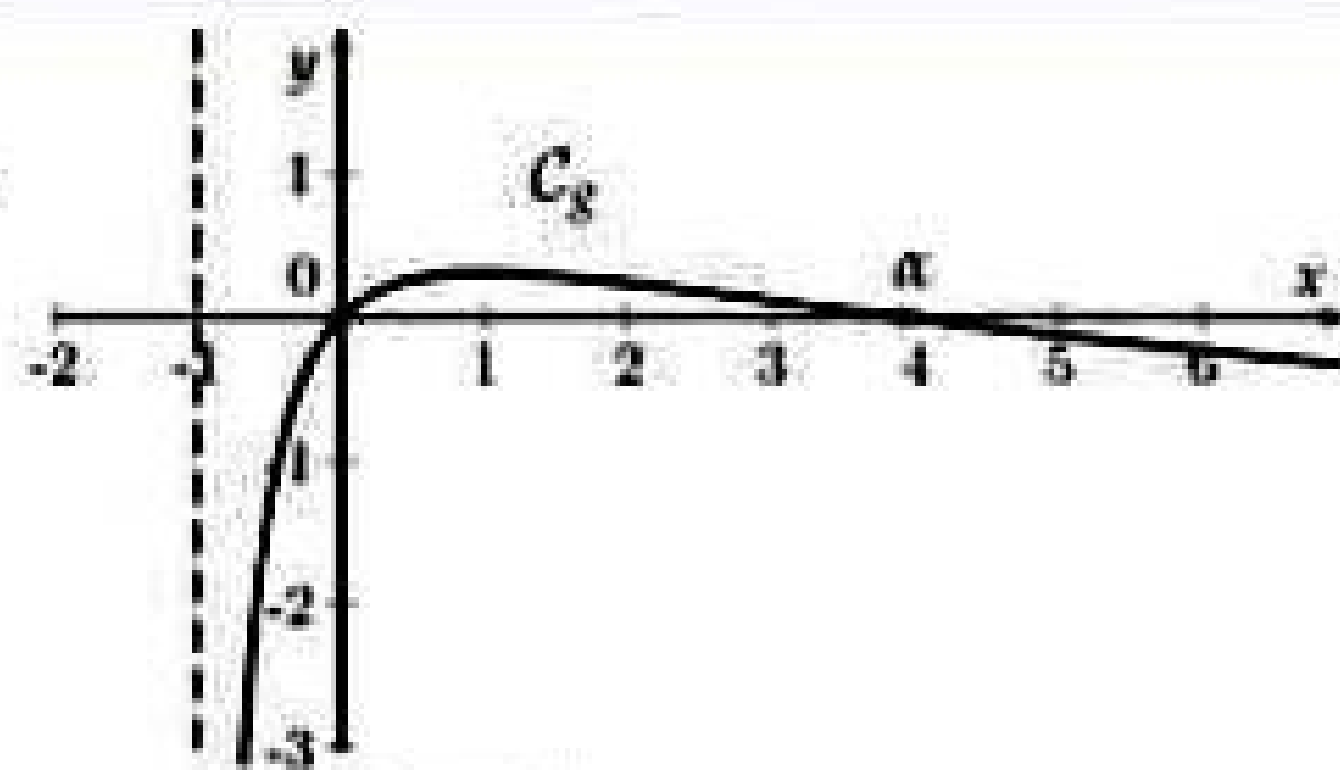
4 Dresser le tableau de variation de f et tracer \mathcal{C} .

EXERCICE 62

La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction g définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

Déterminer en fonction de α le signe de $g(x)$.



1 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- a Montrer que f est continue en 0.
- b Étudier la dérivabilité de f en 0.

2 a Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- b Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ et dresser le tableau de variation de f .

3 Construire la courbe \mathcal{C}_f de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra $\alpha = 3,9$ et on précisera la demi-tangente en $O(0,0)$.

4 Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f et la droite d'équation $x = 1$.

- a Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$.
Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $F'(x) = f(x)$.

- b En déduire que $\mathcal{A} = 2 \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$.

- c Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $h(x) = \int_0^{\tan^2 x} \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$.

Montrer que h est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $h'(x) = 4 \tan^2 x$ puis déduire l'expression de $h(x)$.

- d Déterminer la valeur exacte de $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ puis la valeur exacte de \mathcal{A} .

EXERCICE 63

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \ln x - \frac{n}{x}$, et on désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1 Dresser le tableau de variation de f_n sur $]0, +\infty[$. Tracer \mathcal{C}_2 .
- 2 Montrer que f_n réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .
- 3
 - a Montrer que pour tout entier non nul n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0, +\infty[$.
 - b Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.
 - c Montrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
- 4
 - a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln x < x$.
 - b Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.
- 5 Pour tout entier naturel non nul n , on pose $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx$.
 - a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ tel que $I_n = f_n(c_n)$.
 - b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$.
 - c Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

EXERCICE 64

- 1 Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln x$.
 - a Étudier les variations de g .
 - b En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 + x \ln x \geq x$.
- 2 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$
On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - a Montrer que f est continue à droite en 0.
 - b Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.
 - c Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
- 3
 - a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$.
 - b Dresser le tableau de variation de f .
- 4 Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ respectivement par $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

- a Construire le point A de \mathcal{C}_1 d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de \mathcal{C}_2 d'abscisse $1 - \frac{1}{e}$.
En déduire une construction du point C de \mathcal{C}_f d'abscisse $\frac{1}{e}$.
- b Déduire de la question 1.b) que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$.
Déterminer alors la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_2 .
- c Tracer la courbe \mathcal{C}_f .

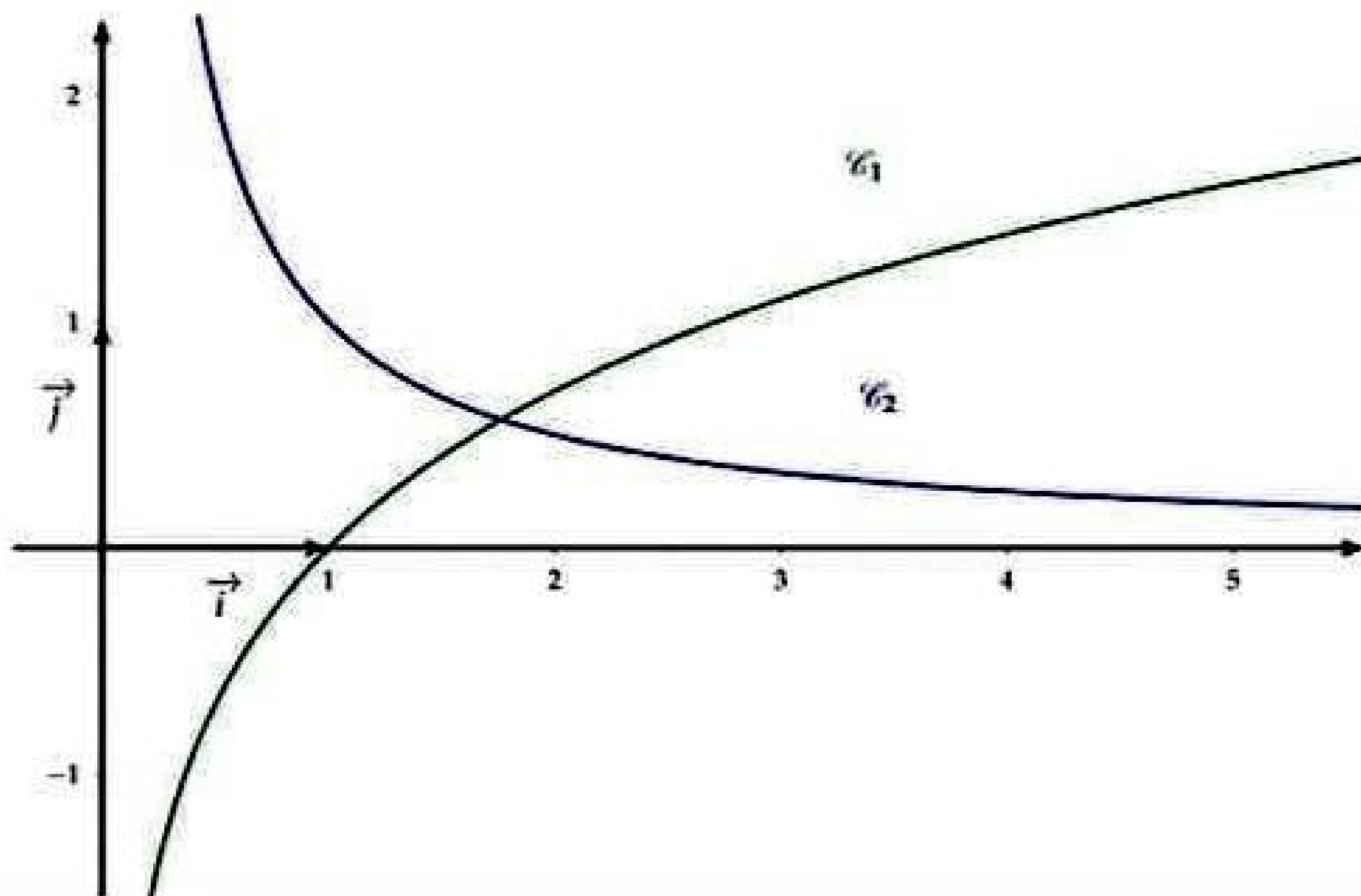
5 On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

- a Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{t+t \ln t} \leq f(t)$.
- b Montrer alors que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(1 + \ln x) \leq F(x) \leq \ln x$.
- c Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6 Soit n un entier naturel non nul.

- a Montrer que la fonction $h : x \mapsto x - F(x)$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
- b En déduire que l'équation $h(x) = n$ admet dans $[1, +\infty[$ une seule solution α_n .
- c Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.
- d Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Figure 2



EXERCICE 65

A)-

1 f est la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{\ln x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $]0,1[$.

2 Pour tout réel $x > 0$, on pose : $g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$

- a Étudier les variations de g .
- b Montrer que 1 est l'unique solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $1 - \frac{1}{x} = \ln x$.
- c Donner selon les valeurs des réels x , le signe de $g(x)$.

B) a est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

1 On considère les fonctions u, v et h définie sur l'intervalle $]0,1[$ par :

$$u(x) = x - 1 - \ln x, \quad v(x) = (1 - x) \ln x \text{ et } h(x) = u(x)v(a) - v(x)u(a).$$

a Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]a,1[$ tel que $h'(c) = 0$

b Dédurre $\frac{u(a)}{v(a)} = \frac{1-c}{c \ln c - 1 + c}$.

c Dédurre que $\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{u(a)}{v(a)} = -\frac{1}{2}$.

2 On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique est 5 cm)

a Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, $\frac{f(x)+1}{x-1} = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Étudier alors la dérivabilité de f à gauche en 1.

b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

c Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x} \times g(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

d Tracer \mathcal{C} .

3 On considère la suite (a_n) définie par : $a_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de \mathbf{N} , $a_{n+1} = -f(a_n)$

a Montrer que pour tout n de \mathbf{N} , $0 < a_n < 1$,

b Montrer que pour tout n de \mathbf{N} , $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{\ln a_n} \times g(a_n)$.

c Montrer que (a_n) est convergente puis calculer sa limite.

EXERCICE 65

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$. On désigne par (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

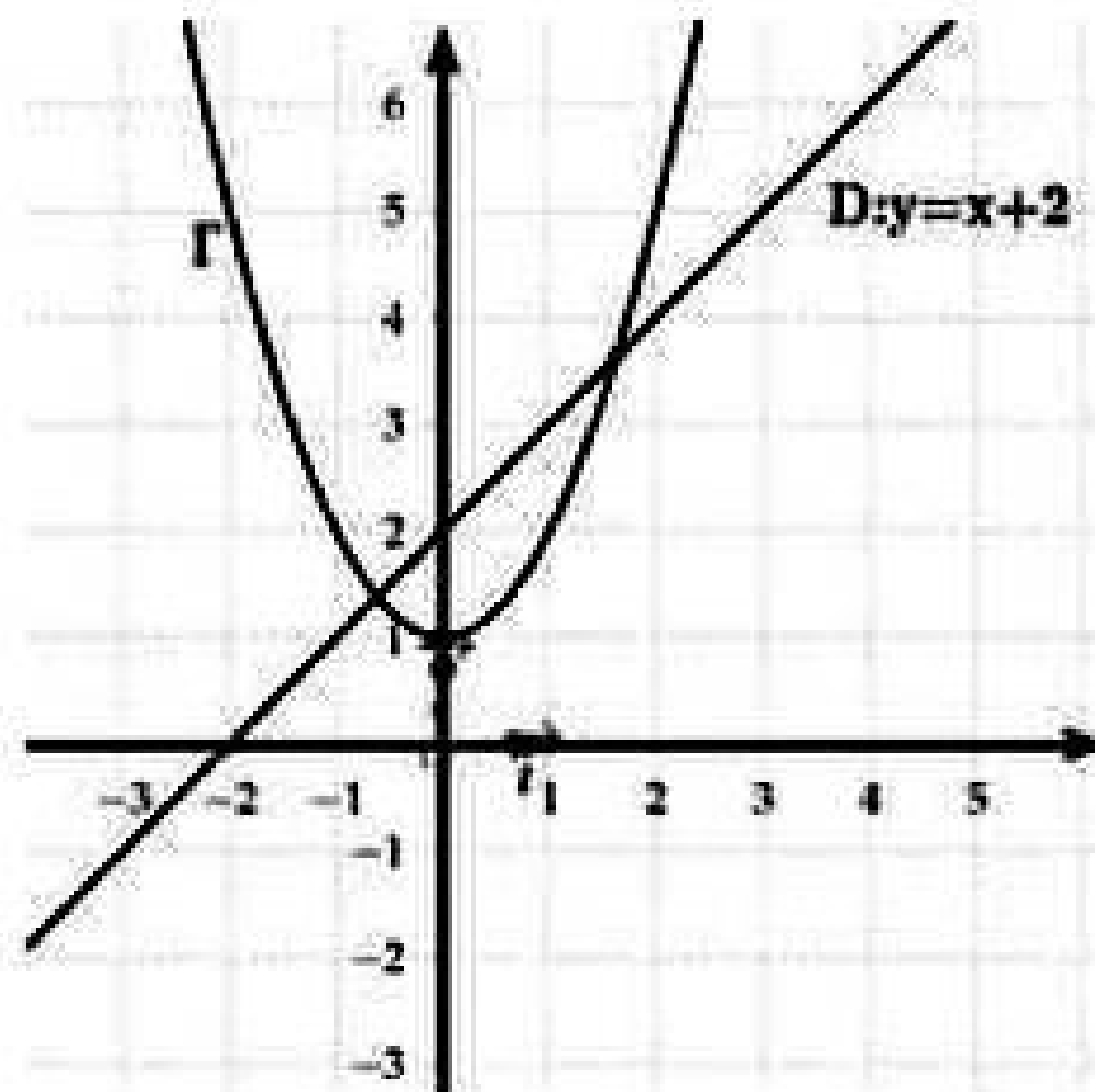
A)

- 1**
 - a** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.
 - b** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
- 2**
 - a** Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$.
 - b** Dresser le tableau de variation de f .
 - c** Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3**
 - a** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 = x + 1$.
 - b** On note a la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\frac{1}{a}$.
 - c** Montrer que la courbe (\mathcal{C}_f) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse a .
 - d** Montrer qu'une équation de la tangente T à (\mathcal{C}_f) au point A est $y = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)(x - a)$.
 - e** Vérifier que la tangente T passe par le point $B\left(0, -1 - \frac{1}{a^2}\right)$.
- 4** Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la droite D d'équation $y = x + 2$ et la courbe Γ de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$.
 - a** Construire les points A et B .
 - b** Construire la tangente T et tracer la courbe (\mathcal{C}_f) .

B Soit n un entier naturel non nul.

On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$.

- 5**
 - a** Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$.
 - b** Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G_n(x) = xf(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$.
- 6** On pose $J_n = n \int_1^{\sqrt[n]{a}} \frac{1}{1+t^n} dt$.
 - a** Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
 - b** En utilisant B)1)a), montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{a}) = 0$.
 - c** Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(a)$.
 - d** Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.



EXERCICE 67

- 1** Soient f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$
- a** Étudier le sens de variation de f et g sur $[0, +\infty[$
 - b** En déduire que pour tout x de $[0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
- 2** Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout n de \mathbb{N}^* , $U_{n+1} = U_n(1 + \frac{1}{2^{n+1}})$
- a** Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $U_n > 0$
 - b** Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $\ln(U_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{2^k})$
- 3** On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2})^k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{4})^k$
Montrer que $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(U_n) \leq S_n$
- 4**
- a** Calculer S_n et T_n en fonction de n
 - b** En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$
- 5**
- a** Montrer que la suite (U_n) est croissante
 - b** En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel ℓ
 - c** Montrer que $\ln(2) \leq \ln(\ell) \leq 1$ et en déduire un encadrement de ℓ

EXERCICE 68

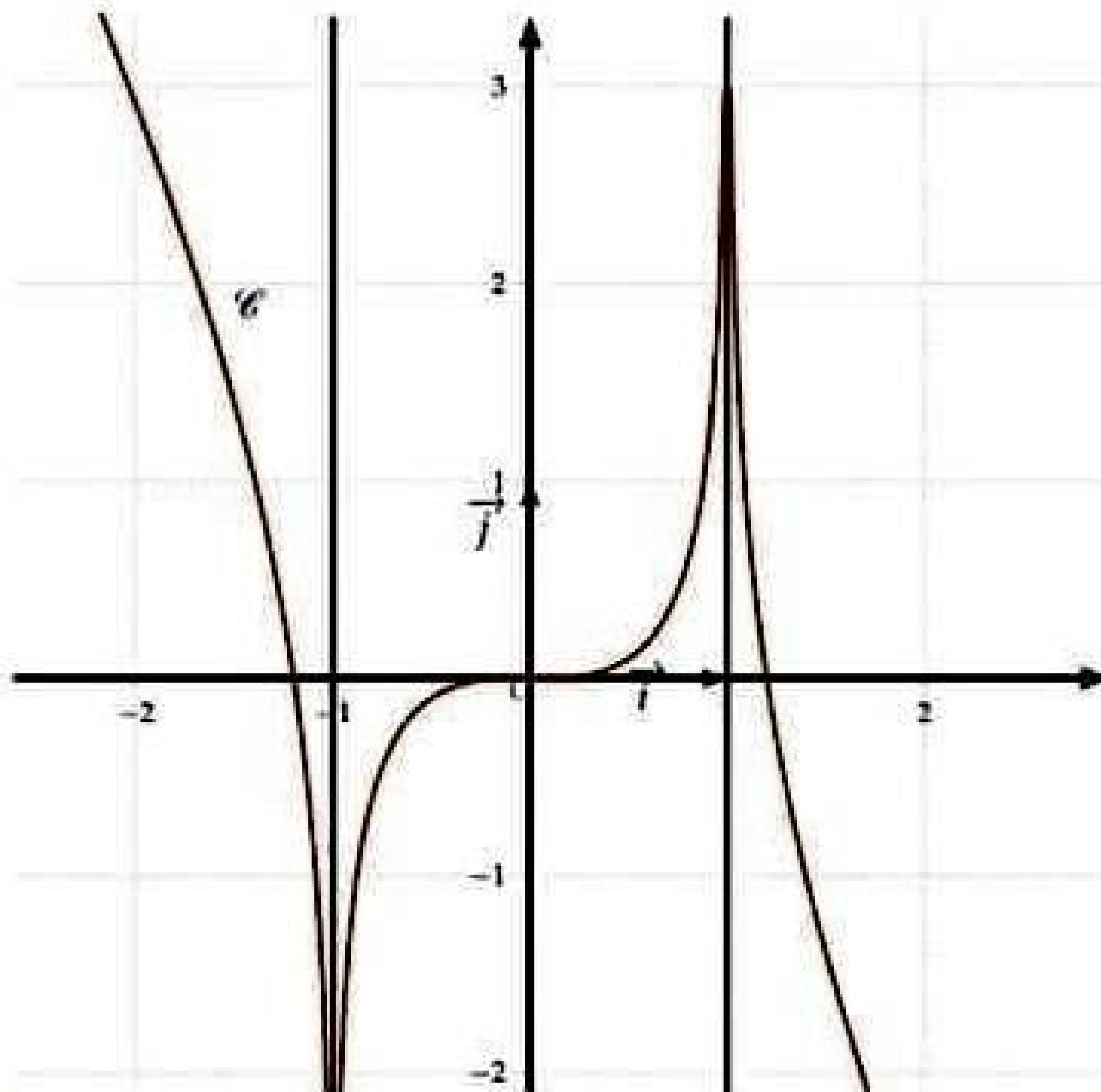
Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1}$. On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Dresser le tableau de variation de f .
 - b Montrer que le point $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de \mathcal{C} .
 - c Justifier que A est un point d'inflexion de \mathcal{C} .
 - d Écrire une équation de la tangente T à \mathcal{C} en A .
 - e Étudier la position relative de T et \mathcal{C} .
 - f Construire T et \mathcal{C} .
- 2 Soit le point $B(1,1)$ et soit D_1 la partie du plan limitée par l'arc $[OA]$ de \mathcal{C} et la droite $y = x$, D_2 la partie du plan limitée par l'arc $[AB]$ de \mathcal{C} et la droite $y = x$.
 - a Justifier que D_1 et D_2 ont le même aire.
 - b En déduire que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.
- 3
 - a Vérifier $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4x-2}{4(2x^2-2x+1)}$
 - b Retrouver la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$.

EXERCICE 69

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = ax + b + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ où a et b sont deux réels. Le graphique dans le feuille annexe on a représenté une partie de la courbe \mathcal{C} , de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Montrer que $f'(x) = a - \frac{2}{x^2-1}$.
 - b Montrer que $a = -2$ et $b = 0$.
Dans la suite on prend $a = -2$ et $b = 0$.
- 2
 - a Montrer que f est impaire.
 - b Dresser le tableau de variation de f .
- 3 Montrer que la droite Δ d'équation $y = -2x$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} .
- 4 Tracer Δ et compléter le graphique donner pour obtenir la courbe \mathcal{C} .
- 5 Soit g le restriction de f à $]0, 1[$.
 - a Montrer que g est une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b Construire la courbe \mathcal{C}' de g .
- 6 En désigne par α la solution de l'équation $f(x) = x$ qui appartient à $]0, 1[$ et soit $\mathcal{A}(\alpha)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' et la droites d'équation respectives $x = 0$ et $x = \alpha$. Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = -3\alpha^2 - 2\ln(1 - \alpha^2)$.

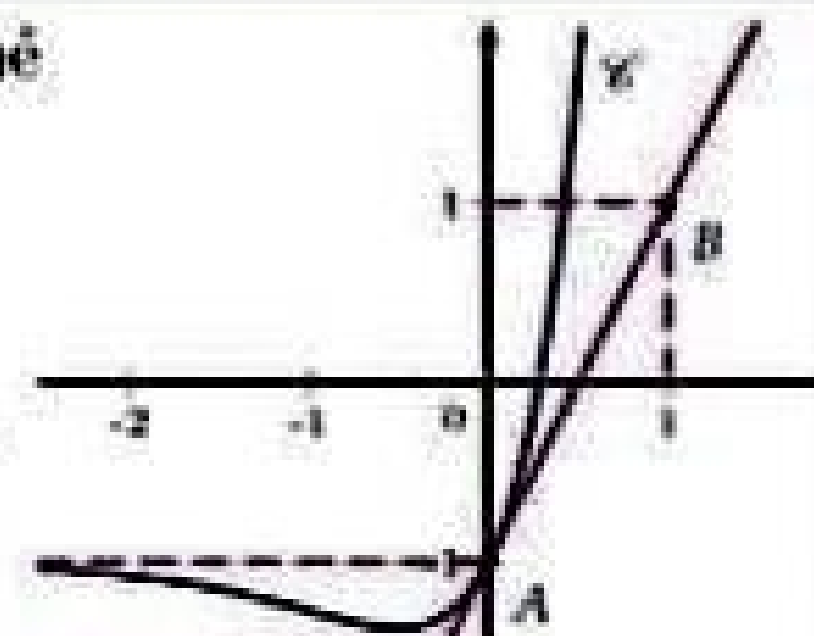


EXERCICE 70

Dans la figure ci-contre, est représentée dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On sait que \mathcal{C} admet :

- une asymptote la droite d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.
- une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.
- une tangente T au point $A(0, -1)$ passant par le point $B(1, 1)$.



- 1 Par lecture graphique, déterminer : $f'(0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- 2 On suppose que pour tout réel x , $f(x) = axe^{2x} + b$. Montrer que $a = 2$ et $b = -1$.
- 3
 - a Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} + 1)$.
 - b Soit g une solution de (E) . Montrer que $g - f$ est solution de l'équation $(E_0) : y' - 2y = 0$.
 - c Résoudre l'équation (E_0) , en déduire les solutions g de (E) .
- 4
 - a Montrer que $\int_{-1}^0 (-1 - f(x)) dx = \int_{-1}^0 \left(e^{2x} - \frac{1}{2} f'(x) \right) dx$.
 - b En déduire l'aire \mathcal{A} en unité d'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C} , la droite $\mathcal{D} : y = -1$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

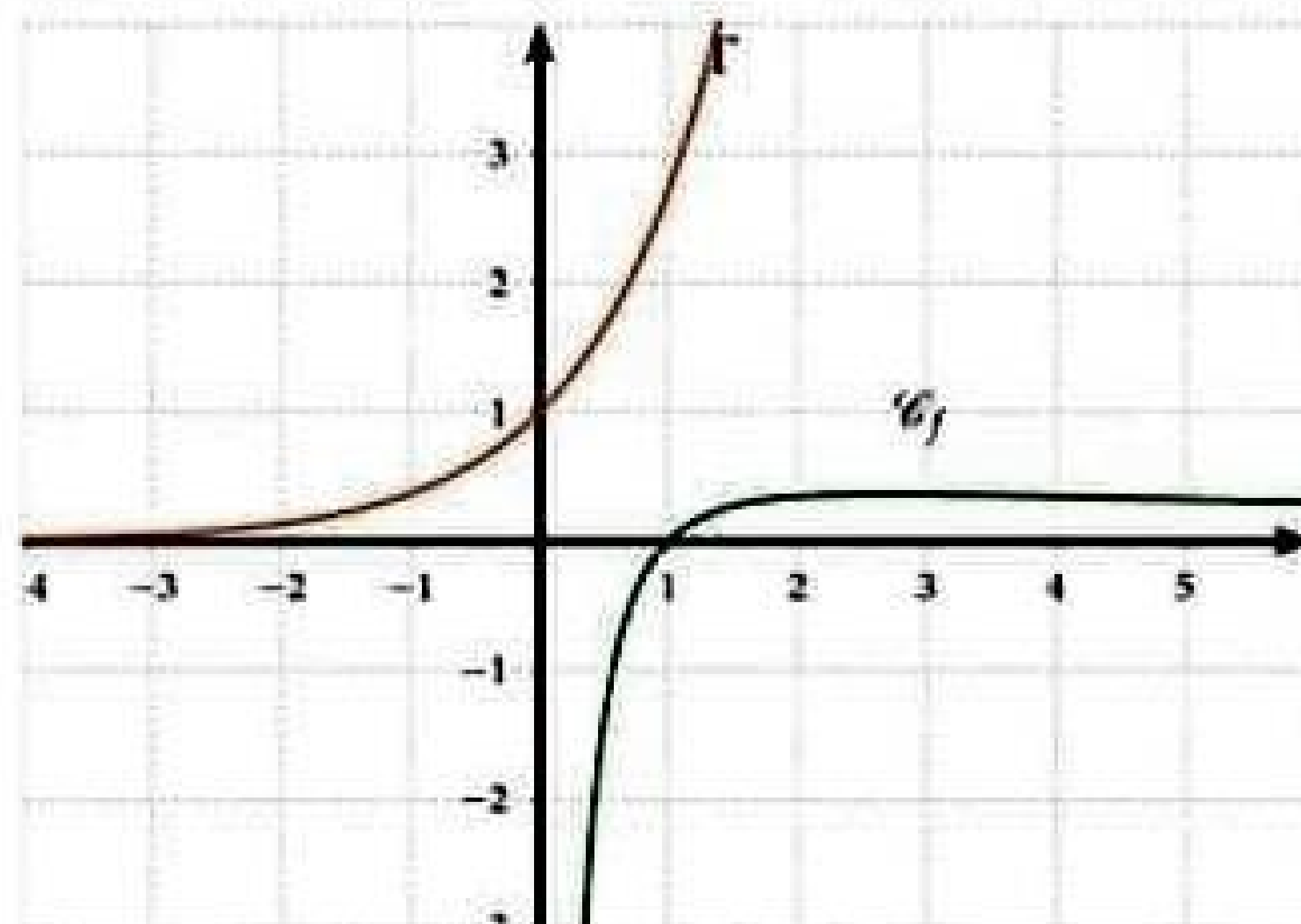
EXERCICE 71

On considère les équations différentielles : $(E_0) : y' + 3y = 0$ et $(E) : y' + 3y = \sin(x)$

- 1 Résoudre l'équation (E_0) sur \mathbb{R} .
- 2
 - a Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$. Déterminer un couple de réels $(a; b)$ pour que g soit une solution sur \mathbb{R} de l'équation (E)
 - b Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(f - g)$ est une solution de (E_0)
 - c En déduire les solutions sur \mathbb{R} de l'équation (E)
- 3 On se propose de résoudre sur \mathbb{R}_+^* , l'équation différentielle: $(E') : xy' + (3x + 1)y = \sin(x)$.
On pose $z = xy$
 - a Montrer que si y est une solution de (E') alors z vérifie l'équation (E)
 - b Résoudre l'équation (E') sur \mathbb{R}_+^*
 - c Déterminer la solution f de (E') qui admet un prolongement par continuité en 0.

EXERCICE 72

- 1 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- 2 Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par:
$$\begin{cases} g(x) = e^{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
 - a Montrer que g est continue à droite en 0.
 - b Montrer que g est dérivable à droite en 0.
 - c Dresser le tableau de variation de g
- 3 Dans la figure ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe \mathcal{C}_f de f et la courbe Γ de la fonction exponentielle.



- a Construire le point $A(e;g(e))$.
- b Déterminer et tracer la tangente à la courbe \mathcal{C}_g de g au point d'abscisse 1.
- c Tracer la courbe \mathcal{C}_g .

4 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = g(n) \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

- a Donner la limite de la suite (u_n)
- b Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.

EXERCICE 73

1 On se propose dans cette partie de déterminer l'ensemble \mathcal{F} des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E): y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

- a Soit f la fonction définie sur $]0, \infty[$ par : $f(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$. Montrer que $f \in \mathcal{F}$.
- b Montrer que : y appartient à \mathcal{F} si et seulement si $y - f$ est une solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E'): z' + z = 0$
- c Résoudre (E') .
- d Déterminer l'ensemble \mathcal{F} .

2 Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

on note (C) la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

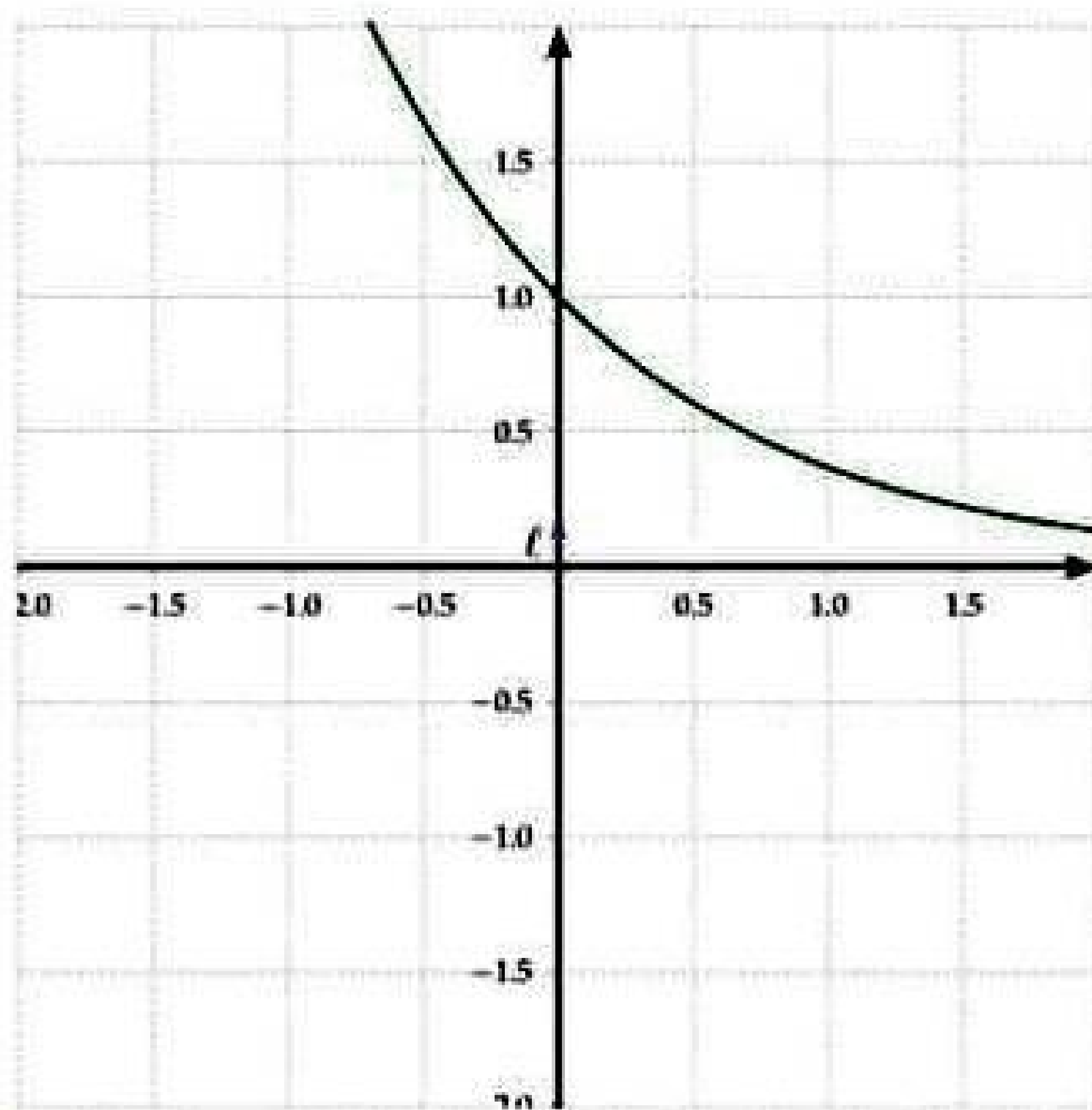
- a Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
- b Étudier le signe de $F(x)$ selon les valeurs du réel $x > 0$.
- c Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t} \leq 1$.
- d i. Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1]$, $F(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \ln x$.
ii. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
- e i. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $x \geq 1$,

$$F(x) = \frac{1}{e} - \left(\frac{e^{-x}}{x} + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$$

- ii. Montrer que F admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ et que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{e}$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- iii. Dans la figure ci-jointe, on donne la courbe de la fonction $x \mapsto e^{-x}$, et le point de coordonnées $(0, \ell)$
Tracer la tangente T à (C) au point d'abscisse 1, puis tracer (C) . (On donne $\ell \simeq 0,15$.)

f n étant un entier naturel tel que $n \geq 3$.

- i. Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{n^2}$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $[1, +\infty[$.
- ii. Montrer que la suite (α_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.
- iii. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
- iv. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $\frac{e}{n^2} \leq \alpha_n - 1 \leq \frac{n^2}{n^2} e^{1/n}$.
- v. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(\alpha_n - 1) = e$.



EXERCICE 74

λ étant un réel donné. Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbf{R} vérifiant que :

$$\text{Pour tout réel } x, f(x) + \int_{\pi-x}^{\pi} f(t) dt = \lambda$$

- 1 Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ alors f est deux fois dérivable sur \mathbf{R} .
- 2 Vérifier que si $f \in \mathcal{F}$ alors $f(0) = \lambda$ et $f'(\pi) = -\lambda$.
- 3 Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ alors f vérifie l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
- 4 Déterminer \mathcal{F} .
- 5 Soit f un élément de \mathcal{F} vérifiant :

- Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $f(x) \geq 0$.
- Le volume du solide de révolution autour de l'axe des abscisses de l'arc défini par : $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ et $y = f(x)$ est égale à $2 + 3\pi$ en unité de volume.

Déterminer f .

EXERCICE 75

n étant un entier naturel non nul.

1 On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

a Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$.

b Dédire que pour tout réel $x \geq 0$, $F(x) = \sqrt{n} \int_1^x e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$

2 On pose : $U_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$ pour $n \geq 1$.

a Montrer que pour tout $n \geq 1$, $e^{-2n} \leq U_n \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

b Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

c Vérifier que $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

3 Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $G(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a Montrer que G est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis que pour tout réel $x \geq 0$, $G'(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b Dédire que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$U_n \geq \frac{1}{n+1} e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{4n+1} e^{-2n}.$$

4 a Vérifier que :

$$\frac{1}{n+1} e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{4n+1} e^{-2n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{n+1} \left(1 - \frac{2n+2}{4n+1} e^{-\frac{3n}{2}} \right)$$

b Dédire que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{4n+1} e^{-2n} > 0$.

5 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $V_n = \frac{\ln U_n}{n}$.

a Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\ln \left(\frac{1}{n+1} e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{4n+1} e^{-2n} \right) = -\frac{n}{2} - \ln(n+1) + \ln \left(1 - \frac{2n+2}{4n+1} e^{-\frac{3n}{2}} \right)$$

b Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\frac{1}{2}$

EXERCICE 76

1 Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On désigne par \mathcal{C}_g , la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a Dresser le tableau de variation de g .
- b Montrer que le point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de \mathcal{C}_g .
- c Tracer \mathcal{C}_g et la tangente (T) à \mathcal{C}_g en I .
- d Déterminer \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

- 2
- a Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle $(E) : y' + y = (g(x))^2$.
 - b En déduire le volume \mathcal{V} du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de la courbe \mathcal{C}_g autour de (O, \vec{i}) , où A et B les points de \mathcal{C}_g d'abscisses respectifs 0 et 1.

3 Pour tout n de \mathbf{N} on pose : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

- a Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) est convergente.
- b Montrer que pour tout n de \mathbf{N}^* on a : $U_n + U_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$.
- c En déduire que pour tout n de \mathbf{N}^* on a : $\frac{1-e^{-n}}{2n} \leq U_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.
- d Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4 Pour tout n de \mathbf{N}^* et pour tout réel x , on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-kx} \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \int_0^1 e^{-kx} dx \right)$$

- a Exprimer $S_n(x)$ en fonction de n et x .
- b Montrer que pour tout n de \mathbf{N}^* , $V_n = -\mathcal{A} + (-1)^n U_{n+1}$.
- c En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} (1 - e^{-k})$.

EXERCICE 77

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = xe^{1-x}$

Partie A :

- 1
- a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - b Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
 - c Tracer \mathcal{C}_f en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.

2 On considère la fonction g définie sur \mathbf{R} sur $g(x) = |x|e^{1-|x|}$.

- a Écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- b Déduire-en une méthode pour obtenir \mathcal{C}_g sur $] -\infty; 1]$ à partir de \mathcal{C}_f .
- c Étudier sur $[1; +\infty[$ le sens de variation de $h(x) = xe^{x-1}$.

- d Étudier la dérivabilité de g en 0 et en 1.
- e Dédire des questions précédentes le tableau de variation de g .
- f Tracer \mathcal{C}_g ainsi que les demi-tangentes à \mathcal{C}_g aux points d'abscisses 0 et 1.

Partie B : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions f_n définies par $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$.
On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n .

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- 2 Calculer les limites de $f_n(x)$ et $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3 Donner le tableau de variation de f_n .
- 4 Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $f_n(x) = x$.
- 5 Dédire-en que toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par deux points fixes à déterminer.
- 6 Étudier la position de \mathcal{C}_n par rapport à \mathcal{C}_{n+1} .

EXERCICE 78

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g_n(t) = \left(-\frac{2}{t} + \ln t\right)^n.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de g_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .
Unités graphiques : $OI = 2 \text{ cm}$ et $OJ = 0,5 \text{ cm}$.

Partie A:

- 1
 - a Calculer la limite de g_1 en 0.
 - b Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2
 - a Calculer la limite de g_1 en $+\infty$.
 - b Justifier que \mathcal{C}_n admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$.
- 3 On suppose que g_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - a Démontrer que g_1 est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
On admet que l'équation $t \in]0; \infty[, g_1(t) = 1$ admet une solution unique α telle que : $2,3 < \alpha < 2,4$.
 - b Justifier que l'équation $t \in]0; +\infty[, g_1(t) = 1$ admet une solution unique β telle que : $4,3 < \beta < 4,4$.
- 4 Soit t un nombre réel strictement positif.
Démontrer que :
 - a $g_1(t) < 0 \iff t \in]0; +\infty[$.
 - b $g_1(t) > 0 \iff t \in]0; +\infty[$.

Partie B: Dans cette partie, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

- 1
- a Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t)$.
 - b Démontrer que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g_n(t)}{t}$. (On pourra poser $x = t^{\frac{1}{n}}$).
 - c Interpréter graphiquement ce résultat.

2 On suppose que n est pair.

- a Calculer $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t)$.
- b Soit t un nombre réel strictement positif. Justifier que:
 - i. $g_n(t) < 0 \iff t \in]0; +\infty[$.
 - ii. $g_n(t) > 0 \iff t \in]0; +\infty[$.
 (On pourra utiliser la question 1 de la partie A) .

3 On suppose que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, g_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on désigne par g'_n sa fonction dérivée.

- a Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout nombre réel strictement positif t , $g'_n(t) = n g_1(t) \times g_{n-1}(t)$.
- b Étudier suivant la parité de n , le signe de g'_n sur $]0; +\infty[$.
- c Dresser suivant la parité de n , le tableau de variation de g_n .

Partie C: Soit n et p deux entiers naturels non nuls et t un nombre réel strictement positif.

- 1
- a Exprimer $g_{n+p}(t)$ en fonction $g_n(t)$ et $g_p(t)$.
 - b Dédire de ce qui précède que : $g_{n+p}(t) - g_n(t) = (g_p(t) - 1) \times g_n(t)$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est pair.

2 Justifier que :

- a \mathcal{C}_n est au-dessus de \mathcal{C}_{n+1} sur $]0; \beta[$.
- b \mathcal{C}_n est au-dessous de \mathcal{C}_{n+1} sur $]\beta; +\infty[$.

3 Construire \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 dans le même repère (O, I, J) .
On prendra : $\alpha = 2,35$ et $\beta = 4,35$.

4 Soit A_n l'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_n , \mathcal{C}_{n+1} et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.

- a Justifier que pour tout entier naturel n pair et non nul, $A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t) dt$.
- b A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 (1 - g_1(t)) dt$.
- c Démontrer que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$.
- d Dédire de ce qui précède que pour tout entier naturel n pair et non nul,

$$2(1 - \ln 2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$$

EXERCICE 79

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \text{ pour } x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Unité: 2 cm.

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{x+1} + 2 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$.

- 1 Calculer les limites de g en 0 et $+\infty$.
- 2
 - a Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{-x-2}{x(x+1)^2}$.
 - b Étudier le sens de variation de g .
- 3 Dresser le tableau de variation de g .
- 4 Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$.

Partie B :

- 1 Démontrer que f est continue en 0.
- 2 Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 3
 - a Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
 - b Interpréter graphiquement ce résultat.
- 4
 - a Calculer $f'(x)$ et vérifie que : $\forall x > 0, f'(x) = xg(x)$.
 - b Déduire-en le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5 On considère la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - x + \frac{1}{2}$.

On admet que $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{3x^2}$.

- a Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
 - b Étudier la position relative de \mathcal{C} et (D) .
- 6
 - a Justifier que f admet une bijection réciproque f^{-1} .
 - b f^{-1} est-elle dérivable en 0?
- 7 Construire (D) , \mathcal{C} puis la courbe représentative de f^{-1} .

Partie C : Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

- 1
 - a Montrer que h admet des primitives sur \mathbb{R}
 - b Calculer la primitive H de h qui prend en 0 la valeur $1 + \ln 3$.
- 2 Étudier le sens de variation de H .

3 On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$$

On désigne par (Δ) la droite d'équation : $y = 1 - x$.

- a Étudier la position relative de Γ et de (Δ) .
- b Déterminer les abscisses des points d'intersection de Γ et de (Δ) .

4 a Établir une équation de la tangente (T) à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

- b Étudier la position relative de Γ et de (T) .

5 Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera les équations.

EXERCICE 80

On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies $\forall n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}; \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}; \quad w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

1 a Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

Démontrer que : $\forall x \in [k; k+1]$ on a $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

b En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f , démontrer que pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \quad (1)$$

c Vérifier que : Pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = u_{n+1} - 1 \quad \text{et que} \quad \sum_{k=1}^{k=n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1 \quad (2)$$

d Dédire de (1) et (2) que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - 1 \leq 2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$ (3).

e En utilisant (3), démontrer que pour tout $n \geq 1$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} - 1$
Dédire-en la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

3 a Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $-2 \leq w_n \leq -1$.

b Démontrer que la suite (w_n) est décroissante.

c Dédire-en que la suite (w_n) converge vers une limite ℓ dont on donnera un encadrement.

EXERCICE 81

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$.
 (Γ) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Unité : 2 cm.
Partie A: On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.

- 1 Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
- 2 Étudier le sens de variation de g .
- 3 Montrer que dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
- 4 Dédurre-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B:

- 1 Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2 Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- 3 Montrer que $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$.
- 4 Dresser le tableau de variation de f .
- 5 Construire (Γ) .

Partie C: Soit $I_n = \int_e^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $A_n = \int_e^{e^{n+1}} f(t) dt$.

- 1 Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$.
- 2
 - a Montrer que $A_n = I_n + e$
 - b Calculer I_0 et A_0 .
 - c Donner une interprétation géométrique de A_0 .
- 3 Montrer que la suite (A_n) converge vers e .

EXERCICE 82

Partie A : On considère les deux équations différentielles suivantes: $(E) : y' + y = 0$ et $(E') :$
 $y' + y = -\frac{1}{x} - \ln(x)$

- 1 Résoudre l'équation différentielle (E) .
- 2 Soit ϕ une fonction définie et dérivable sur \mathbf{R}_+^* et g la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par

$$g(x) = \phi(x)e^x$$

- a Montrer que : ϕ est une solution de (E') , si et seulement si, g soit une primitive de la fonction: $x \mapsto -e^x \ln(x) - \frac{e^x}{x}$

- b Déterminer les primitives sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $x \mapsto -e^x \ln(x) - \frac{e^x}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$
- c En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E') sont les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par $x \mapsto ke^{-x} - \ln(x)$

Partie B: Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = e^{1-x} - \ln(x)$

- 1
 - a Dresser le tableau de variation de f
 - b Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]1,6, 1,7[$
 - c Construire la courbe \mathcal{C}_f de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x)$
 - b Soit $x \in]0, 1[$. Calculer $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$
 - c Montrer que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = e$
- 3 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 - a Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a: $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$
 - b Montrer alors que: $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$
 - c En déduire que: $F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$
- 4
 - a Calculer alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$
 - b Établir les égalités suivantes:
 - $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{(1-\frac{k}{n})} = (e-1) \times \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}$
 - $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$
 - c Utiliser les résultats précédents pour déterminer les limites des suites U et V définies sur \mathbb{N}^* par:
 - $U_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$
 - $V_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

EXERCICE 83

Partie A: On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par:

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit \mathcal{C} la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique: 2cm)

- 1
 - a Montrer que f est continue à droite en 0.
 - b Montrer que f est dérivable à droite en 0.
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - b Dresser le tableau de variation de f .
- 3
 - a Montrer que \mathcal{C} admet un point d'inflexion que l'on précisera.
 - b Construire \mathcal{C} ; en prend: $f(1) \approx 0.7$ et $4e^{-3} \approx 0.2$

Partie B: On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par: par $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

- 1 Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$
- 2
 - a A l'aide d'une intégration par parties, montrer que: $\forall x > 0$; on a:

$$\int_x^1 (e^{-t}) dt = e^{-1} - x.e^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}e^{-t}\right) dt$$

- b Pour $x > 0$; calculer : $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-t} dt$
 - c Montrer que $\int_x^1 f(x)dx = \frac{1}{e}$
- 3 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbf{N} par $u_n = F(n) - F(n+2)$
 - a En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que: $\forall n \in \mathbf{N}$, il existe un réel $v_n \in]n, n+2[$ tel que : $u_n = 2\left(1 + \frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}}$
 - b Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, on a: $2\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} < u_n < 2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$
 - c En déduire la limite de la suite (u_n)

Partie C:

- 1
 - a Montrer que: $(\forall n \in \mathbf{N}^*)(\exists! \alpha_n > 0)$, $f(\alpha_n) = e^{-\frac{1}{\alpha_n}}$
 - b Montrer que la suite (α_n) est croissante.
 - c Justifier que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$; on a: $-\frac{1}{\alpha_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) = -\frac{1}{n}$
- 2 Soit n un entier tel que $n \geq 4$
 - a Vérifier que $\alpha_4 \geq 1$ puis déduire que $\alpha_n \geq 1$ sachant que $e^{\frac{1}{n}} \geq 2$
 - b Montrer que: $1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1$. (On peut utiliser: 1/c et 2/b partie C)
 - c Montrer que: $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq \alpha_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$
 - d Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha_n \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$

EXERCICE 84

On considère les équations différentielles $(E_0) : (1 + e^x) \cdot y' - y = 0$ et $(E) : (1 + e^x) \cdot y' - y = e^{2x}$.

1 Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$. Montrer que g est une solution de (E) sur \mathbb{R} .

2 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que f est solution de $(E) \Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

3 On pose $z = (1 + e^x) \cdot y$

a Montrer que: si y est une solution de (E_0) sur \mathbb{R} alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.

b En déduire que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions f définies par

$$f(x) = \frac{k \cdot e^x + e^{2x}}{1 + e^x}; k \in \mathbb{R}$$

4 Soit la fonction Ψ définie par $\Psi(x) = \frac{e^{2x} - 3 \cdot e^x}{1 + e^x}$

a Dresser le tableau de variations de Ψ

b Construire la courbe \mathcal{C} de Ψ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c Soit ϕ la restriction de Ψ sur \mathbb{R}_+ .

□ Montrer que ϕ réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle J que l'on précisera.

□ Expliciter $\phi^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

d Tracer dans le même repère la courbe \mathcal{C}' de ϕ^{-1} .

e Calculer: $I = \int_{-1}^0 \ln(3 + x + \sqrt{x^2 + 10x + 9}) dx$

EXERCICE 85

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1 Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante, et telle que $\int_0^1 f(x) dx$ soit convergente. On

pose pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

a i. Pour $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ montrer que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx$

ii. Pour $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ montrer que $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

iii. En déduire que $\frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x) dx$

b En déduire la limite de S_n quand $n \rightarrow +\infty$

- 2 a Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u^3}} du$
- b A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = - \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3 Soit $P_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{k}}}$

- a Donner les valeurs de P_n pour $n \in \{20, 50, 100\}$
- b Déterminer la limite de P_n quand $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 86

On note (E) l'équation numérique suivante :

$$\ln x + x = 0$$

L'objectif de cet exercice est, dans un premier temps, d'établir l'existence et l'unicité de la solution de (E) puis, dans un second temps, de démontrer la convergence d'une suite vers ce réel.

On pourra utiliser les approximations suivantes à 0,1 près : $e \approx 2,7$ et $\frac{1}{e} \approx 0,4$.

Partie A: Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x + x$.

- 1 Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2 Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3 Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. On note α ce réel.
- 4 Montrer que α est compris au sens large entre $\frac{1}{e}$ et 1.
- 5 Représenter sur un même graphique les courbes d'équations respectives $y = \ln x$ et $y = -x$, ainsi que le point A de coordonnées $(\alpha, 0)$

Partie B: Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x - \ln x}{2}$

- 1 Montrer que les équations (E) et $g(x) = x$ sont équivalentes.
- 2 Déterminer g' ; dresser le tableau de variations de g et en déduire que l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ est stable par g , c'est-à-dire que pour tout réel x de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, $gg(x)$ appartient à $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.
- 3 a Déterminer g'' et préciser le sens de variation de g' .
- b En déduire un encadrement de g sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ puis, pour tout réel x de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ la majoration : $|g'(x)| \leq \frac{e-1}{2}$.
- c Vérifier l'inégalité suivante : $\frac{e-1}{2} \leq 0,9$.
- d Montrer alors que, pour tous réels x et y de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on a : $|g(x) - g(y)| \leq 0,9|x - y|$

Partie C: On définit la suite (u_n) en posant :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$$

1 A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire de la question B. 2) que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

2 Montrer alors que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.9|u_n - \alpha|$$

puis que :

$$|u_n - \alpha| \leq (0.9)^n$$

3 Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

4 Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N , on ait :

$$|u_n - \alpha| \leq 0.001$$

(on donne à cet effet l'approximation suivante à 0.1 près : $\frac{3 \ln 10}{\ln 10 - \ln 9} \approx 65.6$).

EXERCICE 87

Dans tout l'exercice λ désignera un réel strictement positif et f_λ sera la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$, pour tout réel x .

Le but de l'exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 **a** Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$, d'inconnue x , admet une seule racine dans \mathbb{R} et que cette racine appartient à $]0, 1[$. On note ℓ_λ cette racine.

b Montrer que, si $\lambda > \frac{e}{2}$, alors $\ell_\lambda > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

2 On suppose dans cette question que $\lambda \leq \frac{e}{2}$.

a Montrer que $\max_{x \in [0,1]} |f'_\lambda(x)| < 1$.

b Montrer que la suite (u_n) admet pour limite ℓ_λ .
On revient au cas général, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

3 On pose $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.

a Montrer que g_λ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b Montrer que les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

4 **a** Montrer que les racines éventuelles de l'équation $g_\lambda(x) = x$ appartiennent à $]0, 1[$.
Vérifier que ℓ_λ est une racine de cette dernière équation.

b Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $g_\lambda(x) = x$ si et seulement si $\ln(-\ln x) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda) = 0$.

- c Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $h_\lambda(x) = \ln(-\ln x) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda)$.
Montrer que la fonction h_λ est dérivable sur $]0, 1[$ et que $h'_\lambda(x)$ a le signe opposé de celui de $1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$.
- d Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $k_\lambda(x) = 1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$. Dresser le tableau de variation de la fonction k_λ .
- e On se place désormais dans le cas où $\lambda > \frac{e}{2}$.
- Montrer que, dans ce cas, $k_\lambda(\ell_\lambda) < 0$.
 - Dresser le tableau de variation de la fonction h_λ et en déduire que l'équation $h_\lambda(x) = x$ admet trois racines $\mu_\lambda, \ell_\lambda, \nu_\lambda$ et vérifiant $0 < \mu_\lambda < \ell_\lambda < \nu_\lambda < 1$.
 - Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers μ_λ et ν_λ respectivement.

EXERCICE 88

On note, pour tout entier $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt$$

et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n = \sum_{p=1}^n u_p = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Partie A : Étude de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

- 1 Montrer, pour tout entier $p \geq 1$: $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
- 2 En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ , tel que $0 \leq \gamma \leq 1$.

Partie B : Expression intégrale du réel γ

- 1 a Établir, pour tout réel x : $1 + x \leq e^x$.
- b En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \text{ et } \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \text{ puis : } \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

- 2 a Établir, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x de $[0, 1]$:

$$(1-x)^n + nx - 1 \geq 0$$

- b En utilisant 1.b. et 2.a., montrer, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n^2} e^{-t}$$

- 3 a On note, pour tout entier $n \geq 1$: $I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt$.
Justifier l'existence de I_n .
- b Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4 a Établir, pour tout entier $n \geq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln(n+1))$

b On note, pour tout entier $n \geq 1$: $J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt$
Justifier l'existence de J_n , et montrer, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1)$$

5 On note : $U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$ et $V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

a Justifier l'existence de U et de V .

b Démontrer : $\gamma = U - V$.

EXERCICE 89

Soit la fonction g définie sur $[0;1[$ par $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1 a Montrer que g réalise une bijection de $[0;1[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} g(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

2 Soit $G(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2} dt$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

a Montrer que G est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $G'(x)$.

b En déduire que $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

c Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ puis $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} g(x) dx$.

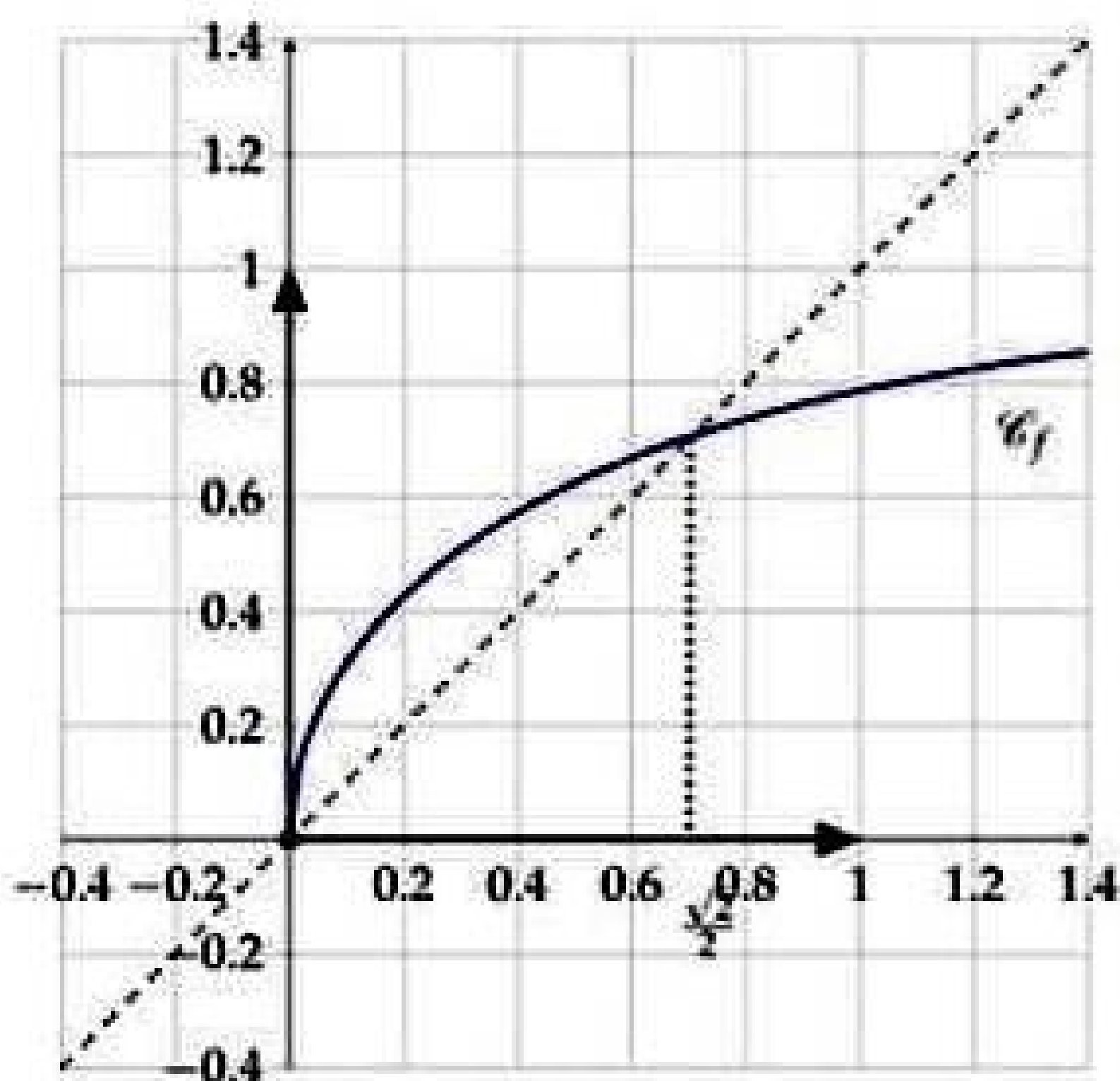
- 3 On donne la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + 4}}}$$

La courbe \mathcal{C}_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Montrer que $f(x) = g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$
- Construire \mathcal{C}_g dans le même repère.
- Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



EXERCICE 90

1 Soit $F(x) = \int_0^{\sqrt{\tan(x)}} \frac{t}{1+t^4} dt$ pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

- Montrer que F est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $F'(x)$

- En déduire que $F(x) = \frac{x}{2}$ et déduire $\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt$

2 Soit pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4} dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4k+2}$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4n+2}$ puis déduire la limite de (I_n)

- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$; $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{4n+2}$ puis déduire I_2 .

- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$; $S_n - \frac{\pi}{8} = (-1)^n I_{n+1}$ puis calculer la limite de (S_n)

EXERCICE 91

Soit la fonction F définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$ par $F(x) = \int_1^{\tan^2(x)} \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)}}$

- Justifier l'existence de F sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$

- Montrer que F est paire.

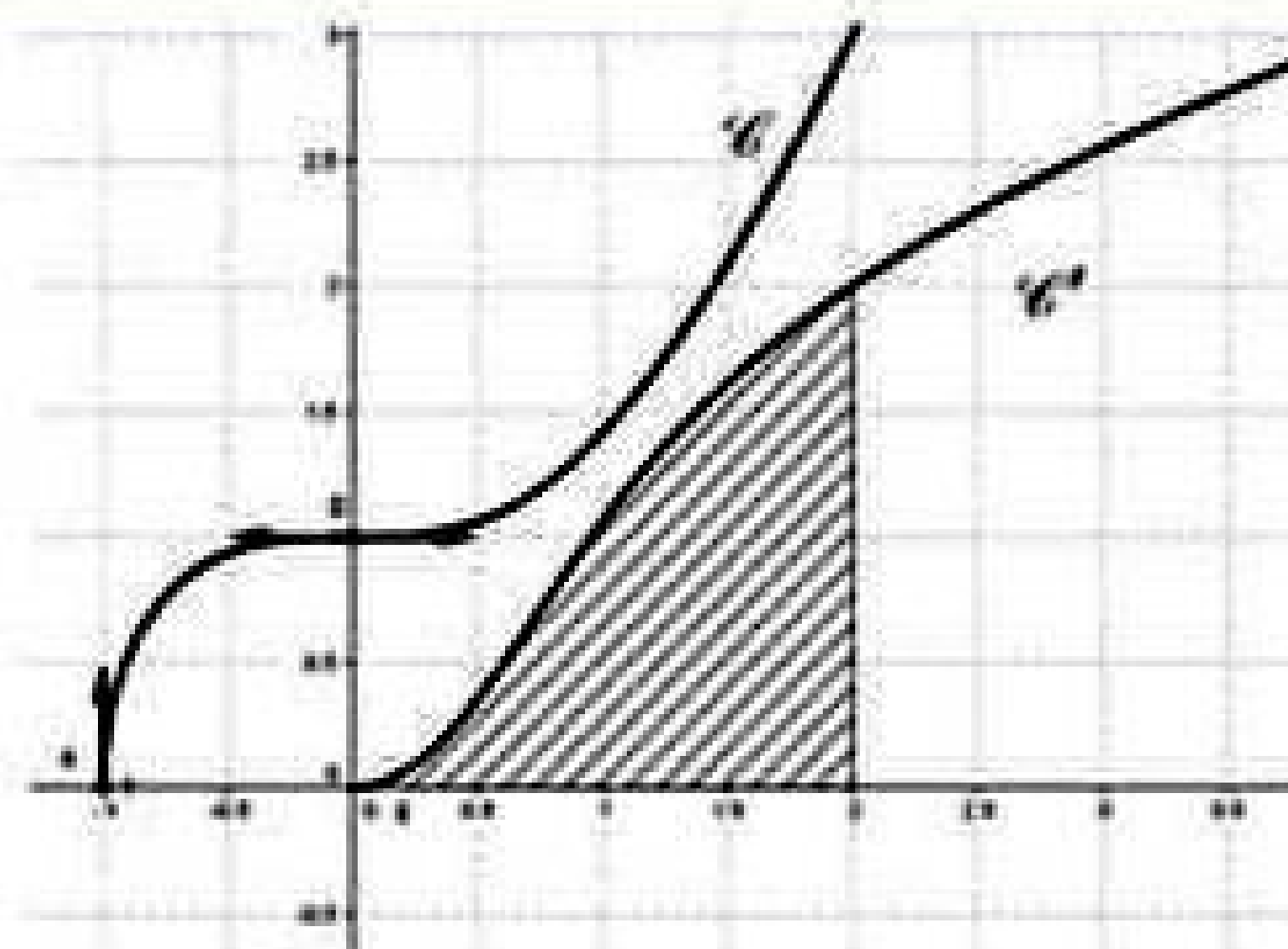
- Calculer $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

- 2**
- a** Montrer que F est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $F'(x)$.
 - b** Dédire que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$
 - c** Expliciter $F(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$

3 Calculer alors $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)}}$

EXERCICE 92

Dans la figure ci-contre la courbe \mathcal{C} est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ et la courbe \mathcal{C}' est celle de la restriction de f' la fonction dérivée de f sur $[0; +\infty[$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



- 1** Déterminer, en utilisant le graphique, l'aire \mathcal{A}' de la partie hachurée. Dans la suite de l'exercice, on prend $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$.
- 2** On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit S le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de \mathcal{C} autour de l'axe (O, \vec{i}) tel que $A(-1; 0)$ et $B(0; 1)$. Calculer le volume \mathcal{V} de S .
- 3** On pose pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 x^n F(x) dx$, où F est la primitive de f sur $[-1; +\infty[$ qui s'annule en 1.
- a** Calculer $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$, en déduire la valeur de I_1 .
 - b** Déterminer le sens de variation de F sur $[-1; +\infty[$, en déduire le signe de $F(x)$ pour $x \in [-1; +\infty[$.
 - c** Montrer que $I_n \leq 0$ pour tout $n \geq 1$.
 - d** Montrer que la suite (I_n) est croissante, en déduire quelle est convergente.
 - e** Montrer que, pour tout $n \geq 1$; on a: $\frac{F(0)}{n+1} \leq I_n \leq 0$. En déduire la limite de (I_n) .

EXERCICE 93

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$

- 1**
- a** Justifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - b** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n \geq 0$.

c Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on conclure?

d Vérifier que $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{\pi}{4}$.

2 a À l'aide d'une intégration par parties, montrer que:

$$(\forall n \in \mathbf{N}^*), \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{n+1} u_{n+2}$$

b En déduire que $(\forall n \in \mathbf{N}^*), u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$.

c Montrer que pour tout $(\forall n \geq 2), \frac{n}{n+1} u_n \leq u_{n+1} \leq u_n$. En déduire la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3 a Montrer par récurrence que : $nu_n u_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 94

Partie A: Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1 Justifier la dérivabilité de F et calculer $F'(x)$.

2 On pose pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = F(\tan(x))$.

a Montrer que f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$.

b Calculer $f(0)$ et en déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$.

c En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Partie B: Soit la suite (u_n) définie sur \mathbf{N}^* par $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1 Montrer que pour tout réel x , on a: $1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

2 En déduire $u_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

3 a Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$.

b En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|u_n - \frac{\pi}{4}| \leq \frac{1}{2n+3}$.

c Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 95

Soit la fonction f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$.

1 a Montrer que $\Delta: x = 1$ est un axe de symétrie de \mathcal{C}_f .

b Étudier la dérivabilité de f en 0.

c Construire \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

3 Soit $F(\theta) = \int_0^{1+\sin(\theta)} f(x)dx$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

a Justifier l'existence de F .

b Calculer $F'(\theta)$

c Dédurre alors l'expression de $F(\theta)$.

d Déterminer l'aire du domaine limité par \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses.

3 Calculer le volume engendré par la rotation de \mathcal{C}_f autour de l'axe des abscisses.

4 Soit $g(x) = x\sqrt{x(2-x)}$. Son tableau de variation est le suivant:

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$g'(x)$	0	+	0	-
$g(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 		0

a Étudier la position de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g

b Construire dans le même repère que \mathcal{C}_f la courbe \mathcal{C}_g .

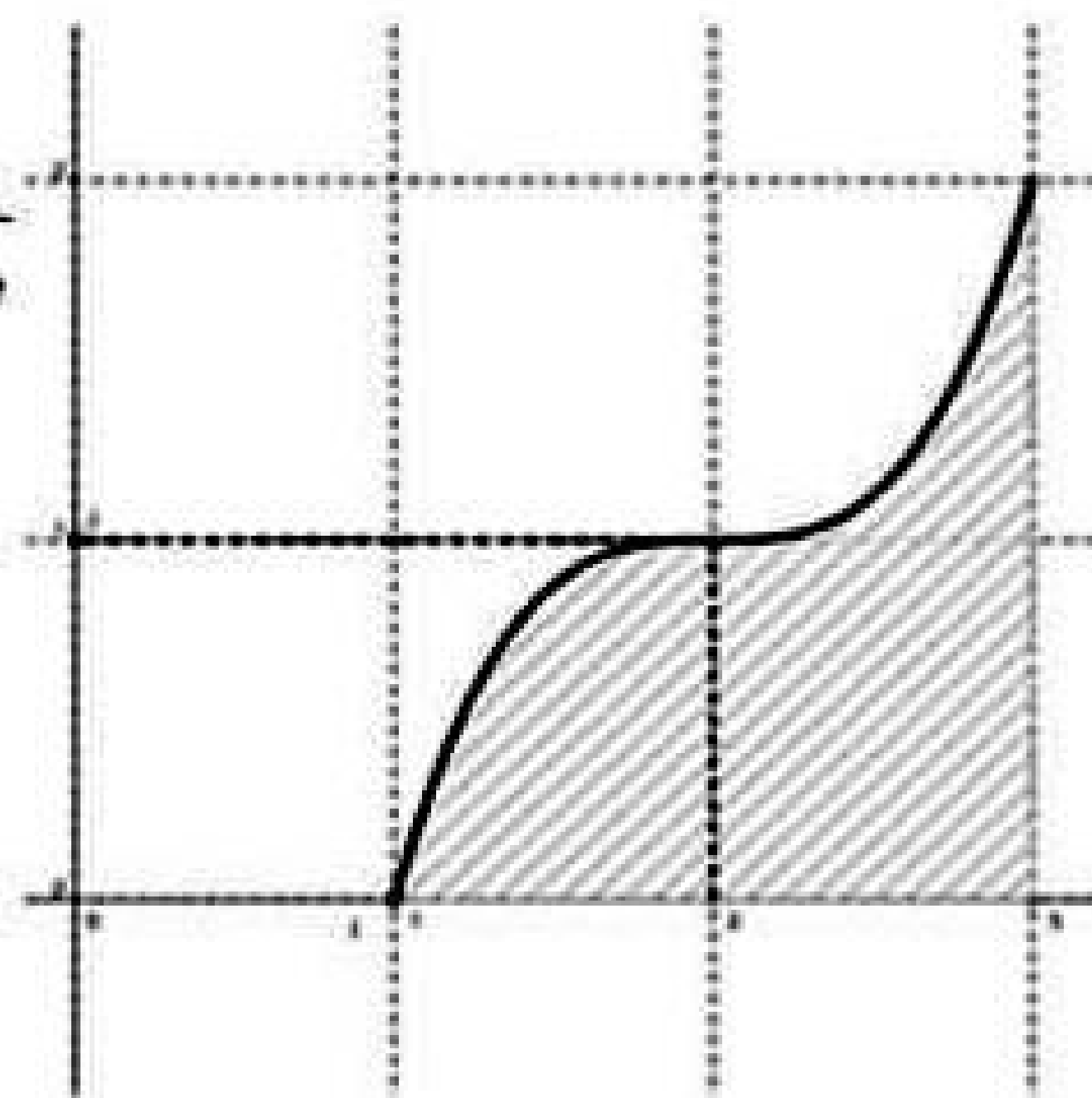
c Calculer l'aire du domaine limité par \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

EXERCICE 96

Ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la fonction f définie et continue sur $[1;3]$ tel que sa valeur moyenne $\bar{f} = 1$.

On considère $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

On donne $\int_1^2 F(t)dt = \frac{3}{4}$ et $\int_1^3 F(t)dt = 2$.



- 1
 - a Déterminer l'aire \mathcal{A} de la partie hachurée.
 - b Que représente $F(3)$.
- 2 Soit $H(x) = \int_1^x h(t)dt$ avec $h(t) = (t-2)f(t)$ pour $t \in [1;3]$
 - a Montrer que H est dérivable sur $[1;3]$ et déterminer $H'(t)$.
 - b Par une intégration par parti, Montrer que $H(2) = -\frac{3}{4}$ et $H(3) = 0$.
 - c En déduire le signe de H sur $[1;3]$.

EXERCICE 97

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2} dx$

- 1
 - a Montrer que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.
 - b Montrer que (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 2
 - a Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in [1;e]$ on a:

$$\frac{(\ln(x))^n}{xe} \leq \frac{(\ln(x))^n}{x^2} \leq \frac{(\ln(x))^n}{x}$$
 - b Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
 - c En déduire la limite de la suite (I_n)
- 3
 - a Montrer à l'aide d'une intégration par parties que: $(\forall n \in \mathbf{N}^*), I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$
 - b Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a: $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$
 - c En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$

EXERCICE 98

Soit f la fonction définie sur $]0; \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.

- 1 Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 2 Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.
 - a Montrer que g est une bijection
 - b Construire la courbe \mathcal{C}' de g^{-1} dans le même repère.
- 3 Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que $g^{-1}'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4 Calculer alors l'intégrale $I = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

EXERCICE 99

Soit la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x)$.

- 1
- a Calculer $f'(x)$
 - b Justifier que f réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0;1]$

2 Soit g la fonction réciproque de f .

- a Justifier que g est dérivable sur $]0;1[$.
- b Montrer que $(\forall x \in]0;1[), g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3

- a Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- b Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

EXERCICE 100

Soit f la fonction définie sur $] -2;2[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

1 Étudier f et tracer sa courbe représentative \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 2
- a Montrer que f réalise une bijection de $] -2;2[$ sur \mathbb{R} .
 - b Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis construire \mathcal{C}' courbe de f^{-1} dans le même repère.

3 Soit F_0 la fonction définie sur $[0;2[$ par $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calculer $F_0(x)$.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction F_n sur $[0;2[$ par $F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}} dt$

- a A l'aide d'une intégration par parties, montrer que:

$$F_{n+1}(x) = -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 2(n+1) \int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2} dt$$

- b En déduire que : $(2n+3)F_{n+1}(x) = 8(n+1)F_n(x) - x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}$
- c En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; F_n a une limite finie u_n quand x tend vers 2.

Vérifier que $u_n = 2 \frac{16^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

EXERCICE 101

- 1 On considère la fonction ψ définie sur \mathbb{R} par $\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Dresser le tableau de variation de ψ et tracer sa courbe Γ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 2 On considère la fonction u définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{dt}{1+t^2}$.
Montrer que u est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $u'(x)$ puis déduire l'expression de $u(x)$.
- 3 Pour tout réel x on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{1+t^2} dt$.
 - a Justifier que f est définie sur \mathbb{R} puis qu'elle est impaire.
 - b Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$.
En déduire le sens de variation de f .
 - c Montrer que pour tout $x > 0$; $\frac{x^3}{1+x^2} \leq f(x) \leq \frac{4x^3}{1+4x^2}$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - d Dresser le tableau de variation de f .
- 4
 - a Montrer que pour tout $x > 0$; $\frac{x}{1+4x^2} \leq x - f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$
 - b En déduire que \mathcal{C}_f admet une asymptote Δ et préciser la position relative de \mathcal{C}_f et Δ .
 - c Tracer \mathcal{C}_f et Δ , on précisera la tangente à \mathcal{C}_f en 0.

EXERCICE 102

Partie A: Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan(x)$.

- 1 Montrer que f réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0; 1]$.
- 2 Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0; 1]$ et que $(\forall x \in [0; 1]), f^{-1}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- 3 En déduire que: $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

Partie B: On considère la suite définie sur \mathbb{N} par:
$$\begin{cases} I_0 = \int_0^1 (1-t) dt \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), I_n = \int_0^1 t^{2n} (1-t) dt \end{cases}$$

- 1 Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}), I_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$
- 2 $(\forall n \in \mathbb{N}^*),$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_k$. Montrer que $S_n = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2} (1 - (-1)^n t^{2n}) dt$
- 3 On pose $I = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2} dt$.
 - a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), I - S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n} (1-t)}{1+t^2} dt$

- b) Montrer que $|I - S_n| \leq I_n$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

EXERCICE 103

Dans la figure ci-contre on a tracé la courbe \mathcal{C}_f d'une fonction f continue sur $[0;1]$ et la courbe \mathcal{C}_F de la fonction F primitive de f sur $[0;1]$ qui s'annule en 1.

- 1) Calculer les intégrales suivantes: $\int_0^1 f(x) dx$;

$$\int_0^1 x f'(x) dx \text{ et } \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) \cdot F(x) \cdot dx$$

- 2) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a:

$$F(x) + 1 \leq \frac{3}{2}x$$

- 3) Sachant que $f(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$. Montrer que $F(x) = (x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$

- 4) Soit G la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$G(x) = \int_0^{\sin(x)} F(t) dt$$

- a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- b) Montrer que $G'(x) = -\cos^4(x)$.

- 5) Sachant que $8\cos^4(x) = 3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)$

- a) Déterminer $G(x)$

- b) En déduire $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} F(x) \cdot dx$

