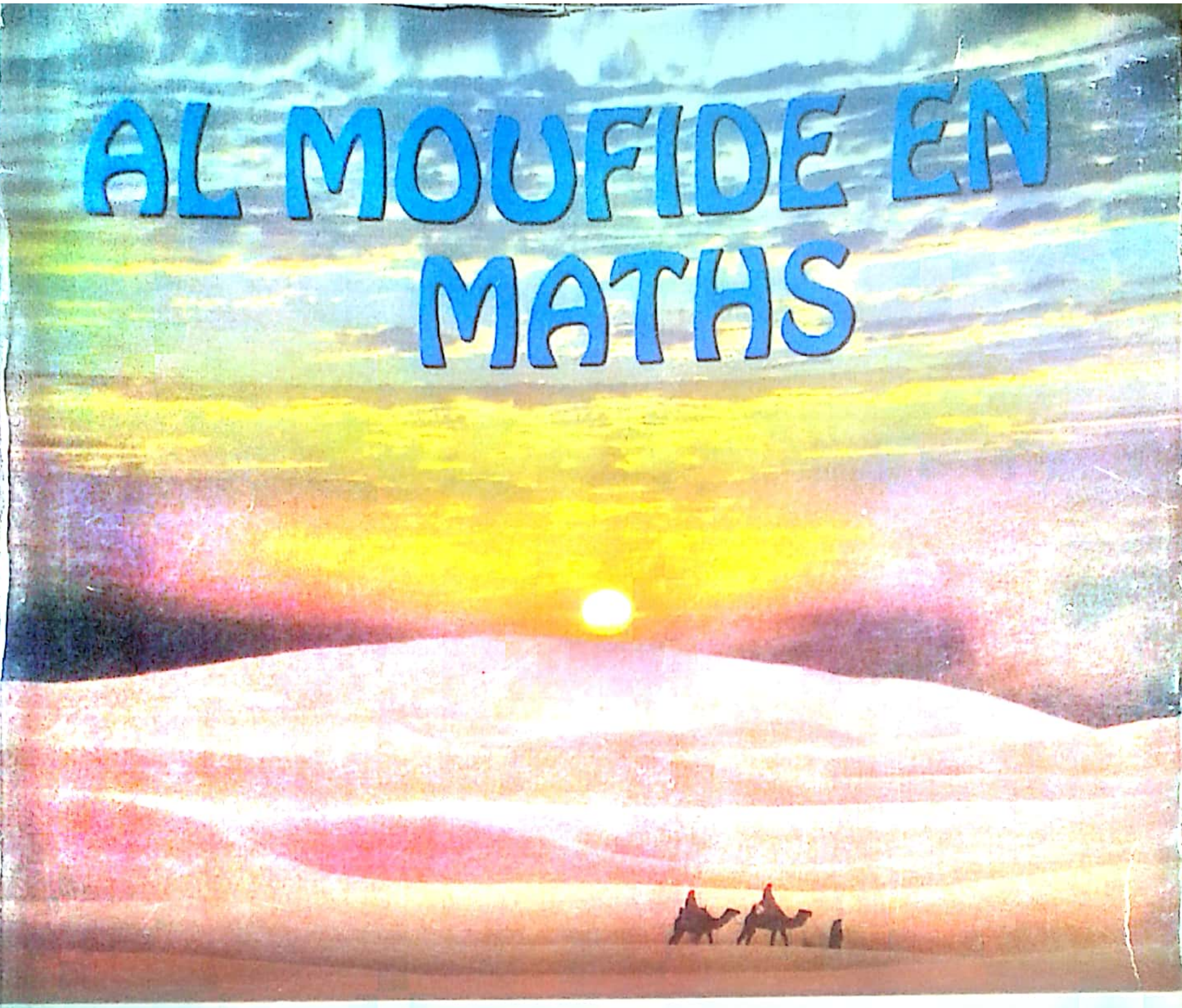
AL MOUFIDE EN MATHS



Mathématiques

1ère année Bac International Français

Imprimerie Fabricant du Livre
Bouskoura - Casablanca

Dépôt Légal : 2019MO1370
ISBN : 978-9954-613-87-0

Édition 2019

AVANT-PROPOS

Chers apprenants,

L'élaboration de ce manuel s'inscrit dans le cadre de la réforme du système éducatif adopté par le ministère tutelle et aussi faite selon les changements et les développements récents concernant le curriculum et notamment celui des mathématiques. Ce manuel s'adresse aux élèves de 1ère année du cycle de baccalauréat (Sciences Expérimentales et Sciences Technologiques) ; il accompagne ainsi une étape cruciale importante de la vie scolaire des élèves. Cette étape est caractérisée par :

- L'acquisition d'un savoir mathématique permettant la consolidation, le développement et l'amélioration des apprentissages ;
- L'émergence de compétences et de capacités facilitant l'orientation vers des études appropriées et assurant la poursuite de celles-ci dans des conditions meilleures.

Le travail au cours de l'élaboration de ce livre a donc tenu compte des considérations suivantes :

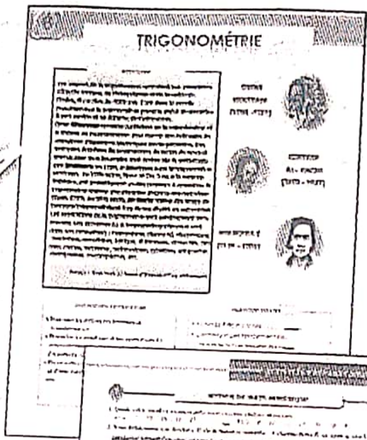
- Le maintien, l'organisation et le perfectionnement des acquis ;
- Introduction des concepts via des activités préparatoires qui incitent l'élève à s'impliquer, adhérer et à s'engager dans l'apprentissage. Ces activités représentent un trait d'union entre les prérequis et les « nouveaux » savoirs et savoirs-faire ciblés.
- Consolidation des savoirs et savoir-faire fondamentaux via les exemples et les applications qui jalonnent la totalité de l'ouvrage et qui favorisent la fixation des concepts et leurs appréhensions;
- Proposition des techniques, d'exercices et problèmes nombreux diversifiés et catégorisés comme suit :
  - Astuces et Techniques ;
  - Exercices d'application ;
  - Exercices de perfectionnement.

Les techniques, les exemples, les applications et les exercices proposés conduisent à la confirmation et l'assimilation des notions à travers l'application fonctionnelle ; ils conduisent également au contrôle du degré d'acquisition aussi bien qu'à l'entrainement à la formulation rigoureuse des solutions et du raisonnement. De plus, les exercices proposés sont calibrés en fonction des capacités exigibles et sont classés selon le degré de difficulté.

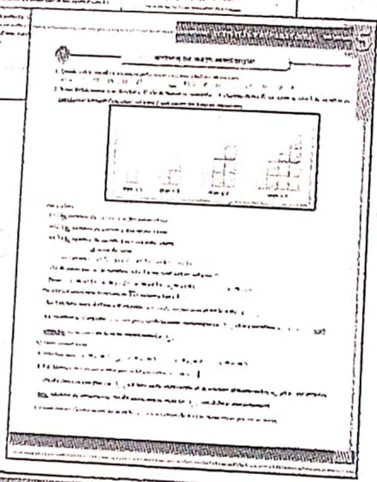
En conclusion, nous souhaitons que ce manuel soit un moyen d'investissement et appui pour les enseignants et un support solide aux apprentissages des élèves. Bonne exploitation et bon courage.

Les auteurs

COMMENT J'UTILISE CE MANUEL ?

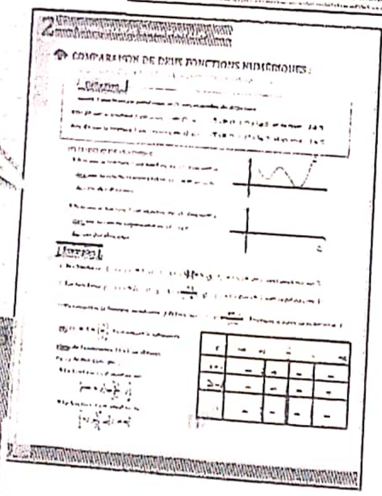

TRIGONOMÉTRIE

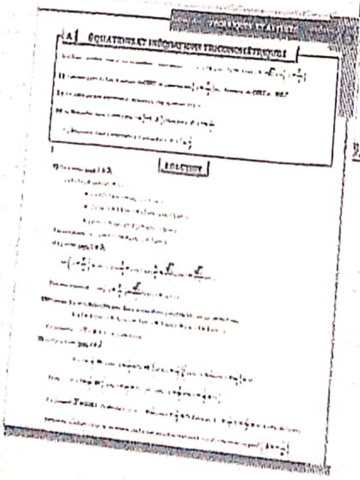
Titre du chapitre : Cette page présente les principaux titres, les capacités attendues et un aperçu historique sur la notion abordée et le cors en question.

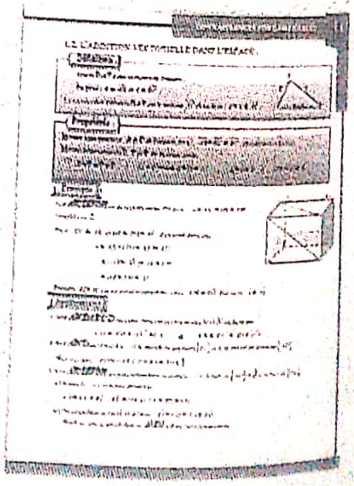


Activités : Ces activités préparatoires facilitent la construction du savoir en se référant aux prérequis.

Connaissances fondamentales : On trouve, à ce stade, les savoirs fondamentaux, les règles et les formules qui ont été établies.

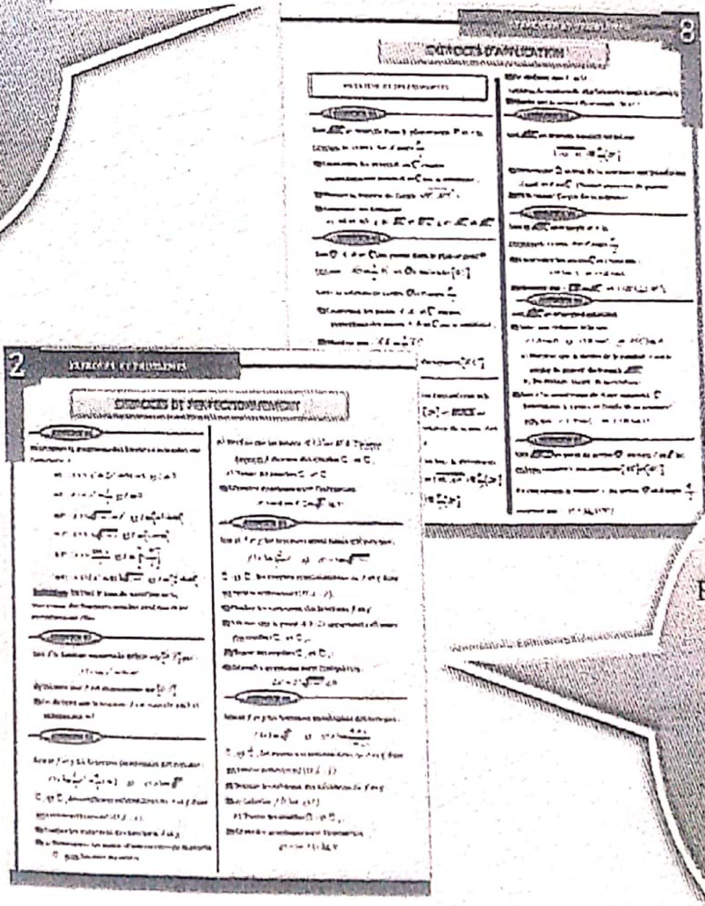

COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES :


ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES



Exemples et Astuces :
Ces deux entités permettent de consolider le savoir, de l'investir , de s'exercer au raisonnement et de fournir des techniques et astuces .

Exercices d'Applications :
Ce sont des exercices d'évaluation et d'application immédiate des apprentissages.



Exercices de Perfectionnement :
Ces exercices permettent l'amélioration des apprentissages et leur évolution vers la maîtrise, la perfection et l'enrichissement

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE LA PREMIÈRE ANNÉE DU CYCLE DU BACCALAURÉAT SCIENCES EXPÉRIMENTALES-SCIENCES TECHNOLOGIQUES

Contenu Du Programme	Capacités Attendues	Recommandations Pédagogiques
GÉOMÉTRIE PLANE		
I. Le barycentre dans le plan : ➢ Barycentre de n points $(2 \le n \le 4)$; centre de gravité ; ➢ Propriété caractéristique du barycentre: invariance ; associativité ; ➢ Coordonnées du barycentre dans un repère donné.	➢ Utiliser le barycentre pour simplifier une expression vectorielle ; ➢ Construire le barycentre de n points $(2 \le n \le 4)$; ➢ Utiliser le barycentre pour établir l'alignement de trois points d'un plan ; ➢ Utiliser le barycentre pour établir l'intersection de droites ; ➢ Utiliser le barycentre pour résoudre des problèmes et pour déterminer des lieux géométriques.	➢ Avant de définir le barycentre, il sera utile de sensibiliser les élèves sur la relation qui existe entre cette notion en mathématique et d'autres notions dans certaines disciplines de la même spécialité ; ➢ Il faudra mettra en évidence le rôle du barycentre pour résoudre certains problèmes géométriques.
II. La rotation : ➢ Définition d'une rotation ; rotation réciproque d'une rotation ; ➢ Conservation de la distance, de la mesure des angles orientés, du barycentre ; ➢ L'image par une rotation d'une droite, d'un segment et d'un cercle.	➢ Construire les images de figu-res usuelles par une rotation donnée ; ➢ Reconnaitre l'isométrie de figures en utilisant une rotation. Utiliser une rotation donnée dans une situation géométri-que simple ;	➢ On définira une rotation par son centre et son angle ; ➢ L'introduction des coordonnées, de l'expression analytique d'une rotation et de la composée de deux rotations sont hors programme.

III. Étude Analytique du produit scalaire et applications : **III.1. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé ;** ➢ Expression analytique de la norme d'un vecteur et de la distance de deux points ; ➢ Expression de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$. **III.2. La droite dans le plan (Étude analytique)** ➢ Vecteur normal à une droite ; ➢ Équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal à cette droite ; ➢ Distance d'un point à une droite. **III.3. Le cercle (Étude analytique)** ➢ Équation cartésienne d'un cercle ; ➢ Représentation paramétrique d'un cercle ; ➢ Étude de l'ensemble des points : $\{M(x;y)\,/\,x^2+y^2+ax+by+c=0\}$ ➢ Étude de la position relative d'un cercle et d'une droite ; ➢ Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle.	➢ Exprimer le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites ; ➢ Calculer des mesures d'angles et des aires ; ➢ Reconnaître l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ➢ Déterminer le centre et le rayon d'un cercle défini par une équation cartésienne ; ➢ Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique et inversement ; ➢ Utiliser l'analytique du produit scalaire pour résoudre des problèmes géométriques et algébriques.	➢ **L'étude analytique du cercle est un domaine riche pour l'application de l'aspect analytique du produit scalaire, surtout en ce qui concerne la distance et l'orthogonalité. A cette fin, on mettra en évidence le rôle de la méthode analytique dans la résolution de certains problèmes géométriques ;** ➢ **On utilisera le produit scalaire pour déterminer une équation cartésienne d'un cercle ;** ➢ **On abordera, à travers des activités, le cercle défini par trois points non alignés ;** **On exploitera, à cette occasion, le régionnement analytique du plan pour présenter la résolution graphique de quelques inéquations non linéaires à deux in connues..**

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

I. Vecteurs de l'espace : ➢ Calcul vectoriel dans l'espace ; ➢ Vecteurs colinéaires ; définition vectorielle d'une droite ; ➢ Définition vectorielle d'un plan ; ➢ Vecteurs coplanaires.	➢ Maitriser les règles du calcul vectoriel dans l'espace ; ➢ Reconnaitre et exprimer la colinéarité de deux vecteurs ; ➢ Reconnaitre et exprimer la coplanarité de trois vecteurs ; ➢ Appliquer l'alignement et la coplanarité pour résoudre des problèmes géométriques.	➢ On présentera la notion de vecteur et le calcul vectoriel de la même manière que celle utilisée dans le plan ; ➢ On se limitera à l'interprétation géométrique de l'alignement et de la coplanarité.
II. Géométrie analytique dans l'espace : ➢ Coordonnées d'un point dans un repère ; coordonnées d'un vecteur dans une base ; coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et $\lambda\vec{u}$; coordonnée de $\overrightarrow{AB}$. ➢ Déterminant de trois vecteurs ; ➢ Représentation paramétrique d'une droite ; positions relatives de deux droites ; ➢ Représentation paramétrique d'un plan ; ➢ Equation cartésienne d'un plan ; positions relatives de deux plans ; ➢ Deux équations cartésiennes d'une droite ; ➢ Positions relatives d'une droite et d'un plan.	➢ Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle à l'aide des coordonnées ; ➢ Montrer la colinéarité de deux vecteurs ; ➢ Montrer la coplanarité de trois vecteurs ; ➢ Choisir la représentation convenable (cartésienne ou paramétrique) pour étudier les positions relatives de droites et de plans et pour interpréter les résultats.	➢ On déterminera un repère et une base à partir de quatre points non coplanaires ; ➢ On utilisera la projection sur un plan parallèlement à une droite pour déterminer les coordonnées d'un point (sans aborder de manière excessive la notion de projection) ; ➢ On accordera une importance à étude analytique pour étudier les positions relatives de droites et de plans dans l'espace.

ALGÈBRE et ANALYSE

I. Notions de logique : ➢ Propositions ; opérations sur les pro-positions ; fonctions propositionnelles ; ➢ Les quantificateurs ; ➢ Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ; raison - nement par contraposée ; Raisonnement par disjonction des cas; raisonnement par équivalence ; raisonnement par récurrence.	➢ Utiliser le type de raisonn-ment convenable selon la situation étudiée ; ➢ Rédiger des raisonnements et des démonstrations mathéma-tiques claires et logiquement correctes.	➢ On approchera les propositions, les lois logiques et les méthodes de raisonnement, à partir d'activités variées et diverses, issues des acquis de l'élève et de situations mathématiques déjà rencontrées ; ➢ On évitera toute construction théo-rique et toute utilisation excessive de tables de vérité ; ➢ Les résultats concernant la logique devront être exploités à tout mo-ment opportun dans les différents chapitres du programme.
II. Suites numériques : ➢ Suites numériques ; ➢ Suites récurrentes ; ➢ Suites majorées ; suites minorées et suites bornées ; ➢ Monotonie d'une suite ; ➢ Suites arithmétiques ; suites géométriques	➢ Utiliser le raisonnement par récurrence ; ➢ Etudier une suite numérique (majoration, minoration, monotonie) ; ➢ Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique et déterminer sa raison et son premier terme ; ➢ Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ; ➢ Reconnaitre une situation de suite arithmétique ou géométrique ; ➢ Utiliser une suite arithmétique ou géométrique pour résoudre des problèmes.	➢ On pourra approcher la notion de suite récurrente à travers des situations issues des différentes disciplines ; ➢ La leçon des suites numériques constituera une occasion pour familiariser les élèves avec l'outil informatique ; ➢ On saisira cette occasion pour utiliser le raisonnement par récurrence ; ➢ On traitera les suites récurrentes sans abus.
III. Calcul trigonométrique : • Formules de transformations ; Transformation de l'expression : acos(x bsin(x où a et b sont des réels.	➢ Maitriser les différentes formules de transformation ; ➢ Résoudre les équations et les inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales ; ➢ Représenter et lire les solutions d'une équation et d' une inéquation sur le cercle trigonométrique..	➢ On optera pour la simplicité lors de la présentation de ce chapitre, en utilisant toute technique à la portée des élèves ; ➢ On utilisera le cercle trigonométrique pour résoudre une équation simple sur un intervalle de .

IV. FONCTIONS NUMERIQUES :		
IV.1. <u>Généralités sur les fonctions numériques :</u> ➢ Fonction majorée – minorée – bornée - Fonction périodique ; ➢ Comparaison de deux fonctions, interprétation géométrique ; ➢ Extremums d'une fonction numérique ; ➢ Monotonie d'une fonction numérique ; ➢ Composée de deux fonctions numériques; ➢ Monotonie de la composée de deux fonctions monotones ; ➢ Représentation graphique des fonctions : $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto \sqrt{x+a}$.	➢ Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques ; ➢ Déduire les variations ou les valeurs maximales et minimales d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou à partir de son tableau de variations ; ➢ Reconnaitre les variations des fonctions $f+\lambda$ et λf à partir des variations de la fonction f ; ➢ Utiliser la courbe représentative ou le tableau de variations d'une fonction pour déterminer l'image d'un intervalle et résoudre des équations et des inéquations ; ➢ Déterminer les variations de la fonction $g \circ f$ à partir des variations des fonctions f et g .	➢ On habituera les élèves à en déduire les variations d'une fonction numérique à partir de sa courbe représentative et l'on accordera de l'importance à la construction des courbes. ➢ On traitera la résolution graphique 'équations et d'inéquations de la forme : $f(x)=c$, $f(x)\leq c$, $f(x)=g(x)$, $f(x)\leq g(x)$ et $f(x)<g(x)$. ➢ On utilisera, dans la limite du possible, les calculatrices et les logiciels qui permettent l'étude des fonctions ; ➢ Il est souhaitable de traiter des situations choisies dans d'autres domaines.
IV.2. <u>Limite d'une fonction numérique:</u> ➢ Limite des fonctions : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^n$ ainsi que leurs inverses en 0 et en $+\infty$ et $-\infty$; ➢ Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point ; ➢ Limite finie et limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$ ➢ Opérations sur les limites ; ➢ Limite à gauche et limite à droite ; ➢ Limite de fonction polynomiales, Fractionnelles ; et limites de	➢ Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ; ➢ Calculer les limites de fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles.	➢ On approchera la notion de limite d'une manière intuitive à partir du « comportement » de fonctions de référence qui figurent au programme et leurs inverses au voisinage de 0 ; en $+\infty$ et en $-\infty$ et on admettra ces limites ; ➢ On se basera sur les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{R}$ pour calculer les limites de fonctions simples vérifiant : • $\lvert f(x)-l\rvert \leq u(x)$, où u est une fonction dont la limite est 0. • $f(x)\geq u(x)$, où u est une fonction dont la limite est $+\infty$. • $f(x)\leq u(x)$, où u est une fonction dont la limite est $-\infty$.

$\sqrt{f}$ où f une fonction usuelle. ➢ Les limites : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}$. ➢ Limites et ordre.		➢ On admettra les opérations sur les limites finies ou infinies, toutefois on devra habituer les élèves à les utiliser correctement ; ➢ On habituera les élèves à lever les indéterminations simples ; ➢ Toute présentation théorique de la notion de limite est **hors programme.**
IV.3. Dérivation d'une fonction numérique : ➢ Dérivabilité en un point ; nombre dérivé ; interprétation géométrique ; tangente à une courbe ; approximation affine d'une fonction en un point ; ➢ Dérivabilité à gauche – Dérivabilité à droite ;interprétation géométrique ;demi tangente ; tangente ; demi-tangente verticales ; ➢ Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle ; dérivée première ; dérivée seconde ; $f+g$ dérivées successives ; ➢ Dérivée de : $f+g$; $f\times g$; $\frac{f}{g}$; f^n $(n\in\mathbb{N}^*)$; $f(ax+b)$ et $\sqrt{f}$; ➢ Monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée ; extremum d'une fonction dérivable sur un intervalle ; ➢ L'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$.	➢ Approcher une fonction au voisinage d'un point ; ➢ Reconnaitre que le nombre dérivé de la fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse x_0. ➢ Reconnaitre les dérivées des fonctions de référence ; ➢ Maitriser les techniques de calcul de la dérivée de fonctions ; ➢ Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente ; ➢ Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée ; ➢ Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de son graphe. ➢ Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales.	➢ Parmi les exemples à traiter pour l'approximation affine au voisinage de 0 les fonctions suivantes : $x\mapsto(1+h)^2$; $x\mapsto(1+h)^3$; $x\mapsto\frac{1}{1+h}$ et $x\mapsto\sqrt{(1+h)}$. ➢ On utilisera $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ pour déterminer la dérivée des fonctions : $x\mapsto\cos(x)$ et $x\mapsto\sin(x)$ ➢ On admettra les théorèmes concernant la monotonie et le signe de la dérivée première ; ➢ On admettra la solution générale de l'équation différentielle : $y''+\omega^2 y=0$.

IV.4. Représentation graphique d'une fonction numérique : ➢ Branches infinie ; droites asymptotiques ; ➢ Point d'inflexion ; concavité d'une courbe ; ➢ Eléments de symétrie de la courbe d'une fonction.	➢ Résoudre graphiquement des équations et des inéquations ; ➢ Utiliser la périodicité et les éléments de symétrie d'une courbe pour réduire le domaine d'étude d'une fonction ; ➢ Utiliser le signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité d'une courbe et déterminer ses points d'inflexion ; ➢ Etudier et Représenter des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et irrationnelles. ➢ Etudier et Représenter des fonctions trigonométriques simples.	➢ On se limitera à la détermination de limites de fonctions simples (fonctions polynômes du second degré ou du troisième degré ou de fonctions de la forme : $x \mapsto ax+b+\varphi(x)$ où $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)=0$). Aux bornes de son domaine de définition et on déterminera aussi les branches infinies de leurs courbes représentatives ; ➢ On étudiera des fonctions dont le calcul de la dérivée et l'étude de son signe ne pose pas trop de difficultés ;
		➢ On traitera la résolution graphique d'équations et d'inéquations de la forme : $f(x)=c$, $f(x)\leq c$, $f(x)=g(x)$, $f(x)\leq g(x)$ et $f(x)<g(x)$ où f et g sont des fonction figurant au programme dans des cas où la résolution algébrique n'est pas simple.

NOTIONS DE LOGIQUE 1

HISTOIRE

La logique est l'art de raisonner correctement et elle est le savoir qui étudie les raisonnements, les concepts et les valeurs de vérité des propositions. Ce savoir, qui est à la base de la formalisation des différents domaines mathématiques et autres savoirs (philosophie, linguistique et informatique…).

On sait maintenant que certains problèmes mathématiques ne peuvent être résolus par de simples méthodes de calcul.

La logique mathématique s'avère alors indispensable. **Bertrand Russell** est, avec **Gottlob Frege**, le fondateur de la logique moderne. C'est sur la logique qu'il entend fonder les mathématiques, qui se trouvent donc rédui-tes à de simples extensions de celle-ci. Ses travaux ont véritablement influencé le cours de la philosophie au XXème siècle.

George Boole est le créateur de la logique moderne, fondée sur une structure algébrique et sémantique l'on appelle algèbre de Boole en son honneur.

Source : Sites web et livre d'histoire cité à la référence.

BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

GOTTLOB FREGE (1848 – 1925)

GEORGE BOOLE (1815 – 1864)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser le type de raisonnement convenable selon la situation étudiée ;
- Rédiger des raisonnements et des démonstrations mathématiques claires et logiquement correctes.

PLAN DU COURS

1

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

PROPOSITIONS – FONCTIONS PROPOSITIONNELLES

1

Proposition – Fonction propositionnelle :

Il existe des énoncés mathématiques qui ont un seul sens vrai ou faux ; et ne peut être vrai et faux à la fois.

On considère les énoncés mathématiques suivants :

A : « $1+5=6$ » ; B : « $3^{-2}=-9$ » ; C : « $(x\in\mathbb{N})$; $x+2=3$ » ; D : « $n\in\mathbb{Z}$; $(n+1)^3=n^3+1$ »

Une proposition (ou une assertion) est un énoncé dont on peut dire sans ambigüité s'il est vrai ou faux.

En d'autres termes, c'est une phrase ou une expression qui soit vraie ou fausse, mais non simultanément vraie et fausse.

1. On désigne par 1 ou V la valeur de vérité d'une proposition vraie et par 0 ou F la valeur de vérité d'une proposition fausse.

   Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions A et B.

2. Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

   P : « $\cos\frac{\pi}{3}<\frac{1}{4}$ » ; Q : « $\pi+1>4$ » ; R : « 48 est divisible par 8 »

   S : « $AC+CB=AB$ pour tous points A, B et C du plan ».

   T : « $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$ pour tous points A, B et C du plan ».

3. L'énoncé C ci-dessus a-t-il une signification vraie ou fausse ?

   L'énoncé C contient une variable appartenant à $\mathbb{N}$ et qui devient une proposition à chaque fois qu'on remplace la variable x par un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$.

   On dit que l'énoncé mathématique C est une fonction propositionnelle définie sur $\mathbb{N}$ et on la note : $C(x)$.

4. Montrer que l'énoncé D ci-dessus est une fonction propositionnelle.

Convention :

Si une fonction propositionnelle $A(x)$ est une proposition vraie pour un élément a déterminé, on dit que a vérifie la fonction propositionnelle $A(x)$ ou que $A(x)$ est vraie pour a.

5. Déterminer des valeurs de la variable $x\in\mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction propositionnelle $2x-1\geq 3$ est une proposition vraie.

6. Déterminer des valeurs de la variable $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ pour lesquelles la fonction propositionnelle $x+2y-1=0$ est une proposition vraie.

7. a) Donner un exemple d'une proposition vraie.

   b) Donner un exemple d'une fonction propositionnelle d'une seule variable.

   c) Donner un exemple d'une fonction propositionnelle de deux variables.

Selon le nombre de variables, une fonction propositionnelle peut être notée : $A(x)$ ou $B(y)$ ou $P(x;y)$ ou .....

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES 1

QUANTIFICATEURS

On considère les fonctions propositionnelles suivantes :

$A(x)$: « $x^2+1>0$ avec $x\in\mathbb{R}$ » et $B(x)$: « $x^2+2x=3$ avec $x\in\mathbb{R}$ »

• L'inégalité $x^2+1>0$ est toujours vraie; donc $A(x)$ est valable pour tout x de $\mathbb{R}$.

et on écrit : $(\forall x\in\mathbb{R})\ A(x)$; c'est-à-dire : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^2+1>0$; et on lit : « Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ »

Le symbole $\forall$ s'appelle le quantificateur universel et se lit « Pour tout » ou « Quel que soit ».

• L'égalité $x^2+2x=3$ n'est pas toujours vraie lorsque la variable x parcourt l'ensemble $\mathbb{R}$. Il suffit juste de remarquer (à titre d'exemple) que l'égalité $x^2+2x=3$ est vraie pour $x=1$ et fausse pour $x=0$.

Comme la proposition $B(1)$ est vraie, on dit qu'il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$, tel que $B(x)$ et on écrit :

$(\exists x\in\mathbb{R})$; $B(x)$; c'est-à-dire : $(\exists x\in\mathbb{R})$: $x^2+2x=3$; et on lit :

« Il existe au moins $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x^2+2x=3$ »

Le symbole $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel et se lit « il existe au moins ».

1. Écrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs :

P : « Pour tout réel x : $|x|\geq 0$ » ; Q : « Il existe au moins un réel x tel que : $2x+4=0$ »

2. Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

P : « $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^2>0$ » ; Q : « $(\exists x\in\mathbb{R})$; $|x|\leq 0$ » ; P : « $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{n^2}\in\mathbb{N}$ »

R : « $(\exists G\in P)$; $\overrightarrow{2GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ » ; S : « $(\forall M\in P)$ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}$ » où

A et B deux points distincts du plan P .

NÉGATION LOGIQUE

La négation d'une proposition P est la proposition notée $\overline{P}$ ou $\urcorner P$ telle que la proposition $\overline{P}$ est vraie si la proposition P est fausse et la proposition $\overline{P}$ est fausse si la proposition P est vraie.

On peut représenter la négation d'une proposition par la table ci-contre appelée table de vérité de la négation :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

En notant $\overline{\overline{P}}$ la négation de la proposition $\overline{P}$, on peut remarquer que les propositions $\overline{\overline{P}}$ et P ont la même valeur de vérité. ($\overline{\overline{P}}=P$).

Déterminer la négation des propositions suivantes :

P : « $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ » ; Q : « $\sqrt{3}>1$ » ; R : « $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ » ; S : « $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}$ »

1

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

4 CONJONCTION LOGIQUE – DISJONCTION LOGIQUE

Soient A, B, C et D quatre points du plan, distincts deux à deux.

On considère les propositions P et Q définies par :

P : « (CD) est parallèle à (AB) » et Q : « (AD) est parallèle à (BC) »

A) La conjonction logique :

1. a) Si $ABCD$ est un parallélogramme, que peut-on dire des propositions P et Q ?

b) Si les deux propositions P et Q sont vraies, que peut-on dire de la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. Copier puis remplir le tableau ci-contre :

P	Q	$ABCD$ est un parallélogramme
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

À partir des propositions P et Q, on obtient la proposition « P et Q » qui est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ; sinon elle est fausse.

La proposition « P et Q » est appelée la conjonction des propositions P et Q.

B) La disjonction logique :

1.Copier puis remplir le tableau ci-contre :

P	Q	$ABCD$ est un trapèze
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

À partir des propositions P et Q, on obtient la proposition « P ou Q qui est vraie si une au moins des deux Propositions P et Q est vraie. La proposition « P ou Q » est appelée la disjonction des propositions P et Q.

2. Que peut-on dire de la proposition « P ou Q » lorsque $ABCD$ est un trapèze ?

⚠ Il existe en français deux significations du mot « ou ». Il y a le « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et le « ou inclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ». En logique mathématique, il s'agit du « ou inclusif ».

IMPLICATION LOGIQUE - ÉQUIVALENCE LOGIQUE

L'implication logique :

À partir des propositions P et Q, on obtient la proposition $\left(\overline{P} \text{ ou } Q\right)$.

La proposition $\left(\overline{P} \text{ ou } Q\right)$ s'appelle l'implication des propositions P et Q ; et on la note $(P \Rightarrow Q)$.

$(P \Rightarrow Q)$ se lit « P implique Q ».

L'implication $(Q \Rightarrow P)$ s'appelle l'implication réciproque de l'implication $(P \Rightarrow Q)$

1. Donner la table de vérité de la proposition $(P \Rightarrow Q)$.
2. Déterminer, en justifiant votre réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

A : « $\sqrt{(-3)^2} = -3 \Rightarrow -3 > 0$ » ; B : « $\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » ; C : « $5 \times 0 \neq 0 \Rightarrow (5)^0 = 1$ ».

3. Soit x un nombre réel.
   a) Montrer que la proposition P : « $\sqrt{x+12} = x \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -3)$ » est vraie.
   b) Vérifier que la proposition S : « $(x = 4 \text{ ou } x = -3) \Rightarrow \sqrt{x+12} = x$ » est fausse.

L'équivalence logique :

Soient A, B et C trois points du plan, distincts deux à deux.

On considère les propositions P et Q définies par :

P : « ABC est un triangle rectangle en A » et Q : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »

Copier puis remplir le tableau suivant :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$
V	**V**			
V	**F**			
F	**V**			
F	**F**			

À partir des propositions P et Q, on obtient la proposition $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$.

La proposition $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$ s'appelle l'équivalence des propositions P et Q ; et on la note $(P \Leftrightarrow Q)$.

$(P \Leftrightarrow Q)$ se lit « P est équivalente à Q » ou « P si seulement si Q » ou « « P signifie Q ».

Déterminer, en justifiant votre réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

A : « $\sqrt{3} > 2 \Leftrightarrow \left|2-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - 2$ » ; B : « $\sqrt{3} + \sqrt{2} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ »

C : « $\dfrac{22}{7} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \pi = \dfrac{22}{7}$ » ; D : « $2^{-1} \times 3^{-1} = 6 \Leftrightarrow 2^{-1} \in \mathbb{N}$ »

6 QUELQUES TYPES DE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

A) Raisonnement par la contraposée :

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On considère les deux propositions :

A : « $ABCD$ est un losange » et B : « $(AC)\perp(BD)$ »

1. Quelle est la valeur de vérité de chacune des implications : $A \Rightarrow B$ et $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$?
2. Que remarquez-vous ?

L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Pour prouver une implication du type $P \Rightarrow Q$, il suffit de prouver sa contraposée ; c'est-à-dire prouver l'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Ce type de raisonnement est appelé « Raisonnement par contraposée ».

B) Raisonnement par équivalences successives :

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, il suffit de montrer que les équivalence successives : $P \Leftrightarrow P_1$ et $P_1 \Leftrightarrow P_2$ et ...et $P_n \Leftrightarrow Q$ sont vraies et que Q est une proposition vraie. Dans ce cas, la proposition P est aussi vraie.

Ce type de raisonnement est appelé « Raisonnement par équivalences successives ».

En utilisant ce raisonnement montrer que les deux propositions suivantes sont vraies :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$.
2. Pour tout $x \in [1,+\infty[$; $\sqrt{x-1} \leq \dfrac{x}{2}$.

C) Raisonnement par disjonction des cas :

1. Soient P et Q deux propositions.

   Si les propositions $(P \Rightarrow Q)$ et $(\overline{P} \Rightarrow Q)$ sont vraies ; que peut-on dire de la proposition Q ?

2. On veut montrer que : $x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les propositions : P : « $x \leq 0$ » et Q : « $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ »

   a) Montrer que $P \Rightarrow Q$.

   b) Vérifier que $\sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ puis en déduire que $\overline{P} \Rightarrow Q$.

   c) Conclure que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{1+x^2} - x > 0$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre $n(n^2-1)$ est un multiple de 3. (Traiter les cas : n multiple de 3 ou non)
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 2|x| - 3 = 0$. (Traiter les cas x positif ou négatifs)

D) Raisonnement par l'absurde :

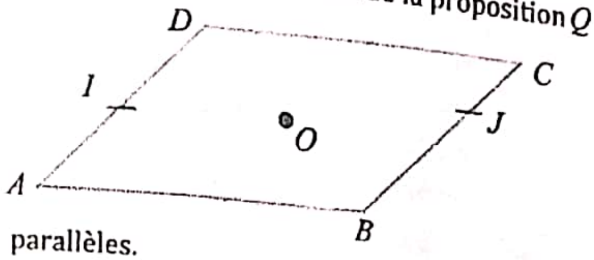
1. Soient P et Q deux propositions.

Si la proposition $\bar{Q} \Rightarrow P$ est vraie et la proposition P est fausse ; que peut-on dire de la proposition Q ?

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O

I le milieu du segment $[AD]$

On construit un point J tel que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$



a) Montrer que les droites (AB) et (IJ) ne sont pas parallèles.

b) Montrer que la droite (IJ) ne passe pas par O.

(On pourra supposer $O \in (IJ)$ et aboutir à une contradiction)

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3n+5$ n'est pas divisible par 6. (On pourra donner un exemple de n)

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Le principe de la récurrence :

Pour montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n entier naturel, est vraie pour tout entier supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on peut utiliser « un raisonnement par récurrence » dont la démonstration se déroule en trois étapes :

- ✓ <u>Initialisation :</u> Montrer que la proposition $P(n_0)$ est vraie.
- ✓ <u>Hérédité :</u> Soit $n \geq n_0$ fixé. Montrer que l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie. (Pratiquement, on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie.
- ✓ <u>Conclusion :</u> L'assertion $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

. Montrer par récurrence que :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3^n \geq 1+2n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \leq 2^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A_n = 3^{2n} - 2^n$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2A_n$.

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que 7 divise A_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 PROPOSITION – FONCTION PROPOSITIONNELLE :

Définition :

On appelle proposition (ou assertion) tout énoncé mathématique qui a une seule signification vraie ou fausse ; et ne peut être vraie et fausse à la fois.

Exemples

1) Considérons les propositions suivantes :

P : « -3 est un entier relatif» ; Q : « Le nombre 6 est premier » ;

R : « Le nombre $\frac{22}{7}$ est décimale» ; S : « Un carrée est un parallélogramme»

Les propositions P et S sont vraies et les propositions Q et R sont fausses.

2) « $1 = 3 +$ » n'est pas une proposition ; d'ailleurs, sur une telle entrée, l'analyseur syntaxique de tout langage informatique, voire celui de la calculatrice, retournerait alors un message de type « **syntax error** »

TABLEAU DE VÉRITÉ :

Une proposition est une phrase mathématique P qui est soit vraie (V) soit fausse (F) mais pas les deux.

On consigne ces deux possibilités dans une table de vérité :

P
V
F

ou

P
1
0

Par exemple :

« $2\sqrt{7} < 3\sqrt{3}$ » est une proposition dont la valeur de vérité est F ;

« La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° » est une proposition dont la valeur de vérité est V .

Un théorème est une proposition dont la valeur de vérité est V .

Applications :

1. La phrase : « Les nombres positifs sont des entiers naturels » est-elle une proposition ? Justifier.
2. Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

P : « $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{5}{7}$ » ; Q : « $\sqrt{3+\sqrt{5}} \times \sqrt{3-\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$ » ; R : « $\sin\frac{\pi}{5} > 1$ »

S : « Les solutions de l'équation $2019x^2 - 2018x - 1 = 0$ sont 1 et $-\frac{1}{2019}$ ».

Définition

On appelle fonction propositionnelle (ou prédicat) tout énoncé mathématique contenant une variable qui appartient à un ensemble donné E et qui devient une proposition à chaque fois qu'on remplace la variable par un élément déterminé de l'ensemble E.
L'ensemble E est appelé le domaine de définition de la fonction propositionnelle.

Exemples

1) $Q(x)$: « $n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{2n} \in \mathbb{N}$ » est une fonction propositionnelle et on a $Q(2)$ est vraie et $Q(1)$ est fausse.
2) $P(a;b)$: « $(a;b) \in \mathbb{R}^2$; $ab > 1$ » est une fonction propositionnelle et on a $P(0;0)$ est fausse et $P(1;2)$ est vraie.

Applications

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels S, pour que chaque fonction propositionnelle soit une proposition vraie :

$A(x)$: « $x \in \mathbb{R}$; $2x-4 \geq 0$ » ; $B(x)$: « $x \in \mathbb{R}$; $x^2-2x-3=0$ » ; $C(x)$: « $x \in \mathbb{R}$; $x^2+x-6 \leq 0$ »

2 QUANTIFICATEURS :

Définition :

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble non vide E.
À partir de la fonction propositionnelle « $(x \in E)$; $P(x)$ », on définit :

- La proposition « $(\exists x \in E)$; $P(x)$ » qui se lit « il existe au moins $x \in E$ tel que $P(x)$ » et qui est vraie lorsqu'il existe au moins $x \in E$ vérifiant la propriété $P(x)$.
  Le symbole $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.
- La proposition « $(\forall x \in E)$ $P(x)$ » qui se lit « pour tout $x \in E$, $P(x)$ » ou « quel que soit $x \in E$; $P(x)$ » et qui est vraie lorsque tous les éléments de E vérifient la propriété $P(x)$.
  Le symbole $\forall$ s'appelle le quantificateur universel.

Exemples

1) La proposition P_1 : « $(\forall x \in \mathbb{R})$ $2x+1=0$ » est fausse.
Justification : pour $x=0$, la proposition $2\times 0+1=0$ est fausse.
2) La proposition P_2 : « $(\exists x \in \mathbb{R})$; $\sin(x)=x$ » est vraie.
Justification : $\sin(0)=0$ donc le nombre réel $x=0$ vérifie l'égalité $\sin(x)=x$.

Remarques

L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental pour le sens d'une phrase formelle :

- **Quand deux quantificateurs existentiels se suivent, on peut les échanger sans changer le sens.**
- **Quand deux quantificateurs universels se suivent, on peut les échanger sans changer le sens.**
- **Quand on inverse l'ordre de deux quantificateurs différents, le sens change.**

Exemples

P : « $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})\,;x+y=2$ » est vraie.

Justification : Il suffit de prendre $y=2-x$ (pour chaque x on peut trouver y tel que x+y=2)

Q : « $(\exists y\in\mathbb{R});\,(\forall x\in\mathbb{R});\,x+y=2$ » est fausse. (pour y fixé, on ne peut pas avoir x+y=2 pour tout x)

Justification : par exemple $x=1-y$ la proposition $1-y+y=2$ est fausse.

3 OPÉRATIONS SUR LES PROPOSITIONS :

3.1. NÉGATION D'UNE PROPOSITION :

Définition

La négation d'une proposition P est la proposition notée $\overline{P}$ ou $\urcorner P$ telle que la proposition $\overline{P}$ est vraie si la proposition P est fausse et la proposition $\overline{P}$ est fausse si la proposition P est vraie.

La négation est un connecteur logique unaire **défini par la table de vérité :**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemples

1) La négation de la proposition P : « $\pi>3$ » est la proposition $\overline{P}$: « $\pi\le 3$ ».
2) La négation de la proposition Q : « $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ » est la proposition $\overline{Q}$: « $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ ».
3) La négation de la proposition R : « $\pi\ne 3$ » est la proposition $\overline{R}$: « $\pi=3$ ».
4) La négation de la proposition R : « Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges » est la proposition $\overline{R}$: « au moins une boule de l'urne n'est pas rouge ».
5) La négation de la proposition S : « $\exists x\in\mathbb{R};\sqrt{x}\in\mathbb{N}$ » est la proposition $\overline{S}$: « $\forall x\in\mathbb{R};\sqrt{x}\notin\mathbb{N}$ »

Proposition :

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble non vide E.

- La négation de la proposition « $(\forall x\in E)\ P(x)$ » est la proposition« $(\exists x\in E);\ \overline{P(x)}$ ».
- La négation de la proposition « $(\exists x\in E);\ P(x)$ » est la proposition« $(\forall x\in E)\ \overline{P(x)}$ ».

Conséquence

Pour montrer que la proposition « $(\forall x \in E)\ P(x)$ » est fausse, il suffit de montrer que sa négation « $(\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$ » est vraie. Ce type de raisonnement est appelé raisonnement par contre-exemple.

Exemples

1) Montrons que la proposition P : « $(\forall x \in \mathbb{R});\ \sqrt{x} \in \mathbb{N}$ » est fausse :

La négation de la proposition P est la proposition $\overline{P}$: « $(\exists x \in \mathbb{R});\ \sqrt{x} \notin \mathbb{N}$ »

En prenant $x = \frac{1}{4}$ on obtient $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; donc : $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Il s'ensuit que la proposition $\overline{P}$ est vraie.

Par suite, la proposition P est fausse.

2) Montrons que la proposition Q : « $(\forall x \in \mathbb{R});\ x^2 + x - 2 \neq 0$ » est fausse :

La négation de la proposition Q est la proposition : $\overline{Q}$: « $(\exists x \in \mathbb{R});\ x^2 + x - 2 = 0$ ».

En prenant $x = 1$ on obtient $1^2 + 1 - 2 = 0$, Par conséquent, la proposition $\overline{Q}$ est vraie et donc Q est fausse.

Applications

En utilisant un raisonnement par contre-exemple, montrer que les propositions suivantes sont fausses :

P_1 : « $(\forall x \in \mathbb{R});\ x^2 > 0$ » ; P_2 : « $(\forall x \in \mathbb{R}^*);\ x + \frac{1}{x} \geq 2$ » ; P_3 : « $(\forall x \in \mathbb{R});\ x^2 - 3x - 4 = 0$ »

3.2. DISJONCTION DE DEUX PROPOSITIONS :

Définition

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qu'on note $(P \text{ ou } Q)$ et elle est fausse seulement si P et Q sont toutes les deux fausses.

La disjonction est un connecteur logique binaire **défini par** la table de vérité ci-contre :

P	Q	P ou Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Exemples

Considérons les propositions suivantes :

A « $\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{9}}$ ou $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ » ; B « $5 < 6$ ou $5 = 6$ » ; C « $\sqrt{\pi + 2} = \sqrt{\pi} + \sqrt{2}$ ou $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3$ »

Les propositions A et B sont vraies et la proposition C et R est fausse.

3.3. CONJONCTION DE DEUX PROPOSITIONS :

Définition

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qu'on note $(P \text{ et } Q)$ et elle est vraie seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.

La conjonction est un connecteur logique binaire défini par la table de vérité ci-contre :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples

1) La proposition « $\sqrt{2} > 1$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est fausse.

2) La proposition « $\pi > 3$ et $\pi \in \mathbb{R}$ » est vraie.

3) La proposition « 49 est premier et 46 est divisible par 7 » est fausse.

3.4. IMPLICATION DE DEUX PROPOSITIONS :

Définition

L'implication d'une proposition P à une proposition Q est la proposition qu'on note $(P \Rightarrow Q)$ et elle est fausse seulement si P est vraie et Q est fausse.

Les deux propositions $(P \Rightarrow Q)$ et $(\overline{P} \text{ ou } Q)$ ont la même valeur de vérité.

L'implication est un connecteur logique binaire défini par la table de vérité ci-contre :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

VOCABULAIRE :

Dans l'implication $P \Rightarrow Q$, P est **l'hypothèse**, Q est **la conclusion**. Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on sait qu[e] si la proposition P est vraie, alors la proposition Q l'est aussi. Mais si P est fausse, on ne peut rien dire de la proposition Q.

Exemples

1) La proposition « $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} > 0$ » est vraie.

2) La proposition « $\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \pi = 3,14$ » est fausse.

3) La proposition « $(-1)^{-2} = -1 \Rightarrow (-1)^{-3} \in \mathbb{N}$ » est vraie.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ » est vraie.

4 LOIS LOGIQUES ET RAISONNEMENTS :

4.1. LOI LOGIQUE OU TAUTOLOGIE :

Définition

Soient Q_1, Q_2,..., Q_n des propositions.

On appelle loi logique ou tautologie toute proposition P résultante de l'assemblage par des connecteurs logiques de propositions prises parmi Q_1, Q_2,..., Q_n qui est vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions en jeu.

Exemples

Les propositions suivantes sont des lois logiques : (à vérifier à l'aide de table de vérité)

1) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$; 2) $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$; 2) $P \Rightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$

Remarques

Loi de Morgane :

Soient P et Q deux propositions. Les deux propositions suivantes sont des lois logiques :

$\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$; $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$

4.2. RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSÉE :

Proposition

Soient P et Q deux propositions.

L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la contraposée (ou l'implication contraposée) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

La contraposée d'une implication est équivalente à celle-ci : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

Le but du raisonnement par contraposée est de démontrer des résultats faisant apparaître une implication « $P \Rightarrow Q$ ». Le principe est qu'au lieu de montrer « $P \Rightarrow Q$ » nous montrons sa contraposée. Nous faisons l'hypothèse $\overline{Q}$ est vraie et nous montrons que cela entraîne que $\overline{P}$ est vraie.

Exemples

1) Soient a et b deux réels non opposés. Montrons que : $a \neq 1 \, et \, b \neq -1 \Rightarrow ab + a - b - 1 \neq 0$

Il suffit d'utiliser le raisonnement par contraposée en montrant que : $ab + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \, ou \, b = -1$

On a : $ab + a - b - 1 = 0 \Rightarrow a(b+1) - (b+1) = 0 \Rightarrow (b+1)(a-1) = 0 \Rightarrow b = -1 \, ou \, a = 1$

Par conséquent : $ab + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \, ou \, b = -1$. Ainsi : $a \neq 1 \, et \, b \neq -1 \Rightarrow ab + a - b - 1 \neq 0$

2) Soient x, y et z des réels. Montrons que la proposition « $x+y>2z \Rightarrow (x>z$ ou $y>z)$ » est vraie :

Pour cela on va montrer que sa contraposée « $(x\leq z$ et $y\leq z) \Rightarrow x+y\leq 2z$ » est vraie.

On a : $(x\leq z$ et $y\leq z) \Rightarrow x+y\leq z+z \Rightarrow x+y\leq 2z$.

Donc la proposition « $(x\leq z$ et $y\leq z) \Rightarrow x+y\leq 2z$ » est vraie.

Par suite, la proposition « $x+y>2z \Rightarrow (x>z$ ou $y>z)$ » est aussi vraie.

Remarques

- Il faut bien distinguer entre la négation, la contraposée et la réciproque :
  - La négation de $P\Rightarrow Q$ est $(P$ et $\overline{Q})$;
  - La réciproque de $P\Rightarrow Q$ est $Q\Rightarrow P$;
  - La contraposée de $P\Rightarrow Q$ est $\overline{Q}\Rightarrow \overline{P}$.
- Le recours au raisonnement par contraposée n'est évidemment important que si cette contraposée est plus facile à prouver que l'implication directe.

Applications

En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer les implications suivantes :

1. $(\forall x\in[-1;+\infty[)\ \left(x\neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x}\neq 1+\dfrac{x}{2}\right)$.
2. $(\forall n\in\mathbb{N})\ \left(n\neq 4 \Rightarrow \dfrac{7}{n+3}\notin\mathbb{N}\right)$.
3. $\left(\forall (x;y)\in(]1;+\infty[)^2\right)\ \left(x\neq y \Rightarrow x^2-2x\neq y^2-2y\right)$.
4. $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(x\notin[-1;4] \Rightarrow x^2-3x-4>0\right)$.
5. $(\forall n\in\mathbb{N})$, si l'entier n^2-1 n'est pas divisible par $8 \Rightarrow$ l'entier n est pair.

4.3. LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE :

Proposition

Soient P et Q deux propositions. La proposition suivante est une loi logique :

$$\left[(\overline{P}\Rightarrow Q) \text{ et } (\overline{P}\Rightarrow \overline{Q})\right]\Rightarrow P$$

…quement pour montrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse ; donc $\overline{P}$ serait vraie. …n montre que les implications $\overline{P}\Rightarrow Q$ et $\overline{P}\Rightarrow \overline{Q}$ sont vraies ; d'où la proposition $(\overline{P}$ et $P)$ serait vraie, ce …i est absurde. Ainsi, on établit que l'hypothèse « $\overline{P}$ est vraie » conduit à une contradiction.

Exemples

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tels que : n est le carré d'un entier

Montrons à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $2n$ n'est pas le carré d'un entier

Supposons que $2n$ et lui aussi le carré d'un entier, alors $\exists(p;q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $n = p^2$ et $2n = q^2$.

Alors, en faisant le quotient, on obtient $\dfrac{q^2}{p^2} = 2$

$\dfrac{q^2}{p^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, ce qui absurde. Par suite $2n$ n'est pas le carré d'un entier

2) Soient x, y et z des réels tels que : $x + y > 8$.

Montrons par l'absurde que : $x > 4$ ou $y > 4$.

Par l'absurde, supposons que $x \leq 4$ et $y \leq 4$. Il en résulte donc que $x + y \leq 4 + 4$, ce qui entraîne alors $x + y \leq 8$, ce qui contredit l'hypothèse $x + y > 8$.

Par suite : $x > 4$ ou $y > 4$.

Applications

1. Soient a, b et c des réels positifs tels que $ab < c$. Montrer que : $a < \sqrt{c}$ ou $b < \sqrt{c}$.
2. soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier naturel.
3. Montrer par l'absurde que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt{4n+2} \notin \mathbb{N}$.
4. Soient x, y et z des réels tels que : $x + y > t$. Montrer par l'absurde que : $x > \dfrac{t}{2}$ ou $y > \dfrac{t}{2}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$

4.4. LE RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DES CAS :

Proposition

Soient P, Q et R trois propositions.

La proposition suivante est une loi logique : $\left[(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\right] \Leftrightarrow \left[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R\right]$

Le raisonnement par disjonction des cas a un rôle important. En effet, dans certaines circonstances, l'objet étudié présente une hétérogénéité telle qu'il est difficile d'avoir un raisonnement efficace pour l'ensemble de l'objet. On coupe alors l'objet en morceaux et on raisonne sur tous les morceaux, cherchant à prouver pour chacun d'eux la propriété recherchée. Attention, il ne faut oublier aucun morceau, sans quoi on ne peut aboutir à une propriété concernant l'objet entier.

Exemples

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\quad \sqrt{x-1} > \sqrt{2}.(x-2)$

Soit D l'ensemble de définition de l'inéquation (I) et S son ensemble des solutions.

Soit $x \in \mathbb{R}$: $x \in D \Leftrightarrow x-1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1$.

Alors $D = [1;+\infty[$.

Soit $x \in D$. On va faire un raisonnement par disjonction de deux cas :

• **1er cas :** Si $x \in [1;2[$

On a dans ce cas : $\sqrt{2}.(x-2) < 0$ et $\sqrt{x-1} \geq 0$; Il s'ensuit donc :

$$\sqrt{x-1} > \sqrt{2}.(x-2) \Leftrightarrow x \in [1;2[$$

Ainsi, l'ensemble solution de (I) dans $[1;+\infty[$ est : $S_1 = [1;2[$

• **2ème cas :** Si $x \in [2;+\infty[$

On a dans ce cas : $\sqrt{2}.(x-2) \geq 0$ et $\sqrt{x-1} > 0$; Il s'ensuit donc :

$$\sqrt{x-1} > \sqrt{2}.(x-2) \Leftrightarrow x-1 > 2(x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x-1 > 2x^2 - 8x + 8$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 < 0$$

Le discriminant du trinôme $2x^2 - 9x + 9$ est $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 9 = 3^2$; d'où :

$$2x^2 - 9x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 3 \right)$$

Le tableau de signe du trinôme $2x^2 - 9x + 9$ est donc :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-9x+9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il en résulte donc que : $\sqrt{x-1} > \sqrt{2}.(x-2) \Leftrightarrow x \in [2;+\infty[\cap \left]\frac{3}{2};3\right[\Leftrightarrow x \in [2;3[$

Ainsi, l'ensemble solution de (I) dans $[2;+\infty[$ est : $S_2 = [2;3[$

En définitive, l'ensemble solution de l'inéquation (I) est : $S = S_1 \cup S_2 = [1;2[\cup [2;3[= [1;3[$.

Soit n un entier relatif. Montrons que le nombre $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 :

On va faire un raisonnement par disjonction des cas suivant le reste r de la division euclidienne de n par 3.

- **1er cas :** Si $r=0$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n=3k$; donc : $n(n^2+5)=3[k(9k^2+5)]$.

  Par conséquent, $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.
- **2ème cas :** Si $r=1$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n=3k+1$; donc : $n(n^2+5)=3(3k+1)(3k^2+2k+2$

  Par conséquent, $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.
- **3ème cas :** Si $r=2$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n=3k+2$; donc : $n(n^2+5)=3(3k+2)(3k^2+4k+$

  Par conséquent, $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.

Dans tous les cas, le nombre $n(n^2+5)$ est un multiple de 3

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   $(I_1)\ \sqrt{2-x}<-x$; $(I_2)\ |x-2|+|x|+2=0$; $(I_3)\ x^2-|x+1|-1=0$
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n(n^2+5)$ est un nombre pair.
3. Montrer que le nombre $n(2n^2+1)$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   a) $x+\sqrt{x^2+1}>0$; b) $|x|+|x-1|\geq 1$; c) $|x-1|\leq x^2-2x+2$

4.5. RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE :

Proposition

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle qui dépend d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si la proposition $P(n_0)$ est vraie et si l'implication « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie pour tout $n \geq n_0$,
alors, la proposition $P(n)$ est vraie, pour tout entier $n \geq n_0$.

PARTIQUEMENT :

On peut décomposer une démonstration par récurrence en quatre temps :

- On énonce la propriété $P(n)$ que l'on souhaite démontrer.
- On initialise la récurrence en prouvant que $P(n_0)$ est vraie.
- On montre que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq n_0$, l'implication « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie. Pour cela, on commence par fixer un entier n arbitraire supérieur ou égal à n_0 et on suppose que $P(n)$ est vraie. On essaie alors de prouver que $P(n+1)$ est vraie.
- On conclut, par exemple grâce à une phrase du type « Le principe de récurrence permet d'affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ »

Exemples

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1+3+5+....+(2n+1)=(n+1)^2$

Soit $S(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par : « $1+3+5+....+(2n+1)=(n+1)^2$ »

• **Initialisation :** Pour $n=0$, on a : $2\times 0+1=1=(0+1)^2$; d'où $S(1)$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Supposons que $S(n)$: « $1+3+5+....+(2n+1)=(n+1)^2$ » est vraie et montrons que $S(n+1)$: « $1+3+5+....+(2n+1)+\underbrace{(2n+3)}_{2(n+1)+1}=\Big(\underbrace{n+2}_{n+1+1}\Big)^2$ » est vraie.

On a par hypothèse : $1+3+5+....+(2n+1)=(n+1)^2$; il s'ensuit :

$$\begin{aligned}1+3+5+....+(2n+1)+(2n+3)&=(n+1)^2+2n+3\\&=n^2+2n+1+2n+3\\&=n^2+4n+4\\&=(n+2)^2\end{aligned}$$

il en résulte donc : $1+3+5+....+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$.

Par conséquent, la proposition $S(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1+3+5+....+(2n+1)=(n+1)^2$.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre 7^n-3^n est divisible par 4 :

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A_n=7^n-3^n$ et on considère la propriété $P(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

« Le nombre A_n est divisible par 4 »

• **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $A_0=7^0-3^0=0$, donc A_0 est divisible par 4 ; d'où $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Supposons que 4 divise A_n et montrons que 4 divise A_{n+1}.

Par hypothèse, 4 divise A_n ; il existe donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $A_n=4k$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}A_{n+1}=7^{n+1}-3^{n+1}&=7\times7^n-3\times3^n=(4+3)\times7^n-3\times3^n\\&=4\times7^n+3\times7^n-3\times3^n=4\times7^n+3(7^n-3^n)=4\times7^n+3A_n\end{aligned}$$

Il s'ensuit donc : $A_{n+1}=4\times7^n+3\times4k=4\times(7^n+3k)$; d'où 4 divise A_{n+1}.

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre $A_n=7^n-3^n$ est divisible par 4.

Applications

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, 4^n+6n-1 est divisible par 9.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq4$, $2^n\geq n^2$.

A RAISONNEMENT PAR CONTRE - EXEMPLE

En utilisant un raisonnement par contre-exemple, montrer que les propositions suivantes sont fausses

1) P : « $\left(\forall x \in \left]0;1\right[\right)\ \dfrac{2x+1}{x^2\left(1-x^2\right)} < 1$ »

2) Q : « Pour tout entier naturel n, le nombre n^2 est impair »

3) R : « $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ »

4) S : « $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right)\ \sqrt{a^2+b^2} = a+b$ »

5) T : « Tout entier naturel divisible par 2 et par 6 est divisible par 12 ».

6) U : « $(\forall x \in \mathbb{R})\ 3\cos x \neq 2\sin^2 x$ ».

SOLUTION

1) La proposition P est fausse. Contre-exemple : pour $x = \dfrac{1}{2}$, on a bien $\dfrac{1}{2} \in \left]0;1\right[$ et de plus :

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{32}{3}$$

Comme $\dfrac{32}{3} \geq 1$, alors P est fausse car sa négation $\overline{P}$: « $\left(\exists x \in \left]0;1\right[\right);\ \dfrac{2x+1}{x^2\left(1-x^2\right)} \geq 1$ » est vraie.

2) La proposition Q est fausse. Contre-exemple : pour $n = 2$, on a $n^2 = 4$ et 4 n'est pas un nombre impair.

3) La proposition R est fausse. Contre-exemple : pour $x = -1$, on a bien $-1 \in \mathbb{R}^*$ et $-1 + \dfrac{1}{-1} = -2$ et $-2 < 2$.

Par conséquent, la proposition R est fausse.

4) La proposition S est fausse. Contre-exemple : pour $a = b = 1$, on a : $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et $1+1=2$ et $\sqrt{2} \neq 2$.

5) La proposition T est fausse. Contre-exemple : l'entier 18 est divisible par 2 et 6 mais il n'est pas divisible par 12 car il n'existe aucun entier k tel que : $18 = 12k$.

6) La proposition U est fausse. En effet, la négation de U est : $\overline{U}$: « $(\exists x \in \mathbb{R})$; $3\cos x = 2\sin^2 x$ ».

D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3\cos x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow 3\cos x = 2\left(1-\cos^2 x\right) \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

En posant $X = \cos x$, on obtient : $2X^2 + 3X - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(X = -2 \text{ ou } X = \dfrac{1}{2}\right)$. Il s'ensuit donc que :

$\cos x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. En prenant $x = \frac{\pi}{3}$, on peut déduire que la proposition $\overline{U}$ est vraie et par conséquent, la proposition U est fausse

B RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Les questions 1, 2, 3, et 4 sont indépendantes.

1) Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Sachant que $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$.

Montrer que la fonction f n'est pas paire.

4) Soit a , b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

SOLUTION

1) Montrons par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$:

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; il existe donc deux entiers naturels a et b tels que : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. Il en résulte donc : $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Cela entraîne que a^2 est pair et donc l'entier a est pair. En posant $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, on obtient : $a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$. On en déduit alors que l'entier b^2 est pair et donc b est aussi pair. On aboutit alors à une absurdité car la fraction $\frac{a}{b}$ est supposé irréductible. Par suite : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Montrons par l'absurde que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ et posons : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = q$ avec $q \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, on aura alors : $\sqrt{2}+\sqrt{3} = q-\sqrt{5} \Rightarrow \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(q-\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow 2\sqrt{6}+2\sqrt{5}\,q = q^2$.

Par conséquent : $\left(2\sqrt{6}+2\sqrt{5}\,q\right)^2 = q^4 \Rightarrow 24+8\sqrt{30}\,q+20q^2 = q^4 \Rightarrow \sqrt{30} = \frac{q^4-20q^2-24}{8q}$.

Comme $q \in \mathbb{Q}$ alors $\frac{q^4-20q^2-24}{8q} \in \mathbb{Q}$, ce qui donne $\sqrt{30} \in \mathbb{Q}$. Absurde.

Conclusion : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$.

a) Montrons que la fonction f n'est pas paire :

Si la fonction f était paire, on aurait alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = f(x)$.

Or pour $x = 1$, on obtient : $f(-1) = -1$ et $f(1) = 3$, donc $f(-1) \neq -f(1)$.

Donc, ce qu'on a supposé est faux. Ainsi, la fonction f n'est pas paire.

4) Montrons que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$:

Par l'absurde, supposons que : $a(1-b) > \frac{1}{4}$ et $b(1-c) > \frac{1}{4}$ et $c(1-a) > \frac{1}{4}$.

En multipliant les membres de ces inégalités, on obtient : $a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{64}$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$; Donc : $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ et $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Par conséquent : $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64}$. Contradiction

C RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSÉE

1) En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que :

a) Pour tous nombres réels x et y : P Q $(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$

b) Pour tous nombres réels x, y et z : $x + y > 2z \Rightarrow (x > z \text{ ou } y > z)$

2) Soit $(a;b;c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Montrer que : $a^2+b^2+c^2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \neq \frac{1}{abc}$.

SOLUTION

1) a) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. Par contraposée, montrons que : $\bar{Q}$ $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow$ $\bar{P}$ $(xy = 1 \text{ ou } x = y)$.

On a : $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1)$

$$\Rightarrow xy^2 + xy + x = yx^2 + yx + y$$

$$\Rightarrow x - y - xy(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(1-xy) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ ou } xy = 1$$

Par suite : $(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$

b) Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$. Par contraposée, montrons que : $(x \leq z \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x + y \leq 2z$.

On a : $(x \leq z \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x + y \leq z + z \Rightarrow x + y \leq 2z$. D'où le résultat.

2) Soit $(a;b;c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Par contraposée, il suffit de montrer que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 2$

On a : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{abc} \Rightarrow \frac{bc+ac-ab}{abc}=\frac{1}{abc} \Rightarrow bc+ac-ab=1$.

D'autre part : $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc = a^2+b^2+c^2-2(bc+ac-ab)$

Il s'ensuit donc que : $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2$.

Comme $(a+b-c)^2 \geq 0$, alors : $a^2+b^2+c^2-2 \geq 0$, c'est-à-dire que : $a^2+b^2+c^2 \geq 2$, d'où le résultat.

D RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DES CAS

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \sqrt{x^2-5x+6} > x+4 \quad ; \quad (I_2) : |x-1|+2x-3 \geq 0$$

SOLUTION

Résolution les inéquations :

- Pour l'inéquation (I_1) :

L'inéquation (I_1) a un sens si $x^2-5x+6 \geq 0$, c'est-à-dire, lorsque : $x \in]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$

Soit S l'ensemble solution de l'inéquation (I_1).

<u>1er cas :</u> Si $x+4 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -4$, alors :

$$x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6 > x^2+8x+16 \\ x \in]-\infty;2] \cup [3;+\infty[\text{ et } x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{10}{13} \\ x \in]-\infty;2] \cup [3;+\infty[\text{ et } x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{10}{13} \\ x \geq -4 \end{cases}$$

Par conséquent : $\left[-4;-\frac{10}{13}\right[\subset S$

<u>2ème cas :</u> Si $x+4<0$, c'est-à-dire $x<-4$, alors : $x^2-5x+6 \geq 0$ et $x+4<0$. Dans ce cas, l'inéquation (I_1) est toujours vérifiée. Par conséquent : $]-\infty;-4[\subset S$.

Conclusion : L'ensemble solution de l'inéquation (I_1) est $S = \left]-\infty;-\frac{10}{13}\right[$.

- Pour l'inéquation (I_2) :

Soit S l'ensemble solution de l'inéquation (I_2).

<u>1er cas :</u> Si $x-1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 1$, alors $|x-1| = x-1$. Par conséquent :

$$x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+2x-3 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

Par conséquent : $\left[\frac{4}{3};+\infty\right[\subset S$

2ème cas : Si $x-1\leq 0$, c'est-à-dire $x\leq 1$, alors $|x-1|=1-x$. Par conséquent :

$$x\in S \Leftrightarrow \begin{cases}1-x+2x-3\geq 0\\ x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 2\\ x\leq 1\end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble solution de l'inéquation (I_2) est $S=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$.

E RAISONNEMENT PAR IMPLICATION

Montrer que pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$: $a^3+b^3<1<a+b\Rightarrow(0<a<1 \text{ et } 0<b<1)$

SOLUTION

On a pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$:

$$a^3+b^3<1<a+b\Rightarrow\left(a^3<1-b^3 \text{ et } 1-b<a\right)\Rightarrow\left(a^3<1-b^3 \text{ et } (1-b)^3<a^3\right)\Rightarrow(1-b)^3<1-b^3$$

Par conséquent : $a^3+b^3<1<a+b\Rightarrow 1-3b+3b^2-b^3<1-b^3\Rightarrow 3b^2-3b<0\Rightarrow b\in\,]0;1[$

On montre de même que : $a^3+b^3<1<a+b\Rightarrow a\in\,]0;1[$ (car a et b jouent des rôles symétriques).

Par suite : $a^3+b^3<1<a+b\Rightarrow(0<a<1 \text{ et } 0<b<1)$

F RAISONNEMENT PAR ÉQUIVALENCE

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a+b=2$ et $|a|<|b|$.

Montrer que : $1\in\,]|a|;|b|[\Leftrightarrow ab\in\,]-3;1[$

SOLUTION

On a : $1\in\,]|a|;|b|[\Leftrightarrow|a|<1<|b|\Leftrightarrow a^2<1<b^2\Leftrightarrow(a^2-1)(b^2-1)<0\Leftrightarrow a^2b^2-(a^2+b^2)+1<0$.

D'où : $1\in\,]|a|;|b|[\Leftrightarrow a^2b^2-\left((a+b)^2-2ab\right)+1<0\Leftrightarrow a^2b^2-(4-2ab)+1<0\Leftrightarrow a^2b^2+2ab-3<0$.

Il s'ensuit donc : $1\in\,]|a|;|b|[\Leftrightarrow(ab+1)^2-4<0\Leftrightarrow|ab+1|<2\Leftrightarrow-2<ab+1<2\Leftrightarrow-3<ab<1$

Par suite : $1\in\,]|a|;|b|[\Leftrightarrow ab\in\,]-3;1[$

G RAISONNEMENT PAR RÉCCURENCE

1) a) Vérifier que pour tout entier $n\geq 3$, on a : $(n+1)^3\leq 3n^3$

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 3$: $3^n\geq n^3$

2) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}\geq\frac{3n}{2n+1}$

SOLUTION

1) a) On a pour tout entier $n \geq 3$:

$$3n^3 - (n+1)^3 = 3n^3 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 2n^3 - 3n^2 - 3n - 1$$

Donc : $3n^3 - (n+1)^3 = n(2n^2 - 3n - 3) - 1 = n(n(2n-3)-3) - 1$

Puisque $n \geq 3$ alors $2n - 3 \geq 3$ et $n(2n-3) \geq 9$, d'où $n(2n-3) - 3 \geq 6$ et donc : $n(n(2n-3)-3) \geq 18$, ce qui montre que $n(n(2n-3)-3) - 1 \geq 17 \geq 0$.

Par suite $3n^3 - (n+1)^3 \geq 0$, c'est-à-dire que : $(n+1)^3 \leq 3n^3$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$: $3^n \geq n^3$

Initialisation : On a bien pour $n = 3$, $3^3 \geq 3^3$.

Hérédité : Supposons que $3^n \geq n^3$ et montrons que $3^{n+1} \geq (n+1)^3$.

De l'inégalité $3^n \geq n^3$ on en déduit que $3^{n+1} \geq 3n^3$. D'après la question 6),a) on a $3n^3 \geq (n+1)^3$, et par conséquent $3^{n+1} \geq 3n^3 \geq (n+1)^3$, ce qui montre que $3^{n+1} \geq (n+1)^3$.

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 3$, on a : $3^n \geq n^3$

2) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$

Initialisation : On a bien pour $n = 2$, $1 + \frac{1}{2^2} \geq \frac{3 \times 2}{2 \times 2 + 1}$ car $\frac{5}{4} \geq \frac{6}{5}$.

Hérédité : Supposons que $1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$ et montrons que : $1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n+3}{2n+3}$

On a : $1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$, donc : $1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Il suffit alors de montrer que : $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n+3}{2n+3}$.

On a : $$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3n+3}{2n+3} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$$

Comme $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \geq 0$ alors $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n+3}{2n+3}$ et par suite :

$$1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n+3}{2n+3}$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 2$, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.

EXERCICES D'APPLICATION

OPÉRATIONS SUR LES PROPOSITIONS

EXERCICE 01

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

$P_1 : (3\times 0 = 0\ et\ 3^0 = 1)$; $P_2 : (-\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\ ou\ \sqrt{2} < 1)$

$P_3 : \exists n \in \mathbb{N}; \sqrt{3n^2+1} \in \mathbb{N}$; $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R})\ ; x^2 > 1$

$P_5 : (x \in \mathbb{R})\ (x^2 = 1 \Rightarrow x = -1)$

$P_6 : (x \in \mathbb{R})\ (x > 2 \Rightarrow x^2 > 4)$

$P_7 : (x \in \mathbb{R})\ (|x| < 1 \Leftrightarrow x \in]-1;1[)$

EXERCICE 02

Donner la négation des propositions suivantes :

$P_1 : -\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$; $P_2 : \sqrt{2} \leq 1$; $P_3 : \sqrt{2^2+3^2} = 5$

$P_4 : \exists n \in \mathbb{N}; (\sqrt{n} \in \mathbb{N}\ et\ \sqrt{n} > 1)$

$P_5 : \forall x \in \mathbb{R}; (|x| = x \text{ ou } x^2 \geq 0)$

$P_6 : (\forall (x;y) \in \mathbb{R})\ x + y > 0$

$P_7 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ x \geq n$

$P_8 : (\forall x \in \mathbb{R})\ \left(x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2\right)$

EXERCICE 03

Compléter en utilisant les connecteurs « ou » et « et » pour que les équivalences suivantes soient vraies :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |x| > 1 \Leftrightarrow (x > 1 \ldots . x < -1)$

2) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ \ x.y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \ldots . y = 0)$

3) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ \ x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \ldots . y = 0)$

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ (x;y) \neq (0;0) \Leftrightarrow (x \neq 0 \ldots y \neq 0)$

EXERCICE 04

Parmi les énoncés suivants, quels sont ceux qui traduisent que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$:

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists c \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) = c$.

2) $(\exists c \in \mathbb{R}); (\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) = c$.

3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) = f(0)$.

4) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists a \in \mathbb{R});\ \ f(x) = f(a)$.

5) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall a \in \mathbb{R})\ \ f(x) = f(a)$

EXERCICE 05

1) On considère la proposition :

P : « $(\forall x \in \mathbb{R});\ |x| > 0$ »

a) Déterminer la négation de la proposition P.

b) Montrer que la proposition P est fausse.

2) On considère la proposition :

Q : « $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{1+x^2} \geq |x|$ »

a) Déterminer la négation de la proposition Q.

b) Montrer que la proposition Q est vraie.

3) On considère la proposition :

R : « $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x \in \mathbb{N})\ ;\ x < n$ »

a) Déterminer la négation de la proposition R.

b) Montrer que la proposition R est fausse.

4) On considère la proposition :

S : « $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x \geq 0 \text{ ou } x < 0)$ »

a) Montrer que la proposition S est vraie.

b) Donner la négation de la proposition S.

5) On considère la proposition :

T : « $(\exists x \in \mathbb{R}^+); (x^2 \leq x \text{ et } \sqrt{x} \geq x)$ »

a) Déterminer la valeur de vérité de la proposition

b) Donner la négation de la proposition T

EXERCICE 06

On considère la proposition suivante :

P : « $(\forall x\in\mathbb{Q}) : \left(x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\right)$ »

1) Déterminer la valeur de vérité de la proposition P.
2) Exprimer P à l'aide d'une disjonction.
3) Déterminer la négation de la proposition P.

EXERCICE 07

On considère le polynôme : $P(x)=ax^2+bx+c$

où : $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$. On pose :

$\Delta=b^2-4ac$ et $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,ax^2+bx+c=0\right\}$

et si $\Delta>0$, on note x_1 et x_2 les solutions de l'équation $P(x)=0$ avec $x_1<x_2$.

Déterminer parmi les implications suivantes celles qui sont vraies :

1) $ac<0\Rightarrow S\neq\varnothing$; 2) $a+b+c=0\Rightarrow S=\left\{1;\dfrac{c}{a}\right\}$.

3) $c=0\Rightarrow S=\varnothing$; 4) $b=a+c\Rightarrow S=\left\{-1;-\dfrac{c}{a}\right\}$.

5) $\left(\Delta>0 \text{ et } \dfrac{a}{c}<0\right)\Rightarrow x_1<0<x_2$.

6) $\Delta<0\Rightarrow\left[(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)>0\right]$.

7) $\left(\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right) ; P(\alpha).P(\beta)<0\Rightarrow\Delta>0$.

LOIS LOGIQUES - TAUTOLOGIES

EXERCICE 08

Soit P, Q et R trois propositions.

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1) $(P\Rightarrow Q)\Rightarrow\left[(Q\Rightarrow R)\Rightarrow(P\Rightarrow R)\right]$;
2) $(P\Rightarrow Q)\Rightarrow\left[(P \text{ et } R)\Rightarrow(Q \text{ et } R)\right]$;
3) $(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\overline{(P \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } Q)}$;
4) $P\Rightarrow\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)$

RAISONNEMENT PAR CONTRE - EXEMPLE

EXERCICE 09

1) Montrer que : « $(\forall x\in\mathbb{R})$; $2x-4>0$ » est une proposition fausse.
2) Montrer que : « $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\sqrt{x}\in\mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+1$$

   a) Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
   b) Montrer que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la proposition suivante est fausse:
« $(\forall x\in\mathbb{R})\,(\exists y\in\mathbb{R})$; $x^2-xy+y^2=0$ »

EXERCICE 10

Soit a, b, c et d des nombres réels.

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

P_1 : « $a\neq b\Rightarrow a^2\neq b^2$ »

P_2 : « $(a\neq b \text{ et } c\neq d)\Rightarrow a+c\neq b+d$ »

P_3 : « $(a\neq b \text{ et } c\neq d)\Rightarrow ac\neq bd$ »

RAISONNEMENT DÉDUCTIF

EXERCICE 11

1) Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\left(x>2 \text{ et } y\geq\frac{1}{3}\right)\Rightarrow 0<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{7}{2}$$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x+1\geq2\sqrt{x}$

3) Montrer que pour tout $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq2$$

3) Montrer que pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$:

$$a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\leq\sqrt{2}$$

RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DES CAS

EXERCICE 12

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2-3|x-2|-4=0$; $\sqrt{x+4}=x+2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|x-1|+|x|\geq 3$; $\sqrt{3-x}+x<0$;

$\sqrt{x-1}\geq x-4$; $\sqrt{x^2+2x-3}>x+2$

EXERCICE 13

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases}2|x-1|-y=4\\x+2y=-2\end{cases}$; $\begin{cases}3|x-2|-2y=7\\x-2|y-1|=-5\end{cases}$

EXERCICE 14

En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, Montrer que :

1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{x^2+1}+x>0$.

2) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{2x^2-3x+3}-x+1>0$.

3) le nombre $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4) $(\forall n\in\mathbb{Z})\ \dfrac{n(n^2+5)}{3}\in\mathbb{Z}$.

RAISONNEMENT PAR ÉQUIVALENCE

EXERCICE 15

Soit a, b et c des nombres réels.

1) Montrer que : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

2) Montrer que : $a^3+a=b^3+b\Leftrightarrow a=b$.

3) Montrer que si $(a;b)\in\mathbb{R}^{+2}$:

$2(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a+b+2\Leftrightarrow(a=1 \text{ et } b=1)$.

EXERCICE 16

Soit x un réel positif.

1) Montrer que: $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

2) Montrer que: $\sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$.

3) Montrer que: $0\leq\dfrac{x}{x^2+x+1}\leq\dfrac{1}{3}$.

4) Montrer que: $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\leq\dfrac{4}{3}\sqrt{x}$.

5) Établir les inégalités suivantes pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}$

a) $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$; b) $\dfrac{x+y}{2}\leq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$

c) $x^2+xy+y^2\geq 0$

6) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^{+2}$:

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x+1}-\sqrt{y}\Leftrightarrow x\geq y$.

EXERCICE 17

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que : $(x\neq\sqrt{3}$ et $x\neq-\sqrt{3})\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\neq 1$

2) Montrer que si $x\geq\dfrac{1}{2}$, alors : $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}\geq 1$

3) Montrer que si $x\geq 1$ et $y\geq 4$, alors :

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\dfrac{x+y}{2}\Leftrightarrow(x;y)=(2;8)$

4) Montrer que pour tous x et y de $]1;+\infty[$:

$(x+y)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}>2$

EXERCICE 18

Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère les propositions :

A : « $\cos^3 x+\sin^3 x=1$ »

B : « $\cos x=0$ et $\sin x=1$ »

C : « $\sin x=1$ et $\cos x=0$ »

Montrer que : $A\Leftrightarrow(B \text{ ou } C)$

...NNEMENT PAR CONTRAPOSÉE

...RCICE 19

...$\in\mathbb{R}^2$. À l'aide d'un raisonnement par ...sée, établir les implications suivantes :

... et $y\neq 1) \Rightarrow 1+xy\neq x+y$

...$\sqrt{3}$ et $x\neq\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\neq 1$.

...y et $x+y\neq -1) \Rightarrow x^2+x\neq y^2+y$.

...$y\Rightarrow (x-1)(y+1)\neq (x+1)(y-1)$.

...$\neq -\frac{3}{4}x\Rightarrow \frac{x-y}{x+y}\neq 7$.

...$\neq y$ et $xy\neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1}\neq\frac{y}{y^2+y+1}$.

...$\neq 0$ ou $y\neq 0) \Rightarrow x^2+y^2\neq 0$.

EXERCICE 20

...t f la fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

...ontrer que pour tout $(x;y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y).$$

EXERCICE 21

Soit f la fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Montrer que pour tout $(x;y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)$$

EXERCICE 22

Montrer en utilisant la contraposée que si 7 divise x^2+y^2 alors 7 divise x et 7 divise y.

EXERCICE 23

Soit $x\in\mathbb{R}$. À l'aide d'un raisonnement par contraposée, établir les implications suivantes :

1) $x^3+x^2-2x<0\Rightarrow x<1$
2) $|x|<1\Rightarrow |2x^2-x-1|<2$

EXERCICE 24

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Justifier que : $np=1 \Rightarrow n=p=1$

EXERCICE 25

1) Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow$ n^2 impair
2) Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2 impair $\Rightarrow$ n impair
3) Traduire les deux propositions démontrées précédemment en une seule phrase.

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

EXERCICE 26

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont $4a$, $3a$ et $6a$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle.

EXERCICE 27

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x)=x+2 \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

Montrer que les courbes C_f et C_g ne se coupent pas.

EXERCICE 28

1) Soit n un entier naturel Montrer que 6 ne divise pas $3n+5$
2) Démontrer que si n est un entier strictement positif, alors n^2+1 n'est pas le carré d'un entier naturel.
3) n désignant un entier, démontrer que si n^2+n est strictement négatif alors n est strictement négatif.

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 29

Un rectangle a pour aire $170\ m^2$.

Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m

EXERCICE 30

1) Montrer par l'absurde que :

$$\sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{3}-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

2) Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \notin \mathbb{Q}$ alors :

$$xy \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x+y \notin \mathbb{Q}$$

EXERCICE 31

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas des entiers relatifs x, y et z vérifiant l'égalité suivante :

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$$

EXERCICE 32

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^{+2}$.

Montrer que : $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a=b$

EXERCICE 33

Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que le système :

$$\begin{cases} 2x-3z>3 \\ 3y-2x \geq 3 \\ y-z \leq 2 \end{cases}$$

n'admet pas de solution.

2) On suppose dans cette question que : $x+y+z>5$.

Montrer par l'absurde que :

$$x>\frac{5}{2} \text{ ou } y>\frac{5}{2} \text{ ou } z>\frac{5}{2}.$$

EXERCICE 34

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que :

$$xyz>1 \quad \text{et} \quad x+y+z<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Montrer que : $x \neq 1$ et $y \neq 1$ et $z \neq 1$.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

EXERCICE 35

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ 3 divise 3^n+4^n-1.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ 6 divise 7^n-1.

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ 7 divise 11^n-2^{2n}.

EXERCICE 36

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$

$2^n \geq 6n+7$

EXERCICE 37

Soit a et b deux réels distincts et strictement positifs

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$$

EXERCICE 38

Soit x un réel strictement positif.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $3^n > n$; b) $(n+1)^n \geq 2n^n$

EXERCICE 39

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1+5+9...+(4n+1)=(n+1)(2n+1)$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1-2^2+....+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}(1+2+...+n)$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1\times 2+2\times 3+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+....+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right)$$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 40

…rire les propositions suivantes à l'aide des quan-…ficateurs et connecteurs logiques puis déterminer …négation de chacune d'elles :

P_1 : « Le carré d'un réel quelconque est supérieur ou égal à -1 ».

P_2 : « L'équation $x^2-2x-3=0$ admet au moins une racine réelle ».

P_3 : « Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré ».

P_4 : « Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres ».

P_5 : « Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe »

P_6 : « Tout réel inférieur ou égal à -1 est négatif »

EXERCICE 41

Soit x et y deux nombres réels.

1) Montrer que :

$$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{-7}{9}<-x^2+x-1<-\frac{3}{4}.$$

2) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2_*,\ y\neq-\frac{3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\neq 7$

3) Montrer que : $\frac{x}{1+|x|}=\frac{y}{1+|y|}\Rightarrow xy=0$

4) Montrer que :

$$\begin{cases}\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\\ |y|<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 1<\frac{2x}{x-y}<2$$

EXERCICE 42

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(x^2-|x|+1\geq 0 \text{ et } -1\leq x\leq 1\right).$

2) $(\exists x\in\mathbb{R});\left(x\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{x+1}}\in\mathbb{Q}\right).$

EXERCICE 43

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$0<\sqrt{1+x^2}-|x|<\frac{1}{2|x|}$$

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$x+1<\sqrt{x^2+2x+2}<x+1+\frac{1}{2x}$$

2) Montrer que :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2+2|x|-3\geq 0\Leftrightarrow|x|\geq 1.$$

EXERCICE 44

Soit a et b deux réels distincts strictement positifs.

Montrer que :

1) $a+b\geq 2\sqrt{ab}$; 2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

3) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$; 4) $(1+a)(1+b)\geq 4\sqrt{ab}$

5) $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

6) $\frac{a+b}{a+b+1}<\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{a+b+1}.$

EXERCICE 45

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$1+5+9+\ldots+(4n+1)=(n+1)(2n+1)$$

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$:

$$\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}$$

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

EXERCICE 46

1) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$:

$$3^n \geq n^3$$

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $3^n + n.3^{n-1} \leq 4^n$; b) $5^n \leq 4^n + n.5^{n-1}$

3) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

EXERCICE 47

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{3n}{2n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

EXERCICE 48

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$3^{2n} - 5^n$ est divisible par 4

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$10^n - 1$ est divisible par 9

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

25 divise $2^{n+2} \times 3^n + 5n - 4$

4) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ est divisible par 23

5) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

17 divise $21^n - 2^{2n}$

EXERCICE 49

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$$

Indication : On pourra étudier les cas :

$x \leq 0$; $0 < x < 1$; $x \geq 1$

EXERCICE 50

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} (x-1)(y+1) = 0 \\ (x+2)(2y-1) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ (x-2y)(x+y) = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 51

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{4n+2018} \notin \mathbb{N}$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\frac{8n+2021}{10} \notin \mathbb{Z}$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

EXERCICE 52

Montrer que si n est un entier naturel impair, alors l'entier $n^2 - 1$ est divisible par 8.

EXERCICE 53

Soit ABC un triangle isocèle de sommet B ; I et J deux points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que : $(IJ) // (BC)$.

Soit K un point du segment $[BC]$.

Montrer que : $(JK) // (AB) \Leftrightarrow AI = BK$

EXERCICE 54

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = (n+1)(n+2)\ldots(n+n)$$

et : $T_n = 2^n \times 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)$

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \; S_n = T_n$$

EXERCICE 55

Soit a, b et c trois réels distincts strictement positifs.

Montrer que :

1) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

2) $\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$.

EXERCICE 56

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, montrer par trois raisonnements différents que si $m^2 + 9 = 2^n$ alors m est impair.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

2

HISTOIRE

Le concept de *fonction* est historiquement un des deux concepts centraux de l'Analyse, conjointement avec celui de limite (ou d'*infinitésimal*). À partir du Moyen-âge, sinon avant, nombreux furent les travaux mathématiques mettant en jeu ce concept. Mais les fonctions y étaient présentes de façon uniquement implicite, et donc obscure et confuse.
Parcourir l'histoire de cette notion permet d'en montrer les différents aspects, qui tous peuvent et doivent apparaître dans notre enseignement, comme nous y encouragent d'ailleurs les programmes officiels.
Nous distinguerons ici trois aspects majeurs du concept de fonction (algébrique, géométrique et causal).
La définition du concept de fonction a évolué depuis son introduction par **Leibniz** à la fin du XVIIe siècle. Il s'agissait alors d'associer un objet à chaque point d'une courbe, par exemple la tangente. En identifiant chaque point de la courbe avec son ordonnée, Jean **Bernoulli** puis **Euler** redéfinissent ensuite ce terme pour décrire une expression composée d'une variable et d'éventuels paramètres constats.

G. WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716)

JACQUES BERNOULLI (1759 – 1789)

Source : Sites web et livres d'histoire (voir références)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques ;
- Déduire les variations ou les valeurs maximales et minimales d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou à partir de son tableau de variations ;
- Reconnaitre les variations des fonctions $f+\lambda$ et λf à partir des variations de la fonction f ;
- Utiliser la courbe représentative ou le tableau de variations d'une fonction pour déterminer l'image d'un intervalle et résoudre des équations et des inéquations ;
- Déterminer les variations de la fonction $g \circ f$ à partir des variations des fonctions f et g ;

PLAN DU COURS

1 RAPPELS SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

Les paries A) et B) suivantes sont indépendantes.

A) Ensemble de définition - Parité d'une fonction :

Rappel : 1.L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x_0 de $\mathbb{R}$ pour lesquels on peut calculer la valeur de $f(x_0)$: On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$ ou $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \in \mathbb{R}$

En pratique, on utilise :

- Si f est un polynôme alors $D_f = \mathbb{R}$.
- Si $f = \frac{p}{q}$ alors $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $q(x) \neq 0)$. (Ici p et q deux polynômes)
- Si $f = \sqrt{u}$ alors $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $u(x) \geq 0)$.

2. On dit que la fonction f est paire si pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
3. On dit que la fonction f est impaire si pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

1.Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 3x$; b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$; c) $f(x) = \sqrt{4x-2}$.

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$; e) $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$; f) $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2}$

2.Étudier la parité de la fonction g dans chacun des cas suivants :

a) $g(x) = x^4 + 2x^2$; b) $g(x) = \frac{3x}{x^2+1}$; c) $g(x) = \sin^2 x + \cos x$.

B) Représentation graphique d'une fonction :

Soient la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$

et (C_h) sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Parmi les points suivants dire ceux qui sont de (C_h) : $A(0,1)$; $B(1,2)$; $C(-1,5)$ et $D(\frac{1}{2},-1)$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_h) et les axes des coordonnées.
3. Déterminer les points des points de (C_h) dont l'ordonné est 1 .
4. Existe-t-il un point de (C_h) dont l'ordonné est -1 ?

$M(x,y)$ est un point de (C_h) si $y = h(x)$ et $x \in D_h$

PARABOLE - HYPERBOLE

2

) Fonction trinôme du second degré - Parabole :

On considère la fonction numérique $g : x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

On note (C_g) la parabole représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = (x-2)^2 - 1$.

b) Montrer que le taux de variation de g entre a et b est $T = a + b - 4$.

c) Montrer que la fonction g est croissante sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $]\infty-;2]$; puis dresser le tableau de ces variations.

d) Déterminer la nature de l'extremum de la fonction f puis donner ses coordonnée.

e) Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(3)$ puis construire la courbe (C_g).

B) Fonction homographique - Hyperbole :

Soit la fonction h_1 définie par : $h_1 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$.

On note (C_{h_1}) l'hyperbole représentative de la fonction h_1 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Donner son domaine de définition D_{h_1}.

b) Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de D_{h_1}, Montrer que : $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{3}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

c) En déduire les variations de h_1 sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$.

d) Donner les coordonnées du point Ω centre de symétrie de (C_{h_1}) et les équations cartésiennes de ses asymptotes.

e) Construire l'hyperbole (C_{h_1}).

3 COMPARAISON DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = 2x - 6$.

ent (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer le sommet de la parabole (C_f) et donner le tableau de variations de f.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. a) Montrer que (C_f) et (C_g) se coupent en de deux points $A(1,-4)$ et $B(3,0)$.

b) Tracer (C_f) et (C_g).

c) En déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

4. Déterminer graphiquement le signe de la fonction f.

5. Trouver les résultats de la question 3-c) algébriquement. (Etudier le signe de la différence : $f(x) - g(x)$).

4 FONCTION MAJORÉE, MINORÉE ET BORNÉE

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq 2$.
   On dit que la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}$ par le nombre 2.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\leq 3$.
   On dit que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$ par le nombre 3.
   On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $2\leq f(x)<3$. On dit que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ par 2 et 3.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.
   a) Montrer que la fonction g est minorée par -1.
   b) Montrer que la fonction g est majorée par 1.

5 REPRÉSENTATION DES FONCTIONS $x\longmapsto ax^3$ ET $x\longmapsto\sqrt{x+a}$

Les paries A) et B) suivantes sont indépendantes.

A) La fonction $x\mapsto ax^3$: $(a\in\mathbb{R}^*)$:

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3$.
   a) Montrer que la fonction f est impaire.
   b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.
   c) Calculer : $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$; $f(2)$; $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.
   d) Tracer la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2. Donner le sens de monotonie des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^3$ et $h(x)=-2x^3$; et tracer leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

B) La fonction $x\mapsto\sqrt{x+a}$: $(a\in\mathbb{R})$:

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$.
   a) Vérifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$ et $f(9)$ puis tracer la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
2. On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{x-1}$.
   a) Vérifier que la fonction g est strictement croissante sur son domaine de définition.
   b) Montrer que la courbe (C_g) de g est l'image de la courbe (C_f) par la translation de vecteur $\vec{i}$.

NOTION DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x-5$.

Déterminer l'ensemble de définition f et g

Calculer $g(6)$, puis déterminer la valeur de $f(g(6))$.

Calculer $g(9)$, puis déterminer la valeur de $f(g(9))$.

Calculer $g(3)$, peut-on définir $f(g(3))$? pourquoi ?

Donner l'expression de la fonction h définit sur $[5;+\infty[$ par $h(x)=f(g(x))$.

fonction $h: x \rightarrow f(g(x))$ S'appelle la fonction composée de f et g, dans cet ordre.

n la note $h=f \circ g$.

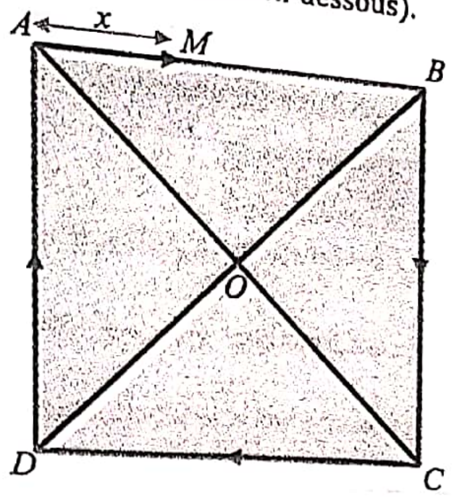
NOTION DE FONCTION PÉRIODIQUE

t $ABCD$ un carré de centre O et de longueur de côté égale à 2.

t M un point mobile se déplaçant sur le périmètre de ce carré à partir de A. (Voir figure en-dessous).

t x la distance parcourue par le point M à partir du point A.

pose : $f(x)=OM^2$.



) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

) Calculer : $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(8)$.

) Sans calculer l'expression de $f(x)$, donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

) On suppose que le point M a parcouru une distance égale à x et soit M' le lieu de ce point lorsque M parcourt une distance égale à $x+2$.

Montrer que les triangles OAM et OBM' sont isométriques (prendre sur la figure $0 \leq x < 2$).

) En déduire que $f(x+2)=f(x)$ puis donner une explication de ce résultat.

On dit que f est une fonction périodique de période 2.

n pose : $I_0=[0;2]$.

) Montrer que : $(\forall x \in I_0)$ $f(x)=x^2-2x+2$.

) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle I_0 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Montrer par récurrence sur k que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall k \in \mathbb{N})$ $f(x+2k)=f(x)$.

1 COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

1.1. FONCTION POSITIVE – FONCTION NÉGATIVE

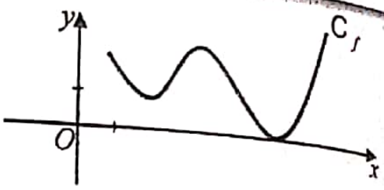
Définition

Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

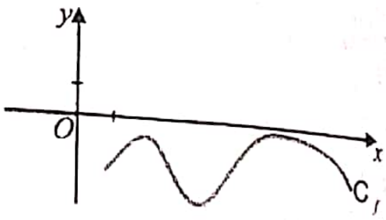
- On dit que la fonction f est positive sur D_f si : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \geq 0$; et on écrit : $f \geq 0$.
- On dit que la fonction f est négative sur D_f si : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \leq 0$; et on écrit : $f \leq 0$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

- Dire que la fonction f est positive sur D_f équivaut à dire que sa courbe représentative (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses.



- Dire que la fonction f est négative sur D_f équivaut à dire que sa courbe représentative (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses.



Exemples

1) Les fonctions $f_1 : x \mapsto |x|+2$ et $f_2 : x \mapsto 4x^2+7$ et $f_3 : x \mapsto 1+\sin x$ sont positives sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions $g_1 : x \mapsto -3|x|$ et $g_2 : x \mapsto -5x^2$ et $g_3 : x \mapsto \dfrac{-2}{x^2+5}$ sont négatives sur $\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-1)$.

Étudions le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

On a $f(x) = x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

En dressant le tableau de signe de l'expression $f(x)$, on obtient :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

On en déduit donc que : La fonction f est positive sur $]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$ et négative sur $[0;1]$.

3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$.

Étudions le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $x^2+1>0$. Donc le signe $f(x)$ est celui de $x-2$.

On a aussi $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

En dressant le tableau de signe de l'expression $f(x)$, on obtient :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit donc que : La fonction f est positive sur $[2;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;2]$.

Application

Étudier le signe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=-2x^2+x+1$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$; 3) $f(x)=\sqrt{x}(x-1)$.

I.2. COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

Définition

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un même ensemble D.

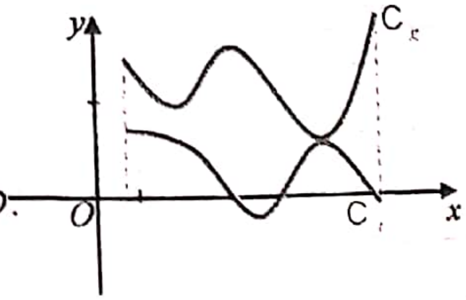
On dit que f est inférieure ou égale à g sur D (ou que g est supérieure ou égale à f sur D) si :

$$(\forall x \in D) \quad f(x) \leq g(x) ;$$

et on écrit : $f \leq g$ sur D .

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dire que la fonction f est inférieure ou égale à g sur D équivaut à dire que la courbe représentative (C_f) est au-dessus de la courbe représentative (C_g) pour tout $x \in D$.



Remarquer bien que : $f \leq g \Leftrightarrow (g-f \text{ est positive})$.

Exemple

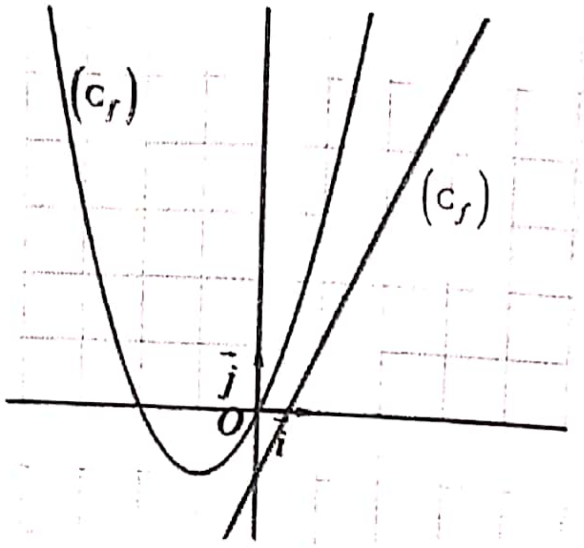
1) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^2+2x-3$ et $f(x)=2x-5$ et

Soit (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g .

Comparons les fonctions f et g :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)-f(x)=(x^2+2x)-(2x-2)=x^2+2$.

Comme $x^2+2>0$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) \leq g(x)$; d'où : $f \leq g$.



2) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2-3x+2$ et $g(x)=x-1$.

Soit (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g.

Etudions la position relative de (C_f) et (C_g) :

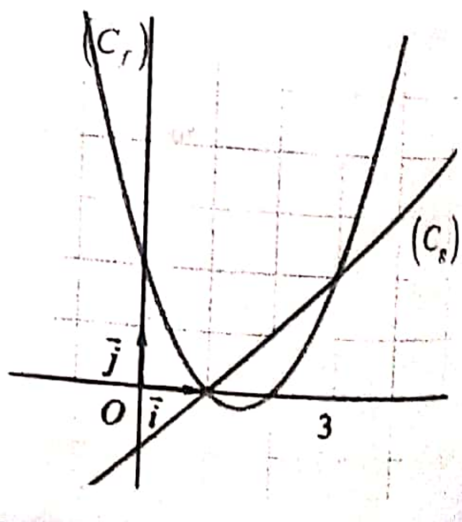
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)-g(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

On a $(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	+	0 −	0 +	
position de (C_g) par rapport à (C_f)	(C_f) est au-dessus de (C_g)	(C_g) est au-dessous de (C_f)	(C_f) est au-dessus de (C_g)	

<u>En résumé :</u>

- $f \geq g$ sur la réunion des intervalles $[3;+\infty[$ et $]-\infty;1]$
- $f \leq g$ sur l'intervalle $[1;3]$.



Applications

Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=x^2-2x+4$ et $g(x)=x^2-1$

2. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ et $g(x)=x+1$

2 FONCTION MAJORÉE ; MINORÉE ET BORNÉE

Définition

Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall x\in D_f)\ f(x)\leq M$.
  Le nombre M est dit un majorant de la fonction f.
- On dit que la fonction f est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall x\in D_f)\ f(x)\geq m$.
  Le nombre m est dit un minorant de la fonction f.
- On dit que la fonction f est bornée si elle à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe deux réels m et M tels que : $(\forall x\in D_f)\ \ m\leq f(x)\leq M$.

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$

Montrons que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par le nombre 3 :

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $3-f(x)=3-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{3\sqrt{x}+3-2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

Puisque $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\geq 0$, alors $f(x)\leq 3$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$. Ainsi, f est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par le nombre 3.

Montrons que la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}^+$ par le nombre 2 :

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)-2=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}-2=\dfrac{2\sqrt{x}+3-2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\geq 0$, alors $f(x)\geq 2$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$. Ainsi, f est minorée sur $\mathbb{R}^+$ par le nombre 2.

Enfin, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ car elle est à la fois majorée et minorée.

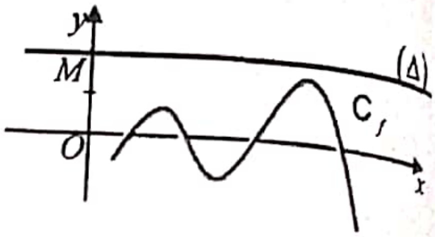
2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=3\cos^2 x-5\sin x+1$

Montrons que la fonction g est bornée :

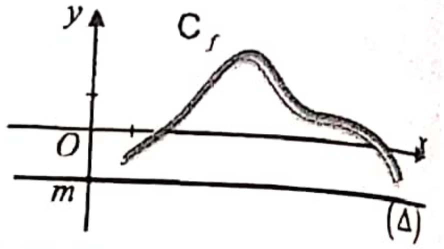
On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $0\leq\cos^2 x\leq 1$ et $-5\leq -5\sin x\leq 5$; donc : $-5\leq 3\cos^2 x-5\sin x\leq 8$, ce qui entraine que : $-4\leq g(x)\leq 9$. Par suite, la fonction g est bornée par -4 et 9.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

1) Dire que la fonction f est majorée par M sur D_f signifie que sa courbe représentative C_f est en-dessous de la droite (Δ) d'équation $y = M$.



2) Dire que la fonction f est minorée par m sur D_f signifie que sa courbe représentative C_f est au-dessus de la droite (Δ) d'équation $y = m$.



Proposition

Soient f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.

Pour que la fonction f soit bornée, il faut et il suffit que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+); (\forall x \in D_f)\ |f(x)| \leq \alpha$.

Exemples

1) On sait que la fonction **cosinus** est bornée car on a : $\forall x \in \mathbb{R} ; |\cos(x)| \leq 1$.

2) De même pour la fonction **sinus** parce qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R} ; |\sin(x)| \leq 1$.

3) **Attention** : La fonction tangente n'est pas bornée. (ni majorée et ni minorée : on peut voir cela à partir du cercle trigonométrique))

Applications

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$.

   a) Montrer que la fonction f est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

   b) Montrer que la fonction f est minorée par $\dfrac{1}{2}$.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{5x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

   a) Montrer que la fonction g est majorée par 5 sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire que la fonction g est minorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2\cos(2x) - 5\sin(x) + 3$

   Montrer que la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}$.

3 EXTREMUMS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Définition

Soient f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $x_0 \in D_f$.

- On dit que $f(x_0)$ est la valeur maximale absolue (ou le maximum absolu) de la fonction f si :

$$(\forall x \in D_f)\ f(x) \leq f(x_0).$$

- On dit que $f(x_0)$ est une valeur maximale relative de la fonction f sur l' intervalle I inclus dans D_f

S'il existe x_0 de I tel que : $(\forall x \in I)\ f(x) \leq f(x_0)$

- On dit que $f(x_0)$ est la valeur minimale absolue (ou le minimum absolu) de la fonction f si :

$$(\forall x \in D_f)\ f(x) \geq f(x_0).$$

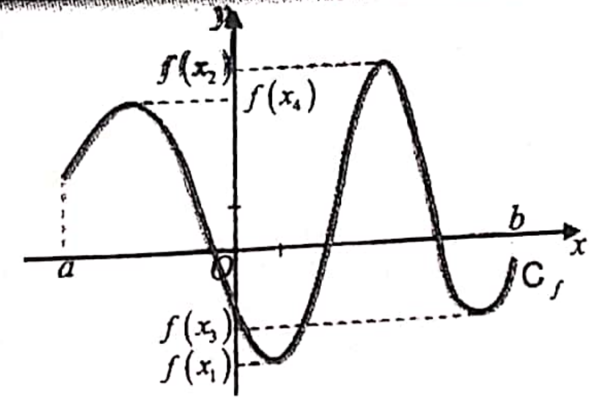
- On dit que $f(x_0)$ est une valeur minimale relative de la fonction f sur l' intervalle J inclus dans D_f

S'il existe x_0 de J tel que : $(\forall x \in J)\ f(x) \geq f(x_0)$.

- Les valeurs minimales et maximales de la fonction f sont appelées les extremums de f.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ représentée par la figure ci-contre.



- $f(x_1)$ est la valeur minimale absolue de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_2)$ est la valeur maximale absolue de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_3)$ est une valeur minimale relative de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_4)$ est une valeur maximale relative de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.

Exemple

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $3 - f(x) = 3 - (-x^2 + 2x + 2) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

Puisque $(x+1)^2 \geq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \leq 3$. Comme $f(1) = 3$, alors : $f(x) \leq f(1)$.

Ainsi, la fonction f admet un maximum absolu en 1 qui est $f(1) = 3$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + 7 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Puisque $(x-3)^2 \geq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq -7$. Comme $f(3) = -7$, alors : $f(x) \geq f(3)$.

Ainsi, la fonction f admet un minimum absolu en 3 qui est $f(3)=-7$.

Remarques importantes

- Ne jamais confondre minorant et minimum d'une fonction. Le minimum d'une fonction est un minorant qui admet un antécédent. Autrement dit, le réel m est une valeur minimale de f sur I si, et seulement si : $\begin{cases}(\forall x \in I) \quad f(x) \geq m \\ (\exists x_0 \in I);\ f(x_0)=m\end{cases}$
- Ne jamais confondre majorant et maximum d'une fonction. Le maximum d'une fonction est un majorant qui admet un antécédent. Autrement dit, le réel M est une valeur maximale de f sur I si, et seulement si : $\begin{cases}(\forall x \in I) \quad f(x) \leq M \\ (\exists x_0 \in I);\ f(x_0)=M\end{cases}$

Applications

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$: $f(x)=2x^2+4x+5$.
   Montrer que 3 est la valeur minimale absolue de la fonction f.
2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$: $f(x)=-2x^2+12x-9$.
   Montrer que 9 est la valeur maximale absolue de la fonction g.

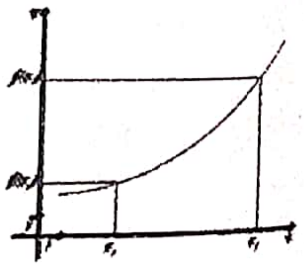
4 MONOTONIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE (Rappel)

4.1. SENS DE VARIATIONS D'UNE FONCTION

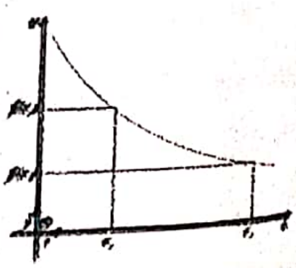
Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est croissante sur I si :
  $$(\forall (x_1;x_2) \in I^2) \quad (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$
- On dit que la fonction f est strictement croissante sur I si :
  $$(\forall (x_1;x_2) \in I^2) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$



- On dit que la fonction f est décroissante sur I si :
  $$(\forall (x_1;x_2) \in I^2) \quad (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$
- On dit que la fonction f est strictement décroissante sur I si :
  $$(\forall (x_1;x_2) \in I^2) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$



Propriétés

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I, x_1 et x_2 deux éléments distincts de I.

Le nombre $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ est appelé le taux de variation (ou d'accroissement) de la fonction f entre x_1 et x_2. De plus, on a les propriétés suivantes :

- f est croissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)\geq 0$.
- f est strictement croissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)> 0$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)\leq 0$.
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)< 0$.

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x+1$.

- Étudions la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R}$. On a :

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(3x_1+1)-(3x_2+1)}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}=3.$$

Par conséquent : $T(x_1;x_2)=3<0$. Donc la fonction numérique f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

2) Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$: $f(x)=x^2-2x+2$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty;1]$ et $[1;+\infty[$:

Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{R}$

On a : $T=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{(a^2-2a+2)-(b^2-2b+2)}{a-b}=\dfrac{(a-b)(a+b+2)}{(a-b)}=a+b-2.$

- Monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$:

Puisque $a\geq 1$ *et* $b\geq 1$ alors $a+b\geq 2$. Donc on a : $T=a+b-2\geq 0$.

Et par conséquent la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

- Monotonie de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;1]$:

Puisque $a \leq 1$ *et* $b \leq 1$ alors $a+b \leq 2$. Donc on a : $T = a+b-2 \leq 0$.

Et par conséquent la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$

• Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Applications

Étudier les variations de la fonction numérique f sur les intervalles I et J dans les deux cas suivants

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$; $I =]2;+\infty[$ et $J =]-\infty;2[$.

2. $f(x) = -2x^2+4x+1$; $I =]-\infty;1]$ et $[1;+\infty[$.

4.2. MONOTONIE ET PARITÉ

Propriétés

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$).

Pour tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^+ \cap D_f$, on pose : $I' = \{-x / x \in I\}$. Alors :

• Si la fonction f est paire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont opposés.

• Si la fonction f est impaire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont identiques.

Exemple

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2+1$.

On montre facilement que la fonction g est croissante sur croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque g est paire, alors elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^3+3x$.
   a) Vérifier que la fonction f est impaire.
   b) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   c) En déduire la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^-$.
   d)dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2-2|x|$.
   a) Montrer que la fonction g est paire.
   b) Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0;1]$ est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   c) En déduire la monotonie de la fonction g sur chacun des intervalles $[-1;0]$ et $I =]-\infty;-1]$.

5 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE FONCTIONS USUELLES

5.1. LA FONCTION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ – PARABOLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

- Tableaux de variations :

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

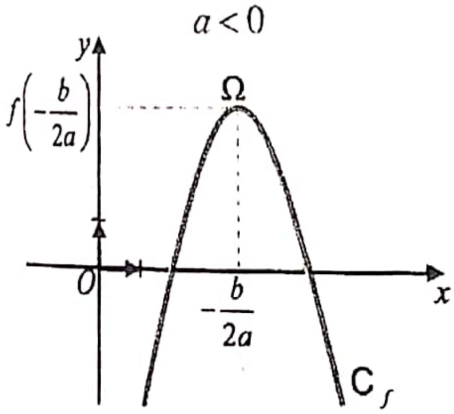
$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur minimale absolue de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

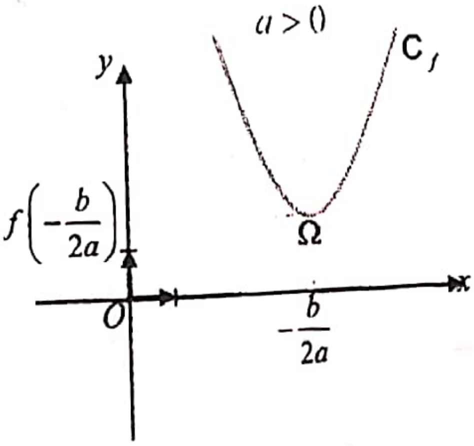
$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur maximale absolue de la fonction f sur $\mathbb{R}$

- Courbes représentatives :





(C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

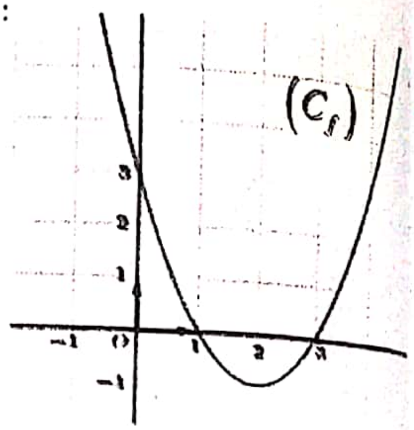
La courbe (C_f) de f est une parabole de sommet $\Omega(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$.

- Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

• Tableau de quelques valeurs de $f(x)$ et construction de (C_f) :

x	0	1	2
$f(x)$	3	0	−1



Applications

Dressez le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative : $f(x) = -2x^2 + 4x$; $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

5.2. LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE – HYPERBOLE

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ **où a, b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On pose :** $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

✚ Tableaux de variations :

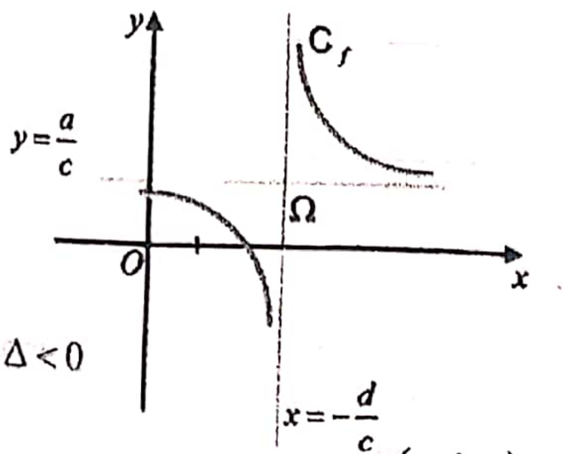
$\Delta > 0$

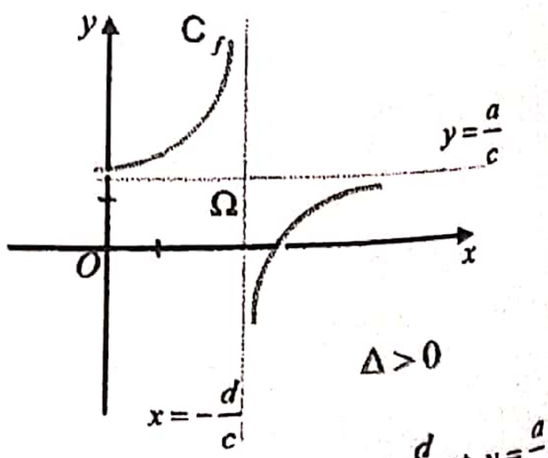
x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

✚ Courbes représentatives :





(C_f) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\frac{d}{c}$ **et** $y = \frac{a}{c}$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

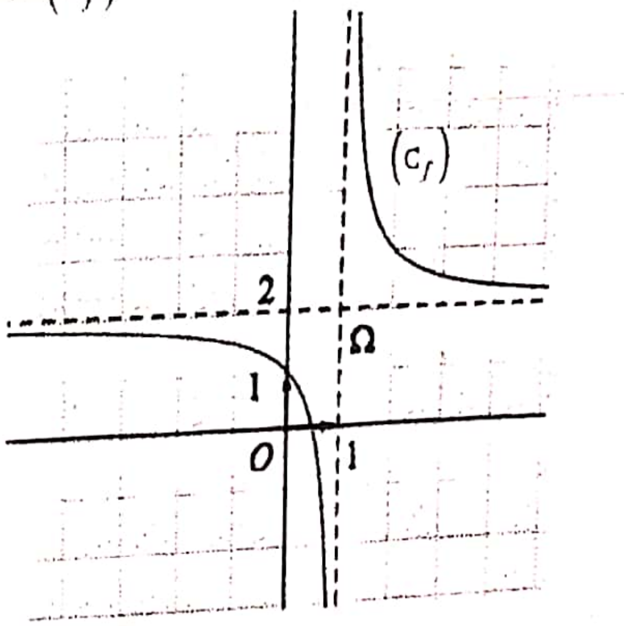
La courbe (C_f) de f est une hyperbole de centre $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations cartésiennes $x=1$ et $y=2$.

• Tableau de variations de la fonction f : (Ici $\Delta=-1$ et $\Delta<0$)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

• Tableau de quelques valeurs de $f(x)$ et construction de (C_f) :

x	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$f(x)$	1	0	3	$\frac{5}{2}$



Applications

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$f(x)=\dfrac{x}{x-2}$; $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; $h(x)=2-\dfrac{1}{x}$

5.3. LA FONCTION $x \longmapsto ax^3$ $(a \neq 0)$:

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^3$ où a est un réel non nul.

- Tableaux de variations :

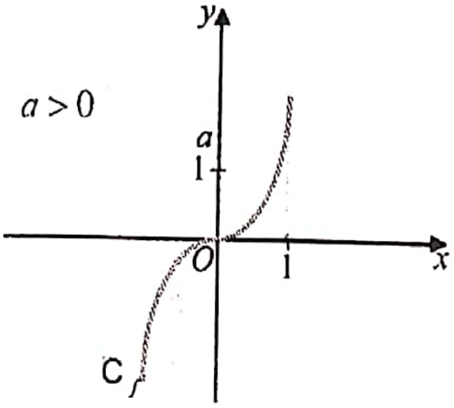
$a>0$

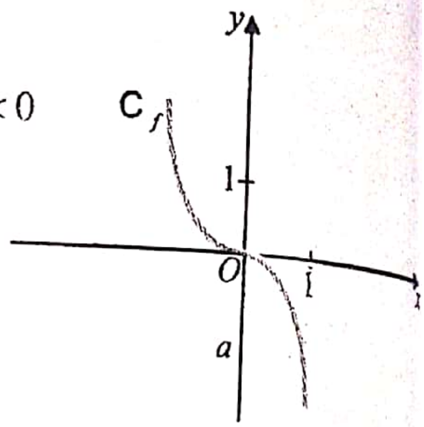
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

$a<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

+ Courbes représentatives :





La fonction $f: x \mapsto ax^3$ est impaire et sa courbe C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La courbe C_f passe aussi par le point de coordonnées $(1;a)$ car : $f(1)=a$.

Applications

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative

$f(x)=x^3$; $g(x)=-2x^3$; $h(x)=2x^2|x|$.

5.4. LA FONCTION $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ $(a \in \mathbb{R})$:

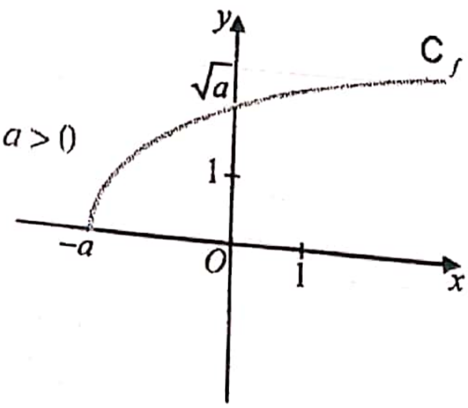
Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+a}$ où a est un nombre réel.

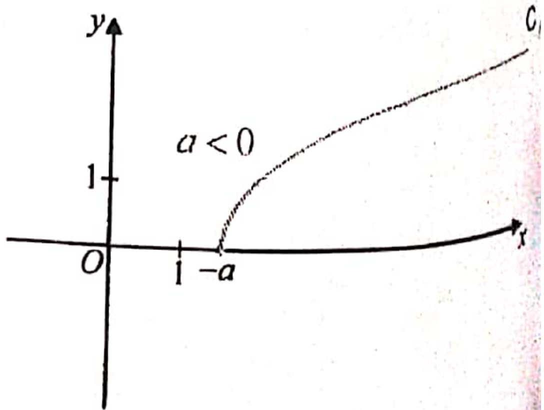
La fonction f est définie et strictement croissante sur l'intervalle $[-a;+\infty[$.

+ Tableau de variations :

x	$-a$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

+ Courbes représentatives :





Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x-1}$.

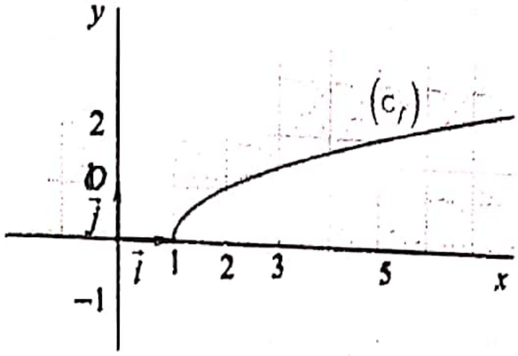
L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=[1;+\infty[$.

- Tableau de variations de la fonction f :

x	1	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	

- Tableau de quelques valeurs de $f(x)$ et construction de (C_f) :

x	1	2	3	5
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2



Application

On considère la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x-2}$.

1.Dresser le tableau des variations de g

2.Traer la courbe représentative (C_g).

6 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

6.1. DEFINITION DE LA COMPOSEE

Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur deux ensembles I et J tels que : $f(I)\subset J$.
La fonction numérique h définie sur I par :

$$h(x)=g(f(x))$$

est appelée composée des fonctions f et g dans cet ordre.
Elle est notée $g\circ f$ (se lit : g rond f).
On a alors : $(\forall x\in I)\ g\circ f(x)=g(f(x))$.

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$
$$g\circ f(x)$$

Exemples

Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-3x$ et $g(x)=2x+1$

Déterminons $g\circ f$ et $f\circ g$:

Pulsque les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, alors il en est de même pour $g\circ f$ et $f\circ g$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g o f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3x) = 2(x^2 - 3x) + 1 = 2x^2 - 6x + 1$$

De même : $f o g(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 3(2x+1) = 4x^2 - 2x - 2$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g o f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ et $f o g(x) = 4x^2 - 2x - 2$

On remarque bien que : $g o f \neq f o g$.

Remarques

- La condition $f(I) \subset J$ dans la définition est fondamentale, sans laquelle on ne peut parler de $g o f$
- On n'a pas en général : $g o f = f o g$.
- On a : $D_{g o f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$ et $D_{f o g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$

Applications

Définir les fonctions $f o g$ et $g o f$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$; b) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{x}{x-4}$; d) $f(x) = x^3$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

6.2. MONOTONIE DE LA COMPOSEE

Propriétés

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J tels que : $f(I) \subset J$.

- Si f est croissante sur I et g est croissante sur $f(I)$, alors $g o f$ est croissante sur l'intervalle I.
- Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur $f(I)$, alors $g o f$ est croissante sur l'interva
- Si f est croissante sur I g est décroissante sur $f(I)$, alors $g o f$ est décroissante sur l'intervalle I
- Si f est décroissante sur I g est croissante sur $f(I)$, alors $g o f$ est décroissante sur l'intervalle I.

Exemples

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur $]-\infty; 0]$ et $[2; +\infty[$:

En posant : $u(x) = x^2 - 2x$ et $v(x) = \sqrt{x}$, on obtient :

$f(x) = v(u(x)) = v o u(x)$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$u(x)$	$\searrow$	0	2	0	$\nearrow$

✓ Monotonie de f sur l'intervalle $]-\infty; 0]$:

- La fonction u est <u>décroissante</u> sur $]-\infty;0]$;
- $u(]-\infty;0]) \subset [0;+\infty[$ car 0 est une valeur minimale sur de f sur $]-\infty;0]$ (voir le tableau des variations).
- La fonction v est <u>croissante</u> sur $[0;+\infty[$. (v est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

Il s'ensuit donc que $f = v o u$ est <u>décroissante</u> sur $]-\infty;0]$. (D'après la propriété précédente)

✓ Monotonie de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$:

- La fonction u est <u>croissante</u> sur $[2;+\infty[$;
- $u([2;+\infty[) \subset [0;+\infty[$ car 0 est une valeur minimal de f sur $[2;+\infty[$
- La fonction v est <u>croissante</u> <u>sur</u> $[0;+\infty[$.

Il s'ensuit donc que $f = v o u$ est <u>croissante</u> sur $[2;+\infty[$.(D'après la propriété précédente)

Applications

1. En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonctions, étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ et $I=\mathbb{R}^+$; b) $f(x)=2x-4\sqrt{x}$ et $I=[0;1]$; c) $f(x)=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$ et $I=]1;+\infty[$

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2x+2}$.

a) On considère les fonctions numériques u et v définies par : $u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$.

b) Donner le tableau de variations de chacune des fonctions u et v.

c) En utilisant les variations des fonctions u et v, étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$. (Vérifier d'abord $f(x)=v(u(x))=vou(x))$.

FONCTION PÉRIODIQUE

Définition

Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$:

$$(x+T)\in D_f \quad \text{et} \quad (x-T)\in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T)=f(x)$$

Le nombre réel T est appelé alors une période de f et c'est la plus petite période strictement positive de la fonction f (lorsqu'elle existe) est appelée la période de la fonction f.

Exemples

1) Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π car :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin x$$

2) La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π, car $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in$

Applications

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \tan(2x)$ est périodique et donner sa période.
2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \cos^2 x$; $f_2 : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$; $f_3 : x \mapsto \sin(3x) + \cos(2x)$;

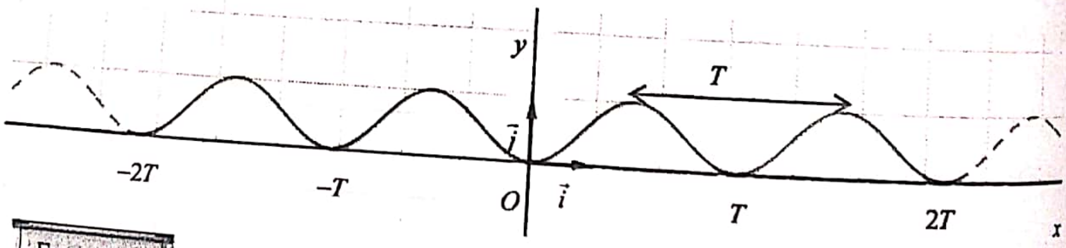
Propriétés

Soient f une fonction périodique de période T et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, le nombre kT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe de (C_f) est invariante par toute translation de vecteur $kT.\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle De $\mathbb{R}$ de longueur T. (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0,T[$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$).

ILLUSTRATION :



Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - 2\sin(2x)$.

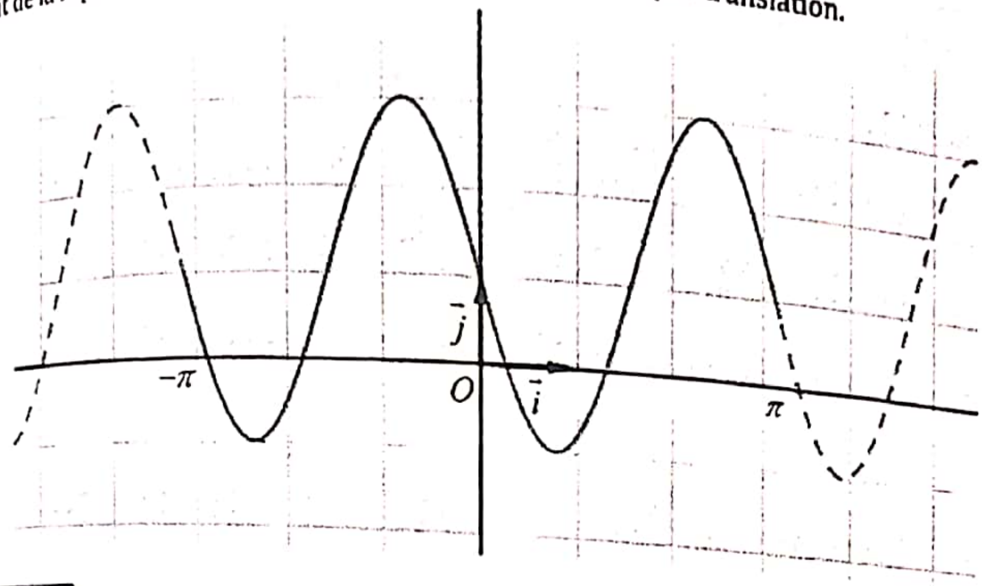
- Montrons que f est périodique de période π : On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x+\pi) = 1 - 2\sin(2(x+\pi))$$
$$= 1 - 2\sin(2x+2\pi)$$
$$= 1 - 2\sin(2x) = f(x).$$

D'où le résultat.

• Représentons la courbe sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

Il suffit de la représenter sur l'intervalle $[0;\pi]$ et compléter par translation.



Applications

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de périodique $T=2$ et telle que :

$$(\forall x\in[0;2])\ f(x)=x-1$$

a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $I=[-4;6]$.

b) Calculer : $f(9)$; $f(-8,5)$ et $f(2020)$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de périodique $T=2\pi$ et telle que :

$$\begin{cases} f(x)=x\ ;0<x\leq\pi \\ f(x)=0\ ;\ \pi<x\leq 2\pi \end{cases}$$

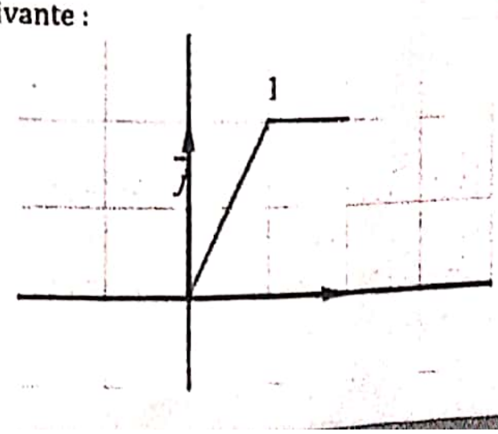
a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $I=[-2\pi;3\pi]$.

b) Calculer : $f(3\pi)$; $f\left(\dfrac{-25\pi}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{2019\pi}{4}\right)$

3. Soit f la fonction numérique définie sur $[-5;5]$, paire et périodique de périodique $T=2$ et dont la représentation graphique sur l'intervalle $I=[0;1]$ est la suivante :

a) Compléter la représenter graphiquement la fonction f.

b) Calculer : $f(4)$; $f(-3)$ et $f\left(\dfrac{7}{2}\right)$.



A PARABOLE ET HYPERBOLE

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

On désigne respectivement par (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.

2) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

3) a) Construire les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère.

b) En déduire l'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = g(x)$.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$.

SOLUTION

1) Tableau de variations de la fonction f :

En posant : $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$, on obtient : $-\frac{b}{2a} = -2$ et $f(-2) = -1$.

Le tableau de variations de la fonction f est donc :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

Tableau de variations de la fonction g :

L'ensemble de définition de g est : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$. De plus, on a : $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$.

Le tableau de variations de la fonction g est donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

2) a) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses :

Il s'agit alors de résoudre le système suivant : $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

On a les équivalences suivantes :

$\begin{cases} y=0 \\ y=f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2+4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \text{ ou } x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases} \right)$

Par suite, les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A(-1;0)$ et $B(-3;0)$.

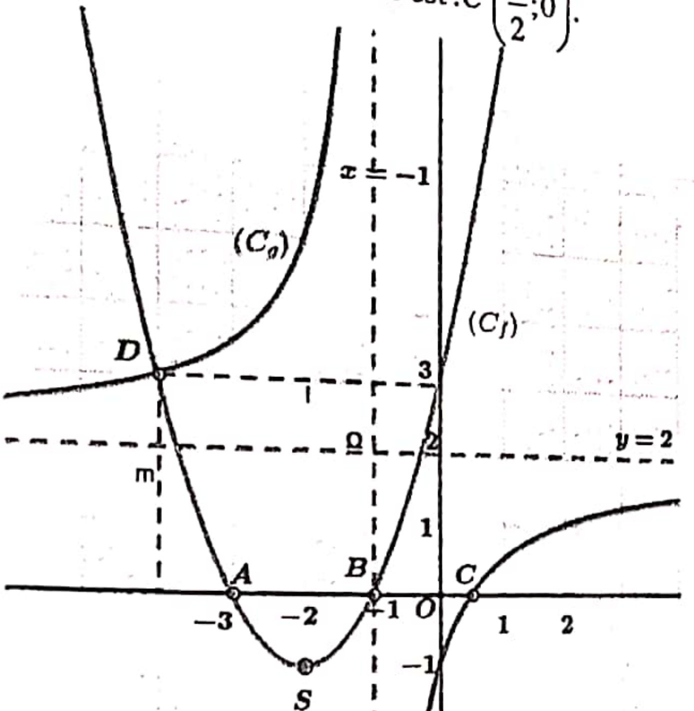
b) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

Il s'agit alors de résoudre le système suivant : $\begin{cases} y=0 \\ y=g(x) \end{cases}$

On a les équivalences suivantes : $\begin{cases} y=0 \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{2x-1}{x+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Par suite, le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

3) a) Construction des courbes C_f et C_g :



- La courbe (C_f) est une parabole de sommet $S(-2;-1)$ et d'axe la droite d'équation : $x=-2$.
- La courbe (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-1$ et $y=2$.

b) Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (Cg).

Comme $(C_f)\cap(Cg)=\{D(-4;3)\}$, alors l'ensemble de solution de l'équation $f(x)=g(x)$ est : $S_1=\{-4\}$.

c) Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe (C_f) situés sur la courbe (Cg) ou au-dessus d'elle. Par suite, l'ensemble solution demandé est : $S_2=]-\infty;-4]\cup]-1;+\infty[$.

- Il faut bien connaître les tableaux de variations et les caractéristiques des graphes des fonctions usuelles vues dans le cours.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés sur la courbe (C_g) ou en-dessous d'elle.
- Pour déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=g(x)$, on détermine le nombre de points d'intersection entre les courbes (C_f) et (C_g).

B MAJORATION ET MINORATION D'UNE FONCTION

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$

a) Montrer que la fonction f est minorée par $\dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que la fonction f est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

2) On considère la fonction numérique g définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g

b) Montrer que la fonction g est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) En déduire que la fonction g est bornée sur D_g

SOLUTION

1) On a pour tout réel x , $x^2+1\neq 0$. Donc $D_f=\mathbb{R}$

a) Montrons que la fonction f est minorée par $\dfrac{1}{2}$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$

Or : $(\forall x\in\mathbb{R});(x+1)^2\geq 0$ et $2(x^2+1)>0$, donc $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)-\dfrac{1}{2}\geq 0$

D'où $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)\geq\dfrac{1}{2}$. Ainsi, la fonction f est minorée par $\dfrac{1}{2}$.

b) Montrons que la fonction f est majorée par $\dfrac{3}{2}$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-\frac{3}{2}=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{3}{2}=\frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}$$

Or : $(\forall x\in\mathbb{R});-(x-1)^2\leq 0$ et $2(x^2+1)>0$, donc $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)-\dfrac{3}{2}\leq 0$

D'où $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)\leq\dfrac{3}{2}$. Ainsi, la fonction f est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

2) a) Déterminons D_g :

On a $x\in D_g \Leftrightarrow x+1\geq 0$ et $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in[-1;1[\cup]1;+\infty[$

Donc $D_g = [-1;1[\cup]1;+\infty[$

b) Montrons que la fonction g est majorée par $\dfrac{3}{2}$:

- Pour simplifier : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$

- Pour tout $x \in D_g$, on a $f(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2x+2}}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

Or pour tout $x \in D_g$, $-\sqrt{2x+2} \leq 0$ et $2(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}) > 0$

D'où $(\forall x \in D_g) g(x) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $(\forall x \in D_g)$, $g(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq 0$. Ainsi, la fonction f est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) On a $(\forall x \in D_g)$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} > 0$. Donc g est minorée par 0,

et d'après b) g est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D'où g est bornée sur D_g

- Pour montrer qu'une fonction f est majorée par un réel M sur un ensemble D, il suffit de montrer qu'on a pour tout $x \in D : f(x) \leq M$. Pour se faire, on utilise souvent les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{R}$, par exemple :

  - Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$: $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$.
  - Les relations entre ordre et opérations.
  - Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ (identités remarquables, conjugués, factorisation,....).
  - L'inégalité triangulaire : $||a|-|b|| \leq |a-b|$ et $|a+b| \leq |a|+|b|$.
  - Les inégalités suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

$$|\cos x| \leq 1 \quad ; \quad |\sin x| \leq 1 \quad ; \quad -|x| \leq x \leq |x|.$$

  - L'inégalité suivante : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ où a et b deux réels positifs.
  - etc.

La même remarque vaut pour montrer que f est minorée par un réel m sur D : $(\forall x \in D)$ $f(x) \geq m$.

- Pour montrer que la fonction f est bornée sur un ensemble D, on peut montrer soit qu'elle est à la fois majorée et minorée sur D, soit trouver un réel positif S tel que : $(\forall x \in D)$ $|f(x)| \leq S$.
- On peut parfois étudier les variations de la fonction f sur un intervalle I pour déduire un majorant ou un minorant de cette fonction sur cet intervalle.

C EXTREMUMS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

a) Montrer que 1 est un minimum absolu de f.

b) Montrer que $\dfrac{7}{3}$ est un maximum absolu de f.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x^2+2}$

a) Montrer que f est minorée par le nombre -1. Le nombre -1 est-il le minimum absolu de f ?

b) Montrer que f est majorée par le nombre 2. Le nombre 2 est-il le maximum absolu de f ?

SOLUTION

1) Déterminons D_f

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+3x+3\neq 0$, le discriminant $\Delta=-3\leq 0$ donc $(\forall x\in\mathbb{R}),\ x^2+3x+3\neq 0$

D'où $D_f=\mathbb{R}$

a) Montrons que 1 est un minimum absolu de f

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-1=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+3x+4}$.

Or : $(\forall x\in\mathbb{R});(x+2)^2\geq 0$ et $x^2+3x+4>0$ (car $\Delta<0$), donc $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)-1\geq 0$

Ainsi, la fonction f est minorée par 1, de plus On a $f(x)=1\Leftrightarrow x=-2$

D'où $1=f(2)$ est un minimum absolu de f

b) Montrons que $\dfrac{7}{3}$ est un maximum absolu de f

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-\dfrac{7}{3}=\dfrac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}$.

Or : $(\forall x\in\mathbb{R});-x^2\leq 0$ et $x^2+3x+3>0$ (car $\Delta<0$), donc $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)-\dfrac{7}{3}\leq 0$

Ainsi, la fonction f est majorée par $\dfrac{7}{3}$, de plus On a $f(x)=\dfrac{7}{3}\Leftrightarrow x=0$

D'où $\dfrac{7}{3}=f(0)$ est un maximum absolu de f

2) $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x^2+2}$

a) Montrer que f est minorée par le nombre -1.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)+1=\dfrac{3x^2}{x^2+2}$.

Or : $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 0$ et $x^2+3>0$, donc $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)+1\geq 0$

Ainsi, la fonction f est minorée par -1,

Le nombre -1 est-il le minimum absolu de f ?

On a $f(x)=-1 \Leftrightarrow x=0$

D'où $-1=f(0)$ est un minimum absolu de f

b) Montrer que f est majorée par le nombre 2.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)-2=\dfrac{-4}{x^2+2}$.

Or : $(\forall x\in\mathbb{R});-4<0$ et $x^2+2>0$, donc $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)-2<0$

Ainsi, la fonction f est majorée par 2,

Le nombre 2 est-il le maximum absolu de f ?

On a $f(x)=2 \Leftrightarrow 4=0$ ce qu'est impossible.

D'où 2 ne peut pas être un maximum absolu de f

D COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

On considère les deux fonctions numériques g et h définies par : $h(x)=x^2+2$ et $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

1) Dresser les tableaux de variations des fonctions g et h .

2) Étudier le signe de la fonction g .

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=h\circ g(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur les intervalles : $]1;+\infty[$ et $\left[-\dfrac{3}{2};1\right[$ et $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$

SOLUTION

1) Tableau de variations de la fonction g :

L'ensemble de définition de g est : $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$. De plus, on a : $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5<0$.

Le tableau de variations de la fonction g est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

Tableau de variations de la fonction h :

En posant : $a=1$, $b=0$ et $c=2$, on obtient : $-\dfrac{b}{2a}=0$ et $f(0)=2$.

Le tableau de variationde la fonction f est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2) Signe de la fonction g sur son ensemble de définition :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

3) a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=h o g(x)$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$:

$$h o g(x)=h(g(x))=(g(x))^2+2=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2+2=\frac{4x^2+12x+9+2x^2-4x+2}{(x-1)^2}$$

Par conséquent : $h o g(x)=\dfrac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}=f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=h o g(x)$.

b) Variations de la fonction f sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$:

- La fonction g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et $g\left(\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\right) \subset \mathbb{R}^+$;
- La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite, la fonction $f=h o g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$.

Variations de la fonction f sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$:

- La fonction g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et $g\left(\left[-\frac{3}{2};1\right[\right) \subset \mathbb{R}^-$;
- La fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Par suite, la fonction $f = h o g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$.

Variations de la fonction f sur $[1;+\infty[$:

- La fonction g est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $g([1;+\infty[) \subset \mathbb{R}^+$;
- La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite, la fonction $f = h o g$ est décroissante sur $[1;+\infty[$.

- Pour déterminer, graphiquement, l'image d'un intervalle I, par une fonction numérique f on suit les étapes suivantes :
  - Déterminer une partie C_1 de sa courbe représentative C_f (dans le cas où $I \subset D_f$) qui correspond à l'intervalle I ;
  - Déterminer le projeté de C_1 sur l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses ; ce projeté détermine une partie $J \subset \mathbb{R}$ (représentée sur l'axe des ordonnées).

  La partie J est l'image de l'intervalle I par la fonction f.
- Pour étudier la monotonie de la fonction $g o f$ sur un intervalle I, on suit les étapes suivantes :
  - On détermine la monotonie de la fonction f sur I ;
  - On détermine la monotonie de la fonction g sur $J = f(I)$;
  - On utilise la règle suivante :
    - ✓ Si f et g ont la même monotonie respectivement sur I et J, alors la fonction $g o f$ est croissante sur l'intervalle I,
    - ✓ Si f et g ont des sens de monotonie contraires respectivement sur I et J, alors la fonction $g o f$ est décroissante sur l'intervalle I.
- Voici quelques erreurs classiques auxquelles il convient de prêter plus de soin et d'attention :
  - Confondre f qui est une fonction et $f(x)$ qui est un élément de l'ensemble d'arrivée.
  - Toute fonction est soit croissante, soit décroissante.
  - Une fonction périodique admet une seule période.
  - Confondre un maximum et un majorant (ou un minimum et un minorant).

EXERCICES D'APPLICATION

ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION

EXERCICE 01

Vérifier que la fonction f est bien définie sur l'intervalle I donné dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3-2x^2+1$; $I=\mathbb{R}$.
2) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$; $I=]-\infty;1[$.
3) $f(x)=x+\sqrt{2x-4}$; $I=[2;+\infty[$.
4) $f(x)=x+\sin x$; $I=\mathbb{R}$.
5) $f(x)=\sqrt{3-|x|}$; $I=[-3;3]$.

EXERCICE 02

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=2x^2+x-3$; 2) $f(x)=\dfrac{3x}{2x-4}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-2x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|-3}$

5) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-2}$; 6) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

7) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-2}$; 8) $f(x)=\sqrt{2|x|-4}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$; 10) $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$

11) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x}{\sqrt{4-2x}}$; 12) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-1}$.

EXERCICE 03

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-2} \; ; \; x\geq 2 \\ f(x)=\dfrac{x}{x-2} \; ; \; x<2 \end{cases}$$

PARITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 04

Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3-3x$; 2) $f(x)=x^4-2x$

3) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|-1}$

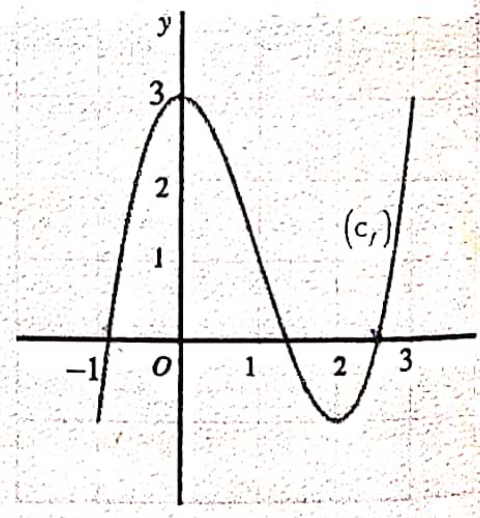
5) $f(x)=x\sin(x)$; 6) $f(x)=x^3-\tan x$

7) $f(x)=x^2+3|x|$; 8) $f(x)=x\cos x$

COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

EXERCICE 05

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur un intervalle.

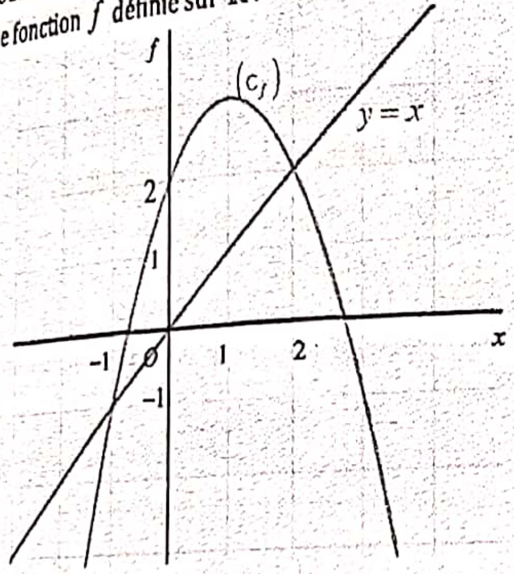


À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f
2) Établir le tableau du signe de f.
3) Quelles sont les images des réels -1 et 0 ?
4) Quels sont les antécédents de 3 ?
5) Donner le tableau des variations de la fonction f

EXERCICE 06

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x)=x$.

2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $f(x)\geq x$; b) $f(x)<x$

3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 07

Étudier le signe de la fonction f dans chacun des cas suivants sur son domaine de définition :

1) $f(x)=6x^2-x-1$; 2) $f(x)=\dfrac{2x-6}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$; 4) $f(x)=x\sqrt{x}(2x-1)$.

5) $f(x)=x(1+\sin x)$; 6) $f(x)=\dfrac{\cos^2(x)}{\sqrt{x}-1}$.

EXERCICE 08

Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :

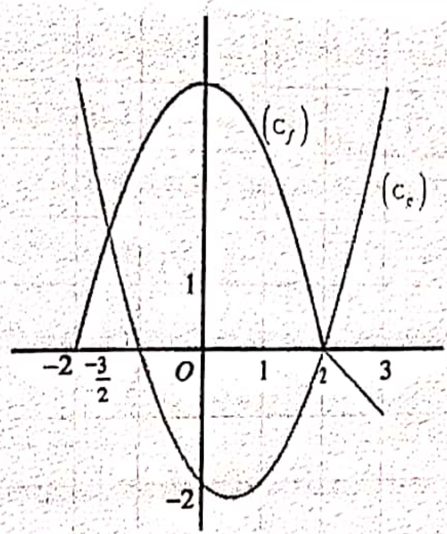
1) $f(x)=2x^2-2x+1$; 2) $g(x)=2x-1$

3) $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+1}$; 4) $g(x)=2x-3$

5) $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x+1}$; 6) $g(x)=3x^2+1$.

EXERCICE 09

Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



1) a) Comparer les fonctions f et g sur $[-2;3]$.

b) En déduire les solutions dans $[-2;3]$ de l'inéquation : $f(x)>g(x)$.

2) Déterminer le signe de chacune des fonctions f et g

3) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.

FONCTION MAJORÉE – MINORÉE - BORNÉE

EXERCICE 10

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^2-6x+5$$

Montrer que la fonction f est minorée par 2.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=-2x^2+2x+\frac{5}{2}$$

Montrer que la fonction f est majorée par 3.

3) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x)=\frac{1}{x^2-4x+5}$$

a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g.

b) Montrer que : $(\forall x\in D_g)\ 0<g(x)\leq 1$

EXERCICE 11

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

Montrer que la fonction f est bornée par -2 et 5.

EXERCICE 12

Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{6}{x^2+2} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x\sin x}{x^2+1}$$

1) Montrer que la fonction f est bornée par 0 et 3.

2) Montrer que g sont bornées sur $\mathbb{R}$.

EXTREMA D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 13

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=5x^2+10x+7$$

Montrer que 2 est la valeur minimale absolue de f.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=-2x^2+4x+5$$

Montrer que 7 est la valeur maximale absolue de g.

3) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$$

Montrer que $h(2)$ est la valeur minimale absolue de h

EXERCICE 14

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

1) Montrer que $f(1)$ est la valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

2) a) Vérifier que la fonction f est impaire.

b) En déduire la valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$.

EXERCICE 15

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{4x^2+3}{x^2+2}$$

1) Montrer que f est minorée par le nombre 1

Le nombre 3 est-il le minimum absolu de

2) Montrer que f est majorée par le nombre 4

Le nombre 4 est-il le maximum absolu de

VARIATIONS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 16

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3+2x$$

1) Montrer que pour tout réels x et y :

$$x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

2) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 17

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=2x-\frac{1}{x}$$

1) a) Montrer que pour tout réels x et y :

$$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$$

b) En déduire la monotonie de f sur $]0;+\infty[$

2) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 18

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=x+2\sqrt{x}-3$$

1) a) Montrer que pour tout réels x et y :

$$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$$

b) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$

b) Calculer $f(1)$ en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}^+$

EXERCICE 19

…onsidère le tableau de variations suivant d'une …ction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	-1	↘	

…) Donner les extrema de la fonction f.

…) Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 20

…t f une fonction numérique définie sur l'intervalle …par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

…) Donner les extrema de la fonction f.

…) Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 21

…considère le tableau de variations suivant d'une …nction f définie sur $[-4;5]$:

x	-4		-2				0		3		5
$f(x)$	1	↗	3	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	7

…éterminer le signe de la fonction f définie sur $[-4;5]$

EXERCICE 22

…it f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2}{1+x^2}$$

Étudier la parité de la fonction f.

Montrer que la fonction f admet un maximum absolu au point $x_0=0$.

3) a) Montrer que pour tout réels x et y :

$$x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

b) En déduire la monotonie de f sur $[0;+\infty[$.

4) Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 23

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{2}{x}$$

1) La fonction f est-elle paire ? Impaire ?

1) Montrer que $f(1)$ est la valeur minimale de la Fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) a) Soit a et b deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$.

Montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=a+b-\dfrac{2}{ab}$.

b) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $]0;1]$ et $]-\infty;0[$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

FONCTION TRINÔME – FONCTION HOMOGRAPHIQUE

EXERCICE 24

Dresser le tableau de variations de la fonction f puis tracer sa courbe représentative dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=2x^2-2$; 2) $f(x)=x^2-2x$

3) $f(x)=-x^2+4x-3$; 4) $f(x)=(x-3)^2$.

EXERCICE 25

Dresser le tableau de variations de la fonction f puis tracer sa courbe représentative dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{2x}{2x-1}$.

EXERCICE 26

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-4x+3$$

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère.

b) Tracer la courbe (C_f).

c) Déterminer graphiquement $f([0;2])$.

d) Résoudre graphiquement l' inéquation : $f(x)\geq 0$.

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^2-3|x|+2$$

a) Étudier la parité de la fonction g.

b) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^+ : g(x)=f(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

c) Tracer la courbe (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

d) Résoudre graphiquement l' inéquation : $g(x)\leq 3$.

EXERCICE 27

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x-2}{x-2}$$

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère.

b) Tracer la courbe (C_f).

c) Déterminer graphiquement $f(]2;4])$.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq 0$.

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ ...

$$g(x)=\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|$$

a) Tracer la courbe (C_g) dans le repère $(O;\vec{i}$ ...

b) Dresser le tableau de variations de g.

c) Déterminer selon les valeurs du paramè... le nombre de solutions de l'équation :

$$\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|=m.$$

EXERCICE 28

Soit f et g les fonctions numériques définies ...

$$f(x)=x^2-4x+3 \quad \text{et} \quad g(x)= ...$$

(C_f) et (C_g) les courbes représentatives de ... un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$.

b) Interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=g(...$

b) Interpréter le résultat graphiquement.

3) Tracer les courbes (C_f) et (C_g).

4) En déduire une comparaison des fonctions ...

EXERCICE 29

Soit f et g les fonctions numériques définies ...

$$f(x)=\frac{2x}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2$$

(C_f) et (C_g) les courbes représentatives de ... un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=g(...$

b) Interpréter le résultat graphiquement.

2) Tracer les courbes (C_f) et (C_g).

3) En déduire une comparaison des fonctions ...

COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

EXERCICE 30

Pour chacun des cas suivants, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir déterminé leurs ensembles de définition.

1) $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=x-1$.
2) $f(x)=x^2+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$.
3) $f(x)=(x-1)^2$ et $g(x)=1+\frac{1}{x}$.
4) $f(x)=\frac{2x}{x+2}$ et $g(x)=x^2-2x$.
5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ et $g(x)=x^3$.

EXERCICE 31

Pour chacun des cas suivants, écrire la fonction f sous forme de composée de deux fonctions usuelles :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+2}$; 2) $f(x)=(2x+1)^3$
3) $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$; 4) $f(x)=\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^2$
5) $f(x)=\frac{1}{1+\sin x}$; 6) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

EXERCICE 32

Soit f et f les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x}$$

1) Dresser le tableau de variations de f et D_h.
2) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=f\circ g(x)$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b) Calculer $h(x)$ pour tout $x \in D_h$.

c) En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h sur les intervalles suivantes : $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

EXERCICE 33

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=x^3 \quad \text{et} \quad g(x)=2x^2+4x+1$$

1) Dresser le tableau de variations de f et g.
2) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=f\circ g(x)$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b) Calculer $h(x)$ pour tout $x \in D_h$.

c) En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h sur les intervalles suivantes :

$$]-\infty;-1] \text{ et } [-1;+\infty[$$

FONCTION PÉRIODIQUE

EXERCICE 34

1) Montrer que T est une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\sin(2x)$ et $T=\pi$.

b) $f(x)=\cos(\pi x)$ et $T=2$

b) $f(x)=\frac{1}{1+\sin^2(x)}$ et $T=\pi$

EXERCICE 35

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est périodique de période 1 ;
- Pour tout $x\in[0;1[$: $f(x)=3x$.

1) Représenter graphiquement la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[-6;6]$.
2) Calculer : $f\left(\frac{45}{2}\right)$ et $f\left(\frac{2018}{3}\right)$.
3) Calculer $f(x)$ en fonction de x pour tout $x\in[2018;2019[$.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 36

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

1) a) Montrer que f est minorée par le nombre $-\frac{1}{2}$.

Le nombre $-\frac{1}{2}$ est-il le minimum absolu de f ?

b) Montrer que f est majorée par le nombre $\frac{1}{2}$.

Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il le maximum absolu de f ?

2) Soit a et b deux réels distincts.

a) Montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{1-ab}{(a^2+1)(b^2+1)}$.

b) En déduire les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.

3) Vérifier que la fonction f est impaire.

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 37

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}$$

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.

2) Soit a et b deux réels distincts.

a) Montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{a+b-1}{\sqrt{a^2-a}+\sqrt{b^2-b}}$

b) En déduire les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 38

Les variations de la fonction f sur l'interva[...]
sont données par le tableau suivant :

x	-5	-2	1
$f(x)$	$3 \searrow$	$1 \nearrow$	1

À partir de ce tableau, déterminer les variation[...] fonction g dans chacun des cas suivants :

1) $g(x)=2f(x)+1$; 2) $g(x)=2f(...$

3) $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$; 4) $g(x)=(f(x))...$

5) $g(x)=\sqrt{f(x)}$; 6) $g(x)=(f(x))...$

EXERCICE 39

Soit f et g les fonctions numériques définies pa[...]

$$f(x)=x^2 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{3x}{2x-4}$$

1) a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Étudier le signe de $g(x)$ sur D_g.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) On considère la fonction numérique h défini[...]

$$h(x)=f\circ g(x)$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de [...]

b) Calculer $h(x)$ pour tout $x\in D_h$.

c) Montrer que h admet un minimum absolu au point d'abscisse 0.

d) Etudier les variations de la fonction h sur les intervalles suivantes :

$]-\infty;0]$ et $[0;2[$ et $]2;+\infty[$

4) Dresser le tableau de variations de h sur D_h

EXERCICE 40

Soient f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=x^2+2x+1 \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x+1}$$

(C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

2) Étudier les variations des fonctions f et g.

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g).

b) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$f(x)\le g(x)$$

4) Soit h la fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=x+2+2\sqrt{x+1}$

a) Vérifier que : $h=fog$

b) Étudier les variations de la fonction h.

EXERCICE 41

Soit f et f les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=x^2-2x \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x}$$

1) Étudier les variations des fonctions f et g.

2) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=fog(x)$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b) Calculer $h(x)$ pour tout $x\in D_h$.

3) a) Étudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.

b) Montrer que h admet un minimum absolu au point d'abscisse 1.

4) On considère la fonction numérique k définie par :

$$k(x)=gof(x)$$

a) Déterminer D_k l'ensemble de définition de k.

b) Étudier les variations de la fonction k.

c) Calculer $k(x)$ pour tout $x\in D_k$.

EXERCICE 42

Soit f et f les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x}{x-1}$$

1) Étudier les variations des fonctions f et g.

2) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=fog(x)$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b) Calculer $h(x)$ pour tout $x\in D_h$.

3) a) Étudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$.

b) Comparer $\sqrt{\dfrac{2019}{2018}}$ et $\sqrt{\dfrac{2020}{2019}}$

4) On considère la fonction numérique k définie par :

$$k(x)=gof(x)$$

a) Déterminer D_k l'ensemble de définition de k.

b) Étudier les variations de la fonction k.

c) Calculer $k(x)$ pour tout $x\in D_k$.

EXERCICE 43

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\frac{x-3}{x+3} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2+2x$$

1) Déterminer les variations de f et g.

2) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=fog(x)$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b) Calculer $h(x)$ pour tout $x\in D_h$.

c) Calculer $h(-3)$ et $h(1)$ et interpréter les résultats obtenu graphiquement.

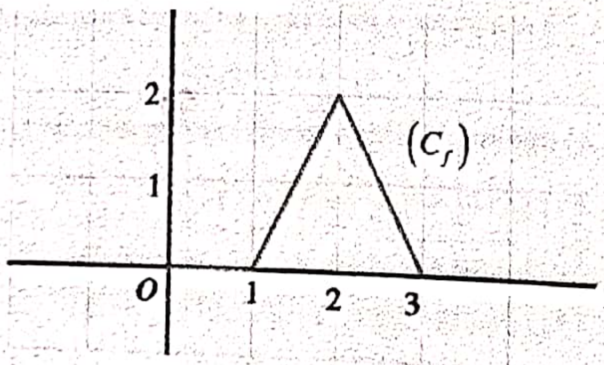
3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $h(x)<1$

b) Étudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $[-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$.

c) En déduire que h est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 44

Compléter la courbe de la fonction f suivante sur l'intervalle sera $[-10;10]$ sachant qu'elle est périodique de période 3.



EXERCICE 45

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=2\left(x+\frac{4}{x}\right)$$

1) Vérifier que la fonction f est impaire.

2) a) Soit a et b deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$.

Montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=2\left(1-\dfrac{4}{ab}\right)$.

b) Étudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $]0;2]$ et $[2;+\infty[$.

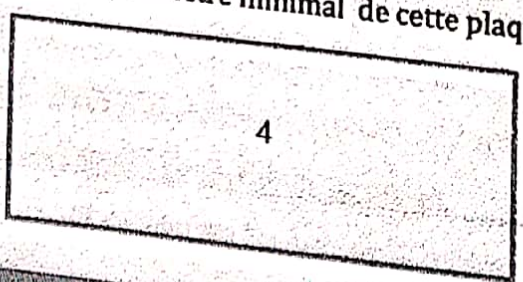
3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

4) Déterminer les extrema de la fonction f.

5) On considère une plaque rectangulaire dont l'air est 4 et la longueur de l'un de ses côté est x $(x>0)$

a) Montrer que le périmètre, de la plaque obtenue est $p(x)$ où : $p(x)=2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$.

b) En déduire le périmètre minimal de cette plaque



EXERCICE 46

On dispose d'une plaque en carton de forme c… dont la longueur du côté est $6\,cm$.

À partir de cette plaque, on réalise une boîte d… forme est un parallélépipède rectangle selon l… signes suivantes :

- On découpe, dans chaque coin de la plaq… carré de côté $x\,dm$;
- Puis, on élève les quatre bords de la pièce… pliant.

1) Montrer que le volume, en dm^3, de la boîte… est $v(x)$ où : $v(x)=4\left(x^3-6x^2+9x\right)$ avec …

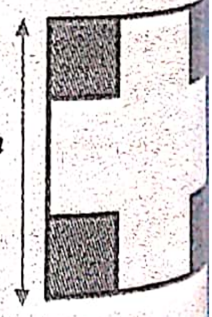
2) Soient x et y deux éléments distincts de l'in… $[0;3]$. Montrer que :

$$\frac{v(x)-v(y)}{x-y}=4\left[\left(x+\frac{1}{2}y-3\right)^2+\frac{3}{4}y(y-\ldots\right.$$

3) a) Donner le tableau de variations de la fonct… définie sur $[0;3]$ par : $f(x)=\frac{3}{4}x(x-4)$…

b) En déduire un encadrement de $\dfrac{v(x)-v(y)}{x-y}$ … chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;3]$.

4) En déduire le tableau de variations de la fonc… sur l'intervalle $[0;3]$.



BARYCENTRE DANS LE PLAN 3

HISTOIRE

Le terme de barycentre est formé sur la racine grecque barus (lourd) pour désigner un centre des poids ou centre d'équilibre. Sa conception est liée au théorème des moments découvert par Archimède au III^e siècle av-J.-C. Il écrit dans son traité sur le centre de gravité de surface plane : « Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré. »

Le barycentre est une notion utilisée dans différents domaines scientifiques :

En statistiques : la notion est utilisée dans le calcul et la représentation des moyennes pondérées.

En physique : la notion de barycentre renvoie à la notion de centre d'inertie ou de centre de masse.

Source : Sites web et livre d'histoire cité à la référence.

ARCHIMÈDE
(287 AV.J.C -212 AV.JC)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser le barycentre pour simplifier une expression vectorielle ;
- Construire le barycentre de n points $(2 \leq n \leq 4)$
- Utiliser le barycentre pour établir l'alignement de trois points d'un plan ;
- Utiliser le barycentre pour établir l'intersection de droites ;
- Utiliser le barycentre pour résoudre des problémes géométriques et physique.

PLAN DU COURS

1 RAPPELS

A) Position d'un point sur une droite et Relations vectorielles :

Soit A, B, C et D les points situés sur la droite (D) muni d'un repère $(A;\overrightarrow{AB})$ comme le montre la figure ci-contre :

1. Montrer que:

a) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$; b) $3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$; c) $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; d) $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}$

2. Construire sur la droite (D) les points E, F, G et K tels que :

a) $\overrightarrow{EB}-2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{FA}+3\overrightarrow{FC}=\vec{0}$; c) $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$; d) $3\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.

3. Déterminer dans chaque cas la valeur du réel k :

a) $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{GC}=k\overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{KD}=k\overrightarrow{DC}$

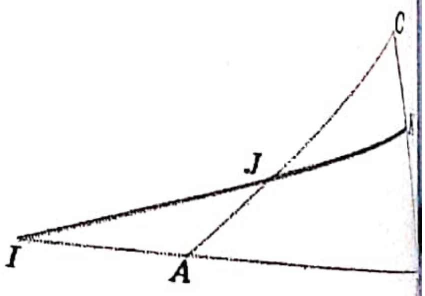
4. Dans chaque cas, déterminer deux entiers relatifs m et n :

a) $m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB}=\vec{0}$; b) $m\overrightarrow{BE}+n\overrightarrow{BF}=\vec{0}$; c) $m\overrightarrow{AG}+n\overrightarrow{AK}=\vec{0}$; d) $m\overrightarrow{DF}+n\overrightarrow{DE}=\vec{0}$

B) Alignement de trois points :

On considère le triangle ABC et les trois points I, J et K tels que:

$$\overrightarrow{BI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$



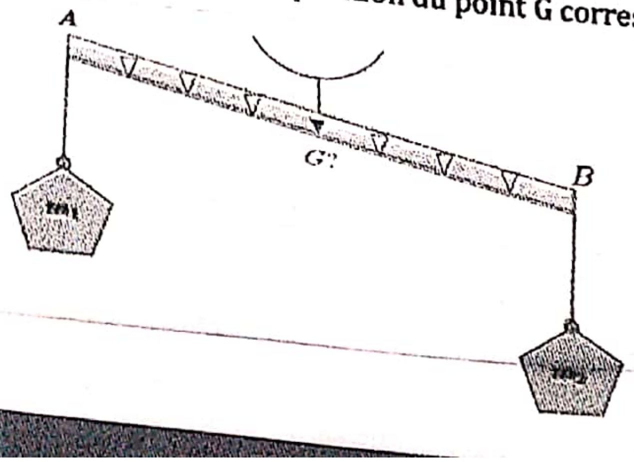
1. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

2 COMPARAISON : PRINCIPE DES LEVIERS

On considère la balance représentée dans le schéma en dessous:

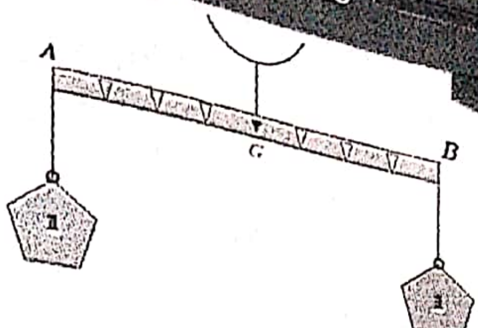
On pose à gauche un solide de masse m_1 et à droite un solide de masse m_2 .les masses sont exprimées en k

Soit G un point du segment $[AB]$, on veut détermine la position du point G correspondante à la situation d'équilibre.



Premier cas : On suppose que $m_1 = m_2 = 1$.

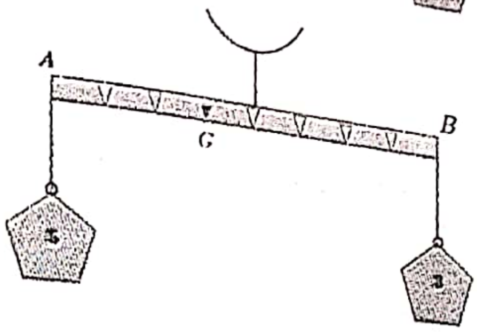
1. Détermine la position du point G.
2. Montrer que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.



Le point G défini par la relation vectorielle $1\times\overrightarrow{GA}+1\times\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ s'appelle le barycentre des points pondérés (ou massifs) $(A;1)$ et $(B;2)$.

Deuxième cas : On suppose que $m_1 = 5$ et $m_2 = 3$.

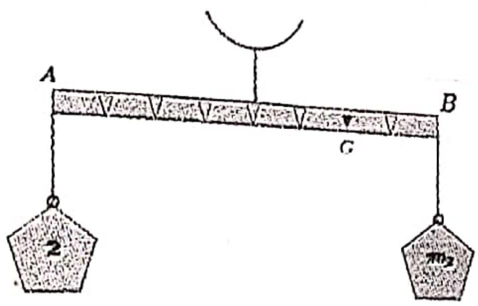
1. Détermine la position du point G.
2. Montrer que : $5\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.



Le point G défini par la relation vectorielle $5\times\overrightarrow{GA}+3\times\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ est le barycentre des points pondérés $(A;5)$ et $(B;3)$.

Troisième cas : On suppose que $m_1 = 2$ et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Détermine la position du point G.
2. Montrer que : $m_2 = 6$.



Le point G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;6)$.

3. Montrer que : $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Le point G est aussi barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;3)$.

1 BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

Soit A et B deux points distincts du plan, α et β deux réels non nuls.

1. Montrer que si $\alpha+\beta\neq 0$ alors il existe un unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ et conclure que les points A , B et G sont alignés.

Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ ou barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

> Le couple $(A;\alpha)$ s'appelle un point pondéré ou massif. On dit aussi que le point A est affecté du coefficient α ou de masse algébrique α.

2. Montrer que si $\alpha+\beta=0$ alors il n'existe pas de point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
3. On suppose dans cette questions que $\alpha+\beta\neq 0$ et que G le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$
   a) Montrer que pour tout M du plan: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
   b) En déduire que : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$

4. Construire sur la droite (AB) les points G , E et F tels que :

a) $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$; c) F est le barycentre $(A;-2)$ et $(B;4)$.

d) Que peut-on déduire ?

5. On munit le plan d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

Montrer que si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors : $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$.

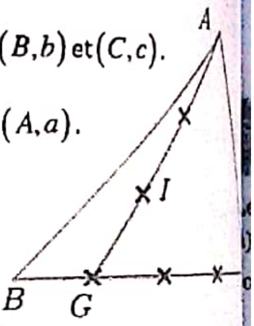
Le barycentre de deux points A et B appartient à la droite (AB).

Il est sur le segment $[AB]$ si les poids sont de même signe, au milieu si les poids sont égaux.

De deux points A et B, le point le plus proche du barycentre est celui dont le coefficient a la plus grande valeur absolue.

4 BARYCENTRE DE TROIS POINTS -BARYCENTRE DE QUATRE POINTS

On considère le triangle ABC un triangle et les deux points G et I .



1. a) Déterminer deux réels b et c de sorte que I soit le barycentre des points (B,b) et (C,c).

b) Déterminer deux réels d et a de sorte que G soit le barycentre (I,d) et (A,a).

2. Montrer que: $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+1\times\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Le point G s'appelle le barycentre du système pondéré $\{(A;2);(B;3);(C;1)\}$.

3. Montrer que pour tout point M du plan : $6\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

4. On munit le plan d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points : $A(1;-2)$; $B(3;2)$; $C(5;3)$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{6}\left(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

b) En déduire les coordonnées du point G .

5. soit D un point distincte au point A , B et C .

a) Montrer qu'il existe un unique point H du plan tel que: $2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}-4\overrightarrow{HD}=\vec{0}$.
Le point H s'appelle le barycentre du système pondéré $\{(A;2);(B;3);(C;1);(D;-4)\}$.

b) Montrer que pour tout point M du plan: $2\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}$.

c)En déduire que : $\overrightarrow{AH}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}$ puis construire le point H .

5 BARYCENTRE PARTIEL – L'ASSOCIATIVITÉ

Soit ABC un triangle et G le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$;

1. Soit I le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;2)\}$.

a) Montrer que le point G est le barycentre du système pondéré $\{(I;3);(C;-1)\}$.

b) Construire le point I puis le point G.

2. Soit J le barycentre du système pondéré $\{(B;2);(C;-1)\}$.

a) Montrer que le point G est le milieu du segment $[AJ]$.

b) Construire le point J puis le point G.

3. Que peut-on conclure ?

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (lorsqu'il existe) affecté de la somme des deux poids.
Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (lorsqu'il existe) affecté de la somme des trois poids.
Cette propriété s'appelle « L'associativité ».

ALIGNEMENT ET PARALLELISME

Les parties A et b sont indépendantes.

A) Problème d'alignement.

Soit $ABCD$ un quadrilatère et I, J, K et L quatre points du plan tels que :

- I le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;1)\}$;
- $\overline{DJ} = \frac{1}{4}\overline{DC}$;
- K le milieu de $[AD]$, L le milieu de $[BC]$ et M le milieu de $[IJ]$;

1. Montrer que $\overline{AI} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ et J le barycentre du système pondéré $\{(C;1);(D;3)\}$.

2. Montrer que les points K, L et M sont alignés et déterminer le nombre réel tel que $\overline{KM} = \alpha\overline{KL}$.

B) Problème de parallélisme.

Soit ABC un triangle et I, J, K et L quatre points du plan tels que :

I le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;1)\}$; $\overline{AJ} = \frac{2}{5}\overline{AC}$ et I le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;1)\}$

Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles.

1 BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

1.1. POINT PONDÉRÉ

Définition

Soit A un point du plan et α un nombre réel.

- Le couple $(A;\alpha)$ s'appelle un point pondéré ou massif. Le réel α s'appelle le poids ou la masse.
  On dit aussi que le point A est affecté du coefficient α ou de la masse algébrique α.
- Un système de points pondérés est une collection de points pondérés.

Exemples

1) $(A;5)$; $(B;-2)$; $(C;\sqrt{3})$; $\left(D;\frac{2}{3}\right)$ sont des points pondérés.

2) $\{(A;2);(B;-1)\}$; $\{(A;3);(B;1);(C;-5)\}$ sont des systèmes de points pondérés.

1.2. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

Définition

Soit $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés du plan tels que : $\alpha+\beta\neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$. On dit aussi que G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha)\,;\,(B;\beta)\}$.

Remarques

- Si $\alpha\neq 0$ et $\beta=0$ alors $G=A$.
- Si les points A et B sont confondus, alors $G=A=B$.
- Si $\alpha+\beta=0$ alors il n'existe pas de barycentre pour les points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.
- Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha)\,;\,(B;\beta)\}$, alors G est le point de la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

Exemples

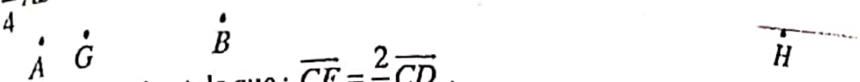
1) Soit A et B deux points distincts du plan et G le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;1)\}$ et H le barycentre du système pondéré $\{(A;-3);(B;4)\}$.

Alors : $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ et $-3\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HB}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$-3\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HB}=\vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=4\overrightarrow{AB}$

Les relations $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}=4\overrightarrow{AB}$ nous permet de construire les points G et H.



2) Soit C, D et E trois points du plan tels que : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Déterminons deux réels α et β pour que E soit le barycentre du système pondéré $\{(C;\alpha);(D;\beta)\}$:

On a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{ED} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{EC}+2\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

Puisque $3+2\neq 0$ alors E est le barycentre du système pondéré $\{(C;3);(D;2)\}$.

Applications

1. Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ où α et β sont des réels à déterminer dans chacun des cas suivants :

a) $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=-3\overrightarrow{BA}$; d) $2\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{GB}$

2. Soit A et B deux points distincts du plan et G le point tel que : $\overrightarrow{GA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;8)$ et $(B;\beta)$ où β est un réel à déterminer.

b) Construire le point G.

1.3. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE

Proposition

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;k\alpha);(B;k\beta)\}$ pour tout réel k non nul. En d'autres termes : le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle « homogénéité du barycentre »

Exemples

1) Les points $(A;100)$ et $(B;500)$ ont le même barycentre que les points $(A;1)$ et $(B;5)$ car :

$$100\times\frac{1}{100}=1 \quad \text{et} \quad 500\times\frac{1}{100}=5 .$$

2) Les points $\left(A;\frac{-1}{8}\right)$ et $\left(B;\frac{3}{16}\right)$ ont le même barycentre que les points $(A;-2)$ et $(B;3)$ car :

$$16\times\frac{-1}{8}=-2 \quad \text{et} \quad 16\times\frac{3}{16}=3$$

3) Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\alpha)\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors G est aussi bary[centre] du système pondéré $\{(A;1);(B;1)\}$.

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ce qui signifie que le point G est le milieu du segment $[AB]$.

Remarques

Si I est barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\alpha)$ (même poids) alors I est le milieu du segment $[AB]$. On dit aussi que I est le centre de gravité des points A et B.

1.5. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés du plan tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ si, et seulement si, pour tout point M du plan $\mathcal{P}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

C'est-à-dire :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$$

Preuve

Soit G est barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ (avec $\alpha+\beta \neq 0$).

On a alors pour tout point M du plan :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$$

Et comme $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ alors : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

En choisissant $M = G$ dans l'égalité $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$, on obtient : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Exemples

1) Soit G le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;3)$

Alors d'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout $M \in (P)$: $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{M[G]}$

2) Soit A et B deux points distincts du plan tel que pour tout point M du plan : $5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}$.

Alors G est le barycentre des points pondérés $(A;5)$ et $(B;-2)$

3) Soit A et B deux points distincts du plan.

- Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan (P) tels que : $\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 2AB$

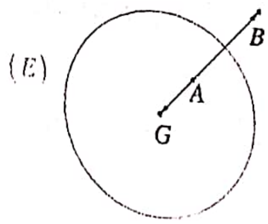
Soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-1)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout point $M \in (P)$: $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{M[G]}$

Donc $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2MG$ .Comme $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2AB$ alors $2MG=2AB$.

Par conséquent : $M\in(E)\Leftrightarrow MG=AB$.

Par suite, l'ensemble (E) est le cercle de centre G et de rayon AB.



• La constriction de l'ensemble (E).

On a G le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-1)$.

Alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-1}{3+(-1)}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ce qui nous permet de construire le point G , puis on construit le cercle de centre G et de rayon AB.

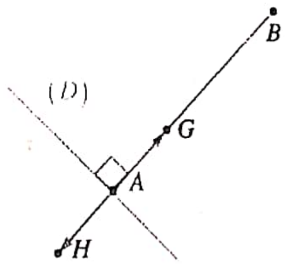
4) Soit A et B deux points distincts du plan.

• Déterminons l'ensemble (D) des points M du plan (P) tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;2)\,;\,(B;1)\}$ et H le barycentre du système pondéré $\{(A;4);(B;-1)\}$.

D'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout point M du plan :

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG} \quad \text{et} \quad 4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MH}.$$



Donc $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3MG$ et $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=3MH$.

Comme $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ alors $3MG=3MH$.

Par conséquent : $M\in(D)\Leftrightarrow MG=MH$.

Ainsi, l'ensemble (D) est la médiatrice du segment $[GH]$.

• La constriction de l'ensemble (D).

On a G le barycentre du système pondéré $\{(A;2)\,;\,(B;1)\}$ et H le barycentre du système pondéré $\{(A;4);(B;-1)\}$. Alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}=\dfrac{-1}{4+(-1)}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-1}{3}\overrightarrow{AB}$.

ce qui nous permet de construire les points G et H , puis on construit la médiatrice du segment $[GH]$.

Applications

1. Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M de plan tels que :

a) $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=4$; b) $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|<5$; c) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

2. Soit ABC un triangle et H le point tel que : $\overrightarrow{HA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Soit G le barycentre des points $(A;-1)$ et $(C;3)$.

a) Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(A;5)$ et $(B;-2)$.

b) Montrer que $2\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AC}$ puis construire les points H et G.

c) Déterminer l'ensemble des points M de plan tels que : $2\left\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}\right\|$.

1.6. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\}$ où $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Alors le couple de coordonnées de G est : $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

Exemples

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(2;1)$ et $B(7;6)$ et soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;3)\ ;\ (B;2)\}$. Le couple de coordonnées du point G est donné par :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{3x_A+2x_B}{3+2} \\ y_G=\dfrac{3y_A+2y_B}{3+2}\end{cases},\ \text{ce qui donne : } \begin{cases} x_G=\dfrac{20}{5}=4 \\ y_G=\dfrac{15}{5}=3\end{cases}.\ \text{Par suite : } G(4;3).$$

Applications

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, déterminer le couple de coordonnées du point G barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha=2\ ;\ \beta=3$ et $A(1;0)\ ;\ B(1;-1)$ b) $\alpha=-1\ ;\ \beta=2$ et $A(3;-2)\ ;\ B(-4;1)$

2 BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÉRÉS

2.1. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÉRÉS

Définition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

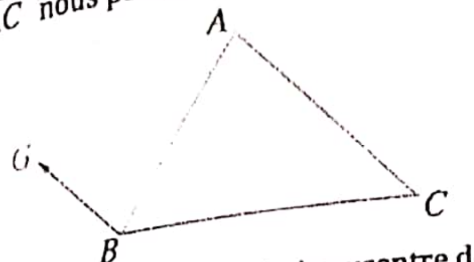
Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\alpha)$. On dit aussi que G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\ ;\ (C;\gamma)\}$.

Exemples

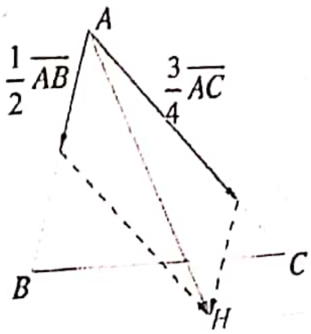
1) Soit A, B et C trois points du plan et G le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;1)$ et $(C;-2)$.

Le point G vérifie l'égalité $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, d'où $-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

La relation $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nous permet de construire le point G.



2) Soit A, B et C trois points du plan et H le barycentre des points pondérés $(A;-1)$, $(B;2)$ et $(C;3)$.



On a : $-\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

Donc : $-\overrightarrow{HA}+2\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$,

d'où : $4\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

ce qui nous permet de construire le point H.

Application

1. Soit ABC un triangle et G le point définit par : $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}$.

a) Montrer que G est barycentre du système pondéré : $\{(A;3);(B;2);(C;1)\}$

b) Construire le point G.

Montrer que le point G est le barycentre des points A, B et C en déterminant le poids de chacun d'eux.

2. Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(B;\beta)$ où α et β et β sont des réels à déterminer dans chacun des cas suivants :

a) $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$; c) $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{BA}$.

2.2. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE

Proposition

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;k\alpha);(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$ pour tout réel k non nul. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle « homogénéité du barycentre ».

Exemple

Les points pondérés $\left(A;\frac{1}{400}\right)$, $\left(B;-\frac{1}{300}\right)$ et $\left(C;\frac{1}{600}\right)$ ont le même barycentre que les points pondérés $(A;3)$, $(B;-4)$ et $(C;2)$ car : $\frac{1}{400}\times1200=3$, $-\frac{1}{300}\times1200=-4$ et $\frac{1}{600}\times1200=2$.

Remarques

- Si G est barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\alpha)$ et $(C;\alpha)$ (même poids) alors G est le centre de gravité du triangle ABC.

2.3. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ si, et seulement si, pour tout point M du plan P : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

Ce résultat traduit : « la propriété caractéristique du barycentre

Remarques

- En considérant $M=A$, on trouve : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

Exemple

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;-1);(B;3);(C;2)\}$.

Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan P tels que : $\left\|-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2AB$.

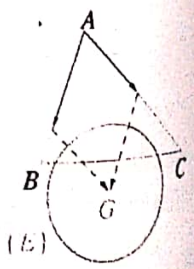
D'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout $M\in(P)$:

$$-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-1+3+2)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MG}.$$

Donc $\left\|-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=4MG$. Comme $\left\|-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2AB$ alors $4MG=2AB$

Par conséquent : $M\in(E)\Leftrightarrow MG=\dfrac{AB}{2}$.

Par suite, l'ensemble (E) est le cercle de centre G et de rayon AB.



La constriction de l'ensemble (E) :

On a G le barycentre du système pondéré $\{(A;-1);(B;3);(C;2)\}$.

Alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{-1+3+2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{-1+3+2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Ce qui nous permet de construire le point G, puis on construit le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.

Applications

Soit ABC un triangle. Déterminer l'ensemble des points M de plan tels que :

a) $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=1$; b) $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|\leq AB$; c) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

2.4. ASSOCIATIVITÉ DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et $\alpha+\beta\neq 0$.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(H;\alpha+\beta);(C;\gamma)\}$ où H est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

En d'autres termes : Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.

Exemples

1) Soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;-5)$.

et H le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;2)$. Ici : $1+2\neq 0$

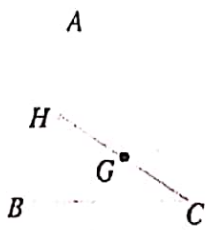
On déduit de l'associativité du barycentre que le point G est le barycentre de $(H;3)$ et $(C;-5)$.

Par ailleurs, si on note K le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(C;-5)$, alors le point G est aussi le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(K;-4)$.

2) Soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;2)$.

et H le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;1)$.

Donc le point H est le milieu du segment $[AB]$.



On déduit de l'associativité du barycentre que le point G est le barycentre de $(H;2)$ et $(C;2)$.

Ainsi, le point G est le milieu du segment $[HC]$.

Applications

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;3)$ et $(C;-1)$.

Soit H le point du plan tel que $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

1. Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;-1)$.
2. En déduire que G est le milieu du segment $[AH]$.
3. construire les points H et G
4. Déterminer l'ensemble des points M de plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

2.5. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ où $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$, alors le couple de coordonnées de G est : $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$

Exemples

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère les points : $A(2;3)$; $B(-3;2)$; $C(1;1)$

- Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;4);(B;1);(C;-2)\}$. On a :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{4x_A+1x_B+(-2)x_C}{4+1+(-2)} \\ y_G=\dfrac{4y_A+1y_B+(-2)y_C}{4+1+(-2)} \end{cases}$$ ce qui donne : $$\begin{cases} x_G=\dfrac{4\times2+1\times(-3)+(-2)\times1}{3}=1 \\ y_G=\dfrac{4\times3+1\times2+(-2)\times1}{3}=4 \end{cases}$$. Par suite : G

- Soit E le centre de gravité du triangle ABC. On a :

$$\begin{cases} x_E=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2-3+1}{3}=0 \\ y_E=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{3+2+1}{3}=2 \end{cases}$$. Par suite : $E(0;2)$

Application

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le triangle ABC tel que : $A(2;3)$; $B(4;-2)$ et $C(-3;5)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du ABC.
2. Soit H le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;-2);(C;4)\}$.
   Déterminer les coordonnées du point H.

3 BARYCENTRE DE QUATRE POINTS PONDÉRÉS

De la même manière, on étend à quatre points et plus les définitions et les propriétés (d'homogénéité, caractérisation et d'associativité) vues pour le barycentre d'un système pondérés à trois points p...

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$, $(C;\gamma)$ et $(D;\delta)$ quatre points pondérés du plan tels que : $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq0$.

- Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$, $(C;\gamma)$ et $(D;\delta)$.

Dans le cas où les poids sont égaux, on parle alors d'isobarycentre.

• Pour tout point M du plan : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$.

• Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de leurs poids.

• Le couple de coordonnées du barycentre G est donné par :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\right)$$

Exemple

Soit $ABCD$ un parallélogramme et G le barycentre du système $\{(A;3);(B;-2);(C;1);(D;2)\}$.

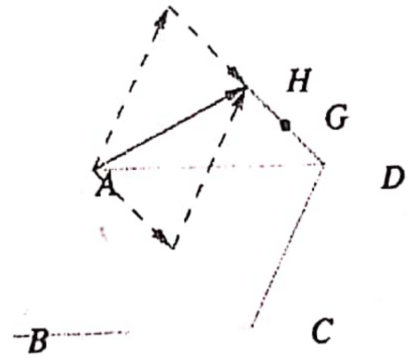
et H est le barycentre du système $\{(A;3);(B;-2);(C;1)\}$.

1) Construire le point G.

On a : $3+(-2)+1\neq 0$

On déduit de l'associativité du barycentre que le point G est le barycentre de $(H;-1)$ et $(D;-1)$.

Donc le point G est le milieu du segment $[HD]$.



La relation $\overrightarrow{AH}=\frac{-2}{3-2+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3-2+1}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

nous permet de construire le point H, puis on construit le point

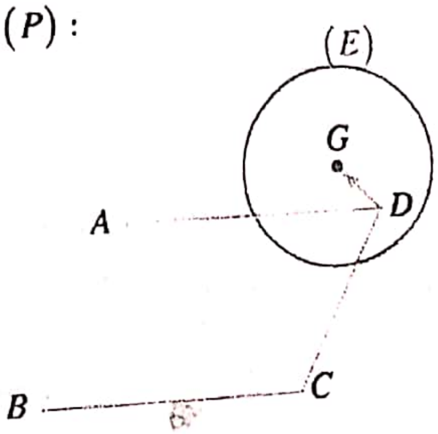
G milieu du segment $[HD]$

2) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\|=2AB.$$

D'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout $M\in(P)$:

$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=(3-2+1+2)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MG}$.



Donc $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\|=4MG$.

Comme $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\|=2AB$ alors $4MG=2AB$

Par conséquent : $M\in(E)\Leftrightarrow MG=\frac{AB}{2}$.

Par suite, l'ensemble (E) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{2}$.

3) Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère les points : $A(5;5)$; $B(4;3)$; $C(7;3)$; $D(8;5)$

On a G le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;-2);(C;1);(D;2)\}$. On a :

$$\begin{cases} x_G=\frac{3x_A+(-2)x_B+1x_C+2x_D}{3+(-2)+1+2} \\ y_G=\frac{3y_A+(-2)y_B+1y_C+2y_D}{3+(-2)+1+2}\end{cases}$$ ce qui donne : $$\begin{cases} x_G=\frac{30}{4}=\frac{15}{2} \\ y_G=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}\end{cases}$$. Par suite : $G\left(\frac{15}{2};\frac{11}{2}\right)$.

A BARYCENTRE ET PARALLÉLISME

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On considère les points :

H : le barycentre du système pondéré $\{(A;2);(B;5);(C;-1)\}$;

K : le barycentre du système pondéré $\{(B;5);(C;-1);(D;-6)\}$;

E : le barycentre du système pondéré $\{(B;5);(C;-1)\}$.

1) Montrer que $\overline{BE}=-\dfrac{1}{4}\overline{BC}$ puis construire le point E .

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré $\{(E;2);(A;1)\}$.

3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré $\{(E;2);(D;-3)\}$.

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré $\{(K;1);(E;2)\}$.

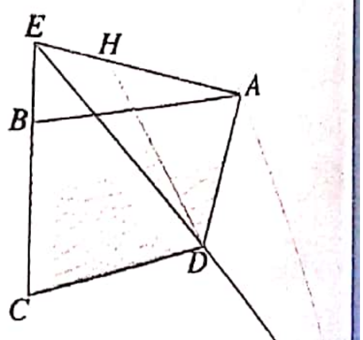
b) En déduire que : $(AK)//(DH)$.

SOLUTION

1) On a E est le barycentre du système pondéré $\{(B;5);(C;-1)\}$, donc : $\overline{BE}=\dfrac{-1}{5+(-1)}\overline{BC}=-\dfrac{1}{4}\overline{BC}$.

Remarque : On peut aussi utiliser la propriété caractéristique du barycentre et prendre $M=B$.

2) On a E est le barycentre du système pondéré $\{(B;5);(C;-1)\}$.



D'après l'associativité du barycentre, H est le barycentre du système pondéré $\{(E;5-1);(A;2)\}$, c'est-à-dire du système $\{(E;4);(A;2)\}$. D'après la propriété d'homogénéité, H est aussi le barycentre du système pondéré $\{(E;2);(A;1)\}$.

Construction de H : $\overline{AH}=\dfrac{2}{1+2}\overline{AE}=\dfrac{2}{3}\overline{AE}$.

3) On a : K est le barycentre du système pondéré $\{(B;5);(C;-1);(D;-6)\}$.

Puisque E est le barycentre du système pondéré $\{(B;5);(C;-1)\}$, alors d'après l'associativité du barycentre, K est le barycentre du système $\{(E;5-1);(D;-6)\}$; c'est-à-dire du système $\{(E;4);(D;-6)\}$. D'après la propriété d'homogénéité, K est aussi le barycentre du système pondéré $\{(E;2);(D;-3)\}$.

4) a) Puisque K est le barycentre du système pondéré $\{(E;2);(D;-3)\}$, alors d'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout $M\in P$: $-\overrightarrow{MK}=-3\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}$. En prenant $M=D$, on obtient $\overrightarrow{DK}+2\overrightarrow{DE}=\vec{0}$, c'est-à-dire que D est le barycentre du système pondéré $\{(K;1);(E;2)\}$.