MATHÉMATIQUES

TERMINALES C et E **Tome 1**

M. Monge M.-C. Audouin - Egoroff F. Lemaire - Body

BELIN

TALA (R,

M. MONGE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
M.-C. AUDOUIN-EGOROFF F. LEMAIRE-BODY
ANCIENNES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DE SÈVRES, AGRÉGÉES DE L'UNIVERSITÉ
PROFESSEURS DE TERMINALE C

MATHÉMATIQUES

TERMINALES C ET E

BULLETIN OFFICIEL DU 24 JUIN 1971

TOME I : ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

LIBRAIRIE BELIN
, RUE FÉROU - 75006 PARIS

Programme (B.O. du 24.6.1971 et du 19.7.1973).

Préambule.

a) Les paragraphes marqués d'un astérisque ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisés, en mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

b) Les rubriques du programme comportent un ordre d'énumération. Cet ordre exprime parfois une intention dont les professeurs pourront s'inspirer, mais il ne saurait être imposé ; par exemple il est loisible de permuter les trois alinéas du I.3 concernant les nombres entiers, les III.1 et 2 (notions de continuité et de limite), de donner, en II.3, une autre introduction des nombres complexes, etc.

c) Chaque fois que l'occasion s'en présentera, on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et homomorphismes (noyau), automorphismes rencontrés.

II. Nombres réels; calcul numérique; nombres complexes.

. . . .

3° L'addition et la multiplication des matrices 2×2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'une structure de corps commutatif. Identification de $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ par l'application $a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. Notation $a + bi$; nombre complexe ; nombres complexes conjugués ; module d'un nombre complexe.

4° Homomorphisme θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (rappel de Première) ; forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : $r(\cos x + i \sin x)$ avec $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$; argument d'un tel nombre (classe des nombres x ou, par abus de langage, l'un d'eux).

Calcul de $\cos nx$ et de $\sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, 4$), et linéarisation des polynômes trigonométriques. Existence et représentation géométrique des racines n-ièmes d'un nombre complexe.

5° Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients complexes ; calcul des parties réelles et imaginaires des racines ; cas des coefficients réels.

VI. Éléments de géométrie affine et euclidienne.

N. B. : Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ et la dimension n est toujours égale à 2 ou 3. Une " transformation d'un ensemble E " est une bijection de E sur lui-même ; une application f de E dans lui-même est une involution si $f \circ f$ est l'identité : c'est une transformation de E.

I.S.B.N. 2-7011-0224-3

1° Somme directe de deux sous-espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels supplémentaires. Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F : image et noyau. Addition et composition des applications linéaires.

Groupe linéaire. Homothéties vectorielles.

2° Barycentre dans un espace affine. Variété affine. Repère affine. Réduction, dans le cas euclidien, de $f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$.

3° Application affine d'un espace affine E dans lui-même, application linéaire associée.

Exemples : projection parallèle sur un sous-espace affine ; involutions affines, leurs points fixes ; translations et homothéties.

4° Applications linéaires d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même conservant la norme ; transformations orthogonales (isométries vectorielles), groupe orthogonal.

Dans le plan vectoriel et dans l'espace vectoriel de dimension trois, éléments fixes des transformations orthogonales involutives (symétries). Orientation du plan vectoriel euclidien (rappel de la classe de Première).

Étude des rotations vectorielles de l'espace vectoriel euclidien de dimension trois (par définition, une telle rotation est, soit l'identité, soit une transformation orthogonale qui a pour seuls éléments fixes ceux d'une droite vectorielle) ; groupe des rotations vectorielles ; orientation de l'espace.

* Produit vectoriel, dans l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois.

5° Définition d'une isométrie de l'espace affine euclidien. Toute isométrie est une bijection affine. Groupe des isométries ; sous-groupe des déplacements.

Dans le plan affine euclidien, symétries, translations, rotations, tout déplacement est de l'un de ces deux derniers types.

Dans l'espace affine euclidien de dimension trois, symétries, translations, rotations, vissages ; tout déplacement est de l'un de ces trois derniers types.

Exemples simples de groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné.

VII. Compléments de géométrie euclidienne plane.

1° Angle d'un couple de demi-droites vectorielles (rappel de Première) ; groupe $\mathcal{A}$ des angles de demi-droites.

Angle d'un couple de droites vectorielles (ensemble des deux rotations vectorielles transformant la première en la seconde) ; groupe $\mathcal{A}'$ des angles de droites. Homomorphisme canonique $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$; son noyau. Isomorphisme $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ déduit de l'homomorphisme $\alpha \longrightarrow \alpha + \alpha$ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$. Condition, en termes d'angles de droites, pour que quatre points soient cocycliques.

2° Similitudes planes (c'est-à-dire applications du plan dans lui-même conservant les rapports de distances). Représentation par les formules $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ lorsque l'on a identifié le plan à $\mathbb{C}$ grâce au choix d'un repère orthonormé. Points fixes des similitudes. Groupe des similitudes du plan et sous-groupes remarquables.

3° Étude des courbes représentées, dans un repère orthonormé, par des équations de la forme $ax^2 + by^2 + 2\,cx + 2\,dy + e = 0$ $(|a| + |b| \neq 0)$.

Différentes formes de ces courbes ; existence d'axes ou de centres de symétrie, d'asymptotes ; équations réduites ; existence de la tangente. Ellipse, hyperbole, parabole définies par les propriétés de leurs points qui font intervenir les foyers et directrices (les propriétés des tangentes aux coniques sont hors du programme).

Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Table des matières

Chapitre 7 : Transformations orthogonales

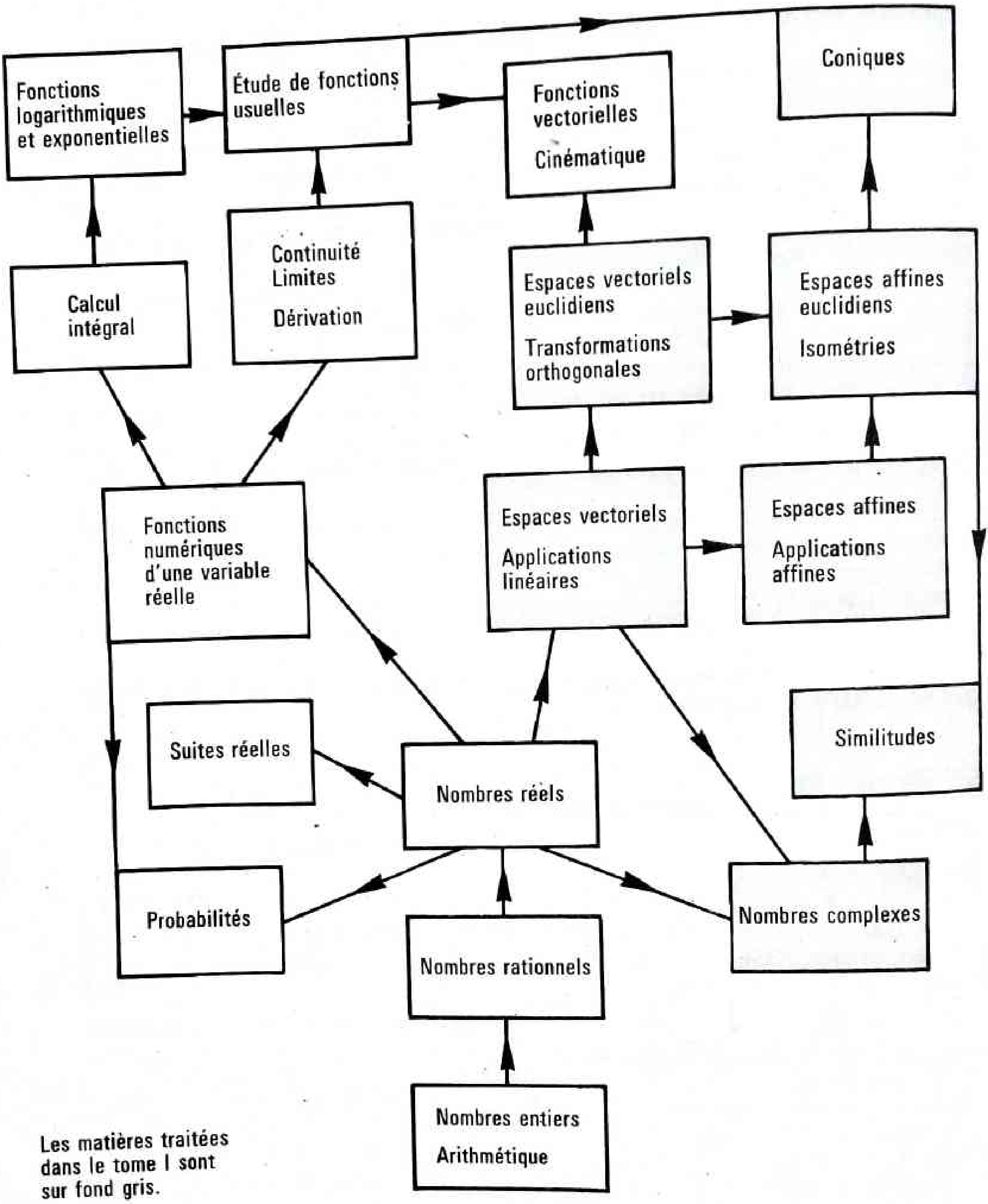
Chapitre 8 : Angles. Produit vectoriel

Chapitre 9 : Isométries affines

Chapitre 10 : Similitudes

Chapitre 11 : Coniques

Chapitre 12 : Géométrie descriptive



Les matières traitées dans le tome I sont sur fond gris.

Avertissement

Ce livre est le premier des deux tomes d'un cours de mathématiques pour les classes de Terminales C et E. Dans ce tome, sont traités la géométrie et les nombres complexes ; dans le second tome, sont traités l'arithmétique, l'analyse après un rappel des propriétés de $\mathbb{R}$, et les probabilités.

Ce découpage diffère de ceux qui sont habituellement adoptés. Nous pensons, pour en avoir fait l'expérience dans nos classes de Terminales C au cours des années scolaires 1971-1972 et 1972-1973, qu'il est très profitable de traiter les nombres complexes en début d'année, tout de suite après un chapitre de révision sur les structures algébriques : la définition de l'Argument et de la forme trigonométrique d'un nombre complexe est, en effet, l'occasion d'une révision des angles de vecteurs introduits en classe de Première, et d'une utilisation de ces angles de vecteurs, dans un contexte totalement nouveau pour les élèves. Cette définition permet enfin de faire très tôt un grand nombre de ces « calculs de trigonométrie » dont le besoin se fait tant sentir en physique.

Bien entendu, chaque professeur reste seul juge de l'organisation de son cours ; les deux tomes permettent, soit de traiter de front un chapitre du tome 1 et un chapitre du tome 2, soit de ne traiter qu'un seul chapitre à la fois.

Les programmes des Terminales C et E sont identiques sauf en quatre endroits repérés par le signe ✲. Les élèves de Terminale E peuvent admettre les résultats du paragraphe 4.3 du chapitre 7 (p. 190 à 193) et ceux du paragraphe 4.1 du chapitre 9 (p. 266 et 267). D'autre part, le paragraphe 2 du chapitre 11 (p. 323 à 334) n'est pas au programme de Terminale E ; enfin, le chapitre 12 (p. 348 à 364) n'est pas au programme de Terminale C.

Nous traitons, dans le chapitre 8, le produit vectoriel, bien qu'il fasse partie des allègements pour l'année 1973-1974. Les autres allègements sont traités en appendice, à la fin du tome 2.

Nous avons voulu que ce cours soit aisément utilisable par un élève du niveau de nos classes. Nous avons choisi de demeurer dans les limites du programme. En particulier, nous n'avons pas introduit les déterminants d'ordre 3 que nos élèves risquent d'utiliser de façon mécanique au détriment d'une véritable compréhension. Nous avons essayé de leur faire « sentir » un peu l'esprit des mathématiques contemporaines : ainsi, nous avons établi un parallèle entre l'étude des angles et celle des espaces affines. Il n'est pas question, à ce niveau, d'introduire la notion d'espace homogène, mais il nous a paru intéressant de la mettre en évidence dans deux contextes en apparence très différents.

Nous donnons beaucoup d'exemples : des exemples triviaux et d'autres plus compliqués, que nous avons traités à fond et qui sont, en fait, des exercices résolus. Tous ces exemples sont imprimés en petits caractères, ce qui les différencie du reste du texte. On trouvera aussi, imprimées en petits caractères, certaines démonstrations délicates qui peuvent être laissées de côté en première lecture.

Chaque démonstration est précédée du mot « Démonstration » et suivie du signe ■ qui tend de plus en plus à remplacer le traditionnel, mais démodé « C.Q.F.D. ».

Chaque chapitre est suivi d'un recueil important d'exercices souvent inspirés d'exercices proposés au baccalauréat. Nous en avons volontairement varié la formulation. Le signe * précède les exercices un peu difficiles.

Nous espérons que ce cours donnera satisfaction à la fois aux professeurs et à leurs élèves. Nous serons heureux de recevoir, des uns et des autres, critiques et suggestions qui nous permettront de l'améliorer.

Jean-Michel Lemaire, ancien élève de l'École Normale Supérieure, maître de conférences à l'Université de Nice, nous a aidés de ses conseils dans la rédaction du manuscrit ; il a bien voulu participer activement à la lecture des épreuves. Nous le remercions vivement de son précieux concours.

Les Auteurs

1.
Structures algébriques

Ce chapitre est un rappel des principales structures déjà rencontrées ainsi que des morphismes de ces structures. Pour chacune de ces structures nous énonçons les propriétés essentielles, sans rappeler les démonstrations.

1. Groupes - Anneaux - Corps.

Groupe.

1.1 **DÉFINITION : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\star$.**
(E, $\star$) est un groupe si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
- **la loi $\star$ est associative dans E ;**
- **la loi $\star$ admet un élément neutre e dans E ;**
- **tout élément de E a un symétrique pour la loi $\star$.**

On dit aussi que la loi $\star$ munit E d'une structure de groupe. Si, de plus, la loi $\star$ est commutative dans E, on dit que (E, $\star$) est un **groupe commutatif** (ou **abélien**).
Notation : On notera E^* l'ensemble $E - \{e\}$.

Anneau.

1.2 **DÉFINITION : Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne, notées $\star$ et $\perp$.**
(E, $\star$, $\perp$) est un anneau si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
- **(E, $\star$) est un groupe commutatif ;**
- **la loi $\perp$ est associative dans E ;**
- **la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $\star$ dans E.**

Si, de plus, la loi $\perp$ est commutative dans E (resp. admet un élément neutre dans E), on dit que (E, $\star$, $\perp$) est un **anneau commutatif** (resp. **unitaire**).

Corps.

1.3 **DÉFINITION : Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne, notées $\star$ et $\perp$.**
$(E, \star, \perp)$ est un corps si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
- **$(E, \star)$ est un groupe commutatif ;**
- **$(E^*, \perp)$ est un groupe ;**
- **la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $\star$ dans E.**

Si, de plus, la loi $\perp$ est commutative dans E, on dit que $(E, \star, \perp)$ est un **corps commutatif.**

Remarque : Un corps est un anneau unitaire dans lequel tout élément distinct de l'élément neutre de la première loi a un symétrique pour la seconde loi.

Sous-groupe.

1.4 **DÉFINITION : Soient $(E, \star)$ un groupe et E' un sous-ensemble de E.**
$(E', \star)$ est un sous-groupe de $(E, \star)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- **E' est stable pour la loi $\star$;**
- **la restriction à E' de la loi $\star$, notée également $\star$, munit E' d'une structure de groupe.**

Au lieu de dire que $(E', \star)$ est un sous-groupe de $(E, \star)$, souvent, on dit simplement que E' est un sous-groupe de $(E, \star)$.

1.5 **THÉORÈME : Soient $(E, \star)$ un groupe et E' un sous-ensemble de E. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :**
1. **$(E', \star)$ est un sous-groupe de $(E, \star)$.**
2. **Les trois conditions suivantes sont vérifiées :**
- **pour tout couple (x, y) de E'^2, $x \star y$ est un élément de E' ;**
- **l'élément neutre de E pour la loi $\star$ est un élément de E' ;**
- **le symétrique, pour la loi $\star$, de tout élément de E' est un élément de E'.**

Exemples.

$(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Sous-anneau.

1.6 **DÉFINITION : Soient $(E, \star, \perp)$ un anneau et E' un sous-ensemble de E.**
$(E', \star, \perp)$ est un sous-anneau de $(E, \star, \perp)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- **E' est stable pour la loi $\star$ et pour la loi $\perp$;**
- **les restrictions à E' des lois $\star$ et $\perp$, notées également $\star$ et $\perp$, munissent E' d'une structure d'anneau.**

Exemple.

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Sous-corps.

1.7 **DÉFINITION : Soient $(E, \star, \perp)$ un corps et E' un sous-ensemble de E. $(E', \star, \perp)$ est un sous-corps de $(E, \star, \perp)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :**

- **E' est stable pour la loi $\star$ et pour la loi $\perp$;**
- **les restrictions à E' des lois $\star$ et $\perp$, notées également $\star$ et $\perp$, munissent E' d'une structure de corps.**

Exemple.

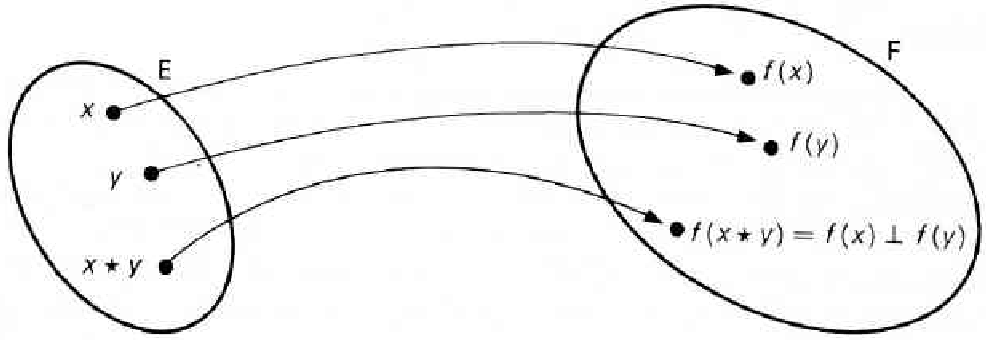
$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Remarque : Les définitions 1.4, 1.6, 1.7 présentent une analogie évidente, d'ailleurs intentionnelle. Le lecteur curieux pourra chercher à l'approfondir.

2. Homomorphismes.

Définition générale.

2.1 **DÉFINITION : Soient E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\star$, et F un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\perp$. Soit f une application de E dans F.**
f est un homomorphisme de $(E, \star)$ dans $(F, \perp)$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée : $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x \star y) = f(x) \perp f(y)$.



Remarque : Soit $\tilde{f}$ l'application de $E \times E$ dans $F \times F$ définie par :
$\forall (x, y) \in E^2, \quad \tilde{f}(x, y) = (f(x), f(y))$.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "f"] \\ F \times F \arrow[r, "\perp"] & F \end{tikzcd}$$

Dire que f est un homomorphisme de $(E, \star)$ dans $(F, \perp)$ équivaut à dire que ce diagramme est commutatif, c'est-à-dire que l'on a : $f \circ \star = \perp \circ \tilde{f}$.

Autres définitions.

2.2 Soit f un homomorphisme de $(E, \star)$ dans $(F, \perp)$.
Si, de plus, l'application f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$.
Si l'ensemble E est égal à l'ensemble F et si la loi $\star$ est égale à la loi $\perp$, on dit que l'homomorphisme est un endomorphisme de $(E, \star)$.
Si l'endomorphisme de $(E, \star)$ est bijectif, on dit que cet endomorphisme est un automorphisme.
Nous rappelons cette terminologie dans le tableau suivant :

	$F \neq E$	$F = E$ et $\star = \perp$
f quelconque	homomorphisme de $(E, \star)$ dans $(F, \perp)$	endomorphisme de $(E, \star)$
f bijective	isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$	automorphisme de $(E, \star)$

Exemples.

1. Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :
$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$x \longmapsto 2x$. f est un endomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Soit g l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ définie par
$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$
$x \longmapsto 2x$. g est un automorphisme de $(\mathbb{Q}, +)$.

De nombreux autres exemples apparaitront dans les chapitres suivants.

Propriétés.

2.3 **THÉORÈME : Si $(E, \star)$ est un groupe et s'il existe un isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$, alors $(F, \perp)$ est aussi un groupe.**

Remarques : 1. Soit f une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F. La donnée d'une loi de composition interne, notée $\star$, sur E permet de construire sur F une loi de composition interne, notée $\perp$, telle que f soit un isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$.
En effet, soient y et y' deux éléments quelconques de F, et x (resp. x') l'unique élément de E tel que : $y = f(x)$ (resp. $y' = f(x')$).
Pour définir $\perp$, il suffit de poser : $y \perp y' = f(x \star x')$.
Si, de plus, $(E, \star)$ est un groupe, alors, d'après le théorème précédent, $(F, \perp)$ est aussi un groupe, et f est un isomorphisme de groupes.
2. On peut énoncer des théorèmes analogues au théorème 2.3, concernant la structure d'anneau et la structure de corps. On peut aussi, d'une façon analogue, définir des isomorphismes d'anneau et des isomorphismes de corps.

2.4 **THÉORÈME : Soient f un homomorphisme de $(E, \star)$ dans $(F, \perp)$ et g un homomorphisme de $(F, \perp)$ dans $(G, \top)$.**
Alors $g \circ f$ est un homomorphisme de $(E, \star)$ dans $(G, \top)$.

Extension à une loi de composition externe.

2.5 **DÉFINITION : Soient Ω, E et F trois ensembles tels que E et F soient chacun munis d'une loi de composition externe à opérateurs dans Ω, notées respectivement $\bullet$ et $\bullet\bullet$. Soit f une application de E dans F.**
f est un homomorphisme de E muni de $\bullet$ dans F muni de $\bullet\bullet$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée :
$\forall (\lambda, x) \in \Omega \times E, \quad f(\lambda \bullet x) = \lambda \bullet\bullet f(x)$.

Remarques : 1. Soit $\bar{f}$ l'application de $\Omega \times E$ dans $\Omega \times F$ définie par :
$\forall (\lambda, x) \in \Omega \times E, \quad \bar{f}(\lambda, x) = (\lambda, f(x))$.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \Omega \times E \arrow[r, "\bullet"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \Omega \times F \arrow[r, "\bullet\bullet"] & F \end{tikzcd}$$

Dire que f est un homorphisme de $(E, \bullet)$ dans $(F, \bullet\bullet)$ équivaut à dire que ce diagramme est commutatif, c'est-à-dire que l'on a : $f \circ \bullet = \bullet\bullet \circ \bar{f}$.
2. Nous verrons des exemples de tels homomorphismes dans l'étude des espaces vectoriels.

3. Espaces vectoriels.

Définitions.

3.1 **DÉFINITION : Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif dont les éléments neutres sont 0 pour la loi $+$ et 1 pour la loi $\times$; soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\boxplus$ et d'une loi de composition externe à opérateurs dans K, notée $\bullet$.** ou un K-eV
$(E, \boxplus, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $(K, +, \times)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- **$(E, \boxplus)$ est un groupe commutatif;**
- **Les quatre propositions suivantes sont vérifiées :**

$\forall x \in E, \quad 1 \bullet x = x;$
$\forall (\alpha, \beta, x) \in K \times K \times E, \quad \alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \times \beta) \bullet x;$
$\forall (\alpha, \beta, x) \in K \times K \times E, \quad (\alpha + \beta) \bullet x = (\alpha \bullet x) \boxplus (\beta \bullet x);$
$\forall (\alpha, x, y) \in K \times E \times E, \quad \alpha \bullet (x \boxplus y) = (\alpha \bullet x) \boxplus (\alpha \bullet y).$

E a une structure de module sur K
ou E est K-module

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et ceux de K, **scalaires.**
La loi $\boxplus$ de E est appelée **addition** dans E et, pour simplifier l'écriture, on la note $+$.
On appelle **vecteur nul** et on note $\mathbf{0}_E$ l'élément neutre de l'addition dans E. La loi $\bullet$ de E est appelée **multiplication par un scalaire**; l'élément $\lambda \bullet x$ de E est noté simplement λx.
S'il ne peut y avoir de confusion pour les lois utilisées, on dit : E **est un espace vectoriel sur** K ou un K-**espace vectoriel.**
Si K est égal à $\mathbb{R}$, on dit également que E est un **espace vectoriel réel.**
Remarque: Nous avons donné la définition générale d'un espace vectoriel sur un corps commutatif quelconque K mais, dans la suite du cours, nous supposerons en général : $K = \mathbb{R}$.

Exemples.

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ des applications de A dans $\mathbb{R}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:
— la somme $f + g$ de deux éléments quelconques f et g de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est définie par : $\forall x \in A, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
— le produit λf du réel quelconque λ par un élément quelconque f de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est défini par : $\forall x \in A, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Sous-espace vectoriel.

3.2 **DÉFINITION : Soient** E **un espace vectoriel sur un corps commutatif** K **et** E′ **un sous-ensemble de** E.
E′ **est un sous-espace vectoriel de** E **si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :**
- E′ **est stable pour l'addition dans** E **et la multiplication par un scalaire dans** E;
- **les restrictions à** E′ **de ces deux lois munissent** E′ **d'une structure d'espace vectoriel sur** K.

3.3 **THÉORÈME : Soient** E **un espace vectoriel sur un corps commutatif** K **et** E′ **un sous-ensemble de** E. **Les deux propositions suivantes sont équivalentes :**
1. E′ **est un sous-espace vectoriel de** E.
2. **Les trois conditions suivantes sont vérifiées :**
- E′ **est non vide :** $E' \neq \varnothing$;
- E′ **est stable pour l'addition dans** E : $\forall (x, y) \in E'^2, \quad x + y \in E'$;
- E′ **est stable pour la multiplication par un scalaire dans** E : $\forall (\lambda, x) \in K \times E', \quad \lambda x \in E'$.

Exemples.

1. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de tout espace vectoriel E.
2. $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; nous le désignerons par $\mathcal{A}$.

Combinaison linéaire des vecteurs d'une famille finie.

3.4 RAPPEL : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On appelle famille (ou système) de p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ distincts ou non de E, le p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de ces vecteurs, le vecteur $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ est un p-uplet quelconque de $\mathbb{R}^p$.

On note x sous la forme condensée suivante : $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$; les λ_i sont appelés **les coefficients** de la combinaison linéaire.

3.5 THÉORÈME et DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de E.
On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les p vecteurs $x_1, \ldots, x_p$.

$<x_1, x_2, \ldots, x_p> \subseteq E$

Exemples.

1. Cherchons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $x_1 = (1, 2, 0)$ et $x_2 = (1, -1, 1)$.
Ce sous-espace est l'ensemble des combinaisons linéaires de x_1 et de x_2, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs
$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(1, -1, 1) = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2)$
où (λ_1, λ_2) est un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbb{R} \times \{0\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(1, 0)$. On peut remarquer que c'est aussi le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(19, 0)$ et plus généralement par n'importe quel vecteur $(a, 0)$ où a est un réel non nul.

Remarques : 1. Le sous-espace vectoriel engendré par p vecteurs est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels contenant ces p vecteurs.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.
Considérons l'application f de $\mathbb{R}^p$ dans E définie par :

$$f : \quad \mathbb{R}^p \longrightarrow E$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i.$$

Le sous-espace vectoriel engendré par les p vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ est l'image $f(\mathbb{R}^p)$ $\subseteq E$ de $\mathbb{R}^p$ par f.

Famille génératrice.

3.6 **THÉORÈME et DÉFINITION : Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :**

1. Tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$:

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i.$$

2. Le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_p$ est égal à E.

3. L'application f de $\mathbb{R}^p$ dans E, définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$$

est surjective.

La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice si et seulement si l'une de ces trois propositions est vraie.

Exemples.

1. Soient les deux fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, e_0 et e_1, respectivement définies par :

$$e_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad e_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

La famille (e_0, e_1) est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$.

2. Soit le vecteur $x = (1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. La famille x n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$: par exemple, le vecteur $(2, 4, 5)$ n'est pas une combinaison linéaire de x.

Famille libre.

3.7 **THÉORÈME et DÉFINITION : Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :**

1. La seule combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ qui soit égale au vecteur nul de E est la combinaison linéaire à coefficients tous nuls :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E\right) \Longrightarrow \left(\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0\right).$$

2. L'application f de $\mathbb{R}^p$ dans E définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$$

est injective.

La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si l'une de ces deux propositions est vraie.

Une famille non libre est appelée **famille liée.**
Si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre (resp. liée), on dit que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont **linéairement indépendants** (resp. **linéairement dépendants**).

Exemples.

1. Reprenons l'exemple **1** du paragraphe 3.6.
La famille (e_0, e_1) est une famille libre de $\mathcal{A}$.
2. Soient les vecteurs $x_1 = (1, 2, 3)$ et $x_2 = (-3, -6, -9)$ de $\mathbb{R}^3$.
On a : $3x_1 + x_2 = (0, 0, 0)$; la famille (x_1, x_2) est donc liée.

Remarque : Toute famille dont les vecteurs ne sont pas deux à deux distincts est nécessairement liée. Par suite, les vecteurs de toute famille libre sont deux à deux distincts ; de même, toute famille dont un vecteur est le vecteur nul est liée.

car $0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \cdots + 0\vec{e_n} + 1\cdot\vec{0} = \vec{0}$
et $(0, 0, \dots, 1) \neq (0, 0, 0, \dots, 0)$

Base et dimension.

3.8 **THÉORÈME et DÉFINITION : Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :**

1. Tout vecteur x de E est une combinaison linéaire, d'une manière unique, des vecteurs $x_1, \dots, x_p$.

2. La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et génératrice.

3. L'application f de $\mathbb{R}^p$ dans E définie par :

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$$
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \quad \textbf{est bijective.}$$

La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est une base si et seulement si l'une de ces trois propositions est vraie.

Chaque vecteur x de E est l'image par f d'un unique p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de $\mathbb{R}^p$. Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont **les composantes du vecteur x dans la base** $(x_1, \dots, x_p)$. On les écrit sous forme d'une matrice unicolonne : $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_p\end{pmatrix}$.

Exemples.

1. Reprenons l'exemple 1 des paragraphes 3.6 et 3.7.
(e_0, e_1) est une base de l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ définie par : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax + b$.
Nous avons $f = be_0 + ae_1$.
Les composantes de f dans la base (e_0, e_1) sont donc : $\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$; la famille (e_0, e_1) est appelée la **base canonique** de $\mathcal{A}$.
2. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

3. Soient les vecteurs $x_1 = (1, 1, 0)$, $x_2 = (2, 0, -2)$ et $x_3 = (1, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
Cherchons si ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
Cherchons les triplets $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que : $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$.

$$(x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \Longleftrightarrow \big((a, b, c) = \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (2, 0, -2) + \lambda_3 (1, 3, 1)\big)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ b = \lambda_1 + 3\lambda_3 \\ c = -2\lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a - b = 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ c = -2\lambda_2 + \lambda_3 \\ b = \lambda_1 + 3\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = b - a - c \\ \lambda_2 = 1/2(b - a - 2c) \\ \lambda_1 = -2b + 3a + 3c \end{cases}$$

On obtient la dernière équivalence en résolvant le système formé par les deux premières équations et en exprimant ensuite λ_1 en fonction de λ_3.
Nous avons trouvé un triplet unique qui répond à la question ; (x_1, x_2, x_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Nous avons ainsi mis en évidence deux bases distinctes de $\mathbb{R}^3$; nous remarquons que chacune d'elles est formée de trois vecteurs.

3.9 THÉORÈME et DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, non réduit au singleton $\{0_E\}$. Si E possède une base de p vecteurs, alors toute base de E a également p vecteurs.
L'entier naturel non nul p est appelé la dimension de E et on dit que E est de dimension finie.

On note : $p = \dim E$.

Exemples.

1. La dimension de $\mathbb{R}$ est 1, celle de $\mathbb{R}^2$ est 2 et, plus généralement, celle de $\mathbb{R}^n$ est n.
2. L'exemple 1 du paragraphe 3.8 nous permet d'affirmer que $\mathcal{A}$ est de dimension 2.
3. Cherchons la dimension du sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Le vecteur 0_E figure dans toute famille ; toute famille est donc liée, et cet espace vectoriel ne possède pas de base au sens où nous avons défini celle-ci.
On convient de dire que **la dimension de $\{0_E\}$ est égale à 0.**
4. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On démontre qu'il n'existe pas de famille finie formant une base de cet espace vectoriel. On convient de dire que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de **dimension infinie.**

<u>**Remarque :**</u> Nous admettrons le résultat complémentaire suivant : soient E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{R}$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs distincts. Pour que cette famille soit une base de E, il suffit qu'elle soit libre (resp. génératrice).
Considérons, par exemple, la famille (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ définie par :
$x_1 = (1, 2)$ et $x_2 = (1, 3)$.

On sait que cette famille est libre car le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ est non nul. Cette famille est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

4. Applications linéaires et matrices.

Application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre.

4.1 DÉFINITION : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F.
f est une application linéaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- **f est un homomorphisme de $(E, +)$ dans $(F, +)$:**
$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x + x') = f(x) + f(x')$;
- **f est un homomorphisme de E muni de $\bullet$ dans F muni de $\bullet$**
$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On dit aussi que f est un **homomorphisme d'espaces vectoriels.**
Si, de plus l'application f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.

Remarque : Les deux conditions précédentes sont équivalentes à la condition suivante :
$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, x') \in E^2, \quad f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x')$.

Exemples.

1. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et α un nombre réel non nul.
L'application h_α de E dans E définie par :

$$h_\alpha : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \alpha x \end{array}$$

est une application linéaire de E dans E; on dit que c'est un **endomorphisme de l'espace vectoriel E**; on l'appelle **l'homothétie vectorielle de rapport** α.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) \longmapsto (a^2, b + c) \end{array}$$

Pour cette application f, nous avons :
$f[(1, 0, 0) + (1, 0, 0)] = f(2, 0, 0) = (4, 0)$;
$f(1, 0, 0) + f(1, 0, 0) = (1, 0) + (1, 0) = (2, 0)$.
Nous avons donc : $f[(1, 0, 0) + (1, 0, 0)] \neq f(1, 0, 0) + f(1, 0, 0)$.
L'application f n'est pas linéaire.
3. Soient E_2 un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, E_3 un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E_2 et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une base de E_3.
Soit f l'application de E_2 dans E_3 qui, au vecteur x de E_2, de composantes (λ_1, λ_2) dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur y de E_3 de composantes $(2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1, \lambda_2)$ dans $\mathcal{B}'$.
On a donc : $y = f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = (2\lambda_1 - \lambda_2) e'_1 + 3\lambda_1 e'_2 + \lambda_2 e'_3$.
On vérifie sans peine que f est une application linéaire de E_2 dans E_3.
De l'égalité : $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, nous déduisons : $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2)$.
Pour connaître l'image $f(x)$ d'un vecteur x quelconque de E_2, il suffit donc de connaître les images $f(e_1)$ et $f(e_2)$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ de E_2.
Ce résultat est général ; nous énonçons le théorème suivant.

4.2 THÉORÈME : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit f une application linéaire de E dans F. f est déterminée par la donnée des composantes, dans la base $\mathcal{B}'$, des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Exemple.

Reprenons l'exemple 3 du paragraphe 4.1 et calculons $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
Les composantes respectives dans la base $\mathcal{B}$ de e_1 et de e_2 sont $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
Donc, dans la base $\mathcal{B}'$, les composantes de $f(e_1)$ sont $(2, 3, 0)$, celles de $f(e_2)$ sont $(-1, 0, 1)$.
Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont fixées ; les triplets $(2, 3, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ déterminent donc f.

4.3 THÉORÈME : Soient E et E′ deux espaces vectoriels de même dimension p sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de E′. L'application f de E dans E′ qui, à tout vecteur x de E, de composantes $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur x' de E′, de mêmes composantes $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ dans $\mathcal{B}'$, est un isomorphisme de E muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire sur E′ muni des mêmes lois.

f est définie par :

$$f : \quad E \longrightarrow E'$$
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e'_i.$$

On peut aussi démontrer que, si deux espaces vectoriels sont isomorphes, ils ont la même dimension.

Matrice d'une application linéaire.

4.4 DÉFINITION : Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension 2 sur $\mathbb{R}$, de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$; soient f une application linéaire de E dans F, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ les composantes respectives dans la base $\mathcal{B}'$ de $f(e_1)$ et de $f(e_2)$. $\left[\begin{array}{l} f(e_1) = a e'_1 + b e'_2 \\ f(e_2) = c e'_1 + d e'_2 \end{array}\right.$ $f(e_1)\ f(e_2)$

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ le tableau carré $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. $\begin{array}{l} e'_1 \\ e'_2 \end{array}$

Ce tableau est une **matrice carrée réelle d'ordre deux,** à deux lignes et à deux colonnes. Les réels a, b, c, d sont appelés **les coefficients de la matrice.**

Soit x un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$; son image $f(x)$ a pour composantes $\begin{pmatrix} a\lambda_1 + c\lambda_2 \\ b\lambda_1 + d\lambda_2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$.

On écrit ce résultat sous **la forme matricielle** suivante :
$\begin{pmatrix} a\lambda_1 + c\lambda_2 \\ b\lambda_1 + d\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Exemples.

Le lecteur devra s'exercer à résoudre sans hésitation les exercices-types suivants :
1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Quelle est l'image d'un vecteur quelconque (a, b) de $\mathbb{R}^2$ par f?
2. Soit φ l'application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui, à la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ associe la fonction affine f' définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a$.
L'application φ est-elle linéaire ? Si oui, donnez sa matrice dans la base (e_0, e_1) de $\mathcal{A}$ définie dans l'exemple 1 du paragraphe 3.6.

4.5 THÉORÈME : Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension 2 sur $\mathbb{R}$, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ fixées. A toute application linéaire de E dans F, on associe sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
L'application ainsi définie est une bijection de l'ensemble des applications linéaires de E dans F sur l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre deux.

<u>**Notation**</u> : Nous noterons :
$\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ;
$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E ;
$\mathcal{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre deux.

important

Structures de $\mathcal{L}(E)$.

4.6 Comme on l'a fait pour l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit une addition dans $\mathcal{L}(E)$, notée $+$, et une multiplication par un réel dans $\mathcal{L}(E)$, notée $\bullet$, de la façon suivante :
- la somme $f + g$ de deux éléments quelconques f et g de $\mathcal{L}(E)$ est définie par : $\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- le produit $\lambda \bullet f$ d'un élément quelconque f de E par un réel quelconque λ, noté souvent λf, est défini par : $\forall x \in E, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

On démontre les résultats suivants :

THÉORÈME :
1. **$(\mathcal{L}(E), +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.**
2. **$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire en général non commutatif.**

L'application nulle de E dans E et l'application identique de E dans E sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$. L'application nulle est l'élément neutre pour la loi $+$; l'application identique est l'élément neutre pour la loi $\circ$.

<u>**Remarque**</u> : L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ peut être muni de la structure d'espace vectoriel ; mais il ne peut être muni de la structure d'anneau. En effet, on ne peut composer deux applications de E dans F que si E = F.

si non $E \longrightarrow F \longrightarrow E$

On peut seulement démontrer le résultat suivant :
Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$, et si g est une application linéaire de F dans un espace vectoriel G sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.
C'est une conséquence du théorème 2.4.

Structures de $\mathcal{M}_2$

4.7 On définit des lois sur $\mathcal{M}_2$ de manière que la bijection définie dans le théorème 4.5 soit un isomorphisme pour les deux lois internes et pour la loi externe définies sur $\mathcal{L}(E)$.

Addition des matrices.

Soient A et A′ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2$; soient f et g les applications linéaires de E dans E qui ont pour matrices respectives A et A′ dans la base $\mathcal{B}$.
Par définition, la somme A + A′ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'application linéaire $f + g$.
Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et si $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$, alors $A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{pmatrix}$.

Multiplication d'une matrice par un réel.

Soient A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2$ et λ un réel quelconque ; soit f l'application linéaire de E dans E qui a pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
Par définition, le produit λA est la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'application linéaire λf.
Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix}$.

Multiplication des matrices.

Soient A et A′ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2$; soient f et g les applications linéaires de E dans E qui ont pour matrices respectives A et A′ dans la base $\mathcal{B}$.
Par définition, le produit A × A′ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'application linéaire $f \circ g$.
Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et si $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$, alors $A \times A' = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$
Soit (i, j) un élément de $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$. Pour obtenir le coefficient situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne, on utilise les éléments de la $i^{ème}$ ligne de A et de la $j^{ème}$ colonne de A′.
On démontre alors les résultats suivants :

THÉORÈME :
1. $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ **est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.**
2. $(\mathcal{M}_2, +, \times)$ **est un anneau unitaire non commutatif.**

L'élément neutre pour la loi +, appelé **matrice nulle,** est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'élément neutre pour la loi ×, appelé **matrice unité,** est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les quatre matrices suivantes forment une base de $\mathcal{M}_2$:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Déterminant d'une matrice.

4.8 DÉFINITION : Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2$.

On appelle déterminant de A le réel $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

On note : $\text{dét } A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

4.9 THÉORÈME : L'application de $\mathcal{M}_2$ dans $\mathbb{R}$ qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2$ associe son déterminant est un homomorphisme de $(\mathcal{M}_2, \times)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

Si A et B sont deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2$, on a donc :
$\text{dét } (A \times B) = (\text{dét } A) \times (\text{dét } B)$.

Déterminant d'une application linéaire.

Nous admettons le théorème suivant :

4.10 THÉORÈME et DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel réel de dimension 2 et f un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et M_f la matrice de f dans cette base.
Alors le déterminant de M_f est indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$.
On l'appelle le déterminant de l'application linéaire f et on le note dét f.

Nous avons les propriétés suivantes :

P1 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel E de dimension 2. On a :

$$\text{dét } (g \circ f) = \text{dét } (f \circ g) = \text{dét } f \times \text{dét } g.$$

Cette propriété résulte de la définition du produit de deux matrices et du théorème 4.9.

P2 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension 2. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est bijective.
- dét f est différent de 0.

Démonstration :

Soit $M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

L'application f est bijective si et seulement si tout vecteur de E, de composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, est l'image d'un unique vecteur de E, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire si et seulement si le système en (x, y) : $\begin{cases} ax + cy = x' \\ bx + dy = y' \end{cases}$ a une solution unique, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ est non nul. ■

EXERCICES

Groupes. Anneaux. Corps. Homomorphismes.

1 On considère l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ muni de l'addition définie par :
$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall (a', b') \in \mathbb{Z}^2, \quad (a, b) + (a', b') = (a + a', \quad b + b')$.
1° Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +)$ est un groupe commutatif.
2° Démontrer que les projections canoniques p_1 et p_2 définies par :

$$p_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a \end{array} \qquad p_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & b \end{array}$$

sont des homomorphismes de $(\mathbb{Z}^2, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
ie $P_i[(a_0, b_0) + (a_1, b_1)] = P_i(a_0, b_0) + P_i(a_1, b_1)$ où $i \in \{1, 2\}$

2 Soit $(G, \star)$ un groupe non commutatif.
On appelle **centre de G** l'ensemble H des éléments a de G qui vérifient la propriété suivante : $\forall x \in G, \quad a \star x = x \star a$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(G, \star)$. $H \neq \emptyset$ car $e \in H$. Soient $a, b \in H$
$\forall x \in G, (a \star b) \star x = a \star (b \star x) = a \star (x \star b) = (a \star x) \star b = x \star (a \star b)$ NB : $a, b \in H$
soit $a \in H$, mq $a^{-1} \in H$: $a^{-1} \star x = (x^{-1} \star a)^{-1} = (a \star x^{-1})^{-1} = x \star a^{-1}$

3 Soient $(G, \star)$ un groupe et H un sous-ensemble de G. Soient x un élément quelconque de G et x' le symétrique de x pour la loi $\star$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
1° H est un sous-groupe de $(G, \star)$. 1) ⇒ 2) Comme H sgp, $e \in H$ ie $H \neq \emptyset$ et $\forall x, y$, $x \star y^{-1} \in H$
2° $(H \neq \emptyset)$ et $\big(\forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y' \in H\big)$. car $x \in H$, $y^{-1} \in H \Rightarrow x \star y \in H$ NB $H \subset G$
2) ⇒ 1) mq : $e = x \star x^{-1} \in H$, ainsi $\forall (e, y) \in H^2$, $e \star y^{-1} = y^{-1} \in H$ ie $\forall y \in H$, $y^{-1} \in H$
En outre : $\forall (x, y) \in H^2$ on a $y \star x \in H$ car $(y^{-1})^{-1} = y$.

4 Soient $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments et S_3 l'ensemble des bijections de E sur E. $S_3 = \{id ; (abc) ; (acb) ; (ab) ; (ac), (bc)\}$
1° Montrer que $(S_3, \circ)$ est un groupe. Trouver le nombre de ses éléments. $3! = 6$
2° Soit s la bijection de E sur E définie par : $s(a) = b, \quad s(b) = c, \quad s(c) = a$. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$
Montrer que $\{s, s^2, s^3\}$ est un sous-groupe commutatif de S_3. $\{s, s^2, s^3\} = A_3$
3° Soit t_a la bijection de E sur E, distincte de l'identité, qui laisse a invariant. Soient de même t_b et t_c. Démontrer : $\forall x \in E, \quad s \circ t_x \circ s^{-1} = t_{s(x)}$. Considérer les cas $x \in \{a, b, c\}$
S_3 est-il commutatif ? Quel est le centre de S_3 ? (cf. exercice n° 2). $Z(S_3) = \{id\}$
NB : $t_a = (bc)$; $t_b = (ac)$; $t_c = (ab)$ et si G Abelien $Z(G) = G$

5 Soit E l'intervalle $]-1, +1[$ de $\mathbb{R}$. On considère l'application, notée $\star$, de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (x, y), associe le réel $x \star y$ égal à : $\dfrac{x+y}{1+xy}$.
Montrer que $(E, \star)$ est un groupe abélien.

Indication : $x \star y = th(a+b) = \dfrac{th(a)+th(b)}{1+th(a)th(b)}$ avec $\begin{cases} x = th\, a \\ y = th(b) \end{cases}$

6 Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ le produit cartésien de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. On définit sur E les deux lois de composition interne suivantes, notées respectivement $\star$ et $\top$ par :
$\forall (a, \alpha) \in E,\ \ \forall (b, \beta) \in E,\ \ (a, \alpha) \star (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$
$\forall (a, \alpha) \in E,\ \ \forall (b, \beta) \in E,\ \ (a, \alpha) \top (b, \beta) = (ab, \alpha\beta)$
1° $(E, \star)$ (respectivement $(E, \top)$) est-il un groupe commutatif ?
2° De quelle structure ces deux lois munissent-elles l'ensemble E ?

$\star$ est commutative $(a,\alpha)\star(0,0)=(a,\alpha)$
$\star$ est associative
$(a,\alpha)\star(-a,-\alpha)=(0,0)$
$\top$ est commutatif, associative
$(a,\alpha)\top(1,1)=(a,\alpha)$
Loi : tout le monde n'est pas symétrisable
$(E, \star, \top)$ est un anneau commutatif unitaire.

7 On définit sur l'ensemble $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne, notée $\star$ par : $\forall (a, b) \in E,\ \ \forall (a', b') \in E,\ \ (a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + b)$.
1° $(E, \star)$ est-il un groupe commutatif ?
2° Soit $F = \mathbb{R}^* \times \{0\}$. Que peut-on dire de $(F, \star)$?
3° Soit h l'application de F dans $\mathbb{R}^*$ définie par : $\forall (a, 0) \in F,\ \ h\big((a, 0)\big) = a$.
Montrer que h est un isomorphisme de $(F, \star)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Il suffit de dm. h $\begin{cases} \text{Homomorphisme } h(x \star y) = h(x) \times h(y) \\ \text{bijective } \begin{cases} \text{inj} \\ \text{surjec} \end{cases} \end{cases}$

8 On définit sur l'ensemble $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une loi de composition interne, notée $\star$, par : $\forall (a, b) \in E,\ \ \forall (a', b') \in E,\ \ (a, b) \star (a', b') = (aa',\ ab' + ba')$.
1° La loi $\star$ est-elle commutative ? Est-elle associative ? Existe-il un élément neutre ? Si oui, le calculer.
2° Soient (a, b) un élément de E et $f_{a,b}$ l'application de E dans E définie par : $\forall (x, y) \in E,\ \ f_{a,b}(x, y) = (a, b) \star (x, y)$.
Montrer que, si a est non nul, alors $f_{a,b}$ est injective.
Montrer que $f_{a,b}$ est surjective si et seulement si a est égal à $+1$ ou à -1.

9 On définit dans $\mathbb{R}$ une loi de composition interne, notée $\star$, par :
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \ a \star b = ab - 2(a + b) + 6$.
1° La loi $\star$ est-elle commutative ? associative ?
2° Montrer qu'il existe un élément α de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in \mathbb{R},\ \ a \star \alpha = \alpha \star a = \alpha$. élément ABSorbant
3° Montrer qu'il existe un élément neutre e pour la loi $\star$.
4° Quels sont les réels qui ont un symétrique pour la loi $\star$?
Quels sont les réels qui sont égaux à leur symétrique pour la loi $\star$?

10 Soient $(G, \star)$ un groupe non commutatif, d'élément neutre e et a un élément quelconque de G ; on note a^{-1} l'élément symétrique de a pour la loi $\star$.
1° On considère l'application f_a de G dans G définie par :

$$f_a : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto a \star x \star a^{-1}. \end{array}$$

$\equiv f_a$ = conjugaison locale en a
$f_e = id_G$

Montrer que f_a est un automorphisme de $(G, \star)$. Que peut-on dire de f_e ?
2° Soit Aut (G) l'ensemble des automorphismes de $(G, \star)$.
Montrer que Aut(G), muni de la composition des applications, notée $\circ$, est un groupe.
3° Soit φ l'application de G dans Aut (G) définie par : $\forall a \in G,\ \ \varphi(a) = f_a$.
Montrer que φ est un homomorphisme de $(G, \star)$ dans $(\text{Aut}(G), \circ)$.

$e = id_G$
$f, g \in Aut(G)$
$f \circ g \in Aut(G)$

AUT(G) $\propto$ mor(G) $\leftarrow$

※ **11** Soit $(G, \star)$ un groupe, a un élément quelconque de G et f_a l'application de G dans G définie par : $\forall x \in G, \quad f_a(x) = a \star x$. translation à gauche

1° L'application f_a est-elle bijective ? $\forall x \in G,\ f_a(a^{-1} \star x) = x$

2° Soit F l'ensemble des applications f_a lorsque a décrit G et φ l'application de G dans F définie par : $\forall a \in G, \quad \varphi(a) = f_a$. on a : $\varphi(a \star b) = f_a \circ f_b$ is φ homomorphisme

Montrer que φ est un isomorphisme de $(G, \star)$ sur $(F, \circ)$. (Baccalauréat 1971.)

$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$ is φ injective et $\forall f_b \in F,\ \varphi(b) = f_b$ surjectivité

12 Soient $(A, +, \times)$ un anneau unitaire, d'unité 1_A et d'élément nul 0_A et $(K, +, \times)$ un corps d'unité 1_K et d'élément nul 0_K.

Soit f un homomorphisme de $(K, +, \times)$ dans $(A, +, \times)$ tel que $f(1_K) = 1_A$.

1° Démontrer la proposition : $\forall z \in K, \ \big((f(z) = 0_A) \Longrightarrow (z = 0_K)\big)$. indication contraposé

2° En déduire que f est injective. Soit $z \in K$, supp que $z \neq 0_K$ alors z est inversible

Ainsi $\exists z^{-1}$, $zz^{-1} = 1_K \Rightarrow f(z)f(z^{-1}) = f(1_K) = 1_A \Leftrightarrow f(z)f(z^{-1}) = 1_K \neq 0_A$ D'où $f(z) \neq 0_A$

Déduisons que f est injective : $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x-y) = 0_A \Rightarrow x - y = 0_A$ is $x = y$

13 On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ une addition et une multiplication par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + yx')$.

1° Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Nous noterons D l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois et nous appellerons **nombres duaux** les éléments de D.

2° Notons D_1 l'ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$ et D_2 l'ensemble $\{0\} \times \mathbb{R}$.

a) D_1 et D_2 sont-ils des sous-anneaux de D ? oui

b) $(D, +, \times)$ est-il un corps ? non

c) Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans D_1 définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x, 0)$ est un isomorphisme d'anneaux.

3° Soit ε le nombre dual égal à $(0, 1)$.

a) En identifiant D_1 à $\mathbb{R}$ par l'isomorphisme f précédent, démontrer que, pour tout nombre dual z, il existe deux réels x et y tels que : $z = x + \varepsilon y$.

b) Étudier les puissances ε^p de ε, pour p entier naturel non nul.

c) Calculer z^n pour n entier naturel non nul.

d) Quels sont les éléments inversibles de D ? (Baccalauréat 1971, partiel.)

Espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels.

$\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)$

14 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs composantes dans la base

changement de base

canonique : $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec e_1 = \vec j - \vec k$, $\vec e_2 = 2\vec i + 3\vec j + \vec k$, $\vec e_3 = 5\vec i + \vec k$

1° Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme il a 3 éléments mq il est libre

2° Soit $\vec{u}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. $\vec u = \vec e_1 + \vec e_2 + \vec e_3$

Quelles sont ses composantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

3° Soit $\vec{v}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Quelles sont ses composantes dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$?

15 Même exercice que pour le nº 14 avec : $\vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ $\vec{e}_2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{e}_3\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$.

16 Soit $\mathcal{P}_3$ le sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, défini par :

$\mathcal{P}_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \ (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c)\}$.

1° Montrer que $\mathcal{P}_3$ est un espace vectoriel réel.

2° Soient e_0, e_1, e_2 les trois éléments de $\mathcal{P}_3$ définis par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (e_0(x) = 1$ et $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2)$. $f(x) = a e_2 + b e_1 + c e_0$

Démontrer que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de $\mathcal{P}_3$; cette base est appelée la base canonique de $\mathcal{P}_3$; en déduire la dimension de $\mathcal{P}_3$. $\dim \mathcal{P}_3 = 3$

Nous convenons de dire, dans la suite, que $\mathcal{P}_3$ est l'ensemble des fonctions trinômes ou même, par *abus de langage, l'ensemble des polynômes* de degré inférieur ou égal à 2.

17 Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel défini à l'exercice nº 16 et (e_0, e_1, e_2) sa base canonique. Soient f, g, h les trois éléments de $\mathcal{P}_3$ définis par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2 + x + 1$ $= 1e_2 + 1e_1 + 1e_0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = 2x^2 + 3$ $= 2e_2 + 3e_0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = -x^2 - x + 2.$ $= -1e_2 - 1e_1 + 2e_0$

1° Démontrer que la famille (f, g, h) est une base de $\mathcal{P}_3$. ayant 3 éléments, il suffit de montrer que c'est un système libre

2° Soit p le vecteur de $\mathcal{P}_3$ dont les composantes dans la base (f, g, h) sont $\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Quelles sont les composantes de p dans la base canonique ?

3° Soit q l'élément de $\mathcal{P}_3$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ q(x) = 3x^2 + x + 6.$ $= 3e_2 + 1e_1 + 6e_0$

Quelles sont les composantes de q dans la base (f, g, h) ?

18 Soit $\mathcal{P}_4$ l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à trois, défini de façon analogue à l'ensemble $\mathcal{P}_3$ de l'exercice nº 16.

1° Montrer que $\mathcal{P}_4$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.

2° Soient f_0, f_1, f_2, f_3 les quatre éléments de $\mathcal{P}_4$ définis par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_0(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_1(x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_2(x) = x(x + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_3(x) = x(x + 1)(x - 1).$

Démontrer que la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathcal{P}_4$.

3° Quelles sont les composantes dans cette base de l'élément f de $\mathcal{P}_4$ défini par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9x - 1$?

19 Soient x, y, z, trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$x = (2, 1),\quad y = (6, 3),\quad z = (1, 3).$

(x,y) lié ; (y,z) libre donc même une base de $\mathbb{R}^2$ car card = 2 ; (x,z) libre, (x,y,z) lié car x,y,z ∈ $\mathbb{R}^2$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$

1° Que peut-on dire des familles (x, y), (y, z), (x, z) et (x, y, z) ?

2° Soit t le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par : $t = (7, 11)$. $= 2x + 3z$

Le vecteur t appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par x et z ? oui car

3° Quel est le sous-espace vectoriel engendré par x et y ?

comme x et y sont liés, $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle = \{(2\gamma, \gamma), \gamma \in \mathbb{R}\}$

20 Soit E l'espace vectoriel des vecteurs de l'espace rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ définis par : $\vec{u}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{u}_2 = -\vec{j}$; $\vec{u}_3 = -2\vec{k} - 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Quelle est la dimension de F ? dim F = 3

21 Soient x, y, z trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$x = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right), \qquad y = \left(\sqrt{3},\ 1,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right), \qquad z = \left(0,\ 5,\ \frac{5}{2}\right).$$

1° Que peut-on dire des familles (x, y), (y, z), (x, z) et (x, y, z) ?

2° Quels sont les sous-espaces vectoriels engendrés par chacune de ces familles ?

3° Le vecteur t de $\mathbb{R}^3$ défini par : $t = (10, 10, 0)$ appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par la famille (x, y, z) ?

22 Soit $\mathcal{T}_3$ l'espace vectoriel des fonctions trinômes et soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathcal{T}_3$ (cf. ex. n° 16). Soient f_1, f_2, f_3, f_4 quatre vecteurs de $\mathcal{T}_3$ donnés par leurs composantes respectives sur la base canonique :

$$f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1° Soit x un réel quelconque. Calculer : $(5f_1 + 2f_3)(x)$.

2° Soient F le sous-espace vectoriel engendré par f_1 et f_2 et F′ le sous-espace vectoriel engendré par f_3 et f_4. Quelles sont les dimensions respectives de F et de F′ ? Donner une base pour chacun d'eux.

23 Soit $\mathcal{T}_3$ l'espace vectoriel des fonctions trinômes et soit (e_0, e_1, e_2) sa base canonique (cf. ex. n° 16). Soit m un réel quelconque.

On considère les éléments f_m et g_m de $\mathcal{T}_3$ respectivement définis par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m(x) = (m^2 - 1)\,x^2 + (m - 6)\,x + 20$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_m(x) = (m + 1)\,x^2 - \dfrac{m}{2}\,x + m.$

1° Déterminer m pour que le sous-espace vectoriel engendré par la famille (f_m, g_m) soit de dimension 2. Il suffit de regarder m / fm et gm soit libre

2° Déterminer m pour que ce sous-espace vectoriel soit de dimension 1.
Il suffit de chercher m / fm et gm soit lié

24 Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables.

1° Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2° Soit ω un réel quelconque non nul et soit F l'ensemble des éléments f de E tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + \omega^2 f(x) = 0.$ $y'' + \omega^2 y = 0$ équation [illegible] d'ordre 2
Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E. $x^2 - \omega^2 \Rightarrow x = \omega \vee x = -\omega$

3° Soient f_1 et f_2 les éléments de E définis respectivement par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos \omega x \quad$ et $\quad f_2(x) = \sin \omega x.$

Montrer que f_1 et f_2 sont deux éléments de F. Que peut-on dire de la famille (f_1, f_2) ? Que peut-on en déduire sur la dimension de F ?

* **25** Soit $\mathcal{T}_3$ l'espace vectoriel des fonctions trinômes et (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathcal{T}_3$ (cf. ex. n° 16).

1° Soit F le sous-ensemble de $\mathcal{T}_3$ défini par :

$F = \{f \in \mathcal{T}_3 \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f = (a + b)\,e_0 + b e_1 + (a - b)\,e_2\}$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}_3$. En donner une base et la dimension.

2° Soit G le sous-ensemble de $\mathcal{T}_3$ défini par :

$$G = \left\{f \in \mathcal{T}_3 \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (3a - 12b)x^2 + \left(\frac{a}{2} - 2b\right)x + a - 4b\right\}.$$

Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}_3$. En donner une base et la dimension.

26 Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel quelconque et F l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annulent en a. Que peut-on dire de F ? F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

✻ **27** Soit K un ensemble à deux éléments notés 0 et 1. On définit sur K deux lois de composition interne par les tables de Pythagore suivantes :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

NB. $K = \mathbb{F}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

1° Montrer que (K, +, ×) est un corps commutatif.

2° On pose $E = K^2$. On définit sur E une addition de la façon suivante :
$\forall (a, b) \in E,\ \forall (c, d) \in E,\quad (a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$.
Construire la table de Pythagore de cette loi. Montrer que (E, +) est un groupe commutatif.

3° On définit une multiplication externe dans E à opérateurs dans K de la façon suivante : $\forall (a, b) \in E,\quad 0 . (a, b) = (0, 0)$ et $1 . (a, b) = (a, b)$.
Montrer que (E, +, .) est un espace vectoriel sur K.

4° Trouver une base de E. En déduire sa dimension. Trouver toutes les bases de E.

5° Trouver tous les sous-espaces vectoriels de dimension 1 de E.

6° Trouver toutes les applications linéaires bijectives de E sur E.

Remarque : Pour traiter les questions 2 à 6 il est commode de désigner les éléments de E par une lettre unique, par exemple :
$\omega = (0, 0)$, $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$, $\gamma = (1, 1)$.

Applications linéaires et matrices.

28 Soit la matrice carrée réelle d'ordre deux : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2, A^3, A^4, et plus généralement A^n pour tout entier naturel non nul n.
$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = -I_2$; $A^4 = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

29 Trouver toutes les matrices carrées M réelles d'ordre deux telles que :
$M^2 = \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ -15 & -14 \end{pmatrix}$.

30 On considère l'ensemble M des matrices carrées réelles d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels quelconques.

1° M est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2$ des matrices carrées réelles d'ordre deux ?

2° Trouver une base de M et en déduire sa dimension. Dim 2 $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3° M est-il stable pour la multiplication des matrices ? oui En déduire que (M, +, ×) est un sous-anneau de ($\mathcal{M}_2$, +, ×).

4° A quelle condition une matrice de M est-elle inversible (c'est-à-dire admet-elle un symétrique pour la loi ×) ? Trouver la matrice inverse quand elle existe. $a^2+b^2\neq 0$

31 Reprendre l'exercice n° 30 en prenant pour M l'ensemble des matrices réelles d'ordre deux de la forme : $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels quelconques.

32 Soit $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre deux.

1° Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2$ qui sont inversibles.
Montrer que $(\mathcal{I}, \times)$ est un groupe commutatif. = Le groupe des unités

2° Soit E l'ensemble des éléments A de $\mathcal{M}_2$ définis par :

$\exists p \in \mathbb{R}, \ \exists q \in \mathbb{R}, \quad |p| \neq |q| \quad$ et $\quad A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

a) Montrer que E est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{I}$.

b) Montrer par récurrence sur l'entier naturel n l'égalité :

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (p+q)^n + (p-q)^n & (p+q)^n - (p-q)^n \\ (p+q)^n - (p-q)^n & (p+q)^n + (p-q)^n \end{pmatrix}.$$

NB : $A^0 = I_2$
$A^{n+1} = A^n \cdot A$

33 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel réel de base $(\vec{i}, \vec{j})$ et φ un endomorphisme de $\vec{P}$, de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1° Soient $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{w}, \vec{w}_1$ les vecteurs de coordonnées respectives dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

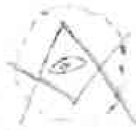
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer a, b, c, d pour que l'on ait : $\vec{w} = \varphi(\vec{v}), \quad \vec{w}_1 = \varphi(\vec{v}_1)$.

2° Montrer que l'endomorphisme φ satisfaisant aux conditions précédentes est bijectif et calculer la matrice de φ^{-1} dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. (Bacc. 72, partiel.)

34 Soient E l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel quelconque. Soit φ l'application de E dans $\mathcal{M}_2$ qui, à tout élément f de E, associe la matrice carrée réelle d'ordre deux définie par :

$\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ f'(a) & f(a) \end{pmatrix}$.



OLYMPIADE

1° Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et un sous-anneau de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2° Démontrer que l'application φ est linéaire.

3° Démontrer que φ est un homomorphisme d'anneaux de $(E, +, \times)$ dans $(\mathcal{M}_2, +, \times)$.

35 Soit M une matrice carrée réelle d'ordre deux satisfaisant à : $M^2 + M = 6U$ où U désigne la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $= I_2$

On suppose de plus que M est distincte des matrices 2 U et − 3 U.

1° On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; écrire les relations liant les quatre réels a, b, c, d.

2° Montrer que le sous-espace vectoriel E de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2$ engendré par M et U est de dimension deux.

3° Montrer que E est un sous-anneau commutatif unitaire de $\mathcal{M}_2$.

4° Chercher dans E les matrices égales à leur carré. On trouvera en plus des solutions évidentes **0** et U, deux autres matrices A et B qu'on exprimera en fonction de M et de U.

5° Montrer que les produits AB et BA sont égaux à la matrice nulle. Les matrices A et B sont-elles inversibles ? mGm

36 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, et on note $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique. Soient x et y deux réels quelconques ; on appelle $T_{x,y}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique est : $M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & -y \\ 3y & x \end{pmatrix}$.

1° *a*) Préciser les endomorphismes $T_{0,0}$ et $T_{1,0}$. $T_{0,0} \sim O_2$ et $T_{1,0} \sim I_2$

b) Déterminer les endomorphismes $T_{x,y}$ pour lesquels on a : $T_{x,y}(e_1) = e_2$.

c) Déterminer les réels x, y pour lesquels l'endomorphisme $T_{x,y}$ est inversible. $x^2+3y^2 \neq 0$

d) Dans le cas où $T_{x,y}$ est un endomorphisme inversible, quelle est la matrice de l'endomorphisme inverse par rapport à la base (e_1, e_2) ?

e) Déterminer les réels x et y pour lesquels $T_{x,y}$ est involutif. $M_{xy} \times M_{xy} = I_2 \equiv M_{1,0}$

2° Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M_{x,y}$ lorsque le couple (x, y) décrit $\mathbb{R}^2$.

On pose : $I = M_{1,0} = I_2$ et $J = M_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $M_{xy} = xI + yJ$

a) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre deux. Montrer que (I, J) est une base de $\mathcal{M}$. générateur et libre

b) Montrer que $\mathcal{M}$ est stable pour la multiplication des matrices.

c) Montrer que $\mathcal{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un corps commutatif.

* **37** Soit E un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$; soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe trois vecteurs V_1, V_2, V_3 de E vérifiant les conditions suivantes :

a) $V_2 \neq V_1$ et $V_3 \neq V_1$

b) $f(V_1) = V_2$, $f(V_2) = V_3$, $f(V_3) = V_1$

c) V_1, V_2, V_3 engendrent E.

1° Montrer que V_1 n'est pas le vecteur nul de E.

2° Calculer : $f^3(V_1)$, $f^3(V_2)$, $f^3(V_3)$. En déduire l'égalité : $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

3° Démontrer que f et f^2 sont différentes de Id_E. $f(V_1) = V_2 \neq V_1$ et $f^2(V_2) = V_1 \neq V_2$

4° Montrer que V_3 est distinct de V_2. Si on avait $V_3 = V_2$ — $f(V_3) = f(V_2)$ ie $V_1 = V_3$ Absurde

5° Démontrer que V_1 et V_2 constituent une famille libre de E.

6° Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels que l'on déterminera. $f^3 = Id^3 \Leftrightarrow f^3 - Id^3 = 0$

$\Leftrightarrow (f - Id)(f^2 + Id.f + Id)$

7° Démontrer la relation : $f^2 = b.f + a.\mathrm{Id}_E$.

$b = -1, a = -1$

* **38** 1° Soit V un espace vectoriel réel. On désigne par H(V) l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans V, où n est un entier naturel non nul.

Montrer que H(V) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2° Soient V et V' deux espaces vectoriels réels, H(V) (resp. H(V')) l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans V (resp. V'). Soit f une application linéaire de V dans V'. On désigne par φ l'application de H(V) dans H(V') définie par :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} H(V) & \longrightarrow & H(V') \\ u & \longmapsto & f \circ u. \end{array}$$

a) Montrer que φ est linéaire.

b) Montrer que, si f est injective, alors φ est injective. [illegible]

c) Montrer que, si f est surjective, alors φ est surjective.

* **39** Soient E et F deux espaces vectoriels réels et $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.

1° Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si on peut trouver un vecteur x de E tel que la famille $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ soit une famille libre de F.

2° Étudier la réciproque. Elle vraie

1) Raisonnons par l'absurde en supposant que $\exists x \in E / (f_1(x), \dots, f_n(x))$ soit libre et que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée. Alors $\exists (\alpha_i)$ [illegible]

2.
Les nombres complexes

1. Ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Les matrices de cette forme, qui satisfont de plus à la condition : $a^2 + b^2 = 1$, *ont déjà été partiellement étudiées en classe de Première.*

Soit $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées, à coefficients réels, d'ordre 2.
Nous savons que $(\mathcal{M}_2, +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et que $(\mathcal{M}_2, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2$.

Cherchons si les structures précédentes admettent une restriction à $\mathbb{C}$.

Corps commutatif $(\mathbb{C}, +, \times)$.

1.1 THÉORÈME : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Démonstration :

Notons $M_{a,b}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}$.

$(\mathbb{C}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2, +)$. Soient $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ deux matrices quelconques de $\mathbb{C}$; on a :

$$M_{a,b} + M_{a',b'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix} = M_{a+a',b+b'}.$$

$\mathbb{C}$ est donc stable pour l'addition de $\mathcal{M}_2$.

La matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2$ est égale à $M_{0,0}$; elle est donc un élément de $\mathbb{C}$.

Le symétrique pour la loi $+$ d'une matrice quelconque $M_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ est la matrice : $\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = M_{-a,-b}$; c'est donc un élément de $\mathbb{C}$.

Du théorème 1.5 du chapitre 1, il résulte que $(\mathbb{C}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2, +)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un sous-anneau commutatif unitaire de l'anneau unitaire $(\mathcal{M}_2, +, \times)$. Soient $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ deux matrices quelconques de $\mathbb{C}$; on a :

$$M_{a,b} \times M_{a',b'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -(ab'+ba') \\ ba'+ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix} = M_{aa'-bb',\, ab'+ba'}.$$

$\mathbb{C}$ est donc stable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_2$.

De l'égalité : $M_{a,b} \times M_{a',b'} = M_{aa'-bb',\, ab'+ba'}$, nous déduisons l'égalité : $M_{a',b'} \times M_{a,b} = M_{a'a-b'b,\, a'b+b'a}$. Il en résulte, pour deux matrices quelconques de $\mathbb{C}$, l'égalité : $M_{a,b} \times M_{a',b'} = M_{a',b'} \times M_{a,b}$.

La loi $\times$ est commutative dans l'ensemble $\mathbb{C}$. (Nous rappelons que cette loi n'est pas commutative dans $\mathcal{M}_2$.)

La loi $\times$ est associative dans $\mathcal{M}_2$, et $\mathbb{C}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2$; la loi $\times$ est donc associative dans $\mathbb{C}$. (car stabilité de $\mathbb{C}$ pour la multiplication)

De même, la loi $\times$ est distributive par rapport à loi $+$ dans $\mathcal{M}_2$; elle est donc distributive par rapport à la loi $+$ dans $\mathbb{C}$.

La matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2$ est égale à $M_{1,0}$; elle est donc un élément de $\mathbb{C}$.

Tout élément de $\mathbb{C}^*$ a un symétrique dans $\mathbb{C}^*$ pour la loi $\times$. Soit $M_{a,b}$ une matrice quelconque de $\mathbb{C}^*$; le couple (a, b) est donc distinct du couple $(0, 0)$
Pour qu'il existe dans $\mathbb{C}^*$ un symétrique de $M_{a,b}$, il suffit qu'il existe deux réels x et y tels que : $M_{a,b} \times M_{x,y} = M_{x,y} \times M_{a,b} = M_{1,0}$.

La loi $\times$ est commutative dans $\mathbb{C}$; il suffit donc qu'il existe deux réels x et y tels que : $M_{a,b} \times M_{x,y} = M_{1,0}$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ou encore : } \begin{pmatrix} ax-by & -ay-bx \\ bx+ay & -by+ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité est équivalente au système : $\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0. \end{cases}$

Le déterminant du système est égal à $a^2 + b^2$; le couple (a, b) est distinct du couple $(0, 0)$; donc $a^2 + b^2$ n'est pas nul.

Ce système a une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2+b^2} = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Le symétrique de $M_{a,b}$ existe donc dans $\mathbb{C}^*$; il est égal à $M_{\frac{a}{a^2+b^2},\, \frac{-b}{a^2+b^2}}$.

On l'appelle la **matrice inverse** de $M_{a,b}$.

Nous avons démontré que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. ■

Remarque : La matrice inverse de $M_{a,b}$ est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$;

c'est donc le produit $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} M_{a,-b}$.

Nous avons donc l'égalité : $M_{a,b} \times \frac{1}{a^2+b^2} M_{a,-b} = M_{1,0}$, ou encore :

$M_{a,b} \times M_{a,-b} = (a^2 + b^2)\, M_{1,0}$.

Espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 **THÉORÈME : $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension deux, dont une base est $(M_{1,0}, M_{0,1})$.**

Démonstration :
Soit $M_{a,b}$ une matrice quelconque de $\mathbb{C}$. On a :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aM_{1,0} + bM_{0,1}.$$

$\mathbb{C}$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$, engendré par la famille $(M_{1,0}, M_{0,1})$. ce C'est une famille génératrice
On a, de plus :
$(aM_{1,0} + bM_{0,1} = M_{0,0}) \Longleftrightarrow (M_{a,b} = M_{0,0}) \Longleftrightarrow (a = 0$ et $b = 0)$.
Donc la famille $(M_{1,0}, M_{0,1})$ est libre ; c'est une base de $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}$ est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension deux. ■

Isomorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$ sur un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

$\chi : (\mathbb{R},+,\times) \longrightarrow (\mathbb{C},+,\times)$
$a \longmapsto \chi(a) = M_{a,0}$

1.3 **THÉORÈME : L'ensemble des matrices $M_{a,0}$ de $\mathbb{C}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, et l'application qui, à tout réel a, associe la matrice $M_{a,0}$ est un isomorphisme de corps.**

Démonstration :
Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,0}$.
E est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soient $M_{a,0}$ et $M_{a',0}$ deux éléments quelconques de E. On a :
$M_{a,0} + M_{a',0} = M_{a+a',0}$ (1) ;
$M_{a,0} \times M_{a',0} = M_{aa',0}$ (2).
Donc E est stable pour les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$.
La matrice nulle $M_{0,0}$ et la matrice unité $M_{1,0}$ sont des éléments de E.
La matrice opposée de $M_{a,0}$ est $M_{-a,0}$; si $a \neq 0$, la matrice inverse de $M_{a,0}$ est $M_{\frac{1}{a},0}$; ces matrices sont donc des éléments de E.
La loi $+$ est associative et commutative dans $\mathbb{C}$; elle est donc associative et commutative dans E.
La loi $\times$ est associative, commutative et distributive par rapport à la loi $+$ dans $\mathbb{C}$; elle est donc associative, commutative et distributive par rapport à la loi $+$ dans E.
L'application σ de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sigma(a) = M_{a,0}$ est un isomorphisme de corps. Une matrice quelconque $M_{a,0}$ de E est l'image par σ de l'unique réel a. Donc σ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur E.
Il résulte des égalités (1) et (2) que l'on a :
$\forall (a, a') \in \mathbb{R}^2, \quad \sigma(a) + \sigma(a') = \sigma(a + a')$;
$\forall (a, a') \in \mathbb{R}^2, \quad \sigma(a)\,\sigma(a') = \sigma(aa')$.
σ est donc un isomorphisme du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ sur le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$. ■

Définitions et notations.

1.4 Par l'isomorphisme σ, on identifie $\mathbb{R}$ et E ; on convient alors de noter simplement a la matrice $M_{a,0}$. La matrice nulle est alors identifiée au réel 0 et la matrice unité au réel 1.

De plus, on convient de poser : $i = M_{0,1}$.

Toute matrice $M_{a,b}$ est alors identifiée à $a1 + bi$, que nous notons indifféremment $a + bi$ ou $a + ib$. Le couple $(1, i)$ est appelé **base canonique de $\mathbb{C}$**.

Le corps $\mathbb{C}$ est appelé **corps des nombres complexes.**

La forme $M_{a,b}$ est la **forme matricielle** d'un nombre complexe et la forme $a + bi$ en est la **forme algébrique.**

C'est cette dernière forme que nous utiliserons généralement.

Si z est un nombre complexe de la forme $a + ib$, on dit que a est **la partie réelle** de z, et b **la partie imaginaire** de z.

On note : $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.

Tout nombre complexe de partie imaginaire nulle est un réel ; tout nombre complexe de partie réelle nulle est appelé **nombre imaginaire pur** ; on l'écrit ib. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Attention : la partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel et le nombre imaginaire pur ib a pour partie imaginaire le réel b.

2. Forme algébrique des nombres complexes.

Calculs dans $\mathbb{C}$.

2.1 Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes quelconques donnés sous forme algébrique.

Les résultats obtenus à l'aide de la forme matricielle sont traduits par les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}
(z = z') &\iff (a = a' \text{ et } b = b')\\
(z = 0) &\iff (a = 0 \text{ et } b = 0)\\
z + z' &= (a + a') + i(b + b')\\
zz' &= (aa' - bb') + i(ab' + ba')\\
\text{si } z \neq 0,\ \frac{1}{z} &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2}
\end{aligned}}$$

Utilisons la quatrième propriété énoncée ci-dessus pour calculer le carré de i ; nous obtenons : $\boxed{i^2 = -1}$. $i^2 = i \times i = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} = I(-1) = -1$

Remarques : 1. Le carré de i est un réel négatif. Historiquement, c'est la recherche de " nombres " dont le carré soit égal à -1 qui a conduit à la découverte progressive de $\mathbb{C}$ par des Italiens au XVI[e] siècle ; une théorie complète n'a été mise au point qu'au XIX[e] siècle.

2. Pour calculer le produit de deux nombres complexes, on utilise le plus souvent les règles de calcul dans un corps commutatif, en tenant compte de l'égalité : $i^2 = -1$.

Exemple : $(3 + 4i)(5 - 2i) = 15 + 20i - 6i - 8i^2$
$$= 15 - (-8) + (20 - 6)i$$
$$= 23 + 14i.$$

Nombres complexes conjugués.

L'expression de l'inverse du nombre complexe non nul $a + ib$ fait apparaître le nombre complexe $a - ib$.

2.2 DÉFINITION : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle nombre complexe conjugué de z, et on note $\bar{z}$, le nombre complexe $a - ib$.

Le nombre complexe conjugué de $\bar{z}$, noté $\bar{\bar{z}}$, est : $a - i(-b) = a + ib = z$.
On dit que z **et** $\bar{z}$ **sont des nombres complexes conjugués.**

Propriétés.

2.3 Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes quelconques.
Calculons : $\overline{z + z'}$, $\overline{zz'}$, $z\bar{z}$, $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.

$\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \bar{z} + \overline{z'}$;
$\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = (a - ib)(a' - ib') = \bar{z}\,\overline{z'}$;
$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$;
$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\mathcal{R}(z)$;
$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i\,\mathcal{I}(z)$.

Résumons toutes les propriétés obtenues dans le tableau suivant :

$\bar{\bar{z}} = z$	(1)	$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$	(5)
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$	(2)		
$\overline{zz'} = \bar{z}\,\overline{z'}$	(3)	$\mathcal{I}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$	(6)
$z\bar{z} = a^2 + b^2$	(4)		

Des trois premières propriétés, nous déduisons le théorème suivant :

2.4 THÉORÈME : L'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \bar{z}$$
est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$. $f^2 = id$

Démonstration :

f est involutive, c'est-à-dire f satisfait à l'égalité : $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

$(\forall z \in \mathbb{C}, \bar{\bar{z}} = z) \Longleftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C}, f[f(z)] = z) \Longleftrightarrow (f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$.

f **est bijective.** $(f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \iff (f = f^{-1})$.

f **est un endomorphisme de $(\mathbb{C}, +)$.**

$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}) \iff (\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z + z') = f(z) + f(z'))$.

f **est un endomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$.**

$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}) \iff (\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(zz') = f(z) f(z'))$. ■

Des propriétés (5) et (6), nous déduisons le théorème suivant :

2.5 THÉORÈME : Soit z un nombre complexe quelconque; on a les deux équivalences suivantes : $(z \in \mathbb{R}) \iff (z = \bar{z})$,

$$(z \in i\mathbb{R}) \iff (z = -\bar{z}).$$

Démonstration :

$$(z \in \mathbb{R}) \iff (\mathfrak{I}(z) = 0) \iff \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = 0\right) \iff (z = \bar{z}).$$

$$(z \in i\mathbb{R}) \iff (\mathfrak{R}(z) = 0) \iff \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 0\right) \iff (z = -\bar{z}). \quad ■$$

Applications pratiques.

2.6 Calcul de l'inverse d'un nombre complexe non nul. L'inverse d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$ est : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$.

Exemple.

Calcul de $\dfrac{1}{-3 + 4i}$.

On a :

$\overline{-3 + 4i} = -3 - 4i$.

Donc :

$$\frac{1}{-3 + 4i} = \frac{-3 - 4i}{(-3)^2 + 4^2} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i.$$

Calcul d'un quotient. Soit (z, z') un élément de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$; on a : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\bar{z'}}{z'\bar{z'}}$.

Exemple.

Calcul de $\dfrac{2 - 3i}{1 + i}$.

On a :

$$\frac{2 - 3i}{1 + i} = \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 3 + i(-2 - 3)}{1 + 1}$$

$$= \frac{-1 - 5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$$

Module d'un nombre complexe.

L'expression du produit d'un nombre complexe $a + ib$ par son nombre complexe conjugué fait apparaître le nombre réel positif $a^2 + b^2$.

2.7 DÉFINITION : Soit z un nombre complexe.
On appelle module de z, et on note $|z|$, le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$.

Si $z = a + ib$, on a : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples.
$|0| = 0$, $|1| = 1$, $|i| = 1$, $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|1 - 3i| = \sqrt{10}$.

Remarque : Si z est un nombre réel a, son module est égal à $\sqrt{a^2}$, c'est-à-dire à la valeur absolue de a ; nous avons déjà noté : $\sqrt{a^2} = |a|$.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Propriétés.

2.8 Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes quelconques.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

inégalité triangulaire

$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	(1)	$\Re(z) \leqslant \lvert z\rvert$	(4)
$(\lvert z\rvert = 0) \Longleftrightarrow (z = 0)$	(2)	$\Im(z) \leqslant \lvert z\rvert$	(5)
$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\,\lvert z'\rvert$	(3)	$\lvert z + z'\rvert \leqslant \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	(6)

Démonstration :

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\bar{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$;
2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $(|z| = 0) \Longleftrightarrow (a^2 + b^2 = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0) \Longleftrightarrow (z = 0)$;
3. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|zz'| = \sqrt{(zz')(\overline{zz'})} = \sqrt{zz'\bar{z}\bar{z'}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\bar{z'}} = |z|\,|z'|$;
4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) = a \leqslant \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$;
5. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Im(z) = b \leqslant \sqrt{b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$;
6. Les deux membres de cette inégalité sont positifs ; il suffit donc de démontrer : $|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$.
Calculons : $|z + z'|^2$.
$|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z'}) = z\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z} + z'\bar{z'} = |z|^2 + (z\bar{z'} + \bar{z}z') + |z'|^2$.
Or : $z\bar{z'} + \bar{z}z' = z\bar{z'} + \overline{z\bar{z'}} = 2\Re(z\bar{z'})$.
D'après (4), on a donc : $z\bar{z'} + \bar{z}z' \leqslant 2|z\bar{z'}| = 2|z|\,|\bar{z'}| = 2|z|\,|z'|$.
On a donc : $|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z|\,|z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$. ■

De la propriété (3), nous déduisons le théorème suivant :

2.9 THÉORÈME : L'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$z \longmapsto |z|$$

est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Démonstration :

$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \; |zz'| = |z|\,|z'|) \Longrightarrow (\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2}, \; f(zz') = f(z)\,f(z'))$. ■

Remarque : Tout réel positif est égal à son module, donc f est surjective.
1 et i ont pour module 1, donc f n'est pas injective.

Nous démontrons aussi le théorème suivant :

2.10 **THÉORÈME : Soient z et z' deux nombres complexes non réels. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :**
(1) $z = z'$.
(2) **z et z' ont même partie réelle, même module et des parties imaginaires de même signe.**

Démonstration :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes non réels ; on a donc : $b \neq 0$ et $b' \neq 0$. On a :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2}$;
$\mathfrak{R}(z) = a$ et $\mathfrak{R}(z') = a'$;
$\mathfrak{I}(z) = b$ et $\mathfrak{I}(z') = b'$;

$$(2) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} a = a' \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a'^2 + b'^2} \\ bb' > 0 \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} a = a' \\ b^2 = b'^2 \\ bb' > 0 \end{cases}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}\right) \Longleftrightarrow (1). \;■$$

Interprétation du module d'un nombre complexe.

Espace vectoriel euclidien (rappels).

Nous rappelons (n[os] 2.11 à 2.13) des définitions et des théorèmes étudiés en classe de Première.

Définitions.

2.11 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- Une application f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire symétrique** si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

— $\forall (x, y) \in E^2$, $\quad f(x, y) = f(y, x)$;
— $\forall (x, x', y) \in E^3$, $\quad f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$;
— $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E \times E$, $\quad f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$.

- Si, de plus, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

— $\forall x \in E$, $\quad f(x, x) \geqslant 0$;
— $\forall x \in E$, $\quad ((f(x, x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0_E))$

l'application f est appelée **produit scalaire sur** E et le réel $f(x, y)$ est appelé **produit scalaire des vecteurs** x et y de E et on le note souvent : $x \cdot y$.
Le couple (E, f) est alors appelé **espace vectoriel euclidien** sur $\mathbb{R}$.

• Une application g de E dans $\mathbb{R}_+$ est une **norme** sur E si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
– $\forall x \in E, \quad (g(x) = 0) \iff (x = 0_E)$
– $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad g(\lambda x) = |\lambda| g(x)$
– $\forall (x, y) \in E^2, \quad g(x + y) \leqslant g(x) + g(y)$.
Le réel $g(x)$ est appelé **norme du vecteur** x et est noté le plus souvent : $\| x \|$.

Propriétés.

2.12 Soit (E, f) un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$.

P1 $\quad \forall (x, y) \in E^2, \quad [f(x, y)]^2 \leqslant f(x, x).f(y, y)$

Cette propriété est connue sous le nom d'**inégalité de Cauchy-Schwarz.**

P2 L'application g de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
$$\forall x \in E, \quad g(x) = \sqrt{f(x, x)}$$
est une norme sur E et on a l'égalité suivante :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad [g(x + y)]^2 = [g(x)]^2 + 2f(x, y) + [g(y)]^2$$

On dit que g est **la norme associée au produit scalaire** f.

Cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

2.13 Soient (E, f) un espace vectoriel euclidien de dimension p sur $\mathbb{R}$ et g la norme associée à f.
• Une base $(x_1, \ldots, x_p)$ de E est une **base orthonormée** de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
– chaque vecteur de la base est **unitaire** : $\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad g(x_i) = 1$;
– deux vecteurs quelconques distincts x_i et x_j de la base sont **orthogonaux** : $f(x_i, x_j) = 0$.
• Si x et y sont deux vecteurs quelconques de E, de composantes respectives $\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée quelconque de E, on a :

$$\boxed{f(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mu_i} \quad \text{et} \quad \boxed{g(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}}$$

$\mathbb{C}$ espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$

2.14 **THÉORÈME : L'application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :**
$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$z \longmapsto |z|$$
est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Démonstration :

Soit (λ, z, z') un triplet quelconque de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. On a :

- $(g(z)=0) \Longleftrightarrow (|z|=0) \Longleftrightarrow (z=0)$;
- $g(\lambda z) = |\lambda z| = |\lambda|\,|z| = |\lambda|\,g(z)$;
- $g(z+z') = |z+z'| \leqslant |z| + |z'| = g(z) + g(z')$. ■

2.15 Cherchons à construire un produit scalaire sur $\mathbb{C}$, noté f, tel que :
$\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z,z) = g(z)^2 = |z|^2$.
D'après la propriété P_2 du paragraphe 2.12, si f existe, on a nécessairement :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ f(z,z') = \frac{1}{2}[g(z+z')^2 - g(z)^2 - g(z')^2],\quad \text{et par suite :}$$

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ f(z,z') = \frac{1}{2}[(z+z')(\bar{z}+\overline{z'}) - z\bar{z} - z'\overline{z'}] = \frac{1}{2}(z\overline{z'} + \bar{z}z').$$

THÉORÈME : L'application f de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(z,z') \longmapsto \frac{1}{2}(z\overline{z'} + \bar{z}z')$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$.

Démonstration :

<u>*f* est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{C}$.</u> Soit (λ, z, z', z'') un quadruplet quelconque de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

$$f(z,z') = \frac{1}{2}(z\overline{z'} + \bar{z}z') = \frac{1}{2}(z'\bar{z} + \overline{z'}z) = f(z',z)\,;$$

$$f(\lambda z, z') = \frac{1}{2}(\lambda z\overline{z'} + \overline{\lambda z}z') = \frac{1}{2}(\lambda z\overline{z'} + \lambda\bar{z}z') = \lambda f(z,z')\,;$$

$$f(z+z', z'') = \frac{1}{2}[(z+z')\overline{z''} + (\overline{z+z'})z''] = \frac{1}{2}(z\overline{z''} + \bar{z}z'' + z'\overline{z''} + \overline{z'}z'')$$
$$= f(z,z'') + f(z',z'').$$

<u>*f* est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$.</u> $\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z,z) = \frac{1}{2}(z\bar{z} + \bar{z}z) = z\bar{z} = |z|^2$.

On a donc : $\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z,z) \geqslant 0$;
$\forall z \in \mathbb{C},\ \ ((f(z,z)=0) \Longleftrightarrow (|z|^2 = 0) \Longleftrightarrow (z=0))$. ■

2.16 THÉORÈME : $(1, i)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}$.

Démonstration :

$|1| = 1$; $|i| = 1$ et : $f(1,i) = \frac{1}{2}(1.\bar{i} + \bar{1}.i) = \frac{1}{2}(-i+i) = 0$. ■

<u>**Remarque :**</u> Soient z et z' deux nombres complexes quelconques de composantes respectives $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ dans la base $(1, i)$.

On a : $f(z,z') = \frac{1}{2}[z\overline{z'} + \bar{z}z'] = \frac{1}{2}[(a+ib)(a'-ib') + (a-ib)(a'+ib')]$
$= aa' + bb'$.

On retrouve l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée.

3. Représentation géométrique.

Nous rappelons quelques résultats connus que nous reprendrons en détail au chapitre 4 de ce livre.
Soit P un plan géométrique. L'ensemble des vecteurs de ce plan est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, appelé plan vectoriel et noté généralement $\vec{P}$. Il a été vu en classe de Première que P est un plan affine, c'est-à-dire un espace affine associé au plan vectoriel $\vec{P}$.
Comme il est d'usage, nous noterons $\vec{u}$, $\vec{v}$, etc. les vecteurs de $\vec{P}$ et A, B, etc. les points de P.
Soit O un point quelconque de P ; l'application de P dans $\vec{P}$ qui, à tout point M de P, associe la classe du bipoint (O, M), notée $\vec{OM}$, est une bijection. Cette bijection permet de représenter les vecteurs de $\vec{P}$ par des points de P.
$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$; d'après le théorème 4.3 du chapitre 1, il existe une bijection de $\mathbb{C}$ sur le plan vectoriel $\vec{P}$.
On peut donc représenter un nombre complexe par un vecteur de $\vec{P}$ ou par un point de P. $\varphi : P \to \vec{P}$

$O \quad M \mapsto \vec{OM}$

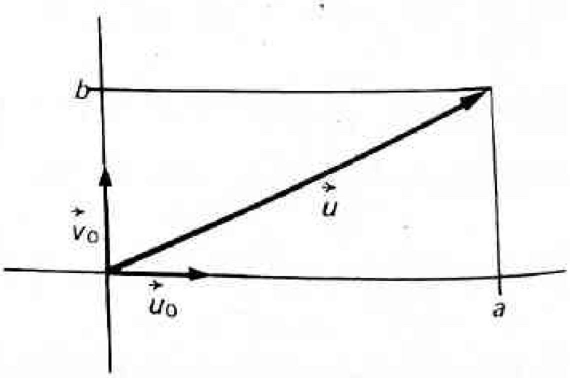
Représentation d'un nombre complexe dans un plan vectoriel euclidien.

Dans le paragraphe précédent nous avons démontré que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$; nous choisissons donc un plan vectoriel $\vec{P}$ muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien ; nous notons $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{P}$ et $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

3.1 Soit une base orthonormée $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ de $\vec{P}$. Considérons l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\vec{P}$ qui, à tout nombre complexe z de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base $(1, i)$, associe le vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$.

D'après le théorème 4.3 du chapitre 1, l'application f est un isomorphisme d'espace vectoriel. On a la représentation géométrique ci-contre :

z est appelé l'**affixe de** $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{u}$ est appelé le **vecteur image** de z.



Remarques : 1. $\vec{u}_0$ a pour affixe 1 et $\vec{v}_0$ a pour affixe i.
2. Les vecteurs images de z et de $-z$ sont opposés.
3. Le module de z est égal à la norme de son vecteur image.

Représentation d'un nombre complexe dans un plan affine euclidien.

Rappels.

3.2 • Le plan affine P associé au plan vectoriel $\vec{P}$ est un **plan affine euclidien** si et seulement si $\vec{P}$ est un espace vectoriel euclidien.

• Les **coordonnées d'un point M** quelconque de P dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$.

• Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de P est un **repère orthonormé** si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\vec{P}$.

• L'application d de $P \times P$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $d : \begin{array}{l} P \times P \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (A, B) \longmapsto \|\overrightarrow{AB}\| \end{array}$

satisfait aux trois propriétés suivantes :

$\forall (A, B) \in P^2, \quad (d(A, B) = 0) \Longleftrightarrow (A = B),$

$\forall (A, B) \in P^2, \quad d(A, B) = d(B, A),$

$\forall (A, B, C) \in P^3, \quad d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B).$

On dit que d est une **distance sur P** et on note **AB** la distance de A à B.

• Soient A et B deux points quelconques de P de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de P.

On a l'égalité suivante : $AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Représentation d'un nombre complexe.

3.3 Soit $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ un repère orthonormé de P.

L'application f de $\mathbb{C}$ dans P qui, à tout nombre complexe z de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$, associe le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ de P, est une bijection.

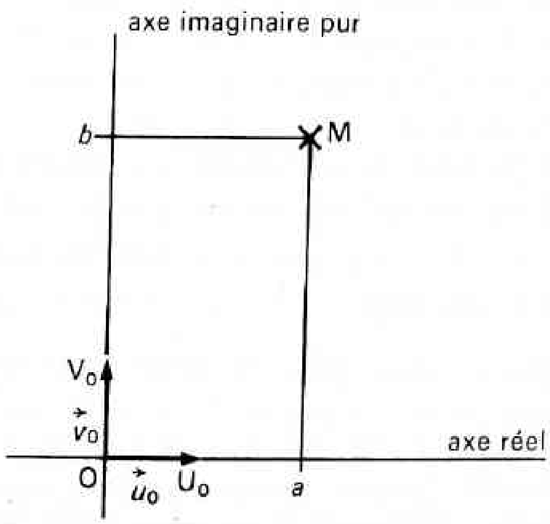
On a donc la représentation géométrique ci-contre :

z est appelé **l'affixe** de M et M est appelé le **point image** de z.

La droite (OU_0) est l'ensemble des points images des nombres réels ; on l'appelle **l'axe réel.**

La droite (OV_0) est l'ensemble des points images des nombres imaginaires purs ; on l'appelle **l'axe imaginaire pur.**

On appelle souvent P **plan complexe** ou **plan de Cauchy**.



Remarques : 1. Les nombres complexes 1 et i ont pour points images respectifs U_0 et V_0.
2. Les points images de z et de $-z$ sont symétriques par rapport à O.
3. Les points images de z et de $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.
4. Le module de z est égal à la distance de O à son point image.

Soient deux points quelconques M et M′ de P, d'affixes respectives z et z'.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont donc aussi pour affixes respectives z et z'.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$; son affixe est donc $z' - z$, c'est-à-dire la différence entre l'affixe de M′ et l'affixe de M.
On a donc la propriété suivante :

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égale à la différence entre l'affixe de M′ et l'affixe de M.

Dans les problèmes, on considère souvent les deux représentations d'un nombre complexe, et selon la nature des questions posées, on choisit l'une d'elles plutôt que l'autre.

4. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Équations : $z^2 = Z$.

4.1 Soit Z un nombre complexe non nul.
Cherchons s'il existe des nombres complexes dont le carré est égal à Z. S'il en existe, chacun de ces nombres complexes est appelé une racine carrée de Z. La détermination de l'ensemble de ces nombres complexes est la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 = Z$.
Dans certains cas, nous connaissons des racines de cette équation.
• Si Z est un réel strictement positif, nous savons qu'il existe deux réels, notés $\sqrt{Z}$ et $-\sqrt{Z}$, dont le carré est égal à Z.
Par exemple, si $Z = 3$, nous avons : $(\sqrt{3})^2 = 3$, et $(-\sqrt{3})^2 = 3$.
• Si Z est égal à -1 le nombre complexe i et, par suite, le nombre complexe $-i$, sont des nombres dont le carré est égal à -1.
Nous avons : $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = -1$.
• Si Z est un réel strictement négatif, et si nous posons : $Z = -a$, nous savons que a est un réel strictement positif; nous connaissons les deux nombres complexes $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$ dont le carré est égal à Z.
Par exemple, si $Z = -7$, nous avons : $(i\sqrt{7})^2 = -7$ et $(-i\sqrt{7})^2 = -7$.

D'une façon générale, nous allons démontrer le théorème suivant :

4.2 **THÉORÈME : Quel que soit le nombre complexe non nul Z, il existe deux nombres complexes opposés dont le carré est égal à Z.**

Démonstration :

Soit Z un nombre complexe non nul donné sous la forme $X + iY$.
Cherchons, sous la forme $x + iy$, les nombres complexes z tels que : $z^2 = Z$.
Nous avons les équivalences suivantes :

$$(z^2 = Z) \Longleftrightarrow ((x+iy)^2 = X + iY) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \end{cases} \quad (\mathrm{I})\right).$$ $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$

1^er^ cas : $Y = 0$. On a :

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = 0 \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -X \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = X \end{cases}\right).$$

On a donc les deux cas suivants :

- $X > 0$: $(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = X \end{cases}\right) \Longleftrightarrow (z = +\sqrt{X} \text{ et } z = -\sqrt{X})$;
- $X < 0$: $(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -X \end{cases}\right) \Longleftrightarrow (z = i\sqrt{-X} \text{ et } z = -i\sqrt{-X})$.

2^e^ cas : $Y \neq 0$. On peut résoudre le système (1) directement, mais les calculs sont plus simples si l'on utilise le théorème 2.10. On a :

$$(z^2 = Z) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \mathfrak{R}(z^2) = \mathfrak{R}(Z) \\ |z^2| = |Z| \\ \mathfrak{I}(z^2)\,\mathfrak{I}(Z) > 0 \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ 2xyY > 0 \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{X^2 + Y^2}) \\ 2xyY > 0 \end{cases}\right).$$

On a alors les deux cas suivants :

- $Y > 0$. On a :

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{X^2 + Y^2}) \\ xy > 0 \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = +\sqrt{\frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \\ y = +\sqrt{\frac{1}{2}(-X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \\ y = -\sqrt{\frac{1}{2}(-X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \end{cases}\right).$$

On obtient donc deux valeurs opposées pour z.

- $Y < 0$. On a :

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{X^2 + Y^2}) \\ xy < 0 \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = +\sqrt{\frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \\ y = -\sqrt{\frac{1}{2}(-X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \\ y = +\sqrt{\frac{1}{2}(-X + \sqrt{X^2 + Y^2})} \end{cases}\right).$$

On obtient encore deux valeurs opposées pour z. ■

Nous avons donc démontré que, pour tout complexe Z non nul, il existe deux nombres complexes opposés dont le carré est égal à Z; on appelle ces nombres les **racines carrées de** Z. On se gardera bien de confondre les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul avec la racine carrée (positive) d'un réel positif. En particulier le symbole $\sqrt{\ }$ devra être exclusivement réservé à cette dernière.

Remarque : Il ne nous paraît pas judicieux d'apprendre par cœur les résultats précédents dans le cas général; il est préférable de retenir la méthode de résolution et de refaire les calculs dans chaque exercice.

Exemples.

1. Cherchons les racines carrées du nombre complexe $2 + 3i$.
Soit $z = x + iy$ une racine carrée de $2 + 3i$. On a :

$$(z^2 = 2 + 3i) \iff \left(\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{4+9} \\ 6\,xy > 0 \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{13} \\ xy > 0 \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{13}} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2+\sqrt{13}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{13}} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2+\sqrt{13}} \end{cases}\right).$$

Les deux racines carrées cherchées sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2+\sqrt{13}} + i\sqrt{-2+\sqrt{13}}\right]$$

$$\text{et} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2+\sqrt{13}} + i\sqrt{-2+\sqrt{13}}\right].$$

2. Cherchons les racines carrées du nombre complexe $4 - 3i$.
Des calculs analogues donnent les deux racines carrées suivantes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - i) \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(3 - i).$$

Équations du second degré à coefficients complexes.

4.3 Soient a un nombre complexe non nul, b et c deux nombres complexes quelconques. Cherchons s'il existe des nombres complexes z qui satisfont à : $az^2 + bz + c = 0$.
S'il en existe, chacun de ces nombres complexes est appelé une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré : $az^2 + bz + c = 0$. (1)
La détermination de l'ensemble S des solutions est appelée la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1).
Pour tout complexe z, nous avons les égalités :

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{bz}{a} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le nombre complexe a est non nul; il en résulte que $az^2 + bz + c$ est nul si et seulement si $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est nul.
L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1) est donc l'ensemble des nombres complexes pour lesquels on a : $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. (2)

Pour déterminer S, il suffit donc de déterminer les racines carrées de $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$, et envisageons les deux cas suivants : $\Delta = 0$, $\Delta \neq 0$.

• $\Delta = 0$.

L'ensemble S est l'ensemble des nombres complexes pour lesquels on a : $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Nous avons : $\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0\right) \Longleftrightarrow \left(z = -\frac{b}{2a}\right)$.

Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation (1) a une seule solution dans $\mathbb{C}$; nous avons : $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

• $\Delta \neq 0$.

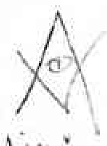
Soient δ et $-\delta$ les deux racines carrées de $b^2 - 4ac$.

Nous avons :

$$\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \Longleftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \text{ ou } z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(z = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - \delta}{2a}\right).$$

Si $b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation (1) a deux solutions dans $\mathbb{C}$; nous avons : $S = \left\{\frac{-b + \delta}{2a}, \frac{-b - \delta}{2a}\right\}$.



discri-minant réduit

Remarque : Il est parfois commode de poser : $b = 2b'$; on pose alors : $\Delta' = b'^2 - ac$.

Soient δ' et $-\delta'$ les deux racines carrées de Δ'.

Nous avons : $S = \left\{\frac{-b' + \delta'}{a}, \frac{-b' - \delta'}{a}\right\}$.

Cas particulier : *a, b, c* sont des réels.

4.4 Supposons que a soit un réel non nul, et que b et c soient deux réels quelconques ; il en résulte que Δ est un réel.

• **Si Δ est nul,** on retrouve le résultat : $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

• **Si Δ est positif,** les deux racines carrées de Δ sont les réels $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$.
L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1) est :
$S = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

• **Si Δ est négatif,** les deux racines carrées de Δ sont les nombres imaginaires purs : $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$.
L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1) est :
$S = \left\{\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$.

Remarque : Dans le cas d'une équation à coefficients réels, si Δ est positif ou nul, cette équation admet dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ le même ensemble de solutions. Si Δ est négatif, cette équation a deux solutions dans $\mathbb{C}$; elle n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.
Calculons Δ : $\Delta = 1 - 4 = -3$.
Les deux racines carrées de Δ sont $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$; l'équation a donc deux solutions : $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + i)\,z^2 + 2(2 + i)\,z + 4 = 0$.
Calculons Δ' : $\Delta' = (2 + i)^2 - 4(1 + i) = 3 + 4i - 4 - 4i = -1$.
Les racines carrées de Δ' sont i et $-i$; l'équation a donc deux solutions :
$z_1 = \dfrac{-(2 + i) + i}{1 + i}$ et $z_2 = \dfrac{-(2 + i) - i}{1 + i}$.
Mettons z_1 et z_2 sous forme algébrique ; nous avons :

$$z_1 = -\frac{2}{1 + i} = \frac{-2(1 - i)}{1 - i^2} = -1 + i,$$

$$z_2 = \frac{-2 - 2i}{1 + i} = \frac{-2(1 + i)}{(1 + i)} = -2.$$

5. Forme trigonométrique des nombres complexes.

Étude de l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1.

Le module de 0 est 0 ; donc tout nombre complexe de module 1 est non nul. $\mathcal{U}$ est donc inclus dans $\mathbb{C}^*$.

$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \mid a^2 + b^2 = 1$

$= \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_2 \mid \det(M_{a,b}) = 1\}$

groupe linéaire spéciale

Structure.

5.1 THÉORÈME : $(\mathcal{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Démonstration :
Soient z et z' deux éléments quelconques de $\mathcal{U}$.

- $|zz'| = |z|\,|z'| = 1$; donc zz' est un élément de $\mathcal{U}$.
- L'élément neutre dans $\mathbb{C}^*$ pour $\times$ est égal à 1 ; c'est un élément de $\mathcal{U}$.
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = 1$; donc $\dfrac{1}{z}$ est un élément de $\mathcal{U}$. ■

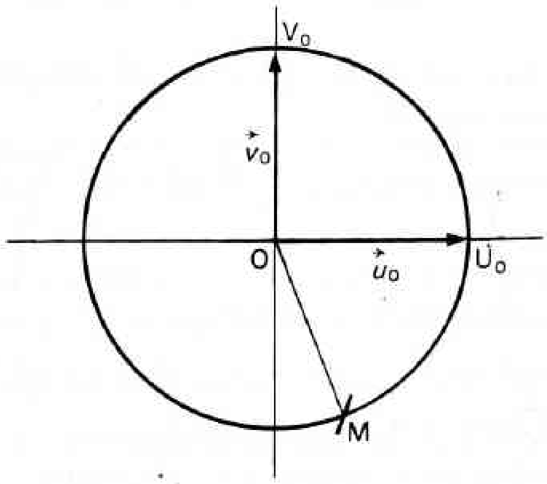
Remarque : Soit z un élément quelconque de $\mathcal{U}$. On a :
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$. Donc l'inverse $\dfrac{1}{z}$ d'un nombre complexe z de module 1 est égal à son nombre complexe conjugué $\bar{z}$.

Représentation géométrique.

5.2 Soient P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\vec{P}$ et $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ un repère orthonormé de P.

Le point image de tout nombre complexe z de module 1 est un point M de P qui satisfait à : $OM = 1$.

L'ensemble des points images des éléments de $\mathcal{U}$ est donc le cercle de centre O et de rayon 1 dans P.



Si le plan vectoriel $\vec{P}$ est orienté de façon que la base $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ soit une base orthonormée directe (ou positive), le repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ de P est un repère orthonormé direct (ou positif). Le cercle de centre O et de rayon 1 est alors appelé **cercle trigonométrique** et noté U. Il existe donc une bijection entre l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1, et l'ensemble des points du cercle trigonométrique U.

En classe de Première, nous avons vu qu'à tout point M du cercle trigonométrique on peut associer une infinité de réels, tels que la différence de deux quelconques d'entre eux soit un multiple de 2π.

Considérons la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ((x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = k.2\pi))$.

Cette relation est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$; on l'appelle relation de **congruence modulo** 2π ; on écrit : $x \equiv y \ (2\pi)$ et on note $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x.

A tout point M du cercle trigonométrique est donc associée une classe d'équivalence $\dot{x}$ pour cette relation ; la classe $\dot{x}$ est appelée la **mesure en radians de l'angle des vecteurs** $\overrightarrow{OU_0}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Un élément quelconque y de $\dot{x}$ est appelé une **détermination de la mesure en radians de l'angle** $(\overrightarrow{OU_0}, \overrightarrow{OM})$.

Si y est une détermination de la mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OU_0}, \overrightarrow{OM})$, le point M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$.

Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π ; les coordonnées du point M ne dépendent donc que de $\dot{x}$.

Argument d'un nombre complexe.

Argument d'un nombre complexe de module 1.

5.3 **DÉFINITIONS : Soient z_0 un nombre complexe de module 1 et M_0 son point image sur le cercle trigonométrique. Soient O et U_0 les points images respectifs de 0 et de 1.**
On appelle Argument de z_0, et on note Arg z_0, l'angle des vecteurs $\overrightarrow{OU_0}$ et $\overrightarrow{OM_0}$.
On appelle argument de z_0, et on note arg z_0, une détermination quelconque de la mesure en radians de Arg z_0.

__Remarques :__ 1. Un nombre complexe z_0 de module 1 a une infinité d'arguments et on a la proposition suivante :
$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad (x = \arg z_0 \text{ et } x' = \arg z_0) \Longleftrightarrow (x \equiv x'(2\pi))$.
2. Si le réel x est un argument du nombre complexe z_0 de module 1, le point image M_0 de z_0 sur le cercle trigonométrique U a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ et par suite z_0 est égal à $\cos x + i \sin x$.
3. Tout nombre complexe z_0 de module 1 est donc déterminé par la donnée de l'un de ses arguments. Nous emploierons la notation $[1, x]$ pour désigner le nombre complexe de module 1 et d'argument x. On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{(z_0 = [1, x]) \Longleftrightarrow (z_0 = \cos x + i \sin x)}$$

Exemples.

$1 = [1, 0], \qquad -1 = [1, \pi], \qquad i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right].$

Argument d'un nombre complexe non nul.

5.4 **THÉORÈME : Soit z un nombre complexe non nul.**
Il existe un unique nombre complexe z_0 de module 1 tel que : $z = |z| z_0$.

Démonstration :
Le nombre complexe z n'est pas nul ; donc son module $|z|$ n'est pas nul. Il en résulte :
$(z = |z| z_0) \Longleftrightarrow \left(z_0 = \frac{z}{|z|}\right)$. Calculons $\left|\frac{z}{|z|}\right|$.
Nous avons : $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$.
Il existe donc un seul nombre complexe z_0 de module 1 qui satisfait à l'égalité : $z = |z| z_0$; c'est le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$. ■

__Remarque :__ Si z a pour forme algébrique $a + ib$, le nombre complexe z_0 est égal à $\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}$. Les points images dans un plan de Cauchy de z et z_0 ont des coordonnées proportionnelles ; ils sont donc alignés avec le point O.

5.5 DÉFINITION : Soit z un nombre complexe non nul; soit z_0 le nombre complexe de module 1 tel que : $z = |z| z_0$.
On appelle Argument de z, et on note Arg z, l'Argument de z_0.
On appelle argument de z, et on note arg z, un argument de z_0.

Remarques : 1. Le nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si M, M_0, U_0 sont les points images respectifs dans un plan de Cauchy de z, z_0 et 1, on a : $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z_0 = \text{angle}\left(\overrightarrow{OU_0}, \overrightarrow{OM_0}\right) = \text{angle}\left(\overrightarrow{OU_0}, \overrightarrow{OM}\right)$. Donc l'Argument de z est l'angle $\left(\overrightarrow{OU_0}, \overrightarrow{OM}\right)$.

2. Tout nombre complexe z non nul est déterminé par la donnée de son module r et de l'un de ses arguments x. Nous désignerons z par $[r, x]$ et nous dirons que z est mis sous **forme trigonométrique.**
On a : $z = |z| z_0 = r[1, x] = r(\cos x + i \sin x)$.
On a donc l'équivalence suivante :

$$\boxed{(z = [r, x]) \iff (z = r(\cos x + i \sin x)).}$$

3. Le point image d'un nombre complexe z non nul, de module r et d'argument x, a pour coordonnées $\begin{pmatrix} r \cos x \\ r \sin x \end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$.

4. On a : $\forall z_0 \in \mathcal{U}$, $0 = |0| z_0$. Avec les définitions précédentes, l'Argument du nombre complexe nul 0 n'est pas déterminé. C'est pour cette raison que la définition des arguments ne s'applique pas à 0.

Exemples.

Mettons sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $7, -5i, 1 - i$.

- $7 = [7, 0]$.
- $-5i = 5(-i) = 5\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = \left[5, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- $|1 - i| = \sqrt{2}$; $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

$1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$.

Relations entre la forme algébrique et la forme trigonométrique.

5.6 Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $[r, x]$. On a les équivalences suivantes :

$$\boxed{\begin{gathered}(a + ib = [r, x]) \iff (a = r \cos x \text{ et } b = r \sin x) \\ (a + ib = [r, x]) \iff \left(\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}\right)\end{gathered}}$$

Remarque : Si z n'est pas un imaginaire pur, a est non nul. Des égalités :
$a + ib = [r, x] = r(\cos x + i \sin x)$, il résulte que l'on a : $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$.

L'égalité : $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$ ne permet pas de trouver un argument du nombre complexe $a + ib$, car elle permet de déterminer x modulo π et non modulo 2π.

Propriétés.

5.7 Soient $z = [r, x]$ et $z' = [r', x']$ deux nombres complexes quelconques non nuls.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$([r, x] = [r', x']) \Longleftrightarrow (r = r' \text{ et } x \equiv x' \ (2\pi)) \quad (1)$$
$$(z = [r, x]) \Longleftrightarrow (\bar{z} = [r, -x]) \quad (2)$$
$$(z = [r, x]) \Longleftrightarrow (-z = [r, x + \pi]) \quad (3)$$
$$zz' = [r, x] \times [r', x'] = [rr', x + x'] \quad (4)$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{[r, x]}{[r', x']} = \left[\frac{r}{r'}, x - x'\right] \quad (5)$$

Démonstration :
1. Cette équivalence est une conséquence immédiate de la définition de la forme trigonométrique d'un nombre complexe.
2. On a : $|\bar{z}| = |z| = r$. Cherchons l'argument de $\bar{z}$:
$$(z = [r, x]) \Longleftrightarrow (z = r(\cos x + i \sin x)) \Longleftrightarrow (\bar{z} = r(\cos x - i \sin x))$$
$$\Longleftrightarrow (\bar{z} = r(\cos(-x) + i \sin(-x))) \Longleftrightarrow (\bar{z} = [r, -x])$$
3. On a : $|-z| = |z| = r$. Cherchons l'argument de $-z$:
$$(z = [r, x]) \Longleftrightarrow (z = r(\cos x + i \sin x)) \Longleftrightarrow (-z = r(-\cos x + i(-\sin x)))$$
$$\Longleftrightarrow (-z = r(\cos(x + \pi) + i \sin(x + \pi)))$$
$$\Longleftrightarrow (-z = [r, x + \pi]).$$
4. On a : $|zz'| = |z|\,|z'| = rr'$. Cherchons l'argument de zz' :
$$zz' = [r, x][r', x'] = r(\cos x + i \sin x)\, r'(\cos x' + i \sin x'),$$
$$= rr'[\cos x \cos x' - \sin x \sin x' + i(\cos x \sin x' + \sin x \cos x')],$$
$$= rr'[\cos(x + x') + i \sin(x + x')] = [rr', x + x'].$$
5. On a : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{r}{r'}$. Cherchons l'argument de $\frac{z}{z'}$:
$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2} = \frac{[r, x][r', -x']}{r'^2} = \frac{[rr', x - x']}{r'^2} = \frac{rr'(\cos(x - x') + i \sin(x - x'))}{r'^2}$$
$$= \frac{r}{r'}(\cos(x - x') + i \sin(x - x')) = \left[\frac{r}{r'}, x - x'\right]. \quad \blacksquare$$

Exemple.

Mettons sous forme trigonométrique $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.
On a : $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$.

Donc : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$.

De même, d'après l'exemple du paragraphe 5.5, on a : $1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$.

Donc : $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \dfrac{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\dfrac{2}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{12}\right]$.

D'autre part, on a : $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \dfrac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}{2}$.

Nous en déduisons : $\sqrt{2}\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{2}\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$,

ou encore : $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

5.8 THÉORÈME : L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}$ définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$$
$$x \longmapsto \cos x + i \sin x$$

est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{U}, \times)$.

Démonstration :
Il suffit de démontrer la proposition suivante :
$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + x') = f(x)\, f(x')$.
Soient x et x' deux réels quelconques. On a :
$f(x + x') = \cos(x + x') + i\sin(x + x') = [1, x + x']$,
$\qquad = [1, x][1, x'] = (\cos x + i\sin x)(\cos x' + i\sin x')$,
$\qquad = f(x)\, f(x')$. ■

Remarque : L'application f est surjective, mais non injective.

Formule de Moivre.

5.9 THÉORÈME : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$.

Démonstration :
Soient x un réel quelconque et n un entier relatif quelconque.

- $n = 0$ $\quad (\cos x + i\sin x)^0 = 1 = \cos 0 + i\sin 0$.
- $n \in \mathbb{Z}_+^*$ $\quad$ Nous avons : $(\cos x + i\sin x)^n = [f(x)]^n$;

or f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{U}, \times)$; donc :
$[f(x)]^n = f(\underbrace{x + \dots + x}_{n \text{ fois}}) = f(nx) = \cos nx + i\sin nx$.

- $n \in \mathbb{Z}_-^*$ $\quad$ Posons : $n' = -n$; n' est alors un élément de $\mathbb{Z}_+^*$ et nous avons :

$(\cos x + i\sin x)^n = (\cos x + i\sin x)^{-n'} = \dfrac{1}{(\cos x + i\sin x)^{n'}} = \dfrac{1}{\cos n'x + i\sin n'x}$

$$= \frac{1}{[1, n'x]} = [1, -n'x] = [1, nx] = \cos nx + i\sin nx. \quad ■$$

6. Racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^n = Z$.

6.1 Soient Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cherchons à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^n = Z$, c'est-à-dire cherchons l'ensemble S des nombres complexes z dont la puissance n-ième soit égale à Z. Il est facile de calculer la puissance n-ième d'un nombre complexe, si ce dernier est donné sous forme trigonométrique. Nous supposons donc que Z est donné par son module r et l'un de ses arguments x et nous cherchons à déterminer le module ρ et l'un des arguments α de chacun des nombres complexes z.

Nous avons :

$(z^n = Z) \iff ([\rho, \alpha]^n = [r, x]) \iff ([\rho^n, n\alpha] = [r, x])$

$\iff (\rho^n = r \text{ et } n\alpha \equiv x\,(2\pi)) \iff (\rho^n = r \text{ et } (\exists k \in \mathbb{Z},\ n\alpha = x + k.2\pi))$.

Considérons d'abord l'équation $\rho^n = r$, où ρ et r sont deux réels strictement positifs. Nous démontrons au chapitre 5 du tome 2 que cette équation admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+^*$, appelée **racine n-ième de r** et notée $\sqrt[n]{r}$.

Tous les nombres complexes qui appartiennent à l'ensemble S ont donc le même module $\sqrt[n]{r}$.

D'autre part, de l'égalité : $n\alpha = x + k.2\pi$, nous déduisons : $\alpha = \frac{x}{n} + k.\frac{2\pi}{n}$.

Si k et k' sont deux entiers relatifs dont la différence est un multiple de n, les réels $\frac{x}{n} + \frac{k.2\pi}{n}$ et $\frac{x}{n} + \frac{k'.2\pi}{n}$ diffèrent d'un multiple de 2π; ils représentent donc deux arguments d'un même nombre complexe.

OLYMPE

Raçinos n-iémos

Pour trouver tous les nombres complexes z, il suffit donc de considérer n valeurs consécutives de l'entier k, par exemple : $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

L'ensemble S est donc formé des n nombres complexes $\left[\sqrt[n]{r}, \frac{x}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right]$ où k appartient à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$; ces nombres complexes sont appelés les **racines n-ièmes** du nombre complexe non nul Z.

THÉORÈME : Soient Z un nombre complexe non nul égal à $[r, x]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Z admet n racines n-ièmes, $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ qui sont définies par :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \qquad z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{x}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right].$$

Exemples.

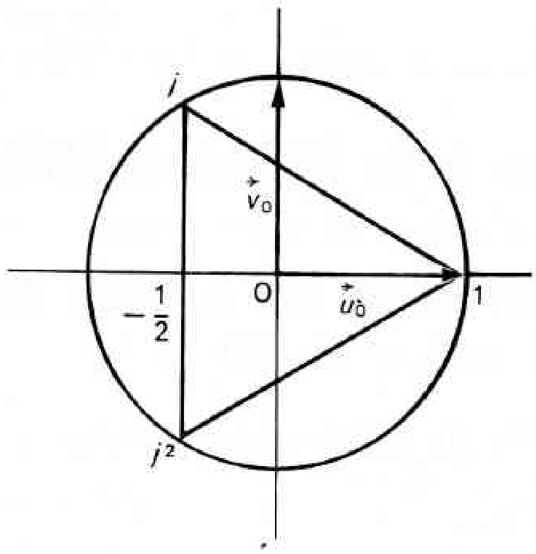
1. Recherchons les racines quatrièmes de $\sqrt{3} + i$.
Mettons $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique :
$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$.

Les racines quatrièmes de $\sqrt{3} + i$ sont donc :
$\left[\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{24}\right]$, $\left[\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{24} + \pi\right]$, $\left[\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Recherchons les racines cubiques (troisièmes) de 1.
On a : $1 = [1, 0]$ et $\sqrt[3]{1} = 1$.

Les trois racines cubiques de 1 sont donc : $[1, 0]$, $\left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$, $\left[1, \frac{4\pi}{3}\right]$.

Nous remarquons que le nombre complexe $\left[1, \frac{4\pi}{3}\right]$ est le carré du nombre complexe $\left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$. Il est d'usage de noter ce dernier par j. **Les trois racines cubiques du réel 1 sont donc** $1, j, j^2$. On a aussi : $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$j^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$, et, par suite : $1 + j + j^2 = 0$.
La représentation géométrique des nombres complexes $1, j, j^2$ est donnée par la figure suivante.



Remarques : 1. Dans un plan de Cauchy, les points images des n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul Z de module r appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. Si n est supérieur ou égal à 3, ces points sont situés aux sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans ce cercle.
2. Dans le cas particulier où n est égal à 2, nous avons donné une autre méthode pour calculer les deux racines carrées d'un nombre complexe. On sera amené, suivant les cas, à préférer une méthode à l'autre.

Racines n-ièmes du réel 1.

6.2 Appliquons le théorème 6.1 au cas où Z est égal à 1.
Les n racines n-ièmes de 1, appelées traditionnellement racines n-ièmes de l'unité, sont donc : $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ où k appartient à $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Considérons un nombre complexe non nul Z et supposons que l'on connaisse déjà une racine n-ième de Z ; soit u cette racine. Cherchons à exprimer une racine n-ième quelconque z de Z en fonction de u.

Le nombre complexe Z n'est pas nul ; le nombre complexe u n'est donc pas nul.

Nous avons : $\left(\frac{z}{u}\right)^n = \frac{z^n}{u^n} = \frac{Z}{Z} = 1.$

Le nombre complexe $\frac{z}{u}$ est donc une racine n-ième de l'unité et par suite z est le produit de u par une racine n-ième de l'unité.

THÉORÈME : On obtient les n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les n racines n-ièmes de l'unité.

Exemple.

Recherchons les racines cubiques de 27.
Le réel 3 est une racine cubique de 27 ; les trois racines cubiques de 27 sont donc : 3, $3j$, $3j^2$.

7. Applications à la trigonométrie.

Expression de cos nx et sin nx sous forme de polynômes en cos x et sin x.

7.1 En classe de Première, le calcul trigonométrique a mis en évidence les formules suivantes :
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
La formule de Moivre permet de retrouver ces formules et de calculer $\cos nx$ et $\sin nx$, lorsque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On a : $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$.
Le réel $\cos nx$ est donc la partie réelle de $(\cos x + i \sin x)^n$, et le réel $\sin nx$ en est la partie imaginaire.
En classe de Première, nous avons appris à développer par la formule du binôme toute expression de la forme $(a + b)^n$ lorsque a et b sont deux éléments d'un anneau commutatif. ou deux éléments / $ab = ba$
Nous avons donc :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos^{n-k} x)\, i^k \sin^k x.$$

On obtient alors : $$\cos nx = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos^{n-k} x)\, i^k \sin^k x\right);$$

$$\sin nx = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos^{n-k} x)\, i^k \sin^k x\right).$$

Exemple.

Exprimons $\cos 5x$ et $\sin 5x$ sous forme d'un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.
Nous avons :

$$\cos 5x + i \sin 5x = (\cos x + i \sin x)^5$$
$$= \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x + 10 i^2 \cos^3 x \sin^2 x$$
$$+ 10 i^3 \cos^2 x \sin^3 x + 5 i^4 \cos x \sin^4 x + i^5 \sin^5 x$$

Or on a : $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$.
On obtient donc :

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x,$$
$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Linéarisation.

7.2 Dans certains problèmes, il peut être intéressant de transformer un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$ en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x. On dit alors que l'on a linéarisé le polynôme initial.
En classe de Première, nous avons par exemple linéarisé les polynômes $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ et } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

L'utilisation des nombres complexes permet dans certains cas de simplifier cette linéarisation.

Exemple.

Linéarisons $\cos^7 x$.
Appelons z le nombre complexe égal à $\cos x + i \sin x$.

On a alors : $\cos x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$.

Il en résulte : $\cos^7 x = \dfrac{1}{2^7} (z + \bar{z})^7$.

Calculons $(z + \bar{z})^7$ en utilisant la formule du binôme :

$$(z + \bar{z})^7 = z^7 + 7 z^6 \bar{z} + 21 z^5 \bar{z}^2 + 35 z^4 \bar{z}^3 + 35 z^3 \bar{z}^4 + 21 z^2 \bar{z}^5 + 7 z \bar{z}^6 + \bar{z}^7.$$

Le produit $z\bar{z}$ est égal à 1, on a donc :

$$(z + \bar{z})^7 = z^7 + 7 z^5 + 21 z^3 + 35 z + 35 \bar{z} + 21 \bar{z}^3 + 7 \bar{z}^5 + \bar{z}^7$$
$$= z^7 + \bar{z}^7 + 7(z^5 + \bar{z}^5) + 21(z^3 + \bar{z}^3) + 35(z + \bar{z}).$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$z^n = (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, et $\bar{z}^n = \cos nx - i \sin nx$.

Il en résulte : $z^n + \bar{z}^n = 2 \cos nx$.

Nous en déduisons : $(z + \bar{z})^7 = 2 \cos 7x + 14 \cos 5x + 42 \cos 3x + 70 \cos x$,

puis : $\cos^7 x = \dfrac{1}{2^6} (\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x)$.

EXERCICES

Forme algébrique. Module. Représentation géométrique.

1 Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$(2 + 3i)(-1 + i)$, $\dfrac{2 + i}{i}$, $\dfrac{1}{1 - 4i}$, $\dfrac{1 + i}{1 - i}$,

$\dfrac{(1 + 2i)(-2 + 5i)}{(7 + 3i)(-12 + i)}$, $\dfrac{(1 + i)(4 + 3i)}{(5 - i)(2 + i)}$, $\dfrac{3 + 2i}{2 - 5i}$.

2 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$.

Poser $z = x + iy$ on a $(x^2 - y^2 - x + 2) + i(2xy + y) = 0$

3 Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z satisfait à la relation : $z + \bar{z} = |z|$. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

4 Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que le nombre complexe $z + \dfrac{4}{z}$ soit un nombre réel.

$AM^2 = 4OA^2$
$\to AM = 2OA$
Cercle de centre A et de rayon
$r = 2OA$

5 Soit a un nombre complexe donné. Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que l'on ait : $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$.

$(z-a)(\overline{z-a}) = |z-a|^2 = 4|a|^2$

6 Dans le plan complexe, déterminer et représenter l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que l'on ait : $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$.

7 Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que les points images des nombres complexes 1, z et $1 + z^2$ soient alignés.

8 Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que les points images des nombres complexes i, z et iz soient alignés.

◆ Dans les exercices suivants (nos 9 et 10), on écrira qu'un triangle est équilatéral si et seulement s'il a ses trois côtés isométriques. On verra dans le chapitre 10 une méthode plus simple pour traiter ce genre d'exercices.

9 Déterminer les nombres complexes z tels que dans le plan complexe les points images des nombres complexes i, z et iz soient les sommets d'un triangle équilatéral.

10 Soit a un nombre complexe donné. Déterminer les nombres complexes z tels que, dans le plan complexe, les points images des nombres complexes az^2, a^2z et z^3 soient les sommets d'un triangle équilatéral.

◆ **11** Soient z un nombre complexe et Z le nombre complexe défini par : $Z = \dfrac{z + 1}{z - 1}$.

Dans le plan complexe, on désigne par M le point d'affixe z et par M′ le point d'affixe Z.

1° Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que Z soit un nombre réel.

2° Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

3° Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que les points M et M′ soient alignés avec le point O, origine du repère du plan complexe.

12 Soient z un nombre complexe et M le point image de z dans le plan complexe.

1° Déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que le nombre Z égal à $\frac{z-2}{z+1}$ soit un nombre réel.

2° Déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que le nombre Z égal à $\frac{z-2}{z+1}$ soit un nombre imaginaire pur.

13 Soient P un plan affine euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P. A tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on associe son affixe : $z = x + iy$.

1° Déterminer l'ensemble E_1 des points M de P tels que le produit $(z - 2i)(\bar{z} - 1)$ soit un nombre imaginaire pur.

2° Déterminer l'ensemble E_2 des points M de P tels que le produit $(z - 2i)(\bar{z} - 1)$ soit un nombre réel.

3° Construire ces deux ensembles E_1 et E_2.

14 Soient P un plan affine euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P. Soient A, B, C les points de P d'affixes respectives 1, -1 et $-i$.

Soit f l'application qui, à tout point M de P d'affixe z, distinct de C, associe le point M' de P d'affixe z' égal à : $\frac{iz+1}{z+i}$.

1° Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f(O)$.

2° Démontrer que, si M est distinct des points A et B, alors le point $f(M)$ est distinct des points A et B.

3° Démontrer qu'il existe un nombre complexe k, tel que l'on ait :

$\forall z \in \mathbb{C} - \{1, -1, -i\}, \quad \frac{z'+1}{z'-1} = k\frac{z+1}{z-1}$. NB $k = \dfrac{\frac{z'+1}{z'-1}}{\frac{z+1}{z-1}}$

※ **15** Soient U et V deux nombres complexes quelconques. On considère le nombre complexe $Z = U + iV$. $\begin{cases} U = U_1 + iU_2 \\ V = V_1 + iV_2 \end{cases} \Rightarrow Z = U_1 + iU_2 + iV_1 - V_2 = (U_1 - V_2) + i(V_1 + U_2)$

Démontrer l'équivalence suivante : $|Z|^2 = (U_1 - V_2)^2 + (V_1 + U_2)^2$

$(|Z|^2 = U^2 + V^2) \Longleftrightarrow ((Z = 0) \text{ ou } (U \in \mathbb{R} \text{ et } V \in \mathbb{R}))$.

$\underline{P} \iff (Q \vee R)$ $\underline{\text{mq}}$ $P \wedge \neg Q \Rightarrow R$

et $Q \vee R \Rightarrow \underline{P}$

Équations du second degré.

16 Déterminer les racines carrées du nombre complexe $z = -5 - 12i$.

17 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation en z : $z^2 = 10 - 4i\sqrt{6}$.

18 1° Déterminer, sous leur forme algébrique, les racines carrées du nombre complexe $-5 + 12i$.

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$.

19 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$z^2 + (10i - 7)z - (11 + 41i) = 0$.

20 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0$.

21 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4(6+i)z + 3(63 + 16i) = 0$.

22 Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation :
$iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

23 1° Dans le plan complexe, construire les points d'affixes respectives les nombres complexes : $a = 2 - i$, $b = -3 - i$, $c = -2 + 6i$.
Calculer les nombres complexes $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ et construire les points images correspondants.
2° Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation :
$(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$.
Construire, dans le plan complexe, les points images des solutions de cette équation.

24 Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

25 1° Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(z - 2)(z^2 - 3iz + 4) = 0$.
2° Soient A, B, C les points images dans le plan complexe des solutions de l'équation précédente. Démontrer que le triangle (A, B, C) est un triangle rectangle.

26 On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante (E) :
$z^3 - z^2(6 + 3i) + z(21 + 19i) - 26(1 + i) = 0$.
Démontrer que cette équation admet une solution réelle et une seule ; déterminer cette solution réelle. $\beta = 2$
Résoudre ensuite l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

27 Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
$\left(\frac{z - i}{z + i}\right)^3 + \left(\frac{z - i}{z + i}\right)^2 + \left(\frac{z - i}{z + i}\right) + 1 = 0$. $\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = -1 \vee \frac{z-i}{z+i} = i \vee \frac{z-i}{z+i} = -i$
$X^3 + X^2 + X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X^2+1) = 0$

28 Soient a et b deux nombres réels. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :
$z^3 + az^2 + 6(1 - i)z + b = 0$.
1° Déterminer a et b de telle sorte que l'équation (E) admette pour solution le nombre complexe $1 + i$. $a = -1$; $b = 10$
2° Démontrer que l'équation ainsi obtenue se décompose en deux équations dont l'une est : $z^2 + iz + 5(1 - i) = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette dernière équation.

29 Soit $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.
1° Déterminer les trois nombres complexes a, b, c tels que l'on ait :
$f(-i) = 0$, $f(i) = -8(1 + i)$ et $f(1) = -6 + 2i$.
2° On donne aux trois nombres complexes a, b, c les valeurs trouvées dans la première question. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

30 Soit $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.
1° Déterminer les trois nombres complexes a, b, c tels que l'on ait :
$f(1) = 8 + 16i$, $f(-1) = 16 - 8i$ et $f(i) = 0$.
2° On considère les trois nombres complexes a, b, c trouvés dans la première question. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

31 Soient a et b deux nombres complexes. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
(1) $z^2 - (b + 1)z + a = 0$.
1° A quelle condition l'équation (1) a-t-elle deux solutions distinctes ?
2° Résoudre l'équation (1) dans le cas où : $a = i - 1$ et $b = 2i$.

32 Soit φ un nombre réel compris entre $-\pi$ et $+\pi$.
Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante : $e^{-i\frac{\varphi}{2}}$; $e^{i\frac{\varphi}{2}}$; $e^{i(\frac{\varphi+2\pi}{2})}$; $e^{-i(\frac{\varphi-2\pi}{2})}$
$z^4 - 2\cos\varphi\, z^2 + 1 = 0.$

OLYMPIADES

33 Soit λ un nombre réel.
1° Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + \lambda z + 1 = 0$.
2° Quel est, dans le plan complexe, l'ensemble des points images des solutions de cette équation lorsque λ varie ?

34 Soit ω un nombre complexe.
On considère l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (2 + i\omega)z + i\omega + 2 - \omega = 0.$ (1)
1° Démontrer qu'il existe un nombre complexe ω_0 pour lequel l'équation (1) admet deux solutions complexes conjuguées. Il suffit que $2+i\omega$ et $2-\omega+i\omega \in \mathbb{R}$
2° Calculer alors ces solutions.

35 Soient p un nombre complexe, a la partie réelle de p et b sa partie imaginaire.
1° Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : (1) $z^2 - 2pz + \bar{p}^2 = 0$. $\Delta = 4p^2 - 4\bar{p}^2 = 4(p-\bar{p})(p+\bar{p})$
On sera amené à distinguer plusieurs cas suivant le signe du produit ab.
2° Déterminer les nombres complexes p pour lesquels l'équation (1) a au moins une solution réelle.

36 Soit θ un nombre réel.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - (3\cos\theta + i\sin\theta)z + 2 = 0$.

Forme trigonométrique et racines n-ièmes.

37 Soit z le nombre complexe égal à $1 + i\sqrt{3}$.
1° Mettre le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
2° En déduire la forme algébrique du nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^{10}$.

38 Soit z le nombre complexe égal à $\dfrac{(1+\sqrt{2}) + i}{(1+\sqrt{2}) - i}$.
1° Déterminer le module et un argument de z.
2° Calculer : z^{20}, z^{21}, z^{22}, z^{23} et z^{24}.

39 Soient x un nombre réel et z le nombre complexe égal à :
$z = (x-2)\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. $1976 = 4 \times 493$
1° Déterminer le module et un argument du nombre complexe z.
2° Démontrer que z^{1976} est un nombre réel ; préciser le signe de z^{1976}.

40 1° Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.
2° Soit Z le nombre complexe égal à $\dfrac{z_1}{z_2}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
3° En déduire le cosinus et le sinus de $\dfrac{7\pi}{12}$.

41 Soient a et b deux nombres complexes.
1° Par quelle relation a et b doivent-ils être liés pour que la proposition suivante soit vraie : $\forall z \in \mathbb{C}, \ |az| = \left|\frac{\bar{z}}{b}\right|$? $|a||z| = \frac{|\bar z|}{|b|} = \frac{|z|}{|b|} \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{|b|} \Leftrightarrow |ab| = 1$

2° Par quelle relation a et b doivent-ils être liés pour que la proposition suivante soit vraie : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \arg(az) = -\arg\frac{\bar{z}}{b}$? $\arg a + \arg z = \arg \bar z + \arg b$

3° Que peut-on dire des nombres complexes az et $\frac{\bar{z}}{b}$ lorsque ces deux propositions sont vraies simultanément ? az et $\frac{\bar z}{b}$ sont des $\mathbb{C}$ opposé

4° Application : Soit a égal à $1 + i$. Déterminer b pour que les deux propositions ci-dessus soient vraies. $|ab| = 1$, $\arg(b) \equiv \arg(1+i) \, [2\pi] \Rightarrow b = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

42 Soit z un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ.
On considère le nombre complexe $Z = z - \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\bar{z}$.
Déterminer le module et un argument de Z en fonction de ρ et de θ.
$Z = e^{i\frac{\pi}{6}}[e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}]\rho \Rightarrow Z = [2\sin(\theta-\frac{\pi}{6})]e^{i\frac{2\pi}{3}}$

43 Soient θ et φ deux nombres réels tels que : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.
On considère les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs 2θ et 2φ.
1° Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $(1 - z_1)$ et $(1 + z_2)$. $1 - z_1 = (2\sin\theta)e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$, $1 + z_2 = (2\cos\varphi)e^{i\varphi}$ or $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \Rightarrow 1 + z_2 = 2\cos\varphi[e^{i(\varphi+\pi)}]$
2° En déduire le module et un argument du nombre complexe $\frac{1 - z_1}{1 + z_2}$. $= \left[\frac{\sin\theta}{\cos\varphi}\right]e^{i\frac{\pi}{2}}$

44 Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.
1° Soit z un élément de $\mathcal{U}$. Que peut-on dire des nombres complexes $\frac{1}{z}$ et $\bar{z}$? égaux
2° Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathcal{U}$ tels que l'on ait : $z_1 z_2 \neq -1$.
Démontrer que le nombre complexe Z égal à $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est un nombre réel. $Z - \bar Z = 0$
3° Soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2.
Exprimer le nombre Z en fonction de θ_1 et θ_2. $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}[2\cos(\frac{\theta_1-\theta_2}{2})]}{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}[2\cos(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})]}$

45 Soit α un réel tel que l'on ait : $\forall k \in \mathbb{Z}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
1° Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.
2° Même question que pour le 1° avec le nombre complexe $\frac{1}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.
3° Même question que pour le 1° avec le nombre complexe $\frac{1}{i + \mathrm{tg}\,\alpha}$.

46 Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$iz^2 - 2z - 4 - 4i = 0$.
Mettre sous forme trigonométrique les solutions trouvées.

47 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :
$z^2 - (1 + 2i)z + 3(1 + i) = 0$.
Déterminer le module et un argument de chaque solution.

48 Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$x^2 + (i - 1)(\sqrt{3} - 3)x - 12i = 0.$
Mettre sous forme trigonométrique chaque solution.

49 1° Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de l'équation :
$z^2 + 2z + 2 = 0.$ $z_1 = -1+i$; $z_2 = -1-i$
2° Soit n un entier positif. Calculer : z_1^n et z_2^n. $z_1^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{3\pi n}{4}}$; $z_2^n = (\sqrt{2})^n e^{-i\frac{3n\pi}{4}}$
Donner une expression simple de : $S_n = z_1^n + z_2^n$. $= (\sqrt{2})^n [2\cos\frac{3n\pi}{4}]$
3° Trouver une relation indépendante de n entre S_n et S_{n+8}. $S_{n+8} = 16 S_n$

50 On considère dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$$z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0. \quad (1)$$
1° Résoudre cette équation et exprimer les solutions z' et z'' de cette équation en fonction des nombres complexes a et b définis par :
$$a = \frac{\sqrt{3} + i}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$
$z_1 = a+b = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $z_2 = b-a$; $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $b = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2° Mettre les nombres a et b sous forme trigonométrique et représenter leurs points images A et B dans le plan complexe. En déduire une construction simple des points images des solutions de l'équation (1). Mettre ces solutions sous forme trigonométrique. (somme vectoriel)
$\vec{OA} + \vec{OB}$ pour z_1 ; $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$ pour z_2

3° Déduire de ce qui précède les valeurs respectives de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

51 Soit α un nombre complexe de module r et d'argument θ. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $x^2 - \alpha(\alpha + i)x + i\alpha^3 = 0.$ $\alpha = [r, \theta] = re^{i\theta}$
Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

52 Soit u un nombre réel compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $x^2 + 4x\cos u + (2 + 4\cos 2u) = 0.$
1° Déterminer l'ensemble des réels u pour lesquels les deux solutions de cette équation sont des nombres réels ?
2° Pour les valeurs de u trouvées précédemment, déterminer le module et un argument de chaque solution.

53 Soit u un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, +\pi[$.
Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^2 - 2(1 + \cos u)z + 2(1 + \cos u) = 0.$ $\Delta = (2i\sin u)^2$
Déterminer le module et un argument de chacune des solutions trouvées.
$z_1 = [2\cos\frac{u}{2} ; \frac{u}{2}]$; $z_2 = [2\cos\frac{u}{2} ; -\frac{u}{2}]$

54 Soit u un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, +\pi[$.
Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^2 - 2z(\cos u + i\sin u) + 2i\sin u(\cos u + i\sin u) = 0.$
Déterminer le module et un argument de chacune des solutions trouvées.

55 Soit z le nombre complexe égal à $-i$.
1° Mettre le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
2° Calculer les racines cubiques de z et construire leurs images dans le plan complexe.

56 Mêmes questions que pour le n° 55 avec : $z = 1 + i\sqrt{3}$.

57 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

58 On considère le nombre complexe $z = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

1° Mettre le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
2° En déduire les racines cinquièmes de z.

59 Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

En déduire toutes les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

60 1° Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^3 = i$. (1)
Mettre les solutions de l'équation (1) sous forme trigonométrique.
2° Soit p un entier naturel différent de 0.
Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. (2)
Mettre les solutions de l'équation (2) sous forme trigonométrique.
3° Les équations (1) et (2) peuvent-elles avoir des solutions communes ?

61 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^4 + (5 - i)z^2 + 4 - 4i = 0$.
Donner les solutions sous forme trigonométrique.

62 Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$.

63 Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation :
$z^6 + (1 - 2i)z^3 - 2i = 0$.

64 Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$(1 + i)z^6 - (2 - i)z^3 - i = 0$.

65 1° Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - i = 0$.
Donner le module et un argument de chacune des solutions trouvées. L'une des solutions est un nombre imaginaire pur ; trouver la somme et le produit des deux autres solutions.
2° Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - i = 6(z + i)$.

66 1° Déterminer, sous leur forme trigonométrique, les nombres complexes z tels que l'on ait : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2° Démontrer que, pour l'un deux, on a : $z^3 + \bar{z} = 0$.
3° Réciproquement, trouver tous les nombres complexes tels que : $z^3 + \bar{z} = 0$.

67 1° Soit u un nombre complexe, différent de -1, de module 1 et d'argument θ.
Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1-u}{1+u}$.
En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que : $\frac{2+iz}{2-iz} = u$.
2° Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation :
$(2 + iz)^5 = (2 - iz)^5$.

68 Soit u le nombre complexe égal à $2 - 2i\sqrt{3}$.

1° Mettre u sous forme trigonométrique et en déduire tous les nombres complexes Z tels que l'on ait : $Z^4 = u$.

2° Déterminer, par la méthode algébrique les nombres complexes X tels que l'on ait : $X^2 = u$, puis les nombres complexes Z tels que l'on ait : $Z^4 = u$.

3° En déduire des expressions de $\sin\frac{11\pi}{12}$ et $\cos\frac{11\pi}{12}$ sous forme de radicaux simples.

※ **69** Soit la suite des n nombres complexes : $u_1, \ldots, u_p, \ldots, u_n$ définie par : $(u_1 = 1 - i)$ et $(\forall p \in \{2, 3, \ldots, n\},\ \ u_p = ju_{p-1})$,

avec j égal au nombre complexe $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

1° Démontrer que l'on a : $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

2° Démontrer que l'on a : $\forall p \in \{4, 5, \ldots, n\},\ \ u_p = u_{p-3}$.

3° En déduire, suivant l'entier n, la valeur de la somme $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Calculer : $\sigma_n = \sum_{p=0}^{n-1} \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sigma'_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{3}\right)$.

70 Soient les nombres complexes $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $k = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1° Démontrer que les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de l'équation : $x^3 - 1 = 0$ sont 1, j et k.

Démontrer que l'on a : $k = j^2$ et $j = k^2$.

2° Démontrer que l'ensemble $E = \{1, j, k\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$.

LYMPE
NRS

71 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est un sous-groupe du groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

72 Soient, dans le plan complexe, A, B, M les points d'affixes respectives a, b, z.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\frac{z-a}{z-b}$ ait pour module 1.

73 Soit z le nombre complexe égal à $1 + i\sqrt{3}$.

1° Déterminer le module et un argument de z.

2° Démontrer que, dans le plan complexe, les points images des nombres complexes z, $-z$, z^2 et $\frac{2}{z}$ appartiennent à un même cercle. Il suffit de montrer qu'il ont même module

74 Soient P un plan affine euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P. Soient z un nombre complexe différent de 1, et M son point image dans le plan P.

On pose : $Z = \frac{z - 2i}{z - 1}$.

1° Soient x et y les parties réelle et imaginaire de z ; calculer, en fonction de x et y, les parties réelle et imaginaire de Z.

2° Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit un nombre réel. Préciser le sous-ensemble de E formé par les points tels que l'on ait : $Z \geqslant 0$.

3° Déterminer l'ensemble F des points M tels que Z ait pour argument $\frac{\pi}{2}$, modulo 2π.

4° Déterminer l'ensemble G des points M tels que l'on ait : $|Z| = 2$.

75 1° Soit le nombre complexe $u = 3\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.
Calculer u^2 et u^4. En déduire le module et un argument de u.
2° Soient θ un nombre réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$ et Z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ.
a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes Z tels que le produit uZ soit un nombre réel. Quel est l'ensemble des images de Z dans le plan complexe ?
b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes Z tels que le produit uZ soit un nombre imaginaire pur. Quel est l'ensemble des images de Z dans le plan complexe ?
c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes Z tels que le produit uZ ait pour module 18. Quel est l'ensemble des images de Z dans le plan complexe ?

76 Dans le plan complexe, on associe au point m d'affixe $z = x + iy$, le point M d'affixe Z égal à $\dfrac{z-2}{z+2i}$.
On suppose que le nombre complexe z est différent de $-2i$.
1° Exprimer les parties réelle et imaginaire X et Y de Z à l'aide des parties réelle et imaginaire x et y de z.
2° Soient A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe $-2i$.
Donner une interprétation du module et de l'argument de Z à l'aide des points m, A et B.
3° En déduire l'ensemble des points m tels que le nombre complexe Z soit réel et l'ensemble des points m tels que le nombre complexe Z soit imaginaire pur.
(On pourra donner deux méthodes de recherche de ces ensembles.)

$e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}+e^{i\frac{\varphi}{2}}\right) = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}}$

77 Soit φ un nombre réel.
1 Déterminer le module et un argument du nombre complexe $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$.
2° En déduire l'expression de $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ pour tout entier naturel n différent de 0. $1+\cos\varphi+i\sin\varphi = 1+e^{i\varphi} = e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}+e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)$

78 Soient α un nombre réel et z le nombre complexe de module 1 et d'argument α.
1° Calculer, en fonction de α, le module et un argument du nombre complexe $Z = 1 + z + z^2$.
2° Soient β un nombre réel et z' le nombre complexe de module 1 et d'argument β.
On suppose que le produit zz' est différent de -1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$. Que peut-on en conclure ?

79 Soit θ un nombre réel. Exprimer en fonction linéaire des sinus et cosinus de θ et de 3θ le nombre complexe $\cos^3\theta + i\sin^3\theta$.

80 Soit x un nombre réel. Linéariser $\sin^4 x$, puis $\sin^5 x$ et $\cos^5 x$.

Problèmes.

81 A) Deux nombres complexes non nuls z et z' ont pour arguments respectifs θ et θ'. Démontrer que les propositions suivantes sont toujours vraies :
- $\dfrac{z'}{z}$ est réel si et seulement si l'on a : $\theta' - \theta = 0 \pmod{\pi}$;
- $\dfrac{z'}{z}$ est imaginaire pur si et seulement si l'on a : $\theta' - \theta = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

B) A tout nombre complexe z on associe, lorsque cela est possible, le nombre complexe z' tel que $\frac{z'-1}{z-1}$ soit réel et que $\frac{z'}{z}$ soit imaginaire pur.

On désigne par M et par M' les points d'affixes respectives z et z' dans le plan complexe et par A le point d'affixe 1.

1° On suppose que M' existe. Démontrer que les propositions suivantes sont toujours vraies :

- $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel si et seulement si les points A, M et M' sont alignés.
- $\frac{z'}{z}$ est imaginaire pur si et seulement si les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

2° On suppose que M est choisi de façon que M' existe. Que peut-on dire des points A, M et M' et des deux droites (OM) et (OM')? En déduire une construction géométrique du point M' lorsque le point M est donné ; on précisera l'ensemble E des points M tels que M' existe.

C) On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Calculer z' en fonction de z. Retrouver par le calcul les résultats obtenus en B).

82 1° Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation en z :

(1) $(16 \operatorname{tg}^2 \theta) z^2 - 4(1 + 2i \operatorname{tg} \theta) z - (\operatorname{tg} \theta - i)^2 = 0$.

a) Chercher les solutions réelles de cette équation ; discuter. Démontrer que dans tous les cas, il y en a une et une seule, notée r_0.

b) Chercher toutes les solutions de l'équation (1). Discuter.

2° Soit $z_0 = x + iy$ la solution, lorsqu'elle existe, complexe non réelle de l'équation (1).

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_0 dans le plan complexe, pour toutes les valeurs de θ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

83 On définit dans le plan complexe une application f de la façon suivante : au point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' égale à z^2.

On désigne par ρ et θ (resp. ρ' et θ') le module et un argument de z (resp. z'). On notera x et y (resp. x' et y') les parties réelle et imaginaire de z (resp. z').

1° Exprimer ρ' et θ' en fonction de ρ et de θ, puis x' et y' en fonction de x et de y. L'application f est-elle une injection ? Déterminer l'ensemble des points invariants.

2° Déterminer l'ensemble des points M' lorsque l'ensemble des points M est :

- une demi-droite passant par l'origine
- une droite passant par l'origine
- l'ensemble des points tels que l'on ait : $|y| - |x| = 0$
- deux droites perpendiculaires passant par l'origine.

3° Déterminer l'ensemble des points M' lorsque l'ensemble des points M est :

- la droite d'équation : $x = a$
- la droite d'équation : $y = b$.

84 Soient P un plan affine euclidien et $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de P.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe z associe le point M' de P d'affixe $(\bar{z})^2$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

A) 1° Calculer le module et un argument de $(\bar{z})^2$ en fonction du module et d'un argument de z.

2° Quels sont les points invariants par f? Démontrer que l'application f n'est pas injective.

B) Soient θ un nombre réel, M le point du cercle $\mathcal{C}$ dont l'affixe a pour argument θ modulo 2π et M' le point $f(M)$.
Si M n'est pas un point invariant par f, on appelle D_θ la droite (MM').
Si M est un point invariant par f, on appelle D_θ la tangente en M au cercle (C).
1° Déterminer θ pour que D_θ soit parallèle à la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2° Déterminer θ pour que D_θ soit parallèle à la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{v}$.
3° Déterminer θ pour que D_θ passe par le point O.

C) Déterminer l'image par l'application f d'une droite passant par O, distincte des axes du repère.

85 Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ noté $\mathcal{R}$. On considère l'application f qui, à tout point m du plan, fait correspondre le point M tel que les affixes respectives z et Z de m et M vérifient la relation : $Z = z^2 - z$.

A) 1° Quels sont les points invariants par f?
2° Quels sont les points ayant pour image le point A' d'affixe 2?
3° Quels sont les points ayant pour image le point B d'affixe $-1 + i$?
4° L'application f est-elle injective? est-elle surjective?
5° Étudier la disposition de deux points m_1 et m_2 qui ont la même image par f.
Quels sont les points de P qui ne sont l'image par f que d'un seul point?

B) 1° Calculer les coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ de M dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de m dans $\mathcal{R}$.
2° Quelle est l'image de la droite d'équation : $y = 0$?
3° Quelle est l'image réciproque de la droite d'équation : $y = 0$?
4° Quelle est l'image de la droite d'équation : $x = 0$? Représenter cette image.
5° Quelle est l'image de la droite d'équation : $y = x$?

86 Soient p et q deux éléments de $\mathbb{Z}$; on désigne par ρ et par ρ^* les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : (1) $z^2 - pz + q = 0$.
Dans tout le problème, on supposera que les entiers rationnels p et q sont tels que les solutions ρ et ρ^* de l'équation (1) n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. (Le lecteur qui a déjà étudié l'arithmétique pourra démontrer qu'il faut et il suffit pour cela que l'entier rationnel $p^2 - 4q$ ne soit pas un carré dans $\mathbb{Z}$.)
Soit Ω le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :
$\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad \omega = x + \rho y\}$.

A) 1° Démontrer la propriété :
$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad (x + \rho y = 0) \iff (x = 0 \text{ et } y = 0)$.
Démontrer que la somme et le produit dans $\mathbb{C}$ de deux éléments de Ω sont des éléments de Ω et que les opérations internes ainsi définies donnent à Ω une structure d'anneau commutatif.
2° Pour tout élément : $\omega = x + \rho y$, on pose : $\omega^* = x + \rho^* y$.
Démontrer que ω^* est un élément de Ω.

3° Pour tout élément non nul ω de Ω on pose : $N(\omega) = \omega\omega^* = f(x, y)$.

a) Démontrer que l'on a : $f(x, y) = x^2 + pxy + qy^2$.

En déduire que $N(\omega)$ est un entier relatif.

b) Démontrer que, pour tout couple (ω_1, ω_2) d'éléments de Ω, on a l'égalité : $(\omega_1\omega_2)^* = \omega_1^* \omega_2^*$.

En déduire que l'on a : $N(\omega_1\omega_2) = N(\omega_1) N(\omega_2)$.

c) Démontrer que l'on a : $\big(N(\omega) = 0\big) \Longleftrightarrow (\omega = 0)$.

4° Soit ω un élément de Ω. Démontrer que le nombre complexe ω^{-1} est un élément de Ω si et seulement si $N(\omega)$ est égal à 1 ou à -1.

Soit Ω' le sous-ensemble de Ω défini par : $\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = 1\}$

Montrer que $(\Omega', \times)$ est un groupe commutatif.

B) Soient a, b, c, d, quatre entiers relatifs.

Soit T l'application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad T(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (X, Y)$.

On se propose de recherche a, b, c, d de façon que pour l'application T correspondante on ait : (2) $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad N(X + \rho Y) = N(x + \rho y)$.

1° Calculer $N(X + \rho Y)$ en fonction de x, y, a, b, c, d, p et q.

On considère les nombres α, α^*, β et β^* définis par :

$\alpha = a + \rho c, \quad \beta = b + \rho d, \quad \alpha^* = a + \rho^* c, \quad \beta^* = b + \rho^* d.$

Démontrer que l'on a : $N(X + \rho Y) = \alpha\alpha^* x^2 + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*) xy + \beta\beta^* y^2$.

Trouver entre $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*, p, q$ un ensemble de relations nécessaire et suffisant pour que la condition (2) soit réalisée.

Démontrer que $\alpha^*\beta$ et $\alpha\beta^*$ sont alors les solutions de l'équation (1).

3° Dans le cas où la condition (2) est vérifiée et où l'on a : $\alpha\beta^* = \rho$, calculer b et d en fonction de a, c, p, q sous forme de polynômes du premier degré par rapport à chacune des variables qu'ils contiennent. Calculer $f(b, d)$.

3. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel

1. Intersection et réunion de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel.

Nous allons traiter le cas des espaces vectoriels de dimension 2 et 3.

Rappels.

1.1 **THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel et E' et E'' deux sous-espaces vectoriels de E. L'intersection $E' \cap E''$ des sous-espaces vectoriels E' et E'' est un sous-espace vectoriel de E.**

$E' \cap E''$ est le plus grand sev contenu dans E' et E''

__Remarque :__ En général, la réunion $E' \cup E''$ des sous-espaces vectoriels E' et E'' n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exemples.

1. Considérons les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et étudions leur intersection et leur réunion.
On a : $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Posons : $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) = E_1$. L'ensemble E_1 est inclus dans $\mathbb{R}^2$; montrons que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Le couple $(1, 0)$ appartient à $\mathbb{R} \times \{0\}$; il appartient donc à E_1 ; le couple $(0, 1)$ appartient à $\{0\} \times \mathbb{R}$; il appartient donc à E_1. La somme des deux couples $(0, 1)$ et $(1, 0)$ est le couple $(1, 1)$; ce couple n'appartient ni à $\mathbb{R} \times \{0\}$ ni à $\{0\} \times \mathbb{R}$; il n'appartient donc pas à E_1. L'ensemble E_1 n'est pas stable pour l'addition de $\mathbb{R}^2$; ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans le chapitre 1, nous avons vu que l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur 0 en 1 :
$\forall f \in \mathcal{B}, \quad f(1) = 0$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propriétés suivantes :

- $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
- l'ensemble $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, engendré par l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout réel x, associe le réel $x - 1$;
- l'ensemble $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2 **DÉFINITIONS : Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle sous-espace vectoriel propre de E tout sous-espace vectoriel de E, distinct de $\{0_E\}$ et de E, c'est-à-dire tout sous-espace vectoriel de E, de dimension p strictement comprise entre 0 et n $(0 < p < n)$.**
On appelle droite vectorielle de E tout sous-espace vectoriel de E, de dimension 1.
On appelle plan vectoriel de E tout sous-espace vectoriel de E, de dimension 2.

De même, on appelle plan vectoriel (resp. droite vectorielle) tout espace vectoriel de dimension 2 (resp. 1).

Intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel.

Cas où l'un des sous-espaces vectoriels est une droite vectorielle.

1.3 **THÉORÈME : Soient E′ une droite vectorielle et E″ un sous-espace vectoriel propre d'un même espace vectoriel réel E.**
L'intersection $E' \cap E''$ de E′ et de E″ est soit la droite vectorielle E′, soit le sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ de E.

Démonstration :
Soit e' un vecteur non nul de E′. Il n'y a que deux cas possibles : e' appartient à E″ ou e' n'appartient pas à E″.

1er cas → Si e' appartient au sous-espace vectoriel E″, toute combinaison linéaire de e' appartient à E″ et, par suite, la droite vectorielle E′ est incluse dans E″. On a alors : $E' \cap E'' = E'$.

2ème cas → Si e' n'appartient pas au sous-espace vectoriel E″, le raisonnement précédent montre qu'aucune combinaison linéaire non nulle de e' n'appartient à E″. Le seul vecteur commun à E′ et à E″ est donc 0_E. On a alors : $E' \cap E'' = \{0_E\}$. ■

Du théorème précédent nous déduisons les résultats suivants :

- **L'intersection de deux droites vectorielles distinctes d'un espace vectoriel réel E de dimension 2 ou 3 est le sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ de E.**
- **L'intersection d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel d'un espace vectoriel réel E de dimension 3 est soit la droite vectorielle, soit le sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ de E.**

Exemple.

Considérons la droite vectorielle E′ de $\mathbb{R}^3$, engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$ et le plan vectoriel E″ de $\mathbb{R}^3$, engendré par les deux vecteurs $(0, 5, 4)$ et $(-2, 3, 0)$. Étudions l'intersection $E' \cap E''$.

Cherchons si le vecteur $(1, 1, 1)$ appartient au plan vectoriel E″. On a :

$$(1, 1, 1) \in E'' \Longleftrightarrow (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (1, 1, 1) = \lambda(0, 5, 4) + \mu(-2, 3, 0))$$
$$\Longleftrightarrow (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 = -2\mu, \quad 1 = 5\lambda + 3\mu, \quad 1 = 4\lambda).$$

Il n'existe pas de réels λ et μ qui satisfont simultanément à : $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = -\frac{1}{2}$ et $5\lambda + 3\mu = 1$; le vecteur $(1, 1, 1)$ n'appartient donc pas à E″. Il en résulte qu'aucun vecteur non nul de E′ n'appartient à E″ et on a : $E' \cap E'' = \{0_E\}$.

Intersection de deux plans vectoriels d'un espace vectoriel réel de dimension 3.

1.4 THÉORÈME : Soient E′ et E″ deux plans vectoriels distincts d'un même espace vectoriel réel E de dimension 3. L'intersection $E' \cap E''$ de ces deux plans vectoriels est une droite vectorielle de E.

Démonstration :

Considérons une base (e'_1, e'_2) (resp. (e''_1, e''_2)) de E′ (resp. E″). Soient x un vecteur quelconque de $E' \cap E''$, $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$ ses composantes dans la base (e'_1, e'_2) et $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$ ses composantes dans la base (e''_1, e''_2). On a :

$x = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2$ et $x = \mu_1 e''_1 + \mu_2 e''_2$;

d'où : $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 - \mu_1 e''_1 - \mu_2 e''_2 = 0_E$.

Considérons les deux familles (e'_1, e'_2, e''_1) et (e'_1, e'_2, e''_2) de vecteurs non nuls de E, et démontrons, d'abord, que l'une au moins de ces familles n'est pas liée.

Si chacune de ces familles était liée, chacun des vecteurs non nuls e''_1 et e''_2 serait une combinaison linéaire des vecteurs e'_1 et e'_2. Tout vecteur de E″ serait donc une combinaison linéaire des vecteurs e'_1 et e'_2, et il appartiendrait au plan vectoriel E′. Le plan vectoriel E″ serait donc inclus dans le plan vectoriel E′, et par suite E″ serait égal à E′ ce qui est impossible puisque nous avons supposé E′ distinct de E″.

Il en résulte que l'une au moins des familles (e'_1, e'_2, e''_1) ou (e'_1, e'_2, e''_2) n'est pas liée. Supposons, par exemple, que la famille (e'_1, e'_2, e''_1) ne soit pas liée. Puisque l'espace vectoriel E est de dimension 3, la famille (e'_1, e'_2, e''_1) est une base de E. Soient $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ les composantes de e''_2 dans cette base. On a alors :

$$(\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 - \mu_1 e''_1 - \mu_2 e''_2 = 0_E)$$
$$\Longleftrightarrow (\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 - \mu_1 e''_1 - \mu_2(\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e''_1) = 0_E)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\left\{\begin{aligned} \lambda_1 - \mu_2\alpha &= 0\\ \lambda_2 - \mu_2\beta &= 0\\ -\mu_1 - \mu_2\gamma &= 0\end{aligned}\right.\right) \Longleftrightarrow \left(\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_2\alpha\\ \lambda_2 &= \mu_2\beta\\ \mu_1 &= -\mu_2\gamma\end{aligned}\right.\right)$$

On a donc : $x = \mu_2(\alpha e'_1 + \beta e'_2) = \mu_2(-\gamma e''_1 + e''_2)$.

Il en résulte que les vecteurs $\alpha e'_1 + \beta e'_2$ et $-\gamma e''_1 + e''_2$ sont égaux.
Posons : $e = \alpha e'_1 + \beta e'_2 = -\gamma e''_1 + e''_2$.
Le vecteur e est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille libre (e''_1, e''_2) ; l'un des coefficients de cette combinaison linéaire est égal à 1, le vecteur e est donc non nul.
L'intersection $E' \cap E''$ est donc la droite vectorielle engendrée par e. ■

Exemple.

Considérons l'espace vectoriel réel $\mathcal{T}$, de dimension 3, des fonctions trinômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cf. exercice n° 16 du chapitre 1).
Soit $\mathcal{T}'$ l'ensemble défini par :
$\mathcal{T}' = \{f \in \mathcal{T} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ax^2 + (a+b)x + 2b\}$
Soit $\mathcal{T}''$ l'ensemble défini par :
$\mathcal{T}'' = \{g \in \mathcal{T} \mid \exists (c, d) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = cx^2 + 2cx + d\}$
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ sont deux plans vectoriels distincts de $\mathcal{T}$. Leur intersection est donc une droite vectorielle de $\mathcal{T}$.
Une fonction trinôme appartenant à l'intersection satisfait à :
$\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (ax^2 + (a+b)x + 2b = cx^2 + 2cx + d)$,
ce qui équivaut à :
$\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \ (a = c \ \text{ et } \ a + b = 2c \ \text{ et } \ 2b = d)$.

Le système $\begin{cases} a = c \\ a + b = 2c \\ 2b = d \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = c \\ b = c \\ d = 2c \end{cases}$

Donc toute fonction trinôme f appartenant à $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$ est définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto ax^2 + 2ax + 2a,$$

où a est un réel quelconque.
L'intersection $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$ est donc la droite vectorielle engendrée par la fonction trinôme qui, à tout réel x, associe le réel $x^2 + 2x + 2$.

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel.

Soit E un espace vectoriel réel. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de cet espace vectoriel est ordonné par la relation d'inclusion. L'intersection $E' \cap E''$ de deux sous-espaces vectoriels E' et E'' de E est un sous-espace vectoriel contenu dans E' et dans E'' ; cette intersection est même le plus grand (pour l'inclusion) des sous-espaces vectoriels contenus dans E' et dans E''. On dit que $E' \cap E''$ est la borne inférieure de E' et de E'' pour la relation d'inclusion.
Cherchons si E' et E'' ont une borne supérieure pour cette relation. Il s'agit donc de trouver le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant E' et E''. La réunion $E' \cup E''$ est le plus petit des sous-ensembles contenant E' et E'' ; mais, d'après la remarque du paragraphe 1.1, cette réunion n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E.

Dans l'exemple 1 de ce paragraphe 1.1, nous avons vu que la somme d'un élément non nul de $\mathbb{R} \times \{0\}$ et d'un élément non nul de $\{0\} \times \mathbb{R}$ n'est pas un élément de $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$, alors que cette somme est un élément de tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$, si un tel sous-espace existe.

Pour rechercher le plus petit sous-espace vectoriel contenant E′ et E″, cet exemple nous conduit à considérer l'ensemble des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de E′ et d'un vecteur de E″.

2.1 **DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel réel, E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels de E.**
On appelle somme de E′ et de E″, et on note E′ + E″, l'ensemble des vecteurs de E qui sont somme d'un vecteur de E′ et d'un vecteur de E″.

On a donc :
$\forall x \in E, \quad (x \in E' + E'') \Longleftrightarrow (\exists (x', x'') \in E' \times E'', \quad x = x' + x'')$.
Montrons que E′ + E″ est bien la solution du problème posé.

2.2 **THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel, E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels de E.**
La somme E′ + E″ est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant E′ et E″.

Démonstration :
E′ + E″ est un sous-espace vectoriel de E. Utilisons le théorème 3.3 du chapitre 1.
De l'égalité $0_E = 0_E + 0_E$, il résulte que le vecteur 0_E appartient à E′ + E″ ; l'ensemble E′ + E″ n'est donc pas vide.
Soient λ un réel quelconque et x et y deux vecteurs quelconques de E′ + E″. Il existe donc deux vecteurs x' et y' de E′ et deux vecteurs x'' et y'' de E″ tels que l'on ait : $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$.
On a alors : $x + y = (x' + x'') + (y' + y'') = (x' + y') + (x'' + y'')$;
et : $\lambda x = \lambda(x' + x'') = (\lambda x') + (\lambda x'')$.
E′ et E″ sont deux sous-espaces vectoriels de E ; les vecteurs $x' + y'$ et $\lambda x'$ (resp. $x'' + y''$ et $\lambda x''$) appartiennent donc à E′ (resp. E″). Il en résulte que les vecteurs $x + y$ et λx appartiennent à E′ + E″.
E′ + E″ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant E′ et E″.
Par définition le sous-espace vectoriel E′ + E″ contient chacun des sous-espaces vectoriels E′ et E″. (car $\forall x' \in E'$, $x' + 0_E \in E' + E''$ idem pour E″)
Soit F un sous-espace vectoriel quelconque de E contenant E′ et E″. Démontrons que E′ + E″ est inclus dans F, c'est-à-dire que tout vecteur de E′ + E″ appartient à F.
Soit x un vecteur quelconque de E′ + E″ et soit x' (resp. x'') un vecteur de E′ (resp. E″) tel que : $x = x' + x''$.
Le vecteur x' (resp. x'') est un élément de E′ (resp. E″) ; il est donc un élément de F. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, la somme $x' + x''$ est un vecteur de F. Il en résulte que x appartient à F. ■

Exemples.

1. Considérons l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$.
Soit E' le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$; soit E'' le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(0, 0, 0, 2)$ et $(1, 2, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.
L'égalité : $2(1, 1, 1, 1) - 2(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 2)$ démontre que l'intersection de ces deux plans vectoriels contient la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(0, 0, 0, 2)$. Cette intersection n'est donc pas réduite au vecteur nul de $\mathbb{R}^4$. Le lecteur pourra, s'il le désire, démontrer que l'intersection est égale à la droite vectorielle précédente.
Cherchons à déterminer la somme E' + E''.
Soit x un vecteur quelconque de E' + E''. Il existe donc quatre réels $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tels que l'on ait :
$x = \lambda_1(1, 1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 1, 0) + \mu_1(0, 0, 0, 2) + \mu_2(1, 2, 0, 0)$.
Remplaçons le vecteur $(0, 0, 0, 2)$ par le vecteur $2(1, 1, 1, 1) - 2(1, 1, 1, 0)$, nous obtenons :
$x = (\lambda_1 + 2\mu_1)(1, 1, 1, 1) + (\lambda_2 - 2\mu_1)(1, 1, 1, 0) + \mu_2(1, 2, 0, 0)$.
La famille $\big((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 0)\big)$ engendre donc le sous-espace vectoriel E' + E''.
Montrons que cette famille est libre.
Soit $\alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(1, 1, 1, 0) + \gamma(1, 2, 0, 0)$ une combinaison linéaire, égale au vecteur nul de $\mathbb{R}^4$, des vecteurs de cette famille.
On a :

$$\big(\alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(1, 1, 1, 0) + \gamma(1, 2, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)\big)$$
$$\iff \left(\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}\right) \iff (\alpha = \beta = \gamma = 0).$$

La famille considérée est donc une base de E' + E'' et la somme E' + E'' est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.

2. Reprenons l'exemple du paragraphe 1.4 et calculons la somme $\mathcal{T}' + \mathcal{T}''$.
Soit f un élément quelconque de cette somme ; il existe donc quatre réels a, b, c, d tels que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + (a+b)x + 2b) + (cx^2 + 2cx + d)$$
$$= a(x^2 + x) + b(x + 2) + c(x^2 + 2x) + d.$$

Désignons par f_1, f_2, f_3, f_4 les fonctions trinômes respectivement définies par :

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 2 \end{array}$$
$$f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + 2x \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \\ x \longmapsto 1. \end{array}$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille génératrice de $\mathcal{T}' + \mathcal{T}''$. De plus on a :
$f_3 = f_1 + f_2 - 2f_4$; la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) n'est donc pas libre.
La famille (f_1, f_2, f_4), est aussi une famille génératrice de $\mathcal{T}' + \mathcal{T}''$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer qu'elle est libre. La famille (f_1, f_2, f_4) est donc une base de la somme $\mathcal{T}' + \mathcal{T}''$; puisque $\mathcal{T}$ est un espace vectoriel de dimension 3, la famille libre f_1, f_2, f_4 est aussi une base de $\mathcal{T}$. Il en résulte : $\mathcal{T} = \mathcal{T}' + \mathcal{T}''$.

<u>Remarque</u> : Considérons l'application θ de E' × E'' dans E, définie par :

$$\theta : \begin{array}{l} E' \times E'' \longrightarrow E \\ (x', x'') \longmapsto x' + x''. \end{array}$$

L'ensemble E' + E'' est l'image par θ de E' × E''.

3. Somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel, dont l'intersection est réduite au vecteur nul.

Définitions.

3.1 DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel réel, E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $E' \cap E'' = \{0_E\}$.
La somme $E' + E''$ des sous-espaces vectoriels E′ et E″ est alors appelée somme directe de E′ et de E″ ; elle est notée $E' \oplus E''$.

Par exemple, la somme $(\mathbb{R} \times \{0\}) + (\{0\} \times \mathbb{R})$ est une somme directe.
Nous écrirons donc : $(\mathbb{R} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{R})$.

3.2 THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel, E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
1. $E' \cap E'' = \{0_E\}$.
2. tout vecteur de $E' + E''$ est, de manière unique, la somme d'un vecteur de E′ et d'un vecteur de E″, c'est-à-dire :
$\forall (x', y') \in E'^2, \quad \forall (x'', y'') \in E''^2, \quad (x' + x'' = y' + y'') \Longrightarrow (x' = y' \text{ et } x'' = y'')$.

Démonstration :

<u>**(1) ⟹ (2)**</u> Soit x un vecteur quelconque de $E' + E''$; il existe un couple (x', x'') de $E' \times E''$ tel que l'on ait : $x = x' + x''$. Supposons qu'il existe un autre couple (y', y'') de $E' \times E''$ tel que l'on ait également : $x = y' + y''$.
Nous avons alors :
$(x' + x'' = y' + y'') \Longleftrightarrow (x' - y' = y'' - x'')$.
Le vecteur $x' - y'$ (resp. $y'' - x''$) est un vecteur de E′ (resp. E″) ; il appartient donc à l'intersection $E' \cap E''$.
Il en résulte : $x' - y' = y'' - x'' = 0_E$,
et par suite : $x' = y'$ et $x'' = y''$.

<u>**(2) ⟹ (1)**</u> Soit x un vecteur quelconque de $E' \cap E''$. Il appartient donc à E′ et à E″ et, par suite, à $E' + E''$. On peut écrire :
$x = x + 0_E$ où x est un vecteur de E′ et 0_E un vecteur de E″, et :
$x = 0_E + x$ où 0_E est un vecteur de E′ et x un vecteur de E″.
D'après l'unicité de la décomposition, on a donc : $x = 0_E$; d'où :
$E' \cap E'' = \{0_E\}$. ■

<u>**Remarque**</u> : Considérons l'application θ définie dans la remarque du paragraphe 2.2. Dire que la somme $E' + E''$ est directe équivaut à dire que θ est injective. L'application θ est alors une bijection de $E' \times E''$ sur $E' \oplus E''$.

$\theta((x,y)) = \theta((x',y'))$ entraîne que $(x,y) = (x',y')$
$x + y = x' + y' \Rightarrow \{x = x', y = y'\}$ Cf 3.2 ci-dessus

3.3 **DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel réel, E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels de E.**
Les sous-espaces vectoriels E′ et E″ sont appelés sous-espaces supplémentaires de E si et seulement si l'on a : $E' \oplus E'' = E$, ce qui équivaut à :
$(E = E' + E''$ et $E' \cap E'' = \{0_E\}$.)

On dit aussi que E′ (resp. E″) est un **sous-espace vectoriel supplémentaire de** E″ (resp. E′) dans E.

Du théorème 3.2, nous déduisons le corollaire suivant :

3.4 **Corollaire : Soit E un espace vectoriel réel. Deux sous-espaces vectoriels E′ et E″ de E sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur de E est, de manière unique, la somme d'un vecteur de E′ et d'un vecteur de E″.**

Démonstration :
Soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire deux sous-espaces vectoriels tels que :
$E' + E'' = E$ et $E' \cap E'' = \{0_E\}$.
Du théorème 3.2, il résulte que la proposition : $E' \cap E'' = \{0_E\}$ équivaut à la proposition suivante : tout vecteur de $E' + E''$ est, de manière unique, la somme d'un vecteur de E′ et d'un vecteur de E″.
La proposition : $E' \oplus E'' = E$ équivaut donc à la proposition suivante : tout vecteur de E est, de manière unique, la somme d'un vecteur de E′ et d'un vecteur de E″. ■

Remarque : Si E′ et E″ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel réel E, l'application θ définie dans la remarque du paragraphe 2.2 est une bijection de $E' \times E''$ sur E.

Exemples.

1. On a de façon évidente : $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{R})$.
2. Considérons l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$. Soit E′ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $a = (1, 1, 1)$; soit E″ le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $b = (1, 0, 2)$ et $c = (0, -1, 0)$.

Cherchons si ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
En utilisant une combinaison linéaire des vecteurs a, b, c égale au vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, le lecteur démontrera que la famille (a, b, c) est libre, et que, par suite, elle est une base de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur a n'appartient donc pas au plan vectoriel E″, et, du théorème 1.3, il résulte : $E' \cap E'' = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
D'autre part, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est, de manière unique, une combinaison linéaire des vecteurs a, b, c. Il est donc, de manière unique, la somme d'un vecteur de E′ et d'un vecteur de E″.
D'après le théorème 3.4, les deux sous-espaces vectoriels E′ et E″ sont donc supplémentaires.
Remarquons que tout plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, engendré par deux vecteurs d et e tels que la famille (a, d, e) soit une base de $\mathbb{R}^3$, est aussi un sous-espace vectoriel supplémentaire de E′ dans $\mathbb{R}^3$.

Cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

3.5 THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n, E' et E" deux sous-espaces vectoriels propres de E, de dimensions respectives p et q $(0 < p < n$ et $0 < q < n)$. Soit $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}''$) une base de E' (resp. E").
Si E' et E" sont des sous-espaces supplémentaires de E, alors $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base de E et on a la relation : $\dim E' + \dim E'' = \dim E$.

Démonstration : $x \in \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' \Rightarrow x = 0_E \equiv x \neq 0_E \Rightarrow x \notin \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' \; \forall x \in E$

Posons : $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_q)$ et étudions l'intersection $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}''$.
Les sous-espaces vectoriels E' et E" sont supplémentaires, on a donc :
Ce sont des ens
$\forall x \in E, \quad ((x \in \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'') \Longrightarrow (x \in E' \cap E'') \Longrightarrow (x = 0_E))$. ie $0_E \notin B' \cap B''$
$\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases ; leurs vecteurs sont donc tous non nuls ; des implications précédentes, nous déduisons que l'intersection $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}''$ est vide ; la réunion $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ a donc $(p + q)$ éléments. Car Card $B' \cup B''$ = Card B' + Card B'' - Card $B' \cap B''$ = $\emptyset$
De plus, la famille $(e'_1, \ldots, e'_p, e''_1, \ldots, e''_q)$ est évidemment une famille génératrice de E. Cherchons si cette famille est libre.
Soit $\lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_p e'_p + \mu_1 e''_1 + \ldots + \mu_q e''_q$ une combinaison linéaire quelconque, égale au vecteur nul de E, des vecteurs de cette famille. Le vecteur 0_E est, de manière unique, la somme du vecteur 0_E de E' et du vecteur 0_E de E" ; on a donc :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e'_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j e''_j = 0_E\right) \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e'_i = 0_E \text{ et } \sum_{j=1}^{q} \mu_j e''_j = 0_E\right).$$

$0_{E'} = 0_{E''} = 0_E$

Des propriétés des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, nous déduisons alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e'_i = 0_E\right) \Longrightarrow (\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0), \quad \text{et :}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j e''_j = 0_E\right) \Longrightarrow (\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0).$$

La famille $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est donc libre et, par suite, cette famille est une base de E. Le nombre de ses vecteurs est donc égal à la dimension de E et l'on a : $n = p + q$. ■

Remarque : Les deux ensembles E et $\{0_E\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ; leurs dimensions vérifient l'égalité :
$\dim E + \dim \{0_E\} = \dim E$. Car par convention $\dim \{0_E\} = 0$
en effet l'EV $\{0_E\}$ n'admet pas de famille libre ie pas de Base

Nous rappelons le théorème suivant, dit "de la base incomplète". Ce théorème a été démontré en classe de Première pour les dimensions 1, 2, 3 et nous l'admettrons dans le cas général.

Théorème de la base incomplète : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E $(0 < p \leqslant n)$. Alors, on peut trouver $(n - p)$ vecteurs de E : $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que la famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

Nous allons utiliser ce théorème dans la démonstration du corollaire suivant :

3.6 COROLLAIRE : Soit E' un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel E de dimension finie n. Alors E' admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire dans E et tout sous-espace vectoriel supplémentaire de E' dans E a pour dimension : dim E − dim E'.

Démonstration :

$E' = \{0_E\}$. On a alors dim E' = 0 et l'ensemble E est l'unique sous-espace vectoriel supplémentaire de E' dans E ; la dimension de E est donc égale à :
dim E − dim E'.

$E' = E$. $\{0_E\}$ est l'unique sous-espace vectoriel supplémentaire de E' dans E ; la dimension de $\{0_E\}$ est égale à : dim E − dim E'.

E' est un sous-espace vectoriel propre de E. Soit p la dimension de E' $(0 < p < n)$ et soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de E'. La famille $\mathcal{B}'$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons trouver une base de E comprenant les vecteurs $e'_1, \ldots, e'_p$.
Soit $(e'_1, \ldots, e'_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_n)$ une telle base de E ; d'après le théorème 3.5, le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $e'_{p+1}, \ldots, e'_n$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de E' dans E.
La famille $(e'_{p+1}, \ldots, e'_n)$ est une base de ce sous-espace vectoriel qui est donc de dimension $n - p$. ■

Remarques : 1. Deux sous-espaces vectoriels propres d'un espace vectoriel réel de dimension deux sont supplémentaires dans E si et seulement si ce sont deux droites vectorielles distinctes.
2. Deux sous-espaces vectoriels propres d'un espace vectoriel réel de dimension trois sont supplémentaires dans E si et seulement si l'un est un plan vectoriel et l'autre une droite vectorielle non incluse dans le plan vectoriel.

Exemple.

Soit E' le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs (1, 0, 0) et (0, 1, 0). Il est évident que la droite vectorielle E''_1 de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur (0, 0, 1) est un sous-espace vectoriel supplémentaire de E'.
Considérons maintenant la droite vectorielle E''_2 engendrée par le vecteur (1, − 1, 3). Le lecteur vérifiera que la famille ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, − 1, 3)) est une base de $\mathbb{R}^3$; la droite vectorielle E''_2 est donc aussi un sous-espace vectoriel supplémentaire de E'.

EXERCICES

Intersection et réunion de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel.

1 Soient F le sous-espace vectoriel du plan vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur (5, 0) et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.
1° Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$ et en donner une base, s'il y a lieu.
2° L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? non $= (6, -1)$
car $(5,0) \in F$ et $(1,-1) \in G$ ie $(5,0);(1,-1) \in F \cup G$; mais $(5,0)+(1,-1) \notin F \cup G$

2 Mêmes questions que pour le n° 1 dans le cas où F est engendré par le vecteur (2, 3) et où G est défini par : $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + 4y = 0\}$.

3 Mêmes questions que pour le n° 1 dans le cas où F est engendré par le vecteur (− 1, 7) et où G est défini par : $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x + y = 0\}$.

4 Mêmes questions que pour le n° 1 dans le cas où F et G sont définis par :
$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(1 + \sqrt{3}\right) x + \sqrt{3}\, y = 0\right\}$
$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + \left(3 - \sqrt{3}\right) y = 0\right\}$.

5 Mêmes questions que pour le n° 1 dans le cas où F et G sont définis par :
$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(5 + \sqrt{2}\right) x + \left(5 - \sqrt{2}\right) y = 0\right\}$
$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(5 - \sqrt{2}\right) x + \left(5 + \sqrt{2}\right) y = 0\right\}$.

6 Soient F le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur (1, 2, 0) et G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y = 2x \text{ et } z = 3x)\}$.
1° Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; en donner une base et la dimension. $(x,y,z) = (x, 2x, 3x) = x(1,2,3) = x\vec{e_1}$ d'où dim G = 1
2° Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$ et en donner une base, s'il y a lieu.
3° L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? non $= (2,4,3)$
car $(1,2,0) \in F$ et $(1,2,3) \in G$ ie $(1,2,0);(1,2,3) \in F \cup G$ mais $(1,2,0)+(1,2,3) \notin$

7 Mêmes questions que pour le n° 6 dans le cas où F est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur (− 5, − 10, − 15) et où G est défini comme dans l'exercice n° 6.

8 Soient F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur (1, − 1, 0) et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs (2, 3, 0) et (5, − 1, 4).
1° Quelles sont les dimensions respectives de F et de G ? dim F = 1, dim G = 2
2° Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$ et en donner une base, s'il y a lieu.
3° L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

9 Mêmes questions que pour le n° 8 dans le cas où F est engendré par le vecteur $(5, -2, 6)$ et G par les vecteurs $(1, -1, 4)$ et $(-3, 0, 2)$.

10 Mêmes questions que pour le n° 8 dans le cas où F est engendré par les vecteurs $(2, 3, 5)$ et $(1, -1, 4)$ et G par les vecteurs $(3, 2, 0)$ et $(7, 0, 1)$.

11 Soient x et y les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$x = (1, 2, 0)$ et $y = (-1, 0, 3)$
et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces vecteurs.
1° Démontrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2° Soient m un réel et G_m la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $z_m = (m, m+1, m+2)$.
Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels la droite vectorielle G_m est incluse dans le plan vectoriel F.

12 Mêmes questions que pour le n° 11 avec :
$x = (-1, 4, 1)$, $y = (3, 0, 1)$, $z_m = (m-2, m, m+1)$.

13 Soient F et G les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 3x - y = 0\}$.
1° Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner, pour chacun d'eux, une base et la dimension.
2° Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$ et en donner une base, s'il y a lieu.
3° L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

14 Mêmes questions que pour le n° 13 avec :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \text{ et } -x + 3y + z = 0\}$
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$.

15 Mêmes questions que pour le n° 13 avec :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \text{ et } 5x + 3y + 2z = 0\}$
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 3y + 3z = 0 \text{ et } 6x + 3y + z = 0\}$.

16 Mêmes questions que pour le n° 13 avec :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \text{ et } z + y = 0\}$
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + y - 2z = 0\}$.

17 Mêmes questions que pour le n° 13 avec :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y + z = 0\}$
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 5z = 0\}$.

18 Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 (cf. exercice n° 16 du chapitre 1).
Mêmes questions que dans l'exercice n° 13 avec les deux sous-ensembles F et G de $\mathcal{P}_3$ définis par :
$F = \{P \in \mathcal{P}_3 \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + 2ax - 4a\}$
$G = \{P \in \mathcal{P}_3 \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (\lambda + \mu)x^2 + 4\mu x - \mu\}$.

19 Mêmes questions que pour le n° 18 avec :
$F = \{P \in \mathcal{P}_3 \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 4ax^2 - 3ax + 2a\}$
$G = \{P \in \mathcal{P}_3 \mid \exists (b, c) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 5(b-c)x^2 + (b-c)x - b + c\}$.

20 Soient F et G les deux sous-ensembles de $\mathcal{P}_3$ définis par :
$F = \{P \in \mathcal{P}_3 \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx\}$
$G = \{P \in \mathcal{P}_3 \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \lambda x^2 - 2\mu x + \lambda\}$.
1° Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_3$; donner, pour chacun d'eux, une base et la dimension.
2° Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$ et en donner une base, s'il y a lieu.
3° Soit P' la fonction dérivée d'une fonction polynôme quelconque P de $\mathcal{P}_3$. Soit f l'application de $\mathcal{P}_3$ dans $\mathcal{P}_3$ qui, à tout élément P de $\mathcal{P}_3$, associe la fonction polynôme Q définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x) + (x - 1)\, P'(x)$.
Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$.

Somme; somme directe; sous-espaces vectoriels supplémentaires.

◆ **21 à 40** Reprendre les sous-espaces vectoriels F et G définis dans chacun des exercices 1 à 20 et répondre aux questions suivantes :
1° Déterminer le sous-espace vectoriel F + G ; donner sa dimension et une base.
2° La somme F + G est-elle directe ?
3° Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?
4° Dans le cas où F et G ne sont pas supplémentaires, trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de F et un sous-espace vectoriel supplémentaire de G.

41 Soient E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si on a : $f(F) \subset F$.
Démontrer que, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, stables par f, alors $F \cap G$ et $F + G$ sont stables par f.

42 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel E de dimension finie, tels que l'on ait : $F \cap G \neq \{0_E\}$.
Démontrer que l'on a : $\dim F + \dim G = \dim (F \cap G) + \dim (F + G)$.
On considérera une base de $F \cap G$ et on utilisera le "théorème de la base incomplète" pour obtenir des bases appropriées de F, de G et de F + G.

43 Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient F_1 le sous-ensemble des applications paires et F_2 celui des applications impaires.
Si f est un élément quelconque de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a les équivalences suivantes :
$(f \in F_1) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x))$
$(f \in F_2) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -f(-x))$.
1° Démontrer que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer $F_1 \cap F_2$.
2° Soient f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et f_1 et f_2 les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

Démontrer que f_1 est une application paire et que f_2 est une application impaire.
3° Démontrer que les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont supplémentaires.

$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f = f_1 + f_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$

44 Soient E un plan vectoriel réel, $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit λ un réel. On appelle E_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que l'on ait : $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. $(f - \lambda Id_E)\vec{u} = 0$ ie $u \in Ker(f - \lambda id_E)$

1° Démontrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

2° Démontrer que, si λ est un réel distinct de -1 et de 2, l'espace vectoriel E_λ est réduit au vecteur nul de E.

3° Déterminer E_{-1} et E_2. On donnera, pour chacun de ces sous-espaces vectoriels, sa dimension et une base.

4° Démontrer que E_2 et E_{-1} sont supplémentaires dans E. En déduire une nouvelle base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

45 Soient E un espace vectoriel réel de dimension supérieure à 1 et f un automorphisme involutif de E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans E telle que l'on ait : $f \circ f = Id_E$). On dit qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ de E est un vecteur propre pour l'endormorphisme f si et seulement s'il existe un réel λ tel que l'on ait : $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. On dit alors que λ est valeur propre et que $\vec{u}$ est vecteur propre associé à la valeur propre λ. On note E_λ l'ensemble constitué des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul $\vec{0}$ de E. $\vec{u} = f \circ f(u) = f(\lambda \vec{u}) = \lambda^2 \vec{u} \Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$

1° Montrer que les valeurs propres, si elles existent, ne peuvent être que 1 et -1. Trouver les valeurs propres, si elles existent, et les ensembles E_λ associés, dans les deux cas suivants : $f = Id_E$ et $f = -Id_E$.

2° On suppose qu'il existe un automorphisme involutif f différent de Id_E et de $-Id_E$. En déduire qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ et un vecteur $\vec{w}$ de E tels que l'on ait :
$\vec{v} + f(\vec{v}) \neq \vec{0}$ et $\vec{w} - f(\vec{w}) \neq \vec{0}$.

Calculer alors : $f(\vec{v} + f(\vec{v}))$ et $f(\vec{w} - f(\vec{w}))$.

En déduire que E_1 et E_{-1} contiennent des vecteurs non nuls et sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. $E_1 \oplus E_{-1} = E$

* **46** Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n non nulle et a un vecteur non nul de E.

On suppose qu'il existe un endomorphisme f de E tel que l'on ait : $f \circ f = -Id_E$.

1° Démontrer que la famille $(a, f(a))$ est libre. En déduire que E n'est pas une droite vectorielle.

2° On suppose que E est un plan vectoriel. Démontrer que la famille $(a, f(a))$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3° Dans le cas général, soit F_a le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs a et $f(a)$. Montrer que F_a est stable par f, c'est-à-dire que l'on a : $f(F_a) \subset F_a$, et que F_a est le plus petit sous-espace vectoriel de E, stable par f et contenant a.

4° Soit b un vecteur non nul de E.

a) Démontrer que les sous-espaces vectoriels $F_a \cap F_b$ et $F_a + F_b$ sont stables par f.

b) Démontrer les deux équivalences suivantes :

$(b \in F_a) \Longleftrightarrow (F_a = F_b)$

$(b \notin F_a) \Longleftrightarrow (F_a \cap F_b = \{0_E\})$

5° En déduire que n n'est pas égal à 3.

On peut démontrer, plus généralement, par récurrence, que n est pair.

4. Espaces affines Sous-espaces affines

Une partie de ce chapitre consiste en des rappels de notions étudiées en classe de Première.

1. Espace affine associé à un espace vectoriel.

Définitions.

1.1 DÉFINITION : Soient $\mathcal{E}$ un ensemble non vide et E un espace vectoriel sur un corps commutatif K.
$\mathcal{E}$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel E si et seulement si il existe une application φ de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans E qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

- pour tout élément A de $\mathcal{E}$ et pour tout vecteur x de E, il existe un unique élément B de $\mathcal{E}$ tel que : $\varphi(A, B) = x$;
- $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \quad \varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$.

On dit que φ **munit $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine** associé à E. La deuxième propriété de φ est appelée **relation de Chasles.**
Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés **points** et les éléments de $\mathcal{E}^2$ **bipoints.**
Si l'espace vectoriel E est de dimension finie n, l'espace affine $\mathcal{E}$ est dit **de dimension** n.
Un espace affine de dimension 1 est appelé **droite affine** (ou simplement droite). Un espace affine de dimension 2 est appelé **plan affine** (ou simplement plan). Deux bipoints qui ont la même image par φ sont appelés **bipoints équipollents.**
Soit x un vecteur de E ; on appelle **translation de vecteur** x l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe l'unique point M' tel que $\varphi(M, M') = x$.

Propriétés.

1.2 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E et φ l'application de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans E qui munit $\mathcal{E}$ de cette structure d'espace affine.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

P1 $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad (\varphi(A, B) = 0_E) \Longleftrightarrow (A = B)$

Démonstration :
Démontrons d'abord la proposition suivante : $\forall A \in \mathcal{E}, \ \varphi(A, A) = 0_E$.
Soit A un point quelconque de $\mathcal{E}$. Appliquons la relation de Chasles au triplet (A, A, A) de $\mathcal{E}^3$. Nous avons : $\varphi(A, A) + \varphi(A, A) = \varphi(A, A)$.
Puisque, dans E, tout élément est régulier pour l'addition, l'égalité précédente équivaut à : $\varphi(A, A) = 0_E$.
Réciproquement, soit (A, B) un couple quelconque de $\mathcal{E}^2$ tel que $\varphi(A, B) = 0_E$. D'après le raisonnement précédent, nous avons : $\varphi(A, A) = 0_E$. Nous déduisons alors, de la première propriété de φ, que A est égal à B. ■

P2 $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad \varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$

Démonstration :
Soit (A, B) un couple quelconque de $\mathcal{E}^2$. Appliquons la relation de Chasles au triplet (A, B, A). Nous avons :
$\varphi(A, B) + \varphi(B, A) = \varphi(A, A) = 0_E$, et, par suite : $\varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$. ■

P3 $\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4, (\varphi(A, B) = \varphi(C, D)) \Longleftrightarrow (\varphi(A, C) = \varphi(B, D))$

Démonstration :
Soit (A, B, C, D) un quadruplet quelconque de $\mathcal{E}^4$. Nous avons :

$$\begin{aligned}(\varphi(A, B) = \varphi(C, D)) &\Longleftrightarrow (\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(C, D) + \varphi(B, C))\\ &\Longleftrightarrow (\varphi(A, C) = \varphi(B, D)).\end{aligned}$$ ■

P4 La relation d'équipollence $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{E}^2$ et l'application de $\mathcal{E}^2/\mathcal{R}$ dans E qui, à toute classe de bipoints équipollents, associe l'image commune de ces bipoints par φ est une bijection.

Démonstration :
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{E}^2$. Nous désignons par $\overset{\bullet}{\widehat{(A, B)}}$ la classe d'équivalence du bipoint (A, B).
Étudions maintenant l'application f de $\mathcal{E}^2/\mathcal{R}$ dans E définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{E}^2/\mathcal{R} &\longrightarrow E\\ \overset{\bullet}{\widehat{(A, B)}} &\longmapsto \varphi(A, B).\end{aligned}$$

Soit x un vecteur quelconque de E. Pour tout point A de $\mathcal{E}$, il existe un unique point B de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi(A, B) = x$. Il y a donc une infinité de bipoints dont l'image par φ est égale à x.
Si (A, B) et (C, D) sont deux tels bipoints, on a : $\varphi(A, B) = \varphi(C, D)$ et, par suite (A, B) et (C, D) sont équipollents. Il existe donc un unique élément de $\mathcal{E}^2/\mathcal{R}$ dont l'image par f est égale à x. L'application f est bijective. ■

P5 La translation de vecteur nul est l'identité de $\mathcal{E}$; toute translation de vecteur non nul est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ qui n'a pas de point invariant et la bijection réciproque est la translation de vecteur opposé.

Démonstration :
La translation de vecteur nul est l'application qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point M' tel que $\varphi(M, M') = 0_E$; d'après P_1, on a : $M' = M$. La translation de vecteur nul est donc l'identité de $\mathcal{E}$.
Soit x un vecteur non nul de E et soit M' un point quelconque de $\mathcal{E}$. Cherchons les points M de $\mathcal{E}$ tels que $\varphi(M, M') = x$.
D'après P_2, on a : $(\varphi(M, M') = x) \Longleftrightarrow (\varphi(M', M) = -x)$.
De la première propriété de φ, il résulte que le point M est unique ; de plus, l'égalité : $\varphi(M', M) = -x$ équivaut au fait que M est l'image de M' par la translation de vecteur $-x$. ■

Exemples.

1. En classe de Seconde, à partir d'un plan géométrique P, on a construit un plan vectoriel $\vec{P}$ de la manière suivante :
On a défini dans P^2 une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, appelée relation d'équipollence ; on a posé : $\vec{P} = (P \times P)/\mathcal{R}$; on a muni $\vec{P}$ d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2 et on a noté $\overrightarrow{AB}$, et appelé vecteur, la classe d'équivalence d'un couple quelconque (A, B) de P^2.
Vérifions que P est un plan affine associé à $\vec{P}$; considérons pour cela l'application φ de P^2 dans $\vec{P}$ définie par :

$$\varphi : \quad P^2 \longrightarrow \vec{P}$$
$$(A, B) \longmapsto \overrightarrow{AB}.$$

Elle satisfait de façon évidente aux deux propriétés énoncées au 1.1. Le vocabulaire employé dans cet exemple a été conservé dans la théorie générale. Pour la même raison, **nous noterons désormais $\overrightarrow{AB}$ l'image par φ du bipoint (A, B) dans un espace affine quelconque $\mathcal{E}$.**
Des considérations analogues s'appliquent à une droite géométrique et à un espace géométrique à trois dimensions.

2. Tout espace vectoriel réel E peut être muni d'une structure d'espace affine associé à E. Les éléments de E seront considérés soit comme des points, soit comme des vecteurs.
Considérons l'application φ de $E \times E$ dans E définie par :

$$\varphi : \quad E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto y - x.$$

L'application φ possède les deux propriétés de la définition 1.1.
On a en effet :

- pour tout point x de E et pour tout vecteur z de E, il existe un unique point y de E tel que : $y - x = z$; cet élément est égal à $z + x$.
- $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (y - x) + (z - y) = (z - x)$.

Remarquons que l'application φ n'est pas unique ; le lecteur pourra vérifier que l'application ψ de $E \times E$ dans E définie par :

$$\psi : \quad E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x - y$$

munit aussi E d'une structure d'espace affine associé à E.

Nous venons de démontrer qu'un espace vectoriel peut être muni d'une structure d'espace affine. Étudions le problème inverse. On a le résultat suivant :

1.4 THÉORÈME : **Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soit O un point quelconque de $\mathcal{E}$. L'application φ_O de $\mathcal{E}$ dans E définie par :**

$$\begin{aligned} \varphi_O : \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration :

Soit x un vecteur quelconque de E. D'après la définition d'un espace affine, nous savons qu'il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x$. L'application φ_O est donc bijective. ■

Nous dirons que nous avons choisi dans $\mathcal{E}$ le point O pour origine et nous noterons $(\mathcal{E}, O)$ l'ensemble $\mathcal{E}$ muni de l'origine O. La bijection φ_O^{-1} permet de munir $(\mathcal{E}, O)$ d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à E.

1.5 DÉFINITION : **Soient O un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Le couple $(O, \mathcal{B})$ est appelé repère cartésien d'origine O de l'espace affine $\mathcal{E}$.**

A tout point M de $\mathcal{E}$ correspond un vecteur unique x par la bijection φ_O et réciproquement. Les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ sont appelées les **coordonnées de M dans le repère cartésien** $(O, \mathcal{B})$.

Nous avons aussi le théorème suivant :

1.6 THÉORÈME : **Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines respectivement associés aux espaces vectoriels réels E et E' de même dimension. Soient O un point quelconque de $\mathcal{E}$ et O' un point quelconque de $\mathcal{E}'$.**
Alors les espaces vectoriels $(\mathcal{E}, O)$ et $(\mathcal{E}', O')$ sont isomorphes.

Démonstration :

Puisque E et E' ont la même dimension, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels f de E sur E'. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{E}, O) \arrow[d, "\varphi_O"'] & (\mathcal{E}', O') \arrow[d, "\varphi'_{O'}"] \\ E \arrow[r, "f"'] & E' \end{tikzcd}$$

L'application $(\varphi'_{O'})^{-1} \circ f \circ \varphi_O$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $(\mathcal{E}, O)$ sur $(\mathcal{E}', O')$. ■

Remarques : 1. Nous savons représenter, par des dessins, des points et des sous-ensembles d'une droite géométrique, d'un plan géométrique ou d'un espace géométrique à trois dimensions. L'isomorphisme précédent permet donc de représenter, par les mêmes dessins, des points et des sous-ensembles de tout espace affine de dimension 1, 2 ou 3 associé à un espace vectoriel réel.

2. Soit maintenant E un espace vectoriel réel de dimension 1, 2 ou 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E ; d'après le deuxième exemple du paragraphe 1.3, nous savons qu'il existe au moins un tel espace affine ; cet espace affine est non vide ; soit O un point de $\mathcal{E}$. La bijection φ_O^{-1} permet de représenter tout vecteur de E par un point de $\mathcal{E}$.

Nous ferons les dessins dans la droite, le plan ou l'espace géométrique correspondant. Nous noterons désormais, sauf exception, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... les vecteurs d'un espace vectoriel réel E et $\vec{0}$ le vecteur 0_E.

2. Sous-espaces affines d'un espace affine.

Définitions.

2.1 DÉFINITION : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E et φ l'application de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans E qui munit $\mathcal{E}$ de cette structure d'espace affine. Soit $\mathcal{E}'$ une partie non vide de $\mathcal{E}$.
$\mathcal{E}'$ est un sous-espace affine (ou encore une variété affine) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- **$\varphi(\mathcal{E}'\times\mathcal{E}')$ est un sous-espace vectoriel de E ; nous le notons E' ;**
- **$\mathcal{E}'$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel E'.**

Si le sous-espace vectoriel E' de E est de dimension finie n, le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ est dit de dimension n.
E' est la **direction** de $\mathcal{E}'$ et les vecteurs de toute base de E' sont appelés **vecteurs directeurs** de $\mathcal{E}'$. Nous dirons aussi, par convention, que l'ensemble vide $\varnothing$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$; sa direction n'est pas déterminée.

Exemple.

Avec les notations précédentes, considérons un point quelconque A de $\mathcal{E}$ et posons $\mathcal{E}' = \{A\}$.
Démontrons que $\mathcal{E}'$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction le sous-espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ de E.
L'ensemble $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'$ a un seul élément, le couple (A, A) ; d'autre part, on a : $\varphi(A, A) = \vec{0}$. On a donc : $\varphi(\mathcal{E}'\times\mathcal{E}') = \{\vec{0}\}$.
Soit φ' la restriction de φ à $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'$.
φ' est une application de $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'$ dans $\{\vec{0}\}$ qui vérifie de façon évidente les deux propriétés énoncées dans la définition.

Le théorème ci-dessous donne un autre exemple de sous-espace affine.

2.2 **THÉORÈME : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E et φ l'application de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans E qui munit $\mathcal{E}$ de cette structure d'espace affine.**
Soient A un point de $\mathcal{E}$ et E′ un sous-espace vectoriel de E.
L'ensemble $\mathcal{E}'$ des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\varphi(A, M)$, noté $\overrightarrow{AM}$, appartienne à E′ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction E′.

Démonstration :

- Le vecteur $\vec{0}$ est un élément de E′ et l'on a : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$; le point A appartient donc à $\mathcal{E}'$, qui n'est pas vide.
- Montrons que $\varphi(\mathcal{E}'\times\mathcal{E}')$ est égal à E′.

Soit (M, N) un élément quelconque de $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'$. D'après la relation de Chasles, on a : $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$; par définition de $\mathcal{E}'$, les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ appartiennent à E′, il en est donc de même du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Réciproquement, tout vecteur $\vec{u}$ de E′ est l'image par φ_A d'un unique point M ; par définition de $\mathcal{E}'$, ce point M appartient à $\mathcal{E}'$. On a donc $\varphi(A, M) = \vec{u}$.

- Montrons que la restriction φ' de φ à $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'$ possède les deux propriétés de la définition 1.1.

La relation de Chasles est vérifiée pour tout triplet de $\mathcal{E}^3$; elle l'est donc, en particulier, pour tout triplet de $\mathcal{E}'^3$.

Soient maintenant $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E′ et M un point quelconque de $\mathcal{E}'$.
Nous savons qu'il existe un unique point N de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$. Démontrons que N appartient à $\mathcal{E}'$.

On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et par suite : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \vec{u}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AN}$ est un élément de E′ ; le point N est donc un élément de $\mathcal{E}'$. ■

Nous noterons $\mathcal{V}(A, E')$ l'ensemble $\mathcal{E}'$ et nous l'appellerons **le sous-espace affine (ou encore variété affine) de direction** E′ **passant par le point** A.
Démontrons maintenant que tout sous-espace affine est de ce type.

2.3 **THÉORÈME : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E et φ l'application de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans E qui munit $\mathcal{E}$ de cette structure d'espace affine. Soient $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine non vide de $\mathcal{E}$, de direction le sous-espace vectoriel E′ de E, et A un point de $\mathcal{E}'$.**
Le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ est le sous-espace affine de direction E′ passant par le point A, c'est-à-dire $\mathcal{V}(A, E')$.

Démonstration :

Puisque le point A est un élément de $\mathcal{E}'$, on a les équivalences logiques suivantes :
$(M \in \mathcal{E}') \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AM} \in E') \Longleftrightarrow (M \in \mathcal{V}(A, E'))$. ■

Remarque : Avec les mêmes notations que dans le théorème 2.3, et si B est un élément de $\mathcal{E}$, on a l'équivalence logique suivante :

$$(B \in \mathcal{V}(A, E')) \iff (\mathcal{V}(A, E') = \mathcal{V}(B, E')).$$

En effet on a : $(M \in \mathcal{V}(A, E')) \iff (\overrightarrow{AM} \in E') \iff (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \in E')$,

et : $(M \in \mathcal{V}(B, E')) \iff (\overrightarrow{BM} \in E')$.

Il en résulte :

$$\begin{aligned}(\mathcal{V}(A, E') = \mathcal{V}(B, E')) &\iff (\forall M \in \mathcal{E}, (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \in E') \iff (\overrightarrow{BM} \in E'))\\ &\iff (\overrightarrow{AB} \in E')\\ &\iff (B \in \mathcal{V}(A, E')).\end{aligned}$$

Sous-espaces affines d'un espace affine de dimension 1, 2 ou 3.

2.4 Cas d'une droite affine.

Soit $\mathcal{E}$ une droite affine associée à une droite vectorielle réelle E.

Les seuls sous-espaces vectoriels de E sont $\{\vec{0}\}$ et E.

La droite $\mathcal{E}$ a donc trois types de sous-espaces affines : l'ensemble vide, les sous-espaces affines de dimension 0 et les sous-espaces affines de dimension 1. Il y a une infinité de sous-espaces affines de dimension 0 : ce sont les singletons ; il y a un seul sous-espace affine de dimension 1 : c'est la droite affine $\mathcal{E}$.

Cas d'un plan affine.

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine associé à un plan vectoriel réel E.

L'espace vectoriel E a trois types de sous-espaces vectoriels : $\{\vec{0}\}$, les droites vectorielles et E.

Le plan $\mathcal{E}$ a donc quatre types de sous-espaces affines : l'ensemble vide, les singletons (de dimension 0), les droites affines (de dimension 1), le plan $\mathcal{E}$ (de dimension 2).

Cas d'un espace affine de dimension 3.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel réel E.

L'espace vectoriel E a quatre types de sous-espaces vectoriels : $\{\vec{0}\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et E.

L'espace $\mathcal{E}$ a donc cinq types de sous-espaces affines : l'ensemble vide, les singletons (de dimension 0), les droites affines (de dimension 1), les plans affines (de dimension 2), l'espace $\mathcal{E}$ (de dimension 3).

Intersection de sous-espaces affines d'un même espace affine.

2.5 **THÉORÈME : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ deux sous-espaces affines non vides de $\mathcal{E}$, de directions respectives E' et E''. L'intersection $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si ce sous-espace affine n'est pas vide, sa direction est $E' \cap E''$.**

Démonstration :

Envisageons les deux cas suivants : $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' = \varnothing$, $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' \neq \varnothing$.

- $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' = \varnothing$. L'intersection est donc bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.
- $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' \neq \varnothing$. Il existe donc au moins un point A commun à $\mathcal{E}'$ et à $\mathcal{E}''$; on a alors : $\mathcal{E}' = \mathcal{V}(A, E')$ et $\mathcal{E}'' = \mathcal{V}(A, E'')$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$. On a :

$$(M \in \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'') \iff \big(M \in \mathcal{V}(A, E') \text{ et } M \in \mathcal{V}(A, E'')\big) \iff \big(\overrightarrow{AM} \in E' \text{ et } \overrightarrow{AM} \in E''\big)$$
$$\iff \big(\overrightarrow{AM} \in E' \cap E''\big) \iff (M \in \mathcal{V}(A, E' \cap E'')).$$

$\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$ est donc le sous-espace affine passant par A, de direction $E' \cap E''$. ∎

2.6 **DÉFINITION : Deux sous-espaces affines non vides d'un même espace affine associé à un espace vectoriel réel sont parallèles si et seulement s'ils ont la même direction.**

La relation de parallélisme est notée $/\!/$.

Remarquons que deux sous-espaces affines parallèles sont nécessairement de même dimension.

Rappelons les résultats suivants obtenus en classe de Première :

- **La relation de parallélisme est une relation d'équivalence** dans l'ensemble des sous-espaces affines de même dimension d'un espace affine associé à un espace vectoriel réel.
- **Deux sous-espaces affines parallèles d'un même espace affine sont égaux ou disjoints.**
- Soit $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$ associé à un espace vectoriel réel. **Par tout point de $\mathcal{E}$, il passe un unique sous-espace affine parallèle à $\mathcal{E}'$.** Ce résultat apparaît ici comme un **théorème**; dans le point de vue adopté en classe de Seconde, c'est un axiome : **l'axiome d'Euclide.**

Cas d'un plan affine.

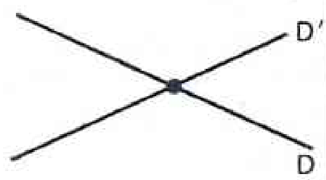
2.7 Soit P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.

Étudions l'intersection de deux droites affines de P. Soient D et D′ ces deux droites, $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ leurs directions respectives.

Il n'y a que deux cas possibles : $\vec{D} = \vec{D'}$ ou $\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$.

- Si $\vec{D} = \vec{D'}$, les droites D et D′ sont parallèles ; on a alors : $D = D'$ ou $D \cap D' = \varnothing$. Les droites D et D′ sont égales ou disjointes.
- Si $\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$, démontrons que D et D′ ont un seul point commun ; nous dirons alors qu'elles sont **sécantes**. D'après le théorème 2.5, il suffit de démontrer que l'intersection $D \cap D'$ n'est pas vide.

Soient $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u'})$ des repères cartésiens respectifs des droites D et D'.
Puisque l'on a : $\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$, la famille $(\vec{u}, \vec{u'})$ est une base de $\vec{P}$; soient $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ dans cette base.
Si D et D' ne sont pas disjointes, tout point M de $D \cap D'$ satisfait à la proposition suivante : $(\exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u})$ et $(\exists \lambda' \in \mathbb{R}, \overrightarrow{A'M} = \lambda' \vec{u'})$.
On a : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'}$; et, par suite : $\alpha \vec{u} + \beta \vec{u'} = \lambda \vec{u} - \lambda' \vec{u'}$; ce qui équivaut à : $(\lambda = \alpha$ et $\lambda' = -\beta)$.
Il existe donc un point M et un seul répondant à la question.
Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant. Nous employons une convention utilisée en technologie pour figurer les circuits électriques : on marque en gras les points communs aux droites figurées.

	$D \cap D' = \emptyset$	$D \cap D' \neq \emptyset$
$\vec{D} = \vec{D'}$	D D'	D = D'
$\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$		

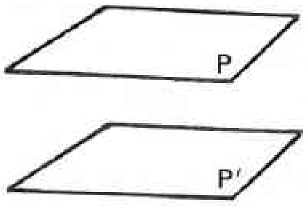
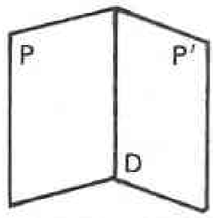
Cas d'un espace affine de dimension 3.

2.8 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel réel E. Nous allons étudier les intersections suivantes : intersection de deux plans affines, intersection de deux droites affines de $\mathcal{E}$, intersection d'une droite et d'un plan affine.

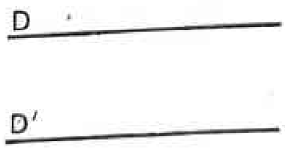
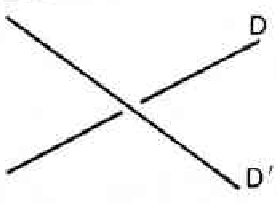
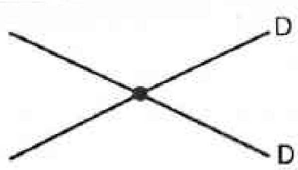
• Soient P et P' deux plans affines de $\mathcal{E}$, de directions respectives $\vec{P}$ et $\vec{P'}$. Il n'y a que deux cas possibles : $\vec{P} = \vec{P'}$ ou $\vec{P} \cap \vec{P'} = \vec{D}$ avec $\vec{D}$ droite vectorielle de E.
Si $\vec{P} = \vec{P'}$, les plans P et P' sont parallèles ; on a alors : $P = P'$ ou $P \cap P' = \emptyset$. Les plans P et P' sont égaux ou disjoints.

Si $\vec{P} \cap \vec{P'} = \vec{D}$, on démontre, de façon analogue au paragraphe 2.7, que $P \cap P'$ n'est pas vide. D'après le théorème 2.5, l'intersection $P \cap P'$ est donc une droite affine D de direction $\vec{D}$; nous disons alors que les plans P et P' sont **sécants.**

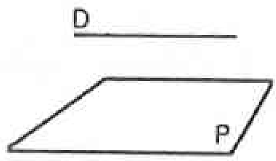
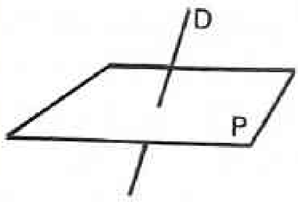
Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant :

	$P \cap P' = \varnothing$	$P \cap P' \neq \varnothing$
$\vec{P} = \vec{P'}$		
$\vec{P} \cap \vec{P'} = \vec{D}$		

• Soient D et D' deux droites affines de $\mathcal{E}$, de directions respectives $\vec{D}$ et $\vec{D'}$. Il n'y a que deux cas possibles : $\vec{D} = \vec{D'}$ ou $\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$.
Si $\vec{D} = \vec{D'}$, les deux droites D et D' sont parallèles, on a alors $D = D'$ ou $D \cap D' = \varnothing$.
Les droites D et D' sont égales ou disjointes.
Si $\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$, ou bien, d'après le théorème 2.5, les deux droites D et D' ont un point commun et un seul, ou bien les deux droites n'ont pas de point commun : on dit alors qu'elles sont **non coplanaires.**
Remarquons que, dans ce cas, l'hypothèse $\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$ n'implique pas :
$D \cap D' \neq \varnothing$.
Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant :

	$D \cap D' = \varnothing$	$D \cap D' \neq \varnothing$
$\vec{D} = \vec{D'}$		
$\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$		

• Soient D une droite affine de $\mathcal{E}$, de direction $\vec{D}$ et P un plan affine de $\mathcal{E}$, de direction $\vec{P}$. Il n'y a que deux cas possibles : $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$ ou $\vec{D} \subset \vec{P}$.
Si $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$, on démontre, de façon analogue au paragraphe 2.7, que $D \cap P$ n'est pas vide. D'après le théorème 2.5, l'intersection $D \cap P$ est donc réduite à un point ; on dit alors que la droite et le plan sont **sécants**.
Si $\vec{D} \subset \vec{P}$, ou bien la droite D et le plan P sont disjoints, ou bien ils ont au moins un point commun et, d'après le théorème 2.5, leur intersection est la droite D. Dans ces deux derniers cas, il y a au moins une droite du plan P qui est parallèle à la droite D. On dit alors que **la droite D est parallèle au plan P.**
Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant :

	$D \cap P = \varnothing$	$D \cap P \neq \varnothing$
$\vec{D} \subset \vec{P}$		
$\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$		

<u>Remarque :</u> Nous avons introduit la notion de droite parallèle à un plan. Plus généralement, définissons la relation « être parallèle à » dans l'ensemble des sous-espaces affines d'un même espace affine $\mathcal{E}$ associé à un espace vectoriel réel E : le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ est parallèle au sous-espace affine $\mathcal{E}''$ si et seulement si la direction de $\mathcal{E}'$ est incluse dans celle de $\mathcal{E}''$.
Cette relation généralise la relation de parallélisme du paragraphe 2.6, mais elle n'est pas symétrique ; ce n'est donc pas une relation d'équivalence.

Résultats analytiques.

Nous rappelons ici des résultats obtenus en classe de Première.
Lorsque nous écrirons des rapports, nous emploierons toujours la convention suivante : si le dénominateur du rapport est nul, nous conviendrons que son numérateur est aussi égal à 0.

Droites d'un plan affine.

2.9 Soient P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$ et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P. Toutes les coordonnées (resp. les composantes) des points de P (resp. des vecteurs de $\vec{P}$) sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$).

Représentation paramétrique d'une droite.

Soient A un point de P et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\vec{P}$. Notons $D(A, \vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; appelons $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ les coordonnées de A et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{u}$. Soit M un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\left(M \in D(A, \vec{u})\right) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}\right)}$$

Le système formé par les deux équations est une **représentation paramétrique de $D(A, \vec{u})$ de paramètre λ.**

Équation cartésienne d'une droite.

- On a aussi :

$$\boxed{\left(M \in D(A, \vec{u})\right) \iff \left(\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}\right)}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Cette équation est une **équation cartésienne** de $D(A, \vec{u})$.

Remarquons que, si l'on donne deux points distincts A et B de D, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D.

Remarquons aussi que, d'après la convention faite, si α par exemple est nul, l'équation cartésienne de D est : $x - x_0 = 0$.

- Réciproquement, on a :

> Soient a et b deux réels non tous deux nuls et h un réel. Toute équation de la forme : $ax + by + h = 0$ est une équation cartésienne d'une droite dont un vecteur directeur est le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Droites parallèles.

- Soient D et D' deux droites de P, d'équations cartésiennes respectives : $ax + by + h = 0$ et $a'x + b'y + h' = 0$. On a :

$$\boxed{(D \parallel D') \iff \left(\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0\right) \iff \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\right)}$$

La deuxième équivalence est vraie sans restriction sur a' et b' grâce à la convention faite.

- On a aussi le résultat suivant :

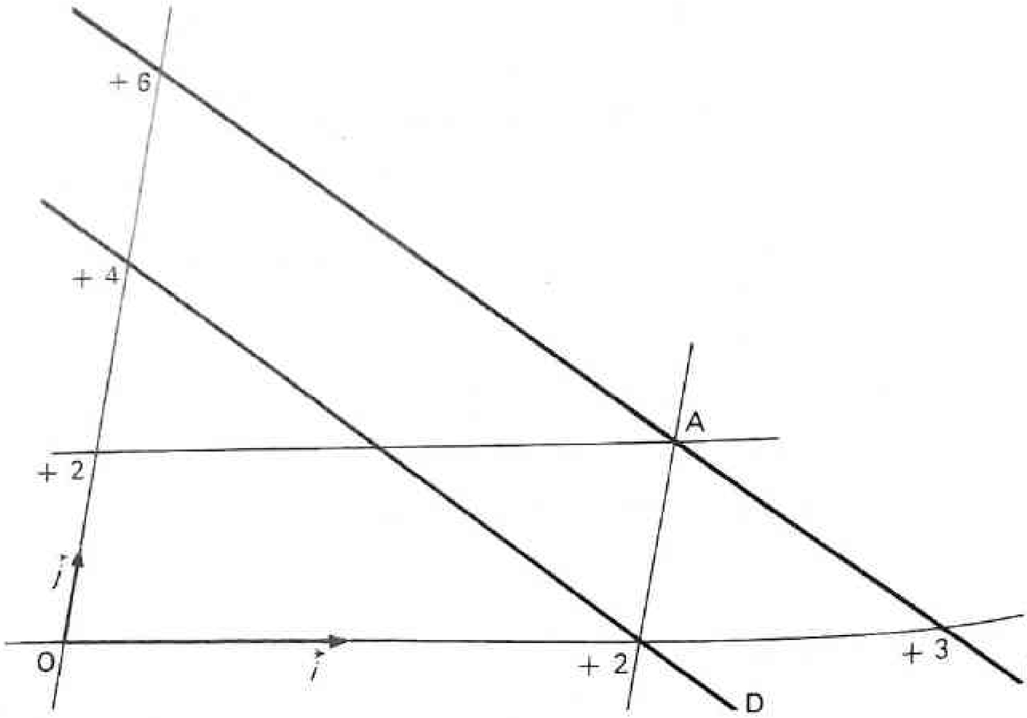
> Soit D une droite d'équation cartésienne : $ax + by + h = 0$. Le vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D si et seulement si l'on a :
>
> $$a\alpha + b\beta = 0.$$
>
> $\begin{vmatrix} \alpha & -b \\ \beta & a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$

Démonstration :

Soit A $\begin{pmatrix}x_0 \\ y_0\end{pmatrix}$ un point quelconque de D ; on a : $ax_0 + by_0 + h = 0$ (1). Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D si et seulement si le point B défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ appartient à D. Les coordonnées de B sont $\begin{pmatrix}x_0 + \alpha \\ y_0 + \beta\end{pmatrix}$. Le point B appartient donc à D si et seulement si l'on a : $a(x_0 + \alpha) + b(y_0 + \beta) + h = 0$ (2).
Des égalités (1) et (2), il résulte que le point B appartient à D si et seulement si l'on a : $a\alpha + b\beta = 0$. ■

Exemple.

Soit, dans le plan P rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite D d'équation cartésienne : $2x + y - 4 = 0$. Soit A le point de coordonnées $\begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix}$. Cherchons une équation cartésienne de la droite D' passant par A et parallèle à D.



Toute droite parallèle à D a une équation cartésienne de la forme : $2x + y + h = 0$. On détermine h en écrivant que le point A appartient à une telle droite. On a : $2 \times 2 + 2 + h = 0$.

L'équation cherchée est donc : $\boxed{2x + y - 6 = 0}$

Plans dans un espace affine de dimension 3.

2.10 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel réel E et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Toutes les coordonnées (resp. les composantes) des points de $\mathcal{E}$ (resp. des vecteurs de E) sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (resp. dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.)

Représentation paramétrique d'un plan.

Soient A un point de $\mathcal{E}$ et $(\vec{u}, \vec{u'})$ une famille libre de E.
Notons $P(A, \vec{u}, \vec{u'})$ le plan affine de $\mathcal{E}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$; appelons $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ les coordonnées de A et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ les composantes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$\boxed{\left(M \in P(A, \vec{u}, \vec{u'})\right) \Longleftrightarrow \left(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}\right)}$$

Le système formé par les trois équations est une **représentation paramétrique** de P, de paramètres λ et μ.

Équation cartésienne d'un plan.

• En éliminant λ et μ entre ces trois équations, on obtient une relation entre x, y et z appelée **équation cartésienne de** P. Nous en verrons plus loin des exemples. Remarquons aussi que, si l'on donne trois points non alignés A, B, C de P, chacune des familles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ou $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, par exemple, est une famille de vecteurs directeurs de P.

• Réciproquement, on a :

> Soient a, b, c trois réels non tous trois nuls et h un réel.
> Toute équation de la forme : $ax + by + cz + h = 0$ est une équation cartésienne d'un plan dont une famille de vecteurs directeurs est, par exemple, la famille dont les vecteurs ont pour composantes respectives $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$

Plans parallèles.

• Soient P et P′ deux plans affines de $\mathcal{E}$, d'équations cartésiennes respectives : $ax + by + cz + h = 0$ et $a'x + b'y + c'z + h' = 0$. On a :

$$\boxed{(P \mathbin{/\!/} P') \Longleftrightarrow \left(\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)}$$

La deuxième équivalence est vraie sans restriction sur a', b', c' grâce à la convention faite.

• On démontre de la même manière que dans le paragraphe 2.9 le résultat suivant :

> Soit P un plan affine de $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne : $ax + by + cz + h = 0$.
>
> Le vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de P si et seulement si l'on a : $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Exemples.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension trois rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

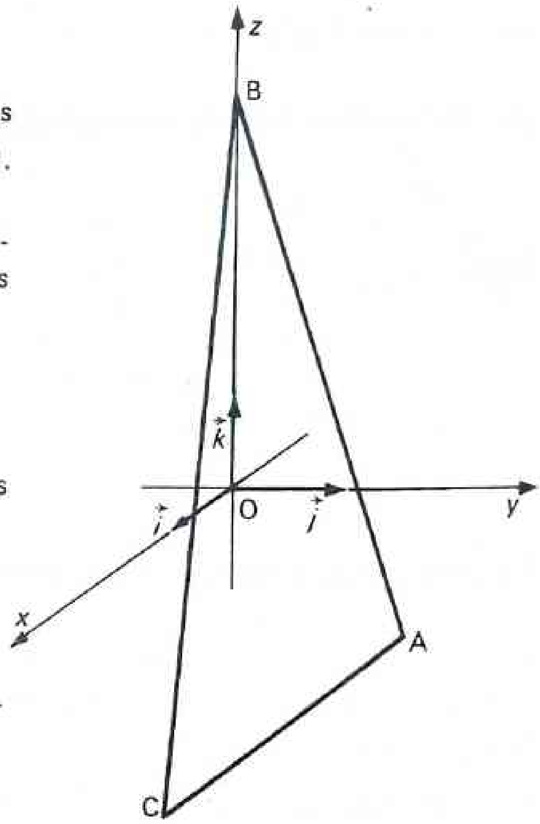
1. Cherchons d'abord une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B, C de coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Choisissons comme famille de vecteurs directeurs de P la famille $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

On a : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Soit M un point quelconque, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.



$$\left(M \in P(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\right) \Longleftrightarrow \left(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = \lambda + 3\mu & (1) \\ y = 2\lambda + \mu & (2) \\ z = 4 - 5\lambda - 6\mu & (3) \end{cases}\right).$$

Éliminons λ et μ entre les trois équations.

Les équations (1) et (2) sont équivalentes à : $\left(\lambda = \dfrac{3y - x}{5}\right.$ et $\left.\mu = \dfrac{2x - y}{5}\right)$;

en remplaçant λ et μ par leurs valeurs dans (3), nous obtenons :

$$z = 4 - (3y - x) - \frac{6}{5}(2x - y),$$

ce qui équivaut à : $\boxed{7x + 9y + 5z - 20 = 0}$

2. Cherchons ensuite une équation cartésienne du plan Q' passant par le point D de coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan Q d'équation cartésienne : $2x + 3y - z + 1 = 0.$

Tout plan parallèle à Q a une équation cartésienne de la forme : $2x + 3y - z + h = 0.$

On détermine h en écrivant que le point D appartient à un tel plan.

On a : $2(-5) + 3 \times 0 - 1 + h = 0.$

L'équation cherchée est donc : $\boxed{2x + 3y - z + 11 = 0}$

Droites dans un espace affine de dimension 3.

2.11 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel réel E et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Toutes les coordonnées (resp. les composantes) des points de $\mathcal{E}$ (resp. des vecteurs de E) sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (resp. dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

Représentation paramétrique d'une droite.

Soient A un point de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E. Notons $D(A, \vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Appelons $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ les coordonnées de A et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{u}$.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$\boxed{\left(M \in D(A, \vec{u})\right) \Longleftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}\right)}$$

Le système formé par les trois équations est une **représentation paramétrique** de D, de paramètre λ.

Équations cartésiennes d'une droite.

En éliminant λ entre ces trois équations, on obtient deux relations entre x, y et z appelées **des équations cartésiennes de** D. Remarquons que chacune des équations cartésiennes de D est l'équation cartésienne d'un plan de $\mathcal{E}$. La droite D est donc définie comme l'intersection de deux plans de $\mathcal{E}$; aucun de ces deux plans n'est d'ailleurs déterminé de façon unique.

$$\boxed{\left(M \in D(A, \vec{u})\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}\right)}$$

Intersection de deux plans.

Réciproquement, on a :

Soient P et P' deux plans sécants d'équations respectives :
$ax + by + cz + h = 0$ et $a'x + b'y + c'z + h' = 0$.
Alors un vecteur directeur de la droite D, intersection de ces deux plans, est le

vecteur de composantes : $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

Démonstration :
Soit Q (resp. Q') le plan parallèle à P (resp. P') qui passe par O.
Les plans Q et Q' ont pour équations respectives :
$ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$.
Les plans Q et Q' sont sécants suivant une droite D' qui est parallèle à D. Tout vecteur directeur de D' est donc un vecteur directeur de D.

Considérons le système : $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{cases}$

Puisque les plans Q et Q' sont sécants, l'un au moins des trois déterminants
$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}$ est non nul.

Supposons, par exemple, que $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ soit non nul.

On a :

$$\left(\begin{cases} ax + by = -cz \\ a'x + b'y = -c'z \end{cases}\right) \iff \left(x = \frac{\begin{vmatrix} -cz & b \\ -c'z & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & -cz \\ a' & -c'z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \right)$$

$$\iff \left(x = z\frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = z\frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \right).$$

En utilisant la convention faite au début de cette étude, ces égalités sont équivalentes à :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

La droite D' est donc la droite passant par O et dont un vecteur directeur est le

vecteur de composantes : $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$. ■

Exemples.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Considérons le plan P d'équation cartésienne : $3x + 5y - 4z + 2 = 0$ et une droite D dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vérifions que D est une droite parallèle au plan P.

Les vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ forment une famille de vecteurs directeurs du plan P.

Pour démontrer que D est parallèle à P, il suffit de démontrer que $\vec{u}$ appartient au plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs. Il suffit donc de trouver deux réels λ et μ tels que l'on ait : $\begin{cases} -1 = 4\lambda + 0\mu \\ 3 = 0\lambda + 4\mu \\ 3 = 3\lambda + 5\mu. \end{cases}$

Les réels $\lambda = -\frac{1}{4}$ et $\mu = \frac{3}{4}$ répondent à la question.

2. Considérons la droite D d'équations cartésiennes : $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$

et la droite D' passant par le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u'}$ de composantes $\begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Étudions l'intersection de ces deux droites.

Un vecteur directeur de D est le vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$. On a : $\vec{u'} = -2\vec{u}$.

Les droites D et D' sont donc parallèles.

Puisque le point A n'appartient pas à la droite D, ces droites ne sont pas confondues ; elles sont disjointes.

Déterminons donc une équation cartésienne du plan Q contenant les droites D et D'.

Cherchons une famille de vecteurs directeurs du plan Q.

Le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à la droite D. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ forment donc une famille de vecteurs directeurs de Q.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$(M \in Q) \iff \left(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\overrightarrow{AB}\right)$$
$$\iff \left(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x - 1 = 2\lambda - 3\mu \\ y - 1 = -7\lambda - 4\mu \\ z = -5\lambda \end{cases}\right).$$

Une équation cartésienne du plan Q est donc :

$20x - 15y + 29z - 5 = 0.$

3. Barycentre.

Fonction vectorielle de Leibniz.

3.1 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E ; soient n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et n réels $a_1, \dots, a_n$. Nous supposons $\mathcal{E}$ de dimension non nulle.

Considérons l'application f de $\mathcal{E}$ dans E définie par :

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow E$$

$$M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$$

L'application f est appelée **fonction vectorielle de Leibniz** associée aux points $A_1, \dots, A_n$ et aux réels $a_1, \dots, a_n$.

Remarquons que la fonction vectorielle de Leibniz associée à un point O de $\mathcal{E}$ et au réel -1 est l'application φ définie au paragraphe 1.4. Ceci nous incite à chercher si f est bijective. Commençons par chercher si f est injective.

Soient M et M′ deux points de $\mathcal{E}$. On a : $\varphi = f : \mathcal{E} \longrightarrow E$ $M \longmapsto -\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM}$

$$f(M) - f(M') = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{M'A_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \overrightarrow{MM'}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MM'}.$$

Il faut donc envisager les deux cas suivants :

<u>Premier cas :</u> $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. On a alors : $\forall (M, M') \in \mathcal{E}^2, \quad f(M) = f(M')$.

L'application f est donc constante ; par suite elle n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.

<u>Deuxième cas :</u> $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

On a alors : $\forall (M, M') \in \mathcal{E}^2, \quad \left((M \neq M') \Longrightarrow (f(M) \neq f(M'))\right)$.

L'application f est donc injective et l'on a :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{E}^2, \quad \left(f(M) = f(M') + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MM'}\right).$$

Cherchons si f est surjective.

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E ; cherchons s'il existe un point M de $\mathcal{E}$, tel que $f(M) = \vec{u}$.

Soit O un point quelconque de $\mathcal{E}$; on a :

$$\left(f(M) = \vec{u}\right) \iff \left(f(O) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MO} = \vec{u}\right) \iff \left(\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\left(f(O) - \vec{u}\right)\right).$$

Il existe donc un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que : $f(M) = \vec{u}$; par suite f est surjective.

Nous concluons : Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, l'application f est injective et surjective ; elle est donc bijective. D'où le théorème :

THÉORÈME : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E ; soient n points $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et n réels $a_1, \ldots, a_n$ et soit f la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points $A_1, \ldots, A_n$ et aux réels $a_1, \ldots, a_n$.

Si le réel $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est nul, l'application f est constante.

Si le réel $\sum_{i=1}^{n} a_i$ n'est pas nul, l'application f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur E.

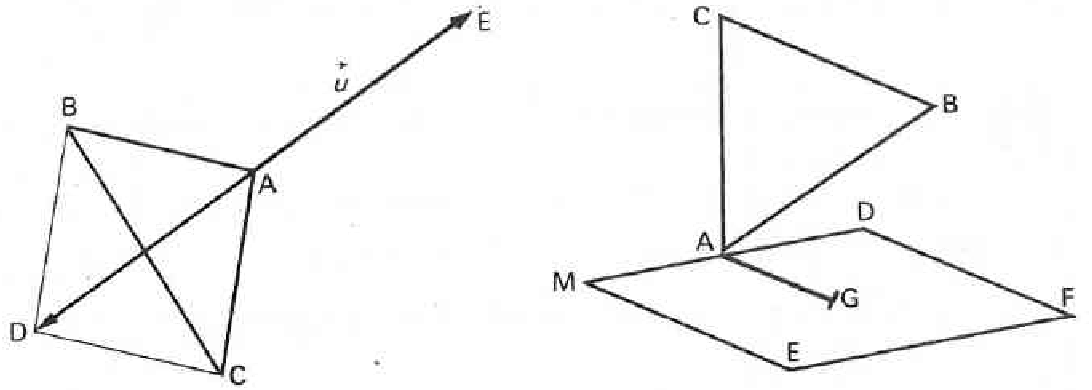
Exemples.

Soient trois points A, B, C distincts non alignés d'un plan affine P.

1. Étudions la fonction vectorielle de Leibniz f associée aux points A, B, C et aux réels 2, − 1, − 1.

La somme 2 + (− 1) + (− 1) est nulle ; l'application f est donc constante. Cherchons le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$ image par f de tous les points du plan.

On a : $\vec{u} = f(A) = 2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.



2. Étudions la fonction vectorielle de Leibniz g associée aux points A, B, C et aux réels 2, + 1, − 1.

La somme 2 + 1 − 1 est égale à 2 ; elle est donc non nulle et l'application g est bijective. Cherchons l'image par g d'un point M de P.

On a : $g(A) = 2\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$,

puis : $g(M) = g(A) + 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MF}$.

Barycentre de n points.

3.2 DÉFINITION : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E, n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et n réels $a_1, \ldots, a_n$ de somme non nulle. Soit f la fonction de Leibniz associée à ces points et à ces réels.
On appelle barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ l'unique point G de $\mathcal{E}$ tel que : $f(G) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. (Antécédent du vecteur nul)

Si les coefficients sont tous égaux à 1, le point G est appelé l'**isobarycentre** (ou l'**équibarycentre**) des points $A_1, \ldots, A_n$.

Exemple.

Reprenons l'exemple 2 du paragraphe 3.1.
Le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 2, 1, -1 est le point G défini par : $g(G) = \overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{GA} = \vec{0}$, ce qui équivaut à : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB}$.

Propriétés.

3.3 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de somme non nulle.
Désignons par G le barycentre de ces points affectés de ces réels et par f la fonction vectorielle de Leibniz associée à ces points et à ces réels.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

P1

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MG}$$

Démonstration :

On a : $\forall M \in \mathcal{E}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MG} = f(M) - f(G) = f(M)$. ■

P2 Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, si $\mathcal{R}$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$, si, pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, le point A_i a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ dans ce repère, et si G a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans ce repère, alors on a :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \qquad z = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Démonstration :

Soit O l'origine du repère $\mathcal{R}$. D'après P_1, on a : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i} \right)$. ■

Des résultats analogues peuvent être démontrés pour une droite et un plan affine.

Remarque : L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu de (A, B). L'isobarycentre de trois points A, B, C non alignés est le centre de gravité (ou d'inertie) du triangle (A, B, C).

> **P3** Le barycentre de n points ne dépend pas de l'ordre dans lequel on considère ces points.

Cette propriété résulte de la commutativité de l'addition dans E. Homogénéité du Barycentre

> **P4** Soit λ un réel non nul.
> Le barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ est égal au barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n$.

Démonstration :

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \right) \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \right)$. ■

Remarquons que l'isobarycentre de n points est aussi le barycentre de ces points affectés de coefficients non nuls tous égaux.

> **P5** Supposons n supérieur ou égal à 3 ; soient k un entier tel que : $1 < k < n$ et $\sum_{i=1}^{k} a_i \neq 0$. Si G' est le barycentre des points $A_1, \ldots, A_k$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_k$ alors G est le barycentre des points $G', A_{k+1}, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right), a_{k+1}, \ldots, a_n$.

Démonstration :

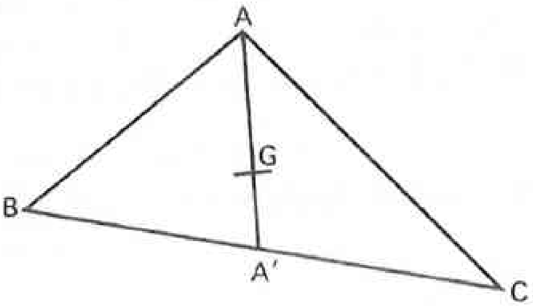
Remarquons d'abord que l'on peut toujours trouver au moins un entier k inférieur à n tel que l'on ait : $\sum_{i=1}^{k} a_i \neq 0$.

On a alors : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \right) \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \right)$

$$\Longleftrightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) \overrightarrow{GG'} + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \right). \blacksquare$$

Remarque : Cette propriété permet, par exemple, de construire simplement le centre de gravité G de trois points distincts non alignés A, B, C d'un plan affine P. D'après P_5, si A' est le milieu de (B, C), le point G est le barycentre des points A et A' affectés des coefficients 1 et 2.

On a donc : $\vec{GA} + 2\vec{GA'} = \vec{0}$, ce qui équivaut à : $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$.



Barycentres et sous-espaces affines.

Cas d'une droite affine.

3.4 Soit D une droite affine associée à une droite vectorielle réelle $\vec{D}$.

Soient $(A, \vec{u})$ un repère cartésien de D et B le point de D tel que : $\vec{AB} = \vec{u}$.

Puisque $\vec{u}$ n'est pas nul, les points A et B sont distincts.

Soit M un point de D. On a :

$$\begin{aligned}
(M \in D(A, \vec{AB})) &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{AM} = \lambda \vec{AB}) \\
&\iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ -\vec{MA} = \lambda(\vec{MB} - \vec{MA})) \\
&\iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ (1-\lambda)\vec{MA} + \lambda \vec{MB} = \vec{0}) \\
&\iff (\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha + \beta = 1 \text{ et } \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = \vec{0}) \\
&\iff (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a + b \neq 0 \text{ et } a\vec{MA} + b\vec{MB} = \vec{0}).
\end{aligned}$$

La droite D est donc l'ensemble des barycentres des points A et B.

On dit que le couple (A, B) est un **repère affine de D.**

Cas général.

3.5 DÉFINITION : Soit $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de dimension p supérieure ou égale à 0, de direction E', d'un espace affine $\mathcal{E}$ associé à un espace vectoriel réel.

Soient $p + 1$ points $A_0, \dots, A_p$ de $\mathcal{E}'$.

La famille des $(p + 1)$ points $(A_0, A_1, \dots, A_p)$ est un repère affine de $\mathcal{E}'$ si et seulement si la famille $(\vec{A_0A_1}, \dots, \vec{A_0A_p})$ est une base de E'.

Si $(A_0, \ldots, A_p)$ est un repère affine de $\mathcal{E}'$, alors $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}'$.

Exemples.

Si $\mathcal{E}'$ est une droite affine, tout repère affine de $\mathcal{E}'$ est constitué de **deux points distincts.**

Si $\mathcal{E}'$ est un plan affine, tout repère affine de $\mathcal{E}'$ est constitué de **trois points non alignés.**

Si $\mathcal{E}'$ est un espace affine de dimension 3, tout repère affine de $\mathcal{E}'$ est constitué de **quatre points non coplanaires.**

3.6 THÉORÈME : Soient $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de dimension p supérieure ou égale à 1 d'un espace affine $\mathcal{E}$ associé à un espace vectoriel réel et $(A_0, \ldots, A_p)$ un repère affine de $\mathcal{E}'$.
Alors $\mathcal{E}'$ est l'ensemble des barycentres des points $A_0, \ldots, A_p$.

Démonstration :

Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+1}$ des $(p+1)$-uplets $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ tels que la somme $a_0 + \ldots + a_p$ soit non nulle.

Considérons l'application f de S dans $\mathcal{E}$ qui, à tout $(p+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_p)$ de S, associe le point G de $\mathcal{E}$, barycentre des points $A_0, \ldots, A_p$ affectés des coefficients $a_0, \ldots, a_p$. On a donc : $\forall (a_0, \ldots, a_p) \in S, \ (f(a_0, \ldots, a_p) = G) \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{p} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}\right)$.

D'après la définition de S, le point G existe toujours et est unique.

D'après la propriété P_4 du paragraphe 3.3, on a :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_p) = f(a_0, \ldots, a_p)$.

L'application f n'est donc pas injective. Cherchons à déterminer l'ensemble $f(S)$. = Im f

D'après la propriété P_1, on a :

$$\left(\sum_{i=0}^{p} a_i\right) \overrightarrow{A_0G} = \sum_{i=0}^{p} a_i \overrightarrow{A_0A_i} = \overbrace{a_0 \overrightarrow{A_0A_0}}^{\vec{0}} + \ldots + a_p \overrightarrow{A_0A_p} = \sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Posons : $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i = a$; nous avons : $\displaystyle\overrightarrow{A_0G} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i}{a} \overrightarrow{A_0A_i}$.

Le point G appartient à $\mathcal{E}'$; on a donc : $f(S) \subset \mathcal{E}'$. (1)

Soit maintenant M un point quelconque de $\mathcal{E}'$. On a :

$$(M \in \mathcal{E}') \Longleftrightarrow \left(\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{MA_i}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \overrightarrow{MA_0} + \lambda_1 \overrightarrow{MA_1} + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{MA_p} = \vec{0}\right).$$

Puisque la somme $\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) + \lambda_1 + \ldots + \lambda_p$ est égale à 1, le point M est le barycentre des points $A_0, \ldots, A_p$ affectés des coefficients $\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right), \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

On a donc : $\mathcal{E}' \subset f(S)$. (2)

Des propositions (1) et (2), il résulte l'égalité : $f(S) = \mathcal{E}'$. ■

On appelle **système de coordonnées barycentriques**, dans le repère affine $(A_0, \ldots, A_p)$ d'un point M de $\mathcal{E}'$, l'un des $(p+1)$-uplets $(a_0, \ldots, a_p)$ de S tels que : $f(a_0, \ldots, a_p) = M$.

Remarquons que, si $(a_0, \ldots, a_p)$ et $(a'_0, \ldots, a'_p)$ sont deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point M, alors il existe un réel λ non nul tel que, pour tout i de $\{0, 1, \ldots, p\}$, on ait : $a_i = \lambda a'_i$.

EXERCICES

Espaces affines. Sous-espaces affines.

1 Démontrer la propriété suivante qui a été admise dans le paragraphe 2.8 : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, P et P' deux plans affines de $\mathcal{E}$ de directions respectives $\vec{P}$ et $\vec{P'}$. Si $\vec{P} \cap \vec{P'}$ est une droite vectorielle, alors l'intersection $P \cap P'$ n'est pas vide, et cette intersection est une droite affine de $\mathcal{E}$.

2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E de dimension 3. Soient A et A' deux points de $\mathcal{E}$, et F et F' deux sous-espaces vectoriels de E tels que l'on ait : $\dim F = 1$ et $\dim F' = 2$.
Soient D la droite de $\mathcal{E}$ passant par A, de direction F, et P le plan de $\mathcal{E}$ passant par A', de direction F'.

Démontrer l'équivalence suivante : $(D \subset P) \Longleftrightarrow \left(F \subset F' \text{ et } \overrightarrow{AA'} \in F'\right)$.

◆ Dans les exercices suivants (nos 3 à 10), $\mathcal{E}$ est un espace affine associé à un espace vectoriel réel E de dimension 2, et $\mathcal{R}$ est un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{E}$.

3 Soient A le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ et $\vec{u}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de E.

1° Donner une représentation paramétrique de la droite D, passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2° Déterminer une équation cartésienne de D.

4 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

1° Déterminer une représentation paramétrique de la droite D déterminée par les points A et B.

2° Déterminer une équation cartésienne de D.

5 Mêmes questions que dans le n° 4 pour les points A et B de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

6 Soient D et D' deux droites affines de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes respectives : $2x + y - 3 = 0$ et $x - 4y + 3 = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Déterminer l'intersection des droites D et D'.

7 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E de composantes respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'intersection de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et de la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.

8 Même question que dans le n° 7, pour les points A et B de mêmes coordonnées et pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} - 9 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}$.

9 Soit m un nombre réel. Soient D et D' les deux droites de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes respectives dans $\mathcal{R}$:
$2mx + (m^2 - 1)y + m^3 - 11 = 0$ et $(m^2 + 9)x + 8my + 2m + 1 = 0$.
Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels les droites D et D' sont parallèles.

10 Soient M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, et k un réel non nul.
On considère les droites Δ et Δ' passant par O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Soit D la droite passant par M et dont les intersections respectives A et B avec Δ et Δ' vérifient l'égalité : $\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$. $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$
Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des points A et B et une équation cartésienne de la droite (AB).

Si $k = 1$ on a $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ et $A = B$
Si $k \neq 1$ poser $G = \text{Bar}\begin{bmatrix} A & B \\ 1 & -k \end{bmatrix}$ on a $(1-k)\overrightarrow{MG}$

♦ Dans les exercices suivants (nos 11 à 25), $\mathcal{E}$ est un espace affine associé à un espace vectoriel réel E de dimension 3 et $\mathcal{R}$ est un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$.

11 Soient A, B, C, D les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$:
$\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\-6\\-4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$.

1° Déterminer une équation cartésienne du plan P déterminé par les points A, B, C.
2° Déterminer une équation cartésienne du plan passant par D et parallèle au plan P.

12 Mêmes questions que dans le n° 11, pour les points A, B, C, D de coordonnées respectives : $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$.

13 Soient A, B et C trois points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$:
$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ et soit $\vec{u}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A et B et dont la direction contient le vecteur $\vec{u}$.
2° Déterminer une représentation paramétrique du plan Q passant par C et parallèle au plan P.

14 Soient P et P' les plans de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes respectives dans $\mathcal{R}$:
$x + 2y - z + 1 = 0$ et $3x + 4y - 2z + 5 = 0$.
1° Déterminer une représentation paramétrique de l'intersection D des deux plans P et P'.
2° Déterminer les équations cartésiennes de la droite D' passant par le point A de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et parallèle à la droite D.

15 Mêmes questions que dans le n° 14, pour les plans P et P' d'équations cartésiennes respectives : $2x - 3y + z - 5 = 0$ et $x + 4y - 2z + 3 = 0$
et le point A de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

16 Soient A et A' deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$:
$\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}, \vec{v'}$ les vecteurs de E de composantes respectives dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$. On désigne par P (resp. P') le plan passant par A (resp. A') et de direction le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (resp. $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$).
1° Déterminer les équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ de l'intersection de P et de P'.
2° Déterminer une représentation paramétrique de la droite parallèle à P et à P' et passant par le point B de coordonnées dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

17 Soit A le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de E de composantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1° Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2° Déterminer les intersections respectives de la droite D avec les plans : $P_1(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $P_2(O ; \vec{j}, \vec{k})$, $P_3(O ; \vec{k}, \vec{i})$.

18 Soient A, B, C les trois points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1° Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par le point C et parallèle à la droite (AB).

2° Déterminer les intersections respectives de la droite D avec les plans $P_1(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $P_2(O ; \vec{j}, \vec{k})$, $P_3(O ; \vec{k}, \vec{i})$.

19 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de E de composantes respectives dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1° Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le milieu I de (A, B) et dont la direction contient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2° Soit D la droite de $\mathcal{E}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 - 4\lambda \\ z = 3 - 6\lambda. \end{cases}$

Déterminer l'intersection de P et de D.

20 Soit P le plan de $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$: $2x - y + z - 5 = 0$.
Soit D la droite de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} x - y + 3z - 6 = 0 \\ 4x - 3y - 6z - 4 = 0. \end{cases}$
Déterminer l'intersection de P et de D.

21 Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1° Déterminer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du plan P déterminé par les points A, B, C.

2° Soit m un nombre réel. Soient D et F les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'intersection du plan P et de la droite passant par les points D et F.

22 Soit λ un nombre réel. Soient A, B, C, F, M_λ les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\\lambda\end{pmatrix}$.

Déterminer l'intersection du plan P déterminé par les points A, B, C et de la droite D passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{OM_\lambda}$.

23 Soient A et B les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur de E de composantes $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2° Déterminer l'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du plan passant par le point B et contenant la droite D.

24 Soient D la droite de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

et D' la droite de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - z - 2 = 0. \end{cases}$

Déterminer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du plan P contenant la droite D et parallèle à la droite D'.

25 Soient D et D' les droites de $\mathcal{E}$ de représentations paramétriques respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = t. \end{cases}$

Soit $\vec{u}$ le vecteur de E de composantes $\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant la droite D et dont la direction contient le vecteur $\vec{u}$.

2° Déterminer l'intersection du plan P et de la droite D'.

Barycentre.

26 On considère, dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D'.

1° Démontrer que, si les tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont le même isobarycentre, on a : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$. On a $AA' + BB' + CC' + DD' = 4GG'$

2° Étudier le problème réciproque. MH est vrai

27 Soit, dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, un tétraèdre ABCD. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des bipoints (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, D), (D, B). Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D.

1° Démontrer que les droites (IM), (JN), (KL) sont concourantes en G.

2° Soit A' l'isobarycentre du triangle (B, C, D). Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$. Que peut-on en conclure ?

28 Soient dans un plan affine $\mathcal{E}$ trois points A, B, C non alignés. Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

1° En utilisant la notion de barycentre, donner une expression plus simple du vecteur : $\vec{u} = 7\,\overrightarrow{MA} + 5\,\overrightarrow{MB} + 4\,\overrightarrow{MC}$.

2° Que peut-on dire du vecteur $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$? $= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AD}$

3° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient linéairement dépendants.

D bien défini
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

29 Soit, dans un plan affine $\mathcal{E}$, un parallélogramme (A, B, C, D). Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

1° Que peut-on dire du vecteur $3\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\,\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MD}$?

2° Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{E}$ tels que les vecteurs $3\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\,\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ soient linéairement dépendants.

30 Soient, dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, quatre points A, B, C, D. Soit G le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 1 et 4. Soit G' le barycentre des points C et D affectés respectivement des coefficients 2 et 3. Soient O le milieu de (G, G') et M un point quelconque de l'espace.

1° Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MA} + 4\,\overrightarrow{MB} - 2\,\overrightarrow{MC} - 3\,\overrightarrow{MD}$?

2° Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Déterminer l'ensemble des points P de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait : $\overrightarrow{PA} + 4\,\overrightarrow{PB} + 2\,\overrightarrow{PC} + 3\,\overrightarrow{PD} = \vec{u}$.

31 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$. Soient A, B, C, D quatre points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1° Déterminer le barycentre des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs 1, 3, $\frac{1}{2}$, 1.

2° Soient I le milieu de (A, D) et J le point de $\mathcal{E}$ tel que l'on ait : $\overrightarrow{JC} = -6\,\overrightarrow{JB}$. Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OI}$.

32 Soit $\mathcal{E}$ un plan affine rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soient λ un nombre réel et M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

On appelle M' le barycentre, s'il existe, des points O, A, M affectés des coefficients $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \lambda$, λ.

1° Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de λ, de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OM}$.

2° Existe-t-il un point M de $\mathcal{E}$ tel que les points M et M' soient confondus ?

33 On désigne par K l'ensemble des triplets (a, b, c) de nombres réels qui satisfont à la condition : $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ et $ab + bc + ca = 0$.
Soit (a, b, c) un élément de K ; on considère dans un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension 3, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, B, C de coordonnées respectives : $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$.

1° Démontrer que, pour tout triplet (a, b, c) élément de K, on a : $a + b + c \neq 0$. On pourra calculer $(a + b + c)^2$.
2° En déduire que les points A, B, C affectés des coefficients respectifs $b + c$, $c + a$, $a + b$, admettent un barycentre $G_{a,b,c}$ dont on donnera les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3° Calculer la somme des trois coordonnées de $G_{a,b,c}$.
Montrer que l'ensemble Γ défini par : $\Gamma = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists (a, b, c) \in K, \ M = G_{a,b,c}\}$ est un plan privé de trois droites que l'on déterminera.

● **34** Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ deux à deux distincts et non alignés et α et β deux nombres réels tels que l'on ait : $\alpha + \beta \neq 0$.
Soit C′ (resp. B′) le barycentre des points A et B (resp. C et A) affectés des coefficients α et β.

1° Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AB'}$ en fonction de α, β, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Soit G le centre d'inertie du triangle (A, B′, C′) ; exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction de α, β, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2° On considère les points B_1 et C_1 de $\mathcal{E}$ définis par :
$\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que l'ensemble des points G, lorsque α et β varient de façon que l'on ait : $\alpha + \beta = 1$, est la droite (B_1C_1).

35 Soient, dans un plan affine $\mathcal{E}$, quatre points O, A, B, C tels que les points O, A, B ne soient pas alignés et tels que l'on ait : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - 2\,\overrightarrow{OB}$. Soient α et λ deux nombres réels.
On définit les points G_1, G_2, G par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha\,\overrightarrow{G_1A} + (1 - \alpha)\,\overrightarrow{G_1B} = \vec{0} \\ \alpha\,\overrightarrow{G_2O} + (1 - \alpha)\,\overrightarrow{G_2C} = \vec{0} \\ \lambda\,\overrightarrow{GG_1} + (1 - \lambda)\,\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}. \end{cases}$$

1° Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OG_1}$ et $\overrightarrow{OG_2}$ en fonction de α, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Les points G_1 et G_2 peuvent-ils être confondus ?
2° Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et des nombres réels α et λ.
3° Quelles sont les coordonnées du point G dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$?
On suppose que λ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ et que α est égal à un réel donné α_1 ; quel est l'ensemble des points G ?
On suppose ensuite que α décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ et que λ est égal à un réel donné λ_1 ; quel est l'ensemble des points G ?

36 Soient, dans un plan affine $\mathcal{E}$, trois points A, B, C non alignés. Soient a, b, c trois nombres réels tels que : $a + b + c = 0$, $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$, $c + a \neq 0$.
Soit A′ le barycentre des points B et C affectés des coefficients b et c ; soit B′ le barycentre des points C et A affectés des coefficients c et a ; soit C′ le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b.
Démontrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont parallèles.

37 Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. On considère, dans $\mathcal{E}$, un point O, trois points P, Q, R distincts et trois points A, B, C, distincts et non alignés.
A tout point M du plan $\mathcal{E}$, on associe le couple de nombres réels (x, y) défini par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

1° Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M, associe le point M′ défini par : $\overrightarrow{MM'} = (1 - x - y)\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{OQ} + y\overrightarrow{OR}$
Soient A′, B′, C′ les images respectives de A, B, C par f.
Établir les relations : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OC}$.

2° De quels coefficients faut-il affecter les points A, B, C pour que leur barycentre soit le point M ? Démontrer qu'alors M′ est le barycentre des points A′, B′, C′ affectés des mêmes coefficients.

3° Quelle condition les milieux des bipoints (A, P), (B, Q) et (C, R) doivent-ils vérifier pour que l'application f soit bijective ?

5. Applications linéaires

= Homomorphisme
= morphisme

Les applications linéaires d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel ont été introduites en classe de Première; nous en avons rappelé la définition au chapitre 1. Nous allons faire une étude plus approfondie de ces applications.

1. Image et noyau.

1.1 DÉFINITIONS : **Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F.**
On appelle image de f, et on note $\operatorname{Im} f$, l'image $f(E)$ de E par f.
On appelle noyau de f, et on note $\operatorname{Ker} f$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que : $f(x) = 0_F$.

La notation $\operatorname{Ker} f$ vient du mot allemand " Kern " qui signifie noyau.

1.2 THÉORÈME : **Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F.**
L'ensemble $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F et l'ensemble $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. On a : $\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.
Le vecteur 0_F est l'image par f du vecteur 0_E et par suite $\operatorname{Im} f$ n'est pas vide.
Soient y et y' deux éléments quelconques de $\operatorname{Im} f$. Il existe donc deux éléments x et x' de E tels que : $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
On a alors : $y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x')$.
Il en résulte que $y + y'$ est un élément de $\operatorname{Im} f$.
Soient y un élément quelconque de $\operatorname{Im} f$ et λ un réel quelconque. Il existe donc un élément x de E tel que : $y = f(x)$.
On a alors : $\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$. Il en résulte que λy est un élément de $\operatorname{Im} f$.
L'ensemble $\operatorname{Im} f$ est non vide; il est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire; c'est donc un sous-espace vectoriel de F.

Ker f est un sous-espace vectoriel de E. On a : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
De l'égalité : $f(0_E) = 0_F$, il résulte que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas vide.
Soient x et x' deux éléments quelconques de $\operatorname{Ker} f$.
On a : $f(x + x') = f(x) + f(x') = 0_F + 0_F = 0_F$.
Le vecteur $x + x'$ appartient donc à $\operatorname{Ker} f$.
Soient x un élément quelconque de $\operatorname{Ker} f$ et λ un réel quelconque.
On a : $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0_F = 0_F$. Le vecteur λx appartient donc à $\operatorname{Ker} f$.
L'ensemble $\operatorname{Ker} f$ est non vide ; il est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire ; c'est donc un sous-espace vectoriel de E. ■

Exemples.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels réels et $\widetilde{0}$ l'application de E dans F définie par : $\widetilde{0} : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 0_F. \end{array}$

Cette application, notée aussi **0**, est appelée l'**application nulle de E dans F** ; le lecteur vérifiera qu'elle est linéaire.
De la proposition : $(\forall x \in E, \widetilde{0}(x) = 0_F)$, il résulte : $\operatorname{Im} \widetilde{0} = \{0_F\}$ et $\operatorname{Ker} \widetilde{0} = E$.

2. Soient E un espace vectoriel réel et Id_E l'application identique de E. De la proposition : $(\forall x \in E, \mathrm{Id}_E(x) = x)$, il résulte : $\operatorname{Im} \mathrm{Id}_E = E$ et $\operatorname{Ker} \mathrm{Id}_E = \{0_E\}$.

3. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit f l'application de E dans E qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur $\vec{u'}$ de composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z. \end{cases}$$

Par définition, f est une application linéaire de E dans E.
Cherchons $\operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ sont solution du système : $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$

Ce système est équivalent à : $x = y = z$.
$\operatorname{Ker} f$ est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $x(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ où x est un réel quelconque. $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Cherchons $\operatorname{Im} f$.

Soit $\vec{u'}$ un vecteur quelconque de E de composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. On a :

$$(\vec{u'} \in \operatorname{Im} f) \Longleftrightarrow \left(\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}\right) \Longrightarrow (x' + y' + z' = 0).$$

Le lecteur démontrera que l'ensemble des vecteurs $\vec{u'}$ de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ vérifient la relation : $x' + y' + z' = 0$ est le plan vectoriel $\vec{P}$ de E, engendré par les vecteurs $\vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{j} - \vec{k}$. Des implications précédentes, il résulte que l'ensemble Im f est inclus dans $\vec{P}$.

Réciproquement, soit $\vec{u'}$ un vecteur quelconque de $\vec{P}$.

Ses composantes dans $\mathcal{B}$ sont donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -x'-y' \end{pmatrix}$. Démontrons qu'il existe trois réels x, y et z tels que : $\begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ -x' - y' = x + y - 2z. \end{cases}$

On a : $$\left(\begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ -x' - y' = x + y - 2z \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = \dfrac{-2x' - y' + 3z}{3} \\ y = \dfrac{-x' - 2y' + 3z}{3} \\ -x' - y' = x + y - 2z \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = \dfrac{-2x' - y' + 3z}{3} \\ y = \dfrac{-x' - 2y' + 3z}{3} \end{cases}\right).$$

Si z est un réel quelconque, le vecteur $\vec{u'}$ est donc l'image par f du vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} \dfrac{-2x' - y' + 3z}{3} \\ \dfrac{-x' - 2y' + 3z}{3} \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. On a donc : $\vec{P} \subset \text{Im } f$.

Des propositions : $\text{Im } f \subset \vec{P}$ et $\vec{P} \subset \text{Im } f$, il résulte : $\text{Im } f = \vec{P}$.

Nous rappelons le résultat suivant, établi en classe de Première :

1.3 **THÉORÈME : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F.**
L'application f est surjective si et seulement si : $\text{Im } f = F$.
L'application f est injective si et seulement si : $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

D'autre part, lorsque E est de dimension finie, on a :

1.4 **THÉORÈME : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E de dimension finie dans un espace vectoriel réel F.**
On a alors : $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.

Démonstration :
Ker f est un sous-espace vectoriel de E, on a donc : $0 \leqslant \dim \text{Ker } f \leqslant \dim E$.
Soit n la dimension de E.

Premier cas : dim Ker f = dim E.

On a : $(\dim \operatorname{Ker} f = \dim E) \iff (\operatorname{Ker} f = E) \iff (\forall x \in E, f(x) = 0_F)$

$\iff (\operatorname{Im} f = \{0_F\}) \iff (\dim \operatorname{Im} f = 0)$.

On a donc : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

Deuxième cas : dim Ker $f = 0$.

Cette hypothèse équivaut à : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. ie f injective →

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

Démontrons que la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base de Im f.

Soient y un vecteur quelconque de Im f et x un vecteur de E tel que : $y = f(x)$.

Soient $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ les composantes dans $\mathcal{B}$ du vecteur x.

On a : $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

La famille $\mathcal{B}'$ est donc une famille génératrice de Im f.

D'autre part, soit $\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(e_i)$ une combinaison linéaire, égale au vecteur nul de F des vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$. On a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(e_i) = 0_F\right) \iff \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right) = 0_F\right) \iff \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \in \operatorname{Ker} f\right)$$

$$\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = 0_E\right) \iff (\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0).$$

La dernière équivalence résulte du fait que $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.

La famille $\mathcal{B}'$ est donc une famille libre de Im f. On a donc : $\dim \operatorname{Im} f = n$ et, par suite : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

Troisième cas : $0 < \dim \operatorname{Ker} f < \dim E$.

Soient p la dimension de Ker f et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de Ker f.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut trouver $n - p$ vecteurs de E : $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que la famille $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

Montrons que la famille $\mathcal{B}'' = (f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de Im f, c'est-à-dire que $\mathcal{B}''$ est une famille génératrice et libre.

Soient y un vecteur quelconque de Im f et x un vecteur de E tel que : $y = f(x)$.

Soient $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ les composantes de x dans $\mathcal{B}'$. On a :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i).$$ car $\forall i = 1, \ldots, p$, $f(e_i) = 0_E$ car $e_i \in \operatorname{Ker} f$

La famille $\mathcal{B}''$ est donc une famille génératrice de Im f.

D'autre part, soit $\sum_{i=p+1}^{n} \mu_i f(e_i)$ une combinaison linéaire, égale au vecteur nul de F, des vecteurs de la famille $\mathcal{B}''$.

On a : $\left(\sum_{i=p+1}^{n} \mu_i f(e_i) = 0_F\right) \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=p+1}^{n} \mu_i e_i \in \operatorname{Ker} f\right)$

$$\Longleftrightarrow \left(\exists (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\exists (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mu_1 e_1 \ldots + \mu_p e_p - \mu_{p+1} e_{p+1} - \ldots - \mu_n e_n = 0_E\right).$$

La famille $\mathcal{B}'$ est une base de E, donc les réels $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont tous nuls. La famille $\mathcal{B}''$ est donc une famille libre de $\operatorname{Im} f$.

On a donc : $\dim \operatorname{Im} f = n - p$, et : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$. ∎

1.5 **COROLLAIRE : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F.**
Si E et F sont de même dimension finie, les propositions suivantes sont équivalentes :

- **f est injective.**
- **f est surjective.**
- **f est bijective.**

Démonstration :

On a : $(\operatorname{Ker} f = \{0_E\}) \Longleftrightarrow (\dim \operatorname{Ker} f = 0) \Longleftrightarrow (\dim \operatorname{Im} f = \dim E)$

$$\Longleftrightarrow (\dim \operatorname{Im} f = \dim F) \Longleftrightarrow (\operatorname{Im} f = F).$$

Dire que f est injective équivaut donc à dire que f est surjective, donc que f est bijective. ∎

Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

1.6 **THÉORÈME : Soient E et F deux espaces vectoriels réels et f une application linéaire de E dans F.**
L'image par f de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

La démonstration de ce théorème est analogue à la première partie de la démonstration du théorème 1.2.

1.7 **COROLLAIRE : Soient E et F deux espaces vectoriels réels et f une application linéaire de E dans F.**
Soit E′ un sous-espace vectoriel de dimension p de E.
Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension inférieure ou égale à p. Si f est injective, la dimension de $f(E')$ est égale à p.

Démonstration :

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E′ ; démontrons que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $f(E')$.

Soient y un vecteur quelconque de $f(E')$ et x un vecteur de E' tel que : $y = f(x)$.

Soient $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ les composantes dans $\mathcal{B}$ du vecteur x.

On a : $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i)$.

La dimension de $f(E')$ est donc inférieure ou égale à celle de E'.

• Supposons que f soit injective.

Considérons une combinaison linéaire, égale au vecteur nul de F, des vecteurs de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Nous avons : $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) = 0_F\right) \iff \left(f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = 0_F\right)$

$$\iff \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E\right) \iff (\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0).$$

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est donc libre ; c'est une base de $f(E')$. La dimension de $f(E')$ est donc p. ■

Sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par un endomorphisme.

1.8 THÉORÈME : **Soient E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E. L'ensemble des vecteurs invariants par f est un sous-espace vectoriel de E.**

Démonstration :

Appelons E' l'ensemble des vecteurs invariants par f.

Nous avons : $E' = \{x \in E \mid f(x) = x\}$

De l'égalité : $f(0_E) = 0_E$, il résulte que E' n'est pas vide.

Soient λ un réel quelconque et x et y deux vecteurs quelconques de E'. On a :

$f(x + y) = f(x) + f(y) = x + y$,

$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda x$.

L'ensemble E' est donc un sous-espace vectoriel de E. ■

2. Groupe linéaire.

Dans le chapitre 1 nous avons rappelé des résultats concernant l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel réel E dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel réel E ; en particulier :

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire en général non commutatif.

Nous allons étudier certains sous-ensembles de $\mathcal{L}(E)$.

2.1 THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel réel et GL(E) l'ensemble des applications linéaires bijectives de E sur E. (GL(E), ∘) est un groupe non commutatif en général, appelé groupe linéaire de E ou groupe des automorphismes de E.

Démonstration :
GL(E) est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$. Puisque $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire il suffit de démontrer que la loi ∘ est interne dans GL(E), que l'élément unité Id_E appartient à GL(E) et que tout élément de GL(E) a un symétrique pour ∘ dans GL(E). Ces trois propriétés sont vérifiées : en effet, nous savons que la composée de deux bijections de E sur E est une bijection de E sur E, que l'identité de E est une bijection de E sur E et que la bijection réciproque d'une application linéaire bijective de E sur E est linéaire. ■

Remarque : Du corollaire 1.5, nous déduisons : Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans E appartient à GL(E) si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul de E. ie si $\dim_{\mathbb{R}} E < +\infty$, $\mathcal{L}(E) = GL(E)$ ssi tout endomorphisme est injectif

**2.2 THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel et $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E.
$\mathcal{H}$ est un sous-groupe commutatif de (GL(E), ∘); ce groupe est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.**

Soit α un réel non nul ; nous rappelons que l'homothétie vectorielle de E, de rapport α, notée h_α, est l'application linéaire de E dans E définie par :

$$h_\alpha : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \alpha x \end{array}$$

Démonstration :
- $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble de GL(E).

Par définition, $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$; il suffit donc de démontrer que tout élément de $\mathcal{H}$ est une bijection.
Soient x et y deux vecteurs quelconques de E et α un réel quelconque non nul.
On a :

$$(y = h_\alpha(x)) \iff (y = \alpha x) \iff \left(x = \frac{1}{\alpha} y\right) \iff (x = h_{\frac{1}{\alpha}}(y)).$$

L'application h_α est donc bijective et sa bijection réciproque est $h_{\frac{1}{\alpha}}$.

- La loi ∘ dans $\mathcal{H}$ est interne et commutative.

Soient α et β deux réels non nuls et x un vecteur quelconque de E. On a :

$$(h_\alpha \circ h_\beta)(x) = h_\alpha[h_\beta(x)] = h_\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x) = \alpha\beta(x) = \beta(\alpha x) = (h_\beta \circ h_\alpha)(x)$$
$$= h_{\alpha\beta}(x).$$

On a donc : $h_\alpha \circ h_\beta = h_\beta \circ h_\alpha = h_{\alpha\beta}$.

- L'élément neutre de GL(E) est un élément de $\mathcal{H}$ et tout élément h_α de $\mathcal{H}$ a un symétrique pour ∘ dans $\mathcal{H}$; c'est l'élément $h_{\frac{1}{\alpha}}$.

On a : $\mathrm{Id}_E = h_1$ et $h_\alpha \circ h_{\frac{1}{\alpha}} = h_1$.

• Le groupe $(\mathcal{H}, \circ)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.
Il suffit de considérer l'application φ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par :

$$\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$h_\alpha \longmapsto \alpha \quad \blacksquare$$

2.3 **DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel réel.**
On appelle automorphisme involutif de E toute application linéaire f de E dans E vérifiant l'une des deux propositions équivalentes suivantes :
(1) $f \circ f = \mathrm{Id}_E$;
(2) f est bijective et l'on a : $f^{-1} = f$.

Remarques : 1. D'une manière plus générale, si E est un ensemble quelconque, on appelle application involutive de E dans E toute application f de E dans E telle que : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
2. Le composé de deux automorphismes involutifs d'un même espace vectoriel réel E est un automorphisme de E, qui, en général, n'est pas involutif.
3. Supposons que E soit de dimension 2 et considérons une base $\mathcal{B}$ de E. Dans le chapitre 1, nous avons défini la multiplication dans l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des matrices carrées réelles d'ordre 2 de façon que la bijection qui, à tout élément f de $\mathcal{L}(E)$ associe sa matrice M_f dans la base $\mathcal{B}$, soit un isomorphisme de $(\mathcal{L}(E), \circ)$ sur $(\mathcal{M}_2, \times)$. Il en résulte la proposition suivante :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad (f \circ f = \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow \left(M_f \times M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Exemple.

Soit E un espace vectoriel réel. Cherchons les homothéties vectorielles de E qui sont involutives. Soit α un réel quelconque non nul. On a :
$(h_\alpha \circ h_\alpha = \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow (h_{\alpha^2} = h_1) \Longleftrightarrow (\alpha^2 = 1) \Longleftrightarrow (\alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1)$.
Les homothéties vectorielles involutives de E sont h_1 et h_{-1} c'est-à-dire Id_E et $-\mathrm{Id}_E$.

3. Projections vectorielles.

$f \circ f = f \Leftrightarrow f$ est idempotent

3.1 **DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle projecteur de E tout endomorphisme f de E tel que : $f \circ f = f$.**

Pour des raisons analogues à la 3e remarque du § 2.3, nous avons la proposition suivante : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad (f \circ f = f) \Longleftrightarrow (M_f \times M_f = M_f)$.

Exemples.

1. L'application identique et l'application nulle de E sont des projecteurs de E.
2. Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et f l'endomorphisme de $\vec{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $M_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Nous avons : $M_f \times M_f = M_f$; l'application f est donc un projecteur de E.
Déterminons Ker f et Im f.

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On a : $$(\vec{u} \in \operatorname{Ker} f) \iff (f(\vec{u}) = \vec{0}) \iff \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$\iff (x + y = 0) \iff (\vec{u} = x\vec{i} - x\vec{j}).$$

Ker f est donc la droite vectorielle de $\vec{P}$ engendrée par le vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.
Du théorème 1.4, il résulte que Im f est une droite vectorielle de $\vec{P}$.
On a : $f(\vec{i}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j})$. Le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ est non nul et il appartient à Im f.

L'ensemble Im f est donc la droite vectorielle de $\vec{P}$ engendrée par $\vec{i} + \vec{j}$.
Les droites vectorielles distinctes Ker f et Im f sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\vec{P}$.

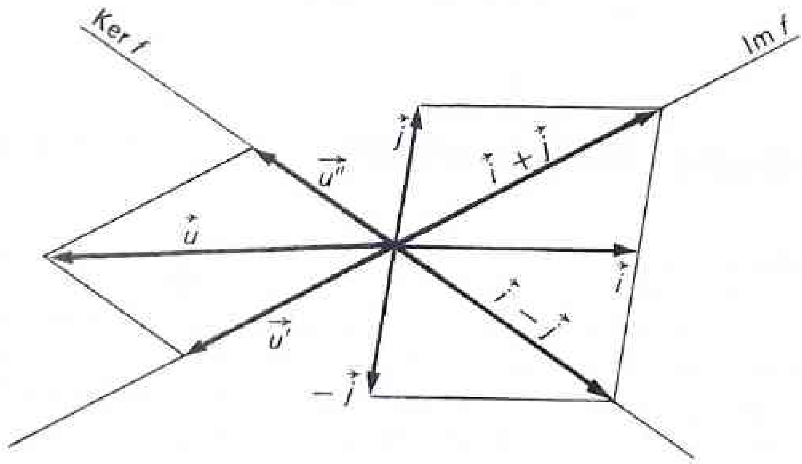
D'autre part, soit $\vec{u}$ un vecteur de $\vec{P}$, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Décomposons $\vec{u}$ en la somme d'un vecteur $\vec{u'}$ de Im f et d'un vecteur $\vec{u''}$ de Ker f.
On a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{x+y}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{x-y}{2}(\vec{i} - \vec{j})$,

et, par suite : $\vec{u'} = \frac{x+y}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{u''} = \frac{x-y}{2}(\vec{i} - \vec{j})$.

D'autre part on a : $f(\vec{u}) = \left(\frac{x+y}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{x+y}{2}\right)\vec{j} = \vec{u'}$.

On a donc le résultat suivant :
Si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque de $\vec{P}$ de décomposition $\vec{u'} + \vec{u''}$ sur les sous-espaces vectoriels supplémentaires Im f et Ker f, son image par f est le vecteur $\vec{u'}$.



Plus généralement on a le théorème suivant :

3.2 THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Si f est un projecteur de E, on a alors : $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.

Démonstration :

- $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Soit x un vecteur quelconque de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. On a :
$(x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) \iff (x \in \operatorname{Im} f \text{ et } x \in \operatorname{Ker} f)$
$\iff ((\exists y \in E,\ x = f(y)) \text{ et } f(x) = 0_E)$.
On a alors : $f(x) = f(f(y)) = f^2(y) = f(y) = x$, et, par suite : $x = 0_E$.

- $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

Soit x un vecteur quelconque de E. On a : $x = f(x) + (x - f(x))$.
Le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$.
D'autre part, des égalités : $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0_E$, il résulte que $x - f(x)$ est un vecteur de $\operatorname{Ker} f$. ■

A tout projecteur f de E est donc associé un couple de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $(\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f)$.
Étudions le problème réciproque. Nous avons le résultat suivant :

3.3 **THÉORÈME : Soient** E **un espace vectoriel réel de dimension finie et** E′ **et** E″ **deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de** E.
Il existe un unique projecteur f **de** E **tel que :** $\operatorname{Im} f = E'$ et $\operatorname{Ker} f = E''$.

Démonstration :

Dans cette démonstration, si x (resp. y) est un vecteur de E, nous noterons toujours $x' + x''$ (resp. $y' + y''$) la décomposition de x (resp. y) sur $E' \oplus E''$.

Existence. Soit f l'application de E dans E qui, à tout vecteur x de E, associe le vecteur x' de sa décomposition.

- Démontrons d'abord que f est un endomorphisme.

Soient λ un réel quelconque et x et y deux vecteurs quelconques de E.
On a : $f(x + y) = f(x' + x'' + y' + y'') = f(x' + y' + x'' + y'')$.
Le vecteur $x' + y'$ appartient à E′ et le vecteur $x'' + y''$ à E″ ; d'après l'unicité de la décomposition, $(x' + y') + (x'' + y'')$ est donc la décomposition du vecteur $x + y$ sur $E' \oplus E''$. On a donc : $f(x + y) = x' + y' = f(x) + f(y)$.
De même, on a : $f(\lambda x) = f(\lambda x' + \lambda x'') = \lambda x' = \lambda f(x)$.
L'application f est donc un endomorphisme.
Par définition de f, on a : $\operatorname{Im} f = E'$ et $\operatorname{Ker} f = E''$.

- Démontrons ensuite que l'on a : $f \circ f = f$.

Soit x un vecteur quelconque de E ; on a : $(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f(x')$.
La décomposition de x' sur $E' \oplus E''$ est $x' + 0_E$; on a donc : $f(x') = x'$; il en résulte : $(f \circ f)(x) = x' = f(x)$.

Unicité. Soient f et f' deux projecteurs de E tels que :
$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f' = E'$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f' = E''$.
Soit x un vecteur quelconque de E.
On a alors : $f(x) = f(x' + x'') = f(x') + f(x'') = f(x')$. 0_E $f(x) = f(x')$
Le vecteur x' est un élément de $\operatorname{Im} f$; il est donc l'image par f d'un vecteur y de E.
On a : $f(x) = f(x') = f[f(y)] = f(y) = x'$.

$f(x) = x'$

Par un raisonnement analogue, on démontre l'égalité : $f'(x) = x'$.
On a donc : $\forall x \in E, \quad f(x) = f'(x)$.
Les projecteurs f et f' sont donc égaux. ■

Des théorèmes 3.2 et 3.3, il résulte que la donnée d'un projecteur de E équivaut à la donnée d'un couple de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
D'où la définition :

3.4 **DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.**
On appelle projection vectorielle sur E′ de direction E″ le projecteur de E associé au couple (E′, E″).

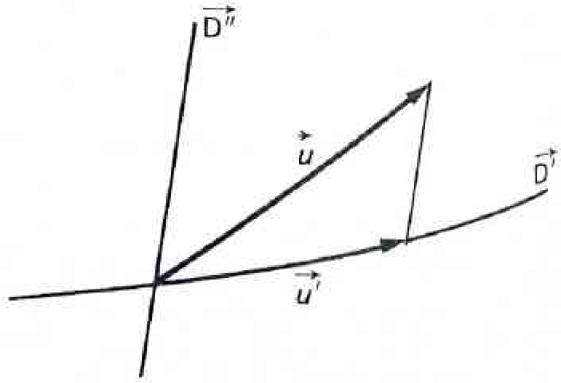
La projection vectorielle sur E′ de direction E″ est donc l'application qui, à tout vecteur x de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$, associe le vecteur x'.
Remarque : Soit f le projecteur de E associé au couple (E′, E″).
Cherchons le projecteur f' de E associé au couple (E″, E′).
D'après le théorème 3.3, le projecteur f' est l'application qui, à tout vecteur x de décomposition $x'' + x'$ sur $E'' \oplus E'$, associe le vecteur x''.
Des égalités : $x = x'' + x' = x' + x''$, il résulte que x' est l'image de x par f.
On a donc : $f'(x) = x'' = x - x' = x - f(x) = (\mathrm{Id}_E - f)(x)$.
Le projecteur cherché est donc $\mathrm{Id}_E - f$.
Le lecteur pourra démontrer directement, en utilisant les propriétés de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, que $\mathrm{Id}_E - f$ est un projecteur de E.

(*) La direction d'un projecteur est son noyau.

Cas d'un espace vectoriel réel de dimension 1, 2 ou 3.

3.5 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 1, 2 ou 3. Déterminons tous les projecteurs de E.
dim E = 1. Les seuls sous-espaces vectoriels supplémentaires de E sont E et $\{\vec{0}\}$.
Il y a donc deux projecteurs de E :
- la projection vectorielle sur E de direction $\{\vec{0}\}$, c'est-à-dire l'identité de E ;
- la projection vectorielle sur $\{\vec{0}\}$ de direction E, c'est-à-dire l'application nulle de E.

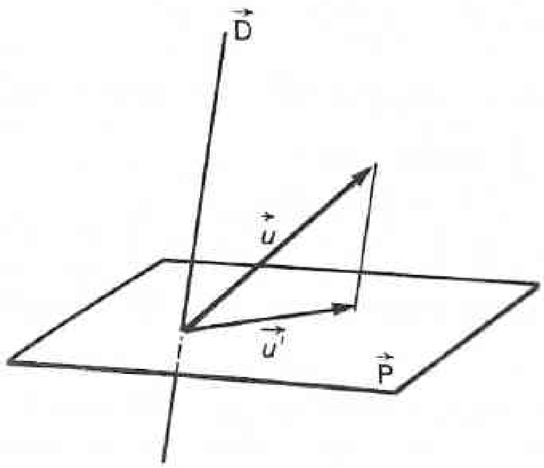
dim E = 2. Si E′ et E″ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, distincts de E et de $\{\vec{0}\}$, alors E′ et E″ sont deux droites vectorielles distinctes.
Il y a donc trois sortes de projecteurs de E :
- l'identité de E ;
- la projection vectorielle sur une droite vectorielle $\vec{D'}$, de direction une droite vectorielle $\vec{D''}$ distincte de $\vec{D'}$;
- l'application nulle de E.

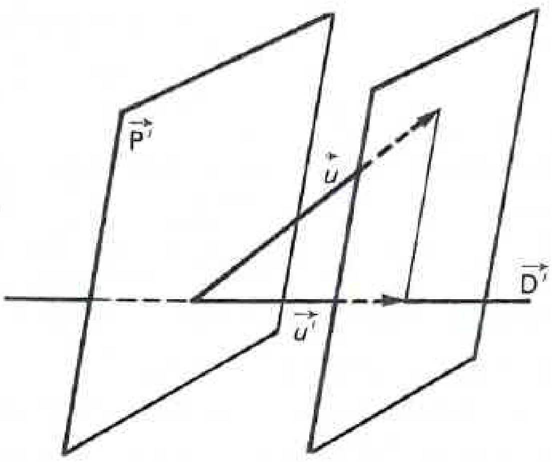


$\dim E = 3$. Si E' et E'' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, distincts de E et $\{\vec{0}\}$, alors E' et E'' sont un plan vectoriel et une droite vectorielle non incluse dans le plan.

Il y a donc quatre sortes de projecteurs de E :

- l'identité de E ;
- la projection vectorielle sur un plan vectoriel $\vec{P}$ de direction une droite vectorielle $\vec{D}$ non incluse dans $\vec{P}$;
- la projection vectorielle sur une droite vectorielle $\overrightarrow{D'}$ de direction un plan vectoriel $\overrightarrow{P'}$ ne contenant pas $\overrightarrow{D'}$;
- l'application nulle de E.





4. Symétries vectorielles.

Dans ce paragraphe nous allons étudier les automorphismes involutifs d'un espace vectoriel réel E de dimension finie.
De même que pour les projecteurs, nous allons associer à tout automorphisme involutif de E un unique couple de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Nous allons pour cela démontrer les deux propriétés suivantes.

Propriétés.

4.1 Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, f un automorphisme involutif de E, et p l'application définie par : $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f)$.

P1 L'application p est un projecteur de E.

Démonstration :

On a : $$p \circ p = \left[\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f)\right] \circ \left[\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f)\right] = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + 2f + f \circ f)$$
$$= \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + 2f + \mathrm{Id}_E) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f) = p. \quad \blacksquare$$

P2 On a les égalités :
$$\text{Ker}\, p = \{x \in E \mid f(x) = -x\} \quad \text{et} \quad \text{Im}\, p = \{x \in E \mid f(x) = x\}$$

Démonstration :

• Cherchons Ker p. Soit x un vecteur quelconque de E ; on a :

$$(x \in \text{Ker}\, p) \Longleftrightarrow (p(x) = 0_E) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}(\text{Id}_E + f)(x) = 0_E\right)$$
$$\Longleftrightarrow (x + f(x) = 0_E) \Longleftrightarrow (f(x) = -x)$$

On a donc : $\text{Ker}\, p = \{x \in E \mid f(x) = -x\}$.

• De même, cherchons Im p. Soit y un vecteur quelconque de E ; on a :

$$(y \in \text{Im}\, p) \Longleftrightarrow (\exists x \in E,\ y = p(x)) \Longleftrightarrow \left(\exists x \in E,\ y = \frac{1}{2}(x + f(x))\right)$$
$$\Longrightarrow \left(\exists x \in E,\ f(y) = \frac{1}{2}[f(x) + (f \circ f)(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + x]\right) \Longrightarrow (f(y) = y).$$

Désignons par E′ l'ensemble des vecteurs de E invariants par f.
On a alors : $(y \in \text{Im}\, p) \Longrightarrow (y \in E')$ et, par suite : $\text{Im}\, p \subset E'$.
Réciproquement, soit y un vecteur quelconque de E′, on a : $f(y) = y$, et, par suite : $p(y) = \frac{1}{2}(f(y) + y) = \frac{1}{2}(y + y) = y$. Donc y est un vecteur de Im p et l'on a : $E' \subset \text{Im}\, p$.
Des propositions : $\text{Im}\, p \subset E'$ et $E' \subset \text{Im}\, p$, il résulte que l'on a : $\text{Im}\, p = E'$.
Les ensembles $\{x \in E \mid f(x) = x\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = -x\}$ sont donc respectivement l'image et le noyau d'un projecteur de E. ■

4.2 THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un automorphisme involutif de E.
Soient E′ l'ensemble des vecteurs x de E pour lesquels on a : $f(x) = x$, et E″ l'ensemble des vecteurs x de E pour lesquels on a : $f(x) = -x$.
Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
1. Les ensembles E′ et E″ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Si x est un vecteur quelconque de E de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$, on a alors : $f(x) = x' - x''$.

Démonstration :

• La première propriété résulte du théorème 3.2 et des propriétés 4.1.
• Soit x un vecteur quelconque de E, de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$.
On a : $f(x) = f(x' + x'') = f(x') + f(x'') = x' - x''$. ■

A tout automorphisme involutif de E est donc associé un couple de sous-espaces vectoriels supplémentaires. Réciproquement, on a le résultat suivant :

4.3 THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Il existe un unique automorphisme involutif f de E tel que E′ soit l'ensemble des vecteurs x de E pour lesquels on a : $f(x) = x$ et E″ l'ensemble des vecteurs x de E pour lesquels on a : $f(x) = -x$.

Démonstration :

Existence. Soit f l'application de E dans E qui, à tout vecteur x de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$, associe le vecteur $x' - x''$.

On a : $(f(x) = x) \Longleftrightarrow (x' - x'' = x' + x'') \Longleftrightarrow (x'' = 0_E) \Longleftrightarrow (x \in E')$.

On a donc : $E' = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.

De même, on a :

$(f(x) = -x) \Longleftrightarrow (x' - x'' = -(x' + x'')) \Longleftrightarrow (x' = 0_E) \Longleftrightarrow (x \in E'')$.

On a donc : $E'' = \{x \in E \mid f(x) = -x\}$.

Soient λ un réel quelconque et x et y deux vecteurs quelconques de E de décompositions respectives $x' + x''$ et $y' + y''$ sur $E' \oplus E''$.

On a : $f(x+y) = f(x' + x'' + y' + y'') = f(x' + y' + x'' + y'') = x' + y' - (x'' + y'')$
$= (x' - x'') + (y' - y'') = f(x) + f(y)$,

et : $f(\lambda x) = f(\lambda x' + \lambda x'') = \lambda x' - \lambda x'' = \lambda(x' - x'') = \lambda f(x)$.

L'application f est donc un endomorphisme de E.

On a enfin :

$\forall x \in E, \quad (f \circ f)(x) = f(x' - x'') = f(x') - f(x'') = x' - (-x'') = x' + x'' = x$.

On a donc : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ et, par suite, f est un automorphisme involutif de E.

Unicité. Soit f (resp. f') un automorphisme involutif de E tel que E' soit l'ensemble des vecteurs x de E pour lesquels on a : $f(x) = x$ (resp. $f'(x) = x$) et E'' l'ensemble des vecteurs x de E pour lesquels on a : $f(x) = -x$ (resp. $f'(x) = -x$).

Soit x un vecteur quelconque de E de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$.

On a : $f(x) = f(x' + x'') = f(x') + f(x'') = x' + (-x'') = x' - x''$,

et : $f'(x) = f'(x' + x'') = f'(x') + f'(x'') = x' + (-x'') = x' - x''$.

Les applications f et f' sont donc égales. ■

Des théorèmes 4.2 et 4.3 il résulte que la donnée de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E équivaut à la donnée d'un automorphisme involutif de E. D'où la définition :

4.4 DÉFINITION : **Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.**
On appelle symétrie vectorielle par rapport à E' de direction E'' l'automorphisme involutif de E qui, à tout vecteur x de E de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$, associe le vecteur $x' - x''$.

Exemple.

Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et f l'endomorphisme de $\vec{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, en calculant $M_f \times M_f$ que f est un automorphisme involutif de $\vec{P}$.

Cherchons l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\vec{P}$ tels que l'on ait : $f(\vec{u}) = \vec{u}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs invariants par f. Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les composantes d'un vecteur quelconque $\vec{u}$ de $\vec{P}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On a : $\left(f(\vec{u}) = \vec{u}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} 2x + y = x \\ -3x - 2y = y \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases}\right)$

$\Longleftrightarrow (x + y = 0) \Longleftrightarrow \left(\vec{u} = x\vec{i} - x\vec{j}\right) \Longleftrightarrow \left(\vec{u} = x(\vec{i} - \vec{j})\right).$

L'ensemble cherché est donc la droite vectorielle $\overrightarrow{D'}$ engendrée par le vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.

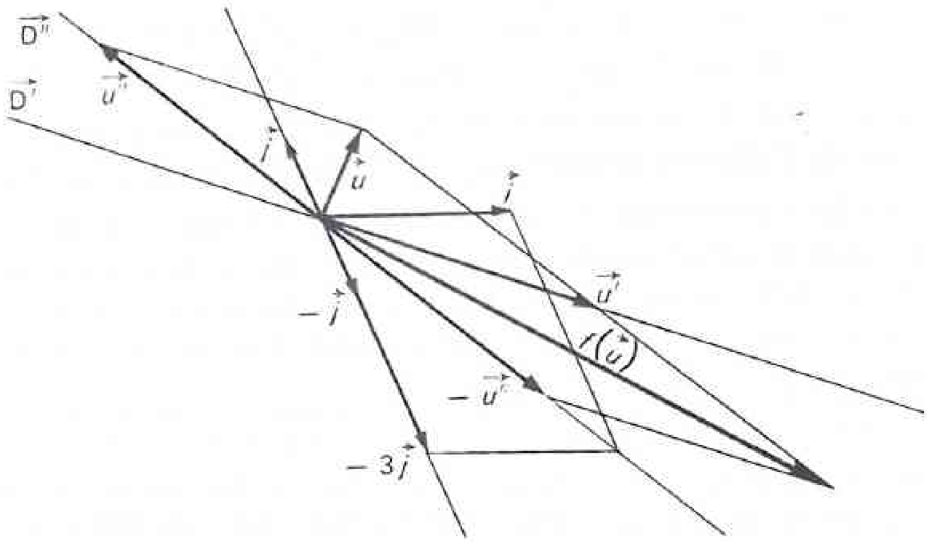
De même, cherchons l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\vec{P}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ tels que l'on ait : $f(\vec{u}) = -\vec{u}$. On a :

$\left(f(\vec{u}) = -\vec{u}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} 2x + y = -x \\ -3x - 2y = -y \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -3x - y = 0 \end{cases}\right)$

$\Longleftrightarrow (3x + y = 0) \Longleftrightarrow \left(\vec{u} = x\vec{i} - 3x\vec{j} = x(\vec{i} - 3\vec{j})\right).$

L'ensemble cherché est la droite vectorielle $\overrightarrow{D''}$ engendrée par le vecteur $\vec{i} - 3\vec{j}$.

L'endomorphisme f est donc la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{D'}$ de direction $\overrightarrow{D''}$.



Cas d'un espace vectoriel réel de dimension 1, 2 ou 3.

4.5 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 1, 2 ou 3. Cherchons toutes les symétries vectorielles de E.

<u>dim E = 1.</u>

Les seuls sous-espaces vectoriels supplémentaires de E sont E et $\{\vec{0}\}$.
Il y a donc deux symétries vectorielles :

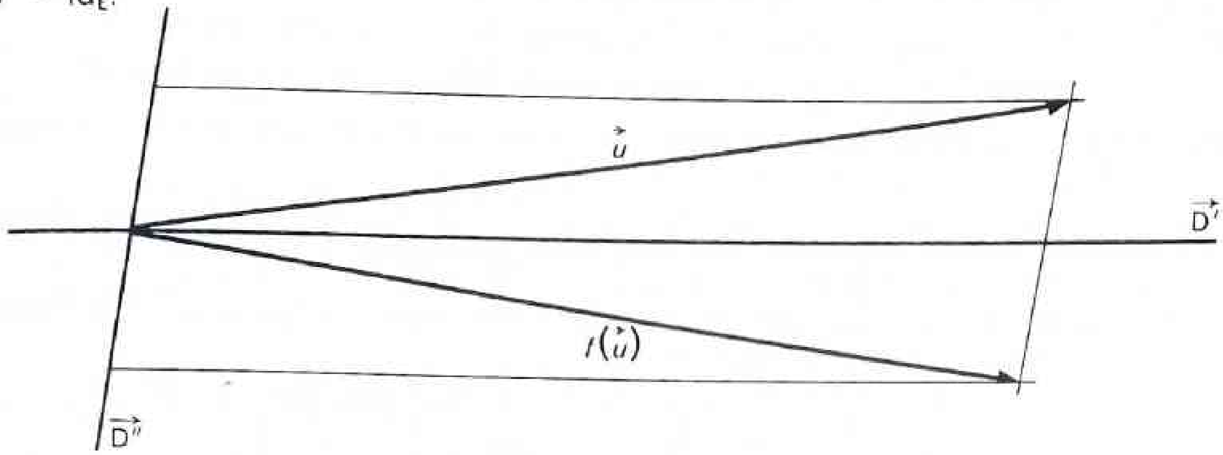
- la symétrie vectorielle par rapport à E de direction $\{\vec{0}\}$, c'est-à-dire : Id_E ;
- la symétrie vectorielle par rapport à $\{\vec{0}\}$ de direction E, c'est-à-dire : $-\mathrm{Id}_E$.

<u>dim E = 2.</u>

Si E′ et E″ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, différents de E et de $\{\vec{0}\}$, alors E′ et E″ sont deux droites vectorielles distinctes.

Il y a donc trois sortes de symétries vectorielles :

- Id_E ;
- la symétrie vectorielle par rapport à une droite vectorielle $\vec{D'}$, de direction une droite vectorielle $\vec{D''}$ distincte de $\vec{D'}$;
- $-\mathrm{Id}_E$.

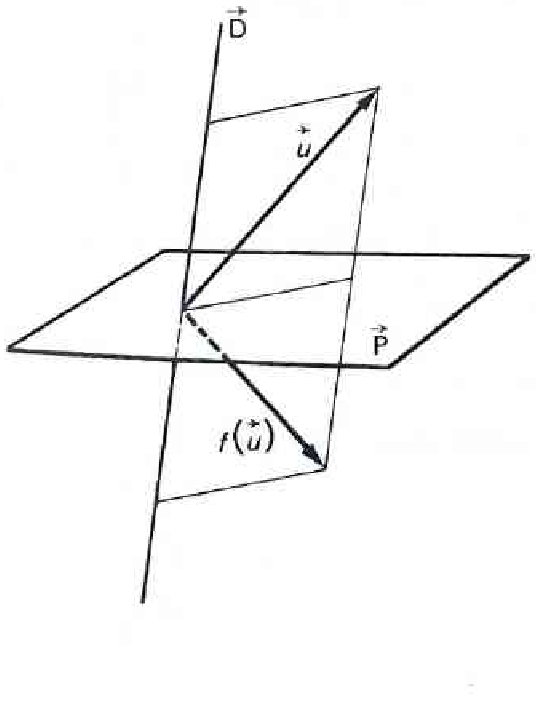


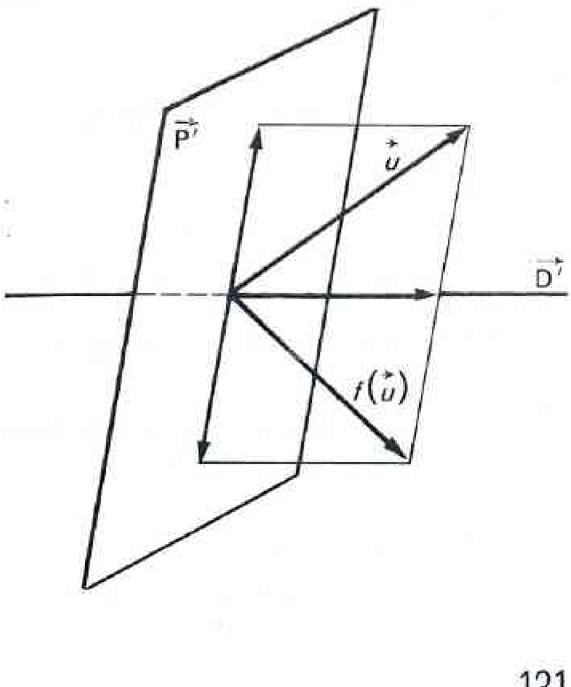
dim E = 3.

Si E′ et E″ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, différents de E et de $\{\vec{0}\}$, alors E′ et E″ sont un plan vectoriel et une droite vectorielle non incluse dans le plan.

Il y a donc quatre sortes de symétries vectorielles :

- Id_E ;
- la symétrie vectorielle par rapport à un plan vectoriel $\vec{P}$, de direction une droite vectorielle $\vec{D}$ non incluse dans $\vec{P}$;
- la symétrie vectorielle par rapport à une droite vectorielle $\vec{D'}$, de direction un plan vectoriel $\vec{P'}$ ne contenant pas $\vec{D'}$;
- $-\mathrm{Id}_E$.





Exemple.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{D}$ la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i'} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Soit $\vec{P}$ le plan vectoriel de E de vecteurs directeurs $\vec{j'} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{k'} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

Soit f la symétrie par rapport à $\vec{D}$ de direction $\vec{P}$.

Déterminons la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, puis dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\vec{P}$ et $\vec{D}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Pour trouver la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il suffit de connaître les composantes dans cette base des vecteurs $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$.

Exprimons successivement les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction des vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}$ et $\vec{k'}$ dont nous connaissons les images par f.

On a :
$$\left(\begin{cases} \vec{i'} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{j'} = \vec{i} + \vec{k} \\ \vec{k'} = \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{i'} - \vec{j'}) \\ \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{k'} - \vec{j}) \\ \vec{i} = \vec{j'} - \vec{k} \end{cases}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{4}(\vec{i'} + 3\vec{j'} - 2\vec{k'}) \\ \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{i'} - \vec{j'}) \\ \vec{k} = \frac{1}{4}(-\vec{i'} + \vec{j'} + 2\vec{k'}) \end{cases}\right).$$

Nous avons :
$$\begin{cases} f(\vec{i'}) = \vec{i'} \\ f(\vec{j'}) = -\vec{j'} \\ f(\vec{k'}) = -\vec{k'}. \end{cases}$$

D'où :
$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{4}(\vec{i'} - 3\vec{j'} + 2\vec{k'}) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}, \\ f(\vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{i'} + \vec{j'}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \\ f(\vec{k}) = \frac{1}{4}(-\vec{i'} - \vec{j'} - 2\vec{k'}) = -\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j} - \frac{3}{2}\vec{k}. \end{cases}$$

La matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc égale à : $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Pour trouver la matrice de f dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$, il suffit de connaître les composantes dans cette base des vecteurs $f(\vec{i'})$, $f(\vec{j'})$ et $f(\vec{k'})$.

Cette matrice est donc égale à : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On remarque que la matrice de f est très simple dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$.

EXERCICES

Noyau. Image.

1 Soient E un plan vectoriel réel et φ l'endomorphisme de E dont la matrice M par rapport à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de E est : $M = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau E_1 et l'image E_2 de φ. $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

Démontrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

(Baccalauréat 1972)

2 Mêmes questions que pour le n° 1 avec : $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$.

3 Mêmes questions que pour le n° 1 avec : $M = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{3} \\ 3+2\sqrt{2} & 7+2\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

4 Soient E un plan vectoriel réel et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E. Si m est un réel quelconque, on appelle f_m l'endomorphisme de E dont la matrice A_m par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$.

1° Déterminer les réels m pour lesquels l'endomorphisme f_m est un automorphisme. Trouver le noyau et l'image de chacun des endomorphismes f_m qui ne sont pas des automorphismes.

2° Déterminer les réels m pour lesquels l'endomorphisme f_m est un automorphisme involutif.

(Baccalauréat 1972)

5 Mêmes questions que pour le n° 4 avec : $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 3 \\ 0 & m+5 \end{pmatrix}$.

6 Mêmes questions que pour le n° 4 avec : $A_m = \begin{pmatrix} m^2+m & 2m \\ 1 & m \end{pmatrix}$.

7 Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ une base d'un plan vectoriel réel E.

A tout réel m, on associe l'application linéaire f_m de E dans E définie par :

$$\begin{cases} f_m(\vec{u}) = (1+m)\vec{u} - \vec{v} \\ f_m(\vec{v}) = 3\vec{u} + (1-m)\vec{v}. \end{cases}$$

Déterminer les réels m pour lesquels f_m n'est pas bijective.

Déterminer, pour chacune des applications linéaires correspondant à ces réels, le noyau et l'image de f_m.

(Baccalauréat 1972)

8 Mêmes questions que pour le n° 7 avec : $\begin{cases} f_m(\vec{u}) = (2m-2)\vec{u} + m\vec{v} \\ f_m(\vec{v}) = (m+1)(\vec{u} + \vec{v}) \end{cases}$

9 Soient E_3 (resp. E_2) un espace vectoriel réel de dimension 3 (resp. 2) et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (resp. $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$) une base de E_3 (resp. E_2).

Soit f l'application de E_3 dans E_2 qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de E_3 de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, associe le vecteur $f(\vec{u})$ dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont définies par :

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y + z. \end{cases}$$

Déterminer le noyau et l'image de f. On donnera, s'il y a lieu, une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels.

10 Même question que pour le n° 9 avec : $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + y + z. \end{cases}$

11 Même question que pour le n° 9 avec : $\begin{cases} x' = 2x - y - 2z \\ y' = -4x + 2y + 4z. \end{cases}$

12 Soient E_2 (resp. E_3) un espace vectoriel réel de dimension 2 (resp. 3) et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (resp. $\mathcal{B}' = (\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$) une base de E_2 (resp. E_3).

Soit f l'application de E_2 dans E_3 qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de E_2 de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, associe le vecteur $f(\vec{u})$ dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont définies par : $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x - y \\ z' = 2x + 3y. \end{cases}$

Déterminer le noyau et l'image de f. On donnera, s'il y a lieu, une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels.

13 Même question que pour le n° 12 avec : $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 6x - 3y \\ z' = -2x + y. \end{cases}$

14 On définit E_2, E_3, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ comme dans l'exercice n° 12.

Soient m un réel et f_m l'application de E_2 dans E_3 qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, associe le vecteur $f_m(\vec{u})$ dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont définies par : $\begin{cases} x' = mx - y \\ y' = 2x - \dfrac{m}{2} y \\ z' = mx - y. \end{cases}$

Déterminer, suivant les réels m, le noyau et l'image de f_m. On donnera, s'il y a lieu, une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels.

15 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}. \end{cases}$

1° Démontrer que le noyau de f est une droite vectorielle E_1 de E.

2° Donner une base $(\vec{e}_1)$ de E_1.

3° Démontrer que l'image de f est un plan vectoriel E_2 de E.

4° Déterminer une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E telle que $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit une base de E_2.

5° Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 ?

16 Mêmes questions que pour le n° 15 avec : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{i} \\ f(\vec{k}) = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}. \end{cases}$

17 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, associe le vecteur $f(\vec{u})$ dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont définies par :

$$\begin{cases} x' = -x + y - z \\ y' = x - y + z \\ z' = 2x - 2y + 2z. \end{cases}$$

Déterminer le noyau et l'image de f. On donnera, s'il y a lieu, une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels.

18 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E. Soient m un réel et f_m l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} f_m(\vec{i}) = m\vec{i} + \vec{j} \\ f_m(\vec{j}) = (m+6)\vec{i} + (m+2)\vec{j} \\ f_m(\vec{k}) = m\vec{k}. \end{cases}$$

Déterminer, suivant les réels m, le noyau et l'image de f_m. On donnera, s'il y a lieu, une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels.

19 Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif K et $\vec{0}$ le vecteur nul de E. Soient f un endomorphisme de E et N le noyau de f.

1° Traduire, à l'aide de N, la relation binaire $\mathcal{R}$ définie dans E par :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad (\vec{u}\,\mathcal{R}\,\vec{v} \iff f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}).$$

2° Montrer alors que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E. Quelle est la classe de $\vec{0}$? (Baccalauréat 1972)

20 Soient E un plan vectoriel réel et f un endomorphisme de E tel que l'on ait : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

1° Que peut-on en déduire sur les dimensions respectives de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$?

2° Soit $\vec{i}$ un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{j}$ non nul tel que l'on ait : $f(\vec{j}) = \vec{i}$.

3° Démontrer que la famille $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E.

Quelle est la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

4° Démontrer que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul de E, c'est-à-dire que l'on a :
$\forall \vec{u} \in E, \quad (f \circ f)(\vec{u}) = \vec{0}$.
5° Réciproquement, que peut-on dire d'un endomorphisme f de E tel que $f \circ f$ soit l'endomorphisme nul de E ?

21 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f$ soit l'endomorphisme nul de E (cf. ex. n° 20, 4ᵉ question).
1° Démontrer que l'on a : $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2° On pose $i = \dim \operatorname{Im} f$ et $k = \dim \operatorname{Ker} f$.
Démontrer que l'on a : $i \leqslant k$ et calculer $i + k$.
En déduire que l'on a soit $i = 0$, soit $i = 1$.
3° Dans le cas où i est égal à 0, déterminer f.
4° Dans le cas où i est égal à 1, soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$.
a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\operatorname{Ker} f$ tel que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$ et un vecteur non nul $\vec{w}$ tel que l'on ait : $f(\vec{w}) = \vec{u}$.
b) Démontrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E.
c) Trouver la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

22 Soient E un espace vectoriel réel et f et g deux endomorphismes distincts de E tels que l'on ait : $f \circ g = g \circ f$.
Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ (resp. $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$) sont stables par g (resp. par f).

23 Soient E et F deux espaces vectoriels réels, f une application linéaire de E dans F et F′ un sous-espace vectoriel de F.
On appelle image réciproque de F′ par f, et on note $f^{-1}(F')$, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont l'image par f appartient à F′.
On a donc : $\forall \vec{u} \in E, \quad \left(\vec{u} \in f^{-1}(F') \iff f(\vec{u}) \in F'\right)$.
Démontrer que $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

※ **24** Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E.
1° Soient E′ un sous-espace vectoriel de E et E″ l'image réciproque $f^{-1}(E')$ de E′ par f, définie dans l'exercice n° 23. Soit f' la restriction de f à E″.
a) Démontrer que l'on a : $\operatorname{Ker} f' = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f' = (\operatorname{Im} f) \cap E'$.
b) En déduire l'inégalité : $\dim f^{-1}(E') \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim E'$.
2° Démontrer l'égalité : $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$ et déduire de la première question l'inégalité : $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.

※ **25** Soient t un réel et u_t l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique est : $\begin{pmatrix} t(t-1) & t(t+1) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
1° Déterminer le noyau N_t de u_t ; préciser sa dimension suivant les valeurs de t.
Soit J le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que l'on ait : $\forall t \in J, \quad N_t = \{(0, 0)\}$.
Que peut-on dire de u_t lorsque t appartient à J ?
2° Soient $\vec{D}$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(0, 1)$ et E_t l'image réciproque de $\vec{D}$ par u_t (cf. ex. n° 23).
a) Démontrer que E_t est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

b) Démontrer que, si t appartient à J, alors E_t est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Donner une base de E_t.

c) Déterminer E_t lorsque t n'appartient pas à J.

3° Soient λ un réel et F_λ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs $(\lambda, 1)$ et $(1, \lambda)$ de $\mathbb{R}^2$.

Trouver le sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ tel que l'on ait : $\forall \lambda \in K, \quad F_\lambda = \mathbb{R}^2$.

Déterminer F_λ lorsque λ n'appartient pas à K. On donnera la dimension de F_λ et une base.

4° Pour tout couple (t, λ) de $\mathbb{R}^2$, on désigne par $\varphi(t, \lambda)$ la dimension du sous-espace vectoriel $u_t(F_\lambda)$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Démontrer que l'on a : $\forall (t, \lambda) \in J \times K, \quad \varphi(t, \lambda) = 2$.

b) Déterminer les couples (t, λ) pour lesquels on a : $\varphi(t, \lambda) = 1$?

c) Peut-on avoir : $\varphi(t, \lambda) = 0$?

d) Faire un diagramme cartésien des sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}^2$ définis respectivement par : $A = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(t, \lambda) = 1\}$; $B = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(t, \lambda) = 0\}$.

Groupe linéaire.

26 Soient E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E, distinct de l'homomorphisme nul $\tilde{0}$ de E (cf. ex. n° 20) et tel que l'on ait $f^2 = \tilde{0}$.
Soient m un réel et f_m l'endomorphisme de E défini par : $f_m = \mathrm{Id}_E + mf$.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

※ **27** Même question que pour le n° 26 dans le cas suivant : f est un endomorphisme de E, distinct de $\tilde{0}$ et tel que : $f^3 = \tilde{0}$ et f_m est défini par :
$f_m = \mathrm{Id}_E + mf + \dfrac{m^2}{2} f^2$.

28 Démontrer que toute homothétie vectorielle d'un espace vectoriel réel E commute avec tout endomorphisme de E.

29 Soient E un plan vectoriel et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est égale à : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{\mathrm{Id}_E, f, f^2, f^3, f^4, f^5\}$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

※ **30** Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ définie par :
$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$
et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\begin{cases} u(e_1) = e_1 + e_2 \\ u(e_2) = e_1 + 2e_2 \\ u(e_3) = e_1 - e_2 \end{cases}$

1° Soit F le sous-espace vectoriel image de u. Montrer que e_1 et e_2 appartiennent à F et que la famille (e_1, e_2) est une base de F. Trouver une base du noyau G de u. Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2° Soit $\bar{u}$ la restriction de u à F. Démontrer que $\bar{u}$ appartient au groupe linéaire du plan vectoriel F. Quelle est la matrice de $\bar{u}$ par rapport à la base (e_1, e_2) de F ?

3° On désigne par $\bar{v}$ l'automorphisme réciproque de $\bar{u}$.
Calculer $\bar{v}(e_1)$ et $\bar{v}(e_2)$. En déduire la matrice de $\bar{v}$ par rapport à la base (e_1, e_2) de F.
4° Montrer qu'il existe un endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ et un seul tel que l'on ait :
$v(e_1) = \bar{v}(e_1)$ et $v(e_2) = \bar{v}(e_2)$ et dont le noyau soit égal à G. Calculer $v(e_3)$.

Projections et symétries vectorielles.

31 Soient E un plan vectoriel réel et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.
Soient E′ et E″ les droites vectorielles de E engendrées respectivement par les vecteurs $\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{i} - 2\vec{j}$.
1° Vérifier que l'on a : $E' \oplus E'' = E$.
2° Déterminer les matrices respectives, par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, de la projection vectorielle sur E′ de direction E″ et de la projection vectorielle sur E″ de direction E′.
3° Déterminer les images des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par la symétrie vectorielle par rapport à E′ de direction E″.

32 Mêmes questions que pour le n° 31 dans le cas suivant : E′ est engendrée par le vecteur $\vec{i}$ et E″ par le vecteur $2\vec{i} + 4\vec{j}$.

33 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.
Soient E′ la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et E″ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ satisfont à : $x + y + z = 0$.
1° Vérifier que l'on a : $E' \oplus E'' = E$.
2° Déterminer les images des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ par la projection vectorielle sur E″ de direction E′.
3° Déterminer les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'image d'un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, par la symétrie vectorielle par rapport à E′ de direction E″.

34 Mêmes questions que pour le n° 33 dans le cas suivant : E′ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telles que :
$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$
et E″ est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{k}$.

35 Mêmes questions que pour le n° 33 dans le cas où E′ et E″ sont les ensembles des vecteurs $\vec{u}$ de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ satisfont respectivement à $2z - x = 0$ et à $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$

36 Soient E un plan vectoriel réel et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice M dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est égale à : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver la nature de f et déterminer les deux sous-espaces vectoriels E′ et E″ qui le caractérisent.

37 Mêmes questions que pour le n° 36 dans le cas où l'on a : $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

38 Mêmes questions que pour le n° 36 dans le cas où l'on a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & -1 \end{pmatrix}$.

39 Mêmes questions que pour le n° 36 dans le cas où l'on a : $M = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

40 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.

Soit f l'endophormisme de E défini par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = -\vec{i} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{k}) = -\vec{k}. \end{cases}$

Trouver la nature de f et déterminer les deux sous-espaces vectoriels E′ et E″ de E qui le caractérisent.

41 Mêmes questions que pour le n° 40 dans le cas où f est l'endomorphisme qui à tout vecteur $\vec{u}$ de E de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, associe le vecteur $\vec{u'}$ dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont définies par :

$$\begin{cases} x' = x - 8y \\ y' = -y \\ z' = z. \end{cases}$$

42 Mêmes questions que pour le n° 40 dans le cas où f est l'endomorphisme de E défini par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{0} \\ f(\vec{j}) = 4\vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \vec{0}. \end{cases}$

43 Mêmes questions que pour le n° 40 dans le cas où f est l'endomorphisme de E défini par: $\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ f(\vec{j}) = \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}). \end{cases}$

44 Soient E un espace vectoriel réel et g un endomorphisme de E. On pose :
$f = \frac{1}{2}(g + \mathrm{Id}_E)$.
1° Calculer $f \circ f$.
2° Démontrer que g est un automorphisme involutif de E si et seulement si f est un projecteur de E.

45 Soient E un espace vectoriel et f et g deux projecteurs de E.
1° Montrer, sur un exemple, que $f + g$ n'est pas en général un projecteur.
2° Calculer $(f + g)\circ(f + g)$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $f + g$ soit un projecteur.

46 Soient E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E.
1° Démontrer que f est un projecteur de E si et seulement si $(\mathrm{Id}_E - f)$ est un projecteur de E.
2° Si f est un projecteur de E, démontrer l'égalité : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - f)$.

47 Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit s la symétrie vectorielle par rapport à E′ de direction E″ ; soient p la projection vectorielle sur E′ de direction E″ et p' la projection vectorielle sur E″ de direction E′.
1° Démontrer l'égalité : $s = p - p'$.
2° Soient α un réel non nul et f_α l'endomorphisme de E défini par : $f_\alpha = p + \alpha p'$.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f_α lorsque α décrit $\mathbb{R}^*$.
Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

48 Soient E un espace vectoriel réel et f et g deux projecteurs de E, distincts de l'endomorphisme nul $\tilde{0}$ de E (cf. ex. n° 20) et tels que l'on ait : $f + g = \mathrm{Id}_E$.
Démontrer que l'on a : $f \circ g = g \circ f = \tilde{0}$.

※ **49** Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E (cf. ex. n° 20) et f et g deux endomorphismes de E tels que : $g \circ f = \tilde{0}$.
1° Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$?
2° On pose : $n = \dim E$, $p = \dim \mathrm{Ker}\, f$, $q = \dim \mathrm{Ker}\, g$ et $r = \dim \mathrm{Im}\, f$.
Montrer que l'on a : $p + q \geqslant n$.
3° On suppose, de plus, que l'on a : $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0_E\}$.
Démontrer que les sous-espaces vectoriels Ker f et Ker g sont supplémentaires dans E.
4° Soit h un automorphisme involutif de E.
Démontrer que h satisfait à : $(h + \mathrm{Id}_E)\circ(h - \mathrm{Id}_E) = \tilde{0}$.
Retrouver, à l'aide des questions précédentes, le théorème 4.1 du cours.
5° Soient a, b, c trois réels satisfaisant à l'inégalité : $b^2 - 4ac > 0$.
Énoncer et démontrer un théorème analogue au théorème 4.1 dans le cas d'un endomorphisme f de E tel que l'on ait : $af^2 + bf + c\, \mathrm{Id}_E = \tilde{0}$.

50 Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E (cf. ex. n° 20) et f, g, h trois endomorphismes de E tels que l'on ait : $h \circ g \circ f = \tilde{0}$.
Démontrer que l'on a : $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, h \geqslant \dim E$. On pourra utiliser les résultats des ex. n° 24 et n° 49.

6.
Applications affines

Dans le chapitre 5, nous avons étudié des applications particulières d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel : les applications linéaires.
Tout espace affine est associé à un espace vectoriel; nous allons définir et étudier des applications particulières d'un espace affine dans lui-même, qui seront associées à des applications linéaires.

1. Définition et propriétés.

Définition.

1.1 DÉFINITION : **Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel** réel E **et** f **une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.**
f **est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe un endomorphisme** φ **de l'espace vectoriel** E **tel que l'on ait** :
$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \quad \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)\, f(N)}$ (1)

Unicité de φ : Supposons qu'il existe deux tels endomorphismes φ et φ' de E.
On a alors : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \quad \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)\, f(N)} = \varphi'(\overrightarrow{MN})$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E. Nous savons que, pour tout point M de $\mathcal{E}$, il existe un unique point N de $\mathcal{E}$ tel que l'on ait : $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.
On a donc : $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\overrightarrow{MN}) = \varphi'(\overrightarrow{MN}) = \varphi'(\vec{u})$.
Et, par suite, les applications φ et φ' sont égales.
Si f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, il existe donc un endomorphisme φ de E et un seul satisfaisant à la proposition (1) ; cet endomorphisme φ est appelé **l'endomorphisme associé à l'application affine** f.

Exemples.

1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et A un point de $\mathcal{E}$. Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point A.
On a : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \quad \overrightarrow{f(M)\, f(N)} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
L'endomorphisme nul de E satisfait donc à la proposition (1) ; et par suite l'application f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est l'endomorphisme nul de E.

2. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f l'identité de $\mathcal{E}$.

On a : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN} = Id_E(\overrightarrow{MN})$.

L'identité de E satisfait donc à la proposition (1) ; l'identité de $\mathcal{E}$ est donc une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est Id_E.

3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E.

Soient $\vec{u}$ un vecteur de E et f la translation de vecteur $\vec{u}$.

Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$, et M′ et N′ leurs images respectives par f. On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$, et par suite :

$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est donc une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est l'identité de E.

Détermination d'une application affine.

Les exemples précédents montrent que deux applications affines distinctes peuvent avoir le même endomorphisme associé. La donnée d'un endomorphisme de E ne suffit donc pas à déterminer une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

1.2 **THÉORÈME : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E ; soient A et A′ deux points de $\mathcal{E}$ et φ un endomorphisme de E.**
Il existe une unique application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé soit φ et telle que A ait pour image A′ par f.

Démonstration :

__Unicité.__ Supposons qu'il existe deux telles applications affines f et f'.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$. On a :

$\overrightarrow{A'f(M)} = \overrightarrow{f(A)\,f(M)} = \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f'(A)\,f'(M)} = \overrightarrow{A'f'(M)}$

et par suite : $f(M) = f'(M)$.

Les applications f et f' sont donc égales.

__Existence.__ Considérons l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe l'unique point M′ défini par : $\overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$.

Cherchons l'image de A par f. C'est l'unique point M′ défini par :

$\overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AA}) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$, c'est-à-dire le point A′.

Soient maintenant M et N deux points quelconques de E. On a :

$\overrightarrow{f(M)\,f(N)} = \overrightarrow{A'f(N)} - \overrightarrow{A'f(M)} = \varphi(\overrightarrow{AN}) - \varphi(\overrightarrow{AM}) = \varphi(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

L'application f est donc bien l'application affine cherchée. ■

__Remarques :__ 1. Si f est l'application affine déterminée par l'endomorphisme φ et le couple (A, A′) de $\mathcal{E}^2$, l'égalité : $\overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$ permet de trouver l'image M′ par f d'un point M quelconque de $\mathcal{E}$.

2. Supposons que l'espace affine $\mathcal{E}$ soit de dimension finie n ; considérons un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathcal{E}$.

Toute application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, d'endomorphisme associé φ, est donc déterminée par la donnée de l'image O′ de O par f et des images respectives $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ de $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ par φ.

3. Supposons que l'espace affine $\mathcal{E}$ soit de dimension finie n ; considérons un repère affine $(A_0, \ldots, A_n)$ de $\mathcal{E}$.

Nous savons que le repère $\left(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\right)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, d'endomorphisme associé φ. Soit i un élément de $\{1, \ldots, n\}$. Se donner $f(A_0)$ et $\varphi\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)$ équivaut à se donner $f(A_0)$ et $f(A_i)$.
Toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est donc déterminée par la donnée des images par f des $(n+1)$ points du repère affine : $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Exemple.

Soient P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$ et $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère cartésien de P. Soient φ l'endomorphisme de $\vec{P}$ dont la matrice dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et A et A′ deux points de P dont les coordonnées dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Soit f l'application affine déterminée par φ et (A, A′). Cherchons les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de l'image M′ du point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ce repère. On a :

$$\left(\overrightarrow{A'M'} = \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right)\right) \iff \left(\begin{pmatrix} x'+1 \\ y'+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} x'+1 \\ y'+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1-y \\ 3x-3+2y \end{pmatrix}\right) \iff \left(\begin{cases} x' = x-y-2 \\ y' = 3x+2y-4 \end{cases}\right).$$

Image par une application affine d'un sous-espace affine.

Nous savons que l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. D'autre part, tout sous-espace affine non vide est déterminé par la donnée d'un point de l'espace affine et d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel associé.
Nous allons montrer que l'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.

1.3 **THÉORÈME : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ. Soient A un point de $\mathcal{E}$ et E′ un sous-espace vectoriel de E. L'image par f du sous-espace affine $\mathcal{V}(A, E')$ est le sous-espace affine $\mathcal{V}(f(A), \varphi(E'))$.**

Démonstration :
Nous savons que $\varphi(E')$ est un sous-espace vectoriel de E ; d'autre part, appelons A' l'image de A par f.

• Soit M un point quelconque de $\mathcal{V}(A, E')$. On a :

$$(M \in \mathcal{V}(A, E')) \iff (\overrightarrow{AM} \in E') \implies \left(\varphi(\overrightarrow{AM}) \in \varphi(E')\right) \iff (\overrightarrow{A'M'} \in \varphi(E'))$$
$$\iff (M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E'))).$$

On a donc : $f(\mathcal{V}(A, E')) \subset \mathcal{V}(A', \varphi(E'))$.

• Soit M' un point quelconque de $\mathcal{V}(A', \varphi(E'))$. On a :

$$\left(M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E'))\right) \iff (\overrightarrow{A'M'} \in \varphi(E')) \iff \left(\exists \vec{u} \in E', \overrightarrow{A'M'} = \varphi(\vec{u})\right).$$

D'après la définition d'un espace affine, il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que l'on ait : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$; puisque $\vec{u}$ appartient à E', le point M appartient à $\mathcal{V}(A, E')$.

On a donc : $M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E')) \implies \left(\exists M \in \mathcal{V}(A, E'), \overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM})\right)$

et : $\left(\exists M \in \mathcal{V}(A, E'), \overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM})\right) \iff \left(\exists M \in \mathcal{V}(A, E'), \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'f(M)}\right)$
$\iff (\exists M \in \mathcal{V}(A, E'), M' = f(M)) \iff (M' \in f(\mathcal{V}(A, E')))$.

Par suite : $(M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E'))) \implies (M' \in f(\mathcal{V}(A, E')))$.

On a donc : $\mathcal{V}(A', \varphi(E')) \subset f(\mathcal{V}(A, E'))$

Des propositions : $f(\mathcal{V}(A, E')) \subset \mathcal{V}(A', \varphi(E'))$ et $\mathcal{V}(A', \varphi(E')) \subset f(\mathcal{V}(A, E'))$,
il résulte : $f(\mathcal{V}(A, E')) = \mathcal{V}(A', \varphi(E'))$. ■

Conséquences.

1.4 • **Les images par une application affine de deux sous-espaces affines parallèles sont deux sous-espaces affines parallèles.**
Deux sous-espaces affines parallèles ont la même direction ; il en est donc de même de leurs images.

• **L'image $f(\mathcal{E}')$ par une application affine f d'un sous-espace affine $\mathcal{E}'$ de dimension p est un sous-espace affine de dimension inférieure ou égale à p ; si f est injective, $f(\mathcal{E}')$ est de dimension égale à p.**
Ce résultat est une conséquence immédiate du corollaire 1.7 du chapitre 5.

• En particulier, l'image par une application affine d'une droite affine est soit une droite affine, soit un point. L'image par une application affine d'un plan affine est soit un plan affine, soit une droite affine, soit un point.

Exemple.

Soient P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$ et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P.

Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, associe le point M' de cordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ définies par :

$$\begin{cases} x' = 1 + x + 2y \\ y' = -1 + x + 2y \end{cases}$$

Appelons O' le point de coordonnées $\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

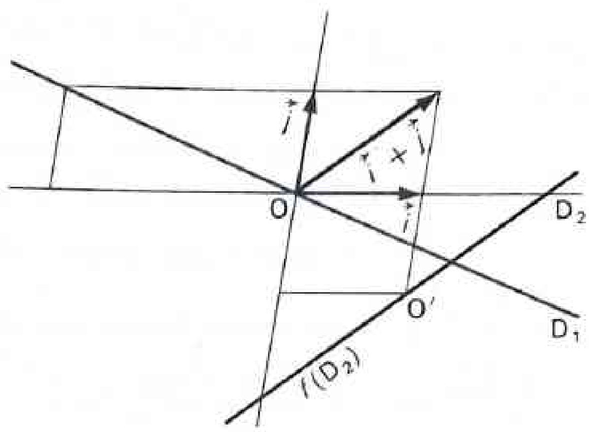
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f est l'application affine déterminée par le couple (O, O') et par l'endomorphisme φ de $\vec{P}$ de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; nous lui laissons aussi le soin de démontrer que le noyau de φ est la droite vectorielle de $\vec{P}$ engendrée par le vecteur $-2\vec{i} + \vec{j}$.

Soient D_1 la droite affine passant par O de direction Ker φ et D_2 la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\vec{i}$. Cherchons les images par f de D_1 et de D_2.

On a :

$$f(D_1) = \mathcal{V}(f(O), \varphi(\text{Ker } \varphi)) = \mathcal{V}(O', \{\vec{0}\}) = \{O'\};$$

$$f(D_2) = \mathcal{V}(f(O), \varphi(\vec{i})) = D(O', \vec{i} + \vec{j}).$$



Application affine et barycentre.

1.5 THÉORÈME : **Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.**
Soient n points $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et n réels $a_1, \ldots, a_n$ de somme non nulle.
L'image par f du barycentre G des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ est le barycentre des points $f(A_1), \ldots, f(A_n)$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_n$.

Démonstration :

Soit φ l'endomorphisme associé à l'application affine f. On a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}\right) \Longrightarrow \left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{0}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{f(G)\, f(A_i)} = \vec{0}\right).$$

Si G est le barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ alors $f(G)$ est le barycentre des points $f(A_1), \ldots, f(A_n)$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_n$. ■

Remarques : 1. En particulier l'image par une application affine du milieu I de deux points A et B est le milieu I' des images A' et B' de ces points. Si l'on a : $A' = B'$, on a aussi : $I' = A' = B'$.

2. Nous dirons que toute application affine « conserve le barycentre » ; nous signalons que l'on démontre que toute application qui « conserve le barycentre » est une application affine.

Exemple.

Soient P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$ et A, B, C trois points non alignés de P.

Soit f l'application affine de P dans P définie par : $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = A$.

Les points A, B, C forment un repère affine ; l'application f est donc parfaitement déterminée.

Le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère cartésien de P et les points A, B, C ont pour coordonnées respectives dans ce repère : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit φ l'endomorphisme de $\vec{P}$ associé à f. On a :

$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

La matrice de φ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc égale à : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient M un point quelconque de P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ et M′ son image par f de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$. On a :

$$\left(\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{BM'}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

D'où : $\begin{cases} x' = 1 - x - y \\ y' = x. \end{cases}$

Considérons les points I, J, K de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Appelons G l'isobarycentre des points I, J, K et vérifions que l'image G′ de G par f est l'isobarycentre des images I′, J′, K′ par f des points I, J, K.

Les coordonnées de G dans $\mathcal{R}$ sont : $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des points I′, J′, K′, G′ sont respectivement :

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

D'autre part les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de l'isobarycentre des points I′, J′, K′ sont :

$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; elles sont bien égales aux coordonnées de G′ dans $\mathcal{R}$.

Points invariants par une application affine.

1.6 THÉORÈME : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ. L'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$; si cet ensemble est non vide, il a pour direction le sous-espace vectoriel des vecteurs de E invariants par φ.

Démonstration :
Appelons $\mathcal{E}'$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f.
On a : $\forall M \in \mathcal{E}, \quad (M \in \mathcal{E}') \Longleftrightarrow (f(M) = M)$.
Envisageons les deux cas suivants : $\mathcal{E}' = \varnothing$, et $\mathcal{E}' \neq \varnothing$.

- Si $\mathcal{E}'$ est égal à l'ensemble vide, $\mathcal{E}'$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.
- Supposons : $\mathcal{E}' \neq \varnothing$. Il existe donc au moins un point A de $\mathcal{E}'$.

On a alors : $\forall M \in \mathcal{E}', \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)\,f(M)} = \overrightarrow{AM}$, ce qui équivaut à dire que pour tout point M de $\mathcal{E}'$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient au sous-espace vectoriel E' des vecteurs de E invariants par φ.
$\mathcal{E}'$ est donc le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et de direction E'. ■

Exemple.

Reprenons l'exemple du paragraphe 1.5 et cherchons les points de P invariants par f. Les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ d'un tel point sont la solution du système :

$$\begin{cases} x = 1 - x - y \\ y = x. \end{cases}$$

il y a donc un unique point invariant qui est le point D de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

L'ensemble des points invariants par f est le singleton $\{D\}$. Sa direction est $\{\vec{0}\}$. On vérifie facilement que le sous-espace vectoriel des vecteurs de $\vec{P}$ invariants par φ est $\{\vec{0}\}$.

Composition des applications affines.

1.7 THÉORÈME : **Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.**
La composition des applications est une loi de composition interne dans $\mathcal{A}$ et l'application qui, à toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, associe son endomorphisme associé est un homomorphisme de $(\mathcal{A}, \circ)$ dans $(\mathcal{L}(E), \circ)$.

Démonstration :
Soient f et f' deux applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphismes associés respectifs φ et φ'.
Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$, M' et N' leurs images respectives par f et M" et N" les images respectives de M' et de N' par f'.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} & \xrightarrow{f'} & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' & \longmapsto & M'' \\ N & \longmapsto & N' & \longmapsto & N''. \end{array}$$

On a : $\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{f'(M')\,f'(N')} = \varphi'(\overrightarrow{M'N'}) = \varphi'[\overrightarrow{f(M)\,f(N)}] = \varphi'(\varphi(\overrightarrow{MN}))$
$= (\varphi' \circ \varphi)(\overrightarrow{MN})$.

L'application $f' \circ f$ est donc une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi' \circ \varphi$. ■

Remarque : Une conséquence immédiate du théorème 1.7 est que, si f est une bijection affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ, alors f^{-1} est une bijection affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ^{-1}.

2. Homothéties - Translations.

Translations.

Nous rappelons la définition d'une translation.

2.1 **DÉFINITION : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et $\vec{u}$ un vecteur de E.**
On appelle translation de $\mathcal{E}$, de vecteur $\vec{u}$, et on note $t_{\vec{u}}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point M′ de $\mathcal{E}$ défini par : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Propriétés.

2.2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

P1 Toute translation de $\mathcal{E}$ est une bijection affine dont l'endomorphisme associé est Id_E. Si cette translation n'est pas l'identité de $\mathcal{E}$, elle n'admet pas de point invariant.

Démonstration :

- D'après l'exemple 3 du paragraphe 1.1, toute translation est une application affine dont l'endomorphisme associé est Id_E.
- De la proposition :

$\forall \vec{u} \in E,\ \forall (M, M') \in \mathcal{E}^2,\ \left((\overrightarrow{MM'} = \vec{u}) \iff (\overrightarrow{M'M} = -\vec{u})\right)$

il résulte que toute translation est bijective et a pour bijection réciproque la translation de vecteur opposé.

- La translation de vecteur nul est l'identité de $\mathcal{E}$ et l'on a :

$\forall \vec{u} \in E,\ \forall M \in \mathcal{E},\ \left((t_{\vec{u}}(M) = M) \iff (\overrightarrow{MM} = \vec{u}) \iff (\vec{u} = \vec{0})\right)$. ■

Remarque : L'image par une translation de $\mathcal{E}$ d'un sous-espace affine de dimension finie de $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace affine de même dimension.

x **P2** Toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est Id_E est une translation de $\mathcal{E}$.

Démonstration :
Cette propriété résulte de la proposition :
$\forall (M, M', N, N') \in \mathcal{E}^4, \left((\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'})\right)$. ■

P3 Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.
$(\mathcal{T}, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(E, +)$.

Démonstration :
Il est immédiat que l'application qui, à toute translation de $\mathcal{E}$, associe le vecteur de cette translation est une bijection de $\mathcal{T}$ sur E.

D'autre part, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de E ; soient M un point quelconque de $\mathcal{E}$, M' l'image de M par $t_{\vec{u}}$ et M'' l'image de M' par $t_{\vec{v}}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{t_{\vec{u}}} & \mathcal{E} & \xrightarrow{t_{\vec{v}}} & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' & \longmapsto & M'' \end{array}$$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$, et par suite : $\overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$.
Il en résulte l'égalité : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.
La bijection de $\mathcal{T}$ sur E est donc un isomorphisme de $(\mathcal{T}, \circ)$ sur $(E, +)$. Puisque $(E, +)$ est un groupe commutatif, $(\mathcal{T}, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(E, +)$. ■

x **P4** Toute translation de $\mathcal{E}$ est déterminée par la donnée d'un point et de son image.

Démonstration :
Soient A et A' deux points quelconques de $\mathcal{E}$. Il existe une unique translation de $\mathcal{E}$ telle que l'image de A soit A' ; c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. ■

x **P5** Supposons $\mathcal{E}$ de dimension 3 et considérons un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de $\mathcal{E}$.

Soient $\vec{u}$ un vecteur de E de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, et M et M' deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

On a : $(M' = t_{\vec{u}}(M)) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}\right)$.

Démonstration :
Cette équivalence est une conséquence immédiate de l'équivalence suivante :
$(M' = t_{\vec{u}}(M)) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.)$ ■

Homothéties.

2.3 **DÉFINITION : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient K un point de $\mathcal{E}$ et α un réel non nul. On appelle homothétie de $\mathcal{E}$ de centre K et de rapport α, et on note $h(K, \alpha)$, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point M′ de $\mathcal{E}$ défini par : $\overrightarrow{KM'} = \alpha \overrightarrow{KM}$.**

<u>Remarques:</u> 1. Les vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KM'}$ sont linéairement dépendants ; les points K, M et M′ sont donc alignés.
2. On a : $\forall K \in \mathcal{E}, \quad h(K, 1) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Propriétés.

2.4 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

P1	Toute homothétie de $\mathcal{E}$ est une bijection affine dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle de même rapport. Si l'homothétie de $\mathcal{E}$ n'est pas l'identité de $\mathcal{E}$, elle admet un seul point invariant, le centre de l'homothétie.

Démonstration :
Soit $h(K, \alpha)$ une homothétie de $\mathcal{E}$.

- Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$, et M′ et N′ leurs images par $h(K, \alpha)$.
On a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{KN'} - \overrightarrow{KM'} = \alpha \overrightarrow{KN} - \alpha \overrightarrow{KM} = \alpha \overrightarrow{MN}$.
$h(K, \alpha)$ est donc une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle de rapport α.
- De la proposition :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \ \forall (K, M, M') \in \mathcal{E}^3, \quad \left(\left(\overrightarrow{KM'} = \alpha \overrightarrow{KM} \right) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{KM} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{KM'} \right) \right)$$

il résulte que toute homothétie est bijective et a pour bijection réciproque l'homothétie de même centre et de rapport inverse.
- De la proposition :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall (K, M) \in \mathcal{E}^2, \quad \Big((h(K, \alpha)(M) = M) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{KM} = \alpha \overrightarrow{KM}) \Longleftrightarrow ((1-\alpha)\overrightarrow{KM} = \vec{0}) \Longleftrightarrow (\alpha = 1 \ \text{ ou } \ M = K) \Big),$$

il résulte que, si le rapport de l'homothétie est différent de 1, il n'y a qu'un seul point invariant : le centre de l'homothétie. ■

<u>Remarque :</u> L'image par une homothétie de $\mathcal{E}$ d'un sous-espace affine de dimension finie de $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace affine de même dimension.

P2	Toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est une homothétie vectorielle de E de rapport différent de 1 est une homothétie de $\mathcal{E}$.

Démonstration :

Soit α un réel non nul et différent de 1.

Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle h_α.

Soient A un point de $\mathcal{E}$ et A' son image par f.

On a : $\forall M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{A'f(M)} = h_\alpha(\overrightarrow{AM}) = \alpha\overrightarrow{AM}$.

Cherchons les points de $\mathcal{E}$ invariants par f. On a :

$\forall M \in \mathcal{E},\ \Big((f(M) = M) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{A'M} = \alpha\overrightarrow{AM}) \Longleftrightarrow (\alpha\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA'} = \vec{0})\Big)$.

La somme $(\alpha - 1)$ n'est pas nulle ; il y a donc un unique point invariant qui est le barycentre K des points A et A' affectés des coefficients respectifs α et -1.

On a alors : $\forall M \in \mathcal{E},\ \big(\overrightarrow{Kf(M)} = h_\alpha(\overrightarrow{KM}) = \alpha\overrightarrow{KM}\big)$.

L'application f est donc l'homothétie de centre K et de rapport α. ■

P3 Soient K un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}_K$ l'ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ de centre K. $(\mathcal{H}_K, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Démonstration :

Il est immédiat que l'application qui, à toute homothétie de $\mathcal{E}$ de centre K, associe le rapport de cette homothétie est une bijection de $\mathcal{H}_K$ sur $\mathbb{R}^*$.

D'autre part, soient α et β deux réels quelconques non nuls, M un point quelconque de $\mathcal{E}$; soient M' son image par $h(K, \alpha)$ et M'' l'image de M' par $h(K, \beta)$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{h(K,\alpha)} & \mathcal{E} & \xrightarrow{h(K,\beta)} & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' & \longmapsto & M''. \end{array}$$

On a : $\overrightarrow{KM'} = \alpha\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KM''} = \beta\overrightarrow{KM'}$, et par suite : $\overrightarrow{KM''} = \alpha\beta\overrightarrow{KM}$.

Il en résulte l'égalité : $h(K, \beta) \circ h(K, \alpha) = h(K, \alpha\beta)$.

La bijection de $\mathcal{H}_K$ sur $\mathbb{R}^*$ est donc un isomorphisme de $(\mathcal{H}_K, \circ)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$. Puisque $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif, $(\mathcal{H}_K, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$. ■

P4 Supposons $\mathcal{E}$ de dimension 3 et considérons un repère cartésien $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$.

Soient K un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, et α un réel non nul ;

soient M et M' deux points quelconques de $\mathcal{E}$, de coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

On a : $(M' = h(K, \alpha)(M)) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x' = x_0 + \alpha(x - x_0) \\ y' = y_0 + \alpha(y - y_0) \\ z' = z_0 + \alpha(z - z_0) \end{cases}\right)$.

Démonstration :

Cette équivalence est une conséquence immédiate de l'équivalence suivante :

$(M' = h(K, \alpha)(M)) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{KM'} = \alpha\overrightarrow{KM})$. ■

Homothéties - Translations.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E.
De la propriété P_3 du paragraphe 2.4, il résulte que la composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre. Nous allons nous intéresser ici à la composée de deux homothéties de centres différents.

2.5 THÉORÈME : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E.
Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.
Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. f est un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.
2. φ est une homothétie vectorielle de rapport non nul.

Démonstration :
$(1) \Longrightarrow (2)$. Soit f un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.
De la propriété P_1 du paragraphe 2.4, il résulte que, si f appartient à $\mathcal{H}$, alors φ est une homothétie vectorielle de rapport non nul.
De la propriété P_1 du paragraphe 2.2, il résulte que, si f appartient à $\mathcal{T}$, alors φ est l'identité de E, c'est-à-dire l'homothétie vectorielle de rapport 1.
$(2) \Longrightarrow (1)$. Soit f une application affine dont l'endomorphisme associé φ est une homothétie vectorielle de rapport α non nul.
De la propriété P_2 du paragraphe 2.4, il résulte que, si α est différent de 1, alors f est une homothétie de $\mathcal{E}$ de rapport α.
De la propriété P_2 du paragraphe 2.2, il résulte que, si α est égal à 1, alors f est une translation de $\mathcal{E}$. ■

2.6 THÉORÈME : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E.
Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.
Alors $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}, \circ)$ est un groupe en général non commutatif.

Démonstration :
• Soient f et f' deux éléments quelconques de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ d'endomorphismes associés respectifs φ et φ'.
D'après le théorème 2.5, nous savons que φ (resp. φ') est une homothétie vectorielle de E de rapport α (resp. α') non nul. L'application $\varphi' \circ \varphi$ est donc l'homothétie vectorielle de E de rapport $\alpha\alpha'$ non nul.
D'après le théorème 1.7, l'application $f' \circ f$ a pour endomorphisme associé $\varphi' \circ \varphi$; d'après le théorème 2.5, elle est donc un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.
La loi $\circ$ est donc une loi de composition interne dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.
• L'identité de $\mathcal{E}$ peut être considérée comme la translation de vecteur nul ou comme une homothétie de centre quelconque et de rapport 1. C'est donc un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.

• Toute homothétie (resp. toute translation) est bijective et a pour bijection réciproque une homothétie (resp. une translation).
Tout élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ a donc un symétrique dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ pour la loi $\circ$.
• $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}, \circ)$ est donc un groupe et les exemples suivants mettront en évidence la non commutativité de la loi $\circ$ dans ce groupe. ■

Exemples.

1. Soit P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\vec{P}$; soient I un point de P et α un réel différent de 0 et de 1.
Déterminons $f = t_{\vec{u}} \circ h(\mathrm{I}, \alpha)$ et $g = h(\mathrm{I}, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$.
D'après les théorèmes 2.5 et 2.6, l'application f (resp. g) est une application affine d'endomorphisme associé $\mathrm{Id}_E \circ h_\alpha$ (resp. $h_\alpha \circ \mathrm{Id}_E$) ; le réel α est différent de 1 ; les applications f et g sont donc des homothéties de $\mathcal{E}$ de rapport α.
Appelons J (resp. K) le centre de f (resp. g).
J est l'unique point de P invariant par f. Appelons J' l'image de J par $h(\mathrm{I}, \alpha)$.

On a donc :
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{h(\mathrm{I},\alpha)} & \mathcal{E} & \xrightarrow{t_{\vec{u}}} & \mathcal{E} \\ \mathrm{J} & \longmapsto & \mathrm{J}' & \longmapsto & \mathrm{J} \end{array}$$

et par suite :
$$\begin{aligned} (\mathrm{J} = f(\mathrm{J})) &\iff \left(\exists \mathrm{J}' \in \mathcal{E}, \left(\overrightarrow{\mathrm{IJ}'} = \alpha \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{J'J}} = \vec{u}\right)\right) \\ &\iff \left(\exists \mathrm{J}' \in \mathcal{E}, \left(\overrightarrow{\mathrm{IJ}'} = \alpha \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{IJ}} - \overrightarrow{\mathrm{IJ}'} = \vec{u}\right)\right) \\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{IJ}} - \alpha \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \vec{u}\right) \iff \left((1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \vec{u}\right) \end{aligned}$$
α est différent de 1 ; nous avons donc :
$$(\mathrm{J} = f(\mathrm{J})) \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{1-\alpha}\vec{u}\right).$$

Le point J est donc l'image du point I par la translation de vecteur $\frac{1}{1-\alpha}\vec{u}$.
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, de façon analogue, que le point K est l'image du point I par la translation de vecteur $\frac{\alpha}{1-\alpha}\vec{u}$.
Les points J et K sont donc distincts et par suite f n'est pas égale à g.

2. Soit P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.
Soient I et J deux points distincts de P et α et β deux réels différents de 0 et de 1.
Déterminons $f = h(\mathrm{I}, \alpha) \circ h(\mathrm{J}, \beta)$ et $g = h(\mathrm{J}, \beta) \circ h(\mathrm{I}, \alpha)$.
D'après les théorèmes 2.5 et 2.6, les applications f et g sont des applications affines d'endomorphisme associé : $h_\alpha \circ h_\beta = h_\beta \circ h_\alpha = h_{\alpha\beta}$.
Il y a donc deux cas à considérer : $\alpha\beta = 1$ et $\alpha\beta \neq 1$.

• $\alpha\beta = 1$

f et g sont deux translations. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs respectifs des translations f et g.
Déterminons le vecteur $\vec{u}$. On a : $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{P}$, $\overrightarrow{\mathrm{M}f(\mathrm{M})} = \vec{u}$.
Il est commode dans ce cas de prendre : $\mathrm{M} = \mathrm{J}$.
On a alors : $f(\mathrm{J}) = \left(h(\mathrm{I}, \alpha) \circ h(\mathrm{J}, \beta)\right)(\mathrm{J}) = h(\mathrm{I}, \alpha)(\mathrm{J}) = \mathrm{J}'$.
et par suite : $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{JJ}'} = \overrightarrow{\mathrm{IJ}'} - \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{IJ}} - \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = (\alpha - 1)\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'égalité : $\vec{v} = (\beta - 1)\overrightarrow{\mathrm{JI}}$.

• $\alpha\beta \neq 1$

f et g sont donc deux homothéties de rapport $\alpha\beta$. Soient K et L les centres respectifs de f et de g.

K est l'unique point invariant de f. Appelons K' l'image de K par $h(J, \beta)$.

On a donc : $\mathcal{E} \xrightarrow{h(J,\beta)} \mathcal{E} \xrightarrow{h(I,\alpha)} \mathcal{E}$

$K \longmapsto K' \longmapsto K.$

$$\text{On a : } \big(K = f(K)\big) \Longleftrightarrow \big(\exists K' \in \mathcal{E},\ (\overrightarrow{JK'} = \beta\,\overrightarrow{JK} \text{ et } \overrightarrow{IK} = \alpha\,\overrightarrow{IK'})\big)$$
$$\Longleftrightarrow \big(\exists K' \in \mathcal{E},\ (\overrightarrow{JK'} = \beta\,\overrightarrow{JK} \text{ et } \overrightarrow{IK} = \alpha\,\overrightarrow{IJ} + \alpha\,\overrightarrow{JK'})\big)$$
$$\Longleftrightarrow \big(\overrightarrow{IK} = \alpha\,\overrightarrow{IJ} + \alpha\beta\,\overrightarrow{JK}\big)$$
$$\Longleftrightarrow \big(\overrightarrow{IK} = \alpha\,\overrightarrow{IJ} + \alpha\beta\,(\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IJ})\big).$$

Le réel $\alpha\beta$ est différent de 1 ; nous avons donc :

$$\big(K = f(K)\big) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{IK} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}\,\overrightarrow{IJ}\right).$$

Le point K est donc l'image du point J par l'homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'égalité : $\overrightarrow{JL} = \dfrac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}\,\overrightarrow{JI}$.

3. Projections.

3.1 **DÉFINITION : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. On appelle projecteur de $\mathcal{E}$ toute application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que : $f \circ f = f$.**

Exemples.

1. L'identité de $\mathcal{E}$ et toute application constante de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ sont des projecteurs de $\mathcal{E}$.

2. Soient P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$ et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P. Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f est une application affine dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du point $f^2(M)$ dans $\mathcal{R}$ sont :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}}{2} + \dfrac{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}}{2} \\[2ex] \dfrac{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}}{2} + \dfrac{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{pmatrix}.$$

L'application f est donc un projecteur de P.

D'autre part, on a l'égalité : $A^2 = A$; l'endomorphisme associé φ est donc un projecteur de $\vec{P}$.

Propriétés.

3.2 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f un projecteur de $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ.

✗ **P1** φ est un projecteur de E ; c'est la projection vectorielle sur Im φ de direction Ker φ.

Démonstration :
D'après le théorème 1.7, l'endomorphisme associé à $f \circ f$ est $\varphi \circ \varphi$. On a donc $\varphi \circ \varphi = \varphi$. ■

Remarque : La réciproque est fausse. Il existe des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est un projecteur de E et qui ne sont pas des projecteurs de $\mathcal{E}$. Un exemple de telles applications est étudié dans l'exercice n° 24.

P2 $\forall M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{M f(M)} \in \operatorname{Ker} \varphi$

Démonstration :
$\forall M \in \mathcal{E}, \quad \varphi(\overrightarrow{Mf(M)}) = \overrightarrow{f(M) f^2(M)} = \overrightarrow{f(M) f(M)} = \vec{0}$. ■

P3 L'image $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ par f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction Im φ.

Démonstration :
Soit A un point de $\mathcal{E}$. L'espace affine $\mathcal{E}$ peut être considéré comme le sous-espace affine passant par A et de direction E; on a: $\mathcal{E} = \mathcal{V}(A, E)$.
D'après le théorème 1.3, on a alors :
$f(\mathcal{E}) = \mathcal{V}(f(A), \varphi(E)) = \mathcal{V}(f(A), \operatorname{Im} \varphi)$.
$f(\mathcal{E})$ est donc un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction Im φ. ■

✗ **P4** L'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est égal à l'image $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ par f.

Démonstration :
- Tout point M' de $\mathcal{E}'$ est invariant par f.

$$(M' \in \mathcal{E}') \Longleftrightarrow (\exists M \in \mathcal{E}, \quad M' = f(M)) \Longrightarrow (\exists M \in \mathcal{E}, \quad f(M') = f^2(M) = f(M)) \Longrightarrow (f(M') = M').$$

- Tout point M invariant par f appartient à $\mathcal{E}'$.

$$(M = f(M) \quad \text{et} \quad f(M) \in \mathcal{E}') \Longrightarrow (M \in \mathcal{E}'). \ ■$$

P5 $\forall M \in \mathcal{E}, \quad \{f(M)\} = f(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}(M, \operatorname{Ker} \varphi)$

Démonstration :
Par définition de $f(\mathcal{E})$, le point $f(M)$ appartient à $f(\mathcal{E})$; d'après P_2, le point $f(M)$ appartient à $\mathcal{V}(M, \operatorname{Ker} \varphi)$. Le point $f(M)$ appartient donc à $f(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}(M, \operatorname{Ker} \varphi)$.
D'autre part, $f(\mathcal{E})$ et $\mathcal{V}(M, \operatorname{Ker} \varphi)$ ont pour directions respectives Im φ et Ker φ. D'après le théorème 3.2 du chapitre 5, Im φ et Ker φ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. L'intersection $f(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}(M, \operatorname{Ker} \varphi)$ est donc un singleton. ■

Remarque : A tout projecteur f de $\mathcal{E}$ sont donc associés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires Ker φ et Im φ de E, et le sous-espace affine $f(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$, de direction Im φ.

L'étude de la réciproque nous conduit au théorème suivant :

3.3 **THÉORÈME : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E′.**
Il existe un unique projecteur f de $\mathcal{E}$, d'endomorphisme associé φ, qui vérifie les deux propriétés suivantes :
- **l'image de $\mathcal{E}$ par f est égale à $\mathcal{E}'$;**
- **φ est la projection vectorielle sur E′ de direction E″.**

Démonstration :
Unicité. Si f et g sont deux tels projecteurs, alors les deux applications f et g ont le même endomorphisme associé φ.
D'après la propriété P_5 du paragraphe 3.2, on a : $\forall M \in \mathcal{E}$,
$\{f(M)\} = f(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}(M, \text{Ker}\,\varphi) = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}(M, E'') = g(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}(M, \text{Ker}\,\varphi) = \{g(M)\}$;
d'où : $\forall M \in \mathcal{E}, \quad f(M) = g(M)$.
Existence. Les sous-espaces vectoriels E′ et E″ sont supplémentaires dans E; pour tout point M de $\mathcal{E}$, l'intersection $\mathcal{E}' \cap \mathcal{V}(M, E'')$ est donc un singleton. Considérons l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M, associe le point d'intersection de $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{V}(M, E'')$.
- Démontrons d'abord l'égalité $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$.

De la définition de f, il résulte que l'on a : $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}'$. On a :
$(M \in \mathcal{E}') \Longrightarrow (\mathcal{V}(M, E'') \cap \mathcal{E}' = \{M\}) \Longrightarrow (f(M) = M) \Longrightarrow (M \in f(\mathcal{E}))$.
On a donc : $\mathcal{E}' \subset f(\mathcal{E})$.
Des propositions : $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}' \subset f(\mathcal{E})$, il résulte : $\mathcal{E}' = f(\mathcal{E})$.
- Démontrons ensuite que f est une application affine dont l'endomorphisme associé est la projection vectorielle sur E′ de direction E″.

Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$. Nous avons :
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{Mf(M)} + \overrightarrow{f(M)f(N)} + \overrightarrow{f(N)N}$.
De la définition de f, il résulte que les vecteurs $\overrightarrow{Mf(M)}$ et $\overrightarrow{Nf(N)}$ appartiennent à E″ et que le vecteur $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ appartient à E′.
Posons $\vec{u}' = \overrightarrow{f(M)f(N)}$ et $\vec{u}'' = \overrightarrow{Mf(M)} + \overrightarrow{f(N)N} = \overrightarrow{Mf(M)} - \overrightarrow{Nf(N)}$.
On a : $\vec{u}' \in E'$, $\vec{u}'' \in E''$ et $\overrightarrow{MN} = \vec{u}' + \vec{u}''$.
Le vecteur $\vec{u}'$ est donc l'image du vecteur $\overrightarrow{MN}$ par la projection vectorielle φ sur E′ de direction E″.
On a donc : $\vec{u}' = \varphi(\overrightarrow{MN})$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.
- Démontrons enfin que l'on a : $f \circ f = f$.

Soient M un point quelconque de $\mathcal{E}$ et M′ son image par f. On a :
$(M' \in \mathcal{E}' \text{ et } \{f(M')\} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}(M', E'')) \Longrightarrow (f(M') = M')$
$\Longrightarrow ((f \circ f)(M) = f(M))$. ■

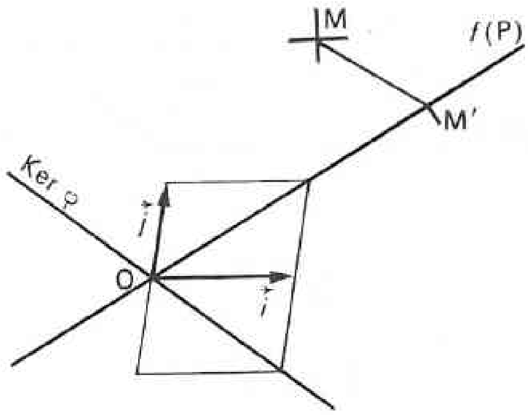
3.4 **DÉFINITION : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, et $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E'.**
On appelle projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E'' l'unique projecteur de $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point d'intersection de $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{V}$(M, E'').

Exemples.

1. L'identité de $\mathcal{E}$ est une application affine associée à l'identité de E, c'est-à-dire à la projection vectorielle sur E de direction $\{\vec{0}\}$.
L'identité de $\mathcal{E}$ est donc la projection affine sur $\mathcal{E}$, de direction $\{\vec{0}\}$.

2. Soient A un point de $\mathcal{E}$ et f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point A. L'application f est la projection affine sur $\{A\}$, de direction E.

3. L'application f étudiée dans l'exemple 2 du paragraphe 3.1 page 154 est la projection affine sur f(P), de direction Ker φ. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propriétés suivantes :
f(P) est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j}$;
Ker φ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.



Cas d'un espace affine de dimension 1, 2 ou 3.

3.5 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E, de dimension 1, 2 ou 3. Déterminons tous les projecteurs de $\mathcal{E}$. Pour cela, utilisons les résultats du paragraphe 3.5 du chapitre 5.

dim $\mathcal{E} = 1$.

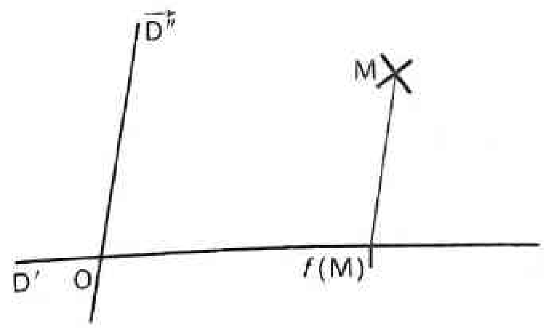
Il y a deux types de projecteurs de $\mathcal{E}$:

- la projection affine sur $\mathcal{E}$, de direction $\{\vec{0}\}$, c'est-à-dire l'identité de $\mathcal{E}$;
- les projections affines sur un singleton, de direction E, c'est-à-dire les applications constantes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

dim $\mathcal{E} = 2$.

Il y a trois types de projecteurs de $\mathcal{E}$:

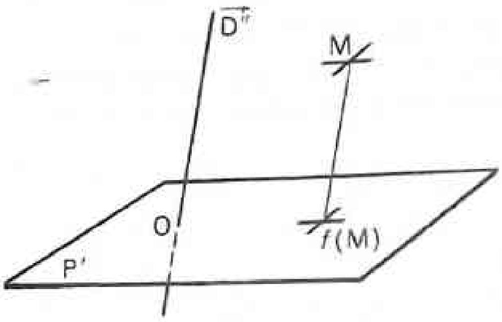
- l'identité de $\mathcal{E}$;
- les projections affines sur une droite affine D', de direction une droite vectorielle $\vec{D''}$ supplémentaire de $\vec{D'}$;
- les applications constantes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

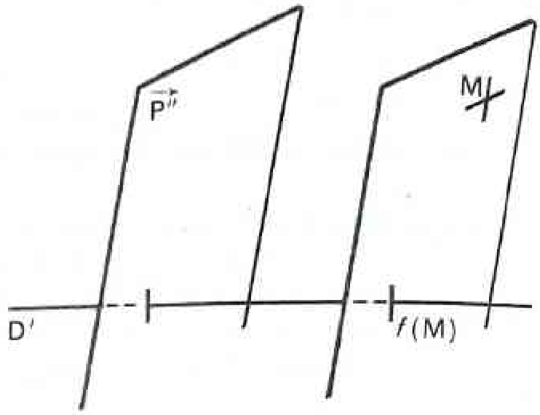


dim $\mathcal{E} = 3$.

Il y a quatre types de projecteurs de $\mathcal{E}$:

- l'identité de $\mathcal{E}$;
- les projections affines sur un plan affine P', de direction une droite vectorielle $\vec{D''}$ supplémentaire de $\vec{P'}$;
- les projections affines sur une droite affine D', de direction un plan vectoriel $\vec{P''}$ supplémentaire de $\vec{D'}$;
- les applications constantes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.





Exemple.

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E de dimension 3 et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

Soient P le plan d'équation $2x + y - z = 0$ et $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les sous-espaces vectoriels $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont supplémentaires dans E.

Soit f la projection affine sur P de direction $\vec{D}$. Déterminons les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de l'image M' par f d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

On a : $(M' = f(M)) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} M' \in P \\ \text{et} \\ \overrightarrow{MM'} \in \vec{D} \end{cases} \right)$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} 2x' + y' - z' = 0 \\ \text{et} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x' - x = \lambda, y' - y = \lambda, z' - z = 0) \end{cases} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} 2(\lambda + x) + (\lambda + y) - z = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x' = \lambda + x, y' = \lambda + y, z' = z) \end{cases} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \lambda = \dfrac{-2x - y + z}{3} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x' = \lambda + x, y' = \lambda + y, z' = z) \end{cases} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(x' = \frac{x - y + z}{3}, \ y' = \frac{-2x + 2y + z}{3}, \ z' = z \right).$$

4. Symétries.

4.1 **DÉFINITION : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. On appelle involution affine de $\mathcal{E}$ toute application affine involutive de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire toute application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ satisfaisant à : $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.**

<u>Remarque :</u> Toute involution affine de $\mathcal{E}$ est donc une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

preuve: $f \circ f = Id$ posons $f = g$ on a $g \circ f = f \circ g = Id \Rightarrow f = g^{-1} \Rightarrow f = f^{-1}$

Exemples.

1. L'identité de $\mathcal{E}$ est une involution affine de $\mathcal{E}$.

2. Soient P un plan affine associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$ et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P.

Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 + 2x + y \\ -3 - 3x - 2y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f est une application affine dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du point $f^2(M)$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 + 2(1 + 2x + y) + (-3 - 3x - 2y) \\ -3 - 3(1 + 2x + y) - 2(-3 - 3x - 2y) \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

f est donc une involution affine de P ; d'après l'exemple du paragraphe 4.4 du chapitre 5, l'endomorphisme associé φ est un automorphisme involutif de $\vec{P}$.

Propriétés.

4.2 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f une involution affine de $\mathcal{E}$, d'endomorphisme associé φ.

P1 φ est un automorphisme involutif de E.

Démonstration :
D'après le théorème 1.7, l'endomorphisme associé à $f \circ f$ est $\varphi \circ \varphi$. L'endomorphisme associé à $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est Id_E. On a donc : $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$. ■

<u>Remarques :</u> 1. La réciproque est fausse. Il existe des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est un automorphisme involutif de E et qui ne sont pas des involutions. Un exemple de telles applications est donné dans l'exercice n° 25.
2. D'après le paragraphe 4 du chapitre 5, nous savons que φ est la symétrie vectorielle par rapport au sous-espace vectoriel E' des vecteurs invariants par φ, de direction le sous-espace vectoriel E″ des vecteurs changés en leur opposé par φ.

Nous conserverons ces notations dans la suite.

P2 $\forall M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{Mf(M)} \in E''$

Démonstration :
$\forall M \in \mathcal{E}, \quad \varphi(\overrightarrow{Mf(M)}) = \overrightarrow{f(M)\,f^2(M)} = \overrightarrow{f(M)\,M} = -\overrightarrow{Mf(M)}$. ■

P3 Soit M un point de $\mathcal{E}$.
Le milieu du bipoint $(M, f(M))$ est invariant par f.

Démonstration :
Soit I le milieu du bipoint $(M, f(M))$. L'application f est affine ; de la remarque 1 du paragraphe 1.5, il résulte que $f(I)$ est le milieu du bipoint $(f(M), f^2(M))$, c'est-à-dire du bipoint $(f(M), M)$. On a donc : $f(I) = I$. ■

P4 L'ensemble $\mathcal{E}'$ des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction E'.

Démonstration :
De la propriété P_3, il résulte que $\mathcal{E}'$ n'est pas vide.
Soient donc I un point de $\mathcal{E}'$ et M un point quelconque de $\mathcal{E}'$. On a :

$$(M \in \mathcal{E}') \iff (f(M) = M) \iff (\overrightarrow{If(M)} = \overrightarrow{IM}) \iff (\overrightarrow{f(I)\,f(M)} = \overrightarrow{IM})$$
$$\iff (\varphi(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IM}) \iff (\overrightarrow{IM} \in E') \iff (M \in \mathcal{V}(I, E')).$$ ■

P5 Soient $\mathcal{E}'$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f et p la projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E". On a : $\forall M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{Mf(M)} = 2\,\overrightarrow{Mp(M)}$.

Démonstration :
Par définition de p, on a : $\{p(M)\} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}(M, E'')$.
Soit I le milieu du bipoint $(M, f(M))$. Des propriétés P_2 et P_3, il résulte que I appartient à $\mathcal{V}(M, E'')$ et à $\mathcal{E}'$.
On a donc : $I = p(M)$ et, par suite, $\overrightarrow{Mf(M)} = 2\,\overrightarrow{Mp(M)}$. ■

<u>Remarque</u> : A toute involution affine de $\mathcal{E}$, sont donc associés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E' et E" de E, et le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ de direction E'.

L'étude de la réciproque nous conduit au théorème suivant :

4.3 **THÉORÈME : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient E' et E" deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction E'.**
Il existe une unique involution affine de $\mathcal{E}$, d'endomorphisme associé φ, qui vérifie les deux propriétés suivantes :
- **$\mathcal{E}'$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f ;**
- **φ est la symétrie vectorielle par rapport à E', de direction E".**

Démonstration :

Soit p la projection affine sur $\mathcal{E}'$, de direction E''.

Unicité. Si f et f' sont deux telles involutions affines de $\mathcal{E}$, alors, de la propriété P_5, il résulte que l'on a :

$\forall M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{Mf(M)} = 2\,\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{Mf'(M)}.$

On a donc : $f = f'$.

Existence. Considérons l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M, associe le point M' défini par : $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{Mp(M)}$.

• Démontrons d'abord que $\mathcal{E}'$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f. On a :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad (f(M) = M) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{0}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{Mp(M)} = \vec{0})$$
$$\Longleftrightarrow (M = p(M)) \Longleftrightarrow (M \in \mathcal{E}').$$

• Démontrons ensuite que f est une application affine d'endomorphisme associé la symétrie vectorielle φ par rapport à E', de direction E''.

Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$. On a :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(N)} = 2\overrightarrow{p(M)M} + (2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MN}) + 2\overrightarrow{Np(N)}$$
$$= 2\overrightarrow{p(M)\,p(N)} - \overrightarrow{MN}.$$

Soit ψ la projection vectorielle sur E', de direction E''. On a alors :

$\overrightarrow{f(M)f(N)} = 2\psi(\overrightarrow{MN}) - \overrightarrow{MN} = (2\psi - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{MN}).$

D'après le paragraphe 4 du chapitre 5, nous savons que $2\psi - \mathrm{Id}_E$ est la symétrie vectorielle par rapport à E', de direction E''.

• Démontrons enfin que f est involutive.

Soient M un point quelconque de $\mathcal{E}$ et M' son image par f. Par définition de f, le point $p(M)$ est le milieu de (M, M').

Déterminons $f^2(M)$, c'est-à-dire $f(M')$. On a :

$\overrightarrow{M'f(M')} = 2\,\overrightarrow{M'p(M')}.$

De la définition de p, il résulte que l'on a :

$\{p(M')\} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}(M', E'') = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}(M, E'') = \{p(M)\}.$

On a donc : $\overrightarrow{M'f(M')} = 2\,\overrightarrow{M'p(M)}$; le point $p(M)$ est donc le milieu du bipoint $(M', f(M'))$. On a donc : $f(M') = M$. ■

4.4 **DÉFINITION : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E', et p la projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E''.**
On appelle symétrie affine par rapport à $\mathcal{E}'$, de direction E'', l'unique involution affine de $\mathcal{E}$ qui, à tout point M, associe le point M' tel que $p(M)$ soit le milieu du bipoint (M, M').

Les résultats des paragraphes précédents nous permettent d'énoncer le théorème :

4.5 **THÉORÈME : L'ensemble des involutions affines de $\mathcal{E}$ est l'ensemble des symétries affines de $\mathcal{E}$.**

Exemples.

Reprenons les exemples du paragraphe 4.1.

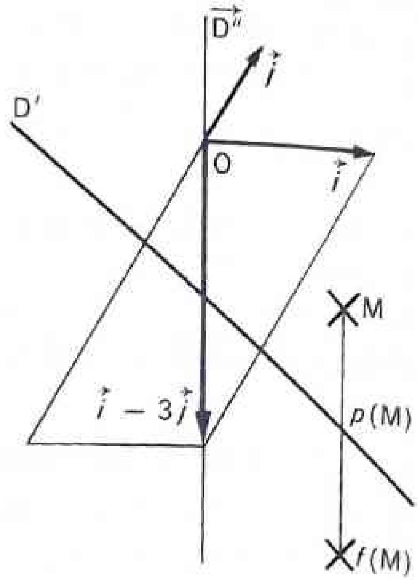
1. L'identité de $\mathcal{E}$ est la symétrie affine par rapport à $\mathcal{E}$, de direction $\{\vec{0}\}$
2. Cherchons les points de P invariants par f. On a :

$$(f(M) = M) \iff \left(\begin{pmatrix} 1 + 2x + y \\ -3 - 3x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$\iff \left(\begin{cases} 1 + 2x + y = x \\ -3 - 3x - 2y = y \end{cases}\right)$$
$$\iff (x + y = -1).$$

L'ensemble des points de P invariants par f est donc la droite D' d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.

D'autre part, dans le paragraphe 4.4 du chapitre 5, nous avons vu que l'ensemble des vecteurs de $\vec{P}$ changés en leur opposé par φ est la droite vectorielle $\overrightarrow{D''}$ engendrée par le vecteur $\vec{i} - 3\vec{j}$.

L'application f est donc la symétrie affine par rapport à D', de direction $\overrightarrow{D''}$.



Cas d'un espace affine de dimension 1, 2 ou 3.

4.6 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E, de dimension 1, 2 ou 3. Déterminons toutes les involutions affines de $\mathcal{E}$. Pour cela, utilisons les résultats du paragraphe 4.5 du chapitre 5.

<u>dim $\mathcal{E} = 1$.</u>

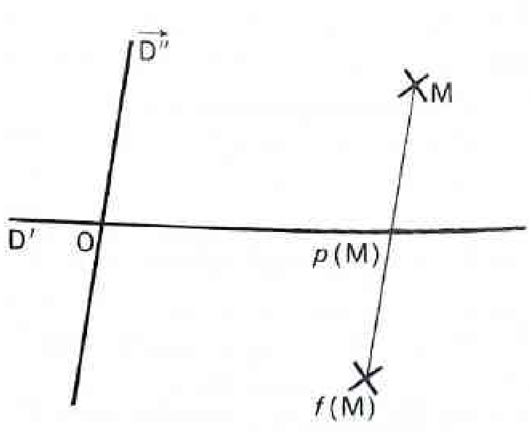
Il y a deux types d'involutions affines de $\mathcal{E}$:

- la symétrie affine par rapport à $\mathcal{E}$, de direction $\{\vec{0}\}$, c'est-à-dire l'identité de $\mathcal{E}$;
- les symétries affines par rapport à un singleton, de direction $\mathcal{E}$, appelées **symétries par rapport à un point,** ou encore **symétries centrales.**

<u>dim $\mathcal{E} = 2$.</u>

Il y a trois types d'involutions affines de $\mathcal{E}$:

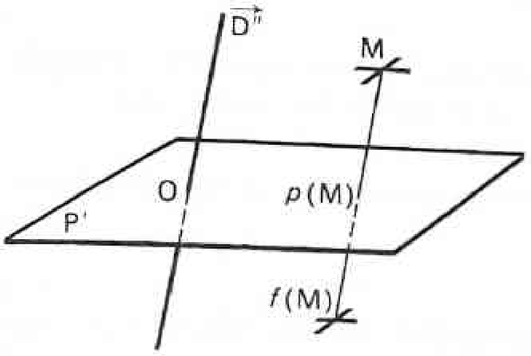
- l'identité de $\mathcal{E}$;
- les symétries affines par rapport à une droite affine D', de direction une droite vectorielle $\overrightarrow{D''}$ supplémentaire de $\overrightarrow{D'}$;
- les symétries par rapport à un point, ou symétries centrales.

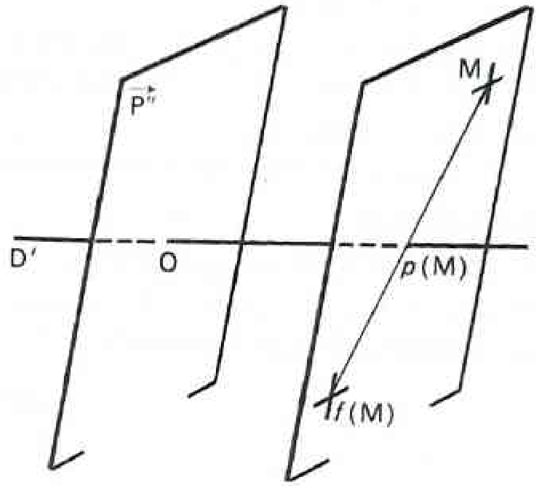


dim $\mathcal{E} = 3$.

Il y a quatre types d'involutions affines de $\mathcal{E}$:

- l'identité de $\mathcal{E}$;
- les symétries affines par rapport à un plan affine P', de direction une droite vectorielle $\vec{D''}$ supplémentaire de $\vec{P'}$;
- les symétries affines par rapport à une droite affine D', de direction un plan vectoriel $\vec{P''}$ supplémentaire de $\vec{D'}$;
- les symétries par rapport à un point ou symétries centrales.





Exemple.

Reprenons l'exemple du paragraphe 3.5. Soit g la symétrie affine par rapport au plan P d'équation $2x + y - z = 0$, de direction la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$. Déterminons les coordonnées $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ de l'image M'' par g d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

Nous savons que le point M' image de M par la projection affine f sur P de direction $\vec{D}$ est le milieu du bipoint (M, M'').

Les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de M' sont respectivement égales à :

$$x' = \frac{x - y + z}{3}; \qquad y' = \frac{-2x + 2y + z}{3}; \qquad z' = z.$$

On a donc :

$$(M'' = g(M)) \iff \left(\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x + x''}{2} = x' \\ \dfrac{y + y''}{2} = y' \\ \dfrac{z + z''}{2} = z' \end{array} \right. \right) \iff \left(\left\{ \begin{array}{l} x'' = 2x' - x \\ y'' = 2y' - y \\ z'' = 2z' - z \end{array} \right. \right)$$

$$\iff \left(x'' = \frac{-x - 2y + 2z}{3}, \quad y'' = \frac{-4x + y + 2z}{3}, \quad z'' = z \right).$$

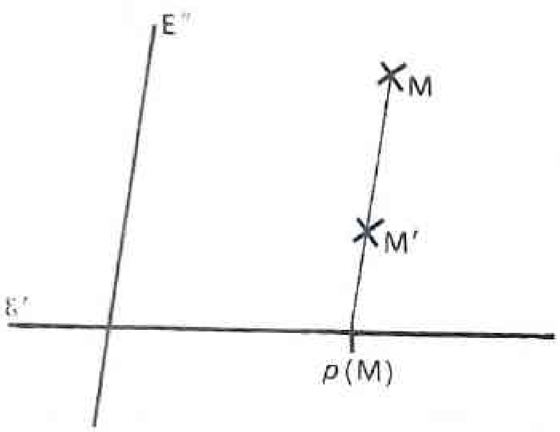
5. Affinités.

Dans ce paragraphe, nous définissons des applications affines qui généralisent les symétries affines. Nous en donnerons seulement quelques propriétés simples.

5.1 **DÉFINITION : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E. Soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E′, α un réel et p la projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E″.**
On appelle affinité par rapport à $\mathcal{E}'$, de direction E″ et de rapport α, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M, associe le point M′ défini par :
$\overrightarrow{M'p(M)} = \alpha\,\overrightarrow{Mp(M)}$.

Remarques :

1. Toute affinité de rapport 1 est l'identité de $\mathcal{E}$.
2. L'affinité par rapport à $\mathcal{E}'$, de direction E″ et de rapport -1 est la symétrie affine par rapport à $\mathcal{E}'$ de direction E″.



Propriétés.

5.2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E ; soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E′ et α un réel. Soient p la projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E″ et f l'affinité par rapport à $\mathcal{E}'$, de direction E″ et de rapport α.

P1	f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$

Démonstration :
Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$, et M′ et N′ leurs images respectives par f. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'p(M)} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + \overrightarrow{p(N)\,N'}\\ &= \alpha\big(\overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(N)\,N}\big) + \overrightarrow{p(M)\,p(N)}\\ &= \alpha\big(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(N)\,N} + \overrightarrow{NM}\big) + \overrightarrow{p(M)\,p(N)}\\ &= \alpha\big(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{p(M)\,p(N)}\big) + \overrightarrow{p(M)\,p(N)}.\end{aligned}$$

Soit π l'endomorphisme de E associé à p. On a :

$$\overrightarrow{M'N'} = \alpha\left(\mathrm{Id}_E\left(\overrightarrow{MN}\right) - \pi\left(\overrightarrow{MN}\right)\right) + \pi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \left(\alpha\,\mathrm{Id}_E + (1-\alpha)\,\pi\right)\left(\overrightarrow{MN}\right).$$

L'application f a donc pour endomorphisme associé $\alpha\,\mathrm{Id}_E + (1-\alpha)\,\pi$. ■

P2 Si α est différent de 1, l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est égal à $\mathcal{E}'$.

Démonstration :

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$. On a :

$$\left(M = f(M)\right) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{Mp(M)} = \alpha\,\overrightarrow{Mp(M)}\right) \Longleftrightarrow \left((1-\alpha)\,\overrightarrow{Mp(M)} = \vec{0}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{Mp(M)} = \vec{0}\right) \Longleftrightarrow \left(M = p(M)\right) \Longleftrightarrow \left(M \in \mathcal{E}'\right). \ ■$$

EXERCICES

Dans les exercices de ce chapitre, on désigne par E un espace vectoriel réel, par $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E. De même on désigne par E_2 (resp. E_3) un espace vectoriel réel de dimension 2 (resp. 3) et par $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$) un espace affine associé à E_2 (resp. E_3). On désigne par $(\vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) une base de E_2 (resp. E_3) et par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) un repère cartésien de $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$). Toutes les composantes (resp. coordonnées) seront données dans cette base (resp. ce repère).

Généralités sur les applications affines.

$\varphi(A) = f(B) \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{0} \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Rightarrow A = B$

1 Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ.

1° Démontrer que f est bijective si et seulement si φ est un automorphisme de E.

2° Démontrer que l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est un groupe pour la composition des applications.

2 Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et A', B', C' trois points de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'application affine f de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ telle que l'on ait :
$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

$f : M(x,y) \longmapsto M' \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}, \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$

3 Soient A, B, C, D quatre points de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées respectives :

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

et A', B', C', D' quatre points de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées respectives :

$\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\4\\-4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x' = ax+by+cz+d \\ y' = a'x+b'y+c'z+d' \\ z' = a''x+b''y+c''z+d'' \end{cases}$

Déterminer l'application affine f de $\mathcal{E}_3$ telle que l'on ait :
$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$.

4 On considère l'application f de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = 4x + 2. \end{cases}$ $\begin{cases} y = x'-1 \\ x = \frac{y'-2}{4} \end{cases}$

1° Démontrer que f est une application affine bijective. Quelle est la matrice de l'endomorphisme associé à f? $M(\vec{f}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

2° Existe-t-il des points invariants par f? $\Omega(-1,-2)$

3° Soit D la droite d'équation : $8x - 5y + 1 = 0$. $8\left(\frac{y'-2}{4}\right) - 5(x'-1) + 1 = 0$
Déterminer l'image de la droite D par f.

4° Démontrer qu'il existe deux droites D_1 et D_2 globalement invariantes par f et donner pour chacune de ces droites une équation cartésienne.

$ax+by+c=0 \Rightarrow ax'+by'+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$?

5 Soit f l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y. \end{cases}$ $f^{-1} \begin{cases} x = -x'+y' \\ y = -2x'+y' \end{cases}$

1° Démontrer que f est une bijection affine. Admet-elle des points invariants? $O(0,0)$

2° Soit s la symétrie de centre O ; on note f^{-1} l'application réciproque de f. $S_O \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$
Démontrer que l'on a : $f^{-1} = f \circ s = s \circ f$. $f^{-1} = f \circ s \Rightarrow s \circ f = f^{-1}$

3° On pose : $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$, $f^4 = f \circ f^3$.
Démontrer que l'ensemble constitué par f, f^2, f^3 et f^4 est un groupe commutatif pour la composition des applications. Donner la table de cette loi. $G = \{id, f, f^2, f^3, f^4\}$

4° Étudier l'image par f d'une droite D d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.
Existe-t-il des droites de $\mathcal{E}_2$ qui sont parallèles à leur image par f? non

6 Soit (λ, μ) un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On considère l'application $T_{\lambda,\mu}$ de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda x + \mu y. \end{cases}$

A) 1° Démontrer que $T_{\lambda,\mu}$ est une bijection affine de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{E}_2$.

2° Peut-on choisir λ et μ de façon que $T_{\lambda,\mu}$ soit involutive? $\mu = -1$; $\lambda \in \mathbb{R}$

3° Existe-t-il des points de $\mathcal{E}_2$ invariants par $T_{\lambda,\mu}$?

4° Déterminer l'ensemble F défini par : $F = \{M \in \mathcal{E}_2 \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OT_{\lambda,\mu}(M)} = a\,\overrightarrow{OM}\}$.
On distinguera les deux cas suivants : $\mu = 1$, $\mu \neq 1$.

B) On considère l'ensemble G de toutes les applications $T_{\lambda,\mu}$ pour (λ, μ) élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

1° Démontrer que $(G, \circ)$ est un groupe.

2° Démontrer que ce groupe n'est pas commutatif, mais qu'à une application donnée $T_{\lambda,\mu}$, on peut associer une infinité d'applications $T_{\lambda',\mu'}$ telles que l'on ait : $T_{\lambda,\mu} \circ T_{\lambda',\mu'} = T_{\lambda',\mu'} \circ T_{\lambda,\mu}$. Déterminer la relation qui lie alors les réels λ, μ, λ', μ'.

7 Soit k un nombre réel. On désigne par f_k l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par :

$$\begin{cases} 2x' = (1+k)\,x + (1-k)\,y \\ 2y' = (1-k)\,x + (1+k)\,y. \end{cases}$$

1° L'application f_k est-elle une bijection affine de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{E}_2$? Si f_k est bijective, définir son application réciproque f_k^{-1}.

2° Déterminer les points de $\mathcal{E}_2$ invariants par f_k. Discuter.

3° Soit F l'ensemble des applications f_k lorsque k décrit l'ensemble de réels $\mathbb{R}^*$. Démontrer que $(F, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

8 Soit f l'application de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ définies par :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = x + 2z \\ z' = 2y + z. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une application affine de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$. L'application f est-elle bijective ? Déterminer l'ensemble $f(\mathcal{E}_3)$, image de $\mathcal{E}_3$ par f. $f(\mathcal{E}_3)=\{M(x,y,z) / x-y-z=0\}$

2° Soit M′ un point de $\mathcal{E}_3$. Déterminer, si elle existe, l'image réciproque $f^{-1}(\text{M}')$ du point M′ par f.

3° Existe-t-il des points M tels que les trois points O, M et M′ soient alignés ? Si oui, définir les sous-ensembles de $\mathcal{E}_3$ ainsi trouvés.

9 Soit f l'application de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ définies par :

$$\begin{cases} x' = -y + 5 \\ y' = x - 5 \\ z' = -x + y + z + 5. \end{cases}$$

$\det f = 1$

1° Démontrer que f est une application affine. Est-elle bijective ?

2° Déterminer l'ensemble des points invariants par f. $\{(5;0;z) / z \in \mathbb{R}\}$

3° Soit P un plan de $\mathcal{E}_3$ d'équation cartésienne : $ux + vy + wz + h = 0$.
Déterminer l'image par f du plan P ; on en donnera une détermination analytique.

4° Existe-t-il des plans P qui soient confondus avec leur image $f(\text{P})$? Déterminer une équation cartésienne de tels plans.

10 Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}_3$ et J le milieu du bipoint (A, B).
On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}_3$ telles que l'on ait :
$f(\text{A}) = \text{B}, \quad f(\text{B}) = \text{A}, \quad f(\text{C}) = \text{C}.$

1° $(\mathcal{F}, \circ)$ est-il un groupe ?

2° Soit f un élément de $\mathcal{F}$. Démontrer que la droite (JC) est invariante point par point par f et que la droite (AB) est globalement invariante par f.

3° On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{\text{JA}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\text{JC}}$. Soit $(\text{J}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}_3$. Déterminer analytiquement dans ce repère un élément quelconque f de $\mathcal{F}$.

11 Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathcal{E}$ par :
$\forall (\text{A}, \text{B}) \in \mathcal{E}^2, \quad \big((\text{A}\,\mathcal{R}\,\text{B}) \Longleftrightarrow (f(\text{A}) = f(\text{B}))\big).$

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{E}$.

2° Démontrer que chaque classe d'équivalence est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Quelle est la direction de ce sous-espace affine ? En déduire que toutes les classes d'équivalence ont la même dimension et sont parallèles.

※ **12** Il a été démontré que toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ " conserve le barycentre ".
Réciproquement, soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui " conserve le barycentre ".
Démontrer que f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Ensemble $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ des homothéties-translations.

13 Soient Ax et By deux demi-droites de $\mathcal{E}$.
Déterminer l'ensemble des centres des homothéties f de $\mathcal{E}$ telles que l'image de Ax par f soit By.

14 Soient $[A, B]$ et $[C, D]$ deux segments de $\mathcal{E}$.
Déterminer l'ensemble des centres des homothéties f de $\mathcal{E}$ telles que l'image de $[A, B]$ par f soit $[C, D]$. Discuter.

※ **15** On suppose que $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension finie n supérieure ou égale à 2. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
Démontrer que f est une homothétie ou une translation si et seulement si toute droite de $\mathcal{E}$ a pour image par f une droite parallèle.

16 Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}_2$ non alignés et A', B', C' trois points de $\mathcal{E}_2$ tels que les droites (AB) et (A'B') (resp. (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A')) soient parallèles. Démontrer qu'il existe un unique élément f de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ tel que l'on ait :
$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

17 Soient P un plan de $\mathcal{E}_3$, et A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}_3$ tels qu'aucun n'appartienne au plan P et qu'aucune des droites (BC), (CA), (AB) ne soit parallèle au plan P. Soient alors M_1 (resp. M_2, M_3) le point d'intersection de la droite (AB) (resp. (BC), (CA)) avec le plan P et λ_1 (resp. λ_2, λ_3) le nombre réel tel que l'on ait :
$\overrightarrow{M_1A} = \lambda_1 \overrightarrow{M_1B}$ (resp. $\overrightarrow{M_2B} = \lambda_2 \overrightarrow{M_2C}$, $\overrightarrow{M_3C} = \lambda_3 \overrightarrow{M_3A}$).
Démontrer que l'on a : $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

18 Soient A un point de l'espace affine $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E. Soit λ un réel non nul. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport λ et par t la translation de vecteur $\vec{u}$.
1° Déterminer la nature de l'application $h^{-1} \circ t \circ h$ et préciser les éléments qui la définissent.
2° Déterminer la nature de l'application $t^{-1} \circ h \circ t$.

19 Soient A un point de l'espace affine $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel E. On désigne par B le point de $\mathcal{E}$ défini par : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Soient k et k' deux réels non nuls tels que l'on ait : $kk' \neq 1$.

On désigne par $T_{\vec{u}}$ la translation de $\mathcal{E}$ de vecteur $\vec{u}$, par $H(A, k)$ $\left(\text{resp. } H\left(B, \frac{1}{k}\right), H(B, k')\right)$ l'homothétie de centre A (resp. B) et de rapport k $\left(\text{resp } \frac{1}{k}, k'\right)$.
Déterminer la nature des applications f et g définies par :
$f = H\left(B, \frac{1}{k}\right) \circ T_{\vec{u}} \circ H(A, k)$; $\quad g = H(B, k') \circ T_{\vec{u}} \circ H(A, k)$.
Préciser les éléments qui servent à les définir.

20 Soient A, B, C, D quatre points de $\mathcal{E}_3$ tels que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ soit un repère cartésien de $\mathcal{E}_3$. A tout point M de $\mathcal{E}_3$, on associe le point S défini par :
$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
1° Démontrer que la droite (MS) passe par l'isobarycentre G des points A, B, C, D.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GS}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GM}$.
2° Quel est l'ensemble P' décrit par le point S lorsque le point M décrit un plan P de $\mathcal{E}_3$?

Soit F le point de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. On suppose que P est le plan de $\mathcal{E}_3$ parallèle au plan (BCD) et passant par F.
Donner une équation cartésienne de chacun des plans P et P'.

21 Soient A et B les points de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$
Soient k_1 et k_2 deux nombres réels non nuls.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$. On désigne par M_1 l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport k_1, par M_2 l'image de M par l'homothétie de centre B et de rapport k_2, enfin par M' l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.
Soit f l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M, associe le point M'.
1° L'application f admet-elle des points invariants ?
2° Démontrer que, si k_1 est différent de k_2, l'application f est soit une translation soit une homothétie, dont on précisera les éléments.
Étudier le cas particulier : $k_1 = k_2$.

22 Soient deux points distincts A et B de l'espace affine $\mathcal{E}$. A tout couple (α, β) de nombres réels est associée une application T de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie de la manière suivante : à tout point M de $\mathcal{E}$, on associe le point M' défini par :
$\overrightarrow{MM'} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB}$.
On désigne par T' l'application associée au couple (α', β').
1° Soit M un point de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à la droite (AB). Démontrer que, si (α, β) et (α', β') sont des couples distincts, les images par les applications T et T' du point M sont distinctes. En déduire que le couple (α, β) est caractéristique de l'application T.
2° A quelle condition l'application T est-elle bijective ? Étudier le cas où $\alpha + \beta$ est égal à 1.
3° Existe-t-il des applications T involutives ? Si oui, quels sont les couples (α, β) qui les définissent ?
Dans les questions 4, 5 et 6 on suppose que l'on a : $\alpha + \beta \neq 1$.
4° Existe-t-il des points invariants par T ? A quelle condition y en a-t-il un et un seul ?
5° Dans le cas où il y a un seul point invariant J, exprimer $\overrightarrow{JM'}$ en fonction de $\overrightarrow{JM}$. Quelle est la nature de T ? Est-il possible que T soit une symétrie centrale ?
6° Dans le cas où il n'y a pas de point invariant, que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$? Quelle est la nature de T ?

23 Soient $(\mathcal{T}, \circ)$ le groupe des translations de $\mathcal{E}_2$ et $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}, \circ)$ le groupe des homothéties-translations de $\mathcal{E}_2$.
1° Soit f un élément de $\mathcal{T}$. Montrer qu'un élément t de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$ (resp. à $\mathcal{H}$) si et seulement si l'élément $f \circ t \circ f^{-1}$ appartient à $\mathcal{T}$ (resp. à $\mathcal{H}$).
2° Supposons que g soit l'homothétie de centre A et de rapport non nul k. Préciser le centre et le rapport de l'homothétie $f \circ g \circ f^{-1}$.

Projections. Symétries.

24 Soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, et $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E′. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E′.
On désigne par f la projection sur $\mathcal{E}'$ de direction E″ et par $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1° Démontrer que l'application $t_{\vec{u}} \circ f$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est un projecteur de E à déterminer.

2° Démontrer que $t_{\vec{u}} \circ f$ n'est pas un projecteur de $\mathcal{E}$. $(t_{\vec{u}} \circ f)^2 \neq t_{\vec{u}} \circ f$

25 Soit f l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 3x - 2y - 5. \end{cases}$

1° Démontrer que f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Quelle est la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de son endomorphisme associé φ ? $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2° Démontrer que φ est une involution de E_2, mais que f n'est pas une involution affine de $\mathcal{E}_2$. $M(\varphi) \times M(\varphi) = I_2$ mais $f \circ f \neq id_{\mathcal{E}_2}$

26 Soit, dans $\mathcal{E}_2$, la droite D d'équation cartésienne : $x - y + 3 = 0$, et soit $\vec{D'}$ la droite vectorielle de E_2 engendrée par le vecteur $\vec{i} - 2\vec{j}$. NB: $\vec{D}$: $x - y = 0$

On désigne par p la projection sur D de direction $\vec{D'}$ et par s la symétrie par rapport à D de direction $\vec{D'}$.

1° Ces définitions sont-elles légitimes ?

2° Déterminer les coordonnées x' et y' du point M′ image par l'application p d'un point M de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3° Déterminer les coordonnées x'' et y'' du point M″ image par l'application s d'un point M de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

27 Soit f l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = -3x + 6y - 2 \\ y' = -2x + 4y - 1. \end{cases}$

Quelle est la nature de f ? On donnera les éléments qui la définissent.

28 Même question que pour le n° 27 avec f définie par : $\begin{cases} x' = 2x + 2y - 2 \\ y' = -\dfrac{3}{2}x - 2y + 3. \end{cases}$

29 Même question que pour le n° 27 avec f définie par : $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(y + 1) \\ y' = 2x - 1. \end{cases}$

30 Même question que pour le n° 27 avec f définie par : $\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}x + \dfrac{2}{3}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}y. \end{cases}$

31 Même question que pour le n° 27 avec f définie par : $\begin{cases} 10x' = 9x + 3y - 1 \\ 10y' = 3x + y + 3 \end{cases}$

32 Soit, dans $\mathcal{E}_3$, le plan P d'équation cartésienne : $2x + y + 3z - 1 = 0$ et soit $\overrightarrow{D'}$ la droite vectorielle de E_3 engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Soient $\vec{P}$ la direction du plan P et D′ la droite passant par O, de direction $\overrightarrow{D'}$.

On désigne par p_1 (resp. p_2) la projection sur P (resp. D′) de direction $\overrightarrow{D'}$ (resp. $\vec{P}$) et par s_1 (resp. s_2) la symétrie par rapport à P (resp. D′) de direction $\overrightarrow{D'}$ (resp. $\vec{P}$).

1° Ces définitions sont-elles légitimes ?

2° Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ du point M′ image par p_1 d'un point M de $\mathcal{E}_3$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Même question pour p_2.

3° Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ du point M″ image par s_1 du point M de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Même question pour s_2.

33 Soit f l'application de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} 3x' = x + y + z \\ 3y' = x + y + z \\ 3z' = x + y + z. \end{cases}$

Quelle est la nature de f? On donnera les éléments qui la définissent.

34 Même question que pour le n° 33, avec f définie par :

$$\begin{cases} 3x' = 2x - y + z - 1 \\ 3y' = -2x + y + 2z - 2 \\ z' = z. \end{cases}$$

35 Même question que pour le n° 33, avec f définie par :

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2z - 6 \\ y' = -x + z - 3 \\ z' = -2x - 2y + 3z - 6. \end{cases}$$

36 Même question que pour le n° 33, avec f définie par :

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1. \end{cases}$$

37 Même question que pour le n° 33, avec f définie par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y + z - \frac{3}{2} \\ y' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2} \\ z' = -3x - 3y + z - 3. \end{cases}$$

38 Soient λ un nombre réel et f_λ l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point m de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ définies par :

$$\begin{cases} X = x + (\lambda - 1)\,y \\ Y = 2x + (\lambda - 2)\,y. \end{cases}$$

1° Déterminer les réels λ pour lesquels f_λ est une bijection.

2° Déterminer, quand elle existe, l'application réciproque f_λ^{-1} de f_λ (on pourra donner les coordonnées de m en fonction de celles de M). Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles f_λ soit involutive ?

3° Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{E}_2$ invariants par f_λ.

4° Quelle est la nature géométrique de f_1 ? (on donnera les éléments qui la définissent).

5° Dans cette question on étudie f_0.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_2$, noté Δ, tels qu'il existe au moins un point m de $\mathcal{E}_2$ qui vérifie : $f_0(m) = \text{M}$. Soit M un point de $\mathcal{E}_2$. Déterminer l'ensemble des points m tels que l'on ait : $f_0(m) = \text{M}$.

Démontrer que f_0 est la composée d'une projection et d'une homothétie que l'on déterminera.

※ **39** Soient M et M' deux points distincts de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

On désigne par P et P' (resp. Q et Q') les images respectives des points M et M' par la projection sur la droite $(\text{O}, \vec{i})$ (resp. $(\text{O}, \vec{j})$) de direction $\vec{j}$ (resp. $\vec{i}$).

1° *a*) On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{\text{PQ}'}$ et $\overrightarrow{\text{P}'\text{Q}}$ sont non nuls.

Donner, en fonction de a, a', b, b', des équations cartésiennes des trois droites (PQ'), (P'Q) et (MM'). Démontrer que ces trois droites sont soit parallèles soit concourantes.

b) Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{\text{PQ}'}$ est nul, quelle est la position relative des deux droites (P'Q) et (MM') ? Examiner aussi le cas où le vecteur $\overrightarrow{\text{P}'\text{Q}}$ est nul.

2° Soit α un réel non nul et $\vec{t}$ le vecteur de E_2 défini par : $\vec{t} + \vec{i} = \alpha\vec{j}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante entre a, a', b, b', α pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{\text{PQ}'}$, $\overrightarrow{\text{P}'\text{Q}}$ et $\overrightarrow{\text{MM}'}$ soient colinéaires à $\vec{t}$.

Démontrer que la condition précédente définit une application f_α de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ telle que : $f_\alpha(\text{O}) = \text{O}$ et $(\forall \text{M} \in \mathcal{E}_2 - \{\text{O}\}\ \ f_\alpha(\text{M}) = \text{M}')$.

Démontrer que f_α est une involution affine de $\mathcal{E}_2$.

Démontrer que f_α est une symétrie, dont on précisera les éléments.

3° Soit φ_α l'endomorphisme de E_2 associé à f_α.

Écrire la matrice de φ_α dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit Φ l'ensemble des applications φ_α telles que α appartienne à $\mathbb{R}^*$.

Soient β et γ deux réels non nuls. Calculer les matrices respectives de $\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma$ et de $\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Dans quel cas ces deux matrices sont-elles égales ?

Soit δ un réel non nul. Démontrer que $\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma \circ \varphi_\delta$ appartient à Φ.

Plus généralement démontrer par récurrence que le composé d'un nombre impair d'éléments de Φ est un élément de Φ.

(Baccalauréat 1972)

40 Soient a et c deux nombres réels. On désigne par $f_{a,c}$ l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par :

$$\begin{cases} x' = x - y + c \\ y' = ax - y + 2c. \end{cases}$$

1° Démontrer que $f_{a,c}$ est une application affine. Pour quelles valeurs de a et de c l'application $f_{a,c}$ est-elle bijective ?

2° Déterminer, suivant les valeurs de a et de c, l'ensemble des points invariants par $f_{a,c}$.

3° Déterminer la nature géométrique de l'application $f_{a,c} \circ f_{a,c}$ suivant les valeurs de a et de c.

4° On étudie l'application f égale à $f_{0,-2}$, c'est-à-dire définie par :

$$\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = -y - 4. \end{cases}$$

a) Démontrer que f est involutive et la caractériser géométriquement.

b) Quelle est l'image d'une droite de $\mathcal{E}_2$ par f ? Existe-t-il des droites de $\mathcal{E}_2$ globalement invariantes par f ?

Affinités.

41 Soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E′. Soient α un nombre réel et $\mathcal{F}$ l'ensemble des affinités par rapport à $\mathcal{E}'$, de direction E″ et de rapport α, lorsque α décrit l'ensemble $\mathbb{R}^*$. Démontrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

42 Soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions respectives E′ et E″. On désigne par A le point d'intersection de $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{E}''$. Soit α un nombre réel.
On désigne par f (resp. g) l'affinité par rapport à $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{E}''$), de direction E″ (resp. E′) et de rapport α.
Démontrer que $g \circ f$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport. Déterminer $f \circ g$.

43 Démontrer que toute homothétie de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la composée d'une infinité de manières de deux affinités de $\mathcal{E}$.

44 Soit f l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y - 1. \end{cases}$

1° Démontrer que f est une bijection affine de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{E}_2$.

2° Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3° Démontrer que f est une affinité de $\mathcal{E}_2$, dont on déterminera la direction, le rapport et la droite des points invariants.

45 Même question que pour le n° 44 avec f définie par : $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - 3y. \end{cases}$

46 Soit f_1 (resp. f_2) l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M'_1 (resp. M'_2) de coordonnées $\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp. } \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}\right)$ définies par :

$$\begin{cases} x'_1 = x \\ y'_1 = 2y + 1 \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \begin{cases} x'_2 = 2x + 1 \\ y'_2 = y \end{cases}\right).$$

Déterminer la nature des applications f_1 et f_2, ainsi que la nature de l'application $f_2 \circ f_1$.

47 Soit f l'application de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2z + 2 \\ y' = -4x - y + 2z - 2 \\ z' = 8x + 4y - 3z + 4. \end{cases}$

1° Déterminer l'ensemble P des points de $\mathcal{E}_3$ invariants par f.

2° Démontrer qu'il existe une droite vectorielle $\vec{D}$ telle que, pour tout point M de transformé M' par f, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartienne à $\vec{D}$.

3° Déterminer la nature de l'application f.

48 Soit (a, λ) un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Soit $T_{(a,\lambda)}$ l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point m de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} X = x + a \\ Y = \lambda y. \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications $T_{(a,\lambda)}$.

1° Quelle est l'application U_a égale à $T_{(a,1)}$?

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des applications U_a est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

2° Quelle est l'application V_λ égale à $T_{(0,\lambda)}$?

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{V}$ des applications V_λ est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

3° Démontrer que $(\mathcal{T}, \circ)$ est un groupe commutatif.

4° Démontrer que tout élément de $\mathcal{T}$ peut être considéré comme le composé d'un élément de $\mathcal{U}$ et d'un élément de $\mathcal{V}$. Ce composé dépend-il de l'ordre des facteurs ?

49 Soit T l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{2} - y. \end{cases}$

1° Démontrer que T est une application bijective de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{E}_2$.

Existe-t-il un point de $\mathcal{E}_2$ invariant par T ?

2° On se propose de démontrer que T est la composée de deux affinités de rapport -1.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées x_1 et y_1 du point M_1 image du point M par l'affinité d'axe la droite d'équation : $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$, de direction $\vec{j}$ et de rapport -1.

Démontrer ensuite que M' est l'image de M_1 par une affinité de rapport -1 à déterminer.

3° Existe-t-il des droites de $\mathcal{E}_2$ qui soient parallèles à leur image par T ?

7.
Transformations orthogonales d'un espace vectoriel réel euclidien

La structure d'espace vectoriel réel euclidien a été étudiée en classe de Première; nous en avons rappelé les principales définitions et propriétés dans les paragraphes 2.11 à 2.13 du chapitre 2.
Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie n*; dans les exemples, nous supposerons toujours que* n *est égal à 2 ou à 3.*
Si x *et* y *sont deux vecteurs quelconques de E, nous noterons* x.y *leur produit scalaire et* $\|x\|$ *la norme de* x.

1. Orthogonalité dans un espace vectoriel réel euclidien.

Sous-espaces vectoriels orthogonaux.

1.1 DÉFINITION : **Soient** F **et** G **deux sous-espaces vectoriels de** E. **Le sous-espace vectoriel** F **est orthogonal au sous-espace vectoriel** G **si et seulement si tout vecteur de** F **est orthogonal à tout vecteur de** G, **c'est-à-dire si et seulement si :** $\forall (x, y) \in F \times G, \quad x.y = 0.$

Du fait de la symétrie du produit scalaire, si F est orthogonal à G, alors G est orthogonal à F. Nous dirons que F et G sont des **sous-espaces vectoriels orthogonaux.**

Exemples.

1. De la proposition : $\forall x \in E,\ x.0_E = 0$, il résulte que le sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ est orthogonal à tout sous-espace vectoriel de E et, en particulier, à E lui-même.

ie $\{0_E\} \subseteq E^{\perp}$

2. Supposons que E soit de dimension 2 et considérons une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de E. Soit $\vec{D}$ (resp. $\vec{D'}$) la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} - 2\vec{j}$ (resp. $2\vec{i} + \vec{j}$).

Démontrons que ces droites vectorielles sont orthogonales.

Soit $\vec{u}$ (resp. $\vec{u'}$) un vecteur quelconque de $\vec{D}$ (resp. $\vec{D'}$).

Il existe donc deux réels λ et λ' tels que l'on ait :

$\vec{u} = \lambda(\vec{i} - 2\vec{j})$ et $\vec{u'} = \lambda'(2\vec{i} + \vec{j})$.

Les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement $\begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2\lambda' \\ \lambda' \end{pmatrix}$. On a donc : $\vec{u} . \vec{u'} = 2\lambda\lambda' - 2\lambda\lambda' = 0$.

Propriétés.

1.2 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

> **P1** F et G sont orthogonaux si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de F et une base $\mathcal{B}'$ de G telles que tout vecteur de $\mathcal{B}$ soit orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{B}'$.

Démonstration :

- De la définition 1.1, il résulte que, si F et G sont orthogonaux, tout vecteur de toute base de F est orthogonal à tout vecteur de toute base de G.
- Réciproquement, soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) une base de F (resp. G) telle que tout vecteur de $\mathcal{B}$ soit orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{B}'$. Supposons, par exemple, que l'on ait : $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_q)$. Soit x (resp. y) un vecteur quelconque de F (resp. G) de composantes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp. } \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{pmatrix}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).

Calculons le produit scalaire $x . y$. On a :

$$x . y = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j e'_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j (e_i . e'_j).$$

Par hypothèse, on a : $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, q\}$, $e_i . e'_j = 0$.
On a donc bien $x . y = 0$. ■

Dans l'exemple 2 du paragraphe 1.1, le vecteur $(\vec{i} - 2\vec{j})$ (resp. $(2\vec{i} + \vec{j})$) est une base de $\vec{D}$ (resp. $\vec{D'}$) et l'on a : $(\vec{i} - 2\vec{j}) . (2\vec{i} + \vec{j}) = 0$.

> **P2** Si F et G sont orthogonaux, alors on a : $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration :

$\Rightarrow \|x\| = 0$

On a : $\forall x \in E$, $((x \in F \cap G) \Longrightarrow (x . x = 0) \Longrightarrow (x = 0_E))$. ■

<u>Remarque</u> : Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 2 ou 3. Nous avons constaté que, dans le cas où cette intersection est réduite au vecteur nul, la somme des dimensions des sous-espaces vectoriels est inférieure ou égale à celle de l'espace vectoriel.

Il résulte de P_2 que, si F et G sont orthogonaux, alors on a : $\dim F + \dim G \leqslant \dim E$.
Deux droites vectorielles d'un espace vectoriel de dimension 2 ou 3 peuvent donc être orthogonales ainsi qu'une droite vectorielle et un plan vectoriel d'un espace vectoriel de dimension 3. En revanche, deux plans vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 3 ne peuvent pas être orthogonaux.

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Nous rappelons le théorème suivant, démontré en classe de Première, pour un espace vectoriel réel euclidien de dimension 2 ou 3, et que nous admettons pour un espace vectoriel réel euclidien de dimension n quelconque :
Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension n. Soient F un sous-espace vectoriel de E, de dimension p et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors on peut trouver $n - p$ vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ de E, tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.
Nous allons utiliser le théorème précédent dans la démonstration du théorème suivant :

1.3 **THÉORÈME et DÉFINITION : Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de F est un sous-espace vectoriel de E, supplémentaire de F dans E.**
On appelle ce sous-espace vectoriel l'orthogonal de F et on le note $F^\perp$.

Démonstration :
Soit $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de F.
$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Le vecteur 0_E appartient à $F^\perp$; cet ensemble n'est donc pas vide.
Soient x et x' deux vecteurs quelconques de $F^\perp$ et λ un réel quelconque. De la bilinéarité du produit scalaire, il résulte que l'on a :
$\forall y \in F, \quad (x + x').y = x.y + x'.y = 0 + 0 = 0,$ et :
$\forall y \in F, \quad (\lambda x).y = \lambda(x.y) = \lambda 0 = 0.$
Les vecteurs $x + x'$ et λx appartiennent donc aussi à $F^\perp$.
$F \oplus F^\perp = E$. Par définition, les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont orthogonaux. On a donc, d'après la propriété P_2 du paragraphe 1.2 : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Démontrons que l'on a : $F + F^\perp = E$. Il suffit pour cela de démontrer que tout vecteur de E est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.
Supposons que F soit de dimension p et considérons une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de F. Soient $n - p$ vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ de E tels que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E. Chacun des vecteurs de la famille $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ appartient donc à $F^\perp$.

Soit maintenant x un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. On a : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i.$

Le vecteur x est donc la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$. ■

Remarques : 1. Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et x un vecteur de E. On a :
$(x \in F^\perp) \Longleftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, p\},\quad x \cdot e_i = 0)$.
2. $F^\perp$ apparaît comme un sous-espace vectoriel supplémentaire particulier de F dans E. C'est l'unique supplémentaire G de F dans E tel que F et G soient orthogonaux. Il en résulte immédiatement que l'on a :
$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
3. Dans un espace vectoriel de dimension 2, l'orthogonal d'une droite vectorielle est une droite vectorielle ; dans un espace vectoriel de dimension 3, l'orthogonal d'une droite vectorielle est un plan vectoriel.

Exemples.

1. On a : $\{0_E\}^\perp = E$.
2. Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E. Soit $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
Cherchons $\vec{D}^\perp$. C'est un plan vectoriel de E, que nous noterons $\vec{P}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a :

$$(\vec{u} \in \vec{P}) \Longleftrightarrow (\vec{u} \cdot (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 0) \Longleftrightarrow (x - y + z = 0).$$

On a donc : $\vec{P} = \{\vec{u} \in E \mid \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + (y - x)\,\vec{k}\}$.
Le plan vectoriel $\vec{P}$ est donc engendré, par exemple, par les vecteurs $\vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{j} + \vec{k}$.
3. Avec les mêmes notations, soit $\vec{Q}$ le plan vectoriel de E, engendré par les vecteurs $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ et $3\vec{i} + 5\vec{k}$.
Cherchons $\vec{Q}^\perp$. C'est une droite vectorielle que nous noterons $\vec{\Delta}$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a :

$$(\vec{u} \in \vec{\Delta}) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 0 \\ \vec{u} \cdot (3\vec{i} + 5\vec{k}) = 0 \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5z = 0 \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = -\dfrac{5}{4} y \\ z = \dfrac{3}{4} y \end{cases}\right).$$

$\vec{\Delta}$ est donc la droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $-5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Complément. Soient $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ deux plans vectoriels d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ leurs sous-espaces vectoriels orthogonaux respectifs.

Par abus de langage, on dit que les plans vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales (au sens de la définition 1.1).

2. Endomorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel réel euclidien.

Définition et propriétés.

2.1 **THÉORÈME : Soit f une application de E dans E. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :**
1. L'application f conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :
$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x).f(y) = x.y.$
2. L'application f est linéaire et conserve la norme, c'est-à-dire :
$\forall x \in E, \quad \| f(x) \| = \| x \|.$

Démonstration :
Nous rappelons la proposition :
$\forall (x, y) \in E^2, \quad \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2x.y.$

(2) $\Longrightarrow$ (1).
Soient x et y deux vecteurs quelconques de E. On a :

$$\begin{aligned}
f(x).f(y) &= \frac{1}{2}(\| f(x) + f(y) \|^2 - \| f(x) \|^2 - \| f(y) \|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\| f(x + y) \|^2 - \| f(x) \|^2 - \| f(y) \|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2) \\
&= x.y.
\end{aligned}$$

(1) $\Longrightarrow$ (2).

- f conserve la norme.

Soit x un vecteur quelconque de E. On a : $\| x \| = \sqrt{x.x} = \sqrt{f(x).f(x)} = \| f(x) \|.$

- f est linéaire.

Soient x et y deux vecteurs quelconques de E et λ un réel quelconque.
Démontrer les égalités : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
équivaut à démontrer les égalités :
$\| f(x + y) - f(x) - f(y) \|^2 = 0$ et $\| f(\lambda x) - \lambda f(x) \|^2 = 0.$
On a :

$$\begin{aligned}
&\| f(x + y) - f(x) - f(y) \|^2 = \| f(x + y) - (f(x) + f(y)) \|^2 \\
&= \| f(x + y) \|^2 + \| f(x) + f(y) \|^2 - 2f(x + y).(f(x) + f(y)) \\
&= \| f(x + y) \|^2 + \| f(x) \|^2 + \| f(y) \|^2 + 2[f(x).f(y) - f(x + y).f(x) - f(x + y).f(y)] \\
&= \| x + y \|^2 + \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2(x.y - (x + y).x - (x + y).y) \\
&= \| x + y \|^2 + (\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2x.y) - 2(x + y).(x + y) \\
&= \| x + y \|^2 + \| x + y \|^2 - 2\| x + y \|^2 = 0.
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
&\| f(\lambda x) - \lambda f(x) \|^2 = \| f(\lambda x) \|^2 + \| \lambda f(x) \|^2 - 2f(\lambda x).(\lambda f(x)) \\
&= \| f(\lambda x) \|^2 + \lambda^2 \| f(x) \|^2 - 2\lambda f(\lambda x).f(x) \\
&= \| \lambda x \|^2 + \lambda^2 \| x \|^2 - 2\lambda (\lambda x).x \\
&= \lambda^2 \| x \|^2 + \lambda^2 \| x \|^2 - 2\lambda^2 (x.x) = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.2 DÉFINITION : Soit f une application de E dans E.
f est un endomorphisme orthogonal de E (ou encore une isométrie de E) si et seulement si elle satisfait à l'une des deux propositions équivalentes du théorème 2.1.

Exemples.

1. Id_E et $-Id_E$ sont des endomorphismes orthogonaux de E.
2. Supposons que E soit de dimension 2 et considérons une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ de E.

Soit f l'endomorphisme de E de matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. Démontrons que f est un endomorphisme orthogonal de E. Il suffit de démontrer que f conserve la norme. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. On a : $f(\vec{u}) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\vec{j}$.

La base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormée : on a donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \|f(\vec{u})\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2}$$
$$= \sqrt{x^2+y^2}.$$

Propriétés.

2.3 Soit f une application de E dans E.

P1 Si f est un endomorphisme orthogonal de E, alors f est bijective.

Démonstration :
f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ; f est donc bijective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul de E.
Étudions le noyau de f. Soit x un vecteur quelconque de E. On a :
$(x \in \operatorname{Ker} f) \Longleftrightarrow (f(x) = 0_E) \Longleftrightarrow (\|f(x)\| = 0) \Longleftrightarrow (\|x\| = 0) \Longleftrightarrow (x = 0_E)$.
On a donc : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. ■

P2 Si f est un endomorphisme orthogonal de E, alors f transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée.

Cette propriété résulte de façon immédiate du fait que f est un automorphisme de E qui conserve la norme et le produit scalaire.

P3 Soit f un endomorphisme de E. S'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit une base orthonormée de E, alors f est un endomorphisme orthogonal de E.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que f conserve la norme. Soit x un vecteur quelconque de E, de composantes $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. On a :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i).$$

Les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ sont orthonormées ; on a donc :

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \quad \text{et} \quad \| f(x) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}. \quad \blacksquare$$

> **P4** Soit $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E. $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

Le groupe $\mathcal{O}(E)$ est appelé le **groupe orthogonal de** E. Tout endomorphisme orthogonal de E est encore appelé **transformation orthogonale de** E.

Car il s'agit d'une application bijective

Démonstration :

Utilisons le théorème 1.5 du chapitre 1.

• Soient f et g deux éléments quelconques de $\mathcal{O}(E)$.
$g \circ f$ est un automorphisme de E ; démontrons que $g \circ f$ conserve la norme.
On a : $\forall x \in E, \quad \| (g \circ f)(x) \| = \| g[f(x)] \| = \| f(x) \| = \| x \|.$
$g \circ f$ appartient donc à $\mathcal{O}(E)$.

• Id_E appartient à $\mathcal{O}(E)$.

• Soit f un élément quelconque de $\mathcal{O}(E)$. Puisque f est un automorphisme, il existe une application réciproque f^{-1} qui est un automorphisme de E ; démontrons que f^{-1} conserve la norme.
On a : $\forall x \in E, \quad \| f^{-1}(x) \| = \| f[f^{-1}(x)] \| = \| x \|.$
f^{-1} appartient donc à $\mathcal{O}(E)$. $\blacksquare$

Transformations orthogonales involutives.

Nous allons étudier les transformations orthogonales involutives de E.
Soit f une telle transformation. f est en particulier un automorphisme involutif de E ; il existe donc deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E′ et E″ de E tels que f soit la symétrie vectorielle par rapport à E′, de direction E″. L'application f est donc une transformation orthogonale involutive de E si et seulement si c'est une symétrie vectorielle de E qui conserve la norme. Cherchons donc à quelle condition la symétrie vectorielle f par rapport à E′ de direction E″ conserve la norme.
Soit x un vecteur quelconque de E de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$.
On a alors : $x = x' + x''$ et $f(x) = x' - x''$ et par suite :

$$\begin{aligned}(\| x \| = \| f(x) \|) &\Longleftrightarrow (\| x \|^2 = \| f(x) \|^2)\\ &\Longleftrightarrow (\| x' \|^2 + \| x'' \|^2 + 2x'.x'' = \| x' \|^2 + \| x'' \|^2 - 2x'.x'')\\ &\Longleftrightarrow (x'.x'' = 0) \Longleftrightarrow (E'' = E'^{\perp}).\end{aligned}$$

Ceci nous conduit à la définition et au théorème suivants :

2.4 DÉFINITION : Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à F la symétrie vectorielle par rapport à F de direction $F^\perp$.

2.5 THÉORÈME : L'ensemble des transformations orthogonales involutives de E est l'ensemble des symétries vectorielles orthogonales de E.

Propriétés.

2.6 On a les propriétés suivantes :

P1	Soient F un sous-espace vectoriel de E et f la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à F. Le sous-espace vectoriel de E des vecteurs invariants par f est le sous-espace vectoriel F.

Cette propriété résulte de façon immédiate de la définition de f. $f(x) = x' - x''$
où $x = x' + x'' \in F \oplus F^\perp = E$

P2	Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 2 ou 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E, non nuls, distincts et de même norme. Si E est de dimension 2 (resp. 3), il existe une unique symétrie vectorielle orthogonale σ par rapport à une droite vectorielle de E (resp. un plan vectoriel de E) telle que l'on ait : $\sigma(\vec{u}) = \vec{v}$.

$f(x) = x$
$\Updownarrow$
$x \in F$

Démonstration :

<u>Unicité.</u> Soit σ une telle symétrie, s'il en existe. Appelons F le sous-espace vectoriel de E des vecteurs invariants par σ. Si E est de dimension 2 (resp. 3), F est une droite vectorielle de E (resp. un plan vectoriel de E). Soit $\vec{w}$ le vecteur non nul $\vec{u} - \vec{v}$. Par définition de σ, on a : $\sigma(\vec{w}) = \sigma(\vec{u}) - \sigma(\vec{v}) = \sigma(\vec{u}) - \sigma^2(\vec{u}) = \vec{v} - \vec{u} = -\vec{w}$.
Le vecteur $\vec{w}$ est changé par σ en son opposé. Il appartient donc à $F^\perp$, qui est, dans les deux cas, une droite vectorielle de E ; cette droite vectorielle $F^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$; elle est unique. Il en est donc de même de F et par suite de σ.

<u>Existence.</u> Soient G la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ et F le sous-espace vectoriel orthogonal de G. Si E est de dimension 2 (resp. 3), F est une droite vectorielle de E (resp. un plan vectoriel de E). Soit σ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à F. Démontrons que l'on a : $\sigma(\vec{u}) = \vec{v}$.
De l'égalité $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, il résulte que les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux ; le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ appartient à G ; le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ appartient donc à F.
On a d'autre part l'égalité suivante, qui donne la décomposition de $\vec{u}$ sur $F \oplus G$:
$\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$.

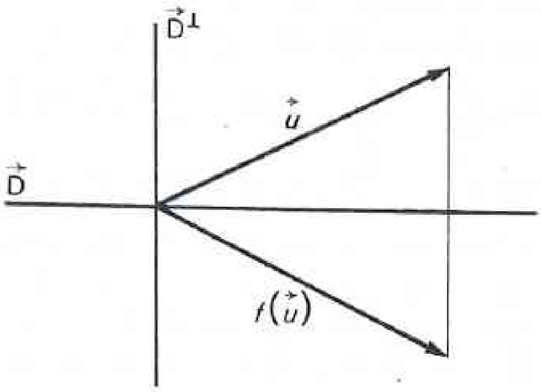
Par définition de σ, on a donc : $\sigma(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v}$. ■

Cas où E est de dimension 2 ou 3.

2.7 Nous allons donner la liste de toutes les symétries vectorielles orthogonales de E ; nous les classons d'après la dimension du sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants.

<u>dim E = 2</u>

- dim F = 2 identité de E : Id_E.
- dim F = 1 symétries vectorielles orthogonales par rapport à une droite vectorielle.

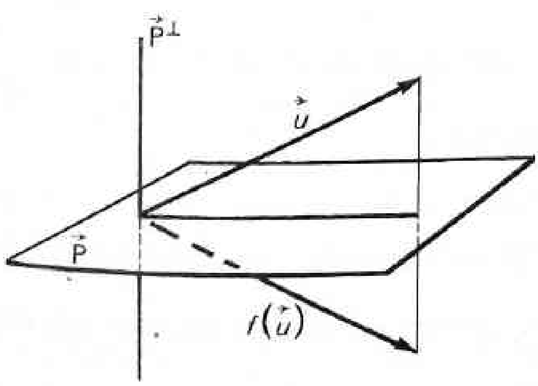


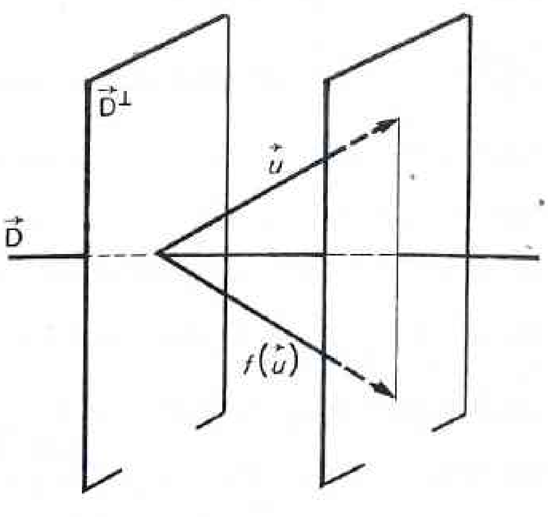
- dim F = 0 homothétie vectorielle de rapport − 1 : $-\mathrm{Id}_E$. $\Rightarrow$ N.B : $h_{-1} = -id_E$

$E = \{0\}^{\perp}$, $F = \{0\}$ $E = \{0_E\} \oplus E$ $\Rightarrow$ $S_F(x) = -x = h_{-1}(x) = -id_E(x)$.

<u>dim E = 3</u>

- dim F = 3 Id_E.
- dim F = 2 symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan vectoriel.
- dim F = 1 symétries vectorielles orthogonales par rapport à une droite vectorielle.
- dim F = 0 $-\mathrm{Id}_E$.





3. Transformations orthogonales d'un plan vectoriel réel euclidien.

3.1 Remarquons qu'une droite vectorielle réelle euclidienne E n'a que deux bases orthonormées ; il résulte alors des propriétés P_2 et P_3 du paragraphe 2.3 que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est la paire $\{Id_E, -Id_E\}$.
Dans toute la suite du paragraphe 3, nous désignerons par E_2 un plan vectoriel réel euclidien.
Étudions le groupe $(\mathcal{O}(E_2), \circ)$. En classe de Première, nous avons vu que tout élément de $\mathcal{O}(E_2)$ est caractérisé par sa matrice dans une base orthonormée quelconque de E_2. Il n'y a que deux types de telles matrices : $f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$

- les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ $f(\vec{j}) = \begin{cases} -b\vec{i} + a\vec{j} \\ b\vec{i} - a\vec{j} \end{cases}$
- les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

Nous avons appelé **rotations vectorielles de E_2** les transformations orthogonales dont toutes les matrices dans des bases orthonormées quelconques de E_2 sont de la première forme et **symétries vectorielles de E_2** les autres. det = 1 et −1 (Resp)
Nous avons remarqué que l'ensemble des transformations orthogonales de E_2 de déterminant égal à $+1$ est l'ensemble des rotations vectorielles de E_2 et que l'ensemble des transformations orthogonales de E_2 de déterminant égal à -1 est l'ensemble des symétries vectorielles de E_2.
Nous noterons $\mathcal{O}_+(E_2)$ l'ensemble des rotations vectorielles de E_2 (on dit aussi **isométries vectorielles positives** de E_2) et $\mathcal{O}_-(E_2)$ l'ensemble des symétries vectorielles de E_2 (on dit aussi **isométries vectorielles négatives** de E_2).
Nous avons les égalités :
$\mathcal{O}_+(E_2) \cup \mathcal{O}_-(E_2) = \mathcal{O}(E_2)$ et $\mathcal{O}_+(E_2) \cap \mathcal{O}_-(E_2) = \varnothing$.

Ensemble $\mathcal{O}_+(E_2)$ des rotations vectorielles de E_2.

3.2 Cet ensemble possède les propriétés suivantes :

P1	$\mathcal{O}_+(E_2)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{O}(E_2), \circ)$.

Cette propriété a été démontrée en classe de Première.

Nous rappelons que si f est une rotation vectorielle de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, alors f^{-1} est la rotation vectorielle de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ et que, la seule rotation vectorielle pour laquelle a est égal à 1 est l'identité de E_2, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée de E_2.

P2 Soit f une rotation vectorielle de E_2, distincte de Id_{E_2}.
Le sous-espace vectoriel de E_2 des vecteurs invariants par f est $\{\vec{0}\}$.

Démonstration :

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E_2 et $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E_2, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\left(f(\vec{u}) = \vec{u}\right) \iff \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \iff \left(\begin{cases} (a-1)x - by = 0 \\ bx + (a-1)y = 0 \end{cases}\right)$$

Le déterminant du système obtenu est :

$$D = \begin{vmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + b^2 = 2(1-a).$$

La rotation vectorielle f est distincte de Id_{E_2} ; on a donc : $a \neq 1$ et, par suite : $D \neq 0$.

Le système obtenu a donc une solution unique égale à $(0, 0)$ et on a :

$$\left(f(\vec{u}) = \vec{u}\right) \iff \left(\vec{u} = \vec{0}\right). \blacksquare$$

P3 Les seuls éléments involutifs de $\mathcal{O}_+(E_2)$ sont Id_{E_2} et $-Id_{E_2}$.

Démonstration :

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E_2 et f un élément de $\mathcal{O}_+(E_2)$ de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$(f \circ f = Id_{E_2}) \iff \left(\begin{cases} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ -2ab = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}\right).$$

On obtient donc comme matrice de f, dans la base $\mathcal{B}$, l'une des deux matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices sont indépendantes de la base $\mathcal{B}$ choisie et sont les matrices de Id_{E_2} et de $-Id_{E_2}$. ■

Ensemble $\mathcal{O}_-(E_2)$ des symétries vectorielles de E_2.

3.3 **THÉORÈME : Un automorphisme orthogonal de E_2 appartient à $\mathcal{O}_-(E_2)$ si et seulement si cet automorphisme est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle de E_2.**

Démonstration :

- Soit f un élément de $\mathcal{O}_-(E_2)$.

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E_2 et $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

De l'égalité $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il résulte que f est involutive.

D'autre part, puisque Id_{E_2} et $-\mathrm{Id}_{E_2}$ sont des rotations vectorielles de E_2, l'application f est une transformation orthogonale involutive de E_2, distincte de Id_{E_2} et de $-\mathrm{Id}_{E_2}$.

Du paragraphe 2.7, il résulte donc que f est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle de E_2.

- Considérons une symétrie vectorielle orthogonale f par rapport à une droite vectorielle de E_2.

L'application f est un élément de $\mathcal{O}(E_2)$. Cette application est involutive et distincte de Id_{E_2} et de $-\mathrm{Id}_{E_2}$.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.2, il résulte que f n'appartient pas à $\mathcal{O}_+(E_2)$.

C'est donc un élément de $\mathcal{O}_-(E_2)$. ■

Propriétés.

3.4 L'ensemble $\mathcal{O}_-(E_2)$ possède les propriétés suivantes :

> **P1** Soit f un élément de $\mathcal{O}_-(E_2)$.
> Alors f est involutive et le sous-espace vectoriel de E_2 des vecteurs invariants par f est une droite vectorielle de E_2.

Cette propriété résulte de façon immédiate du théorème précédent.

bijection réciproque

> **P2** Soient f et g deux éléments de $\mathcal{O}_-(E_2)$.
> Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux éléments de $\mathcal{O}_+(E_2)$, symétriques l'un de l'autre pour la loi $\circ$.

Démonstration :

D'après le paragraphe 3.1, on a : $\text{dét}\, f = \text{dét}\, g = -1$

et, par suite, des égalités : $\text{dét}\,(f \circ g) = \text{dét}\, f \times \text{dét}\, g = \text{dét}\,(g \circ f)$,

il résulte que l'on a :

$\text{dét}\,(f \circ g) = \text{dét}\,(g \circ f) = 1$.

Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ appartiennent donc à $\mathcal{O}_+(E_2)$. On a enfin :

$(f \circ g) \circ (g \circ f) = f \circ (g \circ g) \circ f = f \circ f = \mathrm{Id}_{E_2}$ et : $f \circ f = g \circ g = id$

$(g \circ f) \circ (f \circ g) = g \circ (f \circ f) \circ g = g \circ g = \mathrm{Id}_{E_2}$. ■

> **P3** Soient f un élément de $\mathcal{O}_-(E_2)$ et g un élément de $\mathcal{O}_+(E_2)$. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des éléments de $\mathcal{O}_-(E_2)$.

La démonstration est analogue à celle de la propriété P_2.

P4 Soient f un élément de $\mathcal{O}_+(E_2)$ et σ un élément de $\mathcal{O}_-(E_2)$. Alors il existe une unique symétrie vectorielle orthogonale σ' et une unique symétrie vectorielle orthogonale σ'' telles que l'on ait : $f = \sigma' \circ \sigma$ et $f = \sigma \circ \sigma''$.

Démonstration :
On a les équivalences :
$(f = \sigma' \circ \sigma) \Longleftrightarrow (\sigma' = f \circ \sigma)$ et $(f = \sigma \circ \sigma'') \Longleftrightarrow (\sigma'' = \sigma \circ f)$.
Ces équivalences établissent l'existence et l'unicité de σ' et de σ''. De la propriété P_3, il résulte alors que σ' et σ'' appartiennent bien à $\mathcal{O}_-(E_2)$.

4. Transformations orthogonales d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3.

Dans ce paragraphe 4, nous désignerons par E_3 un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3.
Comme nous l'avons fait pour E_2, nous allons réaliser une partition de $\mathcal{O}(E_3)$ en deux sous-ensembles $\mathcal{O}_+(E_3)$ et $\mathcal{O}_-(E_3)$ qui possèdent des propriétés analogues à celles de $\mathcal{O}_+(E_2)$ et $\mathcal{O}_-(E_2)$.
Les matrices et les déterminants d'ordre 3 ne figurent pas au programme des classes terminales. Nous allons donc utiliser une autre méthode, qui consiste à classer les éléments de $\mathcal{O}(E_3)$ suivant la dimension du sous-espace vectoriel de leurs vecteurs invariants.
Auparavant, nous donnons quelques résultats généraux qui serviront par la suite.

Décomposition d'une transformation orthogonale.

4.1 Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie, f désigne un élément de $\mathcal{O}(E)$ et F désigne le sous-espace vectoriel de E des vecteurs invariants par f. $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$
Soit E' un sous-espace vectoriel de F ; appelons E'' le sous-espace vectoriel orthogonal de E' dans E.
Nous avons : $E' \oplus E'' = E$ et $\forall x' \in E',\ f(x') = x'$.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

P1 Le sous-espace vectoriel E'' de E est globalement invariant par f, c'est-à-dire : $f(E'') = E''$.

Démonstration :
Il suffit de démontrer la proposition suivante : $\forall x'' \in E'',\ f(x'') \in E''$.
Soit x'' un élément quelconque de E''. L'application f conserve le produit scalaire et tout vecteur de E' est invariant par f. On a donc :
$$(x'' \in E'') \Longleftrightarrow (\forall x' \in E',\ x' . x'' = 0) \Longrightarrow (\forall x' \in E',\ f(x') . f(x'') = 0)$$
$$\Longrightarrow (\forall x' \in E',\ x' . f(x'') = 0) \Longrightarrow (f(x'') \in E''). \quad \blacksquare$$

P2 La restriction f'' de f à E'' est une transformation orthogonale de l'espace vectoriel E''.

Nous rappelons que la restriction f'' de f à E'' est l'application définie par :

$$f'' : E'' \longrightarrow E$$
$$x'' \longmapsto f(x'')$$

Démonstration :
Utilisons la proposition (1) du théorème 2.1.
De la propriété P_1, il résulte que f'' est une application de E'' dans E''. Démontrons maintenant que f'' conserve le produit scalaire.
On a : $\forall (x'', y'') \in E''^2, \quad f''(x'').f''(y'') = f(x'').f(y'') = x''.y''$. ■

Notation : Soit x un vecteur de E de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E''$. On a alors : $f(x) = f(x') + f(x'') = x' + f''(x'') = \mathrm{Id}_{E'}(x') + f''(x'')$.

Nous conviendrons d'écrire f sous la forme : $\boxed{f = \mathrm{Id}_{E'} \oplus f''}$ et nous dirons que $\mathrm{Id}_{E'} \oplus f''$ est la **décomposition de f sur** $E' \oplus E'^{\perp}$.
Le lecteur remarquera que $\mathrm{Id}_{E'}$ est aussi une transformation orthogonale de l'espace vectoriel E'.

Exemples.

1. Avec les notations précédentes, on a : $\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E'} \oplus \mathrm{Id}_{E'^{\perp}}$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel euclidien E_3 de dimension 3, et soit σ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à F. La restriction de σ à $F_{\perp}$ est : $-\mathrm{Id}_{F\perp}$. On a donc : $\sigma = (\mathrm{Id}_F) \oplus (-\mathrm{Id}_{F\perp})$.

P3 Soient f et g deux éléments de $\mathcal{O}(E)$ qui admettent les décompositions respectives suivantes sur $E' \oplus E'^{\perp}$:

$$f = \mathrm{Id}_{E'} \oplus f'' \quad \text{et} \quad g = \mathrm{Id}_{E'} \oplus g''.$$

Alors l'élément $g \circ f$ de $\mathcal{O}(E)$ admet la décomposition suivante sur $E' \oplus E'^{\perp}$: $g \circ f = \mathrm{Id}_{E'} \oplus g'' \circ f''$.

Démonstration :
Dire que f et g admettent des décompositions sur $E' \oplus E'^{\perp}$ implique que l'on a : $\forall x' \in E', \quad f(x') = g(x') = x'$.
Soit x un vecteur quelconque de E, de décomposition $x' + x''$ sur $E' \oplus E'^{\perp}$. On a :
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x' + f''(x'')] = g(x') + g[f''(x'')]$.
Le vecteur x' appartient à E' et le vecteur $f''(x'')$ appartient à $E'^{\perp}$. On a donc :
$(g \circ f)(x) = x' + g''[f''(x'')] = (\mathrm{Id}_{E'})(x') + (g'' \circ f'')(x'')$
et par suite : $g \circ f = \mathrm{Id}_{E'} \oplus g'' \circ f''$. ■

Nous allons utiliser ces propriétés pour l'étude de $\mathcal{O}(E_3)$.
Soient f un élément de $\mathcal{O}(E_3)$ et F le sous-espace vectoriel de E_3 des vecteurs invariants par f. On a : $0 \leqslant \dim F \leqslant 3$. Il n'y a donc que quatre cas possibles : $\dim F = 3$, $\dim F = 2$, $\dim F = 1$ et $\dim F = 0$.
Il est évident que si $\dim F = 3$, alors $f = \mathrm{Id}_{E_3}$.
Nous allons étudier les trois autres cas. Nous obtiendrons des propriétés d'importances différentes et nous dégagerons ensuite les résultats essentiels.

Cas où la dimension de F est égale à 2.

4.2 On a les propriétés suivantes :

> **P1** Soit f un élément de $\mathcal{O}(E_3)$ tel que F soit un plan vectoriel de E_3. Alors f est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à F.

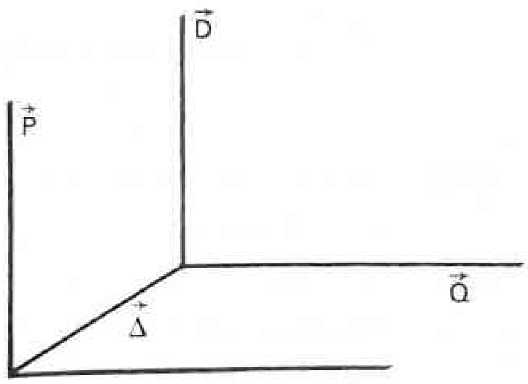
Démonstration :

Soit $\mathrm{Id}_F \oplus f''$ la décomposition de f sur $F \oplus F^{\perp}$. De la propriété P_2 du paragraphe 4.1, il résulte que f'' est une transformation orthogonale de la droite vectorielle $F^{\perp}$. On a donc soit $f'' = \mathrm{Id}_{F^{\perp}}$, soit $f'' = -\mathrm{Id}_{F^{\perp}}$.
Supposons que l'on ait $f'' = \mathrm{Id}_{F^{\perp}}$. On aurait alors : $f = (\mathrm{Id}_F) \oplus (\mathrm{Id}_{F^{\perp}}) = \mathrm{Id}_{E_3}$ ce qui, par hypothèse, est impossible. On a donc : $f'' = -\mathrm{Id}_{F^{\perp}}$ et par suite $f = (\mathrm{Id}_F) \oplus (-\mathrm{Id}_{F^{\perp}})$ ce qui signifie que f est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à F. ■

Conformément à l'usage anglo-saxon, nous appellerons **réflexion vectorielle** une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel.
Réciproquement, toute réflexion vectorielle est un élément de $\mathcal{O}(E_3)$ tel que le sous-espace vectoriel de E_3 des vecteurs invariants soit de dimension 2.

> **P2** Soient $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$ deux droites vectorielles orthogonales ; soient $\vec{P}$ le plan vectoriel qu'elles déterminent et $\vec{Q}$ le plan vectoriel orthogonal de $\vec{D}$. Soient $\sigma_{\vec{P}}$ la réflexion vectorielle par rapport à $\vec{P}$ et $\sigma_{\vec{\Delta}}$ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{\Delta}$ du plan vectoriel $\vec{Q}$. On a alors :
> $\sigma_{\vec{P}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus \sigma_{\vec{\Delta}}$.

Démonstration :



La droite vectorielle $\vec{D}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\vec{P}$ des vecteurs invariants par $\sigma_{\vec{P}}$. L'application $\sigma_{\vec{P}}$ admet donc une décomposition sur $\vec{D} \oplus \vec{D}^{\perp}$, c'est-à-dire sur $\vec{D} \oplus \vec{Q}$.
Soit $\mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus f''$ cette décomposition. L'application f'' est une transformation orthogonale du plan vectoriel $\vec{Q}$. Cherchons le sous-espace vectoriel de ses vecteurs invariants. Soit $\vec{u''}$ un vecteur quelconque de $\vec{Q}$.

On a : $$\left(f''(\vec{u''}) = \vec{u''}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \vec{u''} \in \vec{Q} \\ \sigma_{\vec{P}}(\vec{u''}) = \vec{u''} \end{cases}\right) \Longleftrightarrow (\vec{u''} \in \vec{P} \cap \vec{Q}) \Longleftrightarrow (\vec{u''} \in \vec{\Delta}).$$

L'application f'' est donc égale à $\sigma_{\vec{\Delta}}$. ■

Cas où la dimension de F est égale à 1.

✻ **4.3** On a les propriétés suivantes :

> **P1** Soit f un élément de $\mathcal{O}(E_3)$ tel que F soit une droite vectorielle de E_3. Alors la restriction de f à $F^\perp$ est une rotation vectorielle du plan vectoriel $F^\perp$, distincte de $\mathrm{Id}_{F^\perp}$.

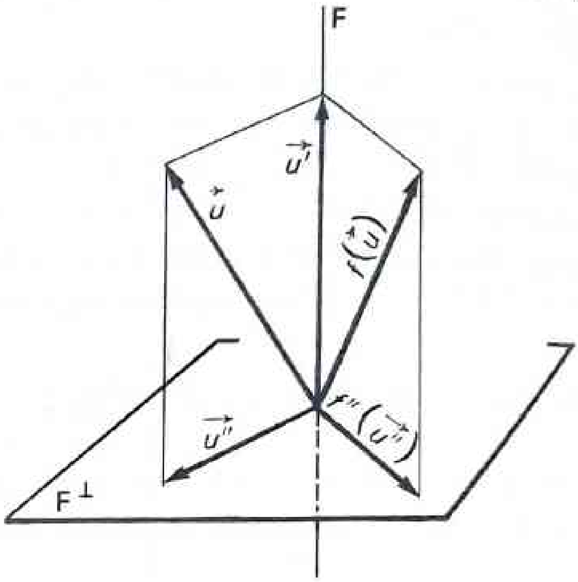
Démonstration :

Soit f'' la restriction de f à $F^\perp$.

On a : $f = \mathrm{Id}_F \oplus f''$ et $f'' \in \mathcal{O}(F^\perp)$.

Cherchons le sous-espace des vecteurs invariants par f''. Soit $\vec{u}''$ un vecteur quelconque de $F^\perp$. On a :

$$\left(f''(\vec{u}'') = \vec{u}''\right) \iff \left(\begin{cases}\vec{u}'' \in F^\perp \\ f(\vec{u}'') = \vec{u}''\end{cases}\right)$$
$$\iff \left(\vec{u}'' \in F \cap F^\perp\right)$$
$$\iff \left(\vec{u}'' = \vec{0}\right).$$



L'application f'' est donc une rotation vectorielle de $F^\perp$, distincte de $\mathrm{Id}_{F^\perp}$. ■

On appelle **rotation vectorielle d'axe F** toute transformation orthogonale dont le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est la droite vectorielle F.

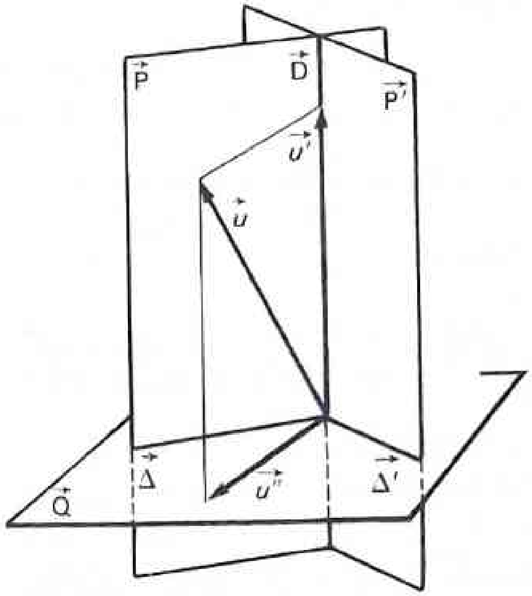
Exemple.

Soit $\vec{D}$ une droite vectorielle de E_3 ; la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{D}$ admet $\vec{D}$ comme sous-espace de vecteurs invariants ; c'est donc une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$. La restriction à $\vec{D}^\perp$ est $-\mathrm{Id}_{\vec{D}^\perp}$. On appelle cette symétrie le **demi-tour d'axe $\vec{D}$** ou encore le **retournement d'axe $\vec{D}$**.

> **P2** Soient f une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$ et $\vec{P}$ un plan vectoriel contenant $\vec{D}$. Alors il existe un unique plan vectoriel $\vec{P}'$ et un unique plan vectoriel $\vec{P}''$ tels que, si l'on note $\sigma_{\vec{P}}$ $\sigma_{\vec{P}'}$ $\sigma_{\vec{P}''}$ les réflexions vectorielles par rapport respectivement à $\vec{P}$, $\vec{P}'$, $\vec{P}''$, l'on ait : $f = \sigma_{\vec{P}'} \circ \sigma_{\vec{P}}$ et $f = \sigma_{\vec{P}} \circ \sigma_{\vec{P}''}$

Démonstration :

__Unicité.__ Si $\vec{P}'$ et $\vec{P}'_1$ sont deux plans vectoriels tels que l'on ait : $f = \sigma_{\vec{P}'} \circ \sigma_{\vec{P}} = \sigma_{\vec{P}'_1} \circ \sigma_{\vec{P}}$ on a alors : $\sigma_{\vec{P}'} \circ \sigma_{\vec{P}} \circ \sigma_{\vec{P}} = \sigma_{\vec{P}'_1} \circ \sigma_{\vec{P}} \circ \sigma_{\vec{P}}$ ce qui équivaut à : $\sigma_{\vec{P}'} = \sigma_{\vec{P}'_1}$. On démontre de même l'unicité du plan vectoriel $\vec{P}''$.



Existence. Notons $\vec{Q}$ le plan vectoriel $\vec{D^\perp}$. Les plans vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont orthogonaux ; ils sont donc distincts. Soient $\vec{\Delta}$ leur intersection et $\sigma_{\vec{\Delta}}$ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{\Delta}$ du plan $\vec{Q}$. De la propriété P_2 du paragraphe 4.2, il résulte que l'on a :
$\sigma_{\vec{P}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus \sigma_{\vec{\Delta}}$.

D'autre part, soit $\mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus f''$ la décomposition de f sur $\vec{D} \oplus \vec{Q}$. De la propriété P_1, il résulte que f'' est une rotation vectorielle de $\vec{Q}$ distincte de $\mathrm{Id}_{\vec{Q}}$. D'après la propriété P_4 du paragraphe 3.4, il existe donc une droite vectorielle $\vec{\Delta'}$ de $\vec{Q}$ telle que l'on ait : $f'' = \sigma_{\vec{\Delta'}} \circ \sigma_{\vec{\Delta}}$.

Soit $\vec{P'}$ le plan vectoriel déterminé par les droites vectorielles orthogonales $\vec{\Delta'}$ et $\vec{D}$.

On a alors : $\sigma_{\vec{P'}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus \sigma_{\vec{\Delta'}}$

et d'après la propriété P_3 du paragraphe 4.1 :

$\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus \sigma_{\vec{\Delta'}} \circ \sigma_{\vec{\Delta}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus f'' = f$.

On démontre de même l'existence de $\vec{P''}$. ■

Étudions le problème réciproque.

> **P3** Soient $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ deux plans vectoriels quelconques de E_3 et $\sigma_{\vec{P}}$ (resp. $\sigma_{\vec{P'}}$) la réflexion vectorielle par rapport à $\vec{P}$ (resp. $\vec{P'}$). Alors $\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}}$ est une transformation vectorielle de E_3 dont le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 3 ou 1.

Démonstration :

Envisageons les deux cas suivants : $\vec{P} = \vec{P'}$ et $\vec{P} \neq \vec{P'}$.

$\vec{P} = \vec{P'}$. On a alors : $\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}} = \sigma_{\vec{P}} \circ \sigma_{\vec{P}} = \mathrm{Id}_{E_3}$.

$\vec{P} \neq \vec{P'}$. Soient $\vec{D}$ la droite vectorielle d'intersection de $\vec{P}$ et de $\vec{P'}$, et $\vec{Q}$ le plan vectoriel orthogonal à $\vec{D}$. Les plans $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ (resp. $\vec{P'}$ et $\vec{Q}$) sont orthogonaux. Posons : $\vec{\Delta} = \vec{P} \cap \vec{Q}$ et $\vec{\Delta'} = \vec{P'} \cap \vec{Q}$.

On a : $\sigma_{\vec{P}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus \sigma_{\vec{\Delta}}$ et $\sigma_{\vec{P'}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus \sigma_{\vec{\Delta'}}$ et $\vec{\Delta} \neq \vec{\Delta'}$ et, par suite :

$\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}} = \mathrm{Id}_{\vec{D}} \oplus (\sigma_{\vec{\Delta'}} \circ \sigma_{\vec{\Delta}})$.

L'application $\sigma_{\vec{\Delta'}} \circ \sigma_{\vec{\Delta}}$ est une rotation vectorielle de $\vec{Q}$, distincte de l'identité. Elle n'a donc pas d'autre vecteur invariant que le vecteur nul.

Soit maintenant $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E_3, de décomposition $\vec{u'} + \vec{u''}$ sur $\vec{D} \oplus \vec{Q}$. On a :

$$\left((\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}})(\vec{u}) = \vec{u}\right) \iff \left(\vec{u'} + (\sigma_{\vec{\Delta'}} \circ \sigma_{\vec{\Delta}})(\vec{u''}) = \vec{u'} + \vec{u''}\right)$$
$$\iff \left((\sigma_{\vec{\Delta'}} \circ \sigma_{\vec{\Delta}})(\vec{u''}) = \vec{u''}\right) \iff (\vec{u''} = \vec{0}) \iff (\vec{u} \in \vec{D}).$$

$\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}}$ est donc une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$. ■

On appelle **rotation vectorielle de E_3** toute transformation vectorielle qui admet comme sous-espace vectoriel de vecteurs invariants soit E_3, soit une droite vectorielle de E_3.

P4	Soient ρ et ρ' deux rotations vectorielles de E_3. Alors $\rho' \circ \rho$ et ρ^{-1} sont des rotations vectorielles de E_3.

Démonstration :
La démonstration est immédiate si l'une des rotations vectorielles ρ ou ρ' est l'identité de E_3. Supposons donc que ρ et ρ' soient deux rotations vectorielles de E_3, d'axes respectifs $\vec{D}$ et $\vec{D'}$, toutes les deux distinctes de Id_{E_3}.

- $\rho' \circ \rho$ est une rotation vectorielle de E_3.

Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel contenant $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ (ce plan n'est pas unique si $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont égales). D'après la propriété P_2, il existe des plans vectoriels $\vec{Q}$ et $\vec{Q'}$ tels que l'on ait : $\rho = \sigma_{\vec{P}} \circ \sigma_{\vec{Q}}$ et $\rho' = \sigma_{\vec{Q'}} \circ \sigma_{\vec{P}}$.
On a alors : $\rho' \circ \rho = (\sigma_{\vec{Q'}} \circ \sigma_{\vec{P}}) \circ (\sigma_{\vec{P}} \circ \sigma_{\vec{Q}}) = \sigma_{\vec{Q'}} \circ \sigma_{\vec{Q}}$.
De la propriété P_3, il résulte que $\rho' \circ \rho$ est une rotation vectorielle de E_3.

- ρ^{-1} est une rotation vectorielle de E_3.

Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel contenant $\vec{D}$. D'après la propriété P_2, il existe un plan vectoriel $\vec{Q}$ tel que l'on ait : $\rho = \sigma_{\vec{P}} \circ \sigma_{\vec{Q}}$.
On a alors : $\rho^{-1} = \sigma_{\vec{Q}}^{-1} \circ \sigma_{\vec{P}}^{-1} = \sigma_{\vec{Q}} \circ \sigma_{\vec{P}}$ et de la propriété P_3, il résulte que ρ^{-1} est une rotation vectorielle de E_3. ■

Remarque : La composée de deux rotations vectorielles de même axe $\vec{D}$ est une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$ ou l'identité de E_3.

P5	La composée d'un nombre pair de réflexions vectorielles est une rotation vectorielle de E_3.

Cette propriété résulte de façon immédiate des propriétés P_3 et P_4.

P6	La composée d'un nombre impair de réflexions vectorielles n'est pas une rotation vectorielle de E_3.

Démonstration :
D'après la propriété P_5, il suffit de démontrer que la composée d'une rotation vectorielle et d'une réflexion vectorielle n'est pas une rotation vectorielle.

Soient donc ρ une rotation vectorielle et σ une réflexion vectorielle. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde. Supposons donc que l'application $\rho \circ \sigma$ soit une rotation vectorielle ρ' de E_3.

On aurait : $(\rho \circ \sigma = \rho') \Longleftrightarrow (\rho'^{-1} \circ \rho \circ \sigma = \mathrm{Id}_{E_3})$

$$\Longleftrightarrow ((\rho'^{-1} \circ \rho) \circ \sigma \circ \sigma = \sigma) \Longleftrightarrow (\rho'^{-1} \circ \rho = \sigma).$$

De la propriété P_4, il résulte que $\rho'^{-1} \circ \rho$ serait une rotation vectorielle de E_3 et, d'après les définitions, il est impossible que cette rotation soit égale à la symétrie σ. ■

Cas où la dimension de F est égale à 0.

4.4 Dire que $\dim F = 0$ équivaut à dire que $F = \{\vec{0}\}$.

On a la propriété suivante :

> **P1** Soit f un élément de $\mathcal{O}(E_3)$ qui admet pour seul vecteur invariant le vecteur nul de E_3. Alors f est la composée de trois réflexions vectorielles.

Démonstration :

Il résulte des définitions que f n'est ni une rotation vectorielle ni une réflexion vectorielle.

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul de E_3 et $f(\vec{u})$ son image par f. Par hypothèse, les vecteurs $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont distincts et de même norme. De la propriété P_2 du paragraphe 2.6, il résulte l'existence d'une réflexion vectorielle σ pour laquelle on a : $\sigma(\vec{u}) = f(\vec{u})$.

On a donc aussi : $(\sigma \circ f)(\vec{u}) = \vec{u}$ ce qui signifie que la transformation orthogonale $\sigma \circ f$ de E_3 admet le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur invariant. La dimension du sous-espace vectoriel F de E_3 des vecteurs invariants par $\sigma \circ f$ est donc supérieure ou égale à 1.

Supposons que l'on ait : $\dim F = 3$.

On aurait alors : $\sigma \circ f = \mathrm{Id}_{E_3}$ et, par suite, $f = \sigma$, ce qui est impossible.

Supposons que l'on ait : $\dim F = 2$.

L'application $\sigma \circ f$ serait donc une réflexion vectorielle σ'. On aurait alors : $\sigma \circ f = \sigma'$ et par suite $f = \sigma \circ \sigma'$; l'application f serait alors une rotation vectorielle, ce qui est impossible.

On a donc nécessairement : $\dim F = 1$; l'application $\sigma \circ f$ est donc une rotation vectorielle d'axe F ; de la propriété P_2 du paragraphe 4.3, il résulte qu'il existe deux réflexions vectorielles, σ_1 et σ_2, telles que l'on ait : $\sigma \circ f = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

On a donc : $f = \sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$. ■

Exemples.

1. — Id_{E_3} est une transformation orthogonale de E_3 qui admet pour seul vecteur invariant le vecteur nul. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E_3 et σ_1, σ_2, σ_3 les réflexions vectorielles par rapport aux plans vectoriels engendrés respectivement par les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$, les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{i}$ et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Démontrons l'égalité : $-\mathrm{Id}_{E_3} = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E_3 de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\sigma_1(\vec{u}) = -x\vec{i} + (y\vec{j} + z\vec{k})$

$(\sigma_2 \circ \sigma_1)(\vec{u}) = (-x\vec{i} + z\vec{k}) - y\vec{j} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$

$(\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)(\vec{u}) = (-x\vec{i} - y\vec{j}) - z\vec{k} = -\vec{u}$.

2. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E_3 et f l'endomorphisme de E_3 défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}) \\ f(\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\vec{i} - \vec{j}) \\ f(\vec{k}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} + 3\vec{k}) \end{cases}$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f est un élément de $\mathcal{O}(E_3)$ (il suffit, par exemple, de démontrer que la famille $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ est une base orthonormée de E_3). Étudions l'ensemble des vecteurs de E_3 invariants par f. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E_3, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a :

$$\left(f(\vec{u}) = \vec{u}\right) \Longleftrightarrow \left(xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{2\sqrt{3}}z = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}z = y \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2\sqrt{3}}z = z \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{2\sqrt{3}}z = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)y - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - 1\right)z = 0 \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} -x\sqrt{3} + 2\sqrt{2}y - z = 0 \\ x\sqrt{6} - 2(1 + \sqrt{3})y - \sqrt{2}z = 0 \\ x + (\sqrt{3} - 2)z = 0 \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} -x\sqrt{3} + 2\sqrt{2}y - z = 0 \\ x(\sqrt{3} - 3) - z(3 + \sqrt{3}) = 0 \\ x + (\sqrt{3} - 2)z = 0 \end{cases}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} -x\sqrt{3} + 2\sqrt{2}y - z = 0 \\ x + (2 + \sqrt{3})z = 0 \\ x + (\sqrt{3} - 2)z = 0 \end{cases}\right)$$

Des deux dernières équations nous déduisons : $x = 0$ et $z = 0$; il en résulte $y = 0$.

Le système a pour solution unique le triplet $(0, 0, 0)$.

Par suite, on a : $\left(f(\vec{u}) = \vec{u}\right) \Longleftrightarrow \left(\vec{u} = \vec{0}\right)$

L'application f admet donc pour seul vecteur invariant le vecteur nul ; c'est donc la composée de trois réflexions vectorielles.

Sous-ensembles $\mathcal{O}_+(E_3)$ et $\mathcal{O}_-(E_3)$ de $\mathcal{O}(E_3)$.

4.5 Des propriétés énoncées dans les paragraphes 4.2, 4.3 et 4.4, nous dégageons les résultats et les définitions suivantes :

• On appelle $\mathcal{O}_+(E_3)$ l'ensemble des rotations vectorielles de E_3 et $\mathcal{O}_-(E_3)$ l'ensemble $\mathcal{O}(E_3) - \mathcal{O}_+(E_3)$. On dit aussi que $\mathcal{O}_+(E_3)$ (resp. $\mathcal{O}_-(E_3)$) est l'ensemble des **isométries vectorielles positives** (resp. **négatives**) de E_3.

• L'ensemble $\mathcal{O}_+(E_3)$ est l'ensemble des transformations orthogonales de $\mathcal{O}(E_3)$ dont le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 1 ou 3 ; c'est aussi l'ensemble des transformations orthogonales qui sont la composée d'un nombre pair de réflexions vectorielles.

• De même, l'ensemble $\mathcal{O}_-(E_3)$ est l'ensemble des transformations orthogonales de E_3 dont le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 0 ou 2 ; c'est aussi l'ensemble des transformations orthogonales de E_3 qui sont la composée d'un nombre impair de réflexions vectorielles.

• On a les propriétés suivantes :

P1	$\mathcal{O}_+(E_3)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E_3), \circ)$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété P_4 du paragraphe 4.3.

P2	Soient f un élément de $\mathcal{O}_+(E_3)$ et g un élément de $\mathcal{O}_-(E_3)$. Alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des éléments de $\mathcal{O}_-(E_3)$.

P3	Soient f et g deux éléments de $\mathcal{O}_-(E_3)$. Alors $g \circ f$ est un élément de $\mathcal{O}_+(E_3)$.

Les deux propriétés précédentes sont des conséquences immédiates des propriétés P_5 et P_6 du paragraphe 4.3.

P4	Tout élément de $\mathcal{O}(E_3)$ est la composée d'au plus trois réflexions vectorielles.

Cette propriété résulte de la propriété P_1 du paragraphe 4.2, de la propriété P_2 du paragraphe 4.3 et de la propriété P_1 du paragraphe 4.4.

Remarques.

1. Dans le plan vectoriel réel euclidien E_2, nous avons obtenu le résultat analogue : Tout élément de $\mathcal{O}(E_2)$ est la composée d'au plus deux symétries vectorielles orthogonales par rapport à une droite vectorielle.

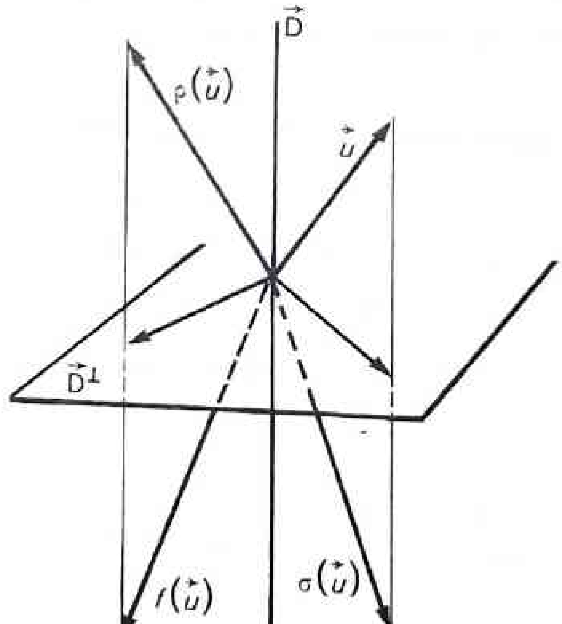
2. On peut interpréter les propriétés P_1, P_2 et P_3 de la façon suivante : on peut munir la paire $\{-1, +1\}$ d'une structure de groupe abélien en prenant comme loi de composition interne, la loi $\times$ dite « règle des signes ». Cette loi est d'ailleurs la restriction à $\{-1, +1\}$ de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

$\times$	-1	$+1$
-1	$+1$	-1
$+1$	-1	$+1$

Considérons maintenant l'application Δ de $\mathcal{O}(E_3)$ dans $\{-1, +1\}$ qui, à tout élément f de $\mathcal{O}(E_3)$, associe $+1$ si f est un élément de $\mathcal{O}_+(E_3)$ et -1 dans le cas contraire.
L'application Δ apparaît alors comme un homomorphisme du groupe $(\mathcal{O}(E_3), \circ)$ dans le groupe $(\{-1, +1\}, \times)$.
On peut définir de la même façon une application D de $\mathcal{O}(E_2)$ dans $\{-1, +1\}$. Cette application D associe à tout élément f de $\mathcal{O}(E_2)$ son déterminant dét f. On démontrera, dans des classes ultérieures, que l'application Δ définie ci-dessus associe aussi à tout élément f de $\mathcal{O}(E_3)$ son déterminant.

Forme réduite de la composée de trois réflexions vectorielles.

4.6 THÉORÈME : Soit f un élément de $\mathcal{O}_-(E_3)$ qui admette pour seul vecteur invariant le vecteur nul et qui soit distinct de $-\mathrm{Id}_{E_3}$. Alors il existe une unique droite vectorielle $\vec{D}$ et une unique rotation vectorielle ρ d'axe $\vec{D}$, telles que, si l'on note σ la réflexion vectorielle par rapport au plan vectoriel $\vec{D}^\perp$, l'on ait : $f = \rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.



On dit alors que l'on a mis f **sous forme réduite.** La démonstration de ce théorème est longue et délicate ; elle peut être laissée de côté en première lecture.

Démonstration :

On a l'égalité : $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E_3 de décomposition $\vec{u'} + \vec{u''}$ sur $\vec{D} \oplus \vec{D\perp}$.

On a : $(\rho \circ \sigma)(\vec{u}) = \rho[-\vec{u'} + \vec{u''}] = -\vec{u'} + \rho(\vec{u''})$

et : $(\sigma \circ \rho)(\vec{u}) = \sigma[\vec{u'} + \rho(\vec{u''})] = -\vec{u'} + \sigma[\rho(\vec{u''})]$.

L'application ρ est une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$ et le vecteur $\vec{u''}$ appartient à $\vec{D\perp}$; le vecteur $\rho(\vec{u''})$ appartient donc à $\vec{D\perp}$ et par suite, on a : $\sigma[\rho(\vec{u''})] = \rho(\vec{u''})$.

On a donc : $(\sigma \circ \rho)(\vec{u}) = -\vec{u'} + \rho(\vec{u''}) = (\rho \circ \sigma)(\vec{u})$.

L'application f^2 n'est pas l'identité de E_3. Il suffit de démontrer que f n'est pas une application involutive de $\mathcal{O}(E_3)$. D'après le paragraphe 2.7, nous savons que les applications involutives de $\mathcal{O}(E_3)$ sont : Id_{E_3}, les réflexions vectorielles, les symétries vectorielles orthogonales par rapport à une droite vectorielle et $-Id_{E_3}$.
La seule de ces applications qui admette pour seul vecteur invariant le vecteur nul est $-Id_{E_3}$ et, par hypothèse, f n'est pas égale à $-Id_{E_3}$.

Unicité. Soient $\vec{D}$ une droite vectorielle de E_3 et ρ une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$, s'il en existe, telles que l'on ait : $f = \rho \circ \sigma$ et, par suite, $f = \sigma \circ \rho$.
Nous venons de démontrer que f^2 n'est pas égale à Id_{E_3}; d'autre part, puisque f est un élément de $\mathcal{O}_-(E_3)$, l'application f^2 est un élément de $\mathcal{O}_+(E_3)$; des égalités $f^2 = (\rho \circ \sigma) \circ (\sigma \circ \rho) = \rho^2$ et de la remarque du paragraphe 4.3, il résulte que f^2 est une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$.
La droite vectorielle $\vec{D}$ est donc l'axe de la rotation vectorielle f^2 ; elle est donc unique.
Par suite, le plan vectoriel $\vec{D\perp}$ et la symétrie σ sont uniques. Enfin, de l'égalité $\rho = f \circ \sigma$, il résulte que ρ est unique.

Existence. Nous venons de voir que la droite vectorielle $\vec{D}$ est nécessairement l'axe de la rotation vectorielle f^2, distincte de Id_{E_3}.
Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\vec{D}$ et σ la réflexion vectorielle par rapport à un plan vectoriel $\vec{P}$ telle que l'on ait : $\sigma(\vec{u}) = f(\vec{u})$.
Considérons la rotation vectorielle $f \circ \sigma$. On a : $f \circ \sigma \neq Id_{E_3}$ et $(f \circ \sigma)(\vec{u}) = f^2(\vec{u})$; l'application f^2 est une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$; on a donc finalement : $(f \circ \sigma)(\vec{u}) = \vec{u}$.
Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur invariant de $f \circ \sigma$ qui est donc une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$. On a d'autre part : $(f \circ \sigma)\left(f(\vec{u})\right) = (f \circ \sigma)[\sigma(\vec{u})] = f(\vec{u})$.
Le vecteur non nul $f(\vec{u})$ appartient donc à $\vec{D}$ et, par suite, il en est de même du vecteur non nul $\vec{u} - f(\vec{u})$. Or, par définition de σ, le vecteur $\vec{u} - \sigma(\vec{u})$ appartient à la droite vectorielle $\vec{P\perp}$.
De l'égalité $\sigma(\vec{u}) = f(\vec{u})$, il résulte que l'on a : $\vec{D} = \vec{P\perp}$, ce qui équivaut à $\vec{P} = \vec{D\perp}$.
L'application σ est donc la réflexion vectorielle par rapport au plan vectoriel $\vec{D\perp}$; si l'on pose $\rho = f \circ \sigma$, on a bien : $f = \rho \circ \sigma$ et, par suite, $f = \sigma \circ \rho$. ■

Tableau récapitulatif des transformations orthogonales de E_1, E_2 et E_3.

4.7 Dans ce tableau, E_n désigne un espace vectoriel euclidien réel de dimension $n (n = 1, 2 \text{ ou } 3)$ et F désigne le sous-espace vectoriel de E_n des vecteurs invariants par les transformations orthogonales considérées.
Nous indiquons en gras, et entre parenthèses s'il y a lieu, les transformations orthogonales involutives.

n	dim F	$\mathcal{O}_+(E_n)$	$\mathcal{O}_-(E_n)$
1	1	$\mathbf{Id}_{E_1}$	
	0		$-\mathbf{Id}_{E_1}$
2	2	$\mathbf{Id}_{E_2}$	
	1		**symétries vectorielles orthogonales par rapport à une droite vectorielle**
	0	rotations vectorielles ($-\mathbf{Id}_{E_3}$)	
3	3	$\mathbf{Id}_{E_3}$	
	2		**réflexions vectorielles**
	1	rotations vectorielles d'axe une droite vectorielle **(demi-tours)**	
	0		composée de trois réflexions vectorielles ($-\mathbf{Id}_{E_3}$)

5. Orientation d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension 2 ou 3.

Nous allons définir l'orientation d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension 1, 2 ou 3 ; ceci permettra de rappeler les résultats obtenus en classe de Première dans le cas où la dimension est 1 ou 2 et de généraliser ces résultats au cas où la dimension est 3.

Définition.

Désignons par E_n un espace vectoriel réel euclidien de dimension n ($n = 1, 2$ ou 3) et par $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des bases orthonormées de E_n.
Si f est un automorphisme de E_n et si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n nous **notons, par abus de langage, $f(B)$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.**

5.1 THÉORÈME : **Soient B et B′ deux éléments de $\mathcal{B}_n$. Alors il existe une unique transformation orthogonale f de E_n telle que l'on ait : $B' = f(B)$.**

Démonstration :
Supposons que l'on ait : $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$.
L'application f est nécessairement l'endomorphisme de E_n défini par :
$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad f(e_i) = e'_i$.
D'autre part, de la propriété P_3 du paragraphe 2.3, il résulte que f est bien un élément de $\mathcal{O}(E_n)$. ■

Exemple.

Supposons $n = 2$ et considérons les bases orthonormées suivantes : $B = (\vec{i}, \vec{j})$, $B' = (\vec{i}, -\vec{j})$ et $B'' = (-\vec{i}, -\vec{j})$. L'unique élément f de $\mathcal{O}(E_2)$ tel que $f(B) = B'$ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{i}$; c'est un élément de $\mathcal{O}_-(E_2)$.
L'unique élément g de $\mathcal{O}(E_2)$ tel que $g(B) = B''$ est $-\mathrm{Id}_{E_2}$; c'est un élément de $\mathcal{O}_+(E_2)$.

5.2 THÉORÈME : **Soit $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathcal{B}_n$ par :**
$\forall (B, B') \in \mathcal{B}_n^2, \quad \big((B \,\mathcal{R}\, B') \iff (\exists f \in \mathcal{O}_+(E_n), \quad f(B) = B')\big)$.
La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{B}_n$ et l'ensemble quotient $\mathcal{B}_n/\mathcal{R}$ a deux éléments.

Démonstration :
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{B}_n$.
- $\mathcal{R}$ est réflexive.

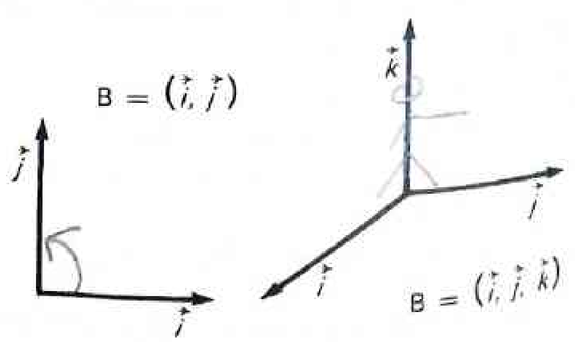
Id_{E_n} est un élément de $\mathcal{O}_+(E_n)$ et l'on a : $\forall B \in \mathcal{B}_n, \quad B = (\mathrm{Id}_{E_n})(B)$.

• $\mathcal{R}$ est symétrique.
Soient B et B′ deux éléments quelconques de $\mathcal{B}_n$. On a :
$(B\ \mathcal{R}\ B') \Longleftrightarrow (\exists f \in \mathcal{O}_+(E_n),\quad f(B) = B') \Longleftrightarrow (\exists f \in \mathcal{O}_+(E_n),\quad B = f^{-1}(B'))$.
L'ensemble $\mathcal{O}_+(E_n)$ est un groupe pour la loi $\circ$. L'application f^{-1} appartient donc à $\mathcal{O}_+(E_n)$ et l'on a : $(B\ \mathcal{R}\ B') \Longrightarrow (B'\ \mathcal{R}\ B)$.
• $\mathcal{R}$ est transitive.
Soient B, B′ et B″ trois éléments quelconques de $\mathcal{B}_n$. On a :
$$\left(\begin{array}{l} B\ \mathcal{R}\ B' \\ B'\ \mathcal{R}\ B'' \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ll} \exists f \in \mathcal{O}_+(E_n), & f(B) = B' \\ \exists g \in \mathcal{O}_+(E_n), & g(B') = B'' \end{array}\right)$$
On a donc : $(g \circ f)(B) = B''$ et l'application $g \circ f$ appartient à $\mathcal{O}_+(E_n)$.
On a donc : $(B\ \mathcal{R}\ B'$ et $B'\ \mathcal{R}\ B'') \Longrightarrow (B\ \mathcal{R}\ B'')$.
$\mathcal{B}_n/\mathcal{R}$ **a deux éléments.** Nous rappelons que, si B est une base orthonormée de E_n et si f est un élément de $\mathcal{O}(E_n)$, alors $f(B)$ est une base orthonormée de E_n.
• $\mathcal{B}_n/\mathcal{R}$ a au moins deux éléments.
Soient B un élément de $\mathcal{B}_n$ et f un élément de l'ensemble non vide $\mathcal{O}_-(E_n)$. Posons $B' = f(B)$; l'application f est donc l'élément de $\mathcal{O}(E_n)$ qui transforme la base B en la base B′ ; f n'appartient pas à $\mathcal{O}_+(E_n)$; les bases B et B′ ne sont donc pas équivalentes et, par suite, n'appartiennent pas à la même classe.
• $\mathcal{B}_n/\mathcal{R}$ a au plus deux éléments.
Soient B et B′ deux éléments non équivalents de $\mathcal{B}_n$ et B″ un élément de $\mathcal{B}_n$.
Soient f et g les uniques éléments de $\mathcal{O}(E_n)$ tels que : $f(B) = B''$ et $g(B'') = B'$.
On a alors : $(g \circ f)(B) = B'$.
Les bases B et B′ ne sont pas équivalentes ; $g \circ f$ appartient donc à $\mathcal{O}_-(E_n)$ et par suite, d'après l'étude des composées d'éléments de $\mathcal{O}_+(E_n)$ et de $\mathcal{O}_-(E_n)$, on a :
$(f \in \mathcal{O}_+(E_n)$ et $g \in \mathcal{O}_-(E_n))$ ou $(f \in \mathcal{O}_-(E_n)$ et $g \in \mathcal{O}_+(E_n))$
ce qui implique : $B\ \mathcal{R}\ B''$ ou $B'\ \mathcal{R}\ B''$.
La base B″ appartient donc soit à la classe de B, soit à celle de B′. ■

5.3 **DÉFINITION : Orienter E_n c'est choisir l'un des deux éléments de $\mathcal{B}_n/\mathcal{R}$ pour classe des bases orthonormées directes (ou positives) ; l'autre classe est alors appelée classe des bases orthonormées indirectes (ou négatives).**

Deux bases orthonormées qui appartiennent à la même classe sont dites **de même sens** ; deux bases orthonormées qui n'appartiennent pas à la même classe sont dites **de sens contraires.**

Remarques : 1. On peut orienter le même espace vectoriel de deux façons différentes et deux seulement.
2. Dans le cas où n est égal à 1, il n'y a que deux bases orthonormées ; orienter E_1, c'est choisir l'une de ces bases pour base orthonormée directe ; l'autre est alors une base orthonormée indirecte.
3. Il est d'usage de dessiner une base orthonormée directe de E_2 et de E_3 comme nous l'indiquons ci-contre.



Cas d'un plan vectoriel réel euclidien.

5.4 Soient E_2 un plan vectoriel réel euclidien orienté et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de E_2. On a les propriétés suivantes :

> **P1** Les bases $(\vec{j}, -\vec{i})$, $(-\vec{i}, -\vec{j})$ et $(-\vec{j}, \vec{i})$ sont orthonormées directes et les bases $(\vec{j}, \vec{i})$, $(\vec{i}, -\vec{j})$, $(-\vec{j}, -\vec{i})$ et $(-\vec{i}, \vec{j})$ sont orthonormées indirectes.

Démonstration :

Considérons par exemple la base $(\vec{i}, -\vec{j})$; la matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, de la transformation orthogonale qui transforme $(\vec{i}, \vec{j})$ en $(\vec{i}, -\vec{j})$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

C'est la matrice d'une symétrie vectorielle de E_2 et, par suite, les bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i}, -\vec{j})$ sont de sens contraires. On fait de même pour les autres bases. ■

> **P2** Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E_2, de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Alors le vecteur $\vec{v}$ de composantes $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est l'unique vecteur de E_2 tel que la base $(\vec{u}, \vec{v})$ soit orthonormée directe.

Démonstration :

Soit f l'automorphisme de E_2 défini par : $f(\vec{i}) = \vec{u}$ et $f(\vec{j}) = \vec{v}$. La matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. C'est la matrice d'une rotation vectorielle de E_2 et, par suite, les bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ sont de même sens. La base $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc orthonormée directe.

D'autre part, il existe seulement deux bases orthonormées de premier vecteur $\vec{u}$. Puisque $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'une d'elles, l'autre est $(\vec{u}, -\vec{v})$. Il résulte, alors, de la propriété P_1, que $(\vec{u}, -\vec{v})$ est une base orthonormée indirecte. ■

Cas d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3.

Soient E_3 un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E_3.

Propriétés.

5.5 Nous allons donner quelques exemples de bases de même sens ou de sens contraires.

> **P1** Les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont de même sens.

Démonstration :

Considérons, par exemple, la base $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$.

Soit f l'automorphisme de E_3 défini par : $f(\vec{i}) = \vec{j}, \quad f(\vec{j}) = \vec{k}$ et $f(\vec{k}) = \vec{i}$.

Il suffit de démontrer que f appartient à $\mathcal{O}_+(E_3)$. Considérons pour cela le sous-espace vectoriel F de E_3 des vecteurs invariants par f.

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E_3, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a : $\left(f(\vec{u}) = \vec{u}\right) \Longleftrightarrow \left(xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$

$$\Longleftrightarrow \left(x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{i} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases}\right) \Longleftrightarrow (x = y = z).$$

F est donc la droite vectorielle engendrée par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; l'application f est donc une rotation vectorielle d'axe F ; elle appartient à $\mathcal{O}_+(E_n)$.

Démonstration analogue pour $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$. ■

> **P2** Les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ sont de sens contraires ; les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ sont de sens contraires.

Démonstration analogue à celle de la propriété P_1.

> **P3** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux de E_3. Alors il existe un unique vecteur $\vec{w}$ de E_3 tel que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de E_3.

Démonstration :

Soit $\vec{P}$ le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le vecteur $\vec{w}$, s'il existe, est un vecteur unitaire de la droite vectorielle $\vec{P}^{\perp}$; cette droite vectorielle admet deux vecteurs unitaires opposés $\vec{w_1}$ et $-\vec{w_1}$. Les familles $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_1})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w_1})$ sont des bases orthonormées de E_3 et il résulte de la propriété P_2 qu'elles sont de sens contraires. Il y en a donc une et une seule qui est directe. ■

Orientation d'un plan vectoriel de E_3.

5.6 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel de E_3 et $\vec{D}$ la droite vectorielle $\vec{P}^{\perp}$. Le sous-espace vectoriel $\vec{P}$ (resp. $\vec{D}$) de E_3 est un espace vectoriel réel euclidien de dimension 2 (resp. 1) ; on peut l'orienter de deux façons différentes.

Supposons $\vec{P}$ et $\vec{D}$ orientés ; soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de $\vec{P}$ et $\vec{k}$ une base orthonormée directe de $\vec{D}$.

Nous dirons que **les orientations de $\vec{P}$ et de $\vec{D}$ sont compatibles** si et seulement si la famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E_3.

On démontre et nous admettons que, si la famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E_3, alors, pour toute base orthonormée directe $(\vec{i}', \vec{j}')$ de $\vec{P}$, la famille $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$ est aussi une base orthonormée directe de E_3.

Soit $\vec{n}$ l'un des deux vecteurs unitaires de $\vec{D}$. Il résulte de cette propriété que toutes les bases orthonormées $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$ telles que la famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{n})$ soit une base orthonormée directe de E_3 sont de même sens dans $\vec{P}$. Choisir ces bases comme bases orthonormées directes de $\vec{P}$, c'est **orienter $\vec{P}$ par la donnée du vecteur $\vec{n}$.**
Le vecteur $\vec{n}$ est appelé **vecteur normal à** $\vec{P}$ et la demi-droite engendrée par $\vec{n}$, c'est-à-dire $\{\vec{u} \in E_3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \vec{u} = \lambda \vec{n}\}$ est appelée **demi-normale positive de** $\vec{P}$.

AREV : Exercice 18, 21, 37, 38

EXERCICES

Orthogonalité dans un espace vectoriel euclidien.

1 On désigne par E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ et par φ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall((a,b), (a',b')) \in E^2$, $\varphi((a,b), (a',b')) = aa' + 5bb'$.
L'application φ est-elle un produit scalaire sur E ? oui c'est un produit scalaire
Dans l'affirmative, donnez une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.
$(e_1, e_2) = ((1;0);(0,\frac{1}{\sqrt{5}}))$ en est une. Base orthonormée.

2 Mêmes questions que pour le n° 1 avec $E = \mathbb{R}^2$ et φ définie par :
$\forall((a,b), (a',b')) \in E^2$, $\varphi((a,b), (a',b')) = aa' + ab' + ba' - bb'$. $(a+b)^2 - 2b^2$ n'est pas un produit scalaire car ce n'est pas toujours positive

3 Mêmes questions que pour le n° 1 dans le cas suivant : E est l'espace vectoriel des fonctions affines et φ est définie par :
$\forall(f,g) \in E^2$, $\varphi(f,g) = f(x_0)\,g(x_0)$ où x_0 est un nombre réel donné. c'est pas un produit scalaire car φ n'est pas défini positive en effet $\varphi(f,f) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$ $\forall a, b$

4 Mêmes questions que pour le n° 1 dans le cas suivant : E est l'espace vectoriel des fonctions affines et φ est l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante : si f et g sont deux applications quelconques de E^2, définies par :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax + b$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto a'x + b'$

alors on a : $\varphi(f,g) = 4aa' + ab' + ba' + bb'$. φ est bien un produit scalaire voici une φ-base orthonormée. Comme (1,0), (0,1) est une base en utilisant Gram-Schmidt la base orthonormée est : [illegible]

5 Mêmes questions que pour le n° 1 avec $E = \mathbb{R}^3$ et φ définie par :
$\forall((a,b,c), (a',b',c')) \in E^2$,
$$\varphi((a,b,c), (a',b',c')) = aa' + 6bb' + 5cc' - 4(bc' + cb').$$

6 Soient E un plan vectoriel réel euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Soit E′ le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$. Déterminer le sous-espace vectoriel orthogonal de E′. $E'^{\perp} = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 / 2x+3y=0 \}$

ie $E'^{\perp} = \langle -3\vec{i} + 2\vec{j} \rangle$

7 Même question que pour le n° 6 dans le cas où E′ est l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $x - y = 0$. x−y est la droite

vectoriel engendré par $\vec{i} + \vec{j}$

8 Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E.
Soit E′ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs :
$\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$.
Déterminer le sous-espace vectoriel orthogonal de E′. c'est la droite vectoriel $\begin{cases} \sqrt2 x - \sqrt2 y = \\ x + \sqrt3 y + \sqrt3 \end{cases}$

$E'^{\perp} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} \sqrt2 x - \sqrt2 y = 0 \\ x + \sqrt3 y + \sqrt3 z = 0 \end{matrix} \}$

9 Même question que pour le n° 8 dans le cas où E′ est l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $5x - 2y - z = 0$.

$E'^{\perp} = \langle 5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \rangle$ = droite vectoriel

10 Même question que pour le n° 8 dans le cas où E′ est le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur : $\vec{i} + (1 - \sqrt{3})\vec{j} - \vec{k}$.

$E'^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + (1-\sqrt3) y - z = 0 \}$ = plan vectoriel

11 Même question que pour le n° 8 dans le cas où E′ est l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0. \end{cases}$

12 Soient E un plan vectoriel réel euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Soient m un réel, E'_m le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur : $m^2\vec{i} + \vec{j}$ et E''_m celui engendré par le vecteur : $(2m + 4)\vec{i} + (5m + 3)\vec{j}$.
Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels les sous-espaces vectoriels E'_m et E''_m sont orthogonaux. $E'_m \perp E''_m \iff m^2(2m+4) + 5m + 3 = 0$ ie $2m^3 + 4m^2 + 5m + 3$

−1 est une racine évidente ie $(m+1)(2m^2+2m+3) = 0 \Rightarrow m = -1$

13 Même question que pour le n° 12 dans le cas suivant : E est un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de E et E'_m (resp. E''_m) est l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $-x + y + z = 0$ $\left(\text{resp. } \begin{cases} (m^2 - 2)x + y + z = 0 \\ -x + m^2 y + (1 - 3m)z = 0 \end{cases}\right)$

14 Même question que pour le n° 12 dans le cas suivant : E est un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de E et E'_m (resp. E''_m) est l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $x + 2y + z = 0$ $\left(\text{resp. } \begin{cases} (m - 4)x + 4y - (4 + m)z = 0 \\ 2mx - my + 5z = 0 \end{cases}\right)$.

→ Suite : $\dim V^\perp + \dim W^\perp = (\dim E - \dim V) + (\dim E - \dim W) = 2\dim E - (\dim V + \dim W)$
d'où $\dim V^\perp + \dim V^\perp = \dim E$

15 Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie et V et W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $V^\perp$ et $W^\perp$ sont supplémentaires dans E.

16 Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie et V et W deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que l'on a : $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ et $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$.

Projections orthogonales et endomorphismes orthogonaux.

17 Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie, E′ un sous-espace vectoriel de E et E″ le sous-espace vectoriel orthogonal de E′.
On appelle **projection orthogonale sur** E′ la projection vectorielle sur E′ de direction E″. $P_{E'}(x) = x'$ P_E est linéaire
Démontrer que cette application n'est pas un endomorphisme orthogonal de E.
$\|P_{E'}(x)\| = \|x'\| \neq \|x' + x''\| = \|x\|$

18 Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ deux plans vectoriels distincts de E. Soient p et q les projections orthogonales respectives sur $\vec{P}$ et sur $\vec{Q}$ (cf. exercice nº 17).

1° Montrer que l'on peut trouver trois vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}$ tels que :
- $\vec{i}$ soit une base de $\vec{P} \cap \vec{Q}$.
- $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i}, \vec{u})$ soient des bases orthonormées respectives de $\vec{P}$ et de $\vec{Q}$.

2° On pose : $a = \vec{j}.\vec{u}$. Calculer : $p(\vec{j})$, $p(\vec{u})$, $q(\vec{j})$ et $q(\vec{u})$.

3° Calculer : $(p \circ q)(\vec{j})$ et $(q \circ p)(\vec{j})$. En déduire une condition nécessaire pour que l'on ait : $p \circ q = q \circ p$.

4° Montrer que la condition trouvée est aussi suffisante.

5° On suppose que l'on a : $p \circ q = q \circ p$. Préciser alors la nature de l'endomorphisme $p \circ q$. Que peut-on dire de l'endomorphisme $p + q - p \circ q$?

19 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel réel euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\vec{P}$. Soient φ un nombre réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$ et f l'application de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur $\vec{v}$ dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ sont : $\begin{cases} x' = x\cos^2\varphi + y\sin\varphi\cos\varphi \\ y' = x\sin\varphi\cos\varphi + y\sin^2\varphi. \end{cases}$ $f \circ f = f$

1° Calculer $f \circ f$. Quelle est la nature de f ?

2° Soit $\vec{a}$ le vecteur égal à : $\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$. Calculer $\vec{u}.\vec{a}$ et $\vec{v}.\vec{a}$.

3° Soit $\vec{b}$ un vecteur tel que la famille $(\vec{a}, \vec{b})$ soit une base orthonormée de E. Calculer $\vec{u}.\vec{b}$ et $\vec{v}.\vec{b}$. Que peut-on en déduire pour f ?

Il s'agit plutôt de $\vec{P}$

20 Soient E un plan vectoriel réel euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Soient f un endomorphisme de E et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

1° Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté f^*, tel que l'on ait : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $f(\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.f^*(\vec{v})$. On pourra déterminer $f^*(\vec{i})$ et $f^*(\vec{j})$.
On dit que f^* est l'endomorphisme adjoint de f et on note M^* la matrice de f^* dans $\mathcal{B}$. Calculer M^*. Donner une méthode simple pour calculer M^* à partir de M.

$M^* = {}^tM$

$(\mathrm{Im}\,u^*)^\perp = \mathrm{Ker}\,u \Rightarrow (\mathrm{Im}\,u) = \mathrm{Ker}\,u^*$

2° Démontrer que l'on a : $f^{**} = f$ et $(\mathrm{Id_E})^* = \mathrm{Id_E}$.

3° Soient f et g deux endomorphismes de E et λ un réel.

Démontrer que l'on a les égalités :

$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ $\quad f(u).v = u.f^*(v) \Rightarrow (g\circ f)(u).v = f(u).g^*(v) = u.(f^*\circ g^*)(v)$

$(f + g)^* = f^* + g^*$ $\quad u.(f+g)^*(v) = (f+g)(u).v = f(u).v + g(u).v = u.f^*(v) + u.g^*(v)$

$(\lambda f)^* = \lambda f^*$. $\quad u.(\lambda f)^*(v) = (\lambda f)(u).v = f(u).\lambda v = u.f^*(\lambda v) = u.\lambda f^*(v)$

4° On suppose, de plus, que f est bijectif.

Démontrer que f est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si on a : $f^* = f^{-1}$.

※ **21** Soient E un plan vectoriel réel euclidien et V et W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soient p la projection vectorielle sur V de direction W et p^* l'endomorphisme adjoint de p défini comme dans l'exercice n° 20.

1° Démontrer que p^* est un projecteur de E. (On pourra utiliser les résultats de l'exercice n° 20.)

2° Soit q la projection vectorielle sur $W^\perp$ de direction $V^\perp$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E, de décomposition $\vec{u}' + \vec{u}''$ sur $V \oplus W$. Démontrer que l'on a : $\forall \vec{v} \in E,\ \ \vec{u}.q(\vec{v}) = \vec{u}'.\vec{v}$.

En déduire que l'on a : $q = p^*$.

3° Démontrer que p est une projection orthogonale (cf. ex. n° 17) si et seulement si on a : $p = p^*$.

22 Soient V et W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel euclidien, de dimension finie, E et soient p et q les projections orthogonales sur V et W respectivement (cf. ex. n° 17).

Soit $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E. On suppose que l'on a : $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.

1° Montrer que l'application r égale à $p + q$ est un projecteur de E. $(p+q)^2 = p+q$

2° Montrer que l'on a : $V \cap W = \{0_E\}$.

3° On pose $U = \mathrm{Im}\, r$. Montrer que l'on a : $U = V \oplus W$.

4° Montrer que l'on a : $\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q = U^\perp$. En déduire la nature du projecteur r.

23 Trouver les homothéties vectorielles d'un espace vectoriel réel euclidien E qui sont des transformations orthogonales de E. $\|h_\lambda(\vec{u})\| = \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$

24 Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie supérieure ou égale à 1 et soit x un vecteur non nul de E.

1° Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{O}(E)$ défini par : $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid f(x) = x\}$.

Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$.

2° Même question que pour le 1° avec le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}(E)$ défini par : $\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid f(x) = -x\}$. NB $\mathrm{id_E}(x) = x$ ie $\mathrm{id_E} \notin \mathcal{G}$

$\mathcal{G}$ n'est pas sous groupe

25 Soit E un espace vectoriel réel euclidien.

1° Soient f un endomorphisme orthogonal de E.

Trouver tous les réels λ tels que λf soit un endomorphisme orthogonal de E.

2° Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E. Trouver tous les vecteurs $\vec{v}$ de E tels que l'on ait : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Utiliser le résultat obtenu pour démontrer que la somme de deux endomorphismes orthogonaux de E n'est pas en général un endomorphisme orthogonal de E.

Endomorphismes orthogonaux d'un plan vectoriel réel euclidien E.

26 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Soient m un nombre réel et f_m l'endomorphisme de E dont la matrice A_m dans $\mathcal{B}$ est :

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} m^2 - 1 & -m + (2 + \sqrt{2}) \\ 2[m - (1 + \sqrt{2})] & 1 \end{pmatrix}.$$

$A_{\sqrt2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$

Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels l'endomorphisme f_m est orthogonal. Préciser alors la nature de f_m.

$\begin{cases} m^2-1=1 \\ 2(m-(1+\sqrt2)) = m-(2+\sqrt2) \end{cases}$ (E_1) ou $\begin{cases} m^2-1=-1 \\ 2[m-(1+\sqrt2)] = -m+(2+\sqrt2) \end{cases}$ (E_2)

$S_{E_1} = \sqrt2$ rotation vect

$S_{E_2} = \emptyset$

27 Mêmes questions que pour le n° 26 avec : $A_m = \begin{pmatrix} m - \frac{1}{4} & m + \frac{1}{2} \\ m + \frac{1}{2} & -m + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. $= \begin{pmatrix} m-\frac14 & m+\frac12 \\ m+\frac12 & -(m-\frac14) \end{pmatrix}$

$\forall m \in \mathbb{R}$, f_m est une symétrie vectorielle

28 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Soient m un nombre réel et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les deux vecteurs de E définis par : $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + m\vec{j}$. $m \in \{-\sqrt{21}, \sqrt{21}\}$

1° Déterminer les réels m pour lesquels on a : $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$.

2° Dans chacun des cas où l'on a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, trouver l'unique symétrie vectorielle qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et l'unique rotation vectorielle qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$. On donnera les matrices dans $\mathcal{B}$ de ces applications. posons $\begin{cases} s(\vec i) = a\vec i + b\vec j \\ s(\vec j) = b\vec i - a\vec j \end{cases}$ et $s(\vec u) = \vec v$

et $\begin{cases} r(\vec i) = a\vec i + b\vec j \\ r(\vec j) = -b\vec i + a\vec j \end{cases}$ et $r(\vec u) = \vec v$

29 Mêmes questions que pour le n° 28 avec :
$\vec{u} = \sqrt{m}\,\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = (m - 1)(\vec{i} + \vec{j})$.

30 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E et E′ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $5\vec{i} - 3\vec{j}$ de E. $\vec D : 3x+5y=0$

Écrire la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle E′. $M(s) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $s(5\vec i - 3\vec j) = 5\vec i - 3\vec j$ $\begin{cases} 5a-3b=5 \\ 3a+5b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{8}{17} \\ b=\frac{-15}{17} \end{cases}$

31 Même question que pour le n° 30 dans le cas où E′ est l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $\sqrt{5}x + y = 0$. $= \langle \vec i - \sqrt5 \vec j \rangle$

32 Même question que pour le n° 30 dans le cas où E′ est le sous-espace vectoriel orthogonal du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par la symétrie vectorielle dont la matrice, dans $\mathcal{B}$, est égale à : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

33 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Soient f la rotation vectorielle dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est égale à : $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et σ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ de F.

déterminer d'abord $M(r)$

Trouver les deux symétries vectorielles orthogonales σ' et σ'' telles que l'on ait : $f = \sigma' \circ \sigma = \sigma \circ \sigma''$. $M(\sigma') = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $M(\sigma'') = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$

On donnera, pour chacune d'elles, la matrice dans $\mathcal{B}$ et la droite vectorielle des vecteurs invariants.

$M(f) = M(\sigma') \times M(\sigma) = M(\sigma) \times M(\sigma'')$

34 Même question que pour le n° 33 dans le cas où f et σ sont les endomorphismes de E dont les matrices respectives dans $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\sigma(\vec{j}) = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$

35 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E.

1° Soit σ la symétrie vectorielle orthogonale de E définie par : $\sigma(\vec{i}) = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$.

Trouver toutes les rotations vectorielles f qui commutent avec σ, c'est-à-dire telles que l'on ait : $f \circ \sigma = \sigma \circ f$.

2° Même question que pour le 1° dans le cas où σ est une symétrie vectorielle orthogonale quelconque de E.

$f^3 = 1$ $(\mathcal{F}, \circ) = (\{id, f, f^2\}, \circ)$ est un groupe Abel

36 Déterminer, par le calcul matriciel, l'ensemble $\mathcal{F}$ des rotations vectorielles f de E telles que l'on ait : $f^3 = \mathrm{Id}_E$. Que peut-on dire de $(\mathcal{F}, \circ)$?

37 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est égale à : $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $A^{-1} = {}^tA = A$

1° Quelle est la nature de f? symétrie vectoriel

2° Démontrer qu'il existe deux droites vectorielles de E globalement invariantes par f.

3° Démontrer que le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ est un vecteur unitaire de l'une de ces droites.

4° Trouver un vecteur unitaire $\vec{u'}$ de l'autre droite vectorielle tel que l'on ait : $\vec{u'}.\vec{i} > 0$.

5° Démontrer que la famille $(\vec{u}, \vec{u'})$ est une base orthonormée de E et trouver la matrice de f dans cette base.

38 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est égale à : $\begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$.

Démontrer qu'il existe une rotation vectorielle r et un endomorphisme g de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \geqslant \beta$ tels que l'on ait : $f = r^{-1} \circ g \circ r$.

Déterminer α, β et la matrice de r dans $\mathcal{B}$.

39 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E et α un réel positif. On pose : $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{i} + \alpha\vec{j}$.

1° Comment faut-il choisir le réel α pour qu'il existe une rotation vectorielle r telle que l'on ait : $r(\vec{u}) = \vec{v}$? Déterminer alors la matrice de r dans $\mathcal{B}$.

Il faut que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Rightarrow \alpha \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

2° On pose $\vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Montrer qu'il existe une isométrie vectorielle négative, s, et une seule telle que : $\vec{w} = (s \circ r)(\vec{u})$. Déterminer la matrice de s dans $\mathcal{B}$.

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Rightarrow \exists s' \in O_2^- / s'(\vec{u}) = \vec{v}$ prendre $s = r^{-1} \circ s'$

40 Reprendre l'exercice n° 24 dans le cas où E est de dimension 2.
Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont finis et donner tous les éléments de chacun de ces deux ensembles.

Endomorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel réel euclidien E de dimension 3. $\mathcal{F} = \{f \in O(E) \mid f(x) = x\}$; posons : $\Sigma(x)$ la famille des plans vectoriel contenant x, $|\Sigma(x)| \geq +\infty$ car un élément $\vec{P}$ de $\Sigma(x)$ s'obtient en choisissant $y \in E / (x, y)$ libre, donc $\{s_{\vec{P}} / \vec{P} \in \Sigma(x)\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow |\mathcal{F}| \geq +\infty$

41 Reprendre l'exercice n° 24 dans le cas où E est de dimension 3.
1° Démontrer que $\mathcal{F}$ n'est pas fini. Trouver toutes les rotations vectorielles et toutes les isométries vectorielles négatives de $\mathcal{F}$. Quels sont les éléments involutifs de $\mathcal{F}$? Les rotations vectorielles de $\mathcal{F}$ forment-elles un sous-groupe de $(\mathcal{F}, \circ)$? oui
2° Mêmes questions que pour le 1° avec l'ensemble $\mathcal{G}$.

42 Soient f un endomorphisme orthogonal de E et E′ le sous-ensemble de E défini par : $E' = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$. $0_E \in E'$ et $\forall x, y \in E', \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f(\alpha x + \beta y) = -(\alpha x + \beta y)$
1° Démontrer que E′ est un sous-espace vectoriel de E.
2° Déterminer la nature de f suivant la dimension de E′. On étudiera successivement les quatre cas suivants : $\dim E' = 0$, $\dim E' = 1$, $\dim E' = 2$, $\dim E' = 3$.
- si $\dim E' = 3$, $f = -Id_E$; si $\dim E' = 2$, $f = s_{E'}$; si $\dim E' = 1$

43 Soient $\vec{D}$ une droite vectorielle de E et $\vec{P}$ le plan vectoriel de E, orthogonal à $\vec{D}$.
Soient f le demi-tour d'axe $\vec{D}$ et g la réflexion vectorielle par rapport à $\vec{P}$.
1° Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2° Démontrer que le plus petit sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ qui contient f et g est égal à $\{Id_E, -Id_E, f, g\}$. En donner la table de Pythagore.

44 Soient $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$ trois droites vectorielles de E, deux à deux orthogonales et f_1, f_2, f_3 les demi-tours d'axes respectifs $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$.
Démontrer que $\{Id_E, f_1, f_2, f_3\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E_3), \circ)$. Donner sa table de Pythagore.

45 Soient $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ trois plans vectoriels de E, deux à deux orthogonaux et f_1, f_2, f_3 les réflexions vectorielles respectives par rapport à $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$.
Trouver le plus petit sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ qui contient f_1, f_2 et f_3. Donner sa table de Pythagore.

46 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E et f la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel $\vec{P}$ engendré par les vecteurs $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{k}$.
Calculer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$.

47 Même question que pour le n° 46 dans le cas où $\vec{P}$ est l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $x - y + z = 0$.

48 Même question que pour le n° 46 dans le cas où f est le demi-tour d'axe la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.

49 Même question que pour le n° 46 dans le cas où f est le demi-tour d'axe la droite vectorielle égale à l'ensemble des vecteurs de E dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$

50 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E et f et g les deux endomorphismes de E définis respectivement par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} \\ f(\vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k}) \\ f(\vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{j} + \vec{k}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(\vec{i}) = \vec{i} \\ g(\vec{j}) = \vec{k} \\ g(\vec{k}) = \vec{j}. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une rotation vectorielle de E dont on donnera l'axe et que g est une réflexion vectorielle par rapport à un plan vectoriel $\vec{P}$ que l'on déterminera.
2° Déterminer les images respectives des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par chacune des deux réflexions vectorielles g' et g'' telles que l'on ait : $f = g' \circ g = g \circ g''$.

51 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E et f l'endomorphisme de E qui, à tout vecteur de E, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont à : $\begin{cases} x' = -z \\ y' = x \\ z' = y. \end{cases}$

1° Démontrer que f appartient à $\mathcal{O}(E)$.
2° Trouver le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par f. En déduire la nature de f.
3° Calculer $(f \circ f)(\vec{i})$, $(f \circ f)(\vec{j})$ et $(f \circ f)(\vec{k})$. On sait (cf. n° 4.6) que $f \circ f$ est une rotation vectorielle de E ; déterminer l'axe $\vec{D}$ de $f \circ f$.
4° Déterminer le plan vectoriel $\vec{P}$ orthogonal à $\vec{D}$.
5° En déduire la forme réduite de f.

Orientation d'un espace vectoriel réel euclidien.

52 Soient E un espace vectoriel réel euclidien orienté, de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E.

On pose : $$\begin{cases} \vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}) \\ \vec{v} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} - 2\sqrt{2}\,\vec{k}) \\ \vec{w} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k}). \end{cases}$$

1° Démontrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de E.
2° Cette base est-elle de sens direct ou de sens indirect ?

53 Même question que pour le n° 52 dans le cas où l'on a les égalités :

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{k} \\ \vec{v} = \cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{w} = \sin\varphi\,\vec{i} - \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} - \cos\theta\cos\varphi\,\vec{k} \end{cases}$$

dans lesquelles θ et φ sont deux réels de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

54 Soient E un espace vectoriel réel euclidien orienté, de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E.

On pose : $\vec{u} = \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{\sqrt{15}}{5}\vec{j} - \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{k}.$

Trouver une base orthonormée directe de E, de premier vecteur $\vec{u}$.

55 Soient E un espace vectoriel réel euclidien orienté, de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E.

On pose : $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ et $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$

1° Vérifier que l'on a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u}.\vec{v} = 0.$

2° Trouver le vecteur $\vec{w}$ tel que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée indirecte de E.

8.
Angles. Produit vectoriel

1. Angle d'un couple de demi-droites vectorielles.

Dans ce paragraphe, nous rappelons d'abord des définitions et des propriétés étudiées en classe de Première, puis nous donnons quelques compléments.
Nous désignerons par E_2 un plan vectoriel réel euclidien orienté.

Ensemble $\mathcal{A}$ des angles de couples de demi-droites vectorielles.

Rappels.

1.1 Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E_2. On appelle **demi-droite vectorielle** engendrée par $\vec{u}$ le sous-ensemble $\vec{d}$ de E_2 défini par : $\vec{d} = \{\vec{v} \in E_2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \vec{v} = \lambda\vec{u}\}$.
La demi-droite vectorielle $\vec{d}$ possède donc un seul vecteur unitaire. Nous désignerons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des demi-droites vectorielles de E_2.

THÉORÈME : Pour tout couple $(\vec{d}, \vec{d'})$ de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, il existe une unique rotation vectorielle f de E_2 telle que l'on ait : $f(\vec{d}) = \vec{d'}$.

On a les propriétés suivantes :

P1 La relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ par :
$\forall(\vec{d}, \vec{d'}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, \quad \forall(\vec{d_1}, \vec{d'_1}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D},$
$$\left((\vec{d}, \vec{d'})\, \mathcal{R}\, (\vec{d_1}, \vec{d'_1})\right) \Longleftrightarrow \left(\exists f \in \mathcal{O}_+(E_2), \begin{cases} f(\vec{d}) = \vec{d'} & \text{et} \quad f(\vec{d_1}) = \vec{d'_1}\end{cases}\right)$$
est une relation d'équivalence dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

L'ensemble quotient $(\mathcal{D} \times \mathcal{D})/\mathcal{R}$ est appelé **ensemble $\mathcal{A}$ des angles de couples de demi-droites vectorielles.**
On appelle **angle de $\vec{d}$ et de $\vec{d'}$**, et on note **angle $(\vec{d}, \vec{d'})$**, la classe d'équivalence par $\mathcal{R}$ du couple $(\vec{d}, \vec{d'})$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls de E_2. On appelle **angle de $\vec{u}$ et de $\vec{u'}$**, et on note **angle $(\vec{u}, \vec{u'})$**, l'angle de la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et de celle engendrée par $\vec{u'}$.
<u>**Remarque :**</u> La notion d'angle ne dépend pas de l'orientation de E_2.

P2 Soit α un angle dont un représentant est le couple $(\vec{d}, \vec{d'})$.
L'unique rotation vectorielle f de E_2 telle que l'on ait $f(\vec{d}) = \vec{d'}$ est indépendante du représentant de α.
L'application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{O}_+(E_2)$ qui, à tout angle α, associe la rotation vectorielle f définie précédemment est une bijection. Elle permet de munir l'ensemble $\mathcal{A}$ d'une loi de composition interne, notée $+$, telle que $(\mathcal{A}, +)$ soit un groupe isomorphe à $(\mathcal{O}_+(E_2), \circ)$.

On dit que α **est l'angle de la rotation vectorielle** f ou encore que f **est la rotation vectorielle d'angle** α ; nous noterons : $\alpha =$ **angle** f.
Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls de E_2, on a l'équivalence suivante :

$$\left(\vec{u'} = f(\vec{u})\right) \iff \left(\|\vec{u}\| = \|\vec{u'}\| \text{ et angle}\,(\vec{u}, \vec{u'}) = \text{angle}\, f\right)$$

Analogie entre la notion d'angle et la notion de vecteur.

1.2 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$. Nous rappelons le résultat suivant du chapitre 6. Pour tout élément (A, A') de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, il existe une unique translation t de $\mathcal{T}$ telle que l'on ait : $t(A) = A'$.
Ce résultat est analogue au théorème 1.1 rappelé ci-dessus. Nous illustrons cette analogie par le tableau de la page 214 dans lequel nous disposons côte à côte les notions et les propriétés qui se correspondent dans chacun des deux contextes. L'examen de ce tableau souligne l'analogie entre les notions d'angle et de vecteur et permet de sentir la structure commune sous-jacente.

Angles particuliers.

1.3 • On appelle **angle nul,** et on note ω, l'élément neutre du groupe $(\mathcal{A}, +)$. C'est l'angle de la rotation vectorielle Id_{E_2}. Tout représentant de cet angle est un couple de demi-droites vectorielles égales.

• On appelle **angle plat,** et on note p, l'angle de la rotation vectorielle $-Id_{E_2}$. Tout représentant de cet angle est un couple de demi-droites vectorielles opposées, c'est-à-dire engendrées par deux vecteurs unitaires opposés.

• On appelle **angle droit** tout angle dont un représentant est un couple de demi-droites vectorielles orthogonales, c'est-à-dire engendrées par deux vecteurs orthogonaux. Il existe deux angles droits, notés respectivement δ_+ et δ_-. Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux de E_2, l'angle de $\vec{u}$ et de $\vec{u'}$ est égal à δ_+ (resp. δ_-) si et seulement si la famille $(\vec{u}, \vec{u'})$ est une base orthonormée directe (resp. indirecte) de E_2.

• On a les égalités suivantes :

$$p + p = \omega, \quad p = -p, \quad \delta_+ + \delta_+ = p, \quad \delta_- + \delta_- = p, \quad \delta_+ = -\delta_- = \delta_- + p$$

groupe commutatif $(\mathcal{O}_+(E_2), \circ)$	groupe commutatif $(\mathcal{T}, \circ)$
ensemble $\mathcal{D}$ des demi-droites vectorielles	ensemble $\mathcal{E}$ des points
ensemble $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ des couples de demi-droites vectorielles	ensemble $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ des bipoints
relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$	relation d'équipollence dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$
angle $(\vec{d}, \vec{d'})$ (classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ du couple $(\vec{d}, \vec{d'})$)	$\overrightarrow{AA'}$ (classe d'équivalence du bipoint (A, A′) pour la relation d'équipollence)
groupe commutatif $(\mathcal{A}, +)$	groupe commutatif $(E, +)$
angle nul : ω	vecteur nul : $\vec{0}$
$\forall \vec{d} \in \mathcal{D}$, angle $(\vec{d}, \vec{d}) = \omega$	$\forall A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
$\forall (\vec{d}, \vec{d'}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, angle $(\vec{d}, \vec{d'}) = -$ angle $(\vec{d'}, \vec{d})$	$\forall (A, A') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{A'A}$
$\forall (\vec{d}, \vec{d'}, \vec{d''}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, angle $(\vec{d}, \vec{d'})$ + angle $(\vec{d'}, \vec{d''})$ = angle $(\vec{d}, \vec{d''})$ (relation de Chasles)	$\forall (A, A', A'') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{AA''}$ (relation de Chasles)
pour tout élément $\vec{d}$ de $\mathcal{D}$ et pour tout élément α de $\mathcal{A}$, il existe un unique élément $\vec{d'}$ de $\mathcal{D}$ tel que l'on ait : angle $(\vec{d}, \vec{d'}) = \alpha$	pour tout point A de $\mathcal{E}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, il existe un unique point A′ de $\mathcal{E}$ tel que l'on ait : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$
rotation f d'angle α	translation t de vecteur $\vec{u}$
(α = angle f) $\Longleftrightarrow$ ($\forall \vec{d} \in \mathcal{D}$, angle $(\vec{d}, f(\vec{d})) = \alpha$)	$(t = t_{\vec{u}})$ $\Longleftrightarrow (\forall A \in \mathcal{E}, \overrightarrow{At(A)} = \vec{u})$
$\forall (f, g) \in (\mathcal{O}_+(E_2))^2$, angle $g \circ f$ = angle f + angle g	$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$
$\forall f \in \mathcal{O}_+(E_2)$, angle $f^{-1} = -$ angle f	$\forall \vec{u} \in E$, $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Endomorphisme surjectif de $(\mathcal{A}, +)$.

1.4 **THÉORÈME : L'application φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ définie par :**

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \quad \varphi(\alpha) = \alpha + \alpha$$

est un endomorphisme surjectif de $(\mathcal{A}, +)$.

Démonstration :

L'application φ est un endomorphisme de $(\mathcal{A}, +)$. On a :
$\forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2$,
$\varphi(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = (\alpha + \alpha) + (\beta + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$.

L'application φ est surjective. Soit β un élément quelconque de $\mathcal{A}$. Cherchons s'il existe un élément α de $\mathcal{A}$ tel que l'on ait : $\varphi(\alpha) = \beta$, c'est-à-dire : $\alpha + \alpha = \beta$. Soient g la rotation vectorielle d'angle β et f la rotation vectorielle d'angle α, si α existe. On a : $(\beta = \alpha + \alpha) \Longleftrightarrow (g = f \circ f)$.

Appelons $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ la matrice de g dans une base orthonormée directe quelconque de E_2 et $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ celle de f dans la même base.

Trouver α équivaut à trouver un couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que l'on ait :

$$\left(x^2 + y^2 = 1 \text{ et } \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right)$$

ce qui équivaut au système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

Nous avons déjà résolu un tel système lorsque nous avons cherché les racines carrées d'un nombre complexe de module 1. Ce système admet toujours deux solutions opposées. Il y a toujours deux rotations vectorielles qui répondent à la question. Si l'une de ces rotations vectorielles est la rotation vectorielle f d'angle α, l'autre est la rotation vectorielle $(-\mathrm{Id}_{E_2}) \circ f$, d'angle $\alpha + p$. L'image réciproque de β par φ est donc l'ensemble $\{\alpha, \alpha + p\}$.
L'application φ est donc surjective mais non injective. ■

Remarque : δ_+ et δ_- sont les deux éléments de $\mathcal{A}$ tels que l'on ait :
$\delta_+ + \delta_+ = \delta_- + \delta_- = p$.

Angles et transformations orthogonales.

1.5 Soient $(\vec{d}, \vec{d'})$ un couple de demi-droites vectorielles de E_2 et f une transformation orthogonale de E_2.
Comparons l'angle de $\vec{d}$ et de $\vec{d'}$ et l'angle de $f(\vec{d})$ et de $f(\vec{d'})$.

On a les propriétés suivantes :

P1	Soit f un élément quelconque de $\mathcal{O}_+(E_2)$. On a : $\forall (\vec{d}, \vec{d'}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, angle $(f(\vec{d}), f(\vec{d'}))$ = angle $(\vec{d}, \vec{d'})$.

Démonstration :

Soit g l'unique rotation vectorielle de E_2 telle que l'on ait : $\vec{d'} = g(\vec{d})$.

On a alors : $f(\vec{d'}) = f\left(g(\vec{d})\right) = (f \circ g)\left(\vec{d}\right)$.

Le groupe $(\mathcal{O}_+(E_2), \circ)$ est commutatif. On a donc :

$f(\vec{d'}) = (g \circ f)\left(\vec{d}\right) = g\left[f(\vec{d})\right]$ et, par suite :

angle g = angle $\left(\vec{d}, g(\vec{d})\right)$ = angle $\left(\vec{d}, \vec{d'}\right)$

angle g = angle $\left(f(\vec{d}), g[f(\vec{d})]\right)$ = angle $\left(f(\vec{d}), f(\vec{d'})\right)$. ■

P2	Soit f un élément quelconque de $\mathcal{O}_-(E_2)$. On a : $\forall(\vec{d}, \vec{d'}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, angle $\left(f(\vec{d}), f(\vec{d'})\right) = -$ angle $(\vec{d}, \vec{d'})$.

Démonstration :

Soit g l'unique rotation vectorielle de E_2 telle que l'on ait : $\vec{d'} = g(\vec{d})$.

On a alors : $f(\vec{d'}) = f\left[g(\vec{d})\right] = (f \circ g)\left(\vec{d}\right)$.

Les applications f et $f \circ g$ sont des éléments de $\mathcal{O}_-(E_2)$. On a donc :

$f \circ g = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1} \circ f$ et, par suite :

$f(\vec{d'}) = (g^{-1} \circ f)\left(\vec{d}\right) = g^{-1}\left[f(\vec{d})\right]$.

On a alors : angle g = angle $\left(\vec{d}, \vec{d'}\right)$ et angle g^{-1} = angle $\left(f(\vec{d}), f(\vec{d'})\right)$.

De l'égalité : angle $g^{-1} = -$ angle g, il résulte que l'on a :

angle $\left(f(\vec{d}), f(\vec{d'})\right) = -$ angle $(\vec{d}, \vec{d'})$. ■

Angle d'une rotation vectorielle de E_3.

1.6 Soient E_3 un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et f une rotation vectorielle de E_3. Il n'y a que deux cas possibles : f est l'identité de E_3 ou f est une rotation vectorielle dont l'axe est une droite vectorielle $\vec{D}$ de E_3.
Si f est l'identité de E_3, on dit que f est **la rotation vectorielle de E_3 d'angle nul.**
Si f est une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$, la restriction de f au plan vectoriel $\vec{D}^{\perp}$ est une rotation vectorielle de ce plan vectoriel, distincte de $\mathrm{Id}_{\vec{D}^{\perp}}$. Soit α l'angle de cette rotation vectorielle de $\vec{D}^{\perp}$. (On a : $\alpha \neq \omega$). On dit que f est la **rotation vectorielle de E_3 d'axe $\vec{D}$ et d'angle** α.

Cosinus et Sinus d'une rotation vectorielle de E_2.

Nous rappelons les résultats suivants :

1.7 • Soit f une rotation vectorielle de E_2. Alors f a la même matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, dans toute base orthonormée directe de E_2. On appelle **Cosinus de** f et on note **Cos** f, le réel a ; on appelle **Sinus de** f et on note **Sin** f, le réel b.
La rotation vectorielle f a donc pour matrice, dans toute base orthonormée directe de E_2, la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\, f & -\mathrm{Sin}\, f \\ \mathrm{Sin}\, f & \mathrm{Cos}\, f \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{Cos}^2 f + \mathrm{Sin}^2 f = 1$.

• Soit α un élément de $\mathcal{A}$. On appelle **Cosinus de** α (resp. **Sinus de** α), et on note **Cos** α (resp. **Sin** α), le Cosinus (resp. Sinus) de la rotation vectorielle d'angle α.

• Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls de E_2.

On appelle **Cosinus de l'angle de** $\vec{u}$ **et de** $\vec{u'}$ (resp. **Sinus de l'angle de** $\vec{u}$ **et de** $\vec{u'}$), et on note **Cos** $(\vec{u}, \vec{u'})$ (resp. **Sin** $(\vec{u}, \vec{u'})$), le Cosinus (resp. Sinus) de l'unique rotation vectorielle f telle que l'on ait : angle f = angle $(\vec{u}, \vec{u'})$. On a :

$$\boxed{\operatorname{Cos}(\vec{u}, \vec{u'}) = \operatorname{Cos}(\vec{u'}, \vec{u}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{u'}) = -\operatorname{Sin}(\vec{u'}, \vec{u})}$$

Remarque : On a donc défini deux applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$, notées respectivement Cos et Sin.

1.8 • Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de E_2 et $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls de E_2, de composantes respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On a :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Cos}(\vec{u}, \vec{u'}) &= \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u'}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{u'}\|} \\ \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{u'}) &= \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{u'}\|} \end{aligned}}$$

Remarques : 1. Le réel $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ est égal à $\|\vec{u}\| . \|\vec{u'}\| \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{u'})$.

Il est donc indépendant du choix de la base orthonormée directe de E_2. On l'appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$ **et** $\vec{u'}$ et on le note **dét** $(\vec{u}, \vec{u'})$.

2. En particulier, si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a : $\operatorname{Cos}(\vec{i}, \vec{u}) = x$ et $\operatorname{Sin}(\vec{i}, \vec{u}) = y$.

« Mesure » d'un angle.

1.9 En classe de Première, nous avons admis l'existence d'un homomorphisme surjectif θ de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$ tel que l'application, notée sin, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et définie par : $\sin = \operatorname{Sin} \circ \theta$ soit dérivable et de dérivée égale à 1 au point zéro.
L'image réciproque de l'angle nul par θ, notée $\theta^{-1}(\omega)$, est égale à l'ensemble $2\pi\,\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi\}$.
Dans le chapitre 2, nous avons introduit la relation de congruence modulo 2π; l'ensemble $2\pi\,\mathbb{Z}$ défini ci-dessus est la classe d'équivalence de 0 pour cette relation. On note $\mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ par cette relation. L'application $\dot{\theta}$ de $\mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{A}$ définie par : $\forall \dot{x} \in \mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z}, \quad \dot{\theta}(\dot{x}) = \theta(x)$ est une bijection.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[dr, "\theta"'] & & \mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z} \arrow[dl, "\dot{\theta}"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

Soit α un angle. On appelle **« mesure » en radians de** α, et on note α, l'image réciproque de α par $\dot{\theta}$, c'est-à-dire l'élément $\dot{x}$ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\dot{\theta}(\dot{x}) = \alpha$.
On appelle **détermination de la « mesure » en radians de** α un représentant quelconque x de la « mesure » en radians de α. Nous écrirons, par abus de notation :
$\widehat{\alpha} = x \quad (2\pi)$.

Remarque : La définition de l'application Sin de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ dépend de l'orientation choisie dans E_2.
Soit α un élément de $\mathcal{A}$; si, pour une orientation de E_2, on a : $\text{Sin}\ \alpha = b$, alors, pour l'autre orientation de E_2, on a : $\text{Sin}\ \alpha = -b$.
Il en résulte que, si $\dot{x}$ est la « mesure » en radians de α dans une orientation de E_2, alors $(\dot{\widehat{-x}})$ est la « mesure » en radians de α dans l'autre orientation de E_2.

Exemples.

1. $\widehat{\omega} = 0 \quad (2\pi)$ et $\widehat{p} = \pi \ (2\pi)$
$\widehat{\delta_+} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ et $\widehat{\delta_-} = -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$.

2. Soient f la rotation vectorielle de E_2 de matrice $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe de E_2 et α l'angle de f.
On a : $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.
Par abus de langage, nous dirons que f **est la rotation vectorielle de** E_2 **d'angle** $\frac{\pi}{4}$.

3. Soit ρ la rotation vectorielle de E_3 orienté, d'axe $\vec{D}$ et d'angle α. Appelons $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ les deux vecteurs unitaires de $\vec{D}$. On a : $\vec{n'} = -\vec{n}$.
Nous avons vu, au paragraphe 5.6 du chapitre 7, que le plan vectoriel $\overrightarrow{D\perp}$ est orienté par le choix de $\vec{n}$ ou de $\vec{n'}$.
De la remarque précédente, il résulte que la « mesure » en radians de l'angle α dépend du choix de $\vec{n}$ ou de $\vec{n'}$.
Soit x (resp. $-x$) une détermination de la « mesure » en radians de α pour l'orientation de $\overrightarrow{D\perp}$ par le choix de $\vec{n}$ (resp. $\vec{n'}$).
Par abus de langage, nous dirons que ρ est **la rotation vectorielle de** E_3 **d'axe la demi-droite vectorielle engendrée par** $\vec{n}$ **et d'angle** x (2π) ou la rotation vectorielle de E_3 d'axe la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{n'}$ et d'angle $-x \ (2\pi)$.

La définition de l'homomorphisme θ fait intervenir l'application sin de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit de même l'application cos de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions, appelées **fonctions trigonométriques,** ont été étudiées en classe de Première et nous les avons utilisées dans le chapitre 2 sur les nombres complexes.
Nous rappelons au lecteur que l'on peut aussi définir une **« mesure » en degrés** et une **« mesure » en grades** d'un angle.

2. Produit vectoriel dans E_3.

Désignons par E_3 un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension 3.

Définitions.

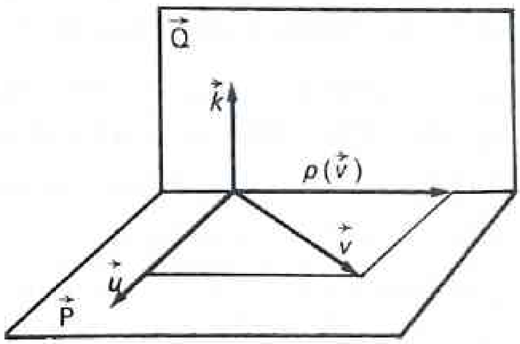
Nous allons définir une application de $E_3 \times E_3$ dans E_3 qui, à tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$, associe un vecteur appelé **produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$** et noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (on lit : **$\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$**).

Nous allons donner de cette application trois définitions équivalentes. Nous utilisons les notations suivantes :

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une famille libre de vecteurs de E_3.

Nous désignons par :

- $\vec{D}$ (resp. $\vec{d}$) la droite vectorielle (resp. demi-droite vectorielle) engendrée par le vecteur non nul $\vec{u}$.
- $\vec{P}$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- $\vec{Q}$ le plan vectoriel orthogonal de $\vec{D}$.
- p la projection vectorielle orthogonale sur $\vec{Q}$, c'est-à-dire la projection vectorielle sur $\vec{Q}$ de direction $\vec{D}$.
- h l'homothétie vectorielle de E_3 de rapport $\|\vec{u}\|$.
- r la rotation vectorielle de E_3 d'axe $\vec{d}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (2π).
- $\vec{k}$ l'unique vecteur unitaire de E_3 tel que la famille $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{p(\vec{v})}{\|p(\vec{v})\|}, \vec{k}\right)$ soit une base orthonormée directe de E_3; ce vecteur $\vec{k}$ appartient à la droite vectorielle $\vec{P}^{\perp}$.



2.1 DÉFINITION : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3.
Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|p(\vec{v})\| \vec{k}$.

Nous donnons du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ une deuxième définition.

2.2 DÉFINITION : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3.
Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (r \circ h \circ p)(\vec{v})$.

<u>**Démontrons que ces deux définitions sont équivalentes.**</u> Il suffit de démontrer que, pour toute famille libre $(\vec{u}, \vec{v})$ de E_3, les vecteurs $\|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\|\vec{k}$ et $(r \circ h \circ p)(\vec{v})$ sont égaux.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une famille libre quelconque de E_3. Le vecteur $\|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\|\vec{k}$ est le vecteur de la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{k}$ dont la norme est égale à $\|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\|$.

On a d'autre part : $\|(r \circ h \circ p)(\vec{v})\| = \|(h \circ p)(\vec{v})\| = \|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\|$.

Démontrons enfin que le vecteur $\vec{w} = (r \circ h \circ p)(\vec{v})$ appartient à la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{k}$, ce qui équivaut à : $\dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \vec{k}$.

Par définition de r, la famille $\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \dfrac{(h \circ p)(\vec{v})}{\|(h \circ p)(\vec{v})\|}, \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)$ est une base orthonormée directe de E_3. Par définition de h, on a :

$$\frac{(h \circ p)(\vec{v})}{\|(h \circ p)(\vec{v})\|} = \frac{\|\vec{u}\|p(\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\|} = \frac{p(\vec{v})}{\|p(\vec{v})\|}.$$

La famille $\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \dfrac{p(\vec{v})}{\|p(\vec{v})\|}, \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)$ est donc une base orthonormée directe de E_3. De la propriété P_3 du paragraphe 5.5 du chapitre 7, il résulte que l'on a : $\vec{k} = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$. ■

Voici une troisième définition du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2.3 DÉFINITION : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3.
Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, on oriente $\vec{P}$ de facon arbitraire et on appelle $\vec{h}$ le vecteur unitaire de la demi-normale positive de $\vec{P}$. On pose alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{h}$.

Le lecteur remarquera que, suivant l'orientation choisie pour $\vec{P}$, on a soit $\vec{h} = \vec{k}$, soit $\vec{h} = -\vec{k}$. D'autre part, si l'on change l'orientation de $\vec{P}$, le vecteur $\vec{h}$ et le réel $\operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v})$ sont changés en leur opposé ; la définition donnée est donc indépendante de l'orientation choisie pour $\vec{P}$.

<u>**Démontrons que cette définition est équivalente aux deux précédentes.**</u>
Il suffit de démontrer que, pour toute famille libre $(\vec{u}, \vec{v})$ de E_3, les vecteurs $\|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\|\vec{k}$ et $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{h}$ sont égaux.
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une famille libre quelconque de E_3. Supposons, par exemple, que $\vec{P}$ soit orienté de telle sorte que l'on ait : $\vec{h} = \vec{k}$.

Démontrons donc l'égalité $\|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v})$.

D'après la première remarque du paragraphe 1.8, le réel $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v})$ est égal au réel dét $(\vec{u}, \vec{v})$ qui s'exprime en fonction des composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée directe quelconque de $\vec{P}$. Le choix de l'orientation de $\vec{P}$ est tel que la famille $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{p(\vec{v})}{\|p(\vec{v})\|}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{P}$. Les composantes de $\vec{u}$ dans cette base sont : $\begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix}$; par définition de p, celles de $\vec{v}$ sont : $\begin{pmatrix} x \\ \|p(\vec{v})\| \end{pmatrix}$.

On a alors : $\operatorname{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \|\vec{u}\| & x \\ 0 & \|p(\vec{v})\| \end{vmatrix} = \|\vec{u}\|.\|p(\vec{v})\|$. ■

Remarque : L'application de $E_3 \times E_3$ dans E_3 que nous venons de définir est une loi de composition interne dans E_3. Nous verrons, en exercice, que cette loi ne présente aucune des propriétés usuelles des lois de composition rencontrées jusqu'ici. (En particulier, cette loi n'est **pas associative**).

Propriétés.

2.4 On a les propriétés suivantes :

P1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3. On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée.

P2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3. Alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et au vecteur $\vec{v}$.

Ces propriétés résultent des définitions.

P3 $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E_3 \times E_3, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition 2.3.

P4 L'application f de $E_3 \times E_3$ dans E_3 définie par :
$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E_3 \times E_3, \quad f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est une application bilinéaire.

Soient les applications $f_{\vec{u}}$ et $g_{\vec{v}}$ de E_3 dans E_3 respectivement définies par :
$(\forall \vec{v} \in E_3, \quad f_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v})$ et $(\forall \vec{u} \in E_3, \quad g_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v})$.

Dire que f est une application bilinéaire signifie que, pour tout vecteur $\vec{u}$ de E_3 l'application $f_{\vec{u}}$ est linéaire, et que, pour tout vecteur $\vec{v}$ de E_3, l'application $g_{\vec{v}}$ est linéaire.

Démonstration :

D'après la propriété P_3, il suffit de démontrer que, pour tout vecteur $\vec{u}$ de E_3, $f_{\vec{u}}$ est linéaire. Utilisons la définition 2.2.

Nous remarquons que, si $\vec{u}$ n'est pas nul et si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée, on a : $(r \circ h \circ p)(\vec{v}) = \vec{0}$. La définition 2.2 est donc équivalente à la définition suivante : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3. Si $\vec{u}$ est nul, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$; si $\vec{u}$ n'est pas nul, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (r \circ h \circ p)(\vec{v})$.

Si $\vec{u}$ est nul, $f_{\vec{u}}$ est donc l'application nulle de E_3 ; si $\vec{u}$ n'est pas nul, $f_{\vec{u}}$ est donc l'application $r \circ h \circ p$. Dans les deux cas, $f_{\vec{u}}$ est linéaire. ■

On résume les propriétés P_3 et P_4 en disant que f est une **application bilinéaire antisymétrique de $E_3 \times E_3$ dans E_3.**

> **P5** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires orthogonaux de E_3 et $\vec{w}$ un vecteur unitaire de E_3.
> La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de E_3 si et seulement si l'on a : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Démonstration :

Utilisons la définition 2.1.

La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre et l'on a : $\|\vec{u}\| = 1, \quad p(\vec{v}) = \vec{v}$

et, par suite : $\dfrac{p(\vec{v})}{\|p(\vec{v})\|} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{v}$ et $\vec{k} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

De la propriété P_3 du paragraphe 5.5 du chapitre 7, il résulte que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de E_3 si et seulement si $\vec{w}$ est égal à $\vec{k}$, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{w}$ est égal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$. ■

Exemple.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E_3. De la propriété précédente et des propriétés P_1 et P_2 du paragraphe 5.5 du chapitre 7, il résulte que l'on a :

$\vec{i} \wedge \vec{j} = -(\vec{j} \wedge \vec{i}) = \vec{k}; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = -(\vec{k} \wedge \vec{j}) = \vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = -(\vec{i} \wedge \vec{k}) = \vec{j}.$

> **P6** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3, dont les composantes respectives dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3 sont : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
> Les composantes du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :
> $$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$.

D'autre part, on a : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$.

D après la propriété P_4, on a donc :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) \\ &= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Remarque : Soit $\vec{P}$ le plan vectoriel engendré par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E_3 ; alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur non nul de la droite vectorielle $\vec{P}^{\perp}$.

Par exemple, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes respectives $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe de E_3, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour composantes dans cette base $\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$; la droite vectorielle $\vec{P}^{\perp}$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$ dans la base considérée.

3. Angle d'un couple de droites vectorielles.

Nous désignons par E_2 un plan vectoriel réel euclidien orienté, par $\mathcal{D}$ l'ensemble des demi-droites vectorielles de E_2 et par $\mathcal{D}'$ l'ensemble des droites vectorielles de E_2.

Ensemble $\mathcal{A}'$ des angles de couples de droites vectorielles.

De même que nous l'avons fait pour les demi-droites vectorielles, nous allons chercher les rotations vectorielles de E_2 qui transforment une droite vectorielle donnée en une droite vectorielle donnée.

3.1 **THÉORÈME : Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles de E_2. Il existe deux rotations vectorielles de E_2 qui transforment $\vec{D}$ en $\vec{D'}$. Si l'une a pour angle α, alors l'autre a pour angle $\alpha + p$.**

Démonstration :

• Soient $\vec{u}$ (resp. $\vec{u'}$) un vecteur unitaire de $\vec{D}$ (resp. $\vec{D'}$) et f l'unique rotation vectorielle de E_2 telle que l'on ait : $f(\vec{u}) = \vec{u'}$.

Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de $\vec{D}$ de composante λ dans la base $\vec{u}$. On a alors : $f(\vec{v}) = f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \lambda\vec{u'}$ et, par suite : $f(\vec{D}) \subset \vec{D'}$.

Soit $\vec{v'}$ un vecteur quelconque de $\vec{D'}$ de composante λ' dans la base $\vec{u'}$. On a alors : $\vec{v'} = \lambda'\vec{u'} = \lambda' f(\vec{u}) = f(\lambda'\vec{u})$ et, par suite : $\vec{D'} \subset f(\vec{D})$. On a donc : $\vec{D'} = f(\vec{D})$.

• Soit maintenant g une rotation vectorielle de E_2 telle que l'on ait : $g(\vec{D}) = \vec{D'}$.

On a alors : $f(\vec{D}) = g(\vec{D})$ et, par suite $(g^{-1} \circ f)(\vec{D}) = \vec{D}$.

Posons $\rho = g^{-1} \circ f$. Dire que $\rho(\vec{D}) = \vec{D}$ équivaut à dire que la famille $(\vec{u}, \rho(\vec{u}))$ est liée et que, par suite, l'on a : $\text{dét}\,(\vec{u}, \rho(\vec{u})) = 0$.

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E_2 et $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, la matrice de ρ dans $\mathcal{B}$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a alors :

$$(\rho(\vec{D}) = \vec{D}) \Longleftrightarrow \left(\begin{vmatrix} x & ax - by \\ y & bx + ay \end{vmatrix} = 0\right) \Longleftrightarrow (b(x^2 + y^2) = 0) \Longleftrightarrow (b = 0).$$

On a donc finalement : $(\rho(\vec{D}) = \vec{D}) \Longleftrightarrow (\rho \in \{\mathrm{Id}_{E_2}, -\mathrm{Id}_{E_2}\})$ et par suite $(g^{-1} \circ f \in \{\mathrm{Id}_{E_2}, -\mathrm{Id}_{E_2}\}) \Longleftrightarrow (g = f \text{ ou } g = (-\mathrm{Id}_{E_2}) \circ f)$. Il y a donc deux rotations vectorielles : f et $(-\mathrm{Id}_{E_2}) \circ f$ qui transforment $\vec{D}$ en $\vec{D'}$. Si f est la rotation vectorielle d'angle α, la rotation vectorielle $(-\mathrm{Id}_{E_2}) \circ f$ a pour angle $\alpha + p$. ■

<u>Remarques</u> : 1. Soient f et g deux rotations vectorielles de E_2, d'angles respectifs α et β. On a alors :

$(g^{-1} \circ f \in \{\mathrm{Id}_{E_2}, -\mathrm{Id}_{E_2}\}) \Longleftrightarrow (\alpha - \beta \in \{\omega, p\})$.

2. Des égalités $p + p = \omega$ et $p = -p$, il résulte que $\{\omega, p\}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{A}, +)$.

Les deux remarques précédentes nous incitent à considérer la relation $\mathcal{S}$, définie dans $\mathcal{A}$ par : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2$, $(\alpha \mathcal{S} \beta) \Longleftrightarrow (\alpha - \beta \in \{\omega, p\})$.

3.2 THÉORÈME ET DÉFINITION : La relation $\mathcal{S}$ définie dans $\mathcal{A}$ par : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2$, $(\alpha \mathcal{S} \beta) \Longleftrightarrow (\alpha - \beta \in \{\omega, p\})$ est une relation d'équivalence. On appelle ensemble des angles de couples de droites vectorielles, et on note $\mathcal{A}'$, l'ensemble quotient de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{S}$.

Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles de E_2. On appelle **angle de $\vec{D}$ et de $\vec{D'}$**, et on note **angle $(\vec{D}, \vec{D'})$**, la classe d'équivalence $\dot{\alpha}$ par $\mathcal{S}$ de l'angle α de l'une des rotations vectorielles qui transforment $\vec{D}$ en $\vec{D'}$, c'est-à-dire l'ensemble $\{\alpha, \alpha + p\}$ des angles des deux rotations vectorielles qui transforment $\vec{D}$ en $\vec{D'}$.

Démonstration :

- On a : $\forall \alpha \in \mathcal{A}, \quad \alpha - \alpha = \omega$; la relation $\mathcal{S}$ est donc réflexive.
- Soient α et β deux éléments quelconques de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\{\omega, p\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$. On a donc : $(\alpha - \beta \in \{\omega, p\}) \Longleftrightarrow (\beta - \alpha \in \{\omega, p\}.)$

La relation $\mathcal{S}$ est donc symétrique.

- Soient α, β, γ trois éléments quelconques de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\{\omega, p\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$. On a donc :

$$((\alpha - \beta) \in \{\omega, p\} \quad \text{et} \quad (\beta - \gamma) \in \{\omega, p\}) \Longrightarrow ((\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in \{\omega, p\})$$
$$\Longleftrightarrow ((\alpha - \gamma) \in \{\omega, p\}).$$

La relation $\mathcal{S}$ est donc transitive. ■

Exemples.

Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles de E_2.

1. On a : angle $(\vec{D}, \vec{D}) = \dot{\omega} = \{\omega, p\}$.

Réciproquement, si l'on a : angle $(\vec{D}, \vec{D'}) = \dot{\omega}$, on a alors $\vec{D'} = (\mathrm{Id}_{E_2})(\vec{D}) = \vec{D}$.

2. Si $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales, on a alors : angle $(\vec{D}, \vec{D'}) = \dot{\delta}_+ = \{\delta_+, \delta_-\}$.

Réciproquement, si l'on a : angle $(\vec{D}, \vec{D'}) = \dot{\delta}_+$, par définition de δ_+ et de δ_-, les droites $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales.

On a donc les équivalences suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\vec{D'} = \vec{D}) \Longleftrightarrow (\text{angle } (\vec{D}, \vec{D'}) = \{\omega, p\}) \\ (\vec{D'} = \vec{D\perp}) \Longleftrightarrow (\text{angle } (\vec{D}, \vec{D'}) = \{\delta_+, \delta_-\}) \end{array}}$$

Propriétés.

3.3 On a les propriétés suivantes :

> **P1** L'addition dans $\mathcal{A}$ est compatible avec la relation $\mathcal{S}$.
>
> L'addition dans $\mathcal{A}'$ définie par : $\forall (\dot{\alpha}, \dot{\beta}) \in \mathcal{A}'^2, \; \dot{\alpha} + \dot{\beta} = \widehat{\alpha + \beta}^{\,\bullet}$ munit $\mathcal{A}'$ d'une structure de groupe commutatif.

Démonstration :

L'addition de $\mathcal{A}$ est compatible avec la relation $\mathcal{S}$. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ quatre éléments quelconques de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\{\omega, p\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$. On a donc : $(\alpha \mathcal{S} \beta \quad \text{et} \quad \alpha' \mathcal{S} \beta') \Longleftrightarrow ((\alpha - \beta) \in \{\omega, p\} \quad \text{et} \quad (\alpha' - \beta') \in \{\omega, p\})$

$$\Longrightarrow ((\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') \in \{\omega, p\}) \Longleftrightarrow (\alpha + \alpha' - \beta - \beta' \in \{\omega, p\})$$
$$\Longleftrightarrow ((\alpha + \alpha')\, \mathcal{S}\, (\beta + \beta')).$$

On peut donc définir une addition dans $\mathcal{A}'$.

$(\mathcal{A}', +)$ est un groupe commutatif.

- Soient $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ trois éléments quelconques de $\mathcal{A}'$. On a :

$$\dot{\alpha} + (\dot{\beta} + \dot{\gamma}) = \dot{\alpha} + (\widehat{\beta + \gamma}^{\,\bullet}) = \widehat{\alpha + (\beta + \gamma)}^{\,\bullet} = \widehat{(\alpha + \beta) + \gamma}^{\,\bullet} = (\widehat{\alpha + \beta}^{\,\bullet}) + \dot{\gamma}$$
$$= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) + \dot{\gamma}.$$

La loi + est donc associative dans $\mathcal{A}'$.

• On démontre de même que la loi $+$ est commutative dans $\mathcal{A}'$.

• On a : $\forall \dot{\alpha} \in \mathcal{A}', \quad \dot{\alpha} + \dot{\omega} = (\dot{\widehat{\alpha + \omega}}) = \dot{\alpha}$.

La loi $+$ dans $\mathcal{A}'$ admet donc $\dot{\omega}$ pour élément neutre.

• On a : $\forall \dot{\alpha} \in \mathcal{A}', \quad \dot{\alpha} + (\dot{\widehat{-\alpha}}) = \dot{\widehat{\alpha + (-\alpha)}} = \dot{\omega}$.

Un élément quelconque $\dot{\alpha}$ de $\mathcal{A}'$ admet donc un symétrique $(\dot{\widehat{-\alpha}})$ pour la loi $+$.

__Remarque__ : L'application s de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ qui, à tout élément de $\mathcal{A}$ associe sa classe d'équivalence, est donc un homomorphisme surjectif de $(\mathcal{A}, +)$ sur $(\mathcal{A}', +)$.

P2 $\forall (\vec{D}, \vec{D'}, \vec{D''}) \in \mathcal{D}'^3$, angle $(\vec{D}, \vec{D'})$ + angle $(\vec{D'}, \vec{D''})$ = angle $(\vec{D}, \vec{D''})$

Cette propriété est connue sous le nom de **relation de Chasles.**

Démonstration :

Soient $\vec{D}, \vec{D'}, \vec{D''}$ trois éléments quelconques de $\mathcal{D}'$.

Posons $\dot{\alpha} =$ angle $(\vec{D}, \vec{D'})$ et $\dot{\beta} =$ angle $(\vec{D'}, \vec{D''})$.

On a alors : angle $(\vec{D}, \vec{D'})$ + angle $(\vec{D'}, \vec{D''}) = \dot{\alpha} + \dot{\beta} = \dot{\widehat{\alpha + \beta}}$.

Soit f (resp. g) la rotation vectorielle de E_2 d'angle α (resp. β).

Par définition, on a : $f(\vec{D}) = \vec{D'}$ et $g(\vec{D'}) = \vec{D''}$.

L'application $g \circ f$ est la rotation vectorielle de E_2 d'angle $\alpha + \beta$ et on a :

$(g \circ f)(\vec{D}) = \vec{D''}$. On a donc : angle $(\vec{D}, \vec{D''}) = (\dot{\widehat{\alpha + \beta}})$. ■

P3 Soient $\vec{D}$ une droite vectorielle de E_2 et $\dot{\alpha}$ un élément de $\mathcal{A}'$. Alors il existe une unique droite vectorielle $\vec{D'}$ telle que l'on ait : angle $(\vec{D}, \vec{D'}) = \dot{\alpha}$.

Démonstration :

Soit $\vec{u}$ l'un des deux vecteurs unitaires de $\vec{D}$. Du paragraphe 1.2, il résulte qu'il existe un unique vecteur unitaire $\vec{u'}$ tel que l'on ait : angle $(\vec{u}, \vec{u'}) = \alpha$.

La droite vectorielle $\vec{D'}$ engendrée par $\vec{u'}$ est donc l'unique droite vectorielle telle que l'on ait : angle $(\vec{D}, \vec{D'}) = \dot{\alpha}$. ■

P4 Soient $(\vec{D}, \vec{D'})$ et $(\vec{D_1}, \vec{D'_1})$ deux couples de droites vectorielles. On a l'équivalence suivante :

$$\left(\text{angle } (\vec{D}, \vec{D'}) = \text{angle } (\vec{D_1}, \vec{D'_1})\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\exists f \in \mathcal{O}_+(E_2),\ \left(f(\vec{D}) = \vec{D'} \quad \text{et} \quad f(\vec{D_1}) = \vec{D'_1}\right)\right)$$

Démonstration :

Posons : $\dot{\alpha} =$ angle $(\vec{D}, \vec{D'}) =$ angle $(\vec{D_1}, \vec{D'_1})$ et appelons f la rotation vectorielle d'angle α. On a : $(\dot{\alpha} = \text{angle } (\vec{D}, \vec{D'})) \Longleftrightarrow (f(\vec{D}) = \vec{D'})$ et

$(\dot{\alpha} = \text{angle } (\vec{D_1}, \vec{D'_1})) \Longleftrightarrow (f(\vec{D_1}) = \vec{D'_1})$. ■

On a enfin le théorème suivant :

3.4 **THÉORÈME : L'application ψ de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ définie par :**

$$\forall \dot{\alpha} \in \mathcal{A}', \quad \psi(\dot{\alpha}) = \alpha + \alpha$$

est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{A}', +)$ sur le groupe $(\mathcal{A}, +)$.

Démonstration :

L'application ψ est définie. Considérons l'application φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ du théorème 1.4. Nous avons démontré la proposition suivante :

$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha + p) = \alpha + \alpha.$

L'angle $\alpha + \alpha$ ne dépend donc pas du représentant choisi dans $\dot{\alpha}$.

L'application ψ est un homomorphisme de $(\mathcal{A}', +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$. On a :

$$\forall (\dot{\alpha}, \dot{\beta}) \in \mathcal{A}'^2, \quad \psi(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = \psi(\overset{\bullet}{\widehat{\alpha + \beta}}) = (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)$$
$$= (\alpha + \alpha) + (\beta + \beta) = \psi(\dot{\alpha}) + \psi(\dot{\beta}).$$

L'application ψ est bijective. Considérons l'application ψ' de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ définie par :

$$\psi' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$
$$\beta \longmapsto \varphi^{-1}(\beta).$$

Posons $\varphi^{-1}(\beta) = \{\alpha, \alpha + p\}$ et démontrons que ψ' est l'application réciproque de ψ. On a :

$\forall \beta \in \mathcal{A}, \quad (\psi \circ \psi')(\beta) = \psi[\varphi^{-1}(\beta)] = \psi(\{\alpha, \alpha + p\}) = \alpha + \alpha = \beta$

et :

$\forall \dot{\alpha} \in \mathcal{A}', (\psi' \circ \psi)(\dot{\alpha}) = \psi'(\alpha + \alpha) = \varphi^{-1}(\alpha + \alpha) = \{\alpha, \alpha + p\} = \dot{\alpha}.$ ■

Remarque : On a : $\psi(\dot{\delta}_+) = \delta_+ + \delta_+ = p$ et $\psi(\dot{\omega}) = \omega + \omega = \omega$.

« Mesure » en radians de l'angle d'un couple de droites vectorielles.

3.5 Soient θ l'homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$ défini dans le paragraphe 1.9 et s l'homomorphisme surjectif de $(\mathcal{A}, +)$ sur $(\mathcal{A}', +)$ défini dans la remarque du paragraphe 3.3.

L'application $s \circ \theta$, notée θ', est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}', +)$.

Cherchons l'image réciproque de l'élément neutre $\dot{\omega}$ de $\mathcal{A}'$ par cette application.

Soit x un réel quelconque. On a :

$$(\theta'(x) = \dot{\omega}) \iff (s[\theta(x)] = \dot{\omega}) \iff (\theta(x) \in \{\omega, p\})$$
$$\iff (x \in \theta^{-1}(\omega) \text{ ou } x \in \theta^{-1}(p))$$
$$\iff ((\exists k' \in \mathbb{Z}, x = 2k'\pi) \text{ ou } (\exists k'' \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2k''\pi))$$
$$\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi).$$

Notons $\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble défini par : $\pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi)\}$.

On a donc : $\theta'^{-1}(\dot{\omega}) = \pi\mathbb{Z}$.

Considérons la relation de congruence modulo π; l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ est la classe d'équivalence de 0 pour cette relation et on note $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ par cette relation.

L'application $\dot{\theta}'$ de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{A}'$ définie par : $\forall \dot{x} \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, \quad \dot{\theta}'(\dot{x}) = \theta'(x)$
est une bijection.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[dr, "\theta'"'] & & \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \arrow[dl, "\dot{\theta}'"] \\
& \mathcal{A}' &
\end{tikzcd}$$

Soit $\dot{\alpha}$ un élément de $\mathcal{A}'$. On appelle **" mesure " en radians de** $\dot{\alpha}$ et on note $\hat{\dot{\alpha}}$ l'image réciproque de $\dot{\alpha}$ par $\dot{\theta}'$, c'est-à-dire l'élément $\dot{x}$ de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tel que l'on ait : $\dot{\theta}'(\dot{x}) = \dot{\alpha}$.
On appelle **détermination de la " mesure " en radians de** $\dot{\alpha}$ un représentant quelconque x de la " mesure " en radians de $\dot{\alpha}$. Nous écrirons, par abus de notation :

$$\boxed{\hat{\dot{\alpha}} = x \qquad (\pi)}$$

Exemples.

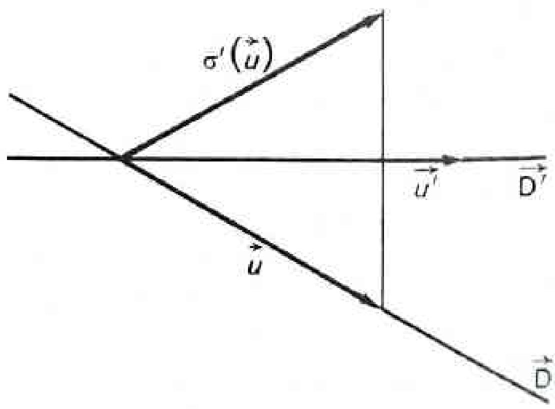
Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles orthogonales de E_2. On a :
$\widehat{\text{angle}\,(\vec{D}, \vec{D})} = 0 \ (\pi)$ et $\widehat{\text{angle}\,(\vec{D}, \vec{D'})} = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$.

Applications.

Composée de deux symétries vectorielles de E_2.

3.6 THÉORÈME : Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles de E_2 et σ et σ' les symétries vectorielles orthogonales par rapport aux droites vectorielles respectives $\vec{D}$ et $\vec{D'}$.
Si $\dot{\alpha}$ est l'angle de $\vec{D}$ et de $\vec{D'}$, alors $\sigma' \circ \sigma$ est la rotation vectorielle de E_2 d'angle $\alpha + \alpha$.

Démonstration :
Nous savons que $\sigma' \circ \sigma$ est une rotation vectorielle ρ de E_2; soit β l'angle de cette rotation vectorielle. On a de plus :
$\forall \vec{v} \in E_2$, angle $(\vec{v}, \rho(\vec{v})) = \beta$.
Soit $\vec{u}$ (resp. $\vec{u'}$) un vecteur unitaire de $\vec{D}$ (resp. $\vec{D'}$).
On a donc : angle $(\vec{u}, \rho(\vec{u})) = \beta$ et
$\rho(\vec{u}) = (\sigma' \circ \sigma)(\vec{u}) = \sigma'(\vec{u})$.



D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\text{angle}\,(\vec{u}, \sigma'(\vec{u})) &= \text{angle}\,(\vec{u}, \vec{u'}) + \text{angle}\,(\vec{u'}, \sigma'(\vec{u})) \\
&= \text{angle}\,(\vec{u}, \vec{u'}) + \text{angle}\,(\sigma'(\vec{u'}), \sigma'(\vec{u})).
\end{aligned}$$

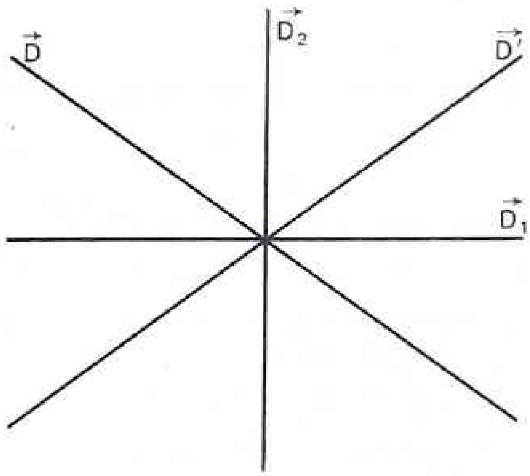
D'après la propriété P_2 du paragraphe 1.5, on a :
angle $\left(\sigma'(\vec{u'}), \sigma'(\vec{u})\right) = -$ angle $(\vec{u'}, \vec{u}) =$ angle $(\vec{u}, \vec{u'})$.
On a donc finalement : $\beta =$ angle $(\vec{u}, \vec{u'}) +$ angle $(\vec{u}, \vec{u'})$ et angle $(\vec{u}, \vec{u'}) \in \dot{\alpha}$.
D'après le théorème 3.4, on a donc : $\beta = \alpha + \alpha$. ■

<u>Remarque</u> : Si l'on a : $\widehat{\text{angle}\,(\vec{D}, \vec{D'})} = x\ (\pi)$, on a alors : $\widehat{\text{angle}\,\sigma' \circ \sigma} = 2x\ (2\pi)$.

Bissectrices d'un couple de droites vectorielles de E_2.

3.7 THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles de E_2. Alors il existe deux droites vectorielles orthogonales $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ de E_2 telles que l'on ait : $\forall i \in \{1, 2\}$, angle $(\vec{D}, \vec{D}_i) =$ angle $(\vec{D}_i, \vec{D'})$.
Les droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont appelées les bissectrices du couple $(\vec{D}, \vec{D'})$.

Démonstration :
L'égalité : angle $(\vec{D}, \vec{D}_i) =$ angle $(\vec{D}_i, \vec{D'})$ équivaut à l'égalité :
angle $(\vec{D}, \vec{D}_i) +$ angle $(\vec{D}, \vec{D}_i) =$ angle $(\vec{D}, \vec{D'})$.
Appelons $\dot{\beta}$ l'angle de $\vec{D}$ et de $\vec{D'}$.
La recherche des droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ équivaut donc à la recherche des éléments $\dot{\alpha}$ de $\mathcal{A}'$ tels que l'on ait :
$\dot{\alpha} + \dot{\alpha} = \dot{\beta} = \{\beta, \beta + p\}$.
Du théorème 3.4, il résulte qu'il existe un unique élément $\dot{\alpha}_1$ de $\mathcal{A}'$ et un unique élément $\dot{\alpha}_2$ de $\mathcal{A}'$ tels que l'on ait :
$\psi(\dot{\alpha}_1) = \alpha_1 + \alpha_1 = \beta$
et $\psi(\dot{\alpha}_2) = \alpha_2 + \alpha_2 = \beta + p$.
On a donc : $\forall i \in \{1, 2\}$, $\dot{\alpha}_i + \dot{\alpha}_i = \dot{\beta}$.
Appelons $\vec{D}_1$ (resp. $\vec{D}_2$) l'unique droite vectorielle de E_2 telle que l'on ait :



angle $(\vec{D}, \vec{D}_1) = \dot{\alpha}_1$ (resp. angle $(\vec{D}, \vec{D}_2) = \dot{\alpha}_2$). Les droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont donc les seules qui répondent à la question.
D'autre part, l'application ψ du théorème 3.4 est un isomorphisme de $(\mathcal{A}', +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$. Des égalités $\psi(\dot{\alpha}_1) = \beta$, $\psi(\dot{\alpha}_2) = \beta + p$ et $\psi(\dot{\delta}_+) = p$, il résulte que l'on a : $\dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_1 + \dot{\delta}_+$. On a donc :
angle $(\vec{D}_1, \vec{D}_2) =$ angle $(\vec{D}, \vec{D}_2) -$ angle $(\vec{D}, \vec{D}_1) = \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1 = \dot{\delta}_+$.
Les droites $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont donc orthogonales. ■

4. Applications à la recherche d'ensembles de points.

Désignons par $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel réel euclidien orienté E. Si M, A, B sont trois points de $\mathcal{E}$ deux à deux distincts, pour simplifier l'écriture, nous notons $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ l'angle du vecteur $\overrightarrow{MA}$ et du vecteur $\overrightarrow{MB}$ et (MA, MB) l'angle de la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{MA}$ et de la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{MB}$. Rappelons que (AB) désigne la droite qui passe par A et par B.

Ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $(MA, MB) = \dot{\alpha}$.

4.1 Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$ et $\dot{\alpha}$ un élément de $\mathcal{A}'$. Appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E} \mid (MA, MB) = \dot{\alpha}\}$. De la définition de (MA, MB), il résulte que les points A et B n'appartiennent pas à $\mathcal{C}$. Soient M un point quelconque de $\mathcal{E}$, distinct de A et de B et $\vec{D}$ (resp. $\vec{D'}$) la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $\overrightarrow{MA}$ (resp. $\overrightarrow{MB}$). Envisageons les deux cas suivants : $\dot{\alpha} = \dot{\omega}$ et $\dot{\alpha} \neq \dot{\omega}$.

$\boxed{\dot{\alpha} = \dot{\omega}}$ On a : $((MA, MB) = \dot{\omega}) \iff (\vec{D} = \vec{D'}) \iff (M \in (AB))$.

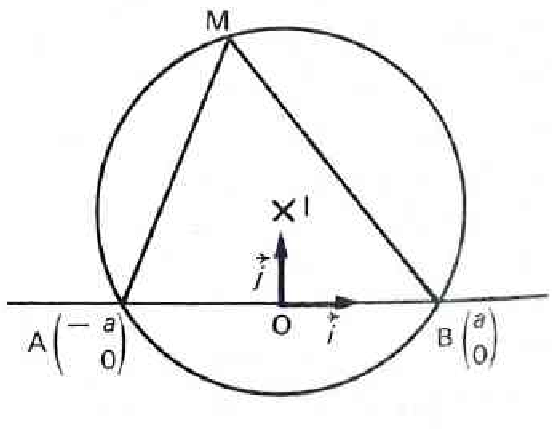
On a donc : $\mathcal{C} = (AB) - \{A, B\}$.

$\boxed{\dot{\alpha} \neq \dot{\omega}}$ On a :

$$\begin{aligned}
((MA, MB) = \dot{\alpha}) &\iff \left((\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + p\right)\\
&\iff \left((\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \alpha = \omega \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \alpha = p\right)\\
&\iff \left(\text{Sin}\left((\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \alpha\right) = 0\right)\\
&\iff \left(\text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\right).
\end{aligned}$$

La dernière équivalence résulte des "formules de transformations" étudiées en classe de Première.

Soit O le milieu du bipoint (A, B) ; soient $\vec{i}$ le vecteur unitaire de la demi-droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}$ l'unique vecteur de E tel que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base orthonormée directe de E. Considérons le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de A et B dans ce repère et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ celles de M.



Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont pour composantes respectives dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:
$\begin{pmatrix} -a-x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a-x \\ -y \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$\operatorname{Cos}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{\|\overrightarrow{MA}\| . \|\overrightarrow{MB}\|} = \frac{-(a^2 - x^2) + y^2}{\|\overrightarrow{MA}\| . \|\overrightarrow{MB}\|}$$

et :

$$\operatorname{Sin}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\operatorname{dét}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}{\|\overrightarrow{MA}\| . \|\overrightarrow{MB}\|} = \frac{2ay}{\|\overrightarrow{MA}\| . \|\overrightarrow{MB}\|}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont non nuls. On a donc : $\|\overrightarrow{MA}\| . \|\overrightarrow{MB}\| \neq 0$ et, par suite :

$((MA, MB) = \dot{\alpha}) \Longleftrightarrow (2ay \operatorname{Cos} \alpha - (x^2 + y^2 - a^2) \operatorname{Sin} \alpha = 0)$.

L'angle $\dot{\alpha}$ est différent de $\dot{\omega}$; on a donc $\operatorname{Sin} \alpha \neq 0$. D'où :

$$\begin{aligned}
((MA, MB) = \dot{\alpha}) &\Longleftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 2ay \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} - a^2 = 0\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(x^2 + \left(y - a \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}\right)^2 = a^2 + a^2 \frac{\operatorname{Cos}^2 \alpha}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(x^2 + \left(y - a \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

L'équation (1) est l'équation du cercle Γ de centre le point I de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ a \dfrac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de rayon $\dfrac{a}{|\operatorname{Sin} \alpha|}$. Il est immédiat que les points A et B appartiennent à ce cercle.

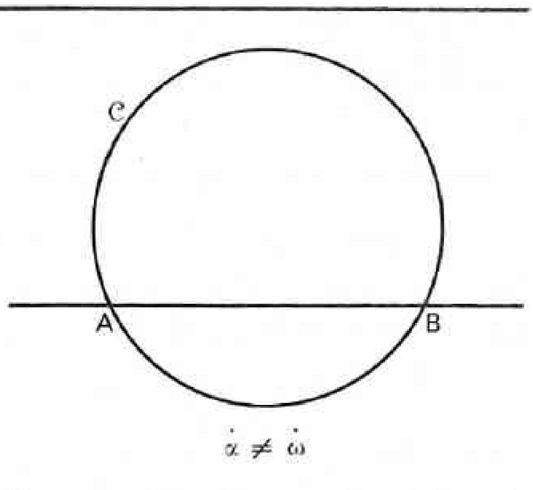
On a donc : $\mathcal{C} = \Gamma - \{A, B\}$.

Nous énonçons le théorème suivant :

THÉORÈME : Soient $\dot{\alpha}$ un élément de $\mathcal{A}'$ et A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$. L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$, tels que l'on ait : $(MA, MB) = \dot{\alpha}$ **est égal**

- **à la droite** (AB), **privée des points** A **et** B, **si** $\dot{\alpha} = \dot{\omega}$
- **à un cercle passant par** A **et** B, **privé des points** A **et** B, **si** $\dot{\alpha} \neq \dot{\omega}$.

$\dot{\alpha} = \dot{\omega}$

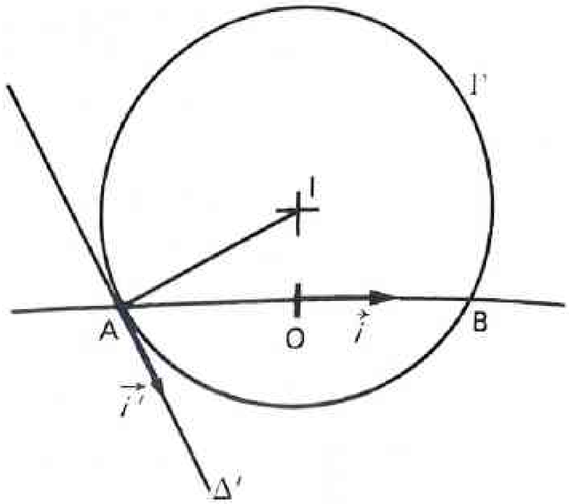


$\dot{\alpha} \neq \dot{\omega}$

Remarques : 1. Si on a : $\dot{\alpha} = \dot{\delta}_+$, le cercle Γ a pour équation : $x^2 + y^2 = a^2$. C'est donc le cercle de diamètre AB.

2. Supposons : $\dot{\alpha} \neq \dot{\omega}$. Soient $\vec{\Delta}$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\Delta}'$ l'unique droite vectorielle telle que l'on ait : angle $(\vec{\Delta}', \vec{\Delta}) = \dot{\alpha}$.
Soit $\vec{i}'$ le vecteur unitaire de $\vec{\Delta}'$ tel que l'on ait : angle $(\vec{i}', \vec{i}) = \alpha$. De la remarque 2 du paragraphe 1.8, il résulte que, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{i}'$ a pour composantes : $\begin{pmatrix} \text{Cos}\,(-\alpha) \\ \text{Sin}\,(-\alpha) \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \text{Cos}\,\alpha \\ -\text{Sin}\,\alpha \end{pmatrix}$.



D'autre part, dans cette base, le vecteur $\overrightarrow{IA}$ a pour composantes : $\begin{pmatrix} -a \\ -a\dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\alpha} \end{pmatrix}$.

On a donc : $\vec{i}'.\overrightarrow{IA} = -a \text{ Cos}\,\alpha + a \text{ Cos}\,\alpha = 0$.
La droite vectorielle $\vec{\Delta}'$ est donc orthogonale à la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{IA}$. La droite Δ' passant par A et de direction $\vec{\Delta}'$ est donc tangente en A au cercle Γ.
Ce résultat donne une construction de Γ : on trace la droite Δ' ; le point I est l'intersection de la droite perpendiculaire en A à Δ' et de la médiatrice de (AB) ; le cercle Γ est le cercle de centre I et de rayon IA.

Ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$.

4.2 Soient α un élément de $\mathcal{A}$ et A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$. Appelons $\mathcal{C}_1$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C}_1 = \{M \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\}$. De la définition de $\mathcal{C}_1$, il résulte que les points A et B n'appartiennent pas à $\mathcal{C}_1$. Appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E} \mid (MA, MB) = \dot{\alpha}\}$.
De la proposition : $\left(\forall M \in \mathcal{E},\ \left((\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\right) \Longrightarrow ((MA, MB) = \dot{\alpha})\right)$, il résulte que l'on a : $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$. Ceci nous incite à distinguer les deux cas suivants : $\alpha \in \dot{\omega}$ et $\alpha \notin \dot{\omega}$.
Dans ces deux cas, nous considérons le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ utilisé dans le paragraphe 4.1 et nous appelons, comme précédemment, $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives, dans ce repère, des points A et B et d'un point M quelconque de $\mathcal{E}$, distinct de A et de B (avec $a > 0$). On a alors :

$$\text{Cos}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\|\overrightarrow{MA}\|.\|\overrightarrow{MB}\|} \quad \text{et} \quad \text{Sin}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{2ay}{\|\overrightarrow{MA}\|.\|\overrightarrow{MB}\|}.$$

$\boxed{\alpha \in \dot{\omega}}$.

On a alors : $\dot{\alpha} = \dot{\omega}$ et, par suite : $\mathcal{C} = (AB) - \{A, B\}$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$. L'ordonnée y du point M est donc nulle et l'on a :

$$\text{Cos}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{x^2 - a^2}{\|\overrightarrow{MA}\| . \|\overrightarrow{MB}\|} \quad \text{et} \quad \text{Sin}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0.$$

On a d'autre part : $(M \in \mathcal{C}_1) \iff \left(M \in \mathcal{C} \text{ et } \text{Cos}\,\alpha . \text{Cos}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) > 0\right)$.

Il faut donc encore distinguer deux cas : $\alpha = \omega$ et $\alpha = p$.

- $\alpha = \omega$. On a : $\text{Cos}\,\alpha = 1$ et, par suite :

$(M \in \mathcal{C}_1) \iff \left(M \in \mathcal{C} \text{ et } \text{Cos}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) > 0\right) \iff (M \in \mathcal{C} \text{ et } |x| > a)$.

On a donc : $\mathcal{C}_1 = (AB) - [A, B]$.

- $\alpha = p$. On a : $\text{Cos}\,\alpha = -1$ et par suite :

$(M \in \mathcal{C}_1) \iff \left(M \in \mathcal{C} \text{ et } \text{Cos}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) < 0\right) \iff (M \in \mathcal{C} \text{ et } |x| < a)$.

On a donc : $\mathcal{C}_1 = [A, B] - \{A, B\}$.

$\boxed{\alpha \notin \dot{\omega}}$.

On a alors : $\dot{\alpha} \neq \dot{\omega}$ et, par suite : $\mathcal{C} = \Gamma - \{A, B\}$.

On a d'autre part : $(M \in \mathcal{C}_1) \iff \left(M \in \mathcal{C} \text{ et } \text{Sin}\,\alpha\, \text{Sin}\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) > 0\right)$

$\iff (M \in \mathcal{C} \text{ et } 2ay\,\text{Sin}\,\alpha > 0)$.

Il faut donc encore distinguer deux cas : $\text{Sin}\,\alpha > 0$ et $\text{Sin}\,\alpha < 0$.

- $\text{Sin}\,\alpha > 0$. On a : $(M \in \mathcal{C}_1) \iff (M \in \mathcal{C} \text{ et } y > 0)$.

L'ensemble $\mathcal{C}_1$ est donc l'arc de cercle de Γ, d'extrémités A et B, qui correspond aux points d'ordonnées strictement positives.

- $\text{Sin}\,\alpha < 0$. On a : $(M \in \mathcal{C}_1) \iff (M \in \mathcal{C} \text{ et } y < 0)$.

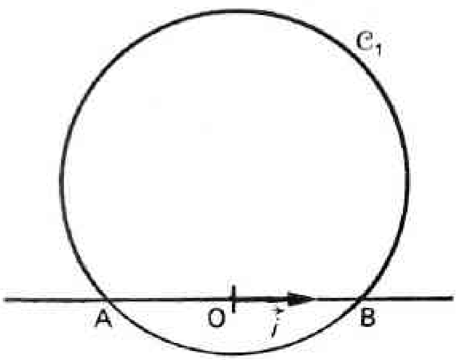
L'ensemble $\mathcal{C}_1$ est donc l'arc de cercle de Γ, d'extrémités A et B, qui correspond aux points d'ordonnées strictement négatives. Nous énonçons donc le théorème :

THÉORÈME : Soient un élément α de $\mathcal{A}$, et deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$. L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ est égal

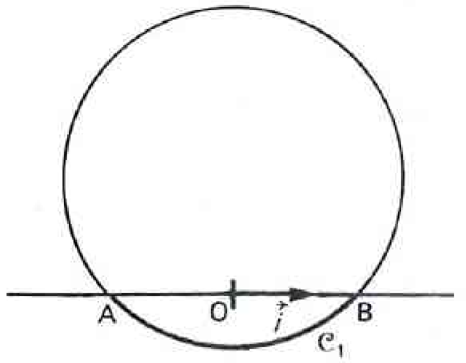
- **à la droite (AB), privée du segment [A, B], si $\alpha = \omega$**
- **au segment [A, B], privé des points A et B, si $\alpha = p$**
- **à un arc de cercle, d'extrémités A et B, privé des points A et B, si $\alpha \neq \omega$ et $\alpha \neq p$.**

$\alpha = \omega$

$\alpha = p$



sin $\alpha > 0$



sin $\alpha < 0$

Condition pour que quatre points non alignés soient cocycliques.

On dit que des points sont cocycliques lorsque que ces points appartiennent à un même cercle.

4.3 **THÉORÈME : Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ le cercle déterminé par ces trois points. On a alors :**
$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E} \mid (MA, MB) = (CA, CB)\} \cup \{A, B\}$.

Démonstration :
Remarquons que les points A, B, C sont nécessairement deux à deux distincts.
Du théorème 4.1, il résulte que l'ensemble défini par :
$\{M \in \mathcal{E} \mid (MA, MB) = (CA, CB)\}$
est un cercle Γ passant par A et B, privé des points A et B. Il est immédiat que C appartient à Γ. On a donc : $\mathcal{C} = \Gamma$. ■

4.4 **THÉORÈME : Soient A, B, C, D quatre points, deux à deux distincts, de $\mathcal{E}$. Les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si on a :** (CA, CB) = (DA, DB).

Démonstration :
Si les quatre points A, B, C, D **sont alignés**, on a :
$(CA, CB) = \dot{\omega}$ et $(DA, DB) = \dot{\omega}$.
Si les quatre points A, B, C, D **sont cocycliques**, le point D appartient au cercle déterminé par les trois points A, B, C; du théorème 4.3, il résulte l'égalité :
(CA, CB) = (DA, DB).
Réciproquement, supposons que les quatre points A, B, C, D vérifient l'égalité :
(CA, CB) = (DA, DB).

- Si les points A, B, C sont alignés, on a : $(CA, CB) = \dot{\omega} = (DA, DB)$, et les quatre points sont alignés.

- Si les points A, B, C ne sont pas alignés, appelons $\mathcal{C}$ le cercle qu'ils déterminent. D'après le théorème 4.3, de l'égalité (CA, CB) = (DA, DB), nous déduisons que le point D appartient à $\mathcal{C}$. Les quatre points A, B, C, D sont donc cocycliques. ■

EXERCICES

Dans les exercices de ce chapitre, on désignera par E_2 (resp. E_3) un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension 2 (resp. 3) et par $(\vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) une base orthonormée directe de E_2 (resp. E_3). On désignera par $\mathcal{E}_2$ un espace affine associé à E_2 et par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}_2$.

Angles.

1 Déterminer la mesure en radians de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E_2 dont les composantes respectives dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont : $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2-\sqrt{3}\\1-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

2 Même question que pour le n° 1 avec $\vec{u}$: $\begin{pmatrix}8\\-15\end{pmatrix}$ $\vec{v}$: $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.
On donnera le meilleur encadrement de la réponse qui soit permis par la table utilisée.

3 Soit $\vec{u}$ le vecteur de E_2 égal à $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Déterminer les vecteurs $\vec{v}$ de E_2 tels que : $\begin{cases} \widehat{\text{angle}\,(\vec{u}, \vec{v})} = -\dfrac{\pi}{2} & (2\pi) \\ \|\vec{v}\| = 2\sqrt{13}. \end{cases}$

4 Même question que pour le n° 3 avec : $\vec{u} = 8\vec{i} + 15\vec{j}$

et : $\begin{cases} \widehat{\text{angle}\,(\vec{u}, \vec{v})} = \dfrac{5\pi}{6} & (2\pi) \\ \|\vec{v}\| = 1 \end{cases}$

5 Même question que pour le n° 3 avec : $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

et : $\begin{cases} \widehat{\text{angle}\,(\vec{u}, \vec{v})} = 1 & (2\pi) \\ \|\vec{v}\| = 5. \end{cases}$
On donnera le meilleur encadrement de la réponse qui soit permis par la table utilisée.

6 Soient D la droite de $\mathcal{E}_2$ d'équation : $ax + by + c = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{D}$ la direction de D ; soit A le point de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Donner l'équation, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la droite Δ passant par A et dont la direction $\vec{\Delta}$ satisfait à : $\widehat{\text{angle}\,(\vec{D}, \vec{\Delta})} = -\dfrac{\pi}{4}$ (π).

7 Déterminer l'angle des directions des droites affines D et D' de $\mathcal{E}_2$ dont les équations cartésiennes respectives, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, sont :
$x + 2y - 1 = 0$ et $(x + 2y)\sqrt{3} + y - 2x = 25$.

8 Même question que pour le n° 7 avec les équations cartésiennes :
$8x - 15y = 0$ et $-3x + 4y = 1$.
On donnera le meilleur encadrement de la réponse qui soit permis par la table utilisée.

9 On désigne par $x'x$ la droite vectorielle de E_2 engendrée par $\vec{i}$.
Soient t un réel et σ_t l'endomorphisme de E_2 dont la matrice Σ_t dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $\Sigma_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$

1° Montrer que σ_t est une symétrie vectorielle de E_2 par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}_t$.

2° Déterminer la mesure en radians de l'angle des droites vectorielles $x'x$ et $\vec{D}_t$.

3° Soient t' et t'' deux réels ; calculer le produit $\Sigma_{t''} \times \Sigma_{t'}$. Commenter le résultat.

10 Même exercice que pour le n° 9 avec : $\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$

11 Soit f l'endomorphisme de E_3 défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} \\ f(\vec{j}) = \dfrac{1}{2}\vec{j} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{k} \\ f(\vec{k}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \dfrac{1}{2}\vec{k}. \end{cases}$$

1° Montrer que f est une rotation vectorielle de E_3.

2° Déterminer un vecteur unitaire $\vec{n}$ de l'axe de f.

3° Trouver un réel x tel que f soit la rotation vectorielle d'axe la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$ et d'angle x (2π).

:: **12** Mêmes questions que pour le n° 11 dans le cas où f est défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{k}) \\ f(\vec{j}) = -\vec{j} \\ f(\vec{k}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k}). \end{cases}$$

:: **13** Mêmes questions que pour le n° 11 dans le cas où f est défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = -\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} \\ f(\vec{k}) = \vec{k}. \end{cases}$$

:: **14** Mêmes questions que pour le n° 11 dans le cas où f est défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} \\ f(\vec{k}) = \vec{j}. \end{cases}$$

:: **15** Mêmes questions que pour le n° 11 dans le cas où f est défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = -\vec{i} \\ f(\vec{j}) = -\vec{k} \\ f(\vec{k}) = -\vec{j}. \end{cases}$$

Bissectrices.

16 1° Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires de E_2.
Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{W}$ de E_2 tels que l'on ait : $\vec{u}.\vec{W} = \vec{v}.\vec{W}$.

2° Soient, à présent, $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls de E_2. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{W}$ de E_2 tels que l'on ait : angle $(\vec{U}, \vec{W})$ = angle $(\vec{W}, \vec{V})$ est une droite vectorielle.
Cette droite vectorielle est appelée la **bissectrice intérieure** de l'angle des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$; justifier cette terminologie.

3° Soient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ les composantes respectives dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Déterminer, en fonction de a, b, c et d les composantes d'un vecteur $\vec{W}$ de la bissectrice intérieure de l'angle des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

17 Soient $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}, \vec{v'}$ quatre vecteurs non nuls de E_2 tels que : $\vec{u}.\vec{u'} = \vec{v}.\vec{v'} = 0$.
1° Comparer les bissectrices du couple constitué par la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et celle engendrée par $\vec{v}$, puis les bissectrices du couple constitué par la droite vectorielle engendrée par $\vec{u'}$ et celle engendrée par $\vec{v'}$.

2° Comparer les bissectrices intérieures (cf· ex. n° 16) des angles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'une part et $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ d'autre part. Discuter.

18 Soit $\vec{D}$ (resp. $\vec{D'}$) la droite vectorielle constituée des vecteurs de E_2 dont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ satisfont à :
$3x - 4y = 0$ (resp. $15x + 8y = 0$).
Déterminer les bissectrices du couple $(\vec{D}, \vec{D'})$.

19 Soient D et D' deux droites affines concourantes de $\mathcal{E}_2$.
On appelle **bissectrices de** D **et de** D' les droites affines Δ et Δ' de $\mathcal{E}_2$ définies comme suit :
- Δ et Δ' passent par le point d'intersection de D et de D'.
- Les directions respectives de Δ et Δ' sont les bissectrices des directions de D et de D'.

Soient : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ des équations respectives de D et de D' dans le repère $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Trouver les équations, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de Δ et de Δ'.

Produit vectoriel.

20 Soient $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E_3 et f l'application de E_3 dans E_3 définie par :
$\forall \vec{V} \in E_3, \quad f(\vec{V}) = (\vec{u} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{u}$.
Montrer que f est la projection orthogonale sur le plan vectoriel orthogonal à la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

21 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires orthogonaux de E_3 et g l'application de E_3 dans E_3 définie par : $\forall \vec{V} \in E_3, \quad g(\vec{V}) = (\vec{v} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{u}$.

1° Démontrer que g est linéaire ; déterminer $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.

2° On pose : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Calculer : $g(\vec{u})$, $g(\vec{v})$ et $g(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

22 Démontrer l'égalité suivante, dite du " double produit vectoriel " :

$\forall (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) \in E_3 \times E_3 \times E_3, \; (\vec{V} \wedge \vec{W}) \wedge \vec{U} = (\vec{V}.\vec{U})\,\vec{W} - (\vec{W}.\vec{U})\,\vec{V}$.

(On pourra exprimer les composantes des vecteurs $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ dans la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ choisie comme suit : $\vec{u} = \dfrac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}$, $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ dans le plan vectoriel engendré par $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

On pourra aussi utiliser les résultats des exercices n°s 20 et 21.

23 Étude du " produit mixte ".

1° Démontrer la proposition suivante :

$\forall (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) \in E_3 \times E_3 \times E_3, \quad (\vec{W}.(\vec{U} \wedge \vec{V})) = ((\vec{W} \wedge \vec{U}).\vec{V})$.

(On pourra utiliser la méthode suggérée dans l'exercice n° 22.)

2° Soient $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ trois vecteurs de E_3

On appelle **produit mixte** des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ et on note $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$, le réel égal à : $\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W})$.

Utiliser l'antisymétrie du produit vectoriel et la première question pour démontrer les égalités suivantes :

$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}) = (\vec{W}, \vec{U}, \vec{V})$

$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = -(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}) = -(\vec{U}, \vec{W}, \vec{V}) = -(\vec{W}, \vec{V}, \vec{U})$.

3° Montrer que la famille $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est liée si et seulement si l'on a : $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = 0$.

24 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3 ; on suppose que $\vec{u}$ est unitaire et on se propose de déterminer l'ensemble F des vecteurs $\vec{w}$ de E_3 tels que l'on ait : $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v}$.

1° Démontrer que l'application f de E_3 dans E_3, définie par :

$\forall \vec{V} \in E_3, \quad f(\vec{V}) = \vec{u} \wedge \vec{V}$ est linéaire.

Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

2° En déduire une condition nécessaire portant sur $\vec{u}$ et sur $\vec{v}$ pour que l'ensemble F soit non vide.

3° On suppose désormais cette condition réalisée. Soient $\vec{w}_0$ et $\vec{w}_1$ deux vecteurs de F. Montrer que $\vec{w}_1 - \vec{w}_0$ appartient à la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

4° Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}$ est un élément de F (cf. ex. n° 20). Donner tous les éléments de F.

25 Soit f un endomorphisme de E_3 tel que l'on ait :

$\forall (\vec{U}, \vec{V}) \in (E_3)^2, \quad (f(\vec{U}) \wedge f(\vec{V}) = f(\vec{U} \wedge \vec{V}))$.

Démontrer que f est une transformation orthogonale appartenant à $\mathcal{O}_+(E_3)$.

Points cocycliques dans le plan affine $\mathcal{E}_2$.

26 Soient Γ l'ensemble des couples de droites affines de $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{R}$ la relation dans Γ, dite d'antiparallélisme, définie par :
deux éléments quelconques (D, D') et (Δ, Δ') de Γ sont liés par la relation $\mathcal{R}$ si et seulement si les directions de D et de D' admettent les mêmes bissectrices que les directions de Δ et de Δ'.
1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans Γ.
2° Soient (D, D') et (Δ, Δ') deux éléments quelconques de Γ.
Démontrer les équivalences suivantes :
- $(D, D') \mathcal{R} (\Delta, \Delta') \iff \text{angle } (D, \Delta') = \text{angle } (\Delta, D')$.
- $(D, D') \mathcal{R} (\Delta, \Delta') \iff (\Delta, \Delta') \mathcal{R} (D, D') \iff (\Delta', \Delta) \mathcal{R} (D, D')$.

3° Soient quatre points deux à deux distincts A, B, C, D de $\mathcal{E}_2$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
a) les points A, B, C, D sont cocycliques;
b) on a : $\big((AB), (CD)\big) \mathcal{R} \big((AC), (BD)\big)$;
c) on a : $\big((AB), (CD)\big) \mathcal{R} \big((AD), (BC)\big)$.

27 Soient trois points non alignés A, B, C de $\mathcal{E}_2$ et $\dot{\varphi}$ un angle non nul de $\mathcal{A}'$.
A tout point M de $\mathcal{E}_2$, on associe le triplet (α, β, γ) de points de $\mathcal{E}_2$ défini comme suit :
α (resp. β, γ) est le point de la droite (BC) (resp. (CA), (AB)) tel que l'angle des droites (BC) et $(M\alpha)$ (resp. (CA) et $(M\beta)$, (AB) et $(M\gamma)$) soit égal à $\dot{\varphi}$.
1° Montrer que chacun des quadruplets (M, A, β, γ), (M, B, γ, α) et (M, C, α, β) est constitué de quatre points cocycliques.
2° Établir l'égalité : $(\alpha\beta, \alpha\gamma) = (MB, MC) - (AB, AC)$.
3° En déduire l'ensemble des points M tels que les points α, β, γ soient alignés.
Dans le cas où $\dot{\varphi}$ est égal à $\dot{\delta}$, cette propriété est connue sous le nom de " théorème de Simson ".

28 Soient, dans $\mathcal{E}_2$, un cercle Γ de centre O, et quatre points distincts A, B, C, D de Γ.
1° Soit M un point quelconque de Γ, distinct des points A et B.
Démontrer l'égalité : $(\widehat{MA, MB}) = \dfrac{1}{2} \text{angle } \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \quad (\pi)$.
2° Exprimer l'angle des droites (AC) et (BD) en fonction de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

29 Soient *a*, *b*, *z* trois nombres complexes et A, B, M leurs points-images respectifs dans le plan complexe. Soit Z le nombre complexe égal à $\dfrac{z-a}{z-b}$.
1° Soit r un réel strictement positif. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que l'on ait : $|Z| = r$?
2° Soit θ un réel satisfaisant à : $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que l'on ait : $\arg Z = \theta \quad (2\pi)$?
3° Soit c l'affixe d'un point donné C, distinct de A et de B. Construire le point M d'affixe z tel que $\bar{z} = \dfrac{c-a}{c-b}$.

30 Montrer que les points du plan complexe dont les affixes respectives sont : $\dfrac{i}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{i-1}{2}$, $\dfrac{-3-i}{10}$ sont cocycliques.

31 Même question que pour le n° 30 avec : $\frac{-i}{4}$, $\frac{-1-i}{2}$, $\frac{i-1}{4}$, $\frac{-3+5i}{34}$.

32 Soient quatre points distincts A, B, C, D du plan complexe d'affixes respectives a, b, c, d.

1° Montrer que, si les points A, B, C, D sont cocycliques, alors le nombre complexe $\rho(a, b, c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ est réel. Étudier la réciproque.

2° Démontrer l'égalité : $\rho\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \rho(a, b, c, d)$.

En déduire une propriété de la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $\frac{1}{z}$.

Problème.

33 Dans ce problème, on se propose de définir sur l'ensemble $H = \mathbb{R} \times E_3$ une structure de corps non commutatif (quaternions) et d'indiquer une application de ce corps à l'étude des rotations vectorielles de E_3.

A. Construction de H.

1° On définit une addition dans H par :

$\forall (s, \vec{V}) \in H, \quad \forall (s', \vec{V'}) \in H, \quad (s, \vec{V}) + (s', \vec{V'}) = (s + s', \vec{V} + \vec{V'})$.

Montrer brièvement qu'on munit ainsi H d'une structure de groupe commutatif ; préciser l'élément neutre.

2° On définit une multiplication dans H par :

$\forall (s, \vec{V}) \in H, \quad \forall (s', \vec{V'}) \in H, \quad (s, \vec{V}).(s', \vec{V'}) = (ss' - \vec{V}.\vec{V'}, s\vec{V'} + s'\vec{V} - \vec{V} \wedge \vec{V'})$.

On admettra que cette multiplication est associative dans H.

a) Montrer que cette multiplication est distributive par rapport à l'addition dans H.

b) Montrer que cette multiplication n'est pas commutative dans H.

c) Montrer que cette multiplication admet un élément neutre dans H que l'on précisera.

d) On définit l'application suivante de H dans H :

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H \\ (s, \vec{V}) &\longmapsto (s, -\vec{V}) \end{aligned}$$

et on note $\bar{q}$ l'image par cette application de l'élément $q = (s, \vec{V})$ de H.

Démontrer la propriété suivante : $\forall (q, q') \in H^2, \quad \overline{qq'} = \bar{q}'.\bar{q}$.

Calculer $q.\bar{q}$ et $\bar{q}.q$. En déduire que tout élément de H, distinct de $(0, \vec{0})$ admet un inverse que l'on calculera.

On a donc muni H d'une structure de corps non commutatif.

3° Soit R' l'ensemble des éléments $(s, \vec{0})$ de H.

Montrer que R' est un sous-corps de H, isomorphe à $\mathbb{R}$.

On pourra désormais identifier R' et $\mathbb{R}$.

4° On définit l'application suivante (norme) de H dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (s, \vec{V}) &\longmapsto \sqrt{s^2 + \vec{V}^2} \end{aligned}$$

et on note $|q|$ l'image par cette application de l'élément $q = (s, \vec{V})$ de H.

a) Utiliser le 2° *d*) pour démontrer la propriété suivante :

$\forall (q, q') \in H^2, \quad |qq'| = |q| \cdot |q'|$

b) Démontrer que l'ensemble Σ des éléments q de H tels que l'on ait : $|q| = 1$ est muni d'une structure de groupe pour la loi $\cdot$.

5° Soient $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E_3 et $C_{\vec{u}}$ l'ensemble des éléments $(s, \vec{V})$ de H tels que l'on ait : $\vec{u} \wedge \vec{V} = \vec{0}$.
Montrer que $C_{\vec{u}}$ est un sous-corps de H et que l'application f de $\mathbb{C}$ dans $C_{\vec{u}}$ qui, à tout nombre complexe $x + iy$, associe l'élément $(x, y\vec{u})$ de $C_{\vec{u}}$ est un isomorphisme de corps qui satisfait de plus à : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = |f(z)|$.

B. Soient $(\mathcal{A}, +)$ le groupe des angles de E_3 et S l'ensemble des vecteurs unitaires de E_3.

1° Démontrer que l'on a : $\forall \varphi \in \mathcal{A}, \quad \forall \vec{u} \in S, \quad (\text{Cos}\, \varphi, \text{Sin}\, \varphi\, \vec{u}) \in \Sigma$.
2° On définit l'application F de $\mathcal{A} \times S$ dans Σ par :
$\forall \varphi \in \mathcal{A}, \quad \forall \vec{u} \in S, \quad F(\varphi, \vec{u}) = (\text{Cos}\, \varphi, \text{Sin}\, \varphi\, \vec{u})$.
a) Démontrer que F est surjective.
b) Soit σ un élément de Σ. Déterminer, suivant les valeurs de σ, l'ensemble des couples $(\varphi, \vec{u})$ de $\mathcal{A} \times S$ tels que l'on ait : $F(\varphi, \vec{u}) = \sigma$.
3° Soit σ un élément fixé de Σ. On définit l'application T_σ de H dans lui-même par : $\forall q \in H, \quad T_\sigma(q) = \sigma . q . \sigma^{-1}$.
a) Démontrer que l'on a : $\forall (q, q') \in H^2, \quad T_\sigma(qq') = T_\sigma(q) . T_\sigma(q')$.
b) Montrer que, si q est un élément de H de la forme $(0, \vec{V})$, alors il existe un unique vecteur $\vec{V'}$ de E_3 tel que l'on ait : $T_\sigma(q) = (0, \vec{V'})$.
On définit ainsi une application R_σ de E_3 dans lui-même par :

$$\begin{aligned} E_3 &\longrightarrow E_3 \\ \vec{V} &\longmapsto \vec{V'} \end{aligned}$$

Montrer que R_σ est linéaire.
c) Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de E_3. Calculer le produit $(0, \vec{U}) . (0, \vec{V})$ dans H. En déduire, à l'aide de 3 *a*), que l'on a :
$\forall (\vec{U}, \vec{V}) \in (E_3)^2, \quad R_\sigma(\vec{U} \wedge \vec{V}) = R_\sigma(\vec{U}) \wedge R_\sigma(\vec{V})$
et
$\forall (\vec{U}, \vec{V}) \in (E_3)^2, \quad \vec{U} . \vec{V} = R_\sigma(\vec{U}) . R_\sigma(\vec{V})$.
d) En déduire que R_σ est une rotation vectorielle de E_3.
e) Montrer que l'application π de Σ dans $\mathcal{O}_+(E_3)$ définie par :
$\forall \sigma \in \Sigma, \ \pi(\sigma) = R_\sigma$
est un homomorphisme surjectif de groupes.
☼ *f*) Soit $(\varphi, \vec{u})$ un élément de $\mathcal{A} \times S$ tel que l'on ait : $(\text{Cos}\, \varphi, \text{Sin}\, \varphi\, \vec{u}) = \sigma$.
Montrer que R_σ est la rotation vectorielle de E_3, d'axe la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et d'angle $\varphi + \varphi$.
(On pourra introduire une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de premier vecteur $\vec{u}$, et interpréter dans H le produit
$(0, \vec{v}) . (0, R_\sigma(\vec{v})) = (0, \vec{v}) . \sigma . (0, \vec{v}) . \sigma^{-1}$ en tenant compte de 3 *a*.)

9. Isométries affines

1. Structure affine euclidienne.

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E.

Définitions (rappels).

1.1 Nous rappelons les définitions suivantes :

- $\mathcal{E}$ est un **espace affine euclidien** si et seulement si E est un espace vectoriel réel euclidien.
- L'application d de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2,\ d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ est appelée **distance euclidienne** dans $\mathcal{E}$. Elle possède les trois propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, & (d(A, B) = 0) \Longleftrightarrow (A = B) \\ \forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, & d(A, B) = d(B, A) \\ \forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, & d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C) \end{array}}$$

Inégalité de Minkowski

La troisième propriété est connue sous le nom d'inégalité triangulaire.

On note très souvent $d(A, B)$ par AB ; on a alors : $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$.

- Soient O un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Le repère $(O, \mathcal{B})$ est **orthonormé** si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée.
- L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est **orienté** si et seulement si l'espace vectoriel euclidien E est orienté. Le repère $(O, \mathcal{B})$ de $\mathcal{E}$ est un **repère orthonormé direct** si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de E.
- Deux sous-espaces affines non vides de $\mathcal{E}$ sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs directions sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de E.
- Soient $\mathcal{V}(A, E')$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et $\vec{n}$ un vecteur de E.

Le vecteur $\vec{n}$ est **normal au sous-espace affine** $\mathcal{V}(A, E')$ si et seulement si $\vec{n}$ appartient à l'orthogonal de E'.

Résultats analytiques dans un plan affine euclidien (rappels).

1.2 Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}_2$ désigne un espace affine associé à un plan vectoriel réel euclidien E_2 et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}_2$. Toutes les coordonnées (resp. les composantes) des points de $\mathcal{E}_2$ (resp. des vecteurs de E_2) sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. la base $(\vec{i}, \vec{j})$).

Vecteur normal à une droite.

Le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation cartésienne : $ax + by + h = 0$

Droites perpendiculaires.

Soient D et D′ deux droites de $\mathcal{E}_2$ d'équations cartésiennes respectives :
$ax + by + h = 0$ et $a'x + b'y + h' = 0$
Les droites D et D′ sont perpendiculaires si et seulement si l'on a : $aa' + bb' = 0$

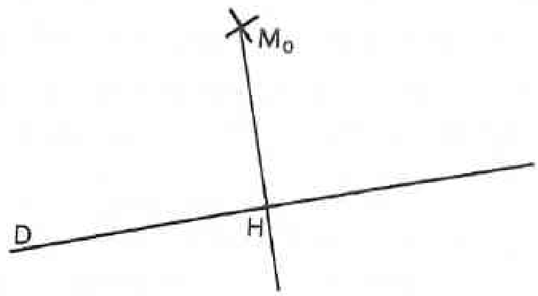
Distance d'un point à une droite.

Soient D une droite de $\mathcal{E}_2$ d'équation cartésienne : $ax + by + h = 0$ et M_0 un point de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Soit $d(M_0, D)$ la distance de M_0 à la droite D.

On a :

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + h|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nous rappelons que la distance de M_0 à D est, par définition, la distance de M_0 au point H, intersection de la droite D et de l'unique droite perpendiculaire à D passant par M_0.



Résultats analytiques dans un espace affine euclidien de dimension 3 (rappels).

1.3 Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}_3$ désigne un espace affine associé à un espace vectoriel réel euclidien E_3 de dimension 3 et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}_3$. Toutes les coordonnées (resp. les composantes) des points de $\mathcal{E}_3$ (resp. des vecteurs de E_3) sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (resp. la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

Vecteur normal à un plan.

Le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal au plan d'équation cartésienne : $ax + by + cz + h = 0$.

Droite et plan perpendiculaires.

Soient D et P une droite et un plan de $\mathcal{E}_3$. La droite D et le plan P sont perpendiculaires si et seulement si leurs directions $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Supposons, par exemple, que l'on connaisse une équation cartésienne de P : $ax + by + cz + h = 0$, et une représentation paramétrique de D :

$$(M \in D) \iff \left(\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases} \right).$$

La droite D et le plan P sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants.

Plans perpendiculaires.

Dans le chapitre 7, nous avons défini la notion de plans vectoriels orthogonaux dans un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3. De façon analogue, par abus de langage, nous dirons que **deux plans P et P′ sont perpendiculaires** si et seulement si leurs directions $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ sont des plans vectoriels orthogonaux de E_3, c'est-à-dire si et seulement si les droites vectorielles $\overrightarrow{P^{\perp}}$ et $\overrightarrow{P'^{\perp}}$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de E_3.

Soient P et P′ deux plans de $\mathcal{E}_3$ d'équations cartésiennes respectives :
$ax + by + cz + h = 0$ et $a'x + b'y + c'z + h' = 0$
Les plans P et P′ sont perpendiculaires si et seulement si l'on a :
$aa' + bb' + cc' = 0$

On a aussi le résultat suivant :
Soient P, P′, P″ trois plans quelconques de $\mathcal{E}_3$ tels que l'intersection de P′ et de P″ soit une droite D de $\mathcal{E}_3$.

La droite D est perpendiculaire au plan P si et seulement si les plans P et P′ d'une part, les plans P et P″ d'autre part sont perpendiculaires.

Ce résultat permet de déterminer si une droite, donnée par équations cartésiennes, et un plan donné, par une équation cartésienne, sont perpendiculaires.

schéma !

Exemple.

Cherchons une équation cartésienne du plan P passant par le point A de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et perpendiculaire à la droite D d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Appelons P′ (resp. P″) le plan d'équation cartésienne :
$x + y + z + 1 = 0$ (resp. $-x + 3y + 2z = 0$).
Soit $ax + by + cz + h = 0$ l'équation cherchée.

Le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal au plan P. La droite D et le plan P sont perpendiculaires si et seulement si les plans P et P′ d'une part et les plans P et P″ d'autre part sont perpendiculaires, c'est-à-dire si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur de composantes $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et au vecteur de composantes $\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$.

Les trois réels a, b, c, définis à un coefficient de proportionnalité non nul près, vérifient donc le système : $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 0. \end{cases}$

On a :

$$\left(\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 0 \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} a + b = -c \\ -a + 3b = -2c \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} a = -\dfrac{1}{4}c \\ b = -\dfrac{3}{4}c \end{cases}\right).$$

Prenons par exemple : $c = 4$.
L'équation cherchée est : $-x - 3y + 4z + h = 0$.
D'autre part le plan P passe par le point A. On a donc :
$-0 - 3.1 + 4.2 + h = 0$, c'est-à-dire : $h = -5$.
L'équation cherchée est : $-x - 3y + 4z - 5 = 0$.

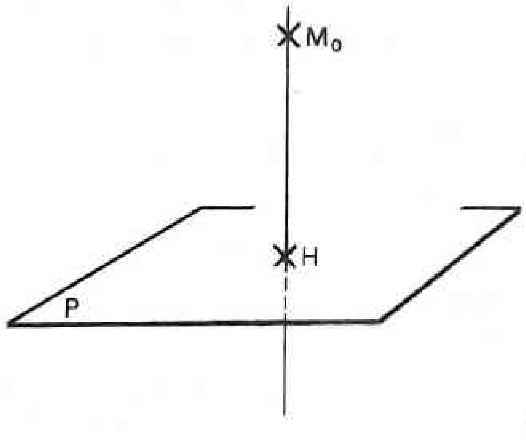
Distance d'un point à un plan.

Soient P un plan de $\mathcal{E}_3$ d'équation cartésienne : $ax + by + cz + h = 0$ et M_0 un point de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$. Soit $d(M_0, P)$ la distance de M_0 au plan P.

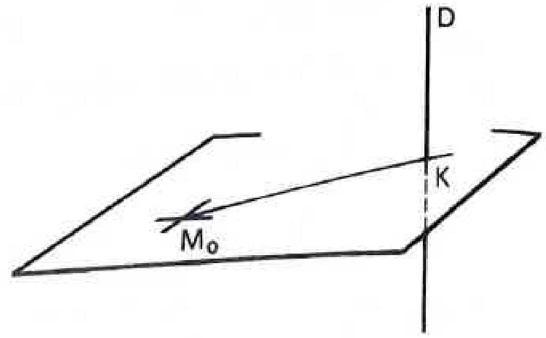
On a :

$$\boxed{d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + h|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Nous rappelons que la distance de M_0 à P est, par définition, la distance de M_0 au point H, intersection du plan P et de l'unique droite perpendiculaire à P passant par M_0.



De la même façon, la distance de M_0 à une droite D quelconque de $\mathcal{E}_3$ est la distance de M_0 au point K intersection de la droite D et de l'unique plan perpendiculaire à D passant par M_0.



Propriétés métriques du barycentre.

1.4 Dans ce paragraphe et dans le suivant, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine associé à un espace vectoriel réel euclidien E de dimension 2 ou 3.
Soient a, b, c trois réels et A, B, C trois points de $\mathcal{E}$.
Soit f la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points A, B, C et aux réels a, b, c, telle que nous l'avons définie au paragraphe 3.1 du chapitre 4.
Nous avons donc :

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow E$$
$$M \longmapsto a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$$

Considérons maintenant l'application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$, appelée quelquefois **fonction scalaire de Leibniz** associée aux points A, B, C et aux réels a, b, c, définie par :

$$g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$$

L'application g satisfait aux deux propriétés suivantes :

P1	$\forall (M, M') \in \mathcal{E}^2,\ g(M) = g(M') + 2\overrightarrow{MM'}.f(M') + (a+b+c)MM'^2.$

Démonstration :

Soient M et M' deux points quelconques de $\mathcal{E}$. On a :

$$\begin{aligned} g(M) &= aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \\ &= a(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A})^2 + b(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'B})^2 + c(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'C})^2 \\ &= a(MM'^2 + 2\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{M'A} + M'A^2) + b(MM'^2 + 2\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{M'B} + M'B^2) + \\ &\qquad c(MM'^2 + 2\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{M'C} + M'C^2) \\ &= (a+b+c)(MM'^2) + 2\overrightarrow{MM'}.(a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + c\overrightarrow{M'C}) + aM'A^2 \\ &\qquad + bM'B^2 + cM'C^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

P2	Supposons que l'on ait : $a+b+c \neq 0$, et appelons G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b, c. La proposition suivante est vérifiée : $\forall M \in \mathcal{E},\ g(M) = g(G) + (a+b+c)\,MG^2.$

Démonstration :

Utilisons la propriété P_1 dans le cas où M′ est égal à G. Nous obtenons :

$\forall M \in \mathcal{E},\ g(M) = g(G) + 2\overrightarrow{MG}.(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}) + (a+b+c)\,MG^2$.

Par définition de G, le vecteur $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ est le vecteur nul ; d'où le résultat cherché. ■

Remarque : Conformément au programme, nous avons défini la fonction scalaire de Leibniz associée à trois points et à trois réels. Cette définition s'étend de façon immédiate au cas de n points et de n réels.

Résolution de l'équation : $g(M) = k$.

1.5 Soient g l'application définie au paragraphe 1.4 et k un réel.

Résoudre l'équation : $g(M) = k$, c'est trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de $\mathcal{E}$ dont l'image par g est égale à k.

Envisageons les deux cas suivants : $a+b+c=0$ et $a+b+c \neq 0$.

$\boxed{a+b+c=0}$. Soit O un point de $\mathcal{E}$. De la propriété P_1 du paragraphe 1.4, il résulte que l'on a :

$\forall M \in \mathcal{E},\ g(M) = g(O) + 2\overrightarrow{MO}.(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC})$.

D'après le théorème 3.1 du chapitre 4, le vecteur $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ est indépendant de O ; posons : $\vec{u} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$. On a :

$$(g(M) = k) \Longleftrightarrow (g(O) + 2\overrightarrow{MO}.\vec{u} = k) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{OM}.\vec{u} = \frac{1}{2}(g(O) - k)\right).$$

Posons : $k' = \frac{1}{2}(g(O) - k)$.

Il faut distinguer deux cas : $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$.

- $\vec{u} = \vec{0}$.

On a : $(g(M) = k) \Longleftrightarrow (0 = k')$

et, par suite : $(\mathcal{S} = \mathcal{E}$ si $k' = 0)$ ou $(\mathcal{S} = \varnothing$ si $k' \neq 0)$.

- $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Soit D la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{u}$.

Étudions l'ensemble $\mathcal{S} \cap D$. On a :

$$(M \in \mathcal{S}\cap D) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = \lambda\vec{u} \\ \overrightarrow{OM}.\vec{u} = k' \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = \lambda\vec{u} \\ \lambda\vec{u}.\vec{u} = k' \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = \lambda\vec{u} \\ \lambda = \dfrac{k'}{\|\vec{u}\|^2} \end{cases}\right).$$

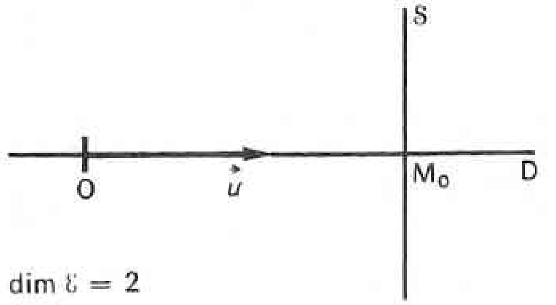
L'ensemble $\mathcal{S} \cap D$ a donc un seul élément, le point M_0 de D défini par : $\overrightarrow{OM_0} = \dfrac{k'}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$. On a donc : $\overrightarrow{OM_0}.\vec{u} = k'$.

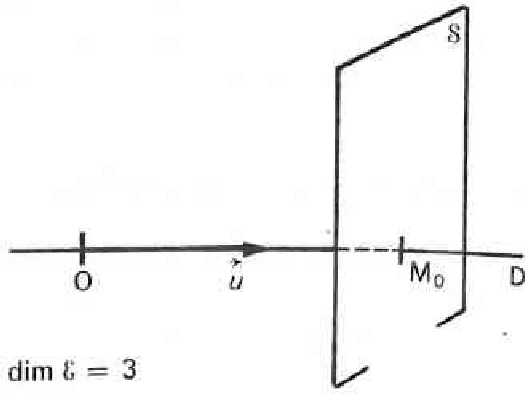
D'autre part, on a :

$(M \in \mathcal{S}) \iff (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = k') \iff (\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u} = k') \iff (\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u} = 0)$.

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par M_0 et perpendiculaire à D.

Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, l'ensemble $\mathcal{S}$ est une droite ; si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, l'ensemble $\mathcal{S}$ est un plan.





$\boxed{a + b + c \neq 0}$. Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b, c. De la propriété P_2 du paragraphe 1.4, il résulte que l'on a :

$\forall M \in \mathcal{E}, \quad g(M) = g(G) + (a + b + c)\, MG^2$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$. On a :

$$(g(M) = k) \iff \left(GM^2 = \frac{k - g(G)}{a + b + c}\right).$$

Posons : $k'' = \dfrac{k - g(G)}{a + b + c}$. On a alors : $(g(M) = k) \iff (GM^2 = k'')$.

Le réel GM^2 est positif ou nul ; il faut donc distinguer trois cas : $k'' < 0$ ou $k'' = 0$ ou $k'' > 0$.

- $k'' < 0$.

On a alors : $\mathcal{S} = \varnothing$.

- $k'' = 0$.

On a alors : $(g(M) = k) \iff (GM^2 = 0) \iff (M = G)$ et, par suite : $\mathcal{S} = \{G\}$.

- $k'' > 0$.

On a alors : $(g(M) = k) \iff (GM = \sqrt{k''})$.

Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, l'ensemble $\mathcal{S}$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{k''}$; si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, l'ensemble $\mathcal{S}$ est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{k''}$.

Nous énonçons donc le théorème suivant :

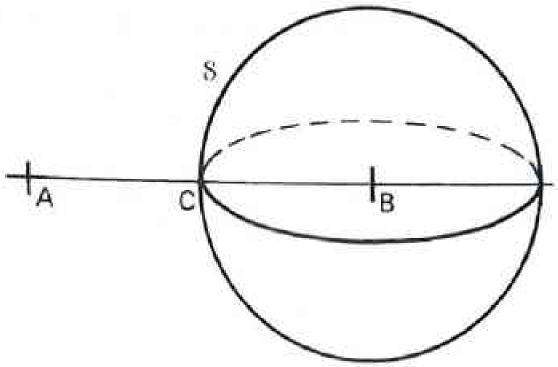
THÉORÈME : Soient k, a, b, c quatre réels et A, B, C trois points de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = k$.

Si la somme $a + b + c$ est nulle, l'ensemble $\mathcal{S}$ est soit l'ensemble vide, soit $\mathcal{E}$, soit une droite (resp. un plan) si $\mathcal{E}$ est de dimension 2 (resp. 3).

Si la somme $a + b + c$ n'est pas nulle, l'ensemble $\mathcal{S}$ est soit l'ensemble vide, soit un cercle (resp. une sphère), de centre le barycentre des points A, B, C, affectés des coefficients a, b, c, si $\mathcal{E}$ est de dimension 2 (resp. 3).

Remarque : Le rayon du cercle (resp. de la sphère) est éventuellement nul.

Exemple.



Supposons $\mathcal{E}$ de dimension 3. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$ et C le milieu de (A, B).
Cherchons l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait :
$MA^2 + 3\,MB^2 - 2\,MC^2 = AB^2$.
La somme $1 + 3 - 2$ n'est pas nulle ; cherchons donc le barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients 1, 3 et -2.
Le point G est défini, par exemple, par :
$(1 + 3 - 2)\,\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{BB} - 2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - 2\,\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
Le point G est donc égal au point B.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$: de la propriété P_2 du paragraphe 1.4, il résulte que l'on a :

$$\begin{aligned}(MA^2 + 3\,MB^2 - 2\,MC^2 = AB^2) &\iff (BA^2 + 3\,BB^2 - 2\,BC^2 + 2\,BM^2 = AB^2)\\ &\iff (BM^2 = BC^2)\\ &\iff (BM = BC).\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc la sphère de centre B et de rayon BC.

2. Isométries d'un espace affine euclidien.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien associé à un espace vectoriel réel euclidien E de dimension finie n ($n = 2$ ou 3).

Définition.

2.1 **DÉFINITION : Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.**
L'application f est une isométrie de $\mathcal{E}$ si et seulement si elle " conserve la distance ", c'est-à-dire si et seulement si on a :
$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad d(A, B) = d(f(A), f(B))$.

Exemples.

1. L'identité de $\mathcal{E}$ est une isométrie de $\mathcal{E}$.
2. Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul de E et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Soient A et B deux points quelconques de $\mathcal{E}$.
De l'égalité : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{t_{\vec{u}}(A)\, t_{\vec{u}}(B)}$, il résulte que $t_{\vec{u}}$ est une isométrie de $\mathcal{E}$.

3. Soient K un point de $\mathcal{E}$ et α un réel non nul. Soit $h(K, \alpha)$ l'homothétie de centre K et de rapport α.
Soient A et B deux points quelconques de $\mathcal{E}$, d'images respectives A' et B' par $h(K, \alpha)$.
On a : $\overrightarrow{KA'} = \alpha \overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB'} = \alpha \overrightarrow{KB}$, et par suite : $\overrightarrow{A'B'} = \alpha \overrightarrow{AB}$.
On a donc : $d(A', B') = |\alpha| \, d(A, B)$, et par suite :
$(\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(A', B') = d(A, B)) \Longleftrightarrow (|\alpha| = 1)$.
Une homothétie est une isométrie de $\mathcal{E}$ si et seulement si cette homothétie est soit l'identité de $\mathcal{E}$, soit une symétrie centrale.

On a les propriétés suivantes :

P1 Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. On a :
$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \quad \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{f(A)\, f(B)} . \overrightarrow{f(A)\, f(C)}$$

Démonstration :
Soient A, B, C trois points quelconques de $\mathcal{E}$ et A', B', C' leurs images respectives par f.
On a les égalités suivantes :
$\| \overrightarrow{BC} \|^2 = \| \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \|^2 = \| \overrightarrow{AC} \|^2 - 2 \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AB} + \| \overrightarrow{AB} \|^2$
et par suite :
$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\| \overrightarrow{AC} \|^2 + \| \overrightarrow{AB} \|^2 - \| \overrightarrow{BC} \|^2) = \frac{1}{2} (AC^2 + AB^2 - BC^2)$.
On a de même : $\overrightarrow{A'B'} . \overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2} (A'C'^2 + A'B'^2 - B'C'^2)$.
L'application f est une isométrie de $\mathcal{E}$; des égalités : $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ et $AB = A'B'$, il résulte que l'on a : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} . \overrightarrow{A'C'}$. ■

P2 Soient f une isométrie de $\mathcal{E}$ et $(n + 1)$ points $A_0, A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$ tels que $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit un repère orthonormé de $\mathcal{E}$; soient $A'_0, \dots, A'_n$ les images respectives des points $A_0, \dots, A_n$ par f.
Alors $(A'_0, \overrightarrow{A'_0A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'_0A'_n})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.

Démonstration :
$(A'_0, \overrightarrow{A'_0A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'_0A'_n})$ est un repère orthonormé si et seulement si la famille $(\overrightarrow{A'_0A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'_0A'_n})$ est une base orthonormée de E ; nous rappelons qu'il suffit pour cela que les vecteurs de cette famille soient unitaires et orthogonaux deux à deux.

• Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$ le vecteur $\overrightarrow{A'_0A'_i}$ est unitaire.
Soit i un élément quelconque de $\{1, \dots, n\}$. L'application f est une isométrie, on a donc : $\| \overrightarrow{A'_0A'_i} \| = d(A'_0, A'_i) = d(A_0, A_i) = \| \overrightarrow{A_0A_i} \| = 1$.

• Les vecteurs de la famille $(\overrightarrow{A'_0A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'_0A'_n})$ sont deux à deux orthogonaux.
Soient $\overrightarrow{A'_0A'_i}$ et $\overrightarrow{A'_0A'_j}$ deux vecteurs quelconques distincts de cette famille.
D'après la propriété P_1, on a : $\overrightarrow{A'_0A'_i} . \overrightarrow{A'_0A'_j} = \overrightarrow{A_0A_i} . \overrightarrow{A_0A_j} = 0$. ■

2.2 THÉORÈME : Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
1. l'application f est une isométrie de $\mathcal{E}$.
2. l'application f est une bijection affine de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé φ est une transformation orthogonale de E.

Démonstration :

<u>(2) $\Longrightarrow$ (1).</u> Soient A et B deux points quelconques de $\mathcal{E}$. On a :
$d(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})) = \|\overrightarrow{f(\mathrm{A})\,f(\mathrm{B})}\| = \|\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AB}})\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

<u>(1) $\Longrightarrow$ (2).</u> Nous faisons cette démonstration dans le cas où n est égal à 3.

• Soient O, I, J, K quatre points de $\mathcal{E}$ tels que $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}, \overrightarrow{\mathrm{OK}})$ soit un repère orthonormé $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$. Appelons O', I', J', K' les images respectives des points O, I, J, K par f et posons : $\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$, $\vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$, $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{OK}}$, $\vec{i'} = \overrightarrow{\mathrm{O'I'}}$, $\vec{j'} = \overrightarrow{\mathrm{O'J'}}$, $\vec{k'} = \overrightarrow{\mathrm{O'K'}}$.
D'après la propriété P_2 du paragraphe 2.1, $(\mathrm{O}', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est un repère orthonormé $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{E}$.

• Soient M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ et M' l'image de M par f. Le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé ; on a donc :
$x = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,.\,\vec{i}$, $\quad y = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,.\,\vec{j}$, $\quad z = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,.\,\vec{k}$.
D'après la propriété P_1 du paragraphe 2.1, on a :
$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,.\,\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{O'M'}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{O'I'}} = \overrightarrow{\mathrm{O'M'}}\,.\,\vec{i'}$
et de même : $\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,.\,\vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{O'M'}}\,.\,\vec{j'}$ $\quad$ et $\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,.\,\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{O'M'}}\,.\,\vec{k'}$.

Le repère $\mathcal{R}'$ est orthonormé ; le point M' a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans ce repère. Il résulte de ces calculs que, pour tout point M' de $\mathcal{E}$, il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que l'on ait : $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$. Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de M' dans le repère $\mathcal{R}'$, alors le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est le seul point qui a pour image M'. L'application f est donc bijective.

• Soit φ l'endomorphisme de E défini par : $\varphi(\vec{i}) = \vec{i'}$, $\varphi(\vec{j}) = \vec{j'}$, $\varphi(\vec{k}) = \vec{k'}$.
Démontrons que f est une application affine de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est φ, c'est-à-dire que l'on a : $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{E}^2$, $\overrightarrow{f(\mathrm{A})\,f(\mathrm{B})} = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$.
Soient A et B deux points quelconques de $\mathcal{E}$ et A' et B' leurs images respectives par f. Appelons $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp. } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$ les coordonnées de A (resp. B) dans le repère $\mathcal{R}$.
Les points A' et B' ont donc pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

On a alors : $\overrightarrow{A'B'} = (x_2 - x_1)\vec{i'} + (y_2 - y_1)\vec{j'} + (z_2 - z_1)\vec{k'}$
$$= (x_2 - x_1)\,\varphi(\vec{i}) + (y_2 - y_1)\,\varphi(\vec{j}) + (z_2 - z_1)\,\varphi(\vec{k})$$
$$= \varphi\left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right] = \varphi(\overrightarrow{AB}).$$

• L'endomorphisme φ transforme la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E en la base orthonormée $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ de E. De la propriété P_3 du paragraphe 2.3 du chapitre 7, il résulte que φ est une transformation orthogonale de E. ■

<u>Remarques</u> : 1. Toute isométrie de $\mathcal{E}$ est une bijection affine de $\mathcal{E}$, et, par suite, possède toutes les propriétés des bijections affines de $\mathcal{E}$; en particulier toute isométrie de $\mathcal{E}$ est déterminée par la donnée d'un point, de son image et de l'endomorphisme orthogonal associé.

2. Pour les mêmes raisons toute isométrie de $\mathcal{E}$ transforme un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension p en un sous-espace affine de même dimension, et deux sous-espaces affines parallèles de $\mathcal{E}$ en deux sous-espaces affines parallèles.

3. Toute isométrie de $\mathcal{E}$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est une transformation orthogonale de E. Par suite, elle transforme deux sous-espace affines perpendiculaires en deux sous-espaces affines perpendiculaires.

Ensemble des isométries de $\mathcal{E}$.

2.3 Appelons $\mathcal{I}$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$. On a les propriétés suivantes :

> **P1** $(\mathcal{I}, \circ)$ est un groupe et l'application Φ de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}(E)$ qui, à toute isométrie f de $\mathcal{E}$, associe son endomorphisme orthogonal associé φ est un homomorphisme de $(\mathcal{I}, \circ)$ dans $(\mathcal{O}(E), \circ)$.

Démonstration :

• La loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{I}$.
Soient f et g deux isométries quelconques de $\mathcal{E}$. On a :
$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2,\ d((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) = d(f(A), f(B)) = d(A, B).$
L'application $g \circ f$ est donc une isométrie.

• La loi $\circ$ est associative dans l'ensemble des applications de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, donc dans $\mathcal{I}$.

• L'identité de $\mathcal{E}$ est une isométrie ; la loi $\circ$ admet donc un élément neutre dans $\mathcal{I}$.

• Tout élément de $\mathcal{I}$ a un symétrique pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{I}$.
Soient f une isométrie quelconque de $\mathcal{E}$ et f^{-1} la bijection réciproque de f. On a :
$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2,\ d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = d(A, B).$
L'application f^{-1} est donc une isométrie de $\mathcal{E}$.

• Soient f et g deux isométries quelconques de $\mathcal{E}$ d'endomorphismes associés respectifs φ et ψ.
Du théorème 1.7 du chapitre 6 il résulte que $g \circ f$ est une bijection affine de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est $\psi \circ \varphi$, qui est un élément de $\mathcal{O}(E)$. On a donc bien défini un homomorphisme de $(\mathcal{I}, \circ)$ dans $(\mathcal{O}(E), \circ)$. ■

Dans le chapitre 7, nous avons réalisé une partition de $\mathcal{O}(E)$ en deux sous-ensembles $\mathcal{O}_+(E)$ et $\mathcal{O}_-(E)$; ceci nous conduit aux définitions suivantes :
On appelle **déplacement ou isométrie positive de** $\mathcal{E}$ toute isométrie de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé appartient à $\mathcal{O}_+(E)$.
On appelle **antidéplacement ou isométrie négative de** $\mathcal{E}$ toute isométrie de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé appartient à $\mathcal{O}_-(E)$.
Appelons $\mathcal{D}$ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{E}$.

P2 $\mathcal{D}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{J}, \circ)$.

Démonstration :
Utilisons le théorème 1.5 du chapitre 1.
- Soient f et g deux déplacements quelconques de $\mathcal{E}$ d'endomorphismes associés respectifs φ et ψ.

L'ensemble $\mathcal{O}_+(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$; l'application $\psi \circ \varphi$ est donc un élément de $\mathcal{O}_+(E)$; par suite $g \circ f$, dont l'endomorphisme associé est $\psi \circ \varphi$, est un déplacement.
- L'identité de $\mathcal{E}$ a pour endomorphisme associé Id_E qui est un élément de $\mathcal{O}_+(E)$.
- Soit f un déplacement quelconque de $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ.

La bijection réciproque f^{-1} de f a pour endomorphisme associé φ^{-1}, qui est un élément de $\mathcal{O}_+(E)$. ■

P3 Soient f et g deux antidéplacements quelconques de $\mathcal{E}$. Alors $g \circ f$ est un déplacement de $\mathcal{E}$.

P4 Soient f un déplacement quelconque de $\mathcal{E}$ et g un antidéplacement quelconque de $\mathcal{E}$. Alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des antidéplacements de $\mathcal{E}$.

Ces deux propriétés résultent de façon immédiate des résultats donnés au chapitre 7 sur la composition d'éléments de $\mathcal{O}_+(E)$ et de $\mathcal{O}_-(E)$, dans le cas où la dimension de E est égale à 2 ou à 3.
Plus généralement, on démontre de façon analogue la propriété suivante :

P5 La composée d'un nombre pair d'antidéplacements est un déplacement.
La composée d'un nombre impair d'antidéplacements est un antidéplacement.

Nous avons aussi le résultat suivant :

P6 Soit K un point quelconque de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{J}_K$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ qui laissent K invariant.
Alors $(\mathcal{J}_K, \circ)$ est un groupe isomorphe à $(\mathcal{O}(E), \circ)$.

Démonstration :
- L'ensemble $\mathcal{J}_K$ est stable pour la loi $\circ$.

Soient f et g deux éléments quelconques de $\mathcal{J}_K$. L'isométrie $g \circ f$ est telle que l'on ait : $(g \circ f)(K) = g(f(K)) = g(K) = K$.
L'application $g \circ f$ appartient donc à $\mathcal{J}_K$.

• Considérons l'application Φ définie dans la propriété P_1 et appelons Φ_K la restriction de Φ à $\mathcal{J}_K$. L'application Φ_K est un homomorphisme de $(\mathcal{J}_K, \circ)$ dans $(\mathcal{O}(E), \circ)$.

• L'application Φ_K est une bijection.
Soit φ un élément quelconque de $\mathcal{O}(E)$. L'image réciproque de φ par Φ_K est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ et qui laisse K invariant. Elle est donc unique.

• Il résulte du théorème 2.3 du chapitre 1 que $(\mathcal{J}_K, \circ)$ est un groupe isomorphe à $(\mathcal{O}(E), \circ)$. ■

Isométries involutives de $\mathcal{E}$.

Soit f une isométrie involutive de $\mathcal{E}$. L'application f est donc en particulier une involution affine de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une symétrie affine de $\mathcal{E}$. D'autre part l'endomorphisme associé φ de cette symétrie est une transformation orthogonale involutive de E, c'est-à-dire une symétrie vectorielle orthogonale de E.
Ces propriétés nous conduisent à la définition et au théorème suivants :

2.4 **DÉFINITION : Soient** E' **un sous-espace vectoriel de E et** $\mathcal{E}'$ **un sous-espace affine de** $\mathcal{E}$ **de direction** E'.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{E}'$**, la symétrie affine par rapport à** $\mathcal{E}'$ **de direction** $E'^{\perp}$.

<u>Remarque</u> : Par définition des symétries affines, $\mathcal{E}'$ est le sous-espace affine des points invariants par la symétrie. D'autre part, si A est un point de $\mathcal{E} - \mathcal{E}'$ et A' son image par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{E}'$, alors le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ appartient à $E'^{\perp}$; la droite (AA') est donc perpendiculaire à $\mathcal{E}'$.

2.5 **THÉORÈME : L'ensemble des isométries involutives de** $\mathcal{E}$ **est l'ensemble des symétries orthogonales de** $\mathcal{E}$.

Nous allons donner la liste des différentes symétries orthogonales f de $\mathcal{E}$; nous les classons d'après la dimension du sous-espace affine $\mathcal{E}'$ des points invariants et nous donnons pour chacune d'elles l'endomorphisme associé φ.

<u>dim $\mathcal{E}$ = 2</u>

dim $\mathcal{E}'$	f	φ
2	$Id_{\mathcal{E}}$	Id_E
1	symétrie orthogonale par rapport à une droite affine	symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle
0	symétrie centrale	$-Id_E$

Nous appellerons **réflexion affine par rapport à** D la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine D, dans le plan affine $\mathcal{E}$.

dim $\mathcal{E} = 3$.

dim $\mathcal{E}'$	f	φ
3	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	Id_E
2	symétrie orthogonale par rapport à un plan affine	réflexion vectorielle
1	symétrie orthogonale par rapport à une droite affine	demi-tour
0	symétrie centrale	$-\mathrm{Id}_E$

Nous appellerons **réflexion affine par rapport à** P la symétrie orthogonale par rapport au plan affine P dans l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 et **symétrie axiale d'axe** D la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine D dans l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3.

Propriétés.

2.6 On a les propriétés suivantes :

P1 Toute réflexion affine est un antidéplacement de l'espace affine $\mathcal{E}$.

Cette propriété résulte de façon immédiate de la définition d'un antidéplacement et de la nature des endomorphismes associés aux réflexions affines.

P2 Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$.
Il existe une unique réflexion affine s telle que l'on ait : $s(A) = B$.

Démonstration :
Appelons C le milieu de (A, B).
Unicité. Si s est une réflexion affine telle que l'on ait : $s(A) = B$, alors on a : $s(B) = (s \circ s)(A) = A$.
L'image par s du point C, isobarycentre des points A et B, est l'isobarycentre des points $s(A)$ et $s(B)$; c'est donc le point C.
Le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ des points invariants est donc nécessairement le sous-espace affine passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).
$\mathcal{E}'$ est donc unique et par suite il en est de même de s.
Existence. Soit $\mathcal{E}'$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par C et perpendiculaire à la droite (AB) ; soit s la réflexion affine par rapport à $\mathcal{E}'$. Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ est une droite et si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ est un plan.
Démontrons que l'on a : $s(A) = B$.
Par définition de s, on a : $\overrightarrow{A\,s(A)} = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ et, par suite : $s(A) = B$. ■

Remarque : Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, la droite D des points invariants par la réflexion affine s est la médiatrice du segment [A, B].

3. Isométries de $\mathcal{E}_2$.

Remarquons que, si $\mathcal{E}$ est un espace affine associé à un espace vectoriel réel euclidien E de dimension 1, il résulte de l'égalité : $\mathcal{O}(E) = \{Id_E, -Id_E\}$ que les seuls déplacements de $\mathcal{E}$ sont les translations et que les seuls antidéplacements de $\mathcal{E}$ sont les symétries centrales.
Dans la suite de ce paragraphe, E_2 désigne un plan vectoriel réel euclidien et $\mathcal{E}_2$ un espace affine associé à E_2.

Ensemble $\mathcal{D}$ des déplacements de $\mathcal{E}_2$.

3.1 Soit f un élément quelconque de $\mathcal{D}$; son endomorphisme associé φ appartient par définition à $\mathcal{O}_+(E_2)$; c'est donc soit Id_E, soit une rotation vectorielle d'angle α non nul.

On a les propriétés suivantes :

P1	Si φ est l'identité de E_2, alors f est une translation de $\mathcal{E}_2$.

Cette propriété n'est autre que la propriété P_2 du paragraphe 2.2 du chapitre 6.

P2	Si φ n'est pas l'identité de E_2, alors f admet un seul point invariant.

Démonstration :

Appelons $\mathcal{E}'$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ des points invariants par f.
Soient A un point de $\mathcal{E}$ et A' son image par f ; soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.
On a :

$$\begin{aligned}(M \in \mathcal{E}') &\iff (f(M) = M)\\ &\iff \left(\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M}\right)\\ &\iff \left(\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}\right)\\ &\iff \left((\varphi - Id_{E_2})(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A}\right).\end{aligned}$$

Ceci nous conduit à étudier l'endomorphisme $\varphi - Id_{E_2}$ de E_2.

Nous savons que la matrice, dans une base orthonormée quelconque de E_2, de la rotation vectorielle φ distincte de Id_{E_2} est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $a \neq 1$.

Dans la même base, la matrice de $\varphi - Id_{E_2}$ est donc $\begin{pmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\text{dét}\,(\varphi - Id_{E_2}) = \begin{vmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + b^2 = 2(1-a).$$

Ce déterminant est non nul ; l'endomorphisme $\varphi - Id_{E_2}$ est donc bijectif.
Il existe donc un seul vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que l'on ait : $(\varphi - Id_{E_2})(\vec{u}) = \overrightarrow{A'A}$, et, par suite, un seul point M de $\mathcal{E}_2$ tel que l'on ait : $(\varphi - Id_{E_2})(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A}$. ■

P3 Soit f un déplacement de $\mathcal{E}_2$, dont l'endomorphisme associé φ n'est pas l'identité de E_2. Soient α l'angle de φ et K l'unique point de $\mathcal{E}_2$ invariant par f. On a :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2, \left((M' = f(M)) \iff \left(\overrightarrow{KM'} = \varphi(\overrightarrow{KM})\right) \iff \left(\begin{cases} KM' = KM \\ \text{angle}\,(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \alpha \end{cases}\right)\right)$$

Démonstration :
Soient M et M' deux points quelconques de $\mathcal{E}_2$.
Par définition de f, on a :

$$(M' = f(M)) \iff \left(\varphi(\overrightarrow{KM}) = \overrightarrow{f(K)\,f(M)}\right) \iff \left(\varphi(\overrightarrow{KM}) = \overrightarrow{KM'}\right).$$

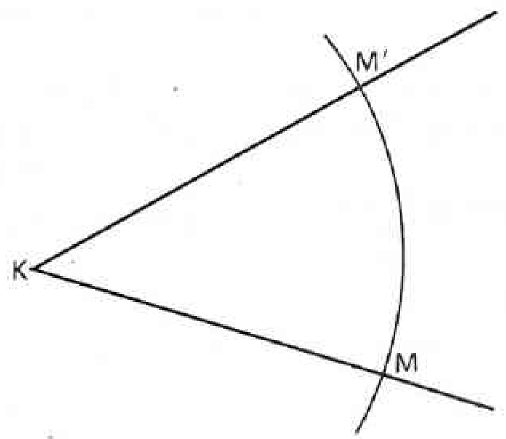
Par définition de φ, on a :

$$\left(\varphi(\overrightarrow{KM}) = \overrightarrow{KM'}\right) \iff \left(\begin{cases} \|\overrightarrow{KM}\| = \|\overrightarrow{KM'}\| \\ \text{angle}\,(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \alpha \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} KM = KM' \\ \text{angle}\,(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \alpha \end{cases}\right). \blacksquare$$

3.2 **DÉFINITION : Soient K un point de $\mathcal{E}_2$ et α un élément de $\mathcal{A}$.**
On appelle rotation de centre K et d'angle α, et on note $r(K,\alpha)$, l'application affine de $\mathcal{E}_2$ d'endomorphisme associé la rotation vectorielle de E_2 d'angle α qui laisse le point K invariant.

Remarques : 1. Soient M et M' deux points quelconques de $\mathcal{E}_2$. D'après la propriété P_3 du paragraphe 3.1, on a :

$$(M' = r(K, \alpha)(M)) \iff \left(\begin{cases} KM' = KM \\ \text{angle}\,(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \alpha \end{cases}\right).$$



2. La rotation de centre K et d'angle ω a pour endomorphisme associé Id_{E_2} et admet au moins un point invariant autre que K. C'est donc l'identité de $\mathcal{E}_2$.
On a : $\forall K \in \mathcal{E}_2, \quad r(K, \omega) = Id_{\mathcal{E}_2}$.
3. La rotation de centre K et d'angle p a pour endomorphisme associé $-Id_{E_2}$ et admet K pour unique point invariant. C'est donc la symétrie centrale de centre K.
4. Supposons E_2 orienté et appelons x une détermination de la mesure en radians de l'angle α. Par abus de langage nous appellerons **rotation de centre K et d'angle x défini modulo 2π** la rotation $r(K, \alpha)$.

Des paragraphes 3.1 et 3.2, il résulte le théorème suivant :

3.3 **THÉORÈME : Tout déplacement de $\mathcal{E}_2$ est soit une translation, soit une rotation d'angle non nul.**

<u>Remarque</u> : Nous disposons de deux méthodes pour déterminer la nature d'un déplacement f de $\mathcal{E}_2$:

- considérer l'endomorphisme associé φ :

si φ est l'identité de E_2, alors f est une translation ;
si φ n'est pas l'identité de E_2, alors f est une rotation d'angle non nul.

- considérer le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ des points de $\mathcal{E}_2$ invariants par f :

si $\mathcal{E}'$ est l'ensemble vide, alors f est une translation de vecteur non nul ;
si $\mathcal{E}'$ est un singleton, alors f est une rotation d'angle non nul ;
si $\mathcal{E}'$ contient au moins deux points distincts, alors f est l'identité de $\mathcal{E}_2$.

Ensemble des antidéplacements de $\mathcal{E}_2$.

3.4 D'après la propriété P_1 du paragraphe 2.6, nous savons déjà que toute réflexion affine de $\mathcal{E}_2$ est un antidéplacement.
Étudions le problème réciproque. Soit f un antidéplacement de $\mathcal{E}_2$; son endomorphisme associé φ appartient par définition à $\mathcal{O}_-(E_2)$; c'est donc une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$ de E_2.
On a les propriétés suivantes :

P1 Si f admet un point invariant K, alors f est la réflexion affine par rapport à la droite D passant par K de direction $\vec{D}$; la droite D est le sous-espace affine des points invariants par f.

Démonstration :
La réflexion affine s par rapport à D est une application affine dont l'endomorphisme associé est φ et qui transforme le point K en lui-même. Il en est de même pour f.
De la remarque 1 du paragraphe 2.2, il résulte que f est égale à s. ■

P2 Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul de E_2 et Δ une droite de $\mathcal{E}_2$ de vecteur directeur $\vec{u}$. Soient $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et s_Δ la réflexion affine par rapport à Δ.
Alors $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}_2$ qui n'a pas de point invariant et on a : $s_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$.

Démonstration :
Appelons $\vec{\Delta}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et $\sigma_{\vec{\Delta}}$ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{\Delta}$.

- L'endomorphisme associé à $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est $\sigma_{\vec{\Delta}}$ et, par suite, $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}_2$.

• Cherchons les points de $\mathcal{E}_2$ invariants par $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$; on a :
$((s_\Delta \circ t_{\vec{u}})(M) = M) \iff (\exists M' \in \mathcal{E}_2,\ M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $s_\Delta(M') = M)$.
On a donc :

$$((s_\Delta \circ t_{\vec{u}})(M) = M) \Longrightarrow (\exists M' \in \mathcal{E}_2,\ \overrightarrow{MM'} \in \vec{\Delta}^\perp \text{ et } \overrightarrow{MM'} \in \vec{\Delta} \text{ et } \overrightarrow{MM'} \neq \vec{0})$$
$$\Longrightarrow (\exists M' \in \mathcal{E}_2,\ \overrightarrow{MM'} \in \vec{\Delta}^\perp \cap \vec{\Delta} \text{ et } \overrightarrow{MM'} \neq \vec{0}).$$

On a : $\vec{\Delta} \cap \vec{\Delta}^\perp = \{\vec{0}\}$.
Il n'existe donc pas de point M invariant par $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

• Les deux applications affines $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ ont toutes deux pour endomorphisme associé $\sigma_{\vec{\Delta}}$; pour démontrer qu'elles sont égales, il suffit donc de trouver un point de $\mathcal{E}_2$ qui a même image par chacune d'elles.
Soit A un point de Δ.
Appelons A′ le point de $\mathcal{E}_2$ défini par : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$; le point A′ appartient à Δ.
On a donc : $(s_\Delta \circ t_{\vec{u}})(A) = s_\Delta(A') = A'$ et $(t_{\vec{u}} \circ s_\Delta)(A) = t_{\vec{u}}(A) = A'$. ■

P3 Si f n'a pas de point invariant, alors il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ de $\vec{D}$ et une unique droite D de direction $\vec{D}$ tels que f soit la composée de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ et de la réflexion affine s_D par rapport à D.

Il résulte de P_2 que l'on a alors : $f = s_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_D$.
On appelle cette décomposition de f **la forme réduite de** f.

Démonstration :

Unicité. Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{D}$, et D et D′ deux droites de direction $\vec{D}$, s'il en existe, tels que l'on ait : $f = s_D \circ t_{\vec{u}}$ et $f = s_{D'} \circ t_{\vec{u'}}$.
On a alors : $s_D \circ t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ t_{\vec{u'}}$ et par suite : $s_D \circ t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u'}} = s_{D'}$
c'est-à-dire : $s_D \circ t_{\vec{u}-\vec{u'}} = s_{D'}$.
L'application $s_{D'}$ est un antidéplacement qui admet pour sous-espace affine de points invariants la droite D′.
Supposons que le vecteur $\vec{u} - \vec{u'}$ de $\vec{D}$ soit non nul. D'après P_2, l'application $s_D \circ t_{\vec{u}-\vec{u'}}$ serait un antidéplacement de $\mathcal{E}_2$ sans point invariant, ce qui est incompatible avec l'égalité : $s_D \circ t_{\vec{u}-\vec{u'}} = s_{D'}$.
On a donc : $\vec{u} = \vec{u'}$, et par suite : $s_D = s_{D'}$, ce qui équivaut à : $D = D'$.

Existence. Soient A un point de $\mathcal{E}_2$ et A′ son image par f. Soient B le milieu de (A, A′) et D la droite passant par B de direction $\vec{D}$.
Appelons s_D la réflexion affine par rapport à D. L'endomorphisme associé à s_D est encore φ.

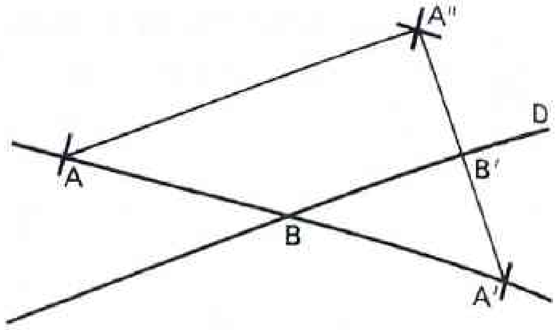
• L'application $s_D \circ f$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est égal à $\varphi \circ \varphi$, c'est-à-dire à Id_{E_2}. L'application $s_D \circ f$ est donc une translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$.

• Posons $A'' = (s_D \circ f)(A) = s_D(A')$.

Par définition, on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AA''}$.

Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{AA''}$ appartient à $\vec{D}$.

Soit B' la projection orthogonale de A' sur la droite D.



Par définition de s_D, on a : $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{A'B'}$.

Par définition de B, on a : $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{BA'}$.

On a donc :

$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = 2(\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'B'}) = 2\overrightarrow{BB'}$.

Les points B et B' appartiennent à D ; le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ appartient donc à $\vec{D}$; il en est donc de même du vecteur $\overrightarrow{AA''}$.

• On a finalement : $s_D \circ f = t_{\vec{u}}$ et par suite : $f = s_D \circ t_{\vec{u}}$

Par hypothèse l'application f n'a pas de point invariant.

Si le vecteur $\vec{u}$ était nul, on aurait : $f = s_D$, ce qui est impossible. Le vecteur $\vec{u}$ est donc non nul. ■

Nous rassemblons les résultats du paragraphe 3.4 dans le théorème suivant :

3.5 **THÉORÈME : Tout antidéplacement de $\mathcal{E}_2$ est soit une réflexion affine, soit la composée d'une réflexion affine par rapport à une droite D et d'une translation, distincte de l'identité de $\mathcal{E}_2$, dont le vecteur appartient à la direction de D.**

Remarques : 1. La considération du sous-espace affine $\mathcal{E}'$ des points de $\mathcal{E}_2$ invariants par l'antidéplacement f permet donc de déterminer la nature de f :

si $\mathcal{E}'$ est l'ensemble vide, alors f est la composée d'une réflexion affine et d'une translation de vecteur non nul ;

si $\mathcal{E}'$ n'est pas l'ensemble vide, alors f est une réflexion affine.

2. En revanche, contrairement à ce qui se passe pour les transformations orthogonales de E_2, la connaissance de la dimension de $\mathcal{E}'$ ne suffit pas à déterminer la nature de toutes les isométries de $\mathcal{E}_2$: une isométrie de $\mathcal{E}_2$ sans point invariant est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

Composition de déplacements et d'antidéplacements de $\mathcal{E}_2$.

3.6 Dans ce paragraphe, nous noterons s_D la réflexion affine par rapport à la droite affine D de $\mathcal{E}_2$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Nous avons les résultats suivants :

P1 Soient D et D' deux droites de $\mathcal{E}_2$ de direction $\vec{D}$.
L'application $s_{D'} \circ s_D$ est une translation dont le vecteur appartient à $\vec{D}^{\perp}$.

Démonstration :

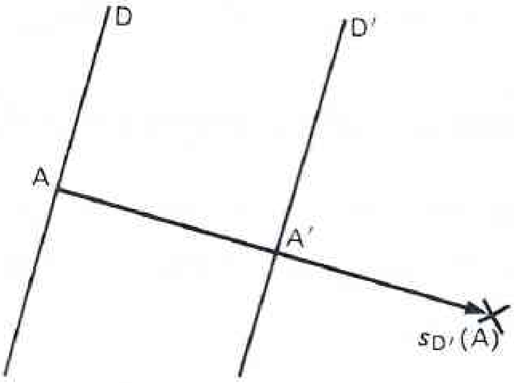
Envisageons les deux cas suivants : $D = D'$ et $D \neq D'$.

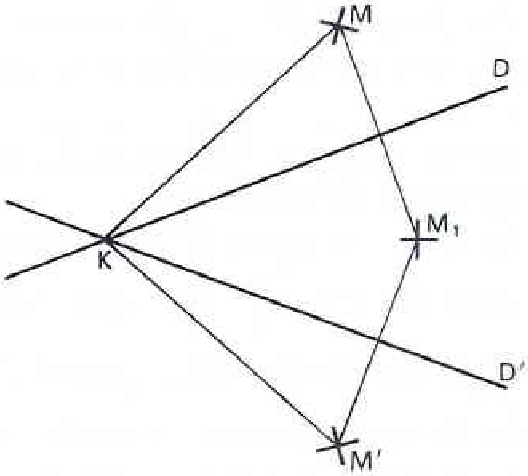
- $D = D'$. On a alors : $s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_D = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2} = t_{\vec{0}}$.
- $D \neq D'$.

Soit φ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{D}$. L'application φ est l'endomorphisme associé à s_D et $s_{D'}$; par suite, l'application $\varphi \circ \varphi$, qui est égale à l'identité de E_2, est l'endomorphisme associé à $s_{D'} \circ s_D$, qui est donc une translation de vecteur $\vec{u}$.

Soit A un point quelconque de D.

On a : $t_{\vec{u}}(A) = (s_{D'} \circ s_D)(A) = s_{D'}(A)$ et, par suite : $\vec{u} = \overrightarrow{A\, s_{D'}(A)}$. Par définition de $s_{D'}$, le vecteur $\vec{u}$ appartient à $\vec{D}^{\perp}$ et, si A′ est la projection orthogonale de A sur D′, on a : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AA'}$. ■





P2 Soient D et D′ deux droites distinctes de $\mathcal{E}_2$ concourantes en un point K et $\dot{\alpha}$ l'angle de $\vec{D}$ et de $\vec{D'}$.
L'application $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation de centre K et d'angle $\alpha + \alpha$.

Démonstration :

Les applications s_D et $s_{D'}$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{J}_K$ défini dans la propriété P_6 du paragraphe 2.3.

L'image par Φ_K de l'application $s_{D'} \circ s_D$ est la composée $\sigma_{\vec{D'}} \circ \sigma_{\vec{D}}$ des symétries vectorielles orthogonales par rapport aux droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$.

D'après le théorème 3.6 du chapitre 8, l'application $\sigma_{\vec{D'}} \circ \sigma_{\vec{D}}$ est la rotation vectorielle d'angle $\alpha + \alpha$. L'application $s_{D'} \circ s_D$ est donc égale à l'image réciproque par Φ_K de cette rotation vectorielle, c'est-à-dire la rotation de centre K et d'angle $\alpha + \alpha$. ■

P3 Soient K un point de $\mathcal{E}_2$ et D une droite de $\mathcal{E}_2$ passant par K; soit α un élément de $\mathcal{A}$.
Alors il existe une unique droite D′ de $\mathcal{E}_2$ et une unique droite D″ de $\mathcal{E}_2$ passant toutes deux par K, telles que l'on ait :

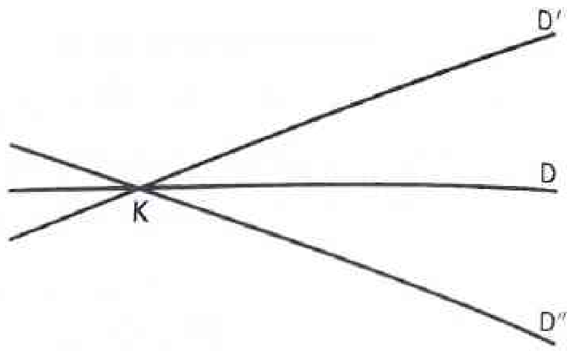
$$r(K, \alpha) = s_{D'} \circ s_D \quad \text{et} \quad r(K, \alpha) = s_D \circ s_{D''}$$

Démonstration :

Les applications s_D et $r(K, \alpha)$ appartiennent à l'ensemble $\mathfrak{J}_K$.
Les images de ces applications par Φ_K sont respectivement la symétrie vectorielle $\sigma_{\vec{D}}$ par rapport à la direction $\vec{D}$ de D et la rotation vectorielle ρ d'angle α.

D'après la propriété P_4 du paragraphe 3.4 du chapitre 7, il existe une unique droite vectorielle $\vec{D'}$ et une unique droite vectorielle $\vec{D''}$ telles que l'on ait : $\rho = \sigma_{\vec{D'}} \circ \sigma_{\vec{D}}$ et : $\rho = \sigma_{\vec{D}} \circ \sigma_{\vec{D''}}$.

Appelons D′ (resp. D″) l'unique droite passant par K et de direction $\vec{D'}$ (resp. $\vec{D''}$).
Les images réciproques respectives par Φ_K de $\sigma_{\vec{D'}}$ et $\sigma_{\vec{D''}}$ sont les réflexions affines $s_{D'}$ et $s_{D''}$.
L'application Φ_K est un isomorphisme de $(\mathfrak{J}_K, \circ)$ sur $(\mathcal{O}(E), \circ)$. On a donc : $r(K, \alpha) = s_{D'} \circ s_D$ et $r(K, \alpha) = s_D \circ s_{D''}$. ■



Remarques : 1. Supposons E_2 orienté et appelons x une détermination de la mesure en radians de α.
La droite vectorielle $\vec{D'}$ est l'unique droite vectorielle de E_2 telle que l'on ait : $\widehat{\text{angle}\,(\vec{D}, \vec{D'})} = \frac{x}{2} \quad (\pi)$, et la droite vectorielle $\vec{D''}$ est l'unique droite vectorielle de E_2 telle que l'on ait : $\widehat{\text{angle}\,(\vec{D''}, \vec{D})} = \frac{x}{2} \quad (\pi)$.

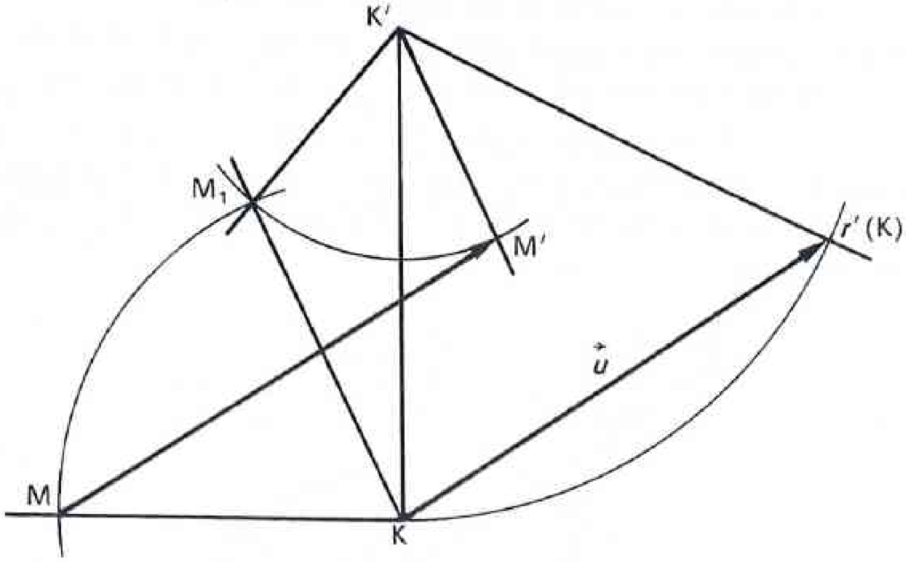
2. On peut démontrer un résultat analogue pour les translations de $\mathcal{E}_2$. Soient $\vec{u}$ un vecteur quelconque non nul de E_2 et D une droite quelconque de $\mathcal{E}_2$ qui admet $\vec{u}$ comme vecteur normal. Alors il existe une unique droite D′ de $\mathcal{E}_2$ parallèle à D et une unique droite D″ de $\mathcal{E}_2$ parallèle à D, telles que l'on ait :
$t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ s_D$ et $t_{\vec{u}} = s_D \circ s_{D''}$.

> **P4** Soient K et K′ deux points de $\mathcal{E}_2$ et α et α' deux éléments non nuls de $\mathcal{A}$.
> Si l'on a : $\alpha + \alpha' = \omega$, alors l'application $r(K', \alpha') \circ r(K, \alpha)$ est une translation de $\mathcal{E}_2$.
> Si l'on a : $\alpha + \alpha' \neq \omega$, alors l'application $r(K', \alpha') \circ r(K, \alpha)$ est une rotation de $\mathcal{E}_2$ d'angle $\alpha + \alpha'$.

Démonstration :

Pour simplifier l'écriture, notons r l'application $r(K, \alpha)$ et r' l'application $r(K', \alpha')$.
L'application $r' \circ r$ est la composée de deux déplacements ; c'est donc un déplacement. Son endomorphisme associé est la composée de la rotation vectorielle d'angle α et de la rotation vectorielle d'angle α', c'est-à-dire la rotation vectorielle d'angle $\alpha + \alpha'$.
Si l'on a : $\alpha + \alpha' = \omega$, cette rotation vectorielle est l'identité de E_2 et, par suite $r' \circ r$ est une translation.
Si l'on a : $\alpha + \alpha' \neq \omega$, cette rotation vectorielle n'est pas l'identité de E_2 et, par suite $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$. ■

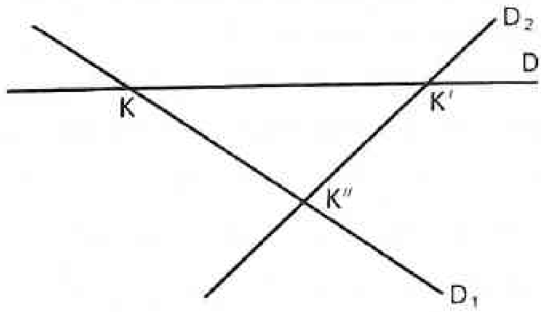
Cas où l'on a : $\alpha + \alpha' = \omega$. Déterminons le vecteur $\vec{u}$ de la translation $r' \circ r$.
On a, par exemple : $\vec{u} = \overrightarrow{K(r' \circ r)(K)} = \overrightarrow{Kr'(K)}$.



Cas où l'on a : $\alpha + \alpha' \neq \omega$. Déterminons le centre K″ de la rotation $r' \circ r$.
Il n'y a que deux cas possibles : $K = K'$ ou $K \neq K'$.

• $K = K'$. Il est immédiat que K est invariant par $r' \circ r$; c'est donc le centre de cette rotation.

• $K \neq K'$. Nous allons utiliser la propriété P_3.
Appelons D la droite (KK').
Soit D_1 l'unique droite passant par K telle que l'on ait : $r = s_D \circ s_{D_1}$ et D_2 l'unique droite passant par K telle que l'on ait : $r' = s_{D_2} \circ s_D$. On a alors :
$r' \circ r = s_{D_2} \circ s_D \circ s_D \circ s_{D_1} = s_{D_2} \circ s_{D_1}$.
Il résulte des propriétés P_1 et P_2 que l'application $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une translation si les droites D_1 et D_2 sont parallèles et une rotation si ces droites ne sont pas parallèles.
Puisque l'application $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ non nul, les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles ; elles sont donc concourantes en un point K″.
L'application $r' \circ r$ est donc la rotation de centre K″ et d'angle $\alpha + \alpha'$.



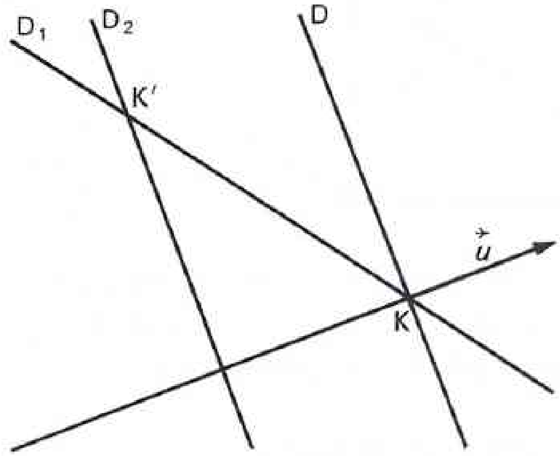
P5 Soient K un point de $\mathcal{E}_2$ et α un élément non nul de $\mathcal{A}$; soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E_2. Alors l'application $r(K, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$ est une rotation d'angle α.

Démonstration :
L'application $r(K, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$ est la composée de deux déplacements ; c'est donc un déplacement. Son endomorphisme associé est la rotation vectorielle d'angle α non nul. L'application $r(K, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$ est donc une rotation d'angle α. ■

Détermination du centre K′ de la rotation $r(\mathrm{K}, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$. Nous allons utiliser la propriété P_3 et la deuxième remarque qui suit cette propriété.

Appelons D la droite passant par K et de vecteur normal $\vec{u}$.
Soit D_1 l'unique droite passant par K telle que l'on ait : $r(\mathrm{K}, \alpha) = s_{\mathrm{D}_1} \circ s_{\mathrm{D}}$.
Soit D_2 l'unique droite parallèle à D telle que l'on ait : $t_{\vec{u}} = s_{\mathrm{D}} \circ s_{\mathrm{D}_2}$.

On a alors : $r(\mathrm{K}, \alpha) \circ t_{\vec{u}} = s_{\mathrm{D}_1} \circ s_{\mathrm{D}} \circ s_{\mathrm{D}} \circ s_{\mathrm{D}_2} = s_{\mathrm{D}_1} \circ s_{\mathrm{D}_2}$.
L'angle α est non nul ; les droites D et D_1 sont donc distinctes et, par suite, les droites D_1 et D_2 sont concourantes en un point K′. On a alors : $s_{\mathrm{D}_1} \circ s_{\mathrm{D}_2} = r(\mathrm{K}', \alpha)$.
Le point K′ est donc le centre cherché.



P6 Soit K un point quelconque de $\mathcal{E}_2$.
L'ensemble $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}$ des rotations de centre K est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{D}, \circ)$, isomorphe à $(\mathcal{A}, +)$.

Démonstration :

- Toute rotation de centre K est un déplacement de $\mathcal{E}_2$. On a donc : $\mathcal{R}_{\mathrm{K}} \subset \mathcal{D}$.
- Toute rotation de centre K et d'angle α est un élément de $\mathcal{J}_{\mathrm{K}}$ dont l'image par Φ_{K} est la rotation vectorielle d'angle α. L'ensemble $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}$ est donc l'image réciproque par Φ_{K} de l'ensemble $\mathcal{O}_+(\mathrm{E}_2)$ des rotations vectorielles de E_2.

L'application Φ_{K} est un isomorphisme de $(\mathcal{J}_{\mathrm{K}}, \circ)$ sur $(\mathcal{O}(\mathrm{E}_2), \circ)$ et $\mathcal{O}_+(\mathrm{E}_2)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{O}(\mathrm{E}_2), \circ)$, isomorphe à $(\mathcal{A}, +)$.
L'ensemble $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}$ est donc un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{J}_{\mathrm{K}}, \circ)$, isomorphe à $(\mathcal{A}, +)$.

$$\mathcal{R}_{\mathrm{K}} \xrightarrow{\Phi_{\mathrm{K}}} \mathcal{O}_+(\mathrm{E}_2) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

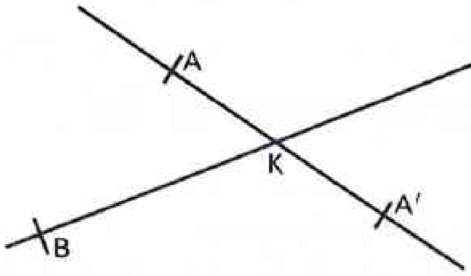
- $(\mathcal{D}, \circ)$ est un groupe et l'ensemble $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}$, inclus dans $\mathcal{D}$, a une structure de groupe pour la loi $\circ$; l'ensemble $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}$ est donc un sous-groupe de $(\mathcal{D}, \circ)$. ■

Construction du centre d'une rotation lorsqu'on connaît les images de deux points distincts.

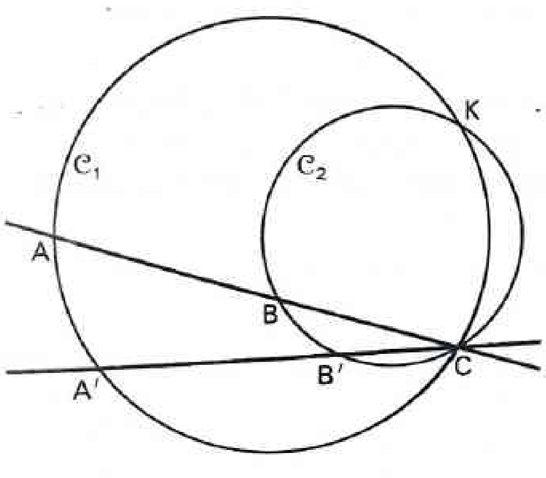
3.7 Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}_2$ et A′ et B′ leurs images respectives par une rotation r de $\mathcal{E}_2$. Les points A′ et B′ sont donc distincts.

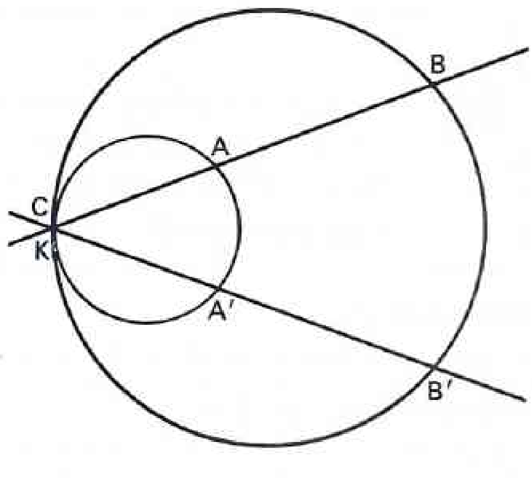
Soient α l'angle supposé non nul de la rotation r et K son centre. Nous allons donner une construction de K.
Soit ρ la rotation vectorielle d'angle α.
Des égalités : $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$, il résulte que l'on a : $\overrightarrow{A'B'} = \rho(\overrightarrow{AB})$ et par suite : $\text{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$.
Il n'y a que deux cas possibles : $\alpha = p$ ou $\alpha \neq p$.

• Si α est égal à p, la rotation r est une symétrie centrale, dont le centre est le milieu de (A, A').



• Si α est différent de p, l'angle $\dot{\alpha}$ est différent de $\dot{\omega}$; les droites (AB) et (A'B') ont donc des directions distinctes et sont concourantes en un point C.





Supposons que le point C soit distinct des points A, B, A', B' et notons (CA, CA') l'angle des droites vectorielles engendrées par les vecteurs respectifs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CA'}$, comme nous l'avons fait dans le chapitre 8.
On a : $(CA, CA') = \dot{\alpha}$ et $(CB, CB') = \dot{\alpha}$.
Par définition de K, on a : $\text{angle}(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA'}) = \alpha$ et $\text{angle}(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KB'}) = \alpha$
et, par suite, avec la notation précédente : $(KA, KA') = \dot{\alpha}$ et $(KB, KB') = \dot{\alpha}$.
Il résulte du théorème 4.3 du chapitre 8 que le point K appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ qui passe par les points C, A et A' et au cercle $\mathcal{C}_2$ qui passe par les points C, B et B'.
Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants en C; ils ont donc un deuxième point commun, éventuellement confondu avec C. Ce point est nécessairement le point K cherché.

Remarque : Le lecteur traitera en exercice, s'il le désire, le cas particulier où le point C est confondu avec l'un des points A, B, A' ou B'.

4. Isométries de $\mathcal{E}_3$.

Dans ce paragraphe, E_3 désigne un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et $\mathcal{E}_3$ un espace affine associé à E_3.
Conformément au programme, nous faisons l'étude des déplacements de $\mathcal{E}_3$ et nous donnons seulement quelques exemples et quelques propriétés des antidéplacements.

Ensemble $\mathcal{D}$ des déplacements de $\mathcal{E}_3$.

✲ **4.1** Soit f un élément de $\mathcal{D}$. Son endomorphisme associé φ appartient par définition à $\mathcal{O}_+(E_3)$; c'est donc soit l'identité de E_3, soit une rotation vectorielle d'axe une droite vectorielle $\vec{D}$ et d'angle α non nul.
On a les propriétés suivantes :

P1 Si l'endomorphisme φ est l'identité de E_3, alors le déplacement f est une translation de $\mathcal{E}_3$.

P2 Si l'endomorphisme φ est la rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$ et d'angle α non nul, et si le déplacement f admet un point invariant A, alors le sous-espace affine $\mathcal{E}'$ des points de $\mathcal{E}_3$ invariants par f est la droite passant par A de direction $\vec{D}$.

Démonstration :
L'endomorphisme associé à f a pour sous-espace vectoriel de vecteurs invariants la droite vectorielle $\vec{D}$.
Le point A appartient à $\mathcal{E}'$, qui n'est donc pas vide.
Du théorème 1.6 du chapitre 6, il résulte que $\mathcal{E}'$ est la droite passant par A et de direction $\vec{D}$. ■

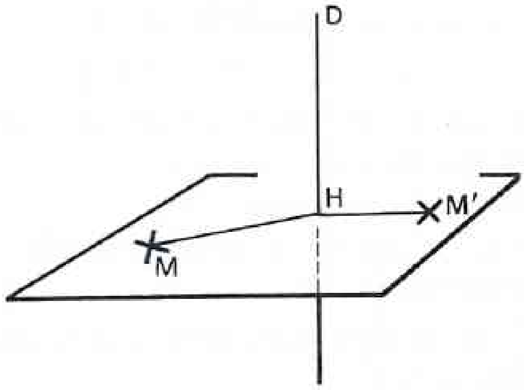
P3 Tout déplacement f de $\mathcal{E}_3$, distinct de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$ et qui admet au moins un point invariant, a pour endomorphisme associé une rotation vectorielle φ de E_3 d'angle non nul.

Démonstration :
L'application f est un déplacement de $\mathcal{E}_3$; son endomorphisme associé φ est donc soit l'identité de E_3 soit une rotation vectorielle de E_3 d'angle non nul.
Si φ était l'identité de E_3, alors f serait une translation de $\mathcal{E}_3$. La seule translation qui admet au moins un point invariant est l'identité de $\mathcal{E}_3$, ce qui est exclu par hypothèse.
L'application φ est donc une rotation vectorielle d'angle non nul. ■

P4 Soient D une droite de $\mathcal{E}_3$ et f un déplacement de $\mathcal{E}_3$ dont le sous-espace affine des points invariants est égal à D ; soit α l'angle de la rotation vectorielle de E_3 associée à f.
Soient M et M' deux points quelconques de $\mathcal{E}_3$ et H la projection orthogonale de M sur D. On a alors :

$$(M' = f(M)) \Longleftrightarrow \left(HM' = HM \quad \text{et} \quad \text{angle}\left(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'}\right) = \alpha\right)$$

L'application f est par hypothèse un déplacement de $\mathcal{E}_3$ distinct de $Id_{\mathcal{E}_3}$ et qui admet au moins un point invariant. De la propriété P_3 il résulte que son endomorphisme associé φ est une rotation vectorielle de E_3 d'angle α non nul et d'axe $\vec{D}$.
Démonstration :
Le point H appartient à D ; il est invariant par f. On a donc :
$(M' = f(M)) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{HM'} = \varphi(\overrightarrow{HM})\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ appartient au plan vectoriel $\vec{D}^\perp$; par définition de φ le vecteur $\overrightarrow{HM'}$ appartient également à $\vec{D}^\perp$ et est l'image de $\overrightarrow{HM}$ par la rotation vectorielle, d'angle α, du plan vectoriel $\vec{D}^\perp$. On a donc :
$\left(\overrightarrow{HM'} = \varphi(\overrightarrow{HM})\right) \Longleftrightarrow \left(HM' = HM \quad \text{et} \quad \text{angle}\left(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'}\right) = \alpha\right)$. ■



4.2 DÉFINITIONS : Soit f un déplacement de $\mathcal{E}_3$ qui ne soit pas une translation de $\mathcal{E}_3$.

Si f admet au moins un point invariant, on dit que f est une rotation de $\mathcal{E}_3$.
Si f n'admet pas de point invariant, on dit que f est un vissage ou un déplacement hélicoïdal de $\mathcal{E}_3$.

Il résulte des propriétés P_2 et P_3 du paragraphe 4.1 que toute rotation f de $\mathcal{E}_3$ a pour endomorphisme associé une rotation vectorielle de E_3 d'axe $\vec{D}$ et d'angle α non nul, et pour sous-espace affine des points invariants une droite D de direction $\vec{D}$. On dit que f est **la rotation de $\mathcal{E}_3$ d'axe D et d'angle** α.
Avec les notations de la propriété P_4 du paragraphe 4.1, on a :
$\forall (M, M') \in \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3, \left((M' = f(M)) \Longleftrightarrow \left(HM' = HM \text{ et angle}\left(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'}\right) = \alpha\right)\right)$.
<u>Remarques</u> : 1. On conviendra d'appeler **rotation d'axe D et d'angle** ω l'identité de $\mathcal{E}_3$.
2. La rotation de $\mathcal{E}_3$ d'axe D et d'angle p est la symétrie axiale d'axe D.

Nous rassemblons les résultats des paragraphes 4.1 et 4.2 dans le théorème suivant :

4.3 **THÉORÈME : Tout déplacement de $\mathcal{E}_3$ est soit une translation, soit une rotation d'angle non nul, soit un vissage.**

Forme réduite d'un vissage.

4.4 Dans les paragraphes 4.4 et 4.5, nous notons $r(D, \alpha)$ la rotation de $\mathcal{E}_3$ d'axe D et d'angle α et $t_{\vec{u}}$ la translation de $\mathcal{E}_3$ de vecteur $\vec{u}$.
On a les propriétés suivantes :

P1 Soient α un angle non nul, D une droite de $\mathcal{E}_3$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de la direction $\vec{D}$ de D.
Alors l'application $t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$ est un vissage de $\mathcal{E}_3$ et l'on a :

$$t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha) = r(D, \alpha) \circ t_{\vec{u}}.$$

Démonstration :

• L'application $t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$ est la composée de deux déplacements ; c'est un déplacement. Son endomorphisme associé φ est la rotation vectorielle de E_3 d'axe $\vec{D}$ et d'angle α non nul ; l'application φ n'est pas l'identité de E_3 et par suite $t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$ n'est pas une translation de $\mathcal{E}_3$.
C'est donc soit une rotation soit un vissage.
Cherchons les points de $\mathcal{E}_3$ invariants par cette application.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_3$. On a :

$$\big((t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha))(M) = M\big) \iff \big(\exists M_1 \in \mathcal{E}_3, (M_1 = r(D, \alpha)(M) \text{ et } \overrightarrow{M_1M} = \vec{u})\big)$$

On a : $\big((t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha))(M) = M\big)$

$$\Longrightarrow \big(\exists M_1 \in \mathcal{E}_3, (\overrightarrow{MM_1} \in \vec{D}^{\perp} \text{ et } \overrightarrow{M_1M} \in \vec{D} \text{ et } \overrightarrow{M_1M} \neq \vec{0})\big)$$

$$\Longrightarrow \big(\exists M_1 \in \mathcal{E}_3, (\overrightarrow{MM_1} \in \vec{D}^{\perp} \cap \vec{D} \text{ et } \overrightarrow{MM_1} \neq \vec{0})\big).$$

Or, on a : $\vec{D}^{\perp} \cap \vec{D} = \{\vec{0}\}$. Il n'existe donc pas de point M invariant par $t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$.
Cette application est donc un vissage de $\mathcal{E}_3$.

• Les deux applications affines $t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$ et $r(D, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$ ont même endomorphisme associé. Pour démontrer qu'elles sont égales, il suffit donc de trouver un point de $\mathcal{E}_3$ qui a la même image par chacune d'elles. Soient A un point de D et A' le point défini par : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$; le point A' appartient à D. On a donc :
$(t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha))(A) = t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $(r(D, \alpha) \circ t_{\vec{u}})(A) = r(D, \alpha)(A') = A'$. ■

P2 Soit f un vissage de $\mathcal{E}_3$.
Alors il existe un unique angle α non nul, une unique droite D de $\mathcal{E}_3$ et un unique vecteur $\vec{u}$ non nul de la direction $\vec{D}$ de D tels que f soit la composée de la translation $t_{\vec{u}}$ par la rotation $r(D, \alpha)$.

Démonstration :

Unicité.

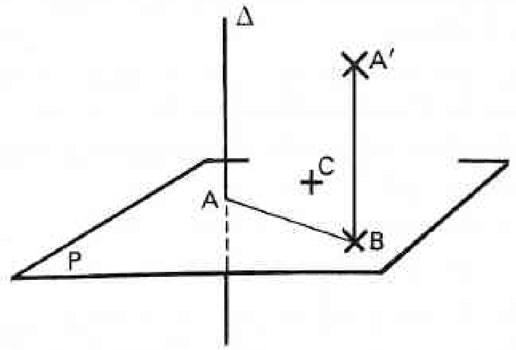
● L'angle α est nécessairement l'angle de la rotation vectorielle φ de E_3 associée à f; il est donc unique. De même, la direction de D est nécessairement l'axe $\vec{D}$ de la rotation vectorielle φ.

● Soient D et D′ deux droites de $\mathcal{E}_3$ de même direction $\vec{D}$ et $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{D}$, s'ils existent, tels que l'on ait : $f = t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$ et $f = t_{\vec{u'}} \circ r(D', \alpha)$.
On a alors : $t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha) = t_{\vec{u'}} \circ r(D', \alpha)$ et par suite :
$t_{-\vec{u'}} \circ t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha) = t_{\vec{u}-\vec{u'}} \circ r(D, \alpha) = r(D', \alpha)$.
Supposons $\vec{u} - \vec{u'}$ non nul. D'après la propriété P_1, l'application $t_{\vec{u}-\vec{u'}} \circ r(D, \alpha)$ est un vissage de $\mathcal{E}_3$, ce qui est incompatible avec l'égalité : $t_{\vec{u}-\vec{u'}} \circ r(D, \alpha) = r(D', \alpha)$.
On a donc : $\vec{u} = \vec{u'}$ et par suite : $r(D, \alpha) = r(D', \alpha)$, ce qui, d'après la propriété P_2 du paragraphe 4.1 équivaut à : $D = D'$.

Existence.

● Soit φ la rotation vectorielle de E_3 d'axe $\vec{D}$ et d'angle α associée au vissage f. Soient A un point quelconque de $\mathcal{E}_3$ et A′ son image par f. On a : $A' \neq A$.
Posons : $g = t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f$.
On a : $g(A) = t_{\overrightarrow{A'A}}\big(f(A)\big) = t_{\overrightarrow{A'A}}(A') = A$.
L'application g est donc un déplacement de $\mathcal{E}_3$ d'endomorphisme associé φ et qui admet A comme point invariant ; c'est donc la rotation d'axe la droite Δ passant par A de direction $\vec{D}$, et d'angle α.
On a donc : $t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f = r(\Delta, \alpha)$ et, par suite : $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ r(\Delta, \alpha)$.
Le vissage f est donc la composée d'une rotation et d'une translation de $\mathcal{E}_3$; mais le vecteur de la translation n'appartient pas nécessairement à la direction de l'axe de la rotation.

● Soit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}$ la décomposition du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ sur $\vec{D}^{\perp} \oplus \vec{D}$. Le point B appartient donc au plan P passant par A et perpendiculaire à Δ, et le vecteur $\overrightarrow{BA'}$ appartient à $\vec{D}$.
On a alors : $t_{\overrightarrow{AA'}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}} = t_{\overrightarrow{BA'}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ et, par suite : $f = t_{\overrightarrow{BA'}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(\Delta, \alpha)$.
Pour obtenir le résultat cherché, il suffit donc de démontrer que l'application $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(\Delta, \alpha)$ est une rotation de $\mathcal{E}_3$ d'angle α et d'axe une droite D parallèle à Δ.
L'endomorphisme associé à $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(\Delta, \alpha)$ est égal à φ ; l'application $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(\Delta, \alpha)$ est donc soit une rotation soit un vissage de $\mathcal{E}_3$.
Considérons, dans le plan P, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ que nous notons encore $t_{\overrightarrow{AB}}$ et la rotation de centre A et d'angle α que nous notons $r(A, \alpha)$.

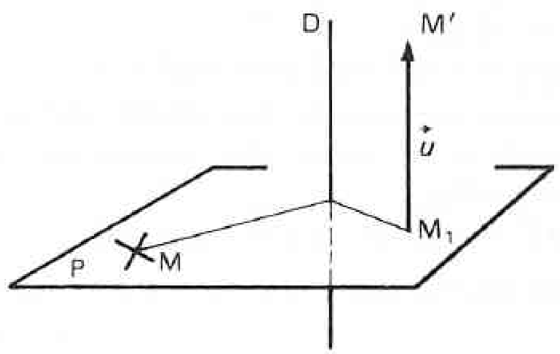


De la propriété P_5 du paragraphe 3.6, il résulte que l'application $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(A, \alpha)$ est une rotation d'angle α du plan P. Soient C le centre de cette rotation et C_1 l'image de C par $r(A, \alpha)$.

$$C \xrightarrow{r(A,\alpha)} C_1 \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AB}}} C.$$

Le point C_1 appartient à P et on a : $\overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{AB}$.
D'autre part, par définition de $r(\Delta, \alpha)$, le point C_1 est l'image de C par $r(\Delta, \alpha)$. On a donc : $\left(t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(\Delta, \alpha)\right)(C) = t_{\overrightarrow{AB}}(C_1) = C$.
Le point C est invariant par $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(\Delta, \alpha)$.
$t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(\Delta, \alpha)$ est donc la rotation de $\mathcal{E}_3$ d'angle α et d'axe la droite passant par C de direction $\vec{D}$. ■

Remarques : 1. Il résulte de P_1 que l'on a alors : $f = r(D, \alpha) \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$. On appelle cette décomposition de f **la forme réduite de** f. On dit que f **est le vissage d'axe** D, **d'angle** α **et de vecteur** $\vec{u}$.
2. Soit M un point de $\mathcal{E}_3$. L'image M′ de M par f s'obtient de la façon suivante : on trace le plan P passant par M et perpendiculaire à D ; on construit le point M_1 de P, image de M par $r(D, \alpha)$; le point M′ est défini par : $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$.



Antidéplacements de $\mathcal{E}_3$.

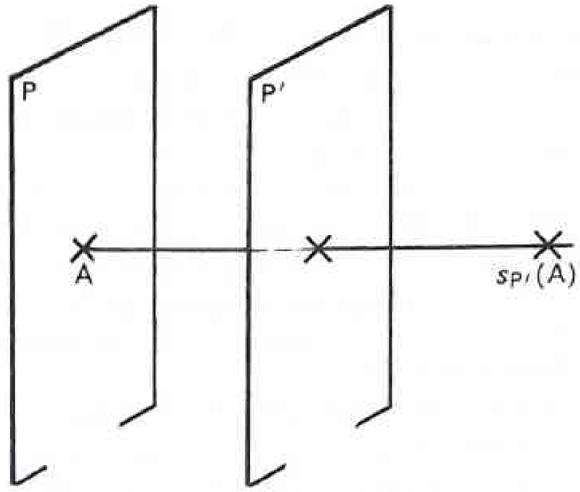
4.5 D'après la propriété P_1 du paragraphe 2.6, nous savons déjà que toute réflexion affine de $\mathcal{E}_3$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}_3$. Nous noterons s_P la réflexion affine par rapport au plan P de $\mathcal{E}_3$.
D'autre part $-\mathrm{Id}_{E_3}$ est un élément de $\mathcal{O}_-(E_3)$; il en résulte que toute symétrie centrale de $\mathcal{E}_3$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}_3$.
Nous avons les résultats suivants, analogues à ceux que nous avons obtenus dans $\mathcal{E}_2$.

P1	Soient P et P′ deux plans parallèles de $\mathcal{E}_3$ de direction $\vec{P}$. L'application $s_{P'} \circ s_P$ est une translation dont le vecteur appartient à $\vec{P}^{\perp}$.

Démonstration :

Envisageons les deux cas : $P = P'$ et $P \neq P'$.

- $P = P'$. On a alors : $s_{P'} \circ s_P = s_P \circ s_P = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3} = t_{\vec{0}}$.
- $P \neq P'$. Soit φ la réflexion vectorielle par rapport à $\vec{P}$. L'application φ est l'endomorphisme associé à s_P et à $s_{P'}$; par suite l'application $\varphi \circ \varphi$, égale à l'identité de E_3, est l'endomorphisme associé à $s_{P'} \circ s_P$, qui est donc une translation de vecteur $\vec{u}$.



Soit A un point quelconque de P.

On a : $t_{\vec{u}}(A) = (s_{P'} \circ s_P)(A) = s_{P'}(A)$

et, par suite : $\vec{u} = \overrightarrow{A s_{P'}(A)}$.

Par définition de $s_{P'}$ le vecteur $\vec{u}$ appartient donc à $\vec{P}^{\perp}$. ■

P2 Soient P et P' deux plans distincts de $\mathcal{E}_3$ sécants suivant une droite D. L'application $s_{P'} \circ s_P$ est une rotation de $\mathcal{E}_3$ d'axe D.

Démonstration :

Soit K un point de D ; les applications s_P et $s_{P'}$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{J}_K$ défini dans la propriété P_6 du paragraphe 2.3.

L'image par Φ_K de l'application $s_{P'} \circ s_P$ est la composée $\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}}$ des réflexions vectorielles par rapport aux plans vectoriels respectifs $\vec{P}$ et $\vec{P'}$. D'après la propriété P_3 du paragraphe 4.3 du chapitre 7, l'application $\sigma_{\vec{P'}} \circ \sigma_{\vec{P}}$ est une rotation vectorielle de E_3 d'axe $\vec{P} \cap \vec{P'}$, c'est-à-dire $\vec{D}$.

L'application $s_{P'} \circ s_P$ est donc égale à l'image réciproque par Φ_K de cette rotation vectorielle, donc à une rotation de $\mathcal{E}_3$ d'axe la droite passant par K de direction $\vec{D}$, c'est-à-dire d'axe D. ■

<u>Remarque</u> : On peut démontrer que toute translation de $\mathcal{E}_3$ est la composée de deux réflexions affines par rapport à des plans parallèles, et que toute rotation de $\mathcal{E}_3$ est la composée de deux réflexions affines par rapport à des plans distincts sécants.

En revanche un vissage n'est jamais égal à la composée de deux réflexions affines.

On peut cependant démontrer les trois propriétés suivantes :

1. Un vissage est la composée de deux symétries axiales d'axes non coplanaires.
2. Une rotation est la composée de deux symétries axiales d'axes distincts et concourants.
3. Une translation est la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles.

Nous verrons ces propriétés en exercices.

5. Groupe d'isométries laissant invariant un ensemble donné.

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réel euclidien de dimension 2 ou 3 et $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E.
On dit que l'isométrie f de $\mathcal{E}$ laisse un **ensemble $\mathcal{F}$ invariant** si et seulement si on a : $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

5.1 **THÉORÈME : Soient $\mathcal{F}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ qui laissent $\mathcal{F}$ invariant.**
Alors $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{J}, \circ)$.

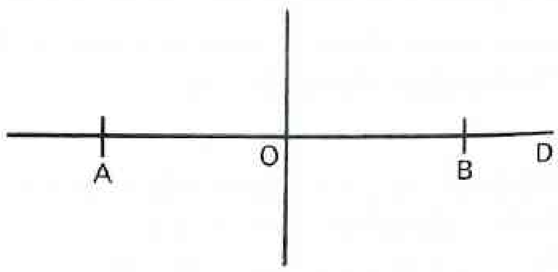
Démonstration :
Utilisons le théorème 1.5 du chapitre 1.
- Soient f et g deux éléments quelconques de $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$.
Alors $g \circ f$ est une isométrie de $\mathcal{E}$ et on a : $(g \circ f)(\mathcal{F}) = g[f(\mathcal{F})] = g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.
- Il est immédiat que $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ appartient à $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$.
- Soit f un élément quelconque de $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$. Alors f^{-1} existe et est une isométrie de $\mathcal{E}$; on a : $f^{-1}(\mathcal{F}) = f^{-1}(f(\mathcal{F})) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. ■

Nous allons donner quelques exemples simples de tels groupes.

Groupe d'isométries de $\mathcal{E}_2$ laissant invariante une paire de points.

5.2 Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}_2$.
Considérons le sous-ensemble $\{A, B\}$ de $\mathcal{E}_2$ et cherchons l'ensemble $\mathcal{J}_{\{A, B\}}$.
Cet ensemble a deux sortes d'éléments : les isométries de $\mathcal{E}_2$ qui laissent invariant chacun des points A et B et celles qui échangent A et B.

Isométries de $\mathcal{E}_2$ qui admettent A et B comme points invariants. Il résulte du paragraphe 3 que toute isométrie de $\mathcal{E}_2$ qui admet au moins deux points invariants est soit l'identité de $\mathcal{E}_2$ soit la réflexion affine par rapport à la droite définie par ces deux points. Appelons D la droite (AB).



Les isométries de $\mathcal{E}_2$ qui admettent A et B comme points invariants sont donc $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et s_D.

Isométries de $\mathcal{E}_2$ qui échangent A et B. Appelons O le milieu de (A, B). Il résulte des propriétés des applications affines que le point O est invariant par de telles isométries. Il résulte du paragraphe 3 que toute isométrie de $\mathcal{E}_2$ qui admet au moins un point invariant est soit l'identité de $\mathcal{E}_2$, soit une réflexion affine par rapport à une droite passant par ce point, soit une rotation de centre ce point.
Parmi ces isométries il n'y en a que deux qui échangent A et B : la réflexion affine s_Δ par rapport à la médiatrice Δ du segment [A, B] et la symétrie centrale s_O de centre O.

Groupe $(\mathfrak{I}_{\{A, B\}}, \circ)$. L'ensemble $\mathfrak{I}_{\{A, B\}}$ est donc un ensemble fini à quatre éléments ; on a : $\mathfrak{I}_{\{A, B\}} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}, s_D, s_\Delta, s_O\}$.
Tout élément de $\mathfrak{I}_{\{A, B\}}$ est son propre symétrique pour la loi $\circ$ et on a la table de Pythagore suivante :

$\circ$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	s_D	s_Δ	s_O
$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	s_D	s_Δ	s_O
s_D	s_D	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	s_O	s_Δ
s_Δ	s_Δ	s_O	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	s_D
s_O	s_O	s_Δ	s_D	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$

Remarquons que ce groupe est commutatif et qu'il contient deux déplacements et deux antidéplacements. On l'appelle **groupe de Klein.**

Groupe d'isométries de $\mathcal{E}_2$ laissant invariant un triangle équilatéral.

5.3 Soient A, B, C trois points deux à deux distincts de $\mathcal{E}_2$ tels que le triangle $\{A, B, C\}$ soit équilatéral. On a donc : $AB = BC = CA$. Cherchons l'ensemble $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$.

L'ensemble $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$ est fini et a au plus 3 ! éléments. Le triplet (A, B, C) est un repère affine de $\mathcal{E}_2$. Nous savons que toute application affine et, par suite, toute isométrie est déterminée par la donnée des images d'un repère affine quelconque.

Toute isométrie f de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$ est donc déterminée par la donnée des trois points $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ de $\{A, B, C\}$. Le nombre d'éléments de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$ est donc au plus égal au nombre de permutations de l'ensemble à trois éléments $\{A, B, C\}$, c'est-à-dire 3 !.

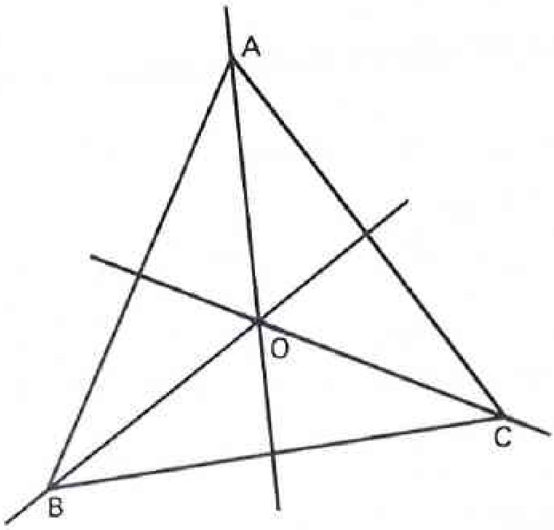
Recherche des éléments de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$. Soit O l'isobarycentre des points A, B, C. Il résulte des propriétés des applications affines que O est invariant par tout élément de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$.

Les éléments de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$ sont donc nécessairement soit l'identité de $\mathcal{E}_2$, soit des réflexions affines par rapport à une droite passant par O, soit des rotations de centre O.

- $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ appartient à $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$.
- Cherchons les rotations de centre O qui appartiennent à $\mathfrak{I}_{\{A, B, C\}}$. Il n'y a que deux cas possibles : $\begin{pmatrix} A \longmapsto B \\ B \longmapsto C \\ C \longmapsto A \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} A \longmapsto C \\ B \longmapsto A \\ C \longmapsto B \end{pmatrix}$

Il n'y a donc que deux rotations : la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π et la rotation r' de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$ modulo 2π.

• Cherchons les réflexions affines qui appartiennent à $\mathcal{J}_{\{A, B, C\}}$. D'après ce qui précède, il y a au plus trois telles réflexions. Il est immédiat que les réflexions affines s_1, s_2, s_3 par rapport aux droites respectives (OA), (OB), (OC) appartiennent à $\mathcal{J}_{\{A, B, C\}}$.



Groupe ($\mathcal{J}_{\{A, B, C\}}, \circ$). L'ensemble $\mathcal{J}_{\{A, B, C\}}$ a donc exactement six éléments et on a :
$\mathcal{J}_{\{A, B, C\}} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}, r, r', s_1, s_2, s_3\}$.
Les applications r et r' sont symétriques l'une de l'autre et les applications s_1, s_2, s_3 sont leur propre symétrique. $\mathcal{J}_{\{A, B, C\}}$ contient trois déplacements et trois antidéplacements. On a la table de Pythagore suivante :

$\circ$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	r	r'	s_1	s_2	s_3
$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	r	r'	s_1	s_2	s_3
r	r	r'	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	s_3	s_1	s_2
r'	r'	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	r	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	r	r'
s_2	s_2	s_3	s_1	r'	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$	r
s_3	s_3	s_1	s_2	r	r'	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$

Remarquons que ce groupe n'est pas commutatif.

Groupe d'isométries de $\mathcal{E}_3$ laissant invariant un tétraèdre régulier.

5.4 Soient A, B, C, D quatre points de $\mathcal{E}_3$, non coplanaires et deux à deux distincts, tels que le tétraèdre {A, B, C, D} soit régulier.
On a donc : AB = BC = CD = DA = AC = BD.

Étudions l'ensemble $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$.

L'ensemble $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$ est fini et a au plus 4 ! éléments. Le quadruplet (A, B, C, D) est un repère affine de $\mathcal{E}_3$; un raisonnement analogue à celui du paragraphe 5.3 permet d'affirmer que $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$ a au plus 4 !, c'est-à-dire 24 éléments.

Recherche des déplacements de $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$.

Soit O l'isobarycentre des points A, B, C, D. Le point O est invariant par tout élément de $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$.

Il résulte de l'étude des déplacements de $\mathcal{E}_3$ que tout déplacement de $\mathcal{E}_3$ qui admet au moins un point invariant est soit l'identité de $\mathcal{E}_3$ soit une rotation d'axe passant par O. Il est immédiat que $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$ appartient à $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$; cherchons les rotations d'axe passant par O qui appartiennent à cet ensemble ; il y a deux sortes de telles rotations : celles dont l'axe passe aussi par l'un des quatre points A, B, C, D et celles dont l'axe ne passe par aucun de ces quatre points.

- Rotations dont l'axe passe également par l'un des quatre points A, B, C, D.

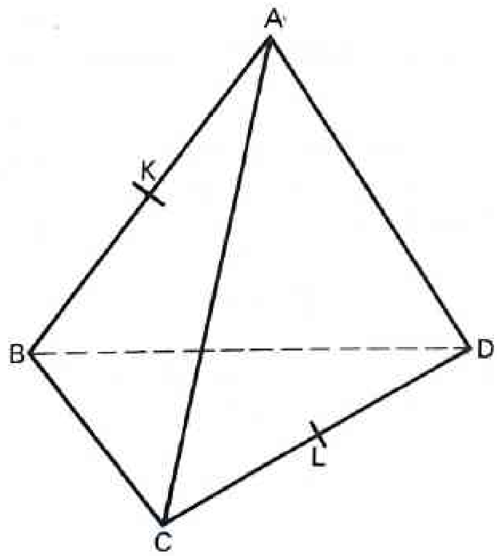
Cherchons les rotations d'axe (OA).

La droite (OA) est perpendiculaire au plan (BCD). Il n'y a donc que deux telles rotations, que nous notons r_A et r'_A, définies respectivement par :

$$r_A : \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ B \longmapsto C \\ C \longmapsto D \\ D \longmapsto B \end{array} \qquad r'_A : \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ B \longmapsto D \\ C \longmapsto B \\ D \longmapsto C. \end{array}$$

On trouve de même deux rotations d'axe (OB) notées r_B et r'_B deux rotations d'axe (OC), notées r_C et r'_C et deux rotations d'axe (OD), notées r_D et r'_D.

Il y a donc huit rotations dont l'axe passe par O et par l'un des quatre points A, B, C, D.



- Rotations dont l'axe ne passe par aucun des quatre points A, B, C, D.

Appelons K (resp. L) le milieu de (A, B) (resp. (C, D)). Le point O isobarycentre des points A, B, C, D est donc le milieu de (K, L). La symétrie axiale, notée r_1, d'axe (KL) échange A et B d'une part et C et D d'autre part. Elle appartient donc à $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$. Cet ensemble contient également la symétrie axiale, notée r_2, qui échange B et C d'une part et A et D d'autre part, et la symétrie axiale, notée r_3, qui échange A et C d'une part et B et D d'autre part.

Démontrons que ces trois symétries axiales sont les seules rotations de $\mathcal{J}_{\{A, B, C, D\}}$ de ce type.

Soit f une rotation de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C, D\}}$ dont l'axe passe par O et ne passe par aucun des points A, B, C, D.

Supposons, quitte à changer les noms des points, que l'on ait : $f(A) = B$.

Considérons l'application $r_1 \circ f$, qui est un déplacement de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C, D\}}$.

On a : $(r_1 \circ f)(O) = r_1(O) = O$ et $(r_1 \circ f)(A) = r_1(B) = A$.

L'application $r_1 \circ f$ admet au moins deux points invariants ; c'est donc soit l'identité de $\mathcal{E}_3$, soit une rotation d'axe (OA).

Si l'on a : $r_1 \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$, on a alors : $f = (r_1)^{-1} = r_1$.

Si $r_1 \circ f$ est une rotation d'axe (OA), on a alors soit $r_1 \circ f = r_A$ soit $r_1 \circ f = r'_A$.

Étudions, par exemple, le cas où l'on a : $r_1 \circ f = r_A$ ce qui équivaut à : $f = r_1 \circ r_A$.

On a alors : $f(O) = O$

$$f(A) = (r_1 \circ r_A)(A) = r_1(A) = B$$
$$f(B) = (r_1 \circ r_A)(B) = r_1(C) = D$$
$$f(C) = (r_1 \circ r_A)(C) = r_1(D) = C$$
$$f(D) = (r_1 \circ r_A)(D) = r_1(B) = A.$$

La rotation f est donc la rotation d'axe (OC) qui transforme A en B, B en D, D en A ; c'est la rotation r_C.

On démontre de même que si l'on a : $r_1 \circ f = r'_A$ alors on a : $f = r_D$.

Nous venons de démontrer que, si l'on a : $f(A) = B$, alors f est l'une des rotations déjà trouvées.

L'ensemble des déplacements de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C, D\}}$ a donc douze éléments ; c'est l'ensemble $\{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}, r_1, r_2, r_3, r_A, r'_A, r_B, r'_B, r_C, r'_C, r_D, r'_D\}$.

Remarques : 1. Cet ensemble est un sous-groupe de $\mathfrak{I}_{\{A, B, C, D\}}$.

2. On peut démontrer que $\mathfrak{I}_{\{A, B, C, D\}}$ possède exactement 24 éléments.

EXERCICES

Dans les exercices suivants, on désigne par E_2 (resp. E_3) un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension 2 (resp. 3) et par $(\vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) une base orthonormée directe de E_2 (resp. E_3). On désigne par $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$) un espace affine associé à E_2 (resp. E_3) et par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$). Les composantes des vecteurs (resp. les coordonnées des points) seront généralement données dans la base précédente (resp. le repère précédent).

Structure affine euclidienne.

1 Soient dans $\mathcal{E}_2$ un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et les droites D et D′ d'équations respectives : $x + 2y = 0$ et $-2x + y = 0$.

$d(M,D) = \frac{|x_0+2y_0|}{\sqrt{3}}$

$d(M,D') = \frac{|-2x_0+y_0|}{\sqrt{3}}$

1° Exprimer les distances respectives du point M aux droites D et D′.

2° En déduire l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_2$ équidistants des droites D et D′.

$d(M,D) = d(M,D') \iff x_0+3y_0=0$ ou $3x_0+y_0=0$ ie $d(M,D)=d(M,D') \iff M \in (L_1): 3x+y=0$ ou $M \in (L_2): -x+3y=0$

2 Soient A, B, C les points de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées respectives :

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1° Déterminer une équation cartésienne du plan P médiateur de AB, c'est-à-dire de l'ensemble des points de $\mathcal{E}_3$ équidistants de A et de B. NB: $\vec{AB} \in \vec{P}^{\perp}$

2° Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par C et perpendiculaire au plan P. $\vec{AB} \in \vec{D}$

3° En déduire les coordonnées du point H, intersection de P et de D.

3 On considère dans $\mathcal{E}_3$ les plans P et Q d'équations cartésiennes respectives : $2x - y + 2z - 5 = 0$ et $2x + 2y - z - 4 = 0$.

1° Les deux plans P et Q sont-ils perpendiculaires ? oui

2° Soit A le point de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer les distances de A aux plans P et Q. En déduire la distance de A à la droite D, intersection des plans P et Q. indication (PYTHAGORE)

3° Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

4° Soit λ le paramètre utilisé au 3°, pour quelle valeur de λ la distance de A à un point quelconque de D est-elle minimale ? Retrouver ainsi la distance de A à D.

$AM^2 = (\ldots)^2 + (\lambda - \frac{7}{3})^2 + (\lambda+1)^2$ → déterminer minimum de cette fonction, ainsi que où il est atteint

4 Soient A, B, C les points de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1° Déterminer une équation du plan P déterminé par les trois points A, B, C.

2° Soit m un réel. Déterminer les valeurs de m telles que le plan d'équation cartésienne : $3x + y + mz - 2 = 0$, soit perpendiculaire au plan P. On appelle Q le plan trouvé.

3° Calculer les distances respectives du point M de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à chacun des plans P et Q.

relation d'Euler

poser $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$

5 Soient, dans $\mathcal{E}_3$, trois points A, B, C non alignés.

1° Démontrer que l'on a : $\forall M \in \mathcal{E}_3,\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$ (*)

2° Soit P le plan déterminé par les trois points A, B, C.

Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que l'on ait :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}.$ (**) En faisant (**) dans (*) on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Donc $M \in (H_A) \cap (H_B) \cap (H_C)$ ie $M = H$ = orthocentre NB : (H_A), (H_B) et (H_C) sont les hauteurs

6 Soit dans $\mathcal{E}_3$ un tétraèdre ABCD.

Démontrer que l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_3$ tels que l'on ait :

$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \| = \| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \|$ est une sphère.

7 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}_3$. On pose : $\| \overrightarrow{AB} \| = d$.

Soit k un nombre réel.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_3$ tels que l'on ait : $MA^2 + 2\,MB^2 = k^2$.

8 Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{E}_3$ et k un nombre réel.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_3$ tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$.

9 Soit a un nombre réel positif.

Soient, dans $\mathcal{E}_2$, les points B et C de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 3a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 4a \end{pmatrix}$.

1° Déterminer les coordonnées du barycentre G des trois points O, B, C affectés des coefficients 1, − 2, 3. $G = \left(\frac{a x_A + b x_B + c x_C}{a+b+c} ; \frac{a y_A + b y_B + c y_C}{a+b+c} \right)$

2° Soit k un nombre réel. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_2$ tels que l'on ait :

$MO^2 - 2\,MB^2 + 3\,MC^2 = ka^2$.

10 Soit, dans $\mathcal{E}_2$, un carré (A, B, C, D).

1° Déterminer un triplet de nombres réels (b, c, d) tel que le point A soit le barycentre des points B, C, D affectés des coefficients b, c, d. on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ie $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$

2° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_2$ tels que l'on ait :

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} - MC^2 = 0.$ $\Rightarrow \overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

l'ensemble des points est donc le cercle de diamètre [AC]

11 Soit, dans $\mathcal{E}_2$, un carré (A, B, C, D). Soit O le milieu du côté AD.

1° Déterminer un triplet de nombres réels (a, b, c) tel que le point O soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b, c. $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$

2° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_2$ tels que l'on ait :

$2\,\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$

3° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_2$ tels que l'on ait :

$\| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 2\,\| \overrightarrow{MD} \|.$

12 Soit, dans $\mathcal{E}_3$, un tétraèdre (A, B, C, D). On désigne par G le centre de gravité du triangle (A, B, C) et par O le milieu du bipoint (D, G).

1° Soit k un nombre réel. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_3$ tels que

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = 3k.$ $\Rightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Rightarrow MO^2 - OD^2 = k \Rightarrow OM = \sqrt{k + OD^2}$

2° Déterminer l'ensemble des points P de $\mathcal{E}_3$ tels que l'on ait :

$\| \overrightarrow{PA} - 2\,\overrightarrow{PB} + 4\,\overrightarrow{PC} \| = 3\,\| \overrightarrow{PD} \|.$ $\Rightarrow \| \overrightarrow{PG'} \| = \| \overrightarrow{PD} \|$ où $G' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} A & B & C \\ 1 & -2 & 4 \end{array}$ $PG' = PD \Rightarrow P \in \Pi_{[G'D]}$ plan médiateur de $[G'D]$

3° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_3$ tels que l'on ait :

$\| \overrightarrow{PA} - 2\,\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \| = \| \overrightarrow{PD} \|.$ $\Rightarrow \| \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \| = \| \overrightarrow{PD} \|$

il s'agit P et non M

$S(D, \| \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \|)$

Isométries de $\mathcal{E}_2$.

13 Soit f l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x - 2. \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0x - y + 1 \\ y' = 1x + 0y - 2 \end{cases}$

Quelle est la nature de f ? $\varphi \to f$, $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix}$

$f = r(A, \frac{\pi}{2})$; $A = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $f(A) = A$

14 Même question que pour le n° 13 avec f définie par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + 1. \end{cases}$$

$\varphi \to f$, $M(\varphi) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in O_-(E_2)$

φ est donc une symétrie vectoriel

et $\mathrm{InVar}(f) = \{M \in \mathcal{E}_2 / f(M) = M\} = D : \sqrt{3}x + y - 2 = 0$

D'où f est la symétrie orthogonale par rapport à D

15 Soient, dans $\mathcal{E}_2$, deux points A et B tels que : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Soit C le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. , $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - 5 \\ y_D - 1 \end{pmatrix}$

Quelles sont les coordonnées du point D tel que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ soit le transformé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$? $\vec{r} : E_2 \to E_2$, $\vec{u}(x, y) \mapsto \vec{u'}(x', y') = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{r}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$

16 Soient A et A′ les points de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les applications f de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ telles que l'on ait :

$$\forall M \in \mathcal{E}_2, \quad \left(\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{A'f(M)}\| \text{ et angle } \widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'f(M)})} = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \right).$$

Il s'agit des rotations d'angle $\pi/3$

17 Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}_2$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$, distinct de A. On construit le carré APMQ de diagonale (AM), tel que l'on ait : angle $\widehat{(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ})} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}_2$ tels que l'on ait : $BP^2 + BQ^2 = 2\,AM^2$.

18 Soient A et B les points de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, par r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π, enfin par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

1° Déterminer l'application $t \circ h$ de $\mathcal{E}_2$. Donner ses éléments caractéristiques.

2° Déterminer les applications $t \circ r$ et $r \circ t$. On donnera pour chacune d'elles les éléments caractéristiques. NB. penser à $\vec{V}$

19 Soit (A, B, C, D) un carré dans $\mathcal{E}_2$ tel que : angle $\widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Soit I le centre du carré (A, B, C, D). On désigne par R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π, par T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Déterminer les éléments caractéristiques des applications $R \circ T$ et $T \circ R$ du plan $\mathcal{E}_2$ dans lui-même. , cas de $R \circ T = (S_{(BD)} \circ S_{(OI)}) \circ (S_{(OI)} \circ S_{(AB)}) = S_{(BD)} \circ S_{(AB)}$

Donc $R \circ T = r(B, \frac{\pi}{2})$ on a bien $(R \circ T)(B) = B$

20 Soit, dans $\mathcal{E}_2$, un carré (A, B, C, D) tel que : angle $\widehat{(\vec{AD}, \vec{AB})} = \frac{\pi}{2}$ (2π).

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π. Soient t la translation de vecteur $\vec{AC}$ et s la symétrie de centre C. c'est une rotation $t\circ r = (S_{(BD)}\circ S_{(L)})\circ(S_{(L)}\circ S_{(AB)}) = S_{(BD)}\circ S_{(AB)} = r(D,\frac{\pi}{2})$

1° Quelle est la nature de l'application $t\circ r$? Donner ses éléments caractéristiques.

2° Quelle est la nature de l'application $s\circ t\circ r$? Préciser ses éléments caractéristiques. $s\circ t\circ r = s\circ(t\circ r) = s\circ r(D,\frac{\pi}{2}) = r(C,\pi)\circ r(D,\frac{\pi}{2}) = (S_{(BC)}\circ S_{(AC)})\circ(S_{(DC)}\circ S_{(BD)})$

D'où $s\circ t\circ r = S_{(BC)}\circ S_{(BD)} = r(B,\pi+\frac{\pi}{2}) = r(B,-\frac{\pi}{2})$

21 Soit (A, B, C) un triangle équilatéral de $\mathcal{E}_2$ tel que l'on ait :

angle $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \frac{\pi}{3}$ (2π).

Soient $R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$ la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π, $T(\vec{BC})$ la translation de vecteur $\vec{BC}$ et $R\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$ la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

Déterminer la forme réduite de l'application $f = R\left(C, \frac{\pi}{3}\right)\circ T(\vec{BC})\circ R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$.

22 Soient A et B les points de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

On désigne par R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$ modulo 2π, et par R_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

1° Déterminer l'application $R_2\circ R_1$, en donnant ses éléments caractéristiques.

2° Soient A' et B' les images respectives des points A et B par $R_2\circ R_1$.
Démontrer que la droite (A'B') est médiatrice du segment [A, B].
ind: une rotation conserve le milieu et la perpendicularité

23 Soient O' un point de $\mathcal{E}_2$ distinct de O ; soit R_1 (resp. R_2) la rotation de centre O (resp. O') et d'angle $\frac{\pi}{3}$ $\left(\text{resp. } \frac{\pi}{2}\right)$ modulo 2π. C'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$
Que peut-on dire de $R_2\circ R_1$? Déterminer ses éléments caractéristiques.
NB: pour le centre s'inspirer de Exercice 20.

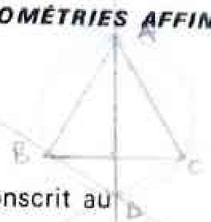
24 Soit t une translation de $\mathcal{E}_2$ de vecteur non nul.
Démontrer que t peut être considérée comme la composée de deux rotations de $\mathcal{E}_2$ et ceci d'une infinité de manières. ind: $S_A\circ S_B = t_{2\vec{BA}}$ et $S_A = r(A,\pi)$, $S_B = r(B,\pi)$
NB: il y a une infinité de façon de choisir le bipoint (A, B)

25 Soient, dans $\mathcal{E}_2$, les cinq points A, B, C, D, E de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. penser éventuellement aux nombres complexes

1° Il existe une rotation r_1 de centre ω_1 telle que : $r_1(B) = D$ et $r_1(C) = E$; $(\vec{BC}, \vec{DE}) = \alpha$
il existe une rotation r_1 de centre ω_2 telle que : $r_2(O) = D$ et $r_2(A) = E$; $(\vec{OA}, \vec{DE}) = \beta$
il existe une rotation r_2 de centre ω_3 telle que : $r_3(O) = B$ et $r_3(A) = C$. $(\vec{OA}, \vec{BC}) = \gamma$
Déterminer les angles de ces rotations r_1, r_2 et r_3 et les coordonnées des points ω_1, ω_2 et ω_3. Démontrer que l'on a : $r_2 = r_1\circ r_3$ (sans calculs).

2° Démontrer qu'il existe deux points F et G de $\mathcal{E}_2$ et trois droites D_1, D_2 et D_3 tels que F et G aient respectivement pour symétriques :

O et A par rapport à D_1
B et C par rapport à D_2
D et E par rapport à D_3.



26 Soit, dans $\mathcal{E}_2$, un triangle équilatéral (A, B, C) tel que l'on ait : angle $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \frac{\pi}{3}$ (2π).

Soit D le point d'intersection de la hauteur issue de A et du cercle circonscrit au triangle (A, B, C).

On désigne par S_{BD} (resp. S_{DC}, S_{CA}, S_{AB}) la symétrie de $\mathcal{E}_2$ d'axe la droite (BD) (resp. (DC), (CA), (AB)).

Déterminer l'application $S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$ $= f$ et donner ses éléments caractéristiques. $f = (S_{BD} \circ S_{DC}) \circ (S_{CA} \circ S_{AB}) = r(D, -\frac{2\pi}{3}) \circ r(A, \frac{2\pi}{3}) = t_{\vec{AA'}}$ où $A' = r(D, -\frac{2\pi}{3})(A)$

27 On donne dans $\mathcal{E}_2$ trois droites D_1, D_2, D_3 passant par O et telles que l'on ait : angle $\widehat{(D_1, D_2)} = \frac{\pi}{2}$ (π) et angle $\widehat{(D_2, D_3)} = \frac{\pi}{3}$ (π).

Soient S_{D_1}, S_{D_2}, S_{D_3} les symétries d'axes respectifs D_1, D_2, D_3. $f \to f \circ f = id_{\mathcal{E}}$

1° Déterminer l'application f de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ égale à : $S_{D_3} \circ S_{D_2} \circ S_{D_1}$. Donner ses éléments caractéristiques.

2° Soit f' l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ définie par : $f' = S_{D_1} \circ f$. $= (S_{D_1} \circ S_{D_3}) \circ (S_{D_3} \circ S_{D_1}) = r(0, \frac{5\pi}{6}) \circ$ Quelle est la nature de f' ? A-t-on : $S_{D_1} \circ f = f \circ S_{D_1}$?
d'où $f' = r(0, \frac{\pi}{3})$; $f' \neq f \circ S_{D_1}$ car $f \circ S_{D_1} = r(0, -\frac{\pi}{3}) \neq r(0, \frac{\pi}{3})$ $r(0, -\frac{\pi}{2}) = r(0, \frac{\pi}{3})$

28 Soient D et D' deux droites de $\mathcal{E}_2$ de directions respectives $\vec{D}$ et $\vec{D'}$.

Soit s (resp. s') la symétrie d'axe D (resp. D').

Démontrer que l'on a : $s \circ s' = s' \circ s$ si et seulement si les droites D et D' sont perpendiculaires ou confondues. $\Rightarrow$) supp $s \circ s' = s' \circ s$ et $D \neq D'$ et D non perpendiculaire à D' alors D∥D' ou D∩D'≠∅ SNAI car supp D∥D' on a $s \circ s' = t_{\vec{u}}$ et $s' \circ s = t_{-\vec{u}}$ contradiction car $s \circ s' = s' \circ s$. $\Leftarrow$) supp $D = D'$ (Resp $D \perp D'$) et dans chaque cas montrer que $s \circ s' = s' \circ s$

29 On donne, dans $\mathcal{E}_2$, un triangle équilatéral (A, B, C) de centre I, tel que l'on ait : angle $\widehat{(\vec{IA}, \vec{IB})} = \frac{2\pi}{3}$ (2π).

On désigne par r_1 (resp. r_2) la rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{resp.} -\frac{2\pi}{3}\right)$ modulo 2π, par s_1 (resp. s_2, s_3) la symétrie d'axe la droite (IA) (resp. (IB), (IC)).

1° Après avoir décomposé r_1 en un produit de deux réflexions affines convenablement choisies, déterminer la nature de l'application $s_1 \circ r_1$. $= S_{(IA)} \circ r(I, \frac{2\pi}{3}) = S_{(IA)} \circ S_{(IA)} \circ S_{(IB)} = S_{(IB)}$

Déterminer de même la nature de l'application $r_1 \circ s_1$. $= S_{(IC)} \circ S_{(IA)} \circ S_{(IA)} = S_{(IC)} = S_3$

2° On considère l'ensemble F défini par : $F = \{Id_{\mathcal{E}_2}, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$.

Démontrer que $(F, \circ)$ est un groupe. Ind : utiliser la table de PYTHAGORE de F comme support de raisonnement et on a ! $r_1^{-1} = r_2$, $s_i^{-1} = s_i$ $\forall i = 1, 2, 3$ et $(id_{\mathcal{E}_2})^{-1} = id_{\mathcal{E}_2}$

30 1° Soit T_1 l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M_1 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y + 4. \end{cases}$

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par T_1.

b) Déterminer la nature de T_1.

2° Soit a un nombre réel. On désigne par T_2 l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M_2 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ définies par :

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2ay + x(1 - a^2) + 2a}{1 + a^2} \\ y_2 = \dfrac{2ax + y(a^2 - 1) - 2}{1 + a^2}. \end{cases}$$

a) Démontrer que T_2 est une application involutive de $\mathcal{E}_2$.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par T_2.

c) Quelle est la nature de T_2 ? On donnera ses éléments caractéristiques.

3° On se propose d'étudier l'application R égale à $T_2 \circ T_1$.

a) Préciser la nature de R suivant les valeurs de *a*.

b) Soit M' l'image d'un point M quelconque de $\mathcal{E}_2$ par R.

Calculer les coordonnées du point M' en fonction de celles du point M.

31 A. Soient *a* un nombre réel et $\vec{u}_a$ le vecteur de E_2 de composantes $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$. On désigne par T_a la translation de vecteur $\vec{u}_a$. $T_a : M\binom{x}{y} \mapsto \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + a \end{cases}$ (*)

Démontrer que l'ensemble des translations T_a a une structure de groupe commutatif pour la composition des applications.

B. A tout nombre réel *b* on associe l'application S_b de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ définies par :

(**) $\begin{cases} x' = y - 1 + b \\ y' = x + 1 + b. \end{cases}$

1° Démontrer que, quel que soit le réel *b*, l'application S_b est une isométrie.

2° Déterminer l'ensemble des points invariants par S_b ; on discutera suivant les valeurs de *b*. si $b \neq 0$, Invar$(S_b) = \emptyset$; sinon, Invar$(S_b) = (L)$: $x - y + 1 = 0$

3° Démontrer que l'on a les propriétés suivantes :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad S_a \circ S_b = S_b \circ S_a = T_{a+b}$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad S_b \circ T_a = T_a \circ S_b = S_{a+b}$.

utiliser simplement les expressions analytiques

C. Démontrer que l'ensemble des applications T_a et S_b a une structure de groupe commutatif pour la composition des applications. utiliser la question 3)

D. 1° Quelle est la nature de l'application S_0 ? $S_0 = S_L$ = symétrie orthogonale par rapport à la droite

2° Démontrer que toute application S_b est le produit d'une symétrie axiale et d'une translation.

32 Soient *a* et φ deux nombres réels tels que l'on ait : $\sin(\varphi - a) \neq 0$.

1° Démontrer que les égalités suivantes : $\begin{cases} (x - x') \sin \varphi = (y - y') \cos \varphi \\ (x + x') \sin a = (y + y') \cos a \end{cases}$

permettent de définir une application T_φ de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; on exprimera *x'* et *y'* en fonction de *x* et *y*.

2° Démontrer que T_φ est involutive.

3° Déterminer l'ensemble Δ des points de $\mathcal{E}_2$ invariants par T_φ.

4° Déterminer l'ensemble des milieux des bipoints (M, M').

5° Quelle est la nature géométrique de T_φ ? Interpréter géométriquement les deux nombres *a* et φ.

6° Soit P un point de $\mathcal{E}_2$ n'appartenant pas à Δ. On désigne par P_φ son image par T_φ. On suppose que *a* est un réel constant.

Déterminer l'ensemble des points P_φ lorsque φ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, tel que l'on ait : $\sin(a - \varphi) \neq 0$.

33 **" Cas d'isométrie des triangles "**

Soient dans $\mathcal{E}_2$ deux triangles (A, B, C) et (A', B', C').

Montrer que chacune des propositions suivantes entraîne l'existence d'une isométrie *f* de $\mathcal{E}_2$ telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

(1) (AB = A'B') et (AC = A'C') et (BC = B'C')

(2) $(AB = A'B')$ et $(AC = A'C')$ et $\left(\text{angle}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \text{angle}\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)\right)$

(3) $(AB = A'B')$ et $(AC = A'C')$ et $\left(\text{angle}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\text{angle}\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)\right)$

(4) $(AB = A'B')$ et $\left(\text{angle}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \text{angle}\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)\right)$
et $\left(\text{angle}\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \text{angle}\left(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}\right)\right)$ et (A, B, C non alignés).

(5) $(AB = A'B')$ et $\left(\text{angle}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\text{angle}\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)\right)$
et $\left(\text{angle}\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\text{angle}\left(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}\right)\right)$ et (A, B, C non alignés).

Dans quels cas l'isométrie f est-elle unique ? Peut-on alors préciser si elle est directe ou si elle est indirecte ?

Isométries de $\mathcal{E}_3$.

34 Soit T l'application de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} X' = Z \\ Y' = X \\ Z' = Y. \end{cases}$

1° Démontrer que T est une bijection de $\mathcal{E}_3$ sur $\mathcal{E}_3$.
Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par T. Invar(T) = (Δ) : $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$, $\vec{\Delta} = \langle \vec{u} \rangle$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2° Démontrer que tout plan perpendiculaire à Δ est globalement invariant par T.
un tel plan a pour équation P : x + y + z + d = 0 ⇒ P′ : y′ + z′ + x′ + d = 0

3° On pose : $\begin{cases} \vec{i}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{k} \\ \vec{j}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{k} \\ \vec{k}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}). \end{cases}$

$\|\vec{i}_1\| = \|\vec{j}_1\| = \|\vec{k}_1\| = 1$ et $\vec{i}_1 \perp \vec{j}_1$, $\vec{j}_1 \perp \vec{k}_1$, $\vec{i}_1 \perp \vec{k}_1$

Démontrer que $\left(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\right)$ est un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}_3$. Soit $\mathcal{R}_1$ ce repère.
On désigne par x, y, z (resp. x', y', z') les coordonnées de M (resp. M′) dans ce repère.
Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z.
Quelle est la nature de T ? On précisera ses éléments géométriques.

35 Soit f l'application de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$ qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ définies par : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y - z) + 1 \\ z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y + z). \end{cases}$

1° Déterminer l'ensemble des points invariants par f. Invar(f) = ∅ car x = x + 2 ⇒ 0 = 2 absurde
En déduire la nature de f. f est un vissage $f = t_{\vec{u}} \circ R(\Delta, \alpha) = R(\Delta, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$
2° Déterminer la forme réduite de f.

36 Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E_3. On désigne par t la translation de vecteur $\vec{u}$ et par f un déplacement quelconque de $\mathcal{E}_3$.
Démontrer que l'on a : $f = t \circ f \circ t$ si et seulement si f est un vissage d'angle π modulo 2π dont l'axe a une direction orthogonale à $\vec{u}$.

37 On désigne par $t_{\vec{u}}$ la translation de $\mathcal{E}_3$ de vecteur $\vec{u}$ non nul et par $r(D, \alpha)$ la rotation de $\mathcal{E}_3$ d'axe D et d'angle α.
Démontrer que l'application $t_{\vec{u}} \circ r(D, \alpha)$ est un vissage si et seulement si $\vec{u}$ n'appartient pas à l'orthogonal de la direction $\vec{D}$ de D.

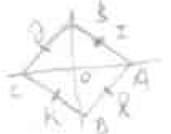
✳ **38** Soient D et D′ deux droites distinctes de $\mathcal{E}_3$. On désigne par s_D (resp. $s_{D'}$) la symétrie axiale d'axe D (resp. D′).
1° Déterminer la nature de l'application $s_{D'} \circ s_D$; on discutera suivant la position relative des droites D et D′. (On trouvera soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.)
2° Étudier le problème réciproque.

39 Soient P_1, P_2, P_3 trois plans de $\mathcal{E}_3$ deux à deux perpendiculaires. Soit A leur point d'intersection.
On désigne par s_1 (resp. s_2, s_3) la réflexion affine par rapport au plan P_1 (resp. P_2, P_3).
Déterminer l'application $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

40 Soient D_1, D_2, D_3 trois droites de $\mathcal{E}_3$ deux à deux perpendiculaires et concourantes en un point A. ← Dans $\mathcal{E}_3$
On désigne par s_1 (resp. s_2, s_3) la symétrie axiale d'axe D_1 (resp. D_2, D_3).
Déterminer l'application $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

41 Soit P un plan de $\mathcal{E}_3$. On désigne par s_P la réflexion affine par rapport au plan P.
1° Soit $\vec{u}$ un vecteur orthogonal à la direction $\vec{P}$ de P.
Démontrer qu'il existe un unique plan P′ (resp. P″) de $\mathcal{E}_3$ tel que la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ soit égale à $s_{P'} \circ s_P$ (resp. $s_P \circ s_{P''}$).
2° Soit D une droite de P. Soit r une rotation d'axe D et d'angle α.
Démontrer qu'il existe un unique plan Q (resp. Q′) de $\mathcal{E}_3$ tel que l'on ait :
$r = s_Q \circ s_P$ (resp. $r = s_P \circ s_{Q'}$).

Isométries laissant invariant un ensemble donné.



42 Soient, dans $\mathcal{E}_2$, les points A, B, C, D de coordonnées respectives :
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.
1° On désigne par s_A (resp. s_B, s_C, s_D) la symétrie de centre A (resp. B, C, D).
Quelle est l'application f de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ définie par : $f = s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A$? $= t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = id$
2° On désigne par s_{AB} (resp. s_{BC}, s_{CD}, s_{DA}) la réflexion affine par rapport à la droite (AB) (resp. (BC), (CD), (DA)).
Quelle est la nature de l'application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}_2$ définie par :
$g = s_{DA} \circ s_{CD} \circ s_{BC} \circ s_{AB}$? $= r(A_1, -\pi) \circ r(B_1, \pi) = t_{\overrightarrow{BB'}}$, $B'(\partial_1, -1)$
3° On désigne par r_A (resp. r_B, r_C, r_D) la rotation de centre A (resp. B, C, D) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.
Quelle est la nature de l'application h définie par : $h = r_D \circ r_C \circ r_B \circ r_A$? $= t_{\overrightarrow{AA'}}$, $A' = h(A)$
4° Que peut-on dire de l'application k définie par : $k = r_D^{-1} \circ r_C^{-1} \circ r_B^{-1} \circ r_A^{-1}$? $= t_{\overrightarrow{AA''}}$, $A'' = k(A)$
5° Soit φ une isométrie de $\mathcal{E}_2$ laissant invariant l'ensemble {A, B, C, D}.
Déterminer le groupe F de ces isométries.
Trouver tous les sous-groupes de F. (D'après Baccalauréat 1971)

$F = \{id_{\mathcal{E}_2}; s_O; s_{(IJ)}; s_{(KL)}; s_{BD}; s_{AC}, r(O; \frac{\pi}{2}); r(O; -\frac{\pi}{2})\}$, $|F| = 2 \times 4 = 8$
NB : $D_4 = F$, les sous-groupes de F :
$F_0 = \{id_{\mathcal{E}_2}, s_O\}$; $F_1 = \{id, s_{(IJ)}\}$; $F_2 = \{id, s_{KL}\}$; $F_3 = \{id; s_{BD}\}$; $F_4 = \{id, s_{AC}\}$
$F_5 = \{id, s_O, s_{(IJ)}; s_{(KL)}\}$; $F_6 = \{id, s_O, s_{AC}, s_{BD}\}$

43 Soit D une droite de $\mathcal{E}_2$. $\Lambda = \{ f \in I(\mathcal{E}_2) \mid f(D) = D \}$
Déterminer le groupe des isométries f de $\mathcal{E}_2$ telles que : $f(D) = D$.
Ce groupe est-il fini ? $\Lambda = \{ id_{\mathcal{E}_2}, s_D \} \cup \{ s_A ; A \in D \} \cup \{ t_{\vec{u}}, \vec{u} \in \vec{D} \}$
non → car $\{ s_A, A \in D \}$ est infini, car D admet une infinité de pts A

44 Soient D et D′ deux droites de $\mathcal{E}_2$ concourantes en un point A.
1° Déterminer le groupe des isométries de $\mathcal{E}_2$ laissant invariant l'ensemble {D, D′}.
On distinguera deux cas : D perpendiculaire à D′ et D non perpendiculaire à D′.
2° Même question pour le couple (D, D′).

45 Soient, dans $\mathcal{E}_3$, deux plans P et P′.
Déterminer le groupe des isométries de $\mathcal{E}_3$ laissant invariant l'ensemble {P, P′}

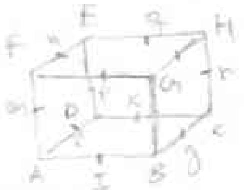
46 Soient, dans $\mathcal{E}_3$, deux droites D et D′ non coplanaires.
Déterminer l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}_3$ laissant invariant l'ensemble {D, D′}.

47 Soit, dans $\mathcal{E}_2$, un rectangle (A, B, C, D).

Déterminer le groupe des isométries laissant invariant l'ensemble {A, B, C, D}.
Dresser la table de Pythagore de ce groupe.
$\mathrm{Invar}(\{A,B,C,D\}) = \{ id_{\mathcal{E}_2} ; s_O ; s_{(IJ)} ; s_{(PK)} \} \cong V_4$ →

$\circ$	Id	s_O	$s_{(IJ)}$	$s_{(PK)}$
id	id	s_O	s_{IJ}	s_{PK}
s_O	s_O	id	s_{PK}	s_{IJ}
s_{IJ}	s_{IJ}	s_{PK}	id	s_O
s_{PK}	s_{PK}	s_{IJ}	s_O	id

※ **48** Soit, dans $\mathcal{E}_3$, un cube (A, B, C, D, E, F, G, H). = $\mathcal{C}$
Déterminer le groupe des isométries laissant invariant ce cube.
O centre du cube



$\mathrm{Invar}(\mathcal{C}) = \{ id_{\mathcal{E}_3} ; s_O ; s_{(IKQ)} ; s_{(PKJ)} ; \dots \}$

10.
Similitudes

1. Généralités.

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie n ($n = 2$ ou 3) et $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E.

Définition.

1.1 DÉFINITION : **Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. L'application f est une similitude de $\mathcal{E}$ si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :**
$\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad d(f(A), f(B)) = k\, d(A, B).$

Le réel strictement positif k est appelé **rapport de la similitude f.**

Exemples.

1. Toute isométrie de $\mathcal{E}$ est une similitude de rapport 1.
2. Soient K un point de $\mathcal{E}$ et f l'homothétie de centre K et de rapport -3. Il résulte de la définition de f que l'on a : $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \overrightarrow{f(A) f(B)} = -3\overrightarrow{AB}$
et, par suite : $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad d(f(A), f(B)) = 3\, d(A, B)$.
L'application f est donc une similitude de rapport 3.
3. Plus généralement, soient K un point de $\mathcal{E}$ et λ un réel non nul. Alors l'homothétie de centre K et de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

1.2 THÉORÈME : **Soient k un réel strictement positif et f une similitude de $\mathcal{E}$, de rapport k.**
Alors il existe une homothétie h de $\mathcal{E}$, de rapport k et une isométrie g de $\mathcal{E}$ telles que l'on ait : $f = h \circ g$.

Démonstration :
Considérons un point K de $\mathcal{E}$ et appelons h l'homothétie de centre K et de rapport k.

L'application h^{-1} est l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{k}$.

Posons : $g = h^{-1} \circ f$. On a alors : $f = h \circ g$. Démontrons que g est une isométrie de $\mathcal{E}$.

Soient A et B deux points quelconques de $\mathcal{E}$. On a :

$$d(g(A), g(B)) = d\left(h^{-1}(f(A)), h^{-1}(f(B))\right) = \frac{1}{k} d(f(A), f(B))$$

$$= \frac{1}{k} \cdot k \cdot d(A, B) = d(A, B). \quad ■$$

<u>Remarques</u> : 1. Cette décomposition n'est pas unique, puisque le point K est arbitraire.

2. On peut démontrer, de façon analogue, qu'il existe une homothétie h' de $\mathcal{E}$ de rapport k et une isométrie g' de $\mathcal{E}$ telles que l'on ait : $f = g' \circ h'$.

Exemples.

L'homothétie de centre K et de rapport -3 est la composée de la symétrie centrale de centre K et de l'homothétie de centre K et de rapport 3.
Plus généralement, si λ est positif, l'homothétie f de centre K et de rapport λ est la composée de l'identité de $\mathcal{E}$ et de f.
Si λ est négatif, l'homothétie f de centre K et de rapport λ est la composée de la symétrie centrale de centre K et de l'homothétie de centre K et de rapport $|\lambda|$.

Propriétés.

1.3 Dans ce paragraphe, k désigne un réel strictement positif et $\mathcal{S}$ l'ensemble des similitudes de $\mathcal{E}$.

P1	Toute similitude de $\mathcal{E}$ est une bijection affine de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

Démonstration :
Il résulte du théorème 1.2 que toute similitude de $\mathcal{E}$ est la composée de deux bijections affines de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$. ■

P2	Soient f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et φ son endomorphisme associé. Alors f est une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport k si et seulement si $\frac{1}{k}\varphi$ est une isométrie vectorielle de E.

Nous rappelons que $\frac{1}{k}\varphi$ est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \left(\frac{1}{k}\varphi\right)(\vec{u}) = \frac{1}{k}\varphi(\vec{u}).$$

Démonstration :

- Supposons que f soit une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport k.

Soient alors $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E et (A, B) un représentant de $\vec{u}$. On a :

$$\left\|\frac{1}{k}\varphi(\vec{u})\right\| = \frac{1}{k}\|\varphi(\overrightarrow{AB})\| = \frac{1}{k}\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\| = \frac{1}{k}d(f(A), f(B)) = d(A, B) = \|\vec{u}\|.$$

L'application $\frac{1}{k}\varphi$ appartient donc à $\mathcal{O}(E)$.

• Supposons que $\frac{1}{k}\varphi$ soit une isométrie vectorielle de E.

Soient alors A et B deux points quelconques de $\mathcal{E}$. On a :

$$d(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})) = \| \overrightarrow{f(\mathrm{A})\, f(\mathrm{B})} \| = \| \varphi(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \| = \left\| k \cdot \frac{1}{k}\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \right\|$$
$$= k \left\| \frac{1}{k}\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \right\| = k \, \| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \| = k\, d(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

L'application f est donc une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport k. ■

Si $\frac{1}{k}\varphi$ appartient à $\mathcal{O}_+(\mathrm{E})$, on dit que f est une **similitude directe** de $\mathcal{E}$.

Si $\frac{1}{k}\varphi$ appartient à $\mathcal{O}_-(\mathrm{E})$, on dit que f est une **similitude indirecte de** $\mathcal{E}$.

Remarque : Soient f une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport k et φ son endomorphisme associé. Si h est une homothétie de $\mathcal{E}$ de rapport k et g une isométrie de $\mathcal{E}$ telles que l'on ait : $f = h \circ g$, alors g a pour endomorphisme associé $\frac{1}{k}\varphi$.

> **P3** $(\mathcal{S}, \circ)$ est un groupe et l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui, à toute similitude, associe son rapport est un homomorphisme de $(\mathcal{S}, \circ)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Démonstration :

Appelons ρ l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $\begin{array}{l} \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ f \longmapsto k. \end{array}$

• La loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{S}$ et ρ est un homomorphisme de $(\mathcal{S}, \circ)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
Soient f_1 et f_2 deux similitudes quelconques de $\mathcal{E}$, de rapports respectifs k_1 et k_2.
Considérons l'application $f_2 \circ f_1$. On a :

$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{E}^2,\ d((f_2 \circ f_1)(\mathrm{A}), (f_2 \circ f_1)(\mathrm{B})) = k_2\, d(f_1(\mathrm{A}), f_1(\mathrm{B})) = k_2 k_1\, d(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$

L'application $f_2 \circ f_1$ est donc une similitude de rapport $k_2 k_1$.

• La loi $\circ$ est associative dans $\mathcal{S}$.

• L'identité de $\mathcal{E}$ est une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport 1 et c'est l'élément neutre pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{S}$.

• Tout élément de $\mathcal{S}$ a un symétrique dans $\mathcal{S}$ pour la loi $\circ$.
Soit f une similitude quelconque de $\mathcal{E}$ de rapport k ; il résulte de P_1 que f^{-1} existe ; on a d'autre part :

$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{E}^2,\ d((f^{-1}(\mathrm{A}), f^{-1}(\mathrm{B})) = \frac{1}{k} d(f(f^{-1}(\mathrm{A})), f(f^{-1}(\mathrm{B}))) = \frac{1}{k} d(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$

L'application f^{-1} est donc une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport $\frac{1}{k}$. ■

Remarque : Soient f et f' deux similitudes de $\mathcal{E}$, de rapports respectifs k et k' et d'endomorphismes associés respectifs φ et φ'. Soient ψ et ψ' les isométries vectorielles respectives associées à f et f'. On a : $\psi = \frac{1}{k}\varphi$ et $\psi' = \frac{1}{k'}\varphi'$. Il résulte des propriétés des applications affines que l'isométrie vectorielle de E associée à la similitude $f' \circ f$, de rapport kk' est $\psi' \circ \psi$ et que l'isométrie vectorielle de E associée à la similitude f^{-1} de rapport $\frac{1}{k}$ est ψ^{-1}.

> **P4** L'ensemble des similitudes directes de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}, \circ)$.

La démonstration de cette propriété est analogue à celle qui a été faite pour le sous-groupe des déplacements du groupe des isométries d'un espace affine, dans le chapitre 9.

P5	Soit f une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport k, différent de 1. Alors, il existe un unique point K de $\mathcal{E}$, invariant par f.

Le point K est appelé **centre de la similitude** f.

Démonstration :

Soit φ l'endomorphisme associé à f. Appelons ψ l'isométrie vectorielle $\frac{1}{k}\varphi$ de E.

On a alors : $\varphi = k\psi$.
Soient A un point de $\mathcal{E}$ et A' son image par f; soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

On a : $$\begin{aligned}(f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}) &\Longleftrightarrow \left(\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \overrightarrow{\mathrm{A'M}}\right)\\ &\Longleftrightarrow \left(\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \overrightarrow{\mathrm{A'A}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\\ &\Longleftrightarrow \left((\varphi - \mathrm{Id}_\mathrm{E})(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \overrightarrow{\mathrm{A'A}}\right).\end{aligned}$$

Pour que le point M existe et soit unique, il suffit que l'endomorphisme $\varphi - \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, de l'espace vectoriel E de dimension finie, soit bijectif ce qui équivaut à dire que le noyau Ker $(\varphi - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est réduit au vecteur nul de E.

Soit donc $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E. On a :

$$\begin{aligned}\left(\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_\mathrm{E})\right) &\Longleftrightarrow \left((\varphi - \mathrm{Id}_\mathrm{E})(\vec{u}) = \vec{0}\right) \Longleftrightarrow \left(\varphi(\vec{u}) = \vec{u}\right)\\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{k}\psi(\vec{u}) = \vec{u}\right) \Longrightarrow \left(\frac{1}{k}\|\psi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{k}\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\right).\end{aligned}$$

$\frac{1}{k}$ est différent de 1. On a donc : $\left(\frac{1}{k}\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\right) \Longrightarrow (\|\vec{u}\| = 0) \Longrightarrow (\vec{u} = \vec{0})$.

On a donc finalement : $\left(\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_\mathrm{E})\right) \Longrightarrow (\vec{u} = \vec{0})$. ■

2. Similitudes de $\mathcal{E}_2$.

Nous allons étudier, plus en détail, le cas où n est égal à 2. Dans ce paragraphe, E_2 désigne un plan vectoriel réel euclidien et $\mathcal{E}_2$ un plan affine associé à E_2.

Similitudes directes de $\mathcal{E}_2$.

2.1 Soient k un réel strictement positif, f une similitude directe de $\mathcal{E}_2$, de rapport k, et φ l'endomorphisme associé à f.

Posons : $\psi = \frac{1}{k}\varphi$.

Par définition, ψ est un élément de $\mathcal{O}_+(\mathrm{E}_2)$, c'est-à-dire une rotation vectorielle de E_2, d'angle α éventuellement nul. Nous allons déterminer la nature de f.
Envisageons les deux cas suivants : $k = 1$ ou $k \neq 1$.

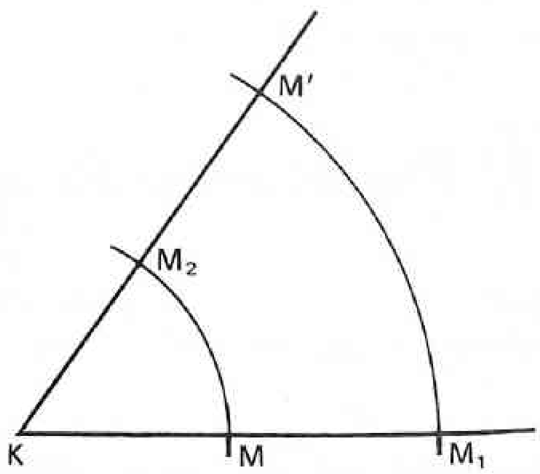
$\boxed{k = 1}$ La similitude directe f est alors un déplacement de $\mathcal{E}_2$; c'est donc soit l'identité de $\mathcal{E}_2$, soit une translation de $\mathcal{E}_2$ de vecteur non nul, soit une rotation de $\mathcal{E}_2$ d'angle non nul.

$\boxed{k \neq 1}$ Il résulte de la propriété P_5 du paragraphe 1.3 que f admet un unique point invariant K. Soient r la rotation de $\mathcal{E}_2$, de centre K et d'angle α et h l'homothétie de $\mathcal{E}_2$ de centre K et de rapport k.
L'application affine $h \circ r$ a pour endomorphisme associé $(k\,\mathrm{Id}_{E_2}) \circ \psi$ c'est-à-dire $k\psi$ et admet le point K comme point invariant ; elle est donc égale à f. On a : $f = h(\mathrm{K}, k) \circ r(\mathrm{K}, \alpha)$.
Si l'angle α est nul, on a : $r(\mathrm{K}, \alpha) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et, par suite : $f = h(\mathrm{K}, k)$.
Remarquons enfin que, si k est égal à 1 et si f est la rotation de $\mathcal{E}_2$ de centre K et d'angle α, on peut encore écrire : $f = h(\mathrm{K}, k) \circ r(\mathrm{K}, \alpha)$.
Nous énonçons donc le théorème suivant :

THÉORÈME : Soient k un réel strictement positif et f une similitude directe de $\mathcal{E}_2$ de rapport k.
Si f n'a pas de point invariant, alors f est une translation de $\mathcal{E}_2$ de vecteur non nul.
Si f a au moins un point invariant K, alors il existe un unique angle α de $\mathcal{A}$ tel que l'on ait : $f = h(\mathrm{K}, k) \circ r(\mathrm{K}, \alpha)$.

• Si f n'est pas l'identité de $\mathcal{E}_2$ et si f admet au moins un point invariant K, alors ce point est le seul point invariant. (On a nécessairement $(k, \alpha) \neq (1, \omega)$). L'application f est déterminée par la donnée de K, k et α. On dit que f est la **similitude de centre K, de rapport k et d'angle** α et on note souvent $s(\mathrm{K}, k, \alpha)$.
La décomposition $h(\mathrm{K}, k) \circ r(\mathrm{K}, \alpha)$ est alors appelée **forme réduite** de f ; elle est unique et il résulte de l'égalité :
$(k\,\mathrm{Id}_{E_2}) \circ \varphi = \varphi \circ (k\,\mathrm{Id}_{E_2})$ que l'on a :

$$\boxed{\begin{aligned} s(\mathrm{K}, k, \alpha) &= h(\mathrm{K}, k) \circ r(\mathrm{K}, \alpha) \\ &= r(\mathrm{K}, \alpha) \circ h(\mathrm{K}, k) \end{aligned}}$$



• Soient M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$ et M' son image par f ; soient M_1 et M_2 les images respectives de M par h et par r.
On a alors :
$M' = r(M_1)$ et $M' = h(M_2)$.

Il en résulte la proposition suivante :

$$\boxed{\forall (\mathrm{M}, \mathrm{M}') \in (\mathcal{E}_2)^2, \Big((\mathrm{M}' = s(\mathrm{K}, k, \alpha)(\mathrm{M})) \iff \big(\mathrm{KM}' = k\mathrm{KM} \text{ et angle } (\overrightarrow{\mathrm{KM}}, \overrightarrow{\mathrm{KM}'}) = \alpha\big)\Big)}$$

Supposons $\mathcal{E}_2$ orienté ; de même que pour les rotations, si x est une détermination de la mesure en radians de α, nous dirons, par abus de langage, que f est la **similitude de centre K, de rapport k et d'angle x** (2π).

Similitudes indirectes de $\mathcal{E}_2$.

2.2 Soient k un réel strictement positif, f une similitude indirecte de rapport k et φ l'endomorphisme associé à f. Posons $\psi = \frac{1}{k}\varphi$.

Par définition, ψ est un élément de $\mathcal{O}_-(E_2)$, c'est-à-dire une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$ de E_2. Nous allons déterminer la nature de f ; envisageons les deux cas suivants : $k = 1$ ou $k \neq 1$.

$\boxed{k = 1}$ La similitude indirecte f est alors un antidéplacement de $\mathcal{E}_2$; c'est donc soit une réflexion affine de $\mathcal{E}_2$ par rapport à une droite D de direction $\vec{D}$, soit la composée d'une telle réflexion et d'une translation de $\mathcal{E}_2$.

$\boxed{k \neq 1}$ Il résulte de la propriété P_5 du paragraphe 1.3 que f admet un unique point invariant K. Soient D la droite passant par K de direction $\vec{D}$ et s_D la réflexion affine de $\mathcal{E}_2$ par rapport à D. L'application affine $h(K, k) \circ s_D$ a pour endomorphisme associé $(k\,\mathrm{Id}_{E_2}) \circ \psi$, c'est-à-dire $k\psi$ et admet le point K comme point invariant ; elle est donc égale à f.

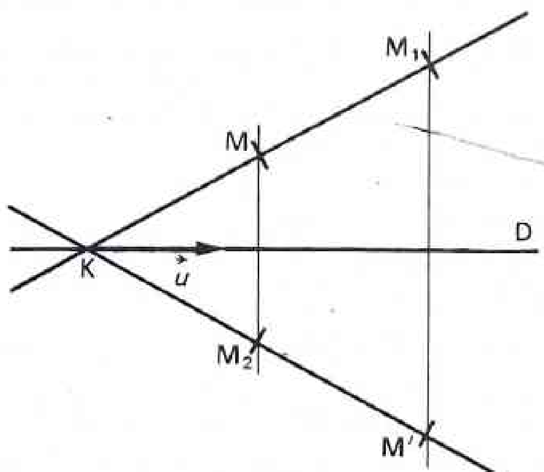
On a : $f = h(K, k) \circ s_D$.

Remarquons que, si k est égal à 1 et si f est la réflexion affine par rapport à D, on peut encore écrire : $f = h(K, k) \circ s_D$. Nous énonçons donc le théorème suivant :

THÉORÈME : Soient k un réel strictement positif et f une similitude indirecte de $\mathcal{E}_2$, de rapport k.
Si f n'a pas de point invariant, alors f est la composée d'une réflexion affine de $\mathcal{E}_2$ et d'une translation de vecteur non nul.
Si f a au moins un point invariant K, alors il existe une unique droite D de $\mathcal{E}_2$ passant par K, telle que l'on ait : $f = h(K, k) \circ s_D$.

• Si k est différent de 1, le point invariant K est unique. La décomposition $h(K, k) \circ s_D$ est appelée **forme réduite** de f ; elle est unique et l'on a également :

$$\boxed{f = h(K, k) \circ s_D = s_D \circ h(K, k)}$$



• Soient M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$ et M′ son image par f ; soient M_1 et M_2 les images respectives de M par h et s_D ; on a alors :
$M' = s_D(M_1)$ et $M' = h(M_2)$.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, on a alors la proposition suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}&\forall (M, M') \in \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2,\ \Big((M' = (h(K, k) \circ s_D)(M))\\ &\qquad \Longleftrightarrow \big(KM' = kKM \text{ et angle } (\overrightarrow{KM}, \vec{u}) = \text{angle } (\vec{u}, \overrightarrow{KM'})\big)\Big)\end{aligned}}$$

Remarque : Si k est différent de 1, la droite D est globalement invariante par f. Cette droite D passe par le point invariant K et a pour vecteur directeur tout vecteur non nul invariant par ψ. On a aussi : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}_2, \ \left((\mathrm{M} \in \mathrm{D}) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{K}f(\mathrm{M})} = k\,\overrightarrow{\mathrm{KM}}\right)\right)$.
De même, la droite passant par K et perpendiculaire à D est globalement invariante par f.

3. Application à l'étude de certaines transformations du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Nous rappelons qu'une transformation d'un ensemble E est une bijection de E sur E. Soit F une transformation de $\mathbb{C}$. Nous allons utiliser la représentation géométrique des nombres complexes pour interpréter F par une transformation d'un plan affine euclidien.

Compléments sur la représentation géométrique des nombres complexes.

3.1 Soient E_2 un plan vectoriel réel euclidien orienté, $\mathcal{E}_2$ un plan affine associé à E_2 et $(\mathrm{O}, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}_2$.

- Nous avons défini, dans le paragraphe 3.1 (resp. 3.3) du chapitre 2, une bijection de $\mathbb{C}$ sur E_2 (resp. $\mathcal{E}_2$) qui, à tout nombre complexe z de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$, associe le vecteur $\vec{u}$ (resp. le point M) de composantes (resp. de coordonnées) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ de E_2 (resp. dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ de $\mathcal{E}_2$.).
Le nombre complexe z est l'affixe de $\vec{u}$ et de M ; le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur image de z et le point M, le point image de z. L'ensemble $\mathbb{C}$ est alors appelé plan complexe.
Nous noterons η la bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{E}_2$.
- Nous rappelons que, si M_1 et M_2 sont deux points de $\mathcal{E}_2$, d'affixes respectives z_1 et z_2, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1$ et l'on a :
$d(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\| = |z_2 - z_1|$.
- Soit z un nombre complexe de module 1 et soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ses composantes dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$. Par définition, z est égal à la matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $x^2 + y^2 = 1$; cette matrice est la matrice, dans toute base orthonormée directe de E_2, d'une rotation vectorielle de E_2. Soient α l'angle de cette rotation vectorielle, M et U_0 les points images respectifs de z et de 1. On a alors : $\alpha = \text{angle}\left(\overrightarrow{\mathrm{OU}_0}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ et, par suite, $\alpha = \operatorname{Arg} z$.

L'Argument d'un nombre complexe de module 1 est donc l'angle de la rotation vectorielle de E_2 qui a pour matrice, dans toute base orthonormée directe de E_2, ce nombre complexe.

- Soit z un nombre complexe non nul. Nous rappelons que l'on a, par définition : $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} \dfrac{z}{|z|}$.

- Soit F une transformation de $\mathbb{C}$. On peut lui associer une transformation f de $\mathcal{E}_2$ par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "F"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\eta"] \\
\mathcal{E}_2 \arrow[u, "\eta^{-1}"] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{E}_2
\end{tikzcd}$$

On a : $f = \eta \circ F \circ \eta^{-1}$.
De même, à toute transformation f de $\mathcal{E}_2$ est associée une transformation F de $\mathbb{C}$ définie par : $F = \eta^{-1} \circ f \circ \eta$.
Nous disons que f est la **transformation géométrique associée à** F.
La loi $\circ$ de composition des applications munit l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{B}(\mathcal{E}_2)$) des transformations de $\mathbb{C}$ (resp. de $\mathcal{E}_2$) d'une structure de groupe. Il est immédiat que l'application de $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{E}_2)$ définie ci-dessus est un isomorphisme de $(\mathcal{B}(\mathbb{C}), \circ)$ sur $(\mathcal{B}(\mathcal{E}_2), \circ)$.
Dans toute la suite, toutes les coordonnées (resp. composantes) des points (resp. vecteurs) de $\mathcal{E}_2$ (resp. E_2) sont données dans le repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ (resp. dans la base $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$).

Transformation géométrique associée à $z \longmapsto az + b$.

3.2 THÉORÈME : **Soient (a, b) un couple de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et F la transformation de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = az + b$. Alors la transformation géométrique f associée à F est une similitude directe de $\mathcal{E}_2$, de rapport $|a|$.**
Si a est égal à 1, alors f est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.
Si a n'est pas égal à 1, alors f est la similitude de centre le point d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle Arg a (ou, par abus de langage, d'angle arg a (2π)).

La transformation F de $\mathbb{C}$ est appelée **similitude directe du plan complexe.**
Démonstration :
Le nombre complexe a n'est pas nul ; F est donc bijective.
f est une similitude de rapport $|a|$. Soient M_1 et M_2 deux points quelconques de $\mathcal{E}_2$, d'affixes respectives z_1 et z_2. On a :

$$\begin{aligned} d(f(M_1), f(M_2)) &= |F(z_2) - F(z_1)| = |a(z_2 - z_1)| = |a| . |z_2 - z_1| \\ &= |a|\, d(M_1, M_2). \end{aligned}$$

f **est une similitude directe de** $\mathcal{E}_2$. Posons $\frac{a}{|a|} = c + id$ et $b = b' + ib''$. On a donc $c^2 + d^2 = 1$. Soit O′ l'image de O par f ; l'affixe de O′ est donc b.
Considérons deux points quelconques M et M′ de $\mathcal{E}_2$, d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a :

$$(M' = f(M)) \iff (z' = az + b) \iff (z' - b = |a|(c + id)z)$$
$$\iff ((x' + iy') - (b' + ib'') = |a|(c + id)(x + iy))$$
$$\iff \left(\begin{cases} x' - b' = |a|(cx - dy) \\ y' - b'' = |a|(dx + cy) \end{cases}\right)$$
$$\iff \left(\begin{pmatrix} x' - b' \\ y' - b'' \end{pmatrix} = |a| \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

On a : $c^2 + d^2 = 1$. La matrice $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ est donc la matrice d'une rotation vectorielle ψ de E_2, d'angle Arg $(c + id)$, c'est-à-dire d'angle Arg a et l'on a :

$$(M' = f(M)) \iff \left(\overrightarrow{O'M'} = |a| \, \psi(\overrightarrow{OM})\right).$$

Il résulte de cette équivalence que f est une application affine de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ dont l'endomorphime associé est égal à $|a|\,\psi$. L'application f est donc une similitude directe de $\mathcal{E}_2$.

Nature de f. Il résulte du théorème 2.1 que la nature de la similitude directe f dépend du nombre des points invariants par f.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$, d'affixe z. On a :

$$(M = f(M)) \iff (z = az + b) \iff (z(1 - a) = b).$$

Il faut donc distinguer les deux cas : $a = 1$ et $a \neq 1$.

- $a = 1$. Si b est nul, tout point de $\mathcal{E}_2$ est invariant par f ; on a donc $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$. Remarquons que l'on a alors : $F = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.

Si b n'est pas nul, il n'y a pas de point de $\mathcal{E}_2$ invariant par f. La similitude directe f est donc une translation de vecteur $\vec{w}$ non nul. On a : $\forall M \in \mathcal{E}_2$, $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{w}$; de la proposition : $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) - z = b$, il résulte que le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe b.

- $a \neq 1$. L'application f admet un unique point invariant, d'affixe $\frac{b}{1 - a}$; la similitude directe f est donc la similitude de centre le point d'affixe $\frac{b}{1 - a}$, de rapport $|a|$ et d'angle Arg a. ■

Exemples.

1. Cherchons le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe du plan complexe définie par : $z' = (1 + i)z + 2 + 3i$.

On a : $|1 + i| = \sqrt{2}$; $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$;

$$\frac{2 + 3i}{1 - (1 + i)} = -\frac{1}{i}(2 + 3i) = i(2 + 3i) = -3 + 2i.$$

La similitude considérée a donc pour centre le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.

2. Traitons la même question avec : $z' = 3z + 4$.

On a : $|3| = 3$; $\arg 3 = 0 \quad (2\pi)$; $\dfrac{4}{1-3} = -2$.

Cette similitude a donc pour centre le point K de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, pour rapport 3 et pour angle 0 (2π) : c'est donc l'homothétie de centre K et de rapport 3.

3.3 THÉORÈME : Soit f une similitude directe de $\mathcal{E}_2$. Alors il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que la transformation F de $\mathbb{C}$ associée à f soit définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = az + b$.

Démonstration :

Soient k le rapport de f et ψ la rotation vectorielle de E_2 telle que $k\psi$ soit l'endomorphisme associé à f.

Appelons a le nombre complexe de module k et d'Argument égal à l'angle de ψ ; soit b le nombre complexe affixe de l'image O′ du point O par f.

Soient M et M′ deux points quelconques de $\mathcal{E}_2$, d'affixes respectives z et z'.

On a : $(z' = F(z)) \iff (M' = f(M)) \iff \left(\overrightarrow{O'M'} = k\psi(\overrightarrow{OM})\right)$.

Il résulte des calculs faits dans la démonstration du théorème 3.2 que l'on a :

$\left(\overrightarrow{O'M'} = k\psi(\overrightarrow{OM})\right) \iff (z' = az + b)$.

On a donc : $(z' = F(z)) \iff (z' = az + b)$. ■

<u>Remarque</u> : L'addition dans $\mathbb{C}$ du nombre complexe b est la transformation F de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = z + b$.

La transformation géométrique associée à cette addition est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

De même, la multiplication dans $\mathbb{C}$ par un nombre complexe a différent de 0 et de 1 est la transformation F de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = az$.

La transformation géométrique associée à cette multiplication est donc la similitude de centre le point O (d'affixe 0), de rapport $|a|$ et d'angle Arg a.

Si $|a| = 1$, cette similitude est la rotation de centre O et d'angle Arg a.

En particulier, si $a = i$, la similitude associée à la transformation F de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = iz$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Transformation géométrique associée à $z \longmapsto a\bar{z} + b$.

3.4 THÉORÈME : Soient (a, b) un couple de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et F la transformation de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = a\bar{z} + b$. Alors la transformation géométrique f associée à F est une similitude indirecte de $\mathcal{E}_2$, de rapport $|a|$.

La transformation F de $\mathbb{C}$ est appelée **similitude indirecte du plan complexe.**

Démonstration :

Le nombre complexe a n'est pas nul ; F est donc bijective.

<u>f **est une similitude de $\mathcal{E}_2$ de rapport** $|a|$</u>. Soient M_1 et M_2 deux points quelconques de $\mathcal{E}_2$, d'affixes respectives z_1 et z_2. On a :

$$d(f(M_1), f(M_2)) = |F(z_2) - F(z_1)| = |a(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)| = |a|.|\overline{z_2 - z_1}|$$
$$= |a|.|z_2 - z_1| = |a|\, d(M_1\, M_2).$$

<u>f **est une similitude indirecte de** $\mathcal{E}_2$</u>. Posons : $\dfrac{a}{|a|} = c + id$ et $b = b' + ib''$.

On a donc $c^2 + d^2 = 1$. Soit O′ l'image de O par f ; l'affixe de O′ est donc b. Considérons maintenant deux points quelconques M et M′ de $\mathcal{E}_2$, d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a :

$$((M' = f(M)) \iff (z' = a\bar{z} + b) \iff (z' - b = |a|\,(c + id)\,\bar{z})$$
$$\iff ((x' + iy') - (b' + ib'') = |a|\,(c + id)(x - iy))$$
$$\iff \begin{pmatrix} x' - b' \\ y' - b'' \end{pmatrix} = |a| \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a : $c^2 + d^2 = 1$. La matrice $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ est donc la matrice d'une symétrie vectorielle ψ de E_2 et l'on a : $(M' = f(M)) \iff (\overrightarrow{O'M'} = |a|\,\psi(\overrightarrow{OM}))$.

Il résulte de cette équivalence que f est une application affine de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ dont l'endomorphisme associé est égal à $|a|\,\psi$. L'application f est donc une similitude indirecte de $\mathcal{E}_2$. ■

3.5 THÉORÈME : Soit f une similitude indirecte de $\mathcal{E}_2$. Alors il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que la transformation F de $\mathbb{C}$ associée à f soit définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = a\bar{z} + b$.

Démonstration :

Soient k le rapport de f et ψ la symétrie vectorielle de E_2 telle que $k\psi$ soit l'endomorphisme associé à f. Soit $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$, avec $c^2 + d^2 = 1$, la matrice de ψ dans toute base orthonormée directe de E_2 ; posons $a = k(c + id)$ et appelons b le nombre complexe affixe de l'image O′ du point O par f.

Soient M et M′ deux points quelconques de $\mathcal{E}_2$, d'affixes respectives z et z'.

On a : $(z' = F(z)) \iff (M' = f(M)) \iff (\overrightarrow{O'M'} = k\,\psi(\overrightarrow{OM}))$.

Il résulte des calculs faits dans la démonstration du théorème 3.4 que l'on a :

$(\overrightarrow{O'M'} = k\psi(\overrightarrow{OM})) \iff (z' = a\bar{z} + b)$.

On a donc : $(z' = F(z)) \iff (z' = a\bar{z} + b)$. ■

Compléments.

3.6 Il résulte du théorème 2.2 que la nature de la similitude indirecte f dépend du nombre des points invariants par f. Il est immédiat que, si b est nul, le point O est invariant. Nous allons donc étudier successivement les deux cas suivants : $b = 0$ et $b \neq 0$.

$\boxed{b = 0}$

On a alors : $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = a\bar{z}$.

• Si $|a|$ est égal à 1, alors f est un antidéplacement de $\mathcal{E}_2$ qui admet au moins un point invariant O ; l'application f est donc une réflexion affine par rapport à une droite D passant par O.

• Si $|a|$ n'est pas égal à 1, alors f admet le point O comme unique point invariant ; l'application f est donc la composée d'une réflexion affine par rapport à une droite D passant par O et de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.

• Cherchons, dans les deux cas, un vecteur directeur $\vec{u}$ de D. Soit ψ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la direction $\vec{D}$ de D ; le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur non nul invariant par ψ et, d'autre part, l'endomorphisme φ associé à f est égal à $|a|\psi$. On a donc : $\varphi(\vec{u}) = |a|\,\psi(\vec{u}) = |a|\,\vec{u}$.

Soient M le point de $\mathcal{E}_2$ défini par : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et z le nombre complexe, affixe de M et de $\vec{u}$.

On a alors : $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O\,f(M)} = |a|\,\overrightarrow{OM}$ ce qui équivaut à : $F(z) = a\bar{z} = |a|\,z$.

Cherchons donc les nombres complexes z non nuls tels que l'on ait : $a\bar{z} = |a|\,z$.

Le nombre complexe a n'est pas nul ;

on a donc : $(a\bar{z} = |a|\,z)$

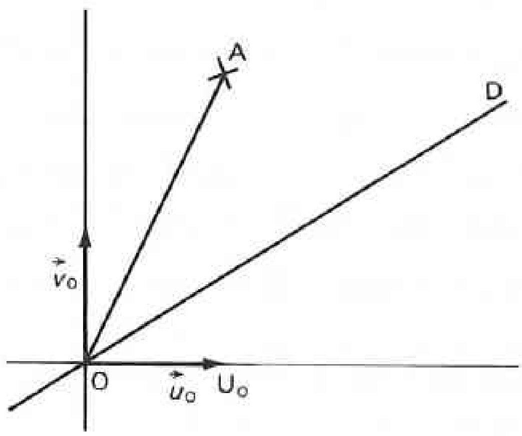
$$\iff \left(\frac{a}{|a|}\bar{z} = z\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} |\bar{z}| = |z| \\ \arg \dfrac{a}{|a|} + \arg \bar{z} = \arg z \ (2\pi) \end{cases}\right)$$

$$\iff ((\arg a - \arg z = \arg z \ (2\pi))$$

$$\iff (2 \arg z = \arg a \ (2\pi))$$

$$\iff \left(\arg z = \frac{1}{2} \arg a \ (\pi)\right).$$



Le vecteur $\vec{u}$ est donc un vecteur d'affixe z non nul tel que l'on ait :

$\arg z = \dfrac{1}{2} \arg a \ (\pi)$.

<u>Remarque</u> : Soit A le point d'affixe a. On a : $\arg z = \text{angle}(\overrightarrow{OU_0}, \overrightarrow{OM})$ et $\arg a = \text{angle}(\overrightarrow{OU_0}, \overrightarrow{OA})$. La droite vectorielle $\vec{D}$, engendrée par $\vec{u}$, est donc l'une des bissectrices des droites vectorielles engendrées par $\overrightarrow{OU_0}$ et $\overrightarrow{OA}$.

$\boxed{b \neq 0}$

On a alors : $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = a\bar{z} + b$.

Remarquons tout d'abord que F est la composée de la transformation G de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $G(z) = a\bar{z}$ et de la transformation H de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $H(z) = z + b$. La transformation géométrique f associée à F est donc la composée de la transformation géométrique g associée à G et de la transformation géométrique h associée à H.

Nous savons que h est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b. Il en résulte que l'endomorphisme φ associé à f est égal à l'endomorphisme associé à g.

Soient $\vec{u}$ un vecteur d'affixe z non nulle tel que l'on ait : $\arg z = \frac{1}{2} \arg a \quad (\pi)$ et ψ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par $\vec{u}$. Il résulte de l'étude faite dans le cas où b est nul que l'on a : $\varphi = |a| \psi$.
Cherchons si f admet des points invariants.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$, d'affixe z. On a :

$$(M = f(M)) \iff (z = a\bar{z} + b) \iff \left(\begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ \bar{z} = \bar{a}z + \bar{b} \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ z = a(\bar{a}z + \bar{b}) + b \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} z = a\bar{z} + b & (1) \\ z(1 - a\bar{a}) = a\bar{b} + b & (2) \end{cases}\right)$$

On a : $a\bar{a} = |a|^2$. Distinguons alors deux cas : $|a| \neq 1$ et $|a| = 1$.

<u>**Si $|a|$ n'est pas égal à 1,**</u> l'équation (2) a une solution unique : $z_0 = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - a\bar{a}}$.

Calculons $a\bar{z}_0 + b$; on a :

$$a\bar{z}_0 + b = a\,\frac{\bar{a}b + \bar{b}}{1 - \bar{a}a} + b = \frac{a\bar{a}b + a\bar{b} + b - a\bar{a}b}{1 - a\bar{a}} = z_0.$$

Le système formé des équations (1) et (2) a donc une solution unique et, par suite, f admet comme unique point invariant le point K d'affixe $\dfrac{a\bar{b} + b}{1 - a\bar{a}}$. L'application f est donc la composée de l'homothétie de centre K et de rapport $|a|$ et de la réflexion affine par rapport à la droite D passant par K et de direction $\vec{D}$.

<u>**Si $|a|$ est égal à 1,**</u> alors f est un antidéplacement de $\mathcal{E}_2$.

- Si $a\bar{b} + b$ n'est pas nul, l'équation (2) n'a pas de solution et, par suite, f n'admet pas de point invariant. L'application f est donc la composée d'une translation de vecteur non nul appartenant à $\vec{D}$ et de la réflexion affine par rapport à la droite D passant par le milieu du bipoint $(O, f(O))$ et de direction $\vec{D}$.

- Si $a\bar{b} + b$ est nul, tout élément de $\mathbb{C}$ est solution de (2). Cherchons donc directement un point invariant K par f.

L'image de O par f est le point O', distinct de O, d'affixe b ; il résulte de l'égalité $a\bar{b} + b = 0$ que l'image par f de O' est le point O ; le milieu K de (O, O') a pour affixe $\frac{b}{2}$ et on a : $a\,\frac{\bar{b}}{2} + b = \left(a\,\frac{\bar{b}}{2} + \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$. Le point K est donc invariant par f.
L'application f est donc la réflexion affine par rapport à la droite D passant par K et perpendiculaire à (OO'). Il résulte de la remarque du paragraphe 3.3 que le vecteur d'affixe ib est orthogonal au vecteur d'affixe b, c'est-à-dire au vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
La droite D a donc pour vecteur directeur le vecteur d'affixe ib.

Nous résumons l'étude précédente par :

> Soient (a, b) un couple de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et f la transformation géométrique associée à la transformation F de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C},\quad F(z) = a\bar{z} + b$.
> Soient O' le point d'affixe b et K le milieu de (O, O') ; soient $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}_1$ d'affixe égal à $\left[1, \frac{1}{2}\arg a\right]$ et D la droite passant par K de direction $\vec{D}$.
> Si $|a|$ n'est pas égal à 1, alors f est la composée de la réflexion affine par rapport à D et de l'homothétie de centre K et de rapport $|a|$.
> Si $|a|$ est égal à 1 et si $a\bar{b} + b$ n'est pas nul, alors f est la composée de la réflexion affine par rapport à D et d'une translation de vecteur appartenant à $\vec{D}$.
> Si $|a|$ est égal à 1 et si $a\bar{b} + b$ est nul, alors f est la réflexion affine par rapport à D.

Exemple.

Cherchons la nature de la similitude indirecte du plan complexe définie par : $z' = (1 + i)\bar{z} + i$.

On a : $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}\quad (2\pi)$.

Il y a donc un unique point invariant K d'affixe : $z_0 = \dfrac{(1 + i)\bar{i} + i}{1 - (\sqrt{2})^2} = -1$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $\left[1, \frac{\pi}{8}\right]$, c'est-à-dire de cordonnées $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{8} \\ \sin\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$.

L'application f est la composée de l'homothétie de centre K et de rapport $\sqrt{2}$ et de la réflexion affine par rapport à la droite D passant par K et de direction la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

Cette droite D est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{Kf(M)} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{KM}$. C'est l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que l'on ait :

$(1 + i)\bar{z} + i - z_0 = \sqrt{2}(z - z_0)\qquad (1)$.

On a : $(1) \Longleftrightarrow \left((1 + i)(x - iy) + i + 1 = \sqrt{2}(x + iy + 1)\right)$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x + y + 1 = \sqrt{2}(x + 1) \\ x - y + 1 = \sqrt{2}\,y \end{cases}\right).$$

Les deux équations de ce système sont équivalentes.

La droite D a donc pour équation dans le repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$:

$x - (1 + \sqrt{2})\,y + 1 = 0$.

EXERCICES

1 Soient P un plan euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, par r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

Déterminer le point C, image du point O par l'application $t \circ r \circ h$. Donner les éléments caractéristiques de cette application ; on pourra utiliser les nombres complexes ou toute autre méthode.

2 1° Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est égale à $\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de φ et l'image de φ.

2° Soient P un plan affine euclidien orienté associé à $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct. Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, associe le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ définies par :

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 1 \\ y' = x + y\sqrt{3}. \end{cases}$$

Démontrer que f est une similitude dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

3 Soit P un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel $\vec{P}$.
Soient (A, B, C) et (A′, B′, C′) deux triangles de P tels que les droites (AB) et (A′B′), (BC) et (B′C′), (CA) et (C′A′) soient parallèles.
Démontrer qu'il existe une similitude directe f de P telle que l'on ait :
$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.
Les triangles (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont dits **directement semblables.**

4 Soient P un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel $\vec{P}$ et (A, B, C) un triangle de P. On désigne par A′ le milieu de (B, C), par B′ celui de (C, A) et par C′ celui de (A, B).
Démontrer que les triangles (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont directement semblables ; on donnera le centre, le rapport et l'angle de la similitude.

5 Soit P un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.
1° Soient (A, B, C) un triangle de P et a un réel strictement positif. Construire un triangle (A′, B′, C′), directement semblable à (A, B, C) et tel que l'on ait : $B'C' = a$.
2° Soit s une similitude directe de P. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que le segment [M, s(M)] ait une longueur donnée.

6 Soit s une similitude directe d'un plan affine euclidien P associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.
1° Si M est un point quelconque de P, on désigne par M′ le milieu du bipoint (M, s(M)). Que peut-on dire de l'application s' qui, à tout point M de P, associe le point M′ ?

2° Soit λ un réel. Si M est un point quelconque de P, on désigne par M_λ le point défini par : $\overrightarrow{MM_\lambda} = \lambda \overrightarrow{Ms(M)}$.
Que peut-on dire de l'application s_λ qui à tout point M de P, associe le point M_λ ?

7 Soit P un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.
Trouver les similitudes directes et les similitudes indirectes de P qui sont involutives.

8 Soient s et s' deux similitudes directes d'un plan affine euclidien P associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.
1° Déterminer l'application : $s' \circ s \circ s'^{-1} \circ s^{-1}$.
2° En déduire qu'il existe une translation et une seule t telle que : $s' \circ s = t \circ (s \circ s')$.

9 Soit P un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.
Déterminer l'application composée de deux similitudes indirectes de même centre.

10 Soit P un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel $\vec{P}$.
Soient A, B, A', B' quatre points de P tels que l'on ait : $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Déterminer toutes les similitudes f de P telles que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
On donnera pour chaque similitude les éléments de la forme réduite en fonction de A, A', B et B'.

11 Soient P un plan affine euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P. Soit A le point de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.
A tout point M de P, on associe le point M' de la manière suivante : on désigne par M_1 l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π, puis on désigne par M' l'image de M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport 3.
Soit f l'application de P dans P définie par : $f : \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M \longmapsto M'. \end{array}$
1° Quelle est la nature de l'application f ? Quels éléments de sa forme réduite peut-on donner ?
2° Soit z (resp. z') l'affixe du point M (resp. M'). Exprimer z' en fonction de z. Donner la forme réduite de f.

12 Soit s_0 une similitude directe d'un plan affine réel euclidien P.
Déterminer toutes les similitudes directes s de P telles que : $s \circ s_0 = s_0 \circ s$.

/ **13** Soient P un plan affine euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P. Soient a et b deux nombres complexes et f l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = az + b$.
Déterminer a et b pour que f soit la similitude d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π, de rapport 2 et de centre le point de coordonnées $\begin{pmatrix}+2\\-1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.
Exprimer alors les coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ de M' dans $\mathcal{R}$ en fonction de celles $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de M dans $\mathcal{R}$.

14 Soient P un plan affine réel euclidien et $\mathcal{S}_+$ l'ensemble des similitudes directes de P. Démontrer que la seule similitude σ de $\mathcal{S}_+$ pour laquelle on a :
$\forall s \in \mathcal{S}_+, \quad \sigma \circ s = s \circ \sigma$ est l'identité de P.

15 Soient M, P, Q trois points du plan complexe d'affixes respectives $i, 1, 2+i$. Déterminer la similitude f telle que l'on ait : $f(\mathrm{M}) = \mathrm{P}$ et $f(\mathrm{O}) = \mathrm{Q}$. (On donnera le centre, le rapport et l'angle de f.)

16 Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
A tout point M de P d'affixe z, on associe le point M_1, image de M dans la similitude de centre O, de rapport $\frac{4}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π. On désigne par M_2 le symétrique de M_1 par rapport à M. Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2.
1° Exprimer les nombres complexes z_1 et z_2 en fonction de z.
2° Calculer le produit $z_1 z_2$. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que le produit $z_1 z_2$ soit un nombre réel.

17 Étudier la transformation f du plan complexe définie par :

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z + 1 + i.$$

On donnera la forme réduite de cette transformation.

18 Même question que pour le n° 17 avec f définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = 3z + 2i$.

19 Soit A le point d'affixe i dans le plan complexe. Soit f l'application du plan complexe dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z, associe le point M d'affixe Z définie par : $\mathrm{Z} = iz$.
1° Déterminer les éléments géométriques de f.
2° Déterminer l'ensemble des points m tels que les trois points m, M, A soient alignés.

20 Dans le plan complexe, à tout point m d'affixe z, on associe le point m' d'affixe z' définie par : $z' = 2iz + 1 - i$.
Déterminer les éléments de la transformation du plan complexe qui au point m associe le point m'.

21 Dans le plan complexe, soient m un point d'affixe z et m' un point d'affixe z', tels que l'on ait : $z + z' = 4$.
1° Démontrer que le point m' est l'image de m par la symétrie s de centre le point I d'affixe 2.

2° Soit r la rotation de centre O d'affixe 0, et d'angle $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

Démontrer que $r \circ s$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

22 Soient, dans le plan complexe P, deux points M et M′ d'affixes respectives z et z' tels que l'on ait : $z' = (1+i)z + 1$.
1° Calculer le module et un argument de $1 + i$.
2° Déterminer les éléments géométriques de la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe $(1+i)z + 1$.
3° Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ aient la même norme.

23 Dans le plan complexe, soit f la similitude qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 - i)z + 2i$.

1° Déterminer le rapport, l'angle et le centre de f.

2° Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, les formes algébriques des nombres complexes z et z'. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3° Quelle est l'image par f de la droite d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

4° Quelle est l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre le point d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$?

24 On considère, dans le plan complexe, l'application f qui, à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 + i)z - i$.

1° Déterminer les éléments géométriques de f ; on appellera A son centre.

2° On suppose que M est distinct de A. Calculer une détermination en radians de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$

3° Déterminer l'ensemble des points M' images des points du cercle de centre O et de rayon 1.

25 Soit E un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A tout point M de E de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on associe son affixe z égale à $x + iy$.

Soit f l'application de E dans E qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 - i)z + 2 - i$.

1° Déterminer les éléments géométriques de f.

2° Quelle est l'image par f du cercle de centre O et de rayon 2 ?

3° Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z de E tels que l'on ait :
$|(1 - i)z + 2 - i| = 2$.
(On pourra donner deux méthodes.)

26 On considère dans le plan complexe la transformation f qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = 3iz - 9 - 3i$.

1° Déterminer les éléments géométriques de cette transformation.

2° Déterminer les images par f

- du cercle de centre le point d'affixe $1 - 3i$ et de rayon 1,
- de la droite d'équation : $x = 1$.

27 On considère la transformation f du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 - i\sqrt{3})z - 2\sqrt{3}$.
Démontrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre ω, l'angle et le rapport.

28 Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point m d'affixe z, associe le point M d'affixe Z définie par : $Z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.
Déterminer les éléments géométriques de la similitude directe f.

29 Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = 2(1 + i\sqrt{3})z + 3$.

1° Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments géométriques.

2° Soit D la droite d'équation : $x - y\sqrt{3} = 0$. Quelle est l'équation de l'image $f(D)$ de la droite D ?

3° Quelle est l'image par f du cercle de centre le point d'affixe $2i$ et de rayon 2 ?

30 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe z, associe le nombre complexe Z défini par : $Z = (1 - i\sqrt{3})\, z + \sqrt{3}\,(1 - i)$.

1° Déterminer les nombres complexes ω tels que l'on ait : $f(\omega) = \omega$.

2° Soient m, M et Ω les points du plan complexe d'affixes respectives z, Z et ω. Quelle est la nature de la transformation du plan complexe qui, à tout point m, associe le point M ?

3° Démontrer, algébriquement ou géométriquement, que le triangle (Ω, m, M) est rectangle.

4° Soit n un entier naturel non nul. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{Z - \omega}{z - \omega}\right)^n$.

31 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto (i - \sqrt{3})\, z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1).$$

1° Caractériser géométriquement la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe $f(z)$.

2° Soient x et y (resp. x' et y') les parties réelle et imaginaire de z (resp. $f(z)$). Calculer x' et y' en fonction de x et y.

3° Déterminer l'image dans le plan complexe de la droite passant par le point A d'affixe $1 - 2\sqrt{3}$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ d'affixe $\sqrt{3} + i$.

32 Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 2 et les transformations suivantes :

h_1 homothétie de centre A et de rapport 2.

h_2 homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

r rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.

1° Quelle est la nature de la transformation $h_2 \circ r \circ h_1$?

2° Quelle est la nature de la transformation $h_2 \circ r \circ r \circ h_1$?

(On donnera pour chacune d'elles ses éléments géométriques.)

33 1° Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système :

$$\begin{cases} ix - y = 1 - i \\ -x + iy = -1. \end{cases}$$

2° Soit (x, y) une solution du système précédent. Déterminer, dans le plan complexe, les rotations d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforment le point M d'affixe x en le point P d'affixe y.

34 Soit a un nombre complexe.

1° Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$(1 + i)\, z^2 - 2i(a + 1)\, z + (i - 1)(a^2 + 1) = 0$.

2° Trouver une relation indépendante de a entre les solutions z_1 et z_2 de cette équation.

3° Caractériser la transformation du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1, associe le point M_2 d'affixe z_2.

35 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.

Soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x, y)$ de ce plan.

1° Déterminer l'ensemble des points M tels que : $|(1 + i)\, z - 2i| = 2$.

2° Étudier la transformation de P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe $z' = (1 + i)\, z - 2i$. Trouver le point égal à son transformé.

36 Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle j le nombre complexe $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.
Soient A, B, C, A′, B′, C′ six points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c, a', b', c'.
On considère les nombres complexes u, v, u', v' définis par :
$u = a + bj + cj^2 \qquad u' = a' + b'j + c'j^2$
$v = a + bj^2 + cj \qquad v' = a' + b'j^2 + c'j$
1° Démontrer que u reste invariant quand on change l'origine du repère, sans changer la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2° Démontrer qu'il existe une similitude directe f telle que l'on ait :
$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, si et seulement si l'on a : $uv' - u'v = 0$.

37 Soient α, β, λ trois réels. On considère dans le plan complexe la transformation f_λ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par :
$z' = (\alpha + i\beta)z + (1 - \lambda i)$.
1° Déterminer α et β de façon que f_λ soit une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π.
2° On donne à α et β les valeurs précédemment trouvées.
Déterminer, lorsque λ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, l'ensemble des centres des similitudes f_λ.
3° Déterminer λ de façon que l'image par f_λ de l'axe imaginaire soit l'axe réel.
4° Soit Ω le centre de la similitude déterminée au 3°. Soient deux points distincts A et B de l'axe imaginaire et A′ et B′ leurs images par la similitude. Montrer géométriquement que les cercles (O, A, A′) et (O, B, B′) sont sécants en Ω.

38 Soient k un réel strictement positif et T_k la transformation du plan complexe qui, à tout point m d'affixe z, associe le point M d'affixe Z définie par : $Z = kiz + 1 + k^2$.
1° Quelle est la nature de la transformation T_k ? Donner ses éléments caractéristiques.
2° Soit ω_k le centre de T_k. Déterminer l'ensemble des points ω_k, lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$.
3° Soient k_1 et k_2 deux réels strictement positifs.
Démontrer que l'on a l'équivalence suivante :
$(T_{k_1} \circ T_{k_2} = T_{k_2} \circ T_{k_1}) \Longleftrightarrow (k_1 = k_2)$.
Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?

39 et 40 Reprendre les exercices n° 9 et n° 10 du chapitre 2 du tome 1, en utilisant les similitudes.

41 Déterminer la forme réduite de la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z' = i\bar{z} + 1 - i$.

42 Même question que pour le n° 41, avec z' définie par :
$z' = (3 + 4i)\bar{z} + 1 - 2i$.

43 Même question que pour le n° 41, avec z' définie par :
$z' = (-\sqrt{3} + i)\bar{z} + 2 - i$.

Problèmes.

44 On considère un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient a un nombre réel et k un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

1° On désigne par $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre le point A, d'affixe a et de rapport k. Soit M un point du plan d'affixe z. Soit z_1 l'affixe du point M_1 image de M par $\mathcal{H}$. Calculer z_1 en fonction de a, k et z.

2° Soit θ un angle de vecteurs. On désigne par $\mathcal{R}$ la rotation de centre O et d'angle θ et par u le nombre complexe de module 1 et d'Argument θ.

On pose : $\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}$ et $M' = \mathcal{T}(M)$. Soit z' l'affixe de M'.

Démontrer que l'on a : $z' = kuz + au(1 - k)$.

Indiquer la nature de la transformation $\mathcal{T}$.

Déterminer l'affixe du point invariant K par $\mathcal{T}$, s'il existe.

3° On suppose que l'on a : $u = i$ et $a = 5$.

Calculer les coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ du point K dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de k.

Déterminer l'ensemble E défini par : $E = \{K \in P \mid \exists k \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{T}(K) = K\}$.

Déterminer les points K dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

4° On suppose maintenant : $u = i$, $a = 5$, $k = 3$.

Calculer les coordonnées du point M' en fonction de celles du point M.

Soit B le point d'affixe $3 + 2i$. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que les trois points B, M, M' soient alignés.

On donnera une solution analytique et une solution géométrique.

45 L'étude proposée concerne l'ensemble $\mathcal{S}$ constitué, d'une part des similitudes planes directes, de centre O donné, de rapport k positif et d'angle θ, et d'autre part, de la transformation ponctuelle qui, à tout point M du plan, associe le point O, considérée comme une similitude singulière de centre O et de rapport nul.

Soient $S_1(O, k_1, \theta_1)$ et $S_2(O, k_2, \theta_2)$ deux éléments de $\mathcal{S}$. On définit une transformation ponctuelle du plan, notée $T = S_2 \star S_1$ de la manière suivante : soient M un point quelconque du plan, M_1 et M_2 les images de M par les similitudes S_1 et S_2, et P le point défini par : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

T est l'application du plan dans lui-même qui, au point M, associe le point P.

1° Pour se familiariser avec la transformation T, construire le point P, transformé d'un point M quelconque du plan, lorsqu'on donne $S_1\left(O, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ et $S_2\left(O, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2\pi}{3}\right)$

2° Soit a le nombre complexe de module k et d'argument θ. On dit que a est l'**opérateur complexe** de la similitude S.

a) Calculer l'affixe Z du point P en fonction de l'affixe z du point M et des opérateurs a_1 et a_2 des similitudes S_1 et S_2. En déduire que T est une similitude de $\mathcal{S}$ dont on calculera le rapport et l'angle en fonction de k_1, k_2, θ_1 et θ_2.

b) Démontrer que l'application f qui, à toute similitude S de $\mathcal{S}$, fait correspondre son opérateur complexe a, est un isomorphisme de $(\mathcal{S}, \star)$ sur $(\mathbb{C}, +)$.

3° Démontrer que $\mathcal{S}$ muni de la loi $\star$ est un groupe commutatif. Quel en est l'élément neutre? Préciser le rapport et l'angle de la similitude S', symétrique de $S(O, k, \theta)$ pour la loi $\star$.

4° Soient S_1 et S_2 deux éléments de $\mathcal{S}$.

Quel est l'opérateur complexe de la similitude $S_2 \circ S_1$?

Démontrer que $(\mathcal{S}, \star, \circ)$ est un corps isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

(D'après Baccalauréat 1970.)

46 1° Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^2 + 2(2+i)z + 3 + 4i = 0$.

2° Soit z un nombre complexe. On considère, dans le corps $\mathbb{C}$, l'équation en U :
$$U^2 - 2(z+4)U + 2z^2 + 2(6+i)z + 19 + 4i = 0. \qquad \text{(E)}$$
a) Déterminer z pour que l'équation (E) ait une seule solution dans $\mathbb{C}$.
b) Dans le cas général, déterminer les deux solutions de (E) ; on appellera ces deux solutions U' et U''.
c) Déterminer l'ensemble des nombres z tels que z soit lui-même une des solutions de l'équation (E).

3° Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient z et U deux nombres complexes, m et M les points images respectifs dans P de z et U. On dira que m et M vérifient la relation $\mathcal{R}$ si et seulement si U est une solution de l'équation (E) correspondant à la valeur z. On écrira : $m\ \mathcal{R}\ M$.
Démontrer que l'on a : $(m\ \mathcal{R}\ M) \Longleftrightarrow (M = \mathcal{S}'(m) \text{ ou } M = \mathcal{S}''(m))$
avec $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ transformations du plan complexe, définies respectivement par :
$U' = z(1+i) + 3 + 2i$ et $U'' = z(1-i) + 5 - 2i$.

4° *a*) Soit m un point de P. On pose : $M' = \mathcal{S}'(m)$ et $M'' = \mathcal{S}''(m)$.
Quelle est la transformation $\mathcal{S}$ qui transforme M′ en M″ ? Caractériser géométriquement $\mathcal{S}$.
b) Soit K le milieu de (M′, M″). On considère l'application $\mathcal{T}$ de P dans P qui, à tout point m, fait correspondre le point K. Démontrer que $\mathcal{T}$ est une translation.
Soit m un point de P. Donner une construction simple de l'ensemble des points M de P tels que l'on ait : $m\ \mathcal{R}\ M$.
c) Déterminer l'ensemble des points m tels que les points m, M′ et M″ soient alignés.
Quel est alors l'ensemble des points M′ et l'ensemble des points M″ ?

47 Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A tout nombre complexe z, on associe les nombres complexes Z_1 et Z_2 définis par :
$Z_1 = (\sqrt{3} + i)z$ et $Z_2 = (1 - i\sqrt{3})z + 3$.
On désigne par T_1 (resp. T_2) l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M_1 (resp. M_2) d'affixe Z_1 (resp. Z_2).

1° *a*) Quelle est la nature de chacune des applications T_1 et T_2 ? Donner les éléments géométriques de ces applications.
b) Quelle est la nature de la transformation $T_2 \circ T_1$?
En donner les éléments géométriques.

2° *a*) Démontrer qu'il existe un point K et un seul tel que l'on ait : $T_1(K) = T_2(K)$.
On désigne par L l'image de K par T_1. Calculer les affixes des points K et L.
b) Démontrer que le point L est invariant par chacune des applications $T_2 \circ T_1^{-1}$ et $T_1 \circ T_2^{-1}$. Quelle est la nature de chacune de ces applications ? En déduire une construction géométrique du point L.

3° Soient a, a_1, a_2 trois nombres réels tels que l'on ait : $a + a_1 + a_2 = 1$.
Soit G le barycentre des points M, M_1, M_2 affectés des coefficients a, a_1, a_2.
Soit $T(a, a_1, a_2)$ l'application de P dans P qui, à tout point M, associe le point G défini comme ci-dessus. On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications $T(a, a_1, a_2)$.
a) Déterminer a, a_1, a_2 pour que l'on ait : $\forall M \in P,\ T(a, a_1, a_2)(M) = M$.
b) Déterminer a, a_1, a_2 pour que $T(a, a_1, a_2)$ soit la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.

48 Soit λ un nombre réel.
On définit l'application f_λ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

$$f_\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto (1 + \lambda i)\, z - \lambda i.$$

1° Quelle est la nature de la transformation T_λ du plan complexe P qui, à tout point m d'affixe z, associe le point M d'affixe $f_\lambda(z)$?

2° Montrer qu'il existe un unique élément z_0 de $\mathbb{C}$ tel que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_\lambda(z_0) = z_0$.
Soit m_0 le point d'affixe z_0.

3° Calculer $\dfrac{f_\lambda(z) - z_0}{z - z_0}$ et en déduire le produit scalaire $\overrightarrow{m_0 m} \cdot \overrightarrow{m\mathrm{M}}$.

4° Soit m un point du plan complexe.
Déterminer l'ensemble E défini par : $\mathrm{E} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{P} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{M} = T_\lambda(m)\}$.

5° Soit M un point de P.
Déterminer l'ensemble F défini par : $\mathrm{F} = \{m \in \mathrm{P} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{M} = T_\lambda(m)\}$.

6° Soit a un réel strictement positif différent de 1. Soient A et A' les points du plan complexe d'affixes respectives a et $-a$.
Déterminer l'ensemble G défini par : $\mathrm{G} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{P} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{M} = T_\lambda(\mathrm{O})\}$.
Déterminer de même les ensembles H et H' définis par :
$\mathrm{H} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{P} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{M} = T_\lambda(\mathrm{A})\}$
$\mathrm{H}' = \{\mathrm{M} \in \mathrm{P} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{M} = T_\lambda(\mathrm{A}')\}$.

11. Coniques

Dans ce chapitre, P désigne un plan euclidien associé à un plan vectoriel réel $\vec{P}$.

1. Étude des courbes d'équations : $AX^2 + BY^2 + 2CX + 2DY + E = 0$.

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P et A, B, C, D, E cinq réels. Nous supposons les réels A et B non tous les deux nuls, c'est-à-dire tels que : $|A| + |B| \neq 0$.
Nous allons étudier la courbe Γ dont l'équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $AX^2 + BY^2 + 2CX + 2DY + E = 0$ (1),
c'est-à-dire l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ satisfont à l'égalité (1). La courbe Γ est appelée **conique.**
Distinguons les deux cas suivants : $AB = 0$ et $AB \neq 0$.

Premier cas : $AB = 0$.

1.1 Supposons, par exemple, que l'on ait : $B = 0$; il résulte de la relation : $|A| + |B| \neq 0$ que A n'est pas nul.

On a alors : (1) $\Longleftrightarrow \left(X^2 + 2\frac{C}{A}X + 2\frac{D}{A}Y + \frac{E}{A} = 0\right)$.

Il n'y a que deux cas possibles : $D \neq 0$ ou $D = 0$.

$\boxed{D \neq 0}$

On a : (1) $\Longleftrightarrow \left(Y = -\frac{A}{2D}X^2 - \frac{C}{D}X - \frac{E}{2D}\right)$.

Posons : $a = -\frac{A}{2D}$, $b = -\frac{C}{D}$, $c = -\frac{E}{2D}$.

La courbe Γ est donc la courbe d'équation : $Y = aX^2 + bX + c$, avec $a \neq 0$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Il résulte de l'étude faite en classe de Première que cette courbe est **une parabole**

de sommet le point S de coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{pmatrix}$ et d'axe de symétrie la droite

d'équation : $x = -\dfrac{b}{2a}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\boxed{D = 0}$

On a : (1) $\iff \left(X^2 + 2\dfrac{C}{A}X + \dfrac{E}{A} = 0\right)$

$$\iff \left(\left(X + \frac{C}{A}\right)^2 - \frac{C^2}{A^2} + \frac{E}{A} = 0\right)$$

$$\iff \left(\left(X + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{C^2 - EA}{A^2}\right).$$

Pour tout réel X, le réel $\left(X + \dfrac{C}{A}\right)^2$ est positif ou nul.

Distinguons les deux cas suivants : $C^2 - EA < 0$ et $C^2 - EA \geqslant 0$.

- $C^2 - EA < 0$.

Il est immédiat que l'on a : $\Gamma = \varnothing$.

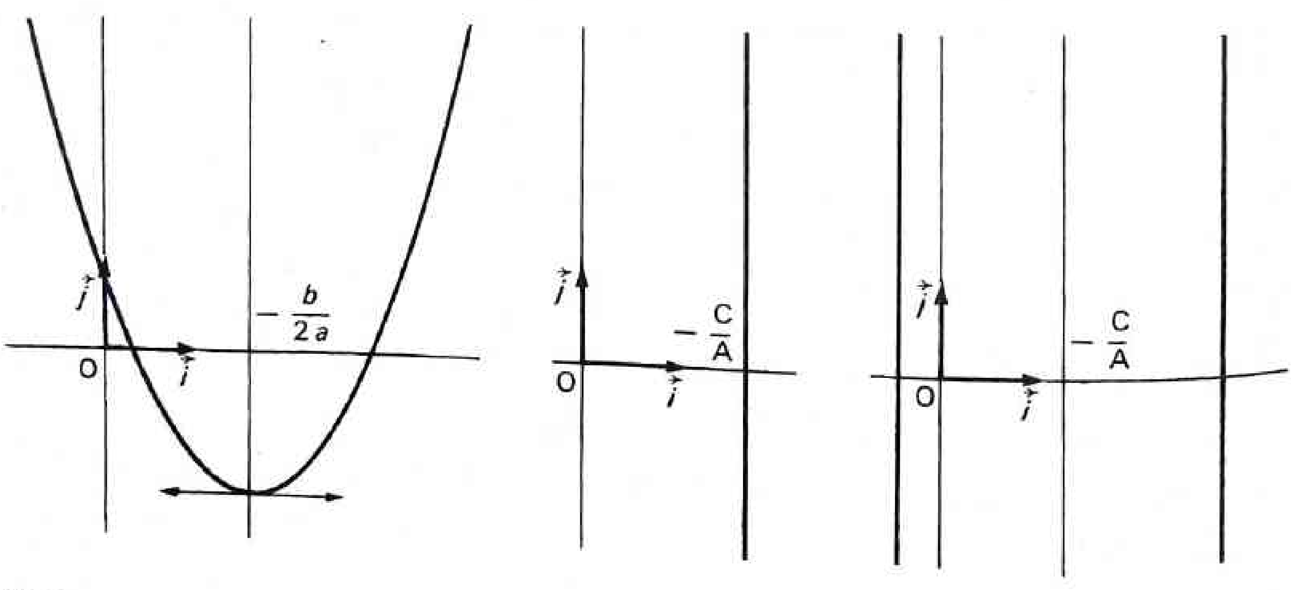
- $C^2 - EA \geqslant 0$.

Posons : $K = \sqrt{\dfrac{C^2 - EA}{A^2}}$. On a alors :

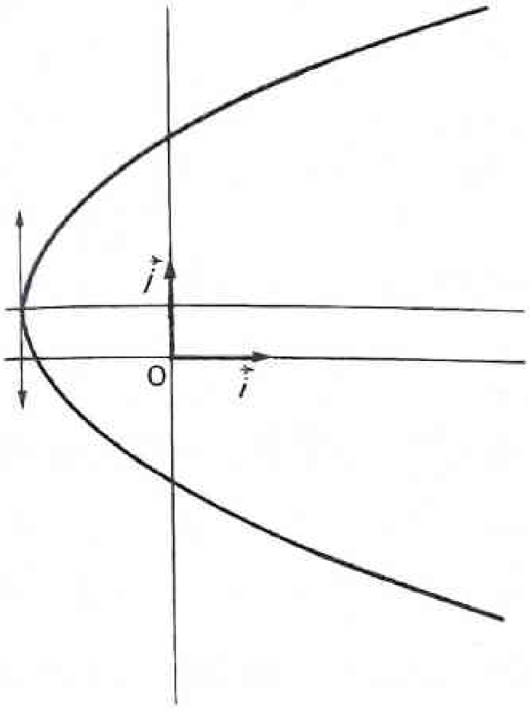
(1) $\iff \left(X = -\dfrac{C}{A} + K \text{ ou } X = -\dfrac{C}{A} - K\right)$.

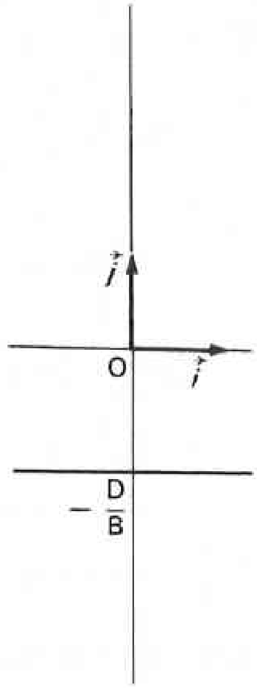
Γ est donc la **réunion de deux droites parallèles** d'équations respectives : $X = -\dfrac{C}{A} + K$ et $X = -\dfrac{C}{A} - K$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

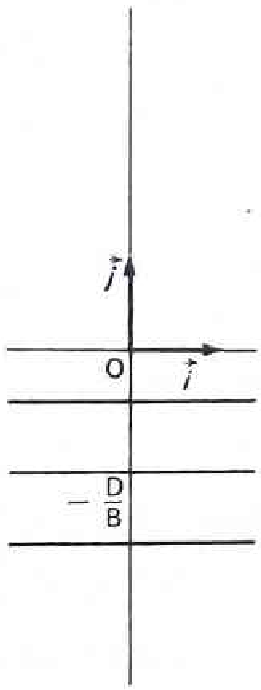
Le lecteur remarquera que ces droites sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $X = -\dfrac{C}{A}$, qu'elles sont égales si l'on a : $C^2 - EA = 0$ et distinctes si l'on a : $C^2 - EA > 0$.



Remarque : Dans le cas où A est nul, on obtient des résultats analogues en intervertissant X et Y.







Exemple.

Cherchons la courbe Γ d'équation : $2Y^2 + X + 6Y - 5 = 0$.
La courbe Γ est la parabole d'équation : $X = -2Y^2 - 6Y + 5$.

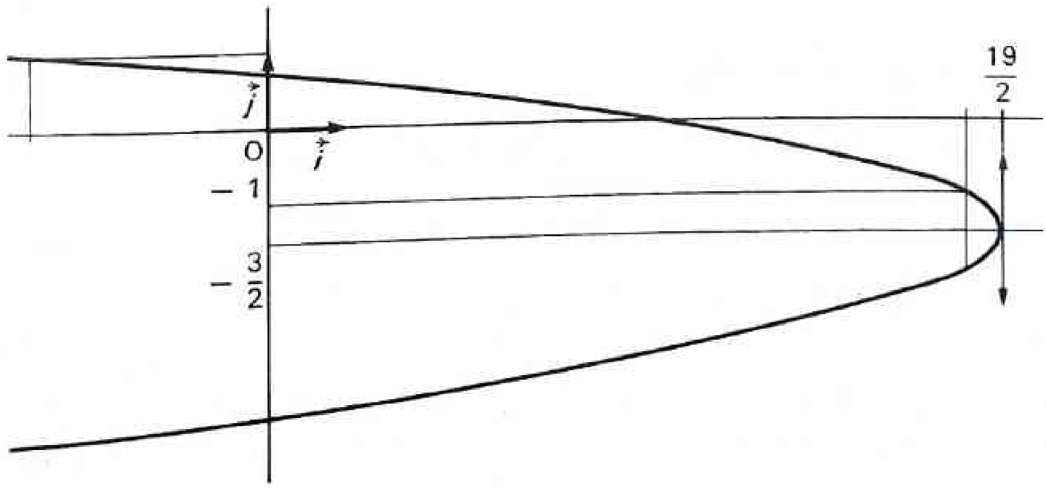
On a : $-2Y^2 - 6Y + 5 = -2\left(Y^2 + 3Y - \frac{5}{2}\right) = -2\left(\left(Y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{5}{2}\right)$

$$= -2\left(\left(Y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}\right).$$

Le sommet S a pour ordonnée $-\frac{3}{2}$ et pour abscisse $\frac{19}{2}$.

L'axe de symétrie est la droite d'équation : $Y = -\frac{3}{2}$.

La courbe passe par les points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}9\\-1\end{pmatrix}$.



Deuxième cas : $AB \neq 0$.

1.2 On a alors : $A \neq 0$ et $B \neq 0$, et par suite :

$$(1) \iff \left(A\left(X^2 + 2\frac{C}{A}X\right) + B\left(Y^2 + 2\frac{D}{B}Y\right) + E = 0\right)$$

$$\iff \left(A\left(X + \frac{C}{A}\right)^2 + B\left(Y + \frac{D}{B}\right)^2 - \frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B} + E = 0\right).$$

Posons $K = -\frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B} + E$; appelons Ω le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{C}{A} \\ -\frac{D}{B} \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et considérons le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Si M est un point quelconque de P de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans les repères respectifs $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, il résulte de l'égalité : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, que l'on a : $X = x - \frac{C}{A}$ et $Y = y - \frac{D}{B}$, ce qui équivaut à : $x = X + \frac{C}{A}$ et $y = Y + \frac{D}{B}$.

La courbe Γ est donc l'ensemble des points M dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ satisfont à l'égalité : $Ax^2 + By^2 + K = 0$.

Γ est donc la courbe d'équation : $Ax^2 + By^2 + K = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Nous appellerons équation (2) l'équation : $Ax^2 + By^2 + K = 0$.

Il n'y a que deux cas possibles : $AB > 0$ ou $AB < 0$.

$\boxed{AB > 0}$

Les réels A et B sont donc de même signe ; distinguons alors les trois cas suivants : K est du signe de A et de B, K est nul et K est de signe contraire à A et à B.

- K est du signe de A et de B. Il est immédiat que l'on a : $\Gamma = \varnothing$.
- K est nul. On a : (2) $\iff Ax^2 + By^2 = 0$ et par suite : $\Gamma = \{\Omega\}$.
- K est de signe contraire à A et à B.

On a : (2) $\iff \left(\frac{A}{K}x^2 + \frac{B}{K}y^2 + 1 = 0\right)$.

Les réels $\frac{A}{K}$ et $\frac{B}{K}$ sont strictement négatifs ; posons :

$$a = \sqrt{-\frac{K}{A}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{-\frac{K}{B}}.$$

On a alors : (2) $\iff \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right)$.

La courbe Γ est appelée **ellipse** et l'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est appelée **équation réduite** de Γ.

$\boxed{AB < 0}$

Les réels A et B sont donc de signes contraires.

Distinguons les deux cas suivants : $K = 0$ et $K \neq 0$.

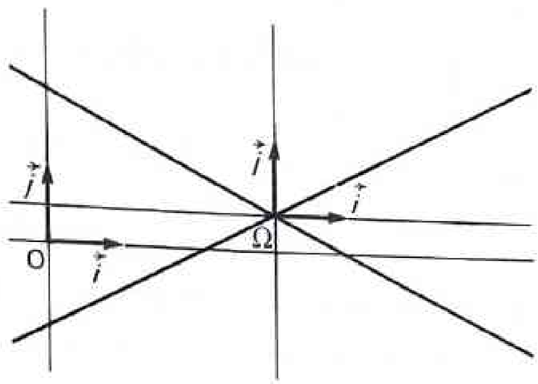
• $K = 0$. On a : (2) $\iff (Ax^2 + By^2 = 0)$.

Le réel $-\frac{A}{B}$ est strictement positif ; posons : $m^2 = -\frac{A}{B}$. On a alors :

$$\begin{aligned}(2) &\iff (y^2 - m^2x^2 = 0)\\ &\iff ((y - mx)(y + mx) = 0)\\ &\iff (y = mx \text{ ou } y = -mx).\end{aligned}$$

Γ est donc la **réunion de deux droites sécantes** en Ω d'équations respectives $y = mx$ et $y = -mx$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Le lecteur remarquera que ces droites sont symétriques par rapport à la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{i}$ et par rapport à la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{j}$.



• $K \neq 0$. On a : (2) $\iff \left(\frac{A}{K}x^2 + \frac{B}{K}y^2 + 1 = 0\right)$.

Supposons que le réel non nul $\frac{K}{A}$ soit positif ; le réel non nul $\frac{K}{B}$ est alors négatif.

Posons : $a = \sqrt{\frac{K}{A}}$ et $b = \sqrt{-\frac{K}{B}}$.

On a alors : (2) $\iff \left(-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right)$.

Dans le cas contraire, on pose : $a = \sqrt{-\frac{K}{A}}$ et $b = \sqrt{\frac{K}{B}}$ et l'on a alors :

(2) $\iff \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right)$.

La courbe Γ est appelée **hyperbole** et l'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ou l'équation : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est appelée **équation réduite** de Γ.

Nous résumons l'étude faite dans les paragraphes 1.1 et 1.2 par le théorème suivant :

1.3 THÉORÈME : **Soit Γ une conique d'équation, dans un repère orthonormé : $AX^2 + BY^2 + 2CX + 2DY + E = 0$, avec $|A| + |B| \neq 0$.**
Si AB est nul, Γ est soit l'ensemble vide, soit la réunion de deux droites parallèles (distinctes ou confondues), soit une parabole.
Si AB est positif, Γ est soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une ellipse.
Si AB est négatif, Γ est soit la réunion de deux droites sécantes, soit une hyperbole.

Remarque : Si AB est négatif, la courbe Γ n'est jamais l'ensemble vide.

Étude de l'ellipse d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

1.4 Soit Γ l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce paragraphe, toutes les coordonnées des points seront données dans ce repère.

Il est immédiat que, si M est un point quelconque de Γ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors les points M_1, M_2, M_3 de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ appartiennent aussi à Γ. La courbe Γ est donc globalement invariante par la réflexion affine s_1 par rapport à la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{i}$, par la réflexion affine s_2 par rapport à la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{j}$ et par la symétrie centrale s_3 de centre Ω. Pour cette dernière raison, le point Ω est appelé **centre de l'ellipse** Γ.

Pour étudier Γ il suffit donc d'étudier l'ensemble Γ' des points M de Γ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont positives ou nulles. On a alors :
$\Gamma = \Gamma' \cup s_1(\Gamma') \cup s_2(\Gamma') \cup s_3(\Gamma')$.

<u>Étude de Γ'.</u> Soit M un point quelconque de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de P. On a :

$$(M \in \Gamma') \iff \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\right)$$
$$\iff \left(y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ et } x \geqslant 0\right).$$

L'ensemble Γ' est donc la courbe représentative dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Étudions cette fonction numérique d'une variable réelle.

- Ensemble de définition D_f.

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}_+$. On a :

$$(x \in D_f) \iff \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \geqslant 0\right) \iff (x^2 \leqslant a^2) \iff (x \leqslant a).$$

On a donc : $D_f = [0, a]$.

- Il résulte des théorèmes sur les fonctions continues que f est continue sur D_f.
- Étude de la dérivée en un point de D_f.

Soit x_0 un élément quelconque de D_f. On a : $\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} = 0\right) \iff (x_0 = a)$.

Il résulte de l'étude de la fonction $\sqrt{}$ que f est dérivable pour tout x_0 différent de a et l'on a :

$$f'(x_0) = b \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} \cdot \frac{-2x_0}{a^2} = \frac{-bx_0}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}.$$

Le réel a est positif; on a donc : $\sqrt{a^2} = a$ et, par suite :

$$f'(x_0) = \frac{-bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}.$$

Il en résulte que l'on a : $\forall x \in D_f - \{a\}, \quad f'(x) = \dfrac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Calculons la limite, si elle existe, de $f'(x)$ quand x tend vers a par valeurs inférieures.

On a : $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = -\dfrac{b}{a} \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

On a : $\lim\limits_{x \to a^-} x = a, \quad \lim\limits_{x \to a^-} \sqrt{a^2 - x^2} = 0$ et $\forall x \in [0, a[, \quad \sqrt{a^2 - x^2} > 0.$

Il résulte du théorème sur la limite d'un quotient de deux fonctions que l'on a :

$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\infty$, et par suite : $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = -\infty$.

- Γ' admet une tangente en tout point.

Soit M_0 un point quelconque de Γ' d'abscisse x_0; on a : $0 \leqslant x_0 \leqslant a$.
Si x_0 est différent de a, alors $f'(x_0)$ existe; Γ' admet donc une tangente en M_0 d'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Posons : $y_0 = f(x_0) = b\sqrt{1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$. Le réel x_0 est différent de a

et par suite y_0 n'est pas nul. On a alors : $f'(x_0) = \dfrac{-bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$,

et par suite :

$$(1) \iff y - y_0 + \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) = 0$$

$$\iff \left(\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 0\right).$$

On a, par hypothèse : $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ et par suite :

$$(1) \iff \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0\right).$$

Si x_0 est égal à a, il résulte de l'égalité : $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = -\infty$ que Γ' admet en M_0 une tangente qui est la droite d'équation : $x = a$, c'est-à-dire : $x = x_0$.

Le réel y_0 est alors nul et l'on a : $(x = x_0) \iff \left(\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} - 1 = 0\right)$.

> La courbe Γ', et par suite la courbe Γ, admet donc en tout point M_0 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente dont l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est :
>
> $$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

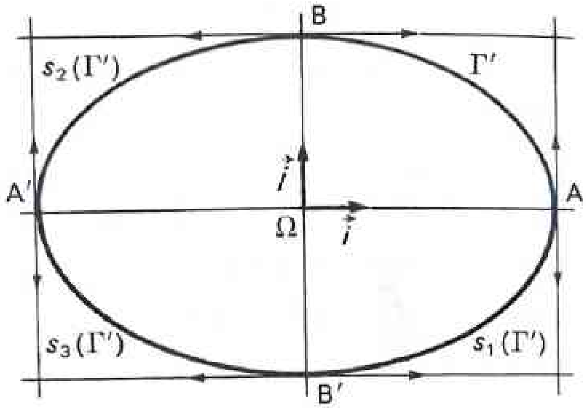
Le lecteur remarquera que cette équation s'obtient en remplaçant dans l'équation :
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, x^2 par xx_0 et y^2 par yy_0.

• Tableau de variation.

On a : $\forall x \in [0, a[, \quad f'(x) \leqslant 0$; d'où le tableau :

x	0		a
$f'(x)$	0	$-$	$-\infty$ ‖
$f(x)$	b	$\searrow$	0

• Courbe représentative.



L'ellipse est située à l'intérieur du rectangle limité par les droites d'équations respectives :

$x = a, \quad x = -a, \quad y = b, \quad y = -b.$

Les points A, B, A', B', de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$ sont appelés les **sommets de l'ellipse** ; l' "axe des x", c'est-à-dire la droite d'équation : $y = 0$ et l' "axe des y", c'est-à-dire la droite d'équation : $x = 0$, sont appelés les **axes de l'ellipse.**

Distinguons les trois cas suivants : $a = b, \quad a > b$ et $a < b$.

Si a est égal à b, l'ellipse est le cercle de centre Ω et de rayon a.

Si a est strictement supérieur à b, l' "axe des x" est appelé le **grand axe de l'ellipse,** l' "axe des y" le **petit axe.**

Si b est strictement supérieur à a, l'"axe des y" est le grand axe et l'"axe des x" le petit axe.

Exemple.

Traçons la conique Γ d'équation : $4X^2 + Y^2 + 8X = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $4X^2 + Y^2 + 8X = 4(X^2 + 2X) + Y^2 = 4(X+1)^2 + Y^2 - 4$.

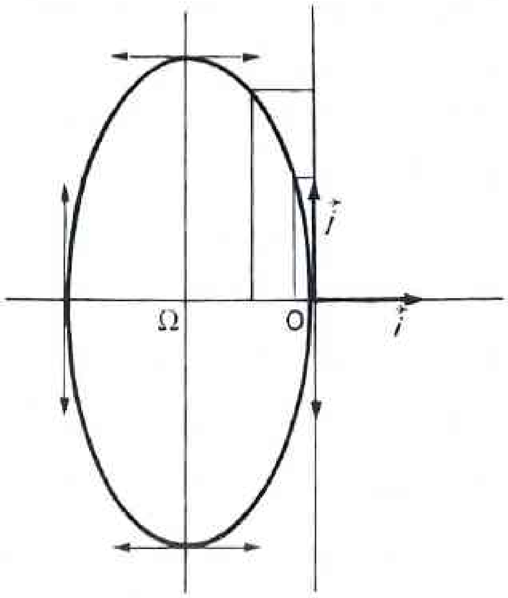
Soient Ω le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et M un point quelconque de P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. On a :

$$(M \in \Gamma) \Longleftrightarrow (4x^2 + y^2 - 4 = 0) \Longleftrightarrow \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0\right).$$

Γ est donc une ellipse de centre Ω, de grand axe l' " axe des y " et de petit axe l' " axe des x ", de sommets les points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe passe aussi par les points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.



Étude de l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

1.5 Soit Γ l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce paragraphe, toutes les coordonnées des points seront données dans ce repère.

Il est immédiat que, si M est un point quelconque de Γ de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors les points M_1, M_2, M_3 de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ appartiennent aussi à Γ. La courbe Γ est donc globalement invariante par la réflexion affine s_1 par rapport à la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{i}$, par la réflexion affine s_2 par rapport à la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{j}$ et par la symétrie centrale s_3 de centre Ω. Pour cette dernière raison le point Ω est appelé **centre de l'hyperbole** Γ.

Pour étudier Γ, il suffit donc d'étudier l'ensemble Γ' des points M de Γ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont positives ou nulles. On a alors :
$\Gamma = \Gamma' \cup s_1(\Gamma') \cup s_2(\Gamma') \cup s_3(\Gamma')$.

Étude de Γ'. Soit M un point quelconque de P de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. On a :

$$(M \in \Gamma') \Longleftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \text{ et } x \geqslant 0\right).$$

L'ensemble Γ' est donc la courbe représentative dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Étudions cette fonction numérique d'une variable réelle.

- Ensemble de définition D_g.

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}_+$. On a :

$(x \in D_g) \iff \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \geqslant 0\right) \iff (x^2 \geqslant a^2) \iff (x \geqslant a)$.

On a donc : $D_g = [a, +\infty[$.

- Il résulte des théorèmes sur les fonctions continues que g est continue sur D_g.

- Étude de la dérivée en un point de D_g.

Soit x_0 un élément quelconque de D_g. On a : $\left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1 = 0\right) \iff (x_0 = a)$.

Il résulte de l'étude de la fonction $\sqrt{}$ que g est dérivable pour tout x_0 différent de a et l'on a : $g'(x_0) = b \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2} - 1}} \cdot \dfrac{2x_0}{a^2} = \dfrac{b}{a} \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - a^2}}$.

Il en résulte que l'on a : $\forall x \in D_g - \{a\}$, $g'(x) = \dfrac{b}{a} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Calculons la limite, si elle existe, de $g'(x)$ quand x tend vers a par valeurs supérieures.

On a : $\lim\limits_{x \to a^+} g'(x) = \dfrac{b}{a} \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

On a : $\lim\limits_{x \to a^+} x = a$, $\lim\limits_{x \to a^+} \sqrt{x^2 - a^2} = 0$ et : $\forall x \in]a, +\infty[$, $\sqrt{x^2 - a^2} > 0$.

Il résulte du théorème sur la limite d'un quotient de deux fonctions que l'on a :

$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty$, et par suite : $\lim\limits_{x \to a^+} g'(x) = +\infty$.

- Γ' admet une tangente en tout point.

Soit M_0 un point quelconque de Γ' d'abscisse x_0 (on a : $x_0 \geqslant a$).

Si x_0 est différent de a, alors $g'(x_0)$ existe ; Γ' admet donc en M_0 une tangente d'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$. (1)

Posons : $y_0 = g(x_0) = b\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2} - 1} = \dfrac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}$. Le réel x_0 est différent de a et par suite y_0 n'est pas nul. On a alors : $g'(x_0) = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}$,

et par suite : (1) $\iff y - y_0 - \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0) = 0$

$$\iff \left(\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} = 0\right).$$

On a, par hypothèse : $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$ et, par suite :

(1) $\iff \left(-\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + 1 = 0\right) \iff \left(\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} - 1 = 0\right)$.

Si x_0 est égal à a, il résulte de l'égalité : $\lim\limits_{x \to a^+} g'(x) = +\infty$, que Γ' admet en M_0 une tangente qui est la droite d'équation : $x = a$, c'est-à-dire : $x = x_0$.

Le réel y_0 est alors nul et l'on a : $(x = x_0) \iff \left(\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} - 1 = 0\right)$.

La courbe Γ', et par suite la courbe Γ, admet donc en tout point M_0 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente dont l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$

Le lecteur remarquera que cette équation s'obtient en remplaçant dans l'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, x^2 par xx_0 et y^2 par yy_0.

- Tableau de variation.

On a : $\forall x \in]a, +\infty[$, $g'(x) > 0$.

D'autre part, il résulte de l'étude de la fonction $\sqrt{\ }$ que l'on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

D'où le tableau :

x	a		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert +\infty$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Étude de la branche infinie.

Cherchons s'il existe une direction asymptotique. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}.$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2} = 1$ et par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{b}{a}$.

Quand x tend vers $+\infty$, la courbe Γ' admet donc une direction asymptotique de coefficient directeur $\frac{b}{a}$.

Cherchons s'il existe une asymptote. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - \frac{b}{a}x = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x)$$
$$= \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - a^2} - x).$$

On a : $\forall x \in]a, +\infty[$, $\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x = \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right)$

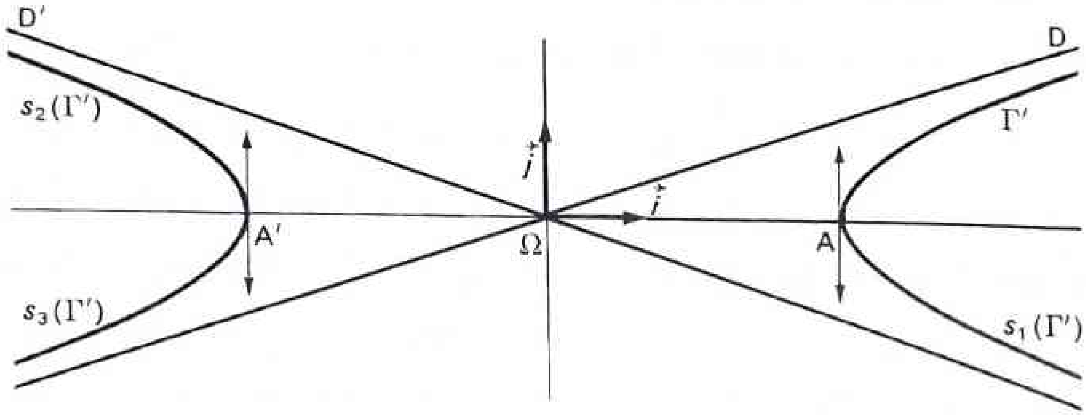
et aussi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - a^2} + x = +\infty$.

On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - a^2} - x = 0$, et, par suite :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - \frac{b}{a}x = 0$.

Quand x tend vers $+\infty$, la courbe Γ' admet donc une asymptote qui est la droite d'équation : $y = \frac{b}{a}x$.

• Courbe représentative.



L'hyperbole Γ est située à l'extérieur de la bande limitée par les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = -a$.

Les points A et A' de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ sont appelés les **sommets de l'hyperbole.**

Γ coupe l' " axe des x " aux sommets et ne coupe pas l' " axe des y " ; l' " axe des x " est appelé l'**axe transverse** de l'hyperbole et l' " axe des y " **l'axe non transverse.**

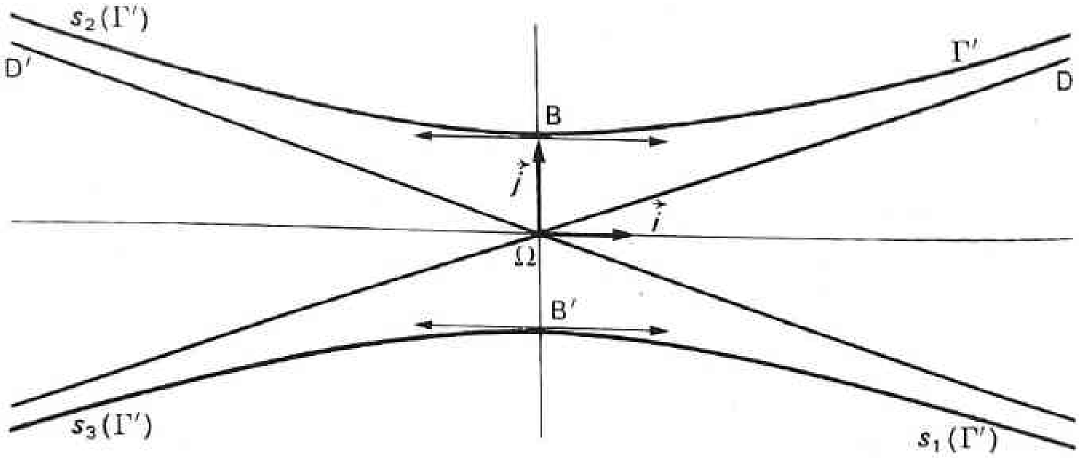
Les droites D et D' d'équations respectives : $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont appelées les **asymptotes de l'hyperbole.** Le lecteur remarquera que l'on a : $s_1(\text{D}) = \text{D}'$, $s_2(\text{D}) = \text{D}'$ et $s_3(\text{D}) = \text{D}$.

On dit que l'hyperbole est la réunion de deux **branches,** qui sont les ensembles respectifs : $\Gamma' \cup s_1(\Gamma')$ et $s_2(\Gamma') \cup s_3(\Gamma')$.

Si les réels a et b sont égaux, les droites D et D' ont pour équations respectives : $y = x$ et $y = -x$; elles sont donc perpendiculaires. L'hyperbole Γ est alors appelée **hyperbole équilatère.**

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si l'on a : $b = a$.

Remarques : 1. Dans le cas où l'hyperbole Γ a pour équation réduite dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, on a la courbe représentative suivante.



Les sommets de l'hyperbole sont les points B et B' de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$. Les asymptotes de l'hyperbole sont les droites D et D' d'équations respectives dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. L' " axe des y " est l'axe transverse et l' " axe des x " l'axe non transverse.

La tangente en un point M_0 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ a pour équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$.

2. On peut écrire les équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ des asymptotes d'une hyperbole sous la forme : $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ et $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

L'équation de la réunion des deux asymptotes est donc : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Exemple.

Traçons la conique Γ d'équation : $X^2 - 4Y^2 + 2X - 3 = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a :

$X^2 - 4Y^2 + 2X - 3 = (X^2 + 2X) - 4Y^2 - 3 = (X + 1)^2 - 4Y^2 - 4$.

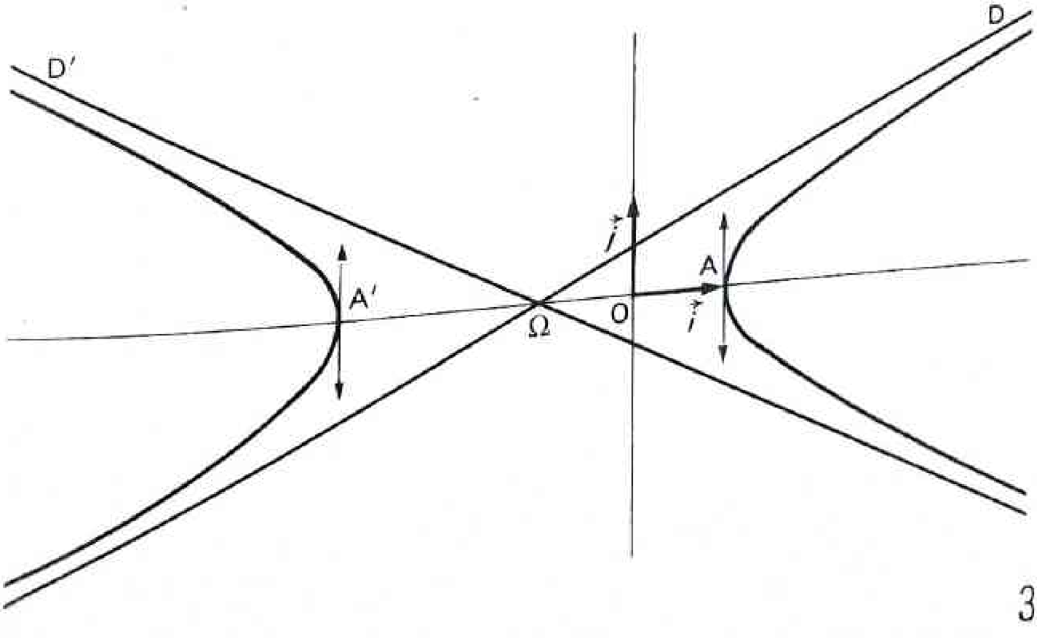
Soient Ω le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et M un point quelconque de P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $(M \in \Gamma) \iff (x^2 - 4y^2 - 4 = 0) \iff \left(\frac{x^2}{4} - y^2 - 1 = 0\right)$

$\iff \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} - 1 = 0\right)$.

Γ est donc une hyperbole de centre Ω, d'axe transverse l' " axe des x ", de sommets les points de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et d'asymptotes les droites d'équations : $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -\frac{1}{2}x$ dans ce même repère.

Γ passe par les points de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.



Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

1.6 Soit Γ l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient D et D′ les asymptotes de Γ, c'est-à-dire les droites d'équations respectives dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Soient α et β deux réels quelconques non nuls. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ de composantes respectives $\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta a \\ -\beta b \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont des vecteurs directeurs quelconques de D et de D′.

Cherchons l'équation de Γ dans le repère cartésien $(\Omega, \vec{u}, \vec{u'})$.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans les repères respectifs $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et $(\Omega, \vec{u}, \vec{u'})$.

On a : $\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{u'} = X(\alpha a\vec{i} + \alpha b\vec{j}) + Y(\beta a\vec{i} - \beta b\vec{j})$
et, par suite : $x = a(\alpha X + \beta Y)$ et $y = b(\alpha X - \beta Y)$.

On a donc : $(M \in \Gamma) \iff \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right)$

$$\iff ((\alpha X + \beta Y)^2 - (\alpha X - \beta Y)^2 - 1 = 0)$$
$$\iff (4\alpha\beta XY - 1 = 0) \iff \left(XY = \frac{1}{4\alpha\beta}\right).$$

Nous énonçons donc le théorème suivant :

THÉORÈME : Soit Γ une hyperbole de centre Ω et d'asymptotes deux droites D et D′ sécantes en Ω. Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs directeurs respectifs de D et de D′.
Alors l'équation de Γ dans le repère cartésien $(\Omega, \vec{u}, \vec{u'})$ est de la forme : $XY = k$, où k est un réel non nul.

Remarque : Supposons que l'hyperbole Γ soit équilatère, c'est-à-dire que dans l'équation réduite, on ait : $a = b$. Les droites D et D′ sont perpendiculaires ; nous pouvons donc choisir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ tels que le repère cartésien $(\Omega, \vec{u}, \vec{u'})$ soit orthonormé.

Prenons, par exemple, $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}$ de composantes $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

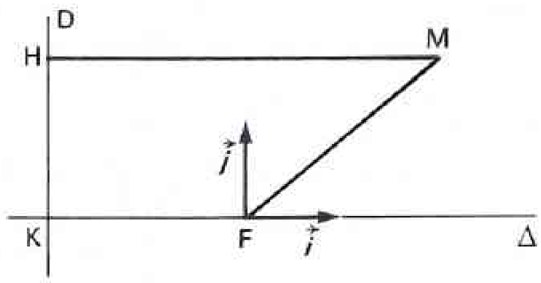
On a alors : $\alpha = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{1}{a\sqrt{2}}$. On obtient alors comme équation de Γ dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{u'})$: $XY = \frac{1}{4\alpha\beta} = \frac{1}{4 \times \frac{1}{2a^2}} = \frac{a^2}{2}$.

Dans le cas où l'on a : $a = \sqrt{2}$, on retrouve l'hyperbole d'équation : $XY = 1$ étudiée en classe de Première.

2. Foyer et directrice.

✲ Dans ce paragraphe, nous allons étudier certaines propriétés géométriques des coniques.

Ensemble des points M de P tels que : MF = e MH.



2.1 Soient D une droite de P et F un point de P qui n'appartient pas à D ; soit e un réel strictement positif.
Soit M un point quelconque de P ; nous désignons par H la projection orthogonale de M sur D.
Étudions l'ensemble Γ des points M de P qui satisfont à : $MF = e\,MH$.
Soit $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$) un vecteur unitaire de $\vec{D}^{\perp}$ (resp. $\vec{D}$). Considérons le repère orthonormé $(F, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce repère, le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et la droite D a pour équation cartésienne : $x = d$ avec $d \neq 0$.
Si M a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$, le point H a pour coordonnées $\begin{pmatrix}d\\y\end{pmatrix}$ dans ce repère. Puisque le réel e est positif, on a :

$$\begin{aligned}(M \in \Gamma) &\iff (MF = e\,MH) \iff (MF^2 = e^2\,MH^2)\\ &\iff (x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2)\\ &\iff (x^2(1 - e^2) + y^2 + 2\,e^2dx - e^2d^2 = 0) \qquad (1)\end{aligned}$$

Il résulte de l'étude faite dans le paragraphe 1 que Γ est la conique d'équation : $x^2(1 - e^2) + y^2 + 2\,e^2dx - e^2d^2 = 0$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$. Pour étudier la nature de Γ, il faut distinguer les trois cas suivants : $1 - e^2 = 0$, $1 - e^2 > 0$ ou $1 - e^2 < 0$, ce qui équivaut à : $e = 1$, $e < 1$ ou $e > 1$.
Dans chacun de ces trois cas, Γ a pour axe de symétrie la droite Δ passant par F et perpendiculaire à D.

2.2 Cas où l'on a : $e = 1$. Γ est alors la conique d'équation : $y^2 + 2\,dx - d^2 = 0$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$. C'est donc une parabole dont le sommet S est l'unique point d'intersection de Γ et de l'axe de symétrie Δ. Dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ a pour équation : $y = 0$ et par suite le point S a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{d}{2}\\0\end{pmatrix}$.
Appelons K le point d'intersection de D et de Δ ; le point S est le milieu du bipoint (K, F).

Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole Γ a pour équation : $y^2 + 2\,dx = 0$; le point F a alors pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et la droite D pour équation : $x = \frac{d}{2}$.
La distance de F à D est égale à $|d|$; il est d'usage d'appeler **paramètre de la parabole** le réel $|d|$ et de le noter p.

2.3 Cas où l'on a : $e < 1$. Γ est alors la conique d'équation dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$:
$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2\,e^2dx - e^2d^2 = 0 \quad (1)$.
Le réel $1 - e^2$ n'est pas nul ; on a donc :

$$(1) \iff \left(x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{2\,e^2dx}{1-e^2} - \frac{e^2d^2}{1-e^2} = 0\right)$$
$$\iff \left(\left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{e^4d^2}{(1-e^2)^2} - \frac{e^2d^2}{1-e^2} = 0\right)$$
$$\iff \left(\left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} = 0\right).$$

Le point Ω de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{e^2d}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ est le centre de la conique Γ ; il appartient à la droite Δ. On a : $\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} > 0$ et $1 - e^2 > 0$.
Nous pouvons donc poser : $a^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2}$ avec a et b positifs.
Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la conique Γ a donc pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; c'est donc une ellipse de centre Ω.
Il résulte de l'inégalité : $0 < 1 - e^2 < 1$ que l'on a : $a^2 > b^2$.
Le grand axe de l'ellipse est donc la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{i}$, c'est-à-dire la droite Δ ; le petit axe est la droite Δ' perpendiculaire en Ω à Δ ; c'est une droite parallèle à D.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{e^2d}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et la droite D pour équation : $x = d + \frac{e^2d}{1-e^2}$, c'est-à-dire : $x = \frac{d}{1-e^2}$.

2.4 Cas où l'on a : $e > 1$. Γ est alors la conique d'équation dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$:
$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2\,e^2dx - e^2d^2 = 0$, c'est-à-dire :
$\left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} = 0.$

Le point Ω de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{e^2d}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ est le centre de la conique Γ ; il appartient à la droite Δ.

On a : $\dfrac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} > 0$ et $1 - e^2 < 0$; nous pouvons donc poser :

$a^2 = \dfrac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = -\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}$, avec a et b positifs.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la conique Γ a pour équation : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; Γ est donc une hyperbole de centre Ω, d'axe transverse la droite Δ et d'axe non transverse la droite Δ' parallèle à D.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{e^2d}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et la droite D pour équation : $x = \dfrac{d}{1-e^2}$.

D'où le théorème :

2.5 **THÉORÈME : Soient** D **une droite de** P **et** F **un point de** P **qui n'appartient pas à** D ; **soit** e **un réel strictement positif. Si** M **est un point quelconque de** P, **on désigne par** H **sa projection orthogonale sur** D.
L'ensemble Γ **des points** M **de** P **tels que l'on ait :** MF = eMH **est une conique.**
Si l'on a : $e = 1$, **l'ensemble** Γ **est une parabole.**
Si l'on a : $0 < e < 1$, **l'ensemble** Γ **est une ellipse.**
Si l'on a : $e > 1$, **l'ensemble** Γ **est une hyperbole.**

On dit que Γ est la **conique de foyer** F, **de directrice associée** D **et d'excentricité** e. La définition de Γ à l'aide du triplet (F, D, e) est appelée **définition monofocale.**

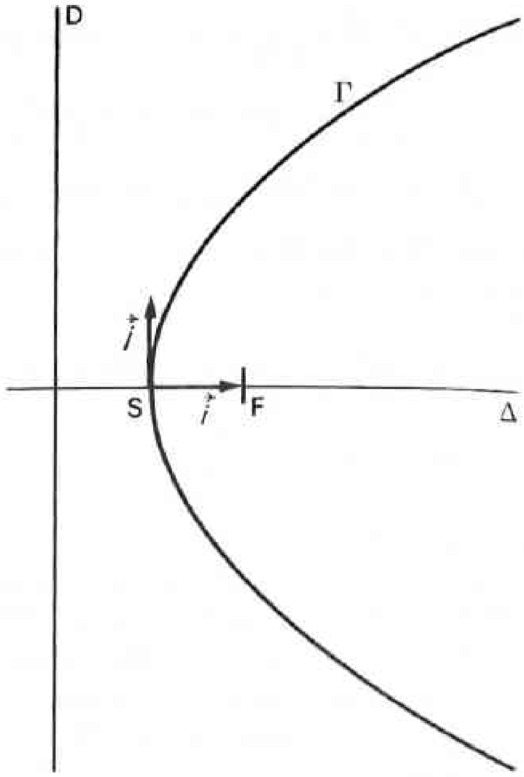
Remarques : 1. La parabole de foyer F et de directrice associée D est l'ensemble des points de P qui sont équidistants de F et de D.
2. Dans le cas de l'ellipse ($0 < e < 1$), on a toujours : $a^2 \neq b^2$; l'ellipse obtenue n'est donc jamais un cercle.

Foyers et directrices d'une conique.

Étudions le problème réciproque.
Soit Γ une conique du plan P. Cherchons s'il existe une droite D, un point F de P et un réel strictement positif e tels que Γ soit la conique de foyer F, de directrice associée D et d'excentricité e. Il résulte des paragraphes 2.1 à 2.5 qu'il est nécessaire que Γ soit ou bien une parabole, ou bien une ellipse qui ne soit pas un cercle, ou bien une hyperbole.
Étudions donc successivement ces trois cas :

2.6 **Γ est une parabole.** Soient S le sommet de cette parabole, Δ son axe de symétrie, $\vec{i}$ un vecteur unitaire de $\vec{\Delta}$ et $\vec{j}$ un vecteur de $\vec{P}$ tel que $(S, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé de P.
Nous savons qu'il existe un réel a tel que l'équation de Γ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ soit : $y^2 - ax = 0$.

D'après le paragraphe 2.2, il est nécessaire que e soit égal à 1 et que F appartienne à Δ. Soit K le symétrique de F par rapport à S ; alors D est nécessairement la droite passant par K et de vecteur directeur $\vec{j}$.



Nous savons aussi que, si F est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et si D est la droite d'équation : $x = \frac{d}{2}$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole de foyer F et de directrice associée D a pour équation dans ce repère : $y^2 + 2dx = 0$.

Cette parabole est égale à Γ si et seulement si l'on a : $2d = -a$, ce qui équivaut à : $d = -\frac{a}{2}$.

> Soit Γ une parabole du plan P. Il existe un unique point F et une unique droite D tels que la parabole Γ soit la parabole de foyer F et de directrice associée D.

2.7 **Γ est une ellipse qui n'est pas un cercle.** Soient Ω le centre de cette ellipse, Δ son grand axe, Δ' son petit axe et $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$) un vecteur unitaire de $\vec{\Delta}$ (resp. $\vec{\Delta'}$).
Nous savons qu'il existe deux réels strictement positifs a et b, avec $a > b$, tels que dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de Γ soit : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

D'après le paragraphe 2.3, il est nécessaire que e soit strictement inférieur à 1, que F appartienne à Δ et que D soit perpendiculaire à Δ.

Soit donc e un réel strictement compris entre 0 et 1 ; soient F un point de Δ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et D une droite de vecteur directeur $\vec{j}$ d'équation : $x = m$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Cherchons l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de l'ellipse Γ' de foyer F, de directrice associée D et d'excentricité e.

Soient M un point quelconque de P, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et H la projection orthogonale de M sur D.

On a :
$$\begin{aligned} (M \in \Gamma') &\iff (MF^2 = e^2 MH^2) \\ &\iff ((x - x_0)^2 + y^2 = e^2(x - m)^2) \\ &\iff (x^2(1 - e^2) + y^2 + 2x(me^2 - x_0) + x_0^2 - e^2m^2 = 0) \end{aligned}$$

et par suite :

$$(\Gamma = \Gamma') \iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ x_0^2 - e^2m^2 \neq 0 \\ a^2 = \dfrac{e^2m^2 - x_0^2}{1-e^2} \\ b^2 = e^2m^2 - x_0^2 \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ e^2m^2(e^2-1) \neq 0 \\ a^2 = \dfrac{e^2m^2(1-e^2)}{1-e^2} \\ b^2 = e^2m^2(1-e^2) \end{cases}\right)$$

On a : $0 < e < 1$ et $a \neq 0$; par suite, on a :

$$(\Gamma = \Gamma') \iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ m \neq 0 \\ a^2 = e^2m^2 \\ b^2 = a^2(1-e^2) \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ a^2 = e^2m^2 \\ e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2} \\ m^2 = \dfrac{a^4}{a^2-b^2} \end{cases}\right)$$

Nous avons : $a > b$, nous pouvons donc poser : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

On a donc : $c < a$ et $\dfrac{a^2}{c} > a$.

On a enfin :

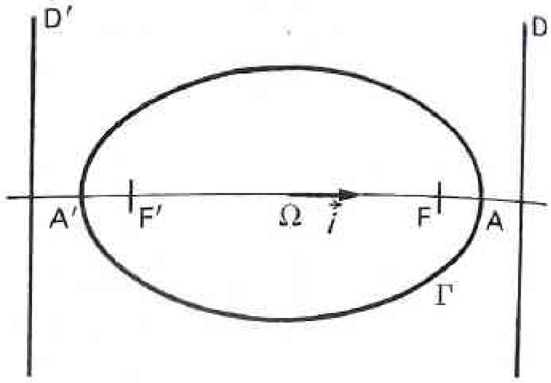
$$(\Gamma = \Gamma') \iff \left(\begin{cases} e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} \\ m^2 = \dfrac{a^4}{c^2} \\ x_0 = me^2 \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} \\ m = \dfrac{a^2}{c} \\ x_0 = c \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} e = \dfrac{c}{a} \\ m = -\dfrac{a^2}{c} \\ x_0 = -c \end{cases}\right)$$

> Soit Γ une ellipse qui n'est pas un cercle. Il existe un unique réel e strictement compris entre 0 et 1, deux points F et F′ symétriques par rapport au centre Ω et deux droites D et D′ symétriques par rapport au centre Ω tels que l'ellipse Γ de centre Ω soit l'ellipse de foyer F (resp. F′), de directrice associée D (resp. D′) et d'excentricité e.

Dans le cas où Γ a pour équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec $a > b$, nous invitons le lecteur à retenir les résultats suivants :

$a > b$	
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$e = \dfrac{c}{a}$
$F\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$	D : $x = \dfrac{a^2}{c}$
$F'\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$	D′ : $x = -\dfrac{a^2}{c}$

Il résulte des inégalités : $c < a$ et $\frac{a^2}{c} > a$, que l'on a toujours la disposition suivante :



Dans le cas où Γ a pour équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec $a < b$, on obtient les résultats analogues suivants :

$b > a$	
$c = \sqrt{b^2 - a^2}$	$e = \frac{c}{b}$
$F\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$	$D : y = \frac{b^2}{c}$
$F'\begin{pmatrix}0\\-c\end{pmatrix}$	$D' : y = -\frac{b^2}{c}$

On appelle les points F et F' les **foyers de Γ**, les droites D et D' les **directrices de Γ** associées respectivement aux foyers F et F'.
On appelle la droite (FF') **l'axe focal de Γ** et le réel $2a$ la **longueur de l'axe focal.**
Remarquons que l'axe focal d'une ellipse est le grand axe de cette ellipse.

2.8 **Γ est une hyperbole.** Soient Ω le centre de cette hyperbole, Δ son axe transverse, Δ' son axe non transverse et $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$) un vecteur unitaire de $\vec{\Delta}$ (resp. $\vec{\Delta'}$).
Nous savons qu'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de Γ soit : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
D'après le paragraphe 2.4, il est nécessaire que e soit strictement supérieur à 1, que F appartienne à Δ et que D soit perpendiculaire à Δ.
Soit donc e un réel strictement supérieur à 1 ; soient F un point de Δ de coordonnées $\begin{pmatrix}x_0\\0\end{pmatrix}$ et D une droite de vecteur directeur $\vec{j}$ d'équation : $x = m$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
Cherchons l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de l'hyperbole Γ' de foyer F, de directrice associée D et d'excentricité e.
Soit M un point quelconque de P, de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
On a : $(M \in \Gamma') \iff (x^2(1 - e^2) + y^2 + 2x(me^2 - x_0) + x_0^2 - e^2m^2 = 0)$.

et par suite :

$$(\Gamma = \Gamma') \iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ x_0^2 - e^2m^2 \neq 0 \\ a^2 = \dfrac{e^2m^2 - x_0^2}{1-e^2} \\ b^2 = x_0^2 - e^2m^2 \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ e^2m^2(e^2-1) \neq 0 \\ a^2 = \dfrac{e^2m^2(1-e^2)}{1-e^2} \\ b^2 = e^2m^2(e^2-1) \end{cases}\right).$$

On a : $e > 1$ et $a \neq 0$, et par suite :

$$(\Gamma = \Gamma') \iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ m \neq 0 \\ a^2 = e^2m^2 \\ b^2 = a^2(e^2-1) \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ a^2 = e^2m^2 \\ e^2 = 1 + \dfrac{b^2}{a^2} \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} x_0 = me^2 \\ e^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2} \\ m^2 = \dfrac{a^4}{a^2+b^2} \end{cases}\right).$$

Posons : $c = \sqrt{a^2+b^2}$; on a alors : $c > a$ et $\dfrac{a^2}{c} < a$.

Par suite :

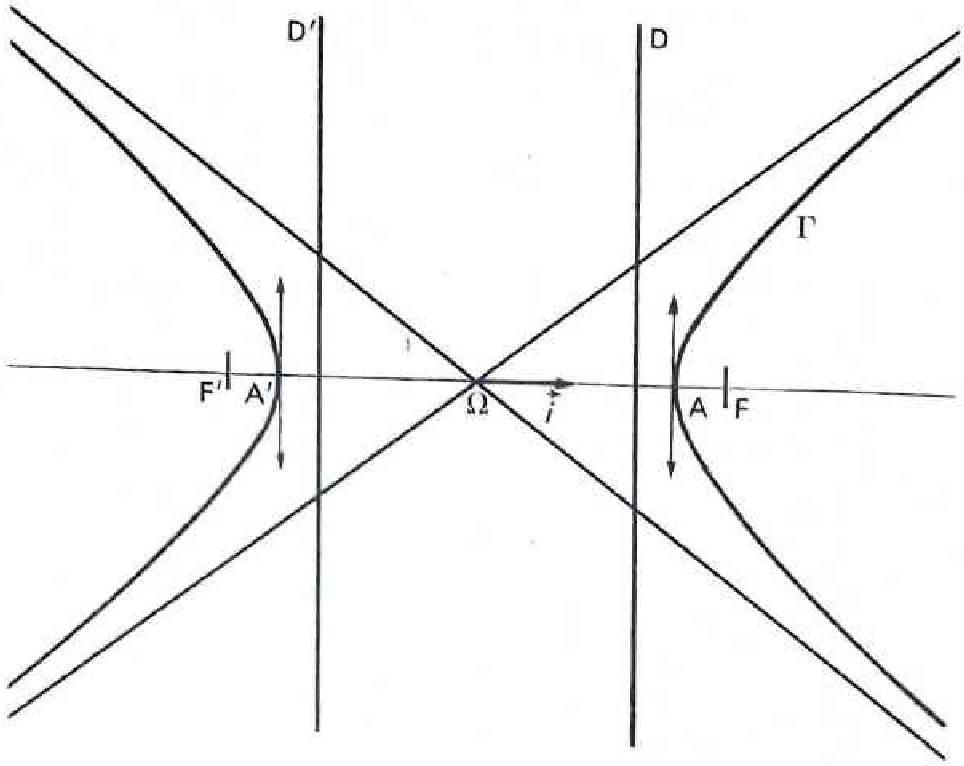
$$(\Gamma = \Gamma') \iff \left(\begin{cases} e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} \\ m^2 = \dfrac{a^4}{c^2} \\ x_0 = me^2 \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} \\ m = \dfrac{a^2}{c} \\ x_0 = c \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} e = \dfrac{c}{a} \\ m = -\dfrac{a^2}{c} \\ x_0 = -c \end{cases}\right).$$

> Soit Γ une hyperbole du plan P. Il existe un unique réel e strictement supérieur à 1, deux points F et F′ symétriques par rapport au centre Ω et deux droites D et D′ symétriques par rapport au centre Ω tels que l'hyperbole Γ de centre Ω soit l'hyperbole de foyer F (resp. F′), de directrice associée D (resp. D′) et d'excentricité e.

Dans le cas où Γ a pour équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, nous invitons le lecteur à retenir les résultats suivants :

$c = \sqrt{a^2+b^2}$	$e = \dfrac{c}{a}$
$F\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$	D : $x = \dfrac{a^2}{c}$
$F'\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$	D′ : $x = -\dfrac{a^2}{c}$

Il résulte des inégalités : $c > a$ et $\frac{a^2}{c} < a$ que l'on a toujours la disposition suivante :



Dans le cas où Γ a pour équation réduite : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, on obtient les résultats analogues suivants :

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$e = \frac{c}{b}$
$F\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$	D : $y = \frac{b^2}{c}$
$F'\begin{pmatrix}0\\-c\end{pmatrix}$	D' : $y = -\frac{b^2}{c}$

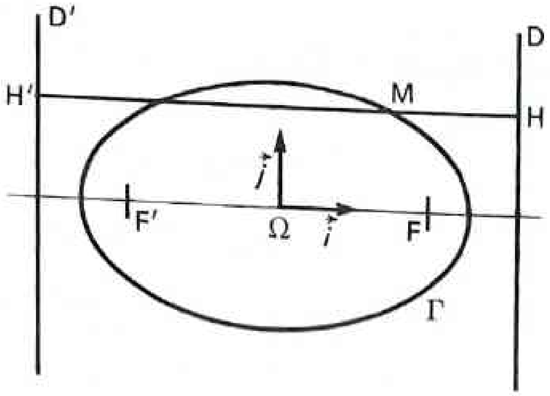
On appelle les points F et F' les **foyers de Γ**, les droites D et D' les **directrices de Γ** associées respectivement aux foyers F et F'.
On appelle la droite (FF') **l'axe focal de Γ** et le réel $2a$ la **longueur de l'axe focal.**
Remarquons que l'axe focal d'une hyperbole est l'axe transverse de cette hyperbole.

Définition bifocale des coniques à centre.

Une conique à centre est soit une ellipse, soit une hyperbole. Nous venons de voir qu'une conique à centre qui n'est pas un cercle admet deux foyers et deux directrices.
Dans ce paragraphe, nous allons donner une définition d'une telle conique uniquement à l'aide de ses foyers. Nous allons distinguer les deux sortes de conique à centre.

Cas d'une ellipse qui n'est pas un cercle.

2.9 • Soit Γ une ellipse de centre Ω et d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec $a > b > 0$, dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.



Dans ce repère, les foyers F et F' de Γ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ et les directrices D et D' de Γ pour équations respectives : $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.

Soient M un point quelconque de Γ et H (resp. H') la projection orthogonale de M sur D (resp. D'). On a : $MF = \frac{c}{a} MH$ et $MF' = \frac{c}{a} MH'$

et, par suite : $MF + MF' = \frac{c}{a}(MH + MH')$.

Le point M appartient au segment [H, H']. On a donc :

$MH + MH' = HH'$ et, par suite : $MF + MF' = \frac{c}{a} HH' = \frac{c}{a}.2\frac{a^2}{c} = 2a$.

Tout point M de Γ satisfait donc à l'égalité : $MF + MF' = 2a$.

2.10 • Soient F et F' deux points distincts de P et a un réel strictement positif. Cherchons l'ensemble Γ' des points M de P tels que l'on ait : $MF + MF' = 2a$.

Posons $FF' = 2c$, avec $c > 0$, et appelons Ω le milieu de (F, F').

Il résulte des propositions :

$(\forall M \in P, MF + MF' \geqslant FF')$ et $(\forall M \in P, (MF + MF' = FF' \Longleftrightarrow M \in [F, F']))$ que, si l'on a : $c > a$, alors Γ' est l'ensemble vide et que, si l'on a : $c = a$, alors Γ' est le segment [F, F'].

Nous supposons désormais que l'on a : $c < a$.

Posons : $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{F'F}}{\| \overrightarrow{F'F} \|}$ et appelons $\vec{j}$ un vecteur de $\vec{P}$ tel que le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé. Les coordonnées respectives de F et de F' dans ce repère sont donc $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$. Posons : $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et appelons Γ l'ellipse de centre Ω et d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Il résulte du paragraphe 2.9 que l'on a : $\Gamma \subset \Gamma'$.

Démontrons que l'on a aussi : $\Gamma' \subset \Gamma$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ d'un point quelconque M de P.

On a alors : $MF^2 = (x-c)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$

et, par suite : $MF^2 - MF'^2 = (MF - MF')(MF + MF')$
$$= (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2 = -4cx.$$

On a, d'autre part, les implications suivantes :

$$(M \in \Gamma') \Longrightarrow (MF + MF' = 2a) \Longrightarrow \left(\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = -2\dfrac{c}{a}x \end{cases}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(MF = a - \frac{c}{a}x\right) \Longrightarrow \left(MF^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2\right)$$

$$\Longrightarrow \left((x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2\right)$$

$$\Longrightarrow \left(x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 + c^2 - a^2 = 0\right).$$

On a : $b \neq 0$ et $b^2 = a^2 - c^2$.

Il en résulte que l'on a :

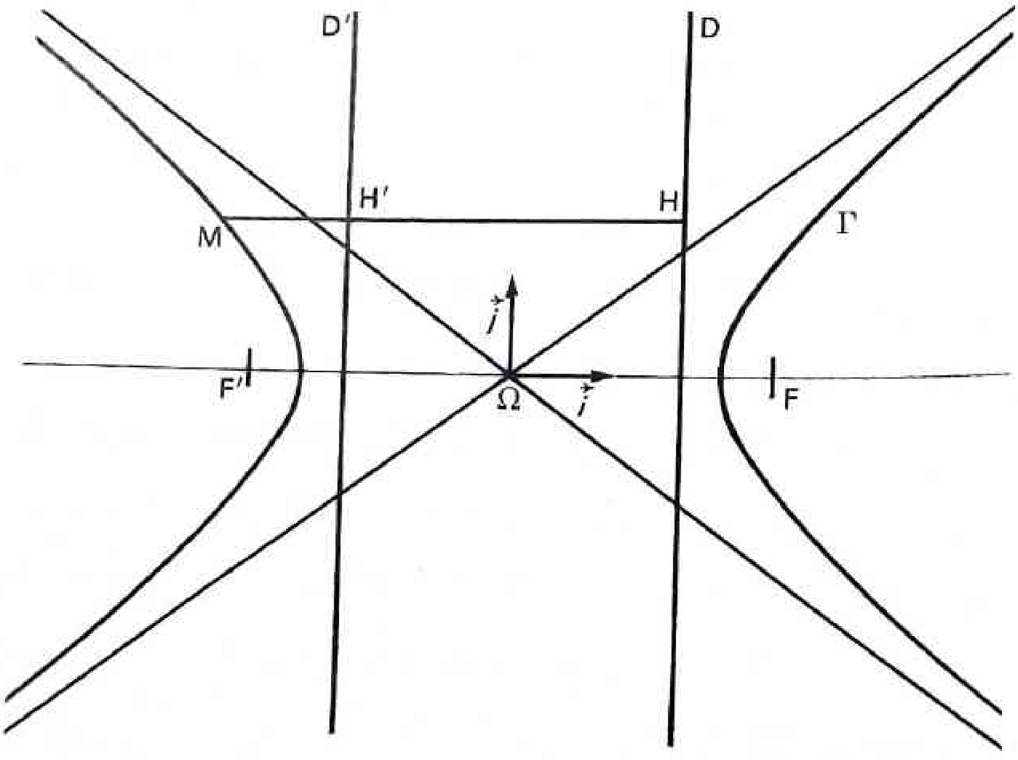
$$(M \in \Gamma') \Longrightarrow \left(x^2\frac{b^2}{a^2} + y^2 - b^2 = 0\right) \Longrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right) \Longrightarrow (M \in \Gamma).$$

On a donc : $\Gamma' \subset \Gamma$.

Des propositions : $\Gamma \subset \Gamma'$ et $\Gamma' \subset \Gamma$, il résulte que les ensembles Γ et Γ' sont égaux.

Cas d'une hyperbole.

2.11 • Soit Γ une hyperbole de centre Ω et d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.



Dans ce repère, les foyers F et F′ de Γ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ et les directrices D et D′ de Γ pour équations respectives : $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.

Soient M un point quelconque de Γ et H (resp. H′) la projection orthogonale de M sur D (resp. D′).

On a : $\mathrm{MF} = \frac{c}{a}\,\mathrm{MH}$ et $\mathrm{MF'} = \frac{c}{a}\,\mathrm{MH'}$

et, par suite : $|\,\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}\,| = \frac{c}{a}\,|\,\mathrm{MH} - \mathrm{MH'}\,|$.

Le point M est, par définition, un point de la droite (HH′) et il est situé à l'extérieur du segment [H, H′].
On a donc : $|\,\mathrm{MH} - \mathrm{MH'}\,| = \mathrm{HH'}$

et, par suite : $|\,\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}\,| = \frac{c}{a}\,\mathrm{HH'} = \frac{c}{a} \times 2\frac{a^2}{c} = 2a$.

Tout point M de Γ satisfait donc à l'égalité : $|\,\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}\,| = 2a$.
Remarquons que, pour tout point M de l'une des branches de Γ, on a l'égalité : $\mathrm{MF} - \mathrm{MF'} = 2a$ et, pour tout point M de l'autre branche, on a l'égalité : $\mathrm{MF'} - \mathrm{MF} = 2a$.

2.12 • Soient F et F′ deux points distincts de P et a un réel strictement positif.
Cherchons l'ensemble Γ' des points M de P tels que l'on ait l'égalité : $|\,\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}\,| = 2a$.
Posons $\mathrm{FF'} = 2c$, avec $c > 0$, et appelons Ω le milieu de (F, F′).
Il résulte des propositions : $(\forall \mathrm{M} \in \mathrm{P},\ |\,\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}\,| \leqslant \mathrm{FF'})$
et $\big(\forall \mathrm{M} \in \mathrm{P},\ (|\,\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}\,| = \mathrm{FF'} \iff \mathrm{M} \in ((\mathrm{FF'}) - [\mathrm{F}, \mathrm{F'}]) \cup \{\mathrm{F}, \mathrm{F'}\})\big)$
que, si l'on a : $c < a$, alors Γ' est l'ensemble vide et que, si l'on a : $c = a$, alors Γ' est l'ensemble des points de la droite (FF′) qui ne sont pas strictement compris entre les points F et F′.
Nous supposons désormais que l'on a : $c > a$.

Posons : $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{F'F}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{F'F}}\|}$ et appelons $\vec{j}$ un vecteur de $\vec{\mathrm{P}}$ tel que le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé. Les coordonnées respectives des points F et F′ dans ce repère sont donc : $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$.

Posons : $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ et appelons Γ l'hyperbole de centre Ω et d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
Il résulte du paragraphe 2.11 que l'on a : $\Gamma \subset \Gamma'$.
Démontrons que l'on a aussi : $\Gamma' \subset \Gamma$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ d'un point quelconque M de P.
On a alors : $\mathrm{MF}^2 = (x - c)^2 + y^2$ et $\mathrm{MF'}^2 = (x + c)^2 + y^2$
et, par suite : $\mathrm{MF}^2 - \mathrm{MF'}^2 = (\mathrm{MF} - \mathrm{MF'})(\mathrm{MF} + \mathrm{MF'}) = -4cx$.

On a, d'autre part, les implications suivantes :

$$(M \in \Gamma') \Longrightarrow (|\,MF - MF'\,| = 2a)$$
$$\Longrightarrow (MF - MF' = 2a \quad \text{ou} \quad MF - MF' = -2a)$$
$$\Longrightarrow \left(\begin{cases} MF - MF' = 2a \\ MF + MF' = -2\dfrac{c}{a}x \end{cases} \text{ou} \quad \begin{cases} MF - MF' = -2a \\ MF + MF' = 2\dfrac{c}{a}x \end{cases}\right)$$
$$\Longrightarrow \left(MF = a - \frac{c}{a}x \quad \text{ou} \quad MF = -a + \frac{c}{a}x\right)$$
$$\Longrightarrow \left(MF^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2\right) \Longrightarrow \left(x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 + c^2 - a^2 = 0\right).$$

On a : $b \neq 0$ et $b^2 = c^2 - a^2$.
Il en résulte que l'on a :

$$(M \in \Gamma') \Longrightarrow \left(-x^2\frac{b^2}{a^2} + y^2 + b^2 = 0\right) \Longrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right) \Longrightarrow (M \in \Gamma).$$

On a donc : $\Gamma' \subset \Gamma$.
Des propositions : $\Gamma \subset \Gamma'$ et $\Gamma' \subset \Gamma$, il résulte que les ensembles Γ et Γ' sont égaux.

Nous énonçons donc le théorème :

2.13 **THÉORÈME : Soit Γ une conique à centre, de foyers F et F′ et de longueur d'axe focal $2a$.**
Si Γ est une ellipse, la proposition suivante est vérifiée :
$\forall M \in P, \quad ((M \in \Gamma) \Longleftrightarrow (MF + MF' = 2a))$
Si Γ est une hyperbole, la proposition suivante est vérifiée :
$\forall M \in P, \quad ((M \in \Gamma) \Longleftrightarrow (|\,MF - MF'\,| = 2a)).$

---

3. Compléments.

Ellipse et cercle.

Nous invitons le lecteur à relire la définition d'une affinité, donnée dans le paragraphe 5.1 du chapitre 6.
On appelle **affinité orthogonale** par rapport à une droite Δ de P et de rapport α l'affinité par rapport à Δ, de direction $\overrightarrow{\Delta^\perp}$ et de rapport α.

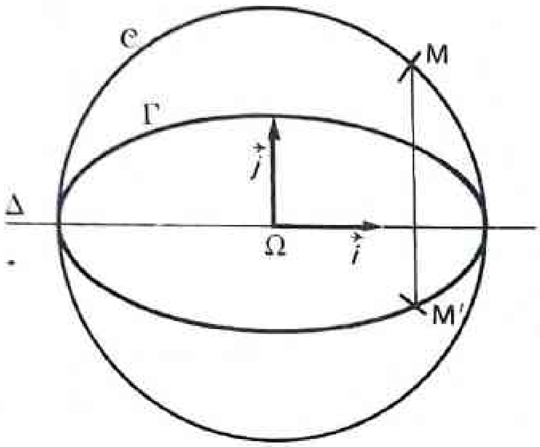
3.1 **THÉORÈME : Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R ; soient α un réel différent de 0, de 1 et de -1 et Δ une droite de P, passant par Ω ; soit f l'affinité orthogonale par rapport à Δ et de rapport α.**
Alors $f(\mathcal{C})$ est une ellipse de centre Ω, de grand axe (resp. de petit axe) la droite Δ si l'on a : $|\,\alpha\,| < 1$ (resp. $|\,\alpha\,| > 1$).

Démonstration :

Soient $\vec{i}$ un vecteur directeur unitaire de Δ et $\vec{j}$ un vecteur de $\vec{P}$ tel que le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé. Dans ce repère le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation : $x^2 + y^2 = R^2$, ou encore : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - 1 = 0$.

Soient M et M′ deux points quelconques de P de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Il résulte de la définition de f que l'on a :

$$(M' = f(M)) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x' = x \\ y' = \alpha y \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{\alpha} y' \end{cases}\right)$$



On a alors :

$$\begin{aligned}(M' \in f(\mathcal{C})) &\Longleftrightarrow (\exists M \in \mathcal{C}, \quad M' = f(M)) \\ &\Longleftrightarrow \left(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = x' \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\alpha} y' \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - 1 = 0\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{x'^2}{R^2} + \frac{y'^2}{\alpha^2 R^2} - 1 = 0\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

L'équation (1) est l'équation d'une ellipse Γ de centre Ω.
Si l'on a : $|\alpha| < 1$, la droite Δ est le grand axe de Γ.
Si l'on a : $|\alpha| > 1$, la droite Δ est le petit axe de Γ. ■

Remarque : Si α est égal à 1 ou -1, l'affinité orthogonale par rapport à Δ et de rapport α transforme le cercle $\mathcal{C}$ en lui-même.

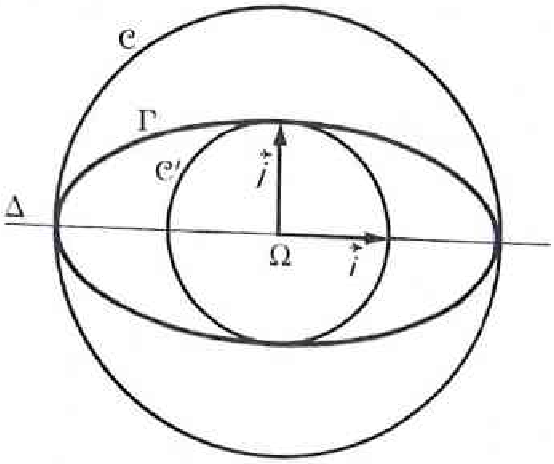
3.2 THÉORÈME : Soit Γ une ellipse de centre Ω, d'axe focal Δ, d'axe non focal Δ' et d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec $a > b > 0$.
Soient $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) le cercle de centre Ω et de rayon a (resp. b) et f (resp. f') l'affinité orthogonale par rapport à Δ (resp. Δ') et de rapport $\frac{b}{a}$ $\left(\text{resp. } \frac{a}{b}\right)$.
On a alors : $f(\mathcal{C}) = \Gamma$ et $f'(\mathcal{C}') = \Gamma$.

Soit $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormé dans lequel Γ a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Démonstration :

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont pour équations respectives : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$ et $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Soient M et M' deux points quelconques de P de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.



Il résulte de la définition de f que l'on a :

$$(M' = f(M)) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a} y \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{a}{b} y' \end{cases}\right)$$

et il résulte de la définition de f' que l'on a :

$$(M' = f'(M)) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x' = \frac{a}{b} x \\ y' = y \end{cases}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} x = \frac{b}{a} x' \\ y = y' \end{cases}\right).$$

On a alors : $\Big((M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{y'^2}{a^2} - 1 = 0\right)$

$\Longleftrightarrow \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0\right) \Longleftrightarrow (f(M) \in \Gamma)\Big)$

et : $\Big((M \in \mathcal{C}') \Longleftrightarrow \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{b^2}{a^2}\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0\right)$

$\Longleftrightarrow \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0\right) \Longleftrightarrow (f'(M) \in \Gamma)\Big)$

On a donc : $f(\mathcal{C}) = f'(\mathcal{C}') = \Gamma$. ■

Construction de la tangente à une conique.

3.3 THÉORÈME : Soit Γ une conique de foyer F et de directrice associée D. La tangente à Γ en tout point M de Γ qui n'appartient pas à l'axe focal coupe D en un point T tel que l'on ait : $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = 0$.

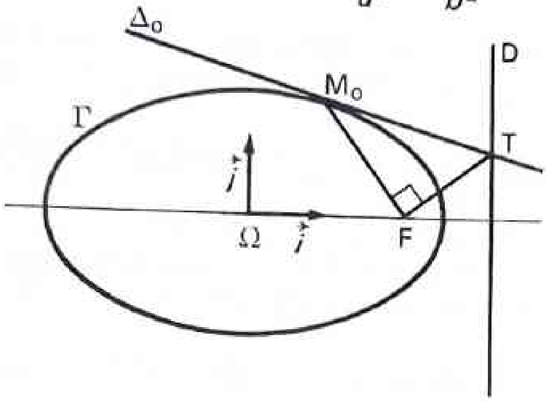
Démonstration :

Nous faisons cette démonstration dans le cas où Γ est une ellipse. Les calculs sont analogues dans les deux autres cas.

Soient Ω le centre de l'ellipse Γ et $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormé dans lequel Γ a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec : $a > b > 0$.

Soient $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ les coordonnées de F et $x = \frac{a^2}{c}$ l'équation de D dans ce repère.

Soient M_0 un point de Γ qui n'appartient pas à l'axe focal et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. On a : $y_0 \neq 0$ et $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$.



La tangente Δ_0 en M_0 à Γ a pour équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:
$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$.

Elle n'est pas parallèle à D. L'intersection de Δ_0 et de D est donc un singleton ; notons-le $\{T\}$. Les coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ du point T sont solution du système :

$$\begin{cases} x = \frac{a^2}{c} \\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0 \end{cases} ; \text{ elles sont donc égales à : } \begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} \\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \end{pmatrix}.$$

Les composantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ des vecteurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{FT}$ sont donc respectivement : $\begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \end{pmatrix}$.

Calculons $\overrightarrow{FM} . \overrightarrow{FT}$. On a :
$$\overrightarrow{FM} . \overrightarrow{FT} = (x_0 - c)\left(\frac{a^2}{c} - c\right) + b^2\left(1 - \frac{x_0}{c}\right)$$
$$= \frac{1}{c}\left((x_0 - c)(a^2 - c^2) + b^2(c - x_0)\right).$$

Il résulte de l'égalité : $a^2 - c^2 = b^2$ que l'on a : $\overrightarrow{FM} . \overrightarrow{FT} = 0$. ■

Application.

Pour construire la tangente Δ_0 en M_0 à Γ, on trace la droite passant par F et perpendiculaire à (FM_0) ; cette droite coupe la droite D en un point T. La droite (M_0T) est la tangente cherchée.

EXERCICES

Dans les exercices de ce chapitre, $\vec{P}$ désigne un plan vectoriel réel euclidien, P un plan affine associé à $\vec{P}$ et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P.
Dans la plupart des cas, les coordonnées des points et les équations des courbes sont données dans le repère $\mathcal{R}$. A chaque fois qu'il n'en est pas ainsi, nous l'indiquons dans l'énoncé.

Étude des courbes d'équation : $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$.

1 Soit Γ la parabole d'équation : $y^2 + 4x - 16 = 0$.
Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de Γ. Dessiner Γ.

2 Mêmes questions que pour le n° 1 avec la parabole d'équation :
$y^2 + 2y - 6x + 10 = 0$.

3 Mêmes questions que pour le n° 1 avec la parabole d'équation :
$x^2 - 4x + 10y - 21 = 0$.

4 Soient λ un réel non nul et Γ_λ la parabole d'équation :
$y^2 - \frac{2}{\lambda}y + 2\lambda x + \frac{1}{\lambda^2} - 11\lambda^2 = 0$.
1° Trouver les coordonnées du sommet S_λ de Γ_λ et l'équation de l'axe de symétrie Δ_λ de Γ_λ.
2° Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets S_λ quand λ décrit $\mathbb{R}^*$; donner une équation de $\mathcal{S}$.
Trouver la nature de $\mathcal{S}$ et en donner les éléments géométriques remarquables.
3° Dessiner sur un même graphique Γ_1, Γ_{-1} et $\mathcal{S}$.

5 Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation : $4x^2 - 24x + 9y^2 = 0$.
Démontrer qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}'$ de P dans lequel $\mathcal{C}$ a une équation de la forme : $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$, où α et β sont deux réels.
Trouver la nature de $\mathcal{C}$ et déterminer ses éléments de symétrie. Donner l'équation dans $\mathcal{R}'$, puis dans $\mathcal{R}$, des tangentes aux points d'abscisse 2 dans $\mathcal{R}$.
Tracer $\mathcal{C}$ en prenant 2 cm pour unité sur chaque axe.

6 Soit Γ la conique d'équation : $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.
Donner la nature de Γ ; déterminer ses axes, ses sommets et éventuellement ses asymptotes ; dessiner Γ.
Donner l'équation de la tangente à Γ en un point (x_0, y_0) de Γ.

7 Mêmes questions que pour le n° 6 avec la conique Γ d'équation :
$9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$.

8 Mêmes questions que pour le n° 6 avec la conique Γ d'équation :
$y^2 - 3x^2 - 4y - 6x - 2 = 0$.

9 Mêmes questions que pour le n° 6 avec la conique Γ d'équation :
$4y^2 - x^2 + 8y + 2x - 1 = 0$.

10 Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M′ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont : $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1. \end{cases}$

1° Quel est l'ensemble des points invariants par f? Reconnaître la nature géométrique de f.

2° Soit Γ la conique d'équation $xy = 1$ et soit Γ' l'image de Γ par f.

Quelle est l'équation de Γ' ? Définir les éléments de symétrie de Γ' et construire Γ et Γ' sur un même graphique.

11 Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M′ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + y \\ y' = \dfrac{1}{2}x - y\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

1° Démontrer que f est involutive.

2° Démontrer que l'ensemble des milieux de MM′ est une droite fixe.

3° Soient A le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ et A′ son image par f. Démontrer que la famille $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{AA'})$ est liée. Reconnaître en f une transformation usuelle.

4° Soit (H) l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2x}$ et soit (H′) l'image de (H) par f.

a) Donner une équation de (H′).

b) Construire (H) et (H′) sur un même graphique.

c) Donner les équations des asymptotes de (H′).

d) Donner l'équation de (H′) par rapport à ses asymptotes.

12 Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point M′ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y. \end{cases}$

Soit Γ_1 l'image par f de l'hyperbole Γ d'équation : $x^2 - y^2 = 20$ dans $\mathcal{R}$.
Construire Γ et Γ_1. Déterminer avec trois décimales exactes les abscisses des points d'intersection de Γ et de Γ_1.

13 Soient m un réel et E_m la conique d'équation : $y^2 = m(x^2 - 1) + 2x$.

1° Démontrer que, pour tout réel m, la conique E_m passe par deux points fixes A et B.

2° Construire E_0, E_1 et E_{-1}.

3° Soient D la droite d'équation : $x = -\dfrac{1}{2}$ et N le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Soit Δ la droite passant par N et de coefficient directeur le réel t.
Trouver une condition nécessaire et suffisante qui doit lier λ et t pour que la droite Δ soit tangente à E_0.
En déduire que, de tout point N de D, on peut mener deux tangentes à E_0 qui sont perpendiculaires entre elles.

4° Démontrer que, pour tout réel non nul m, la conique E_m a un centre de symétrie.
Quel est l'ensemble R_1 des réels m pour lesquels E_m est une ellipse?
Exprimer, en fonction de m, la longueur des axes de l'ellipse E_m et préciser les supports de ces deux axes.

14 Soient λ un réel et C_λ la conique d'équation : $y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \dfrac{\lambda}{4} = 0.$

Discuter, suivant les valeurs de λ, la nature de C_λ. Donner, le cas échéant, les coordonnées de son centre de symétrie et les équations de ses asymptotes.

15 Soient λ un réel et C_λ la courbe d'équation :
$(\lambda^2 - 1)y^2 - 2\lambda xy + x^2 + 2y + 3 = 0.$

1° Démontrer que le point Ω_λ de coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$ est centre de symétrie de C_λ.

2° On pose : $\vec{I} = (\lambda - 1)\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = (\lambda + 1)\vec{i} + \vec{j}$.

a) Démontrer que, pour tout réel λ, la famille $(\vec{I}, \vec{J})$ est une base de $\vec{P}$.

b) Trouver l'équation de C_λ dans le repère $(\Omega_\lambda, \vec{I}, \vec{J})$.

c) Montrer que C_λ est une hyperbole dont on précisera les équations des asymptotes dans le repère $\mathcal{R}$.

16 Soient λ un réel et C_λ la courbe d'équation : $y^2 - 2\lambda y = x^2 - \lambda x$.

1° Quelle est la nature de C_λ ? Déterminer ses asymptotes.

2° Soient S_λ et S'_λ les sommets de C_λ. Donner les coordonnées des points S_λ et S'_λ et déterminer l'ensemble de ces points lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

17 A tout point M de P, de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on associe son affixe $z = x + iy$.

Trouver l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que les points M, M′, M″, d'affixes respectives z, z^2, z^5 soient alignés.

Étudier et dessiner l'ensemble E.

18 Soit f l'application de P dans P qui associe à tout point M d'affixe z, le point M′ d'affixe $z' = z^2 - 6iz - 10$.

1° Démontrer que f admet deux points invariants I et J. On appellera I le point invariant qui a une abscisse positive.

2° Démontrer que les droites passant par I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour images par f les courbes d'équations respectives :

$x = -\dfrac{y^2}{16} + 3$ et $x = \dfrac{y^2}{4} - 2$.

Construire ces deux courbes et calculer les coordonnées de leurs points d'intersection.

19 Soient A et B deux points de P, tels que l'on ait : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}$ et dont les coordonnées respectives sont $\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$.

Soit M un point de P de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Soit (E) l'ensemble des points M tels que B soit l'image de A par la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π.

1° Quelle est la relation qui lie les affixes des points A, B, M ? Donner une équation de (E). Quels sont les éléments de symétrie de (E) ?

2° On pose : $\vec{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$.

Donner une équation de (E) dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. En déduire la nature de (E) et déterminer ses éléments remarquables.

20 A tout point M de P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on associe son affixe $z = x + iy$.

1° Soit Γ l'ensemble des points M de P dont les affixes z satisfont à :
$|z + 2\bar{z} + 1| = \sqrt{3}\,|z + \bar{z}|$.
Démontrer que Γ a pour équation : $y^2 = 3x^2 - 6x - 1$.

2° Trouver la nature de Γ ; déterminer ses éléments de symétrie et ses asymptotes ; construire Γ.

21 Soient A, B, B′ trois points non alignés de P, tels que les droites (AB) et (AB′) ne soient pas perpendiculaires à la droite (BB′).
Soit M un point quelconque de P. On désigne par Δ la perpendiculaire à (AB′) passant par M et par C, C′, m les points d'intersection respectifs de Δ avec les droites (AB), (AB′), (BB′). Soit Γ l'ensemble des points M de P tels que l'on ait :
$\overrightarrow{mM}^2 = \overrightarrow{mC} \cdot \overrightarrow{mC'}$.
Montrer que Γ est une conique de sommets B et B′. Discuter la nature de Γ.

22 Soient A, A′, M trois points non alignés de P. Démontrer qu'il existe au plus une conique dont (AA′) soit un axe, A et A′ des sommets et qui passe par M. Discuter suivant la position de M.

Foyer et directrice.

23 Déterminer le foyer et la directrice de la parabole d'équation :
$y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$.

24 Déterminer le foyer et la directrice de la parabole d'équation :
$x^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

25 Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de la conique d'équation :
$3x^2 + 4y^2 + x - 39 = 0$.

26 Même question que pour le n° 25 avec la conique d'équation :
$x^2 + 2y^2 + 8y + 6 = 0$.

27 Même question que pour le n° 25 avec la conique d'équation :
$16x^2 + 9y^2 + 8x - 12y - 20 = 0$.

28 Même question que pour le n° 25 avec la conique d'équation :
$-3x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$.

29 Même question que pour le n° 25 avec la conique d'équation :
$-16x^2 + 9y^2 - 32x - 18y - 25 = 0$.

30 Même question que pour le n° 25 avec la conique d'équation :
$4x^2 - 9y^2 + 4x + 12y - 4 = 0$.

31 Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe $z' = (1 + i\sqrt{3})\,\bar{z}$.
Soit Γ' la courbe d'équation : $6x^2 - 6xy\sqrt{3} + 12y - 16 = 0$.
Trouver l'équation de $f^{-1}(\Gamma')$. Donner la nature de cette courbe ainsi que ses éléments géométriques remarquables.

32 Soient λ un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et E_λ l'ellipse d'équation : $y^2 = 2x - \frac{x^2}{\lambda}$.

1° Donner les coordonnées du centre et des sommets de E_λ. Soit S l'ensemble des sommets du grand axe des ellipses E_λ quand λ décrit $]0, 1[$. Tracer S et en donner les éléments géométriques remarquables.

2° Donner les coordonnées des foyers de E_λ. Soit T l'ensemble des foyers des ellipses E_λ quand λ décrit $]0, 1[$. Tracer T sur le même graphique que S.

33 Soit λ un réel différent de 0 et de 9. Soit C_λ la courbe d'équation :
$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - 9} - 1 = 0$.

1° Déterminer le sous-ensemble D_1 de $\mathbb{R}$ tel que l'on ait : $\forall \lambda \in D_1, \quad C_\lambda \neq \varnothing$.

2° Déterminer le sous-ensemble D_2 de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout λ de D_2, la courbe C_λ soit un cercle.

3° Déterminer le sous-ensemble D_3 de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout λ de D_3, la courbe C_λ soit une ellipse. Que peut-on dire des foyers ?

4° Déterminer le sous-ensemble D_4 de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout λ de D_4, la courbe C_λ soit une hyperbole. Que peut-on dire des foyers ? Existe-t-il des éléments λ de D_4 tels que C_λ soit une hyperbole équilatère ?

5° Démontrer que, par tout point de P, il passe deux courbes C_λ et que les tangentes respectives en ce point à ces deux courbes sont perpendiculaires.

34 Soient D la droite de P d'équation : $x = 6$ et (E) l'ellipse de foyer O, de directrice associée D et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

1° Donner une équation de (E).

2° Soient x un réel de $[0, 2\pi[- \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{P}$ tel que l'on ait : $\widehat{\text{angle}\,(\vec{i}, \vec{u})} = x \quad (2\pi)$.

Soient Δ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ et A le point d'intersection de D et de Δ. On pose $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{u}$.

Soient M et M' les points d'intersection de (E) et de Δ.

On pose : $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM'} = \lambda'\vec{u}$ avec : $\lambda > 0$ et $\lambda' < 0$.

a) Calculer λ en fonction de x.

b) Sans nouveaux calculs, démontrer que l'on a : $\lambda' = \frac{-6}{2 - \cos x}$.

c) Démontrer l'égalité : $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \frac{2}{a}$.

35 Soient a un réel strictement positif et m un réel quelconque.
Soit C_m la conique d'équation : $4mx^2 + 4max + 16y^2 - m^2a^2 = 0$.

1° Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de C_m.

2° On suppose que l'on a : $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $m = -4$, et on appelle (H) la courbe obtenue.

Montrer que (H) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les foyers, les sommets, les asymptotes et l'excentricité. Construire (H).

3° On suppose que a est quelconque et que m est égal à 3 et on appelle (E) la courbe obtenue.

a) Démontrer que (E) est une ellipse dont on déterminera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. Construire (E).

b) Soit M un point d'abscisse x de (E). Calculer OM en fonction de a et de x.

c) On pose $\theta = \text{angle}\,\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})}$ (2π). Calculer OM en fonction de a et de θ.

d) Calculer l'affixe z de M en fonction de a et de θ.

e) Soit M' (resp. M'') le point de (E) dont l'affixe z' (resp. z'') a pour argument, modulo 2π, le réel α (resp. $\alpha + \pi$). Calculer $z' - z''$. Calculer la longueur M'M''. Déterminer l'ensemble des points N, dont l'affixe Z satisfait à :
$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}$, quand α décrit $\mathbb{R}$.

36 Déterminer l'équation de la parabole de foyer le point F de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et de directrice la droite D d'équation : $x = 3$.

37 Soient F et F' deux points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1° Donner l'équation générale des ellipses de foyers F et F'.

2° Combien y a-t-il d'ellipses d'excentricité égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$? Les déterminer.

3° Combien y a-t-il d'ellipses qui admettent pour directrice associée à F la droite d'équation : $x = x_0$? Discuter suivant le réel x_0 et donner les équations de ces ellipses.

38 Déterminer la nature et l'équation de la conique d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{3}$, de foyer le point F de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de directrice associée la droite d'équation : $x = \sqrt{2}$.

39 Déterminer la nature et l'équation de la conique d'excentricité 5, de foyer le point F de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de directrice associée la droite d'équation : $y = 1$.

40 Soient F et F' deux points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

1° Donner l'équation générale des hyperboles de foyers F et F'.

2° Combien y a-t-il d'hyperboles équilatères ? Les déterminer.

3° Soit M le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il d'hyperboles passant par M ? D'une manière générale, soit M_0 le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
Combien y a-t-il d'hyperboles passant par M_0 ? Discuter et donner les équations de ces hyperboles.

4° Soit A le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Combien y a-a-il d'hyperboles de sommet A ? D'une manière générale, soit A_0 le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il d'hyperboles admettant A_0 pour sommet ? Discuter et donner les équations de ces hyperboles.

41 Soient A un point et Δ une droite de P. Soit a un réel strictement positif.

1° Si M est un point quelconque de P, on désigne par M′ son symétrique par rapport à Δ.

Quel est l'ensemble des points M de P tels que l'on ait : $AM + AM' = 2a$?

2° Plus généralement, soit f une isométrie affine de P.

Quel est l'ensemble des points M de P tels que l'on ait : $AM + Af(M) = 2a$?

42 Soient a et b deux réels strictement positifs et Γ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

On désigne par F et F′ les foyers de Γ.

Soient M un point quelconque de Γ et $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les cercles de centres respectifs F et F′ passant par M. On désigne par A, B, A′, B′ les points de contacts sur $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement des tangentes communes à $(\mathcal{C})$ et à $(\mathcal{C}')$; ces dernières sont donc les droites AA′ et BB′.

1° Soit G′ la projection orthogonale de F′ sur la droite (FA).

Montrer que l'on a : $FG' = 2a$.

2° Montrer que les droites (FA) et (FB) sont respectivement parallèles aux asymptotes de Γ.

3° En déduire une construction géométrique des asymptotes d'une hyperbole connaissant ses foyers et un point.

43 Soient trois points distincts A, A′, F de P. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des ellipses E qui passent par A et par A′ et qui admettent F pour foyer. Soit F′ le second foyer d'une ellipse E.

Déterminer l'ensemble des foyers F′ associé à l'ensemble $\mathcal{E}$.

44 Soient A et F deux points distincts de P. Soit e un réel supérieur à 1.

Déterminer toutes les hyperboles de sommet A, de foyer F et d'excentricité e. Donner leurs équations dans un repère orthonormé d'origine F et de premier vecteur $\frac{\overrightarrow{AF}}{\|\overrightarrow{AF}\|}$. Dessiner ces hyperboles.

45 Soient Ω et F deux points distincts du plan. Soit e un réel supérieur à 1.

Déterminer les hyperboles de centre Ω, de foyer F et d'excentricité e. Donner leurs équations dans un repère orthonormé d'origine Ω et de premier vecteur $\frac{\overrightarrow{\Omega F}}{\|\overrightarrow{\Omega F}\|}$.

Dessiner ces hyperboles.

46 Déterminer l'équation de l'ellipse de centre O, de directrice la droite D d'équation : $x = 4$ et d'excentricité $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

47 Soient F le point de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et Δ la droite d'équation : $y = \sqrt{3}\,x$.

Donner les équations des hyperboles d'excentricité $\sqrt{2}$, dont un foyer est F et dont une asymptote est Δ. Dessiner ces hyperboles.

48 Soient A le point de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et Δ la droite d'équation : $y = x$.

Donner les équations des hyperboles d'excentricité 3, dont un sommet est A et dont une asymptote est Δ. Dessiner ces hyperboles.

Ellipse et cercle.

49 Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$.

1° Démontrer que le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est orthonormé.

2° Donner une équation de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

3° Déterminer la nature géométrique de l'application f de P dans P qui, à tout point M de P de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, associe le point M′ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, sont : $\begin{cases} X' = -3X \\ Y' = Y. \end{cases}$

4° Donner une équation dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par f. Préciser la nature et les éléments géométriques remarquables de $(\mathcal{C}')$.

50 Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

1° Déterminer le centre et le rayon de $(\mathcal{C})$; construire $(\mathcal{C})$.

2° On transforme $(\mathcal{C})$ par une affinité orthogonale d'axe la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{i}$ et de rapport $\frac{1}{3}$.

a) Donner l'équation de l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$.

b) Interpréter le résultat obtenu et construire la courbe $(\mathcal{C}')$.

51 Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de rayon $\sqrt{2}$ et de centre le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit f l'affinité orthogonale d'axe la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{j}$ qui transforme le point A en le point A′ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Étudier et construire l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par f.

Donner une équation de $(\mathcal{C}')$.

Problèmes.

52 Soient u un réel et f_u l'application de P dans P qui à tout point m de P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M dont les coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ sont : $\begin{cases} X = x + 2u \\ Y = ux + y + u^2. \end{cases}$

1° Démontrer que f_u est bijective ; déterminer f_u^{-1}.

2° Soit E l'ensemble des applications f_u lorsque u décrit $\mathbb{R}$.

Démontrer que $(E, \circ)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

3° Démontrer que la parabole Γ, d'équation : $y = \frac{x^2}{4}$, est globalement invariante par f_u.

4° On pose :

$M_1 = f_{\frac{1}{2}}(O)$, $M_2 = f_{\frac{1}{2^2}}(M_1) \ldots$, $M_n = f_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1}) \ldots$

On définit ainsi une suite de points de P.

a) Exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ de M_n dans le repère $\mathcal{R}$ en fonction de n.

Le point M_n a-t-il une position limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Déterminer cette position.

b) Soit G_n l'équibarycentre des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Exprimer en fonction de n les coordonnées $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ de G_n.

Le point G_n a-t-il une position limite quand n tend vers $+\infty$.
Déterminer cette position.

c) Soit I_n le point d'intersection des tangentes à Γ aux points M_n et M_{n+1}.

Exprimer, en fonction de n, les coordonnées $\begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix}$ de I_n.

Montrer que, pour tout entier n, le point I_n appartient à une parabole Γ'.

53 A. Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E. Soit f l'application de E dans E qui, à tout vecteur $\vec{V}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur $\vec{V'}$ dont les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ sont :
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \\ z' = y + z. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est bijective ; déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f.

2° On définit une suite de vecteurs $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n, \ldots$ par récurrence, de la manière suivante :

- $\vec{V}_0$ est le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \vec{V}_n = f(\vec{V}_{n-1})$.

Démontrer que les composantes $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\vec{V}_n$ sont :
$$\begin{cases} x_n = x_0 \\ y_n = n\, x_0 + y_0 \\ z_n = \dfrac{n(n-1)}{2} x_0 + n y_0 + z_0. \end{cases}$$

B. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E et O un point de $\mathcal{E}$.

A tout entier naturel n, on associe le point M_n de $\mathcal{E}$ défini par : $\overrightarrow{OM_n} = \vec{V}_n$.

1° Quelle est la disposition des points M_n si l'on a : $x_0 = y_0 = 0$?

2° Quelle est la disposition des points M_n si l'on a : $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$?

3° On suppose que l'on a : $x_0 \neq 0$.

Démontrer que les points M_n sont coplanaires et appartiennent à une parabole Γ dont on donnera l'équation dans le repère $(M_0, \vec{j}, \vec{k})$.

4° On suppose que l'on a : $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

a) Quelle est l'équation de Γ dans ce cas particulier ? Construire dans le plan commun à tous les points M_n, la parabole Γ et marquer les points M_1, M_2 et M_3.

b) Démontrer que les milieux des segments $[M_n, M_{n+1}]$ appartiennent à une même parabole Γ' qui est elle-même tangente à ces segments.

54 Soit a un réel supérieur ou égal à 1. On considère les coniques $\mathcal{C}_a$ d'équation : $y^2 = ax^2 + 2x - 1$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1° Déterminer, suivant le réel a, la nature de la conique $\mathcal{C}_a$.

Préciser le centre éventuel, le ou les foyers, le ou les sommets et les asymptotes éventuelles.

2° On s'intéresse aux coniques $\mathcal{C}_a$ qui sont des ellipses.
Quel est l'ensemble des sommets de leurs petits axes?

3° On s'intéresse aux coniques $\mathcal{C}_a$ qui sont des hyperboles.
Démontrer que les tangentes à la parabole d'équation : $y^2 = 4x$, autres que la tangente au sommet, forment le même ensemble que les asymptotes de ces hyperboles.

4° Toutes les coniques $\mathcal{C}_a$ ont un foyer fixe que l'on désigne par F.
Soient M un point quelconque de $\mathcal{C}_a$ et θ l'angle des vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{FM}$.
Calculer la distance FM en fonction de a et de θ.

(D'après Baccalauréat 1969.)

12. Géométrie descriptive

Les matières exposées dans ce chapitre figurent seulement au programme de Terminale E; cependant les élèves de la section C pourront lire avec profit les pages qui suivent.
Nous rappelons que la Géométrie descriptive est une technique de représentation des ensembles de points d'un espace affine euclidien de dimension 3, noté $\mathcal{E}_3$.
Cette technique possède un langage spécifique, qui est parfois assez éloigné du langage courant et du vocabulaire mathématique précédemment utilisé. C'est cette terminologie particulière que nous emploierons chaque fois qu'il y aura lieu.

1. Constructions élémentaires.

Rotation autour d'un axe vertical (resp. de bout).

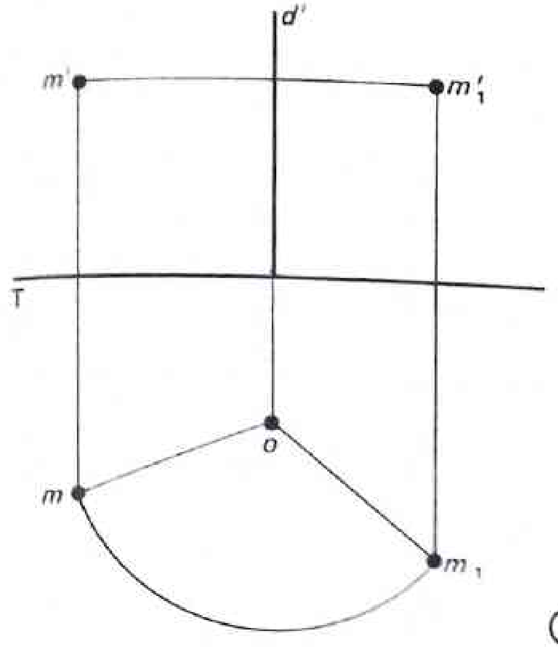
1.1 Considérons une droite D verticale (resp. de bout) et un angle α. Soit r la rotation d'axe D et d'angle α ; cette rotation peut être déterminée par la donnée d'une mesure de l'angle α, par la donnée d'un représentant de cet angle, ou par la donnée d'un point et de son image. Dans le premier cas, nous supposons la droite D orientée vers le haut (resp. vers l'avant).

Rotation d'un point.

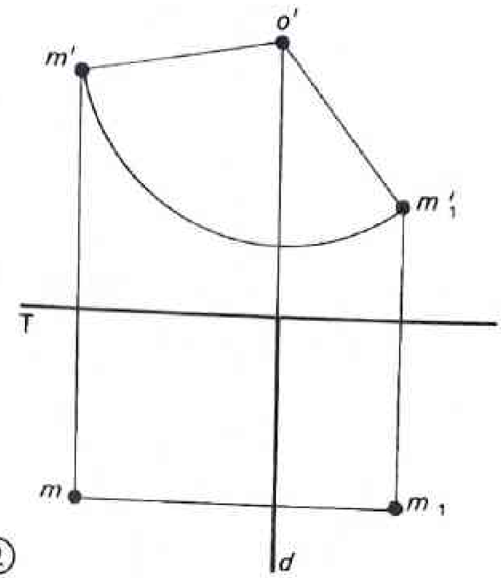
1.2 Soit M un point dont l'épure est le couple (m, m'). Désignons par M_1 l'image de M par la rotation r. Nous nous proposons de déterminer l'épure (m_1, m'_1) du point M dans le cas où l'axe de rotation D est vertical ; soit (o, d') l'épure de la droite D.
Des propriétés de la rotation affine r nous déduisons les constructions suivantes :
1. La projection horizontale m_1 du point M_1 est l'image de m par la rotation dans le plan horizontal de centre o et d'angle α.

Nous avons donc : $om = om_1$ et angle $\widehat{(\overrightarrow{om}, \overrightarrow{om_1})} = \alpha$.
2. Le point m'_1, projection frontale de M_1 appartient à la ligne de rappel du point m_1 et il a la même cote que le point m'.
La figure 1 est l'épure, pour le point (m, m'), de la rotation d'axe vertical (o, d') dans le cas où une détermination de la mesure de l'angle α est $\frac{2\pi}{3}$.

Remarque : Dans le cas où l'axe de la rotation est de bout, il suffit de faire des constructions analogues en échangeant les rôles de la projection horizontale et de la projection frontale (fig. 2).



①



②

Rotation d'une droite.

1.3 L'image d'une droite Δ par une rotation r d'axe D et d'angle α est une droite Δ_1. Pour déterminer Δ_1, il suffit de déterminer les images M_1 et N_1 de deux points distincts M et N de Δ.

La figure 3 est l'épure, pour la droite (δ, δ'), de la rotation d'axe vertical (o, d') dans le cas où une détermination de la mesure de l'angle α est $\frac{2\pi}{3}$.

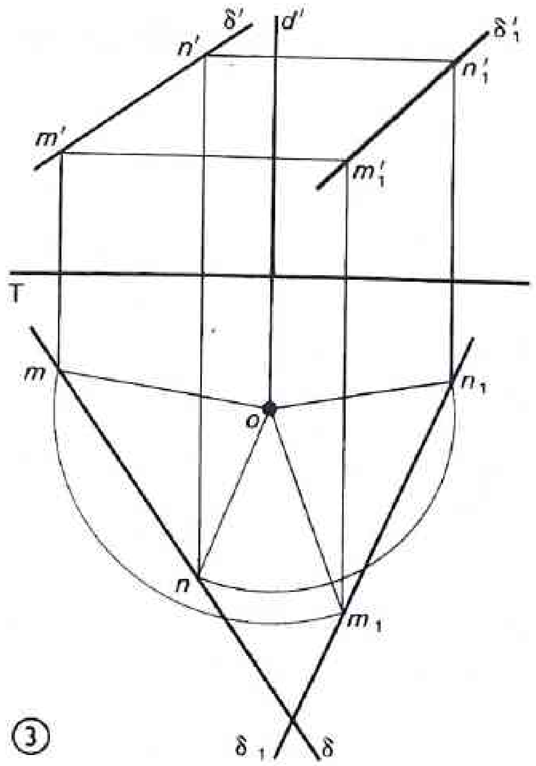
Sur la projection horizontale, nous avons les quatre égalités :

$$om = om_1,\ \text{angle}\ \widehat{(\overrightarrow{om}, \overrightarrow{om_1})} = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)\,;$$

$$on = on_1,\ \text{angle}\ \widehat{(\overrightarrow{on}, \overrightarrow{on_1})} = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi).$$

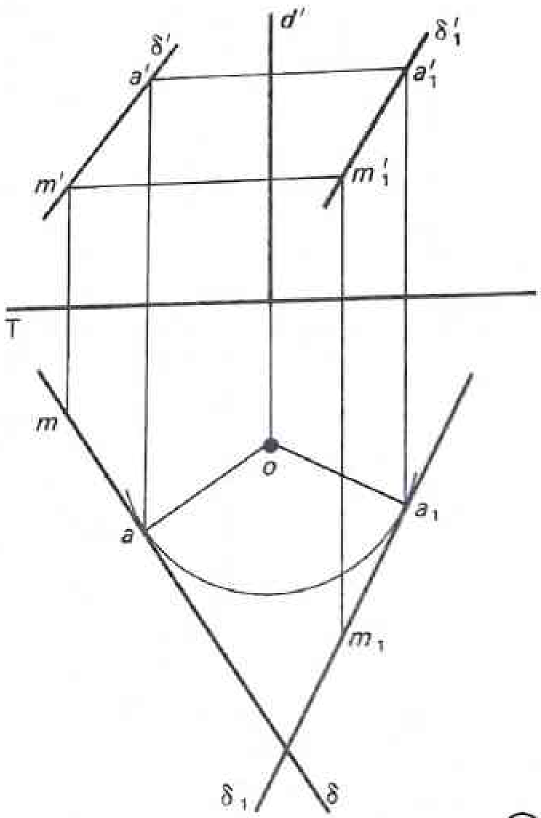
Sur la projection frontale, le point m'_1 (resp. n'_1) appartient à la ligne de rappel du point m_1 (resp. n_1) ; la cote du point m'_1 (resp. n'_1) est égale à la cote du point m' (resp. n').

La droite (δ_1, δ'_1) est alors la droite $(m_1n_1, m'_1n'_1)$.

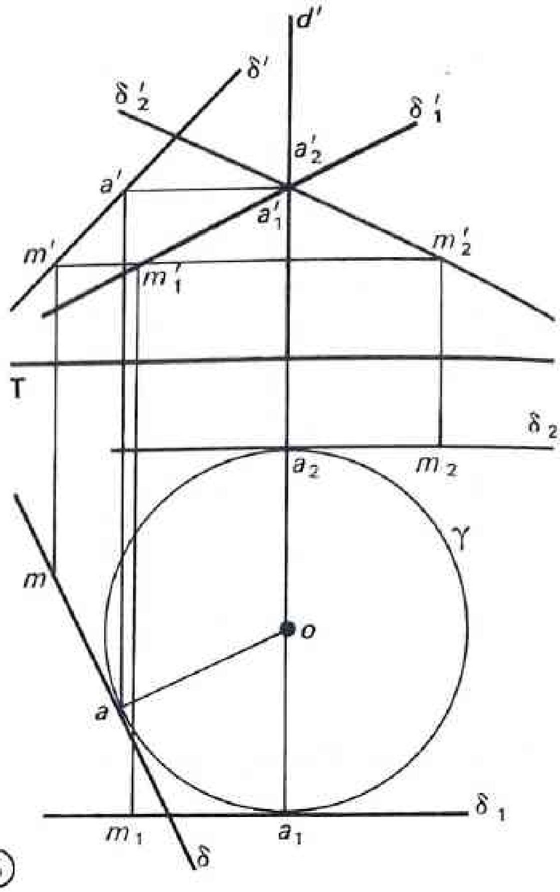


③

Remarque : Soient a la projection orthogonale de o sur δ et γ le cercle de centre o qui passe par a. La droite δ est tangente à γ ; de plus nous avons : $oa = oa_1$ et la droite δ_1 est tangente en a_1 à γ (fig. 4).



4



5

Rendre une droite frontale par rotation autour d'une verticale.

1.4 Le titre précédent fait partie du vocabulaire spécifique de la géométrie descriptive. Le problème à résoudre est le suivant :

Soient une droite verticale D et une droite Δ non frontale ; on se propose de déterminer une rotation r d'axe D telle que l'image Δ_1 de Δ par r soit une droite frontale, et on cherche l'épure de cette droite Δ_1. Soient (o, d') l'épure de l'axe de rotation D et (δ, δ') l'épure de la droite Δ (fig. 5).

Puisque Δ n'est pas frontale, elle n'est pas verticale, et par suite, δ est une droite ; désignons par a la projection orthogonale de o sur δ et traçons le cercle γ de centre o et de rayon oa. L'image de Δ par la rotation r admet pour projection horizontale une tangente au cercle γ ; de plus l'image de Δ est une droite frontale si et seulement si sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre.

Il existe deux droites tangentes à γ et parallèles à la ligne de terre, la droite δ_1 et la droite δ_2. Soit a_1 (resp. a_2) le point de contact de γ et de δ_1 (resp. δ_2) ; il existe deux rotations qui rendent Δ frontale : les rotations r_1 (resp. r_2) d'axe (o, d') et d'angle $(\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{oa_1})$ (resp. $(\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{oa_2})$).

Pour tracer la projection frontale δ'_1 (resp. δ'_2) il suffit de déterminer l'image par r_1 (resp. r_2) d'un point (m, m') de la droite (δ, δ') distinct de (a, a').

Distance de deux points.

1.5 Le problème à résoudre est le suivant :

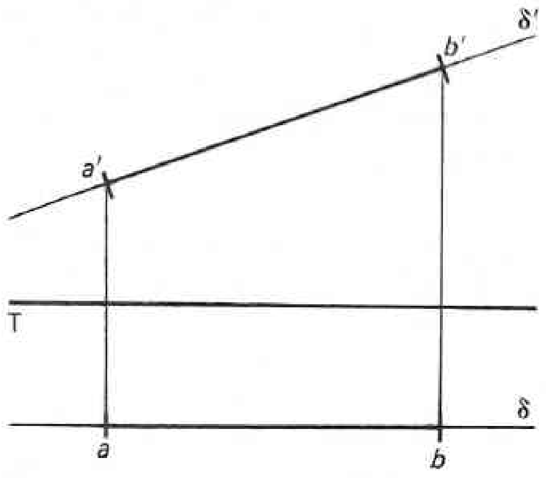
Soient A et B deux points de l'espace affine euclidien déterminés par leurs épures respectives (a, a') et (b, b') ; on se propose de déterminer un segment isométrique au segment $[A, B]$.

Ce problème a déjà été traité en Première (tome 2, p. 260) par la méthode du changement de plan frontal de projection.

Nous en donnons une nouvelle solution par rotation autour d'une verticale. Soit Δ la droite qui passe par les points A et B ; nous distinguons deux cas : Δ est parallèle à au moins un des plans de projection ou Δ n'est parallèle à aucun des deux plans de projection.

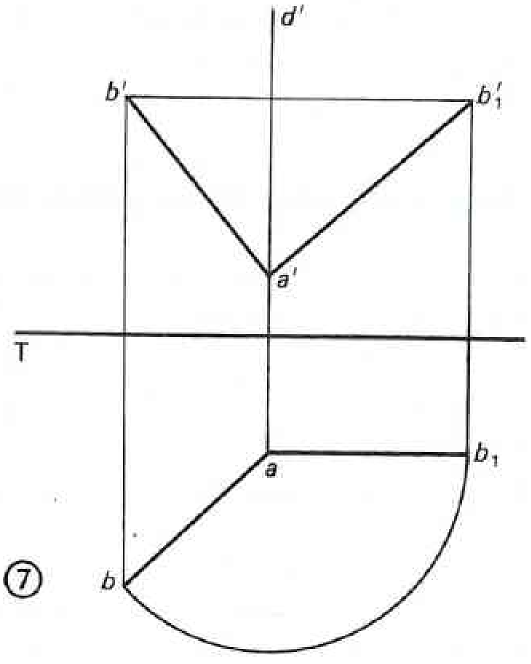
Premier cas.

Supposons que Δ soit frontale (resp. horizontale). Le segment $[a', b']$ (resp. $[a, b]$) est isométrique au segment $[A, B]$. La distance AB est alors égale à la distance $a'b'$ (resp. ab) (fig. 6).



⑥

⑦



Deuxième cas.

Supposons que Δ ne soit ni horizontale ni frontale.

Nous rendrons alors Δ frontale par rotation autour d'une verticale D. Choisissons, par exemple, pour D la verticale qui passe par A.

Soient (a, d') l'épure de D et r une rotation d'axe D qui rend frontale la droite Δ. Le point A qui appartient à D est invariant par r.

Soit B_1 l'image de B ; sur la projection horizontale nous avons : $ab = ab_1$ et le point b_1 appartient à la parallèle menée par a à la ligne de terre. Sur la projection frontale, le point b'_1 appartient à la ligne de rappel de b_1 et la cote de b'_1 est égale à celle de b' (fig. 7).

Le segment $[A, B]$ est isométrique au segment $[A, B_1]$ et le segment $[A, B_1]$ est isométrique au segment $[a', b'_1]$.

La distance AB est donc égale à la distance $a'b'_1$.

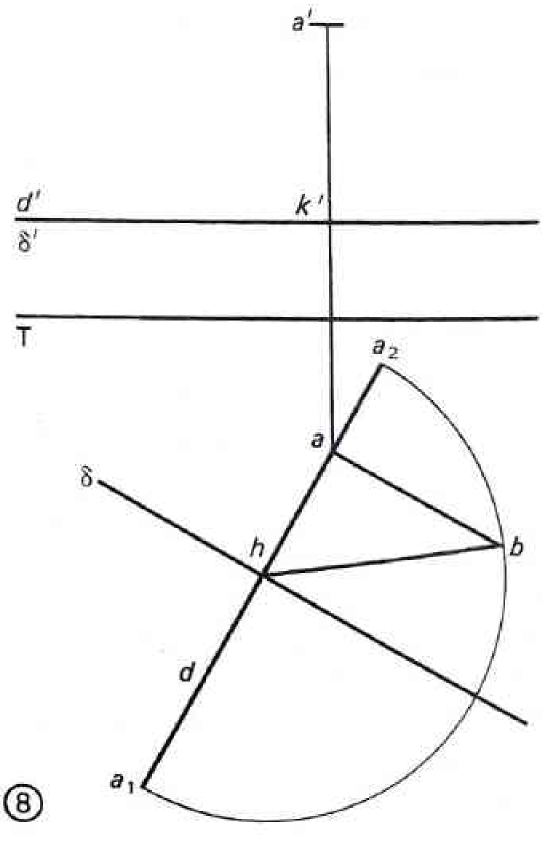
Rabattement d'un plan sur un plan horizontal (resp. frontal).

1.5 Soit P un plan dans lequel nous désirons étudier des propriétés métriques, par exemple des mesures de longueurs ou des mesures d'angles.
Si le plan P est parallèle au plan horizontal (resp. frontal) de projection, la projection orthogonale de P sur le plan auquel il est parallèle est une isométrie. Les mesures de longueurs ou d'angles se font aisément sur l'épure, en projection horizontale (resp. frontale).
Si le plan P n'est parallèle à aucun plan de projection, il existe dans P une direction de droites horizontales et une direction de droites frontales. Considérons alors dans P une droite D horizontale (resp. frontale).
Le rabattement de P, de charnière D, sur le plan horizontal (resp. frontal) est une rotation d'axe D telle que l'image P_1 de P par cette rotation soit un plan horizontal (resp. frontal).
Pour chaque plan P et pour chaque charnière D, il existe deux telles rotations, donc deux façons de faire un rabattement de charnière D. Nous nous bornons à étudier les rabattements sur un plan horizontal, et nous rappelons les résultats de la classe de Première (tome 2, p. 261 à 263).

Rabattements d'un point du plan.

1.6 • Un point du plan P est invariant par le rabattement si et seulement si ce point appartient à la charnière.

• Soient (d, d') l'épure de la charnière D et (a, a') l'épure d'un point A du plan P qui n'appartient pas à la charnière.
Soit h la projection orthogonale de a sur d et δ la droite perpendiculaire en h à d. Désignons par Δ la droite dont la projection horizontale est δ et dont la projection frontale δ' est égale à d' ; cette droite Δ est la droite contenue dans P_1 et perpendiculaire à la charnière D. Soit k' la projection orthogonale de a' sur δ'.
Sur la perpendiculaire en a à δ marquons le point b tel que : $\| \overrightarrow{ab} \| = \| \overrightarrow{a'k'} \|$.
Le cercle de centre h et de rayon hb coupe la droite δ en deux points a_1 et a_2.
Chacun des points a_1 et a_2 est la projection horizontale de l'image de A par l'un des rabattements possibles (fig. 8).
Par abus de langage, on dit que **chacun des points a_1 et a_2 est le rabattement du point a** ; on dit aussi que **a est le relèvement du point a_1 ou du point a_2.**



8

• Chacun des rabattements du plan P sur le plan horizontal est une rotation d'axe D ; soit α_1 (resp. α_2) l'angle de la rotation r_1 (resp. r_2).

Nous avons les égalités : $|\operatorname{Cos}\alpha_1| = |\operatorname{Cos}\alpha_2| = \dfrac{ha}{hb}$, puis les égalités :

$\operatorname{Cos}\alpha_1 = \dfrac{\overline{ha}}{\overline{ha_1}}$ et $\operatorname{Cos}\alpha_2 = \dfrac{\overline{ha}}{\overline{ha_2}}$.

Il en résulte que le point a_1 (resp. a_2) est l'image de a par l'affinité orthogonale par rapport à d et de rapport $\dfrac{1}{\operatorname{Cos}\alpha_1}\left(\text{resp. } \dfrac{1}{\operatorname{Cos}\alpha_2}\right)$.

• Lorsque le plan P et la charnière D sont fixés, le rabattement du plan P est déterminé dès que l'on a choisi le rabattement d'un point A de P qui n'appartient pas à la charnière. Par exemple, si l'on choisit a_1 pour projection horizontale du rabattement de A, le rabattement de tout autre point de P est déterminé.

Rabattement d'une droite du plan ; rabattement d'un autre point du plan.

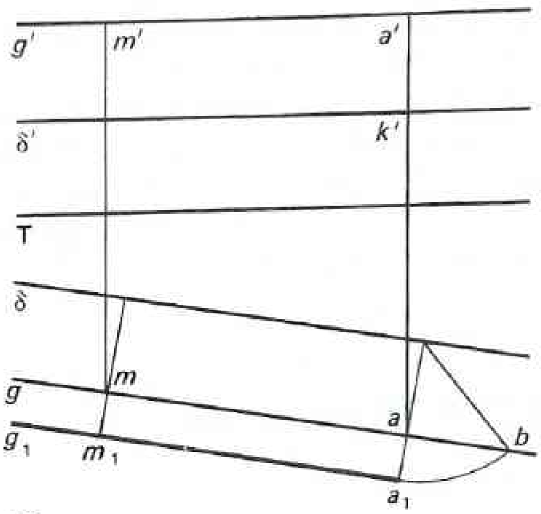
1.7 Supposons choisi le rabattement A_1 d'un point A du plan P qui n'appartient pas à la charnière.

Soit M un point du plan P distinct du point A ; rappelons la détermination du rabattement de la droite (AM), puis du rabattement du point M.

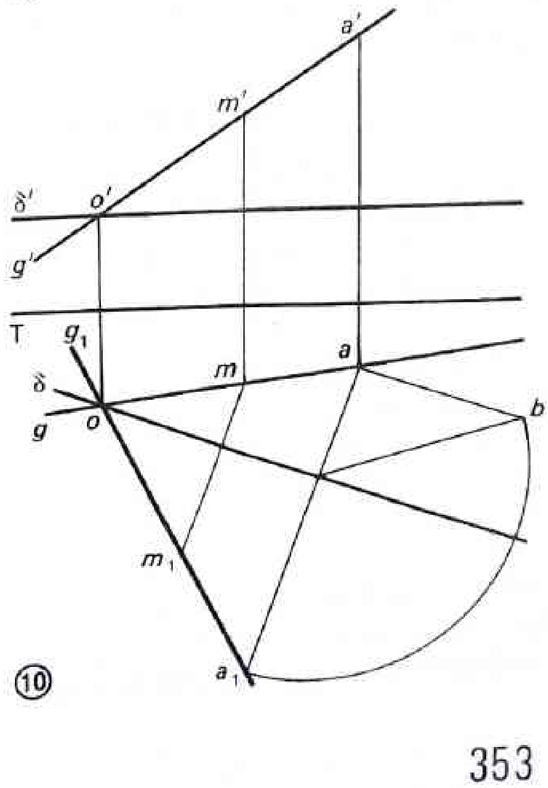
Nous distinguons deux cas : la droite (AM) est parallèle à la charnière, ou la droite (AM) coupe la charnière.

• Si (AM) est parallèle à la charnière, son rabattement est une droite parallèle à la charnière. La projection horizontale de ce rabattement est la droite g_1 qui passe par a_1 et qui est parallèle à la charnière ; la projection horizontale du rabattement du point M est le point m_1 intersection de la droite g_1 et de la perpendiculaire menée par m à d (fig. 9).

• Si (AM) coupe la charnière en un point O, son rabattement est une droite qui coupe aussi la charnière au point O. La projection horizontale de ce rabattement est la droite g_1 qui passe par o et par a_1 ; la projection horizontale du rabattement du point M est le point m_1 intersection de la droite g_1 et de la perpendiculaire menée par m à d (fig. 10).



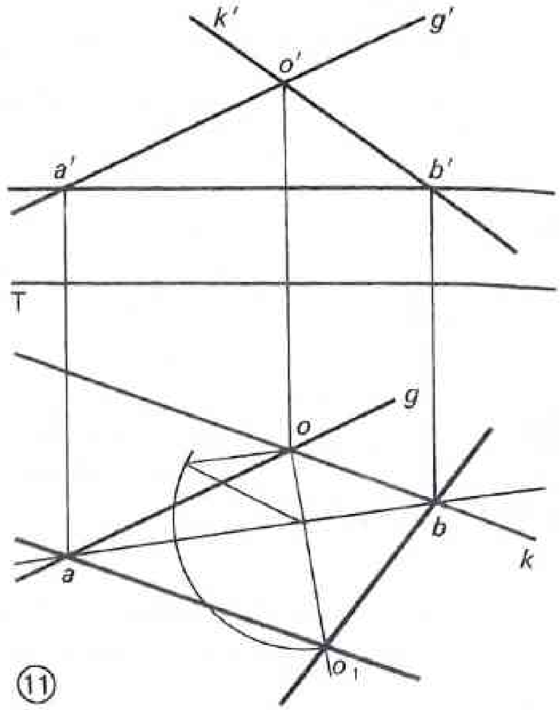
9



10

Angle de deux droites.

1.8 Dans le langage spécifique de la géométrie descriptive, le problème à résoudre est le suivant : Soient G et K deux droites sécantes en un point O. On se propose de déterminer, à l'aide d'un rabattement, deux droites g_1 et k_1 dont la réunion soit isométrique à la réunion $G \cup K$.
Soit (o, o') l'épure du point O ; soient (g, g') et (k, k') les épures respectives des droites G et K. Considérons un plan horizontal Q qui ne passe pas par O, et posons : $G \cap Q = \{A\}$, $K \cap Q = \{B\}$.
Soit (a, a') (resp. (b, b')) l'épure du point A (resp. B). Faisons le rabattement du plan déterminé par les droites G et K en prenant la droite (AB) pour charnière. Nous construisons (fig. 11) la projection horizontale o_1 du rabattement du point O. Désignons par g_1 la droite (o_1a) et par k_1 la droite (o_1b). La réunion des droites g_1 et k_1 est isométrique à la réunion des droites G et K. En particulier l'angle (G, K) est égal à l'angle (g_1, k_1).



(11)

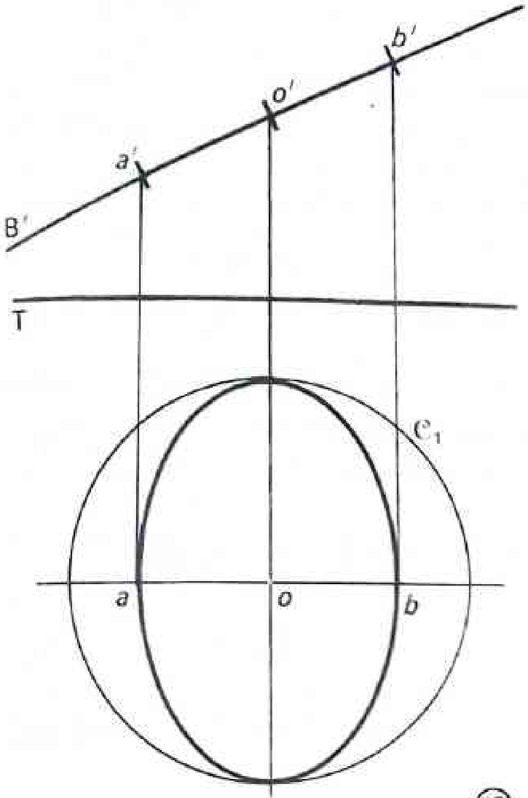
Épure d'un cercle.

1.9 Considérons, dans un plan π, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Nous allons déterminer l'épure du cercle $\mathcal{C}$ dans le cas où le plan du cercle est perpendiculaire à l'un des plans de projection et dans le cas où le plan du cercle n'est perpendiculaire à aucun plan de projection.

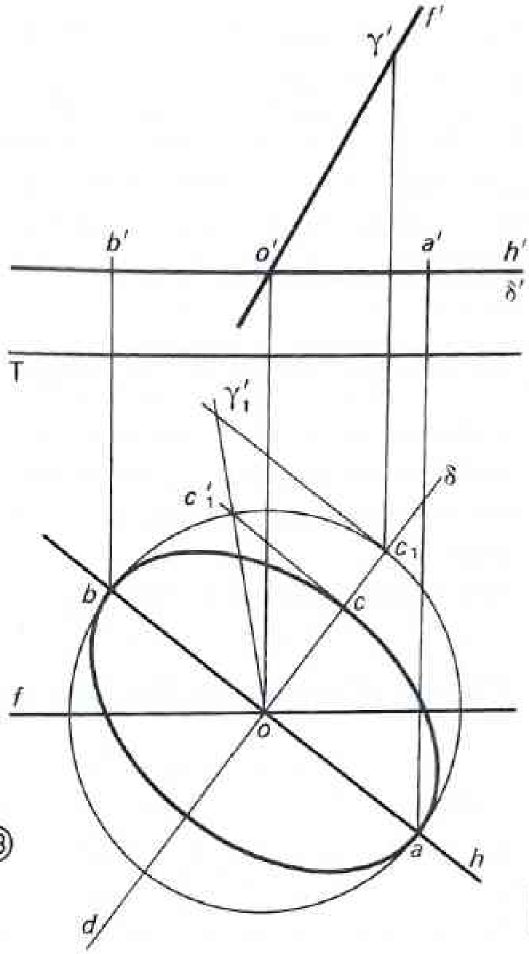
Premier cas : le plan π du cercle $\mathcal{C}$ est de bout (resp. vertical).

1.10 Soit B' (resp. V) la trace frontale (resp. horizontale) du plan π.
Désignons par (o, o') l'épure du centre O du cercle $\mathcal{C}$.
La projection frontale (resp. horizontale) du cercle $\mathcal{C}$ est le segment $[a', b']$ (resp. $[a, b]$) de longueur 2 R, de milieu o' (resp. o) et dont le support est la trace B' (resp. V).
Pour déterminer la projection horizontale (resp. frontale), nous faisons un rabattement du plan π autour de l'horizontale (resp. frontale) du plan π qui passe par o ; cette horizontale (resp. frontale) est une droite de bout (resp. verticale). Désignons par θ l'angle du rabattement.
Pour alléger la rédaction, nous nous bornons désormais au cas où le plan π est de bout. La projection horizontale du rabattement du cercle $\mathcal{C}$ est un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre o et de rayon R (fig. 12).
Le relèvement du cercle $\mathcal{C}_1$ détermine la projection horizontale du cercle $\mathcal{C}$. Ce relèvement est une affinité orthogonale de rapport Cos θ.

Du théorème 3.1 du chapitre 11, il résulte alors que la projection horizontale de $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre o, dont le grand axe, de longueur $2R$, est porté par la charnière d et dont le petit axe est le segment $[a, b]$ déterminé par les projections horizontales des points A et B du cercle qui se projettent frontalement en a et b.



⑫



⑬

Deuxième cas : le plan π du cercle n'est ni vertical ni de bout.

1.11 Déterminons d'abord la projection horizontale de l'épure du cercle $\mathcal{C}$. Soient H l'horizontale du plan π passant par O, (h, h') et (o, o') les épures respectives de H et de O.

Faisons un rabattement du plan π sur le plan horizontal en prenant pour charnière la droite H ; le rabattement de $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon R. La projection horizontale de $\mathcal{C}$ est une ellipse, image du cercle $\mathcal{C}_1$ par une affinité orthogonale par rapport à h ; le grand axe de cette ellipse est un segment de support h, de milieu o, de longueur $2R$.

Pour déterminer l'ellipse, nous construisons la projection horizontale c du point C de $\mathcal{C}$ qui appartient au diamètre perpendiculaire à H. Nous faisons d'abord un changement de plan frontal de façon que le plan π soit de bout par rapport au nouveau plan frontal de projection ; nous choisissons donc une nouvelle ligne de terre perpendiculaire à h. Les constructions, déjà étudiées en classe de Première, sont faites sur la figure 13.

On déterminerait, de façon analogue, la projection frontale du cercle $\mathcal{C}$ en faisant un rabattement du plan π sur le plan frontal de projection après avoir choisi pour charnière la frontale F du plan π passant par O.

2. Cylindre de révolution.

Définition d'un cylindre de révolution.

2.1 Considérons, dans un plan π, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Nous rappelons que l'**axe du cercle** $\mathcal{C}$ est la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan π.

DÉFINITION : On appelle cylindre de révolution de base $\mathcal{C}$, ou encore cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon R, l'ensemble Σ des points M tels que la parallèle à Δ passant par M coupe le cercle $\mathcal{C}$.

Génératrices d'un cylindre de révolution.

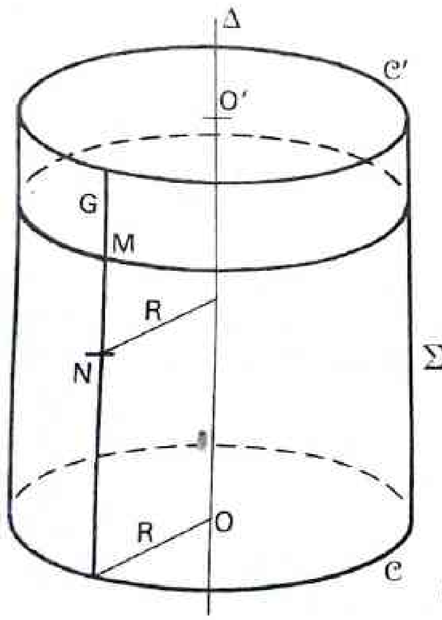
2.2 Si M est un point du cylindre de révolution Σ, tout point de la droite G passant par M et parallèle à Δ appartient à Σ ; la droite G est une partie de Σ. On appelle G une **génératrice rectiligne,** ou simplement une génératrice du cylindre de révolution Σ.

Remarquons que, pour tout point N de G, la distance de N à Δ est égale à R.

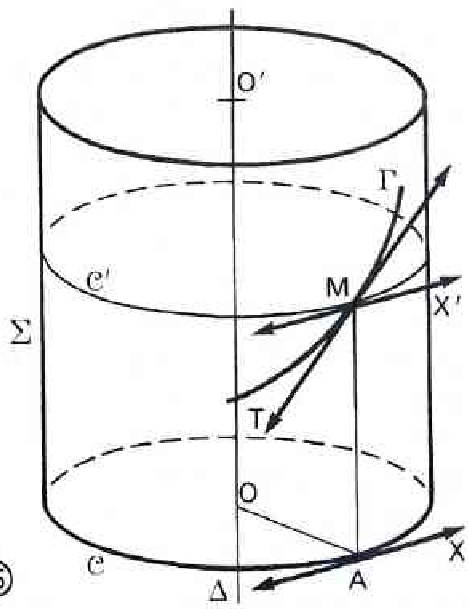
Bases d'un cylindre de révolution.

2.3 Soit Σ un cylindre de révolution dont la base est un cercle $\mathcal{C}$, d'axe Δ, de centre O et de rayon R, contenu dans un plan π (fig. 14).

Soit O' un point de Δ ; désignons par t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Pour toute génératrice G de Σ, nous avons : $t(G) = G$. Nous en déduisons : $t(\Sigma) = \Sigma$. L'image par t du cercle $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O', de rayon R et dont le plan π' est parallèle à π. Le cercle $\mathcal{C}'$ est une partie de Σ ; on l'appelle aussi une **base de** Σ. Pour tout point M du cylindre de révolution, il existe donc une base qui passe par M ; c'est le cercle, intersection de Σ et du plan passant par M et perpendiculaire à l'axe.



⑭



⑮

Plan tangent à un cylindre de révolution.

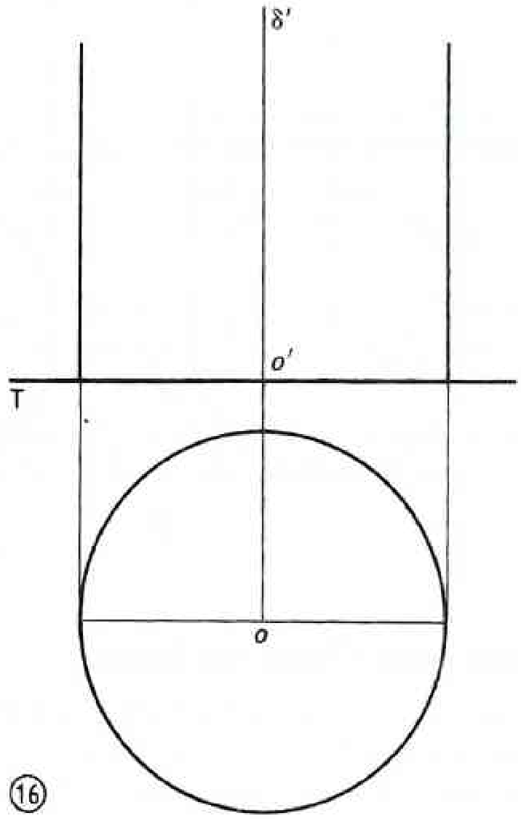
2.4 Considérons un cylindre de révolution Σ, une base b de ce cylindre, un point M de Σ et la génératrice G de Σ passant par M. Posons : $G \cap b = \{A\}$. Parmi toutes les courbes tracées sur Σ et passant par M, il en existe au moins une qui admet une tangente en M ; c'est la base $\mathcal{C}$ qui passe par M.
Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME : Soit Γ une courbe quelconque tracée sur Σ, passant par M et admettant en M une tangente T.
La droite T est contenue dans le plan déterminé par la génératrice G et par la tangente X à la base b au point A.

Le plan déterminé par la génératrice G et la droite X est appelé le **plan tangent** au cylindre de révolution au point M ; ce plan est le plan tangent à Σ en tout point de la génératrice G. On dit que ce plan est tangent au cylindre de révolution le long de la génératrice G (fig. 15).

Représentation d'un cylindre de révolution d'axe vertical.

2.5 De l'étude précédente il résulte que l'ensemble des projections horizontales des points du cylindre de révolution Σ d'axe vertical est la base de Σ contenue dans le plan horizontal de projection ; l'ensemble des projections frontales des points de Σ est l'ensemble des points de la bande de plan dont les frontières sont les projections frontales des génératrices de Σ le long desquelles le plan tangent est perpendiculaire à la ligne de terre. Les deux génératrices ainsi définies sont appelées **les génératrices de contour apparent frontal** (fig. 16).



16

Intersection d'un cylindre de révolution et d'un plan.

2.6 Considérons un plan Q et un cylindre de révolution Σ d'axe Δ, et de base un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Nous allons étudier l'intersection de Q et de Σ ; conformément aux indications du programme, nous supposerons, pour faire les épures, que le cercle $\mathcal{C}$ est contenu dans le plan horizontal de projection et que le plan Q est soit vertical soit de bout.

Le plan Q est vertical.

2.7 Le plan Q est alors parallèle à l'axe Δ; désignons par V la trace horizontale de Q. Un point M appartient à Σ et à Q si et seulement si sa projection horizontale appartient à $\mathcal{C}$ et à V. Nous distinguons donc trois cas :

- $V \cap \mathcal{C} = \varnothing$.

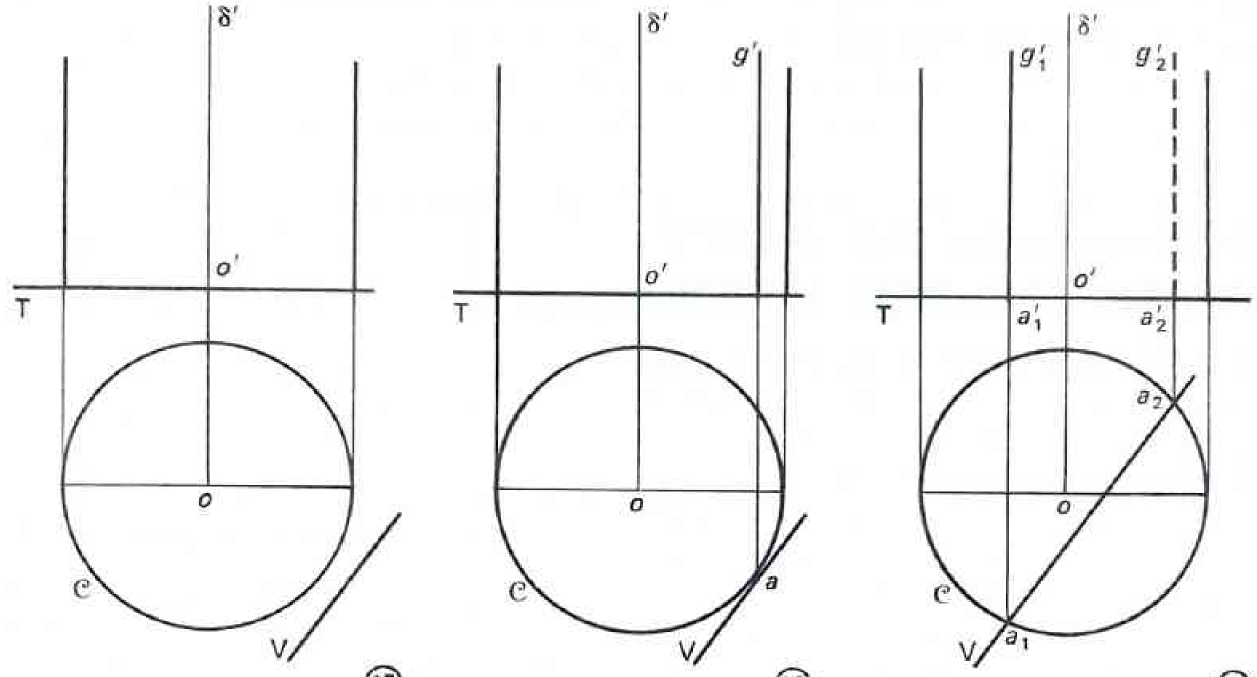
Il est immédiat que l'on a : $Q \cap \Sigma = \varnothing$ (fig. 17).

- $V \cap \mathcal{C} = \{a\}$.

Un point M appartient à $\Sigma \cap Q$ si et seulement si sa projection horizontale est égale à a, c'est-à-dire si et seulement si le point M appartient à la génératrice G qui passe par A. Le plan Q est alors le plan tangent à Σ le long de G (fig. 18).

- $V \cap \mathcal{C} = \{a_1, a_2\}$.

Un raisonnement analogue montre que l'intersection $\Sigma \cap Q$ est la réunion des génératrices G_1 et G_2 passant respectivement par A_1 et par A_2 (fig. 19).



⑰ ⑱ ⑲

Le plan Q est de bout.

2.8 Le plan Q coupe alors l'axe Δ. Posons : $Q \cap \Delta = \{I\}$.

- Nous avons étudié le cas particulier où le plan Q est perpendiculaire à Δ ; nous rappelons que, dans ce cas, l'intersection est la base de Σ contenue dans Q, c'est-à-dire le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre I, de rayon R, contenu dans le plan horizontal Q. La projection frontale de $\mathcal{C}_1$ est le segment de support parallèle à la ligne de terre, de milieu le point i' projection frontale du point I et de longueur 2 R.

La projection horizontale de $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre i et de rayon R.

- Supposons que le plan de bout Q ne soit ni parallèle ni perpendiculaire à A. Il est immédiat que la projection frontale de l'intersection est le segment de support la trace frontale du plan de bout Q, de centre i' et dont les extrémités appartiennent aux génératrices de contour apparent frontal.

La projection horizontale de l'intersection est le cercle de centre i et de rayon R.

3. Cône de révolution.

Définition d'un cône de révolution.

3.1 Considérons, dans un plan π, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Soit S un point de l'axe Δ du cercle $\mathcal{C}$ non situé dans le plan π.

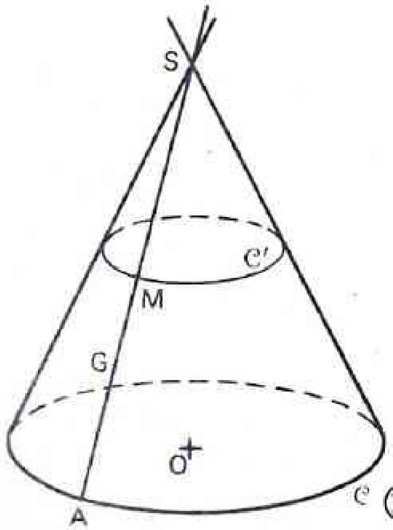
DÉFINITION : On appelle cône de révolution de base $\mathcal{C}$ et de sommet S la réunion Σ du singleton $\{S\}$ et de l'ensemble des points M distincts de S tels que la droite (SM) coupe le cercle $\mathcal{C}$.

Génératrices d'un cône de révolution.

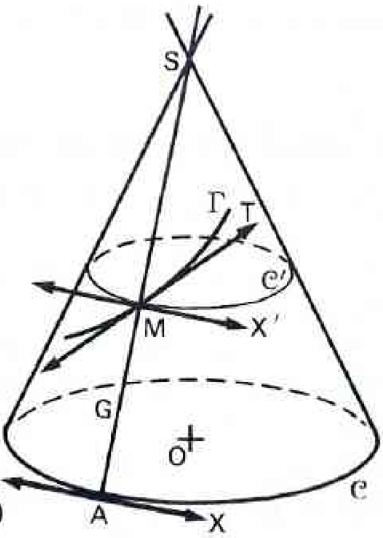
3.2 Si M est un point du cône de révolution Σ, tout point de la droite (SM) appartient à Σ ; la droite (SM) est une partie de Σ. On appelle (SM) une **génératrice rectiligne,** ou simplement une génératrice du cône de révolution Σ.

Bases d'un cône de révolution.

3.3 Soit Σ un cône de révolution dont le sommet est un point S et dont la base est un cercle $\mathcal{C}$, d'axe Δ, de centre O et de rayon R contenu dans un plan π. Soit k un réel non nul ; désignons par h l'homothétie de centre S et de rapport k.
Pour toute génératrice G de Σ, nous avons : $h(G) = G$.
Nous en déduisons : $h(\Sigma) = \Sigma$.
L'image par h du cercle $\mathcal{C}$ est un cercle $\mathcal{C}'$ de centre $h(O)$, de rayon $R\,|\,k\,|$ et dont le plan π' est parallèle au plan π. Le cercle $\mathcal{C}'$ est une partie de Σ ; on l'appelle aussi une **base** de Σ (fig. 20).
Pour tout point M du cône de révolution distinct de S, il existe donc une base qui passe par M ; c'est le cercle intersection de Σ et du plan passant par M et perpendiculaire à l'axe.



20

21


Plan tangent à un cône de révolution.

Considérons un cône de révolution Σ, une base $\mathcal{C}$ de ce cône, un point M de Σ distinct du sommet S et la génératrice G de Σ passant par M. Posons : $G \cap \mathcal{C} = \{A\}$. Parmi toutes les courbes tracées sur Σ et passant par M, il en existe au moins une qui admet une tangente en M ; c'est la base $\mathcal{C}'$ qui passe par M (fig. 21).

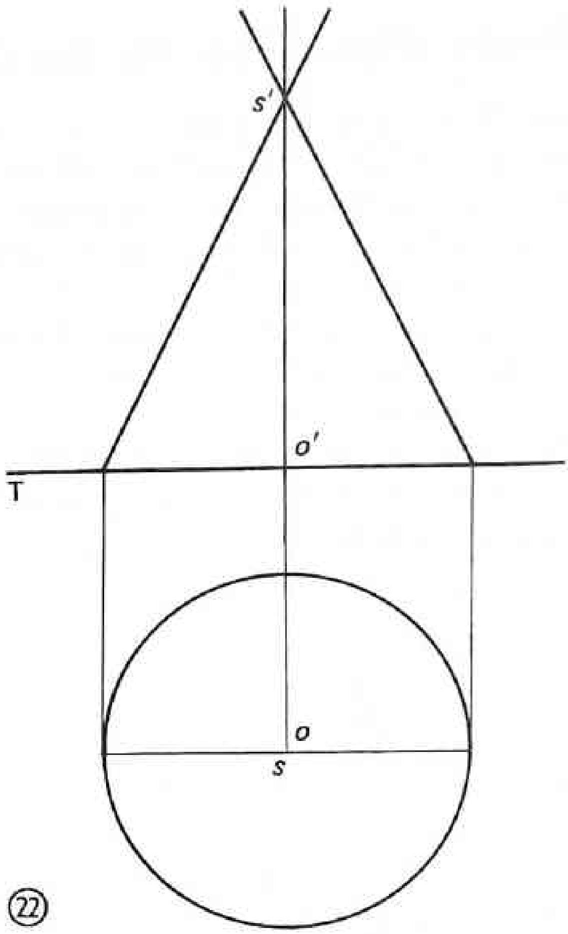
Nous admettons le théorème suivant :

3.4 **THÉORÈME : Soit Γ une courbe quelconque tracée sur Σ passant par M et admettant en M une tangente T.**
La droite T est contenue dans le plan déterminé par la génératrice G et par la tangente X à la base $\mathcal{C}$ au point A.

Le plan déterminé par la génératrice G et la droite X est appelé le **plan tangent** au cône de révolution au point M ; ce plan est le plan tangent à Σ en tout point de la génératrice G distinct du sommet S. On dit que ce plan est tangent au cône de révolution le long de la génératrice G.

Représentation d'un cône de révolution à axe vertical.

3.5 On convient de représenter un cône de révolution à axe vertical en traçant, sur la projection horizontale, la base du cône contenue dans le plan horizontal. L'ensemble des projections frontales des points de Σ est l'ensemble des points de la réunion de deux secteurs angulaires opposés par le sommet S et dont les côtés sont les projections frontales des génératrices de Σ le long desquels le plan tangent est de bout. Les deux génératrices ainsi définies sont appelées les **génératrices de contour apparent frontal** (fig. 22).



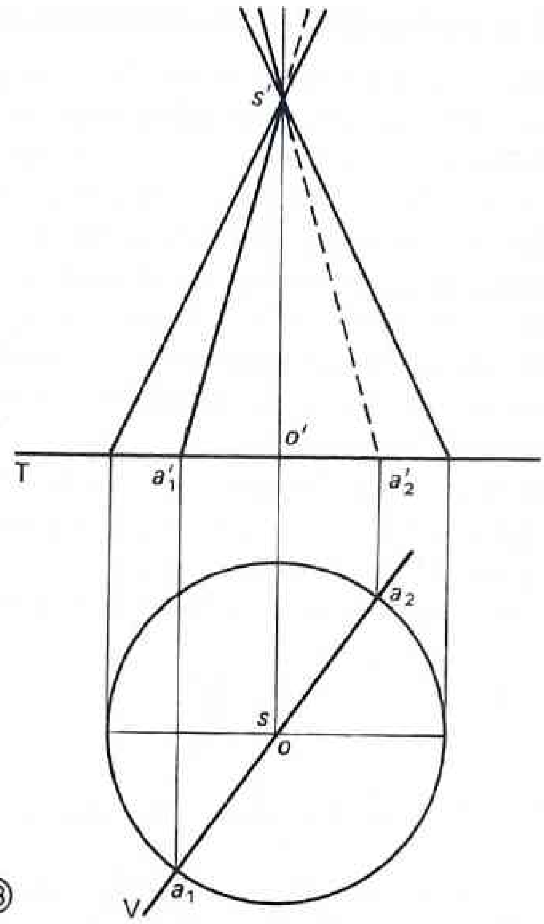
22

Intersection d'un cône de révolution et d'un plan.

3.6 Considérons un plan Q et un cône de révolution Σ de sommet S et de base un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Nous allons étudier l'intersection de Q et de Σ ; conformément aux indications du programme, nous supposerons, pour faire les épures, que le cercle $\mathcal{C}$ est contenu dans le plan horizontal de projection et que le plan Q est soit vertical soit de bout. Nous serons conduits à distinguer deux cas : le sommet S appartient au plan Q ou le sommet S n'appartient pas au plan Q.

Le point S appartient à Q et le plan Q est vertical.

3.7 Le plan Q contient alors l'axe Δ du cône de révolution. Désignons par V la trace horizontale de Q. La droite V passe par le point o centre de la base de Σ dans le plan horizontal de projection ; elle coupe donc le cercle de base en deux points diamétralement opposés, a_1 et a_2 (fig 23). L'intersection $\Sigma \cap Q$ est la réunion des deux génératrices dont les épures sont respectivement $(sa_1, s'a'_1)$ et $(sa_2, s'a'_2)$.



23

Le point S appartient à Q et le plan Q est de bout.

3.8 Soient C la trace horizontale et B' la trace frontale de Q ; le point s', projection frontale du sommet du cône de révolution, appartient à B'. Nous distinguons trois cas :

- $C \cap \mathcal{C} = \varnothing$.

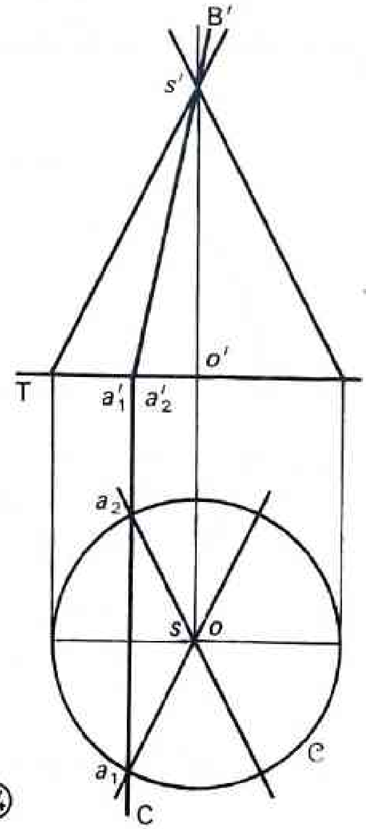
Il est immédiat que l'on a alors : $Q \cap \Sigma = \{S\}$.

- $C \cap \mathcal{C} = \{a\}$.

Il est immédiat que l'intersection $Q \cap \Sigma$ est l'une des génératrices de contour apparent frontal ; le plan Q est tangent à Σ le long de cette génératrice.

- $C \cap \mathcal{C} = \{a_1, a_2\}$.

L'intersection $Q \cap \Sigma$ est la réunion des deux génératrices G_1 et G_2 dont les épures respectives sont $(sa_1, s'a'_1)$ et $(sa_2, s'a'_2)$ (fig. 24).



24

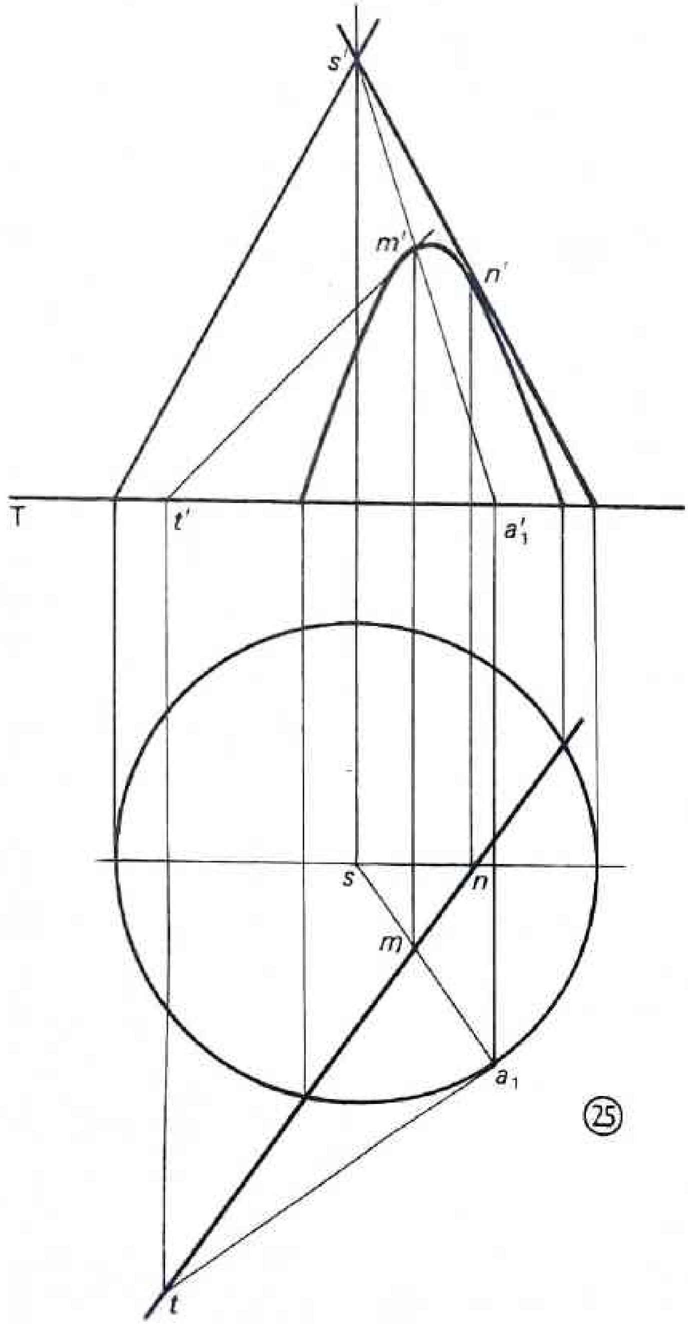
Le point S n'appartient pas à Q et le plan Q est vertical.

3.9 Soit V la trace horizontale de Q; la projection horizontale de $Q \cap \Sigma$ est la droite V. On démontre et nous admettons que cette intersection est une hyperbole dont la projection frontale est aussi une hyperbole.

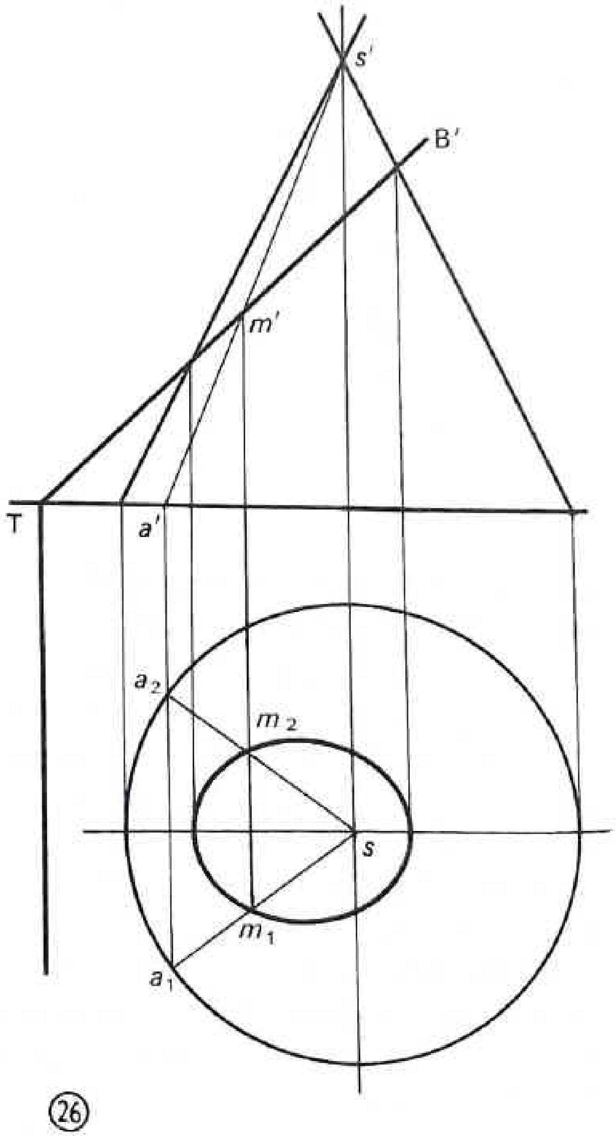
Déterminons l'épure (m, m') d'un point M de l'intersection.

Soit m un point quelconque de V; la droite (sm) coupe la projection horizontale de la base en deux points a_1 et a_2, projections horizontales de deux points A_1 et A_2 dont les projections frontales a'_1 et a'_2 appartiennent à la ligne de terre. La projection frontale de la génératrice (SM) est l'une des droites $(s'a'_1)$ ou $(s'a'_2)$. Le point m se rappelle sur $(s'a'_1)$ (resp. $(s'a'_2)$) en m'_1 (resp. m'_2). Nous avons donc obtenu les épures (m, m'_1) et (m, m'_2) de deux points de l'intersection (fig. 25). Déterminons la tangente à l'intersection au point d'épure (m, m'_1); cette tangente est contenue dans le plan Q et dans le plan tangent au cône de révolution le long de la génératrice d'épure $(sa, s'a'_1)$.

Nous construisons l'intersection de ces deux plans; c'est la droite d'épure $(mt, m'_1t'_1)$.



(25)



(26)

Le point S n'appartient pas à Q et le plan Q est de bout.

3.10 Soit B′ la trace frontale de Q ; la projection frontale de $\Sigma \cap Q$ est une partie de la droite B′. On démontre et nous admettons que cette intersection est une conique dont la projection horizontale est aussi une conique.
Déterminons l'épure (m, m') d'un point M de l'intersection.
Soit m' un point de B′ ; supposons que la droite $(s'm')$ coupe la ligne de terre en un point a' tel que la ligne de rappel de a' coupe la projection horizontale de la base ; désignons ces points d'intersection par a_1 et a_2.
La projection horizontale de la génératrice (SM) est l'une des droites (sa_1) ou (sa_2).
Le point m' se rappelle sur (sa_1) (resp. (sa_2)) en m_1 (resp. m_2).
Nous avons donc obtenu les épures (m_1, m') et (m_2, m') de deux points de l'intersection (fig. 26).
Déterminons la tangente à l'intersection au point d'épure (m_1, m') ; cette tangente est contenue dans le plan Q et dans le plan tangent au cône de révolution le long de la génératrice $(sa_1, s'a')$.
Nous construisons l'intersection de ces deux plans ; c'est la droite d'épure $(m_1t_1, m't')$.

Remarque.

Nous donnons les précisions suivantes sur la nature de la conique $Q \cap \Sigma$ lorsque le plan Q est de bout.
Désignons par Q_1 le plan qui passe par S et qui est parallèle au plan Q. Nous savons que l'intersection $Q_1 \cap \Sigma$ est soit le singleton {S}, soit une génératrice de contour apparent G, soit la réunion de deux génératrices G_1 et G_2.
On démontre et nous admettons les résultats suivants :
Si $Q_1 \cap \Sigma = \{S\}$, alors $Q \cap \Sigma$ est une ellipse.
Si $Q_1 \cap \Sigma = G$, alors $Q \cap \Sigma$ est une parabole.
Si $Q_1 \cap \Sigma = \{G_1, G_2\}$, alors $Q \cap \Sigma$ est une hyperbole.

4. Hélice circulaire droite.

Définition d'une hélice circulaire droite.

4.1 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}_3$; soient R un réel positif, h un réel non nul et θ un réel quelconque.

DÉFINITION : On appelle hélice circulaire droite l'ensemble des points dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont : $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = h\theta$, lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

Pas de l'hélice.

4.2 Considérons le point M_1 de l'hélice défini par le réel θ_1 et le point M_2 défini par le réel $\theta_1 + 2\pi$.

Les coordonnées de M_1 sont : $\begin{pmatrix} R\cos\theta_1 \\ R\sin\theta_1 \\ h\theta_1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de M_2 sont : $\begin{pmatrix} R\cos\theta_1 \\ R\sin\theta_1 \\ h\theta_1 + h\,2\pi \end{pmatrix}$

Nous avons donc l'égalité : $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\pi h\,\vec{k}$.

La distance M_1M_2 est appelée le **pas de l'hélice**.

Si l'on désigne ce pas par p, on a donc l'égalité : $p = 2\pi\,|\,h\,|$.

Si h est positif, on dit que l'hélice a le pas à droite ; si h est négatif, on dit que l'hélice a le pas à gauche.

Représentation d'une hélice circulaire.

4.3 Faisons l'épure de l'hélice circulaire que nous avons définie (fig. 27).

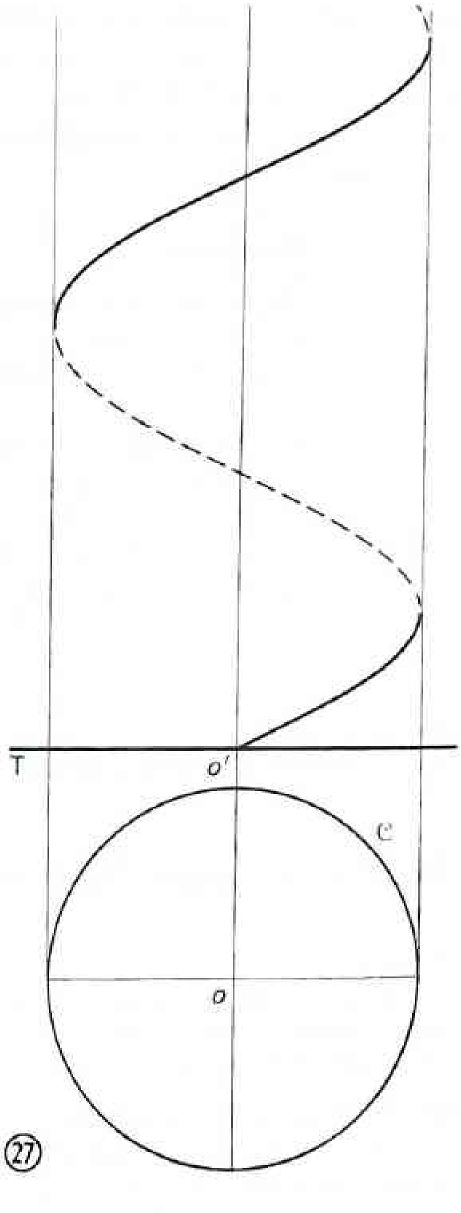
Nous supposons que le plan horizontal de projection est le plan défini par le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et que le plan frontal de projection est parallèle au plan défini par le repère cartésien $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

La projection horizontale de l'hélice est l'ensemble des points de coordonnées $\begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$. Cette projection horizontale est donc un cercle de rayon R.

La projection frontale de l'hélice est l'ensemble des points de coordonnées $\begin{pmatrix} R\sin\theta \\ h\theta \end{pmatrix}$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

L'équation de la courbe dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$ est : $y = R\sin\frac{z}{h}$.

La projection frontale de l'hélice est donc une sinusoïde.

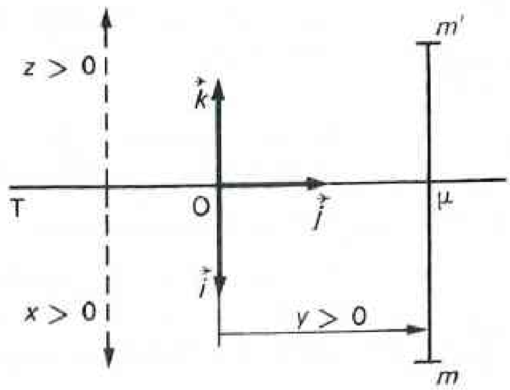


27

EXERCICES

Dans les exercices n^{os} 5 à 17, on considère un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$. Les coordonnées d'un point dans ce repère sont exprimées en centimètres.

Nous rappelons les conventions faites dans les classes précédentes : le plan horizontal de projection est déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$; le plan frontal de projection est déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$. La représentation traditionnelle du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indiquée sur la figure ci-contre.



Constructions élémentaires.

1. Rendre une droite horizontale par rotation autour d'une droite de bout.

2. Deux points sont donnés par leurs épures respectives. Déterminer la distance de ces deux points par rotation autour d'une droite de bout.

3. Déterminer l'angle d'une droite (δ, δ') et d'une verticale (o, d').

4. Déterminer l'angle d'une droite (δ, δ') et d'une droite de bout (o', d).

5. On donne la droite D d'équations : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, et les points $A\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$.

1° Rendre la droite (AB) frontale par rotation autour de D.
2° Déterminer la distance AB ; en donner la valeur à 1 mm près.

6. On donne la droite D d'équations : $\begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$, et les points $A\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$.

1° Rendre la droite (AB) horizontale par rotation autour de D.
2° Déterminer la distance AB ; en donner la valeur à 1 mm près.

7. On donne les trois points : $A\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$.

1° Déterminer, à 1 mm près, la longueur de chacun des côtés du triangle (A, B, C).
2° Construire, puis mesurer à 1° près, chacun des angles (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB).
3° Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle (A, B, C).

8. On considère le point $\Omega\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ et le plan vertical π dont la trace horizontale est (o, ω). Déterminer les projections du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, de rayon 3, contenu dans le plan π.

9. On considère le plan π dont la trace horizontale $P\alpha$ a pour équation : $x - y = 0$ et dont la trace frontale $\alpha Q'$ a pour équation : $2y - 3z = 0$.

Soit O le point du plan π dont la projection horizontale o a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

1° Déterminer la projection frontale o' du point O.
2° On considère le cercle $\mathcal{C}$, contenu dans π, de centre O et de rayon 3.
Construire l'épure du cercle $\mathcal{C}$.

Cylindre de révolution.

10. On considère, dans le plan horizontal de projection, le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$.
Soit Σ le cylindre de révolution de base $\mathcal{C}$ et M le point de Σ d'abscisse 6 et de cote 5.
Déterminer l'épure du plan tangent à Σ au point M.

11. 1° Représenter le cylindre de révolution Σ dont une base est le cercle $\mathcal{C}$ contenu dans le plan frontal de projection, de rayon 3, et dont le centre a pour ordonnée 3 et pour cote 5.
2° Déterminer l'épure de l'intersection de ce cylindre et du plan de bout d'équation : $5y - 6z = 0$.

Cône de révolution.

12. On considère, dans le plan horizontal de projection, le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.
Soit Σ le cône de révolution dont la base est le cercle $\mathcal{C}$ et dont le sommet S a pour cote 6.
Soit π le plan d'équation : $3x - 5y = 0$.
Déterminer l'épure de l'intersection du plan π et du cône Σ.

13 On considère le plan π d'équation : $y - z = 0$ et le point $S\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix}$.

Le point S est le sommet d'un cône de révolution Σ dont la base, dans le plan frontal de projection est un cercle de rayon 2.
Déterminer l'épure de l'intersection de π et de Σ.

14 On considère le plan π d'équation : $x - y = 0$ et le point $S\begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix}$.

Le point S est le sommet d'un cône de révolution Σ dont la base, dans le plan horizontal de projection est un cercle de rayon 3.
Déterminer l'épure de l'intersection de π et de Σ.

15 On considère le plan π d'équation : $2y - z = 0$ et le cercle $\mathcal{C}$ contenu dans le plan horizontal de projection et d'équation : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$.
Soit Σ le cône de révolution de base $\mathcal{C}$, dont le sommet S a pour cote 5.
Déterminer l'épure de l'intersection de π et de Σ.

Hélice circulaire.

16 On considère le cylindre de révolution Σ, à axe vertical, dont la base dans le plan horizontal de projection est le cercle $\mathcal{C}$ d'équation :
$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$.

Faire l'épure de l'hélice circulaire tracée sur Σ, dont le pas est à droite et est égal à $\frac{3\pi}{2}$.

17 On considère le cylindre de révolution Σ, à axe vertical, dont la base dans le plan horizontal de projection est le cercle $\mathcal{C}$ d'équation :
$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$.
Faire l'épure de l'hélice circulaire tracée sur Σ, dont le pas est à gauche et est égal à π.

PROBLÈMES DE RÉVISION

Dans les problèmes de baccalauréat, nous avons scrupuleusement respecté la rédaction du texte proposé aux élèves, même si nous n'étions pas entièrement d'accord avec celle-ci.

1 On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et l'on pose : $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Soient (a, b) un élément de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. On désigne par $T_{(a,b)}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $T_{(a,b)} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto az + b.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications $T_{a,b}$.

1° Démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}$, muni de la composition des applications, est un groupe non commutatif.

Démontrer que l'ensemble des transformations de la forme $T_{1,b}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{A}, \circ)$.

2° Soient u, v, u', v' des éléments de $\mathbb{C}$ tels que l'on ait : $u \neq v$ et $u' \neq v'$.

Démontrer qu'il existe un élément $T_{(a,b)}$ de $\mathcal{A}$ et un seul, tel que l'on ait : $T_{(a,b)}(u) = u'$ et $T_{(a,b)}(v) = v'$.

3° Démontrer que, quels que soient a et b, avec a différent de 1, il existe un seul nombre complexe z tel que l'on ait : $T_{(a,b)}(z) = z$.

Soit z_0 un élément de $\mathbb{C}$. Démontrer que l'ensemble des éléments $T_{a,b}$ de $\mathcal{A}$ tels que : $T_{(a,b)}(z_0) = z_0$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, \circ)$.

4° Soit S la transformation du plan complexe P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = T_{(1+i,\, i-1)}(z)$.

a) Démontrer que S admet un seul point invariant. Caractériser géométriquement S.

b) Soit H la courbe de P d'équation : $xy = 1$.

Déterminer l'équation de la courbe H' image de H par S.

(Série C, Nice, juin 1972.)

2 1° On donne deux nombres complexes non nuls a et s et l'on considère la suite Σ des nombres complexes $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$ définie par $z_0 = 0$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = sz_n + a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1)

a) Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 en fonction de a et de s. Exprimer simplement z_n en fonction de a, s et n, lorsque $s \neq 1$. Que peut-on dire de Σ lorsque $s = -1$? Donner la valeur de z_n lorsque $s = 1$.

b) Deux éléments distincts de Σ peuvent-ils être égaux ? Montrer qu'alors Σ est périodique.

c) Vérifier que deux termes consécutifs de Σ ne sont jamais égaux et montrer que :

$$\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

d) Inversement, soit donnée une suite vérifiant les trois conditions suivantes : deux termes consécutifs ne sont jamais égaux, la relation (2) est satisfaite, les deux premiers termes sont 0 et a. Démontrer qu'une telle suite est confondue avec Σ.

2° Tous les points considérés dans cette question appartiennent à un même plan euclidien, muni d'un repère orthonormé d'axes Ox, Oy (unité : 1 cm). L'affixe d'un point de ce plan, de coordonnées (x, y), est le nombre complexe $z = x + iy$.

Soit θ un angle donné tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et r un nombre réel donné strictement positif. Si P désigne un point quelconque, on note f_P la similitude de centre P, d'angle θ et de rapport r ; ainsi $f_P(M)$ est le point image de M par f_P. On considère alors la suite $\mathcal{A}$ des points $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$ tels que, pour tout n, $A_2 = f_O(A_1)$, $A_3 = f_{A_1}(A_2), \ldots$ et $A_{n+2} = f_{A_n}(A_{n+1})$, où O est l'origine et A_1 le point d'affixe a donnée $(a \neq 0)$.

a) Si z_n désigne l'affixe de A_n, trouver la valeur du rapport : $\dfrac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n}$.

Déduire alors du 1° que A_{n+1} est le transformé de A_n dans une similitude S, indépendante de n ; calculer seulement, ici, l'affixe de son centre.

On ne demande d'étudier S que dans les deux cas b) et c) suivants.

b) On suppose $r = \dfrac{1}{\cos \theta}$; déterminer l'angle, le rapport et le centre, U, de S.

Vérifier que tous les points A_i appartiennent, selon la parité de i, à l'une ou l'autre de deux droites fixes.

Comment faut-il choisir θ pour que la suite $\mathcal{A}$ soit périodique ?

Construire le point U et la ligne polygonale : $OA_1A_2A_3A_4A_5A_6$

pour : $a = 5$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

c) On suppose $r = 2 \cos \theta$; montrer que S est une rotation, dont on déterminera l'angle et le centre V. Qu'en déduit-on pour les côtés de la ligne polygonale L de sommets successifs : $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$?

Comment faut-il choisir θ pour que L soit fermée ? Construire le point V et la ligne L

pour : $a = 5$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{7}$. (Série C, Paris, juin 1971.)

3 Dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des complexes, on désigne par z le nombre $x + yi$, par $\bar{z}$ son conjugué $x - yi$ et par z' le nombre $x' + y'i$. Soit $a + bi$ un complexe particulier, tel que : $a^2 - b^2 \neq 0$.

D'autre part, dans le plan (P), rapporté à un repère formé par un point O et une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on associe aux complexes z et z' respectivement les points M, de coordonnées (x, y), et M', de coordonnées (x', y'). Soit A le point de coordonnées (a, b).

On suppose alors que les complexes z et z' vérifient la relation : $z' = az + bi\bar{z}$; le point M' est, par conséquent, l'image du point M par une application du plan (P) dans lui-même. Il est clair que cette application dépend du point A et l'on note $M' = f_A(M)$.

Soit F l'ensemble des applications f_A, lorsque le point A varie de telle sorte que $a^2 - b^2 \neq 0$.

1° Quelle est la partie de (P) que peut décrire le point A ?

Exprimer les coordonnées (x', y') du point M' en fonction des coordonnées (x, y) du point M et des constantes a et b.

Inversement, exprimer x et y en fonction de x', y', a et b.

De quel point le point A est-il l'image par f_A ?

2° Soit A' un point de coordonnées (a', b'), telles que $a'^2 - b'^2 \neq 0$; il lui correspond une application $f_{A'}$ de l'ensemble F. Soit M'' le point image de M' par $f_{A'}$. Calculer les coordonnées (x'', y'') du point M'' en fonction de x et de y et des constantes a, b, a' et b'. En déduire que l'application composée $f_{A'} \circ f_A$ des applications f_A et $f_{A'}$ appartient à l'ensemble F.

Montrer, enfin, que F est un groupe commutatif pour la loi de composition des applications.

3° a) Le point $M'(x', y')$ étant l'image du point $M(x, y)$ par l'application f_A, calculer $x' + y'$ et $x' - y'$ en fonction de x et de y. En déduire qu'il existe deux droites, (Δ) et (Δ'), que l'on définira, et qui sont invariantes par f_A.

b) Soit $M_1(x_1, y_1)$ l'image du point $M(x, y)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $a + b$. Calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point M_1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est parallèle à la seconde bissectrice des axes du repère.

c) La droite (M_1M') rencontre la première bissectrice en un point H de coordonnées (x_0, y_0). Montrer que : $x_0 = \dfrac{x' + y'}{2} = \dfrac{x_1 + y_1}{2}$, en déduire la valeur du rapport $\dfrac{\overrightarrow{HM'}}{\overrightarrow{HM_1}}$ en fonction de a et b.

4° On suppose désormais que : $a^2 - b^2 = 1$.

a) Montrer que les courbes, qui vérifient l'équation : $x^2 - y^2 = k$ $(k \in \mathbb{R})$, sont invariantes par f_A.

b) Le point M décrivant le cercle (C) de centre O et de rayon 1, former l'équation que vérifient les coordonnées, x' et y', du point M'. On adopte pour nouvelle base de (P) les vecteurs : $\vec{I} = \dfrac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{J} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$.

Exprimer les coordonnées (x', y') du point M' dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ en fonction de ses coordonnées (X', Y') dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.

En déduire l'équation que vérifient X' et Y' lorsque M décrit le cercle (C). Quelle est la nature de la courbe décrite par le point M' ?

(Série E, Besançon, juin 1972.)

4 A. Le plan euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, noté $\mathcal{R}$, d'axes Ox, Oy.

A l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $z \longmapsto Z = iz + (1 - i)\bar{z}$, (où $\bar{z}$ est le conjugué de z) correspond alors la transformation, T, du plan (P) qui, à m d'affixe z, associe M d'affixe Z.

1° Vérifier que le milieu du segment $[mM]$ appartient à l'axe Ox et que, si m est distinct de M, la droite (mM) a une direction fixe. On pourra, par exemple, exprimer d'abord les coordonnées X et Y du point M en fonction des coordonnées x et y du point m (dans le repère $\mathcal{R}$). En déduire que la transformation T est une symétrie oblique d'axe Ox, dont on précisera la direction.

2° a) Soit $\mathcal{R}'$ le nouveau repère orthornormé $(O, \vec{u'}, \vec{v'})$ défini dans le plan (P) par $(\vec{u}, \vec{u'}) = \alpha$ (où α est un nombre réel donné) et par $(\vec{u'}, \vec{v'}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que les affixes z et z' d'un même point m dans les repères respectifs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont liées par la relation $z = z'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Exprimer, en fonction de z' et $\overline{z'}$, l'affixe Z' (dans le repère $\mathcal{R}'$) de l'image M de m par la transformation T.

b) On prend $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$. Montrer que $Z' = iz' - i\sqrt{2}\,\overline{z'}$.

Calculer alors les coordonnées X' et Y' du point M en fonction des coordonnées x' et y' du point m (dans le repère $\mathcal{R}'$).

En déduire une équation dans $\mathcal{R}'$, de l'image $(\Gamma) = T(\gamma)$ par T du cercle (γ) de centre O et de rayon 1. Quelle est la nature de (Γ) ?

Dessiner (γ) et (Γ) sur une même figure ; préciser quels sont leurs points communs, en s'appuyant sur la nature géométrique, trouvée au 1°, de la transformation T.

B. On associe à tout couple (a, b) de nombres complexes l'application, $f_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$.

1° Mettre $(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z) - z$, c'est-à-dire $f_{a,b}[f_{a,b}(z)] - z$, sous la forme $Az + B\bar{z}$, A et B étant deux constantes complexes.

Démontrer que $Az + B\bar{z}$ est nul pour tout z *si, et seulement si*, $A = B = 0$. (On pourra pour cela donner à z les valeurs 1 et i.)

Traduire alors par un système, S, de deux relations entre a, b, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ la condition pour que $f_{a,b}$ soit involutive.

Que deviennent ces relations pour $b = 0$ (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a,b}$ involutives) et pour $b \neq 0$?

Vérifier que les valeurs $a = i$ et $b = 1 - i$, utilisées dans la partie A, conviennent dans ce dernier cas.

2° Dans cette question, $f_{a,b}$ est supposée quelconque, involutive ou non.
On considère maintenant $\mathbb{C}$ comme un *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$

a) Démontrer que l'application $f_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est linéaire. On prend $\mathcal{B} = (1, i)$ comme base de $\mathbb{C}$; calculer $f_{a,b}(1)$ et $f_{a,b}(i)$.

b) Soit φ une application linéaire quelconque de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par sa matrice $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & s \\ r & q \end{pmatrix}$ relativement à $\mathcal{B}$, p, q, r et s étant quatre réels.

Démontrer qu'il existe une application $f_{a,b}$ qui coïncide avec φ ; à cet effet, on calculera $\varphi(1)$ et $\varphi(i)$ et l'on exprimera a et b au moyen de p, q, r et s.

c) Déduire alors du système S de relations trouvées, précédemment, un système de relations entre p, q, r et s traduisant la condition pour que φ soit involutive.
Trouver directement ces relations, en calculant $\mathcal{M}^2$, c'est-à-dire $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

(Série C, Paris, juin 1972.)

5 1° *a*) On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui, dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, est représentée par la matrice : $t = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Quel en est le noyau ? Quelle est la matrice de l'application réciproque ?

b) Soit (P) un plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{U}, \vec{V})$. Soit T la transformation de (P) qui, au point de coordonnées x, y, associe le point de coordonnées X, Y telles que : $X = x\sqrt{3} - y$ et $Y = x + y\sqrt{3}$.

Montrer que T est une similitude, dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

c) Soit (E) l'ensemble des points de (P) dont les coordonnées X, Y, dans le repère $\mathcal{R}$, vérifient la condition : $7X^2 + 13Y^2 - 6\sqrt{3}XY - 24X - 8\sqrt{3}Y - 16 = 0$.

Soit (e) l'image réciproque de (E) par T. Montrer que (e) est une conique, dont on précisera la nature et le centre.

2° On pose, pour tout point m de (P), de coordonnées x et y dans le repère $\mathcal{R}$:
$\rho = Om$ et $\theta = (\vec{U}, \overrightarrow{Om})$ (de sorte que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$).

On considère la conique de (P) d'équation : $(x - \sqrt{3})^2 + 4y^2 = 4$.

a) Montrer que cette équation se met sous la forme : $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\theta}$.

b) Quel est (dans le repère $\mathcal{R}$) le nombre complexe associé à la transformation T (c'est-à-dire le nombre complexe, α, tel que l'on ait : $X + iY = \alpha(x + iy)$, pour tout couple (x, y) de nombres réels) ? Écrire sous forme trigonométrique l'affixe z d'un point m de la conique précédente. Calculer l'affixe Z de son transformé $M = T(m)$; donner la partie réelle $X = f(\theta)$ et la partie imaginaire $Y = g(\theta)$ de Z. Donner, sans aucun calcul, la relation indépendante de θ liant $X = f(\theta)$ et $Y = g(\theta)$.

3° Le plan (P) est toujours muni du repère $\mathcal{R}$.

a) Quelle est la matrice r, associée à la rotation, R, de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$?

Quelle est la matrice, a, associée à la transformation, A, qui, au point de coordonnées (x, y), fait correspondre le point de coordonnées $(x, 2y)$?

Soit S la transformation $R \circ A \circ R^{-1}$. Calculer la matrice, s, qui lui est associée.

b) On note t la matrice définissant la transformation T. Calculer st et ta. Quelle est la nature géométrique de l'image de la conique (e) par la transformation $S \circ T$?

(Série C, Reims, juin 1972, partiel.)

6 A. 1° Soit un espace vectoriel euclidien orienté $\vec{E}$ de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme, σ, défini par

$$\forall \vec{u}(x, y, z) \in \vec{E}, \quad \sigma(\vec{u}) = \vec{u}'(x', y', z'), \text{ tel que : } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z), \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z), \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z). \end{cases}$$

Calculer les coordonnées de $\sigma(\vec{i})$, $\sigma(\vec{j})$ et $\sigma(\vec{k})$. En déduire que (σ) est un endomorphisme orthogonal. Comparer le produit vectoriel $\sigma(\vec{i}) \wedge \sigma(\vec{j})$ au vecteur $\sigma(\vec{k})$. En déduire que (σ) n'est pas une rotation vectorielle. Déterminer l'ensemble, $\vec{P}$, des éléments invariants de $\vec{E}$ par (σ).
En déduire la nature de (σ).

2° On considère les symétries orthogonales, σ_1 et σ_2, de $\vec{E}$, par rapport aux plans respectifs suivants :
$\vec{P}_1$ d'équation $x + y + z = 0$ et $\vec{P}_2$ d'équation $x\sqrt{6} + y - z = 0$.
Déterminer la nature de l'endomorphisme, φ, de $\vec{E}$ défini par : $\varphi = \sigma_2 \circ \sigma_1$.
Préciser les équations de l'ensemble, $\vec{\Delta}$, des éléments invariants par φ.

3° On appelle $\vec{\Pi}$ le plan vectoriel de $\vec{E}$ orthogonal à $\vec{\Delta}$ et $\mathcal{R}$ la restriction de φ au plan $\vec{\Pi}$.

a) Le plan $\vec{\Pi}$ est orienté par la détermination d'un vecteur $\vec{K}'$ unitaire de $\vec{\Delta}$. Calculer les coordonnées de $\vec{K}'$, sachant que son abscisse est choisie positive. Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs respectivement orthogonaux à $\vec{P}_1$ et à $\vec{P}_2$. On pose $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \theta$.

b) En déduire $\sin \theta$ à l'aide du produit vectoriel des deux vecteurs orthogonaux à $\vec{P}_1$ et à $\vec{P}_2$. Calculer $\cos \theta$, puis définir la mesure, θ, à $k\pi$ près de l'angle $\widehat{(\vec{D}_1, \vec{D}_2)}$ des droites, $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$, intersections respectives des plans $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ avec $\vec{\Pi}$.
En déduire que l'application $\mathcal{R}$ dans $\vec{\Pi}$ est une rotation vectorielle, dont on donnera l'angle α.

B. Dans cette partie, on considère le plan affine euclidien (Π) associé au plan vectoriel euclidien $\vec{\Pi}$ de la partie A. Le plan (Π) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$.
Soit (r) la rotation plane de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. On appelle opérateur complexe d'une application f de (Π) dans (Π), la relation entre $z = x + iy$ affixe d'un point M de (Π), de coordonnées (x, y) et $z' = x' + iy'$ affixe du point $M' = f(M)$, de coordonnées (x', y').

1° Déterminer l'opérateur complexe de la rotation (r).

2° Déterminer l'opérateur complexe de la similitude, S, d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de rapport 2, et qui fait correspondre au point O (0, 0) le point O′(1, − 2) : $O' = S(O)$.
3° En déduire l'opérateur complexe de l'application, S′, définie par : $S' = S \circ r$. Déterminer la nature de S′ et ses caractéristiques géométriques à l'aide de l'opérateur de S′.

(Série C, Centre d'Outremer, juin 1972.)

7 Dans l'espace vectoriel orienté (E), de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le vecteur $\vec{\omega} = \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ et l'application, φ, de (E) dans (E), définie, pour tout vecteur $\vec{v}$ de (E), par :
$\varphi(\vec{v}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ ($\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ est le produit vectoriel de $\vec{\omega}$ par $\vec{v}$).
1° *a*) Exprimer les coordonnées de $\varphi(\vec{v})$ à l'aide des coordonnées (x, y, z) de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En déduire que φ est un endomorphisme de (E). Quel est le noyau de φ ? Quelle est l'image de φ (notée Im φ) ?
b) Démontrer que les vecteurs $\vec{I} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$ et $\vec{J} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$ forment une base orthonormée de Im φ et que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$ est une base orthonormée de (E).
Déterminer les vecteurs $\varphi(\vec{I})$, $\varphi(\vec{J})$ et $\varphi(\vec{\omega})$. Montrer que la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$ est directe.
c) Calculer les coordonnées de $\varphi(\vec{v})$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$, en fonction des coordonnées (X, Y, Z) de $\vec{v}$, dans cette même base.
2° Au vecteur $\vec{v}$ quelconque de (E), on associe, par l'application ψ, le vecteur $\psi(\vec{v}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{v})\,\vec{\omega}$.
a) Exprimer les coordonnées de $\psi(\vec{v})$ à l'aide des coordonnées (X, Y, Z) de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$. En déduire que ψ est un endomorphisme de (E).
Quel est le noyau de ψ ? Quelle est son image ?
b) Soit $(\varphi + \psi)$ l'endomorphisme de (E). Exprimer $(\varphi + \psi)(\vec{v})$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$. Quel est l'ensemble des vecteurs invariants de (E) par $(\varphi + \psi)$? En conclure que $(\varphi + \psi)$ est une rotation vectorielle, que l'on précisera.
c) Quels sont les endomorphismes $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$?
3° On appelle θ l'application de (E) dans (E) définie, pour tout vecteur $\vec{v}$ de (E), par $\theta(\vec{v}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{v})\,\vec{v}$.
a) Définir l'application $\theta \circ \varphi$.
b) Si f est l'application $\varphi \circ \theta$, démontrer que : $f(\vec{v}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{v})(\vec{\omega} \wedge \vec{v})$.
Quelles sont les coordonnées de $f(\vec{v})$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$?
Quel est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de (E) tels que $f(\vec{v}) = \vec{0}$?
Déterminer l'application $f^2 = f \circ f$.

(Série C, Dijon, session de remplacement 1972.)

8 A. On considère un plan affine euclidien orienté (P). Le plan (P) étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit H_k l'application de (P) dans (P) qui au point M de coordonnées (x, y), fait correspondre le point M′ de coordonnées (x', y') définies par : $\begin{cases} x' = kx - k - 1, \\ y' = ky, \end{cases}$ k étant un nombre réel donné.

a) Cette application H_k est-elle une bijection ? A-t-elle des points invariants ? Déterminer la nature de l'application.

b) Étudier la figure transformée par H_k d'une droite (D) d'équation
$ax + by + c = 0$.

Donner les conditions pour que (D) soit globalement invariante.

c) Étudier la figure transformée du cercle (C) de centre A(1, 1) et de rayon 1.

B. Soit R l'application de (P) dans (P) qui, au point M de coordonnées (x, y), fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$x' - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 1) \quad \text{et} \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1).$$

a) Si z est l'affixe de M et z' celle de M', trouver z' en fonction de z. En déduire la nature de la transformation R, et la définir géométriquement.

b) Soit G le barycentre des points I $(x = -1, y = 0)$, M et M', affectés des coefficients -1, 1 et 2.

Calculer l'affixe de G, en fonction de l'affixe z de M.

Trouver l'ensemble des points G si M décrit la droite (Δ) d'équation $x = 2$.

c) Étudier l'application $R \circ H_k$ ($\circ$ étant le symbole de la loi de composition des applications). Les deux applications R et H_k sont-elles commutables ?

C. Dans le plan affine euclidien (P) on considère l'application S qui, au point M de coordonnées (x, y), fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par $x' = y - 1$ et $y' = x + 1$.

a) S est-elle une isométrie ? A-t-elle des points invariants ? Définir S géométriquement.

b) Soit $T = S \circ R \circ H_{\sqrt{2}}$. ($H_{\sqrt{2}}$ est l'application de la question A où $k = \sqrt{2}$).

Les applications S, R et $H_{\sqrt{2}}$ sont-elles deux à deux commutables ?

Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \dfrac{6x + 1}{4x - 2}$.

Trouver l'équation de (Γ_1) transformée de (Γ) par l'application $T = S \circ R \circ H_{\sqrt{2}}$.
Étudier (Γ_1). Préciser ses axes de symétrie, ses foyers, ses asymptotes, ses directrices. En déduire ceux de (Γ).

(Série C, Toulouse, session de remplacement 1972.)

9 A. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée du plan vectoriel euclidien, k un nombre réel et f une application linéaire du plan dans lui-même définie par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i'} = k\vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}) = \vec{j'} = \vec{i} - k\vec{j}.$$

1° Montrer que le couple $(\vec{i'}, \vec{j'})$ est une base du plan vectoriel. Écrire la matrice N de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2° Calculer la matrice $N^2 = N \times N$. En déduire la nature de l'application $f \circ f$.

B. Dans le plan affine euclidien rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application affine T associée à l'application f et telle que l'image du point O par T soit le point A de coordonnées $(1, -1)$[T(O) = A].

1° Au point M de coordonnées (x, y), T fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') [T (M) = M']. Montrer que ces coordonnées sont liées par les relations

$$\begin{cases} x' = kx + y + 1, \\ y' = x - ky - 1. \end{cases}$$

2° Démontrer que l'application T est bijective.

3° Démontrer qu'en général il existe un point invariant, que l'on déterminera. Discuter suivant les valeurs de k.

4° Déterminer l'application réciproque T^{-1} de T.

C. Dans le plan complexe, soit $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' et $z = x + iy$ l'affixe de M.

1° Démontrer que z' s'exprime en fonction de $\bar{z}$ (conjugué de z) par :
$z' = (k + i)\,\bar{z} + 1 - i$.

2° k étant non nul, par quelle transformation géométrique passe-t-on d'un point d'affixe z au point d'affixe z' ?

D. On suppose maintenant $k = 0$; soit T_0 l'application correspondante.

1° Démontrer que T_0 est une isométrie involutive et qu'elle est une symétrie par rapport à une droite.

2° Soit la parabole (P) d'équation $y = (x - 1)^2$. Déterminer l'équation de la courbe (P') transformée de (P) par T_0. Quelle est la nature de (P') ?

3° (P) et (P') ont en commun deux points B et C ; calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux arcs BC de (P) et de (P').

(Série C, Amiens, session de remplacement 1972.)

10 N. B. — Les paragraphes *a*, *b*, et *c* de la deuxième question peuvent être traités indépendamment du reste du problème.

On désigne par (P) le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy (unité de longueur : 3 cm).

1° *a*) Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = (x - 1)\sqrt{2x}$.
Quel est son domaine de définition ? Est-elle dérivable en tout point de ce domaine ? Étudier la variation de cette fonction f et tracer dans (P) la portion (C_1) de sa courbe représentative correspondant aux valeurs de x telles que $0 \leqslant x \leqslant 2$.

b) Soit (C) l'ensemble des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation : $y^2 - 2x(x - 1)^2 = 0$ et à la condition $0 \leqslant x \leqslant 2$.
Montrer que (C) est l'union de (C_1) et d'une courbe (C_2), que l'on dessinera, déduite de (C_1) par une transformation simple de (P).
Préciser les coordonnées des points communs à (C) et à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

c) Soit (Γ) l'ensemble des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation : $(y^2 + 4x^2)^2 - 4x^2(x^2 + 1)^2 = 0$
et à la condition $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Montrer que (Γ) est l'union de (C) et d'une courbe (C'), transformée de (C) dans une symétrie, que l'on précisera.
Dessiner (Γ) sur une figure distincte de la figure utilisée aux paragraphes *a* et *b*.

d) On considère enfin l'ensemble (Γ') des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation : $(x^2 + 4y^2)^2 - 4y^2(y^2 + 1)^2 = 0$
et à la condition $-2 \leqslant y \leqslant 2$.
Montrer que (Γ') se déduit de (Γ) par une symétrie, que l'on précisera (on ne dessinera pas (Γ), dans cette question).

2° *a*) A tout nombre complexe non nul, α, on associe l'application f_α, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $f_\alpha(z) = \alpha z$ et l'application g_α de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g_\alpha(z) = \alpha\bar{z}$, où $\bar{z}$ est le conjugué de z. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les applications f_α et g_α ainsi définies.
Soit λ et μ deux nombres complexes non nuls, distincts ou non.
Déterminer les images de z par les applications composées : $f_\mu \circ f_\lambda$, $g_\mu \circ g_\lambda$, $g_\mu \circ f_\lambda$ et $f_\mu \circ g_\lambda$ et vérifier que ces applications composées appartiennent à $\mathcal{E}$.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ constitue un groupe pour la composition des applications (on précisera l'application réciproque de f_λ et celle de g_λ).

b) Montrer que l'ensemble $K = \{1, -1, i, -i\}$ est un groupe pour la multiplication.
En déduire que l'ensemble (E) des huit applications f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i}, g_1, g_{-1}, g_i et g_{-i} est un groupe pour la composition des applications (sous-groupe de $\mathcal{E}$) ; *on ne demande pas d'écrire la table de ce groupe.*

c) A chaque application f_α correspond une transformation T_α du plan (P) qui à M d'affixe z associe le point $T_\alpha(M)$ d'affixe $f_\alpha(z)$.
De même à chaque application g_α correspond une transformation S_α du plan (P) qui à M d'affixe z associe le point $S_\alpha(M)$ d'affixe $g_\alpha(z)$.
Quelle est la nature géométrique des transformations T_α et S_α ?
Préciser la nature géométrique des huit transformations T_1, T_{-1}, T_i, T_{-i}, S_1, S_{-1}, S_i et S_{-i} qui correspondent aux huit applications de (E).
Déduire du 2°, *b* que ces huit transformations forment un groupe (G) pour la composition des transformations.
d) Vérifier que l'ensemble $(\Gamma) \cup (\Gamma')$ de la première question est invariant par l'une quelconque des transformations du groupe (G).
En remarquant que $T_i = S_i \circ S_1$, montrer que T_i transforme (Γ) en (Γ').
Dessiner alors (Γ') sur le même graphique que (Γ) (le candidat pourra utiliser à cet effet l'une ou l'autre des transformations S_i et T_i, à son choix).
(Série C, Paris, session de remplacement 1972.)

11 Soit, dans $\mathcal{E}_2$, la droite Δ d'équation $x = y$; on désigne par $y'y$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{j}$, par S_Δ (resp. S_y) la symétrie d'axe la droite Δ (resp. $y'y$).
Soit h un nombre réel. On désigne par T_h l'application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ qui à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M_1 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ définies par :
$$\begin{cases} x_1 = hx \\ y_1 = x + hy. \end{cases}$$
1° Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{E}_2$ invariants par T_h.
2° Démontrer que l'application T_0 est le produit, dans cet ordre de la symétrie S_Δ et d'une application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$ à déterminer.
3° Soient h et h' deux réels. Déterminer les coordonnées de l'image par $T_{h'} \circ T_h$ d'un point M de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Quelle est la nature de $T_{-h} \circ T_h$?
4° On pose : $U = T_h \circ S_y \circ T_h \circ S_y \circ S_\Delta$.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées x' et y' du point U(M) en fonction de x et y.
Démontrer que U est la composée d'une homothétie et d'une symétrie à déterminer.

12 1° Soit φ un endomorphisme de E_2 de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
a) Soient $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{w}$ et $\vec{w}_1$ les vecteurs de E_2 de composantes respectives : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels a, b, c, d tels que l'on ait : $\vec{w} = \varphi(\vec{v})$ et $\vec{w}_1 = \varphi(\vec{v}_1)$.
Dans la suite du problème, on donne aux réels a, b, c, d les valeurs trouvées ci-dessus.
b) Démontrer que φ est bijective et déterminer la matrice de φ^{-1}.
2° Soit f l'application affine de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_2$, d'endomorphisme associé φ et ayant pour point invariant le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soit M' l'image par f d'un point M quelconque de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Démontrer que les coordonnées x' et y' de M' sont définies par :
$$\begin{cases} x' = -4x + 3y + 4 \\ y' = -3x + 2y + 4. \end{cases}$$

3° Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{E}_2$ invariants par f.
Démontrer que la droite D d'équation cartésienne $y = x$ est globalement invariante par f.
Soient D_1 et D_2 les droites de $\mathcal{E}_2$ d'équations cartésiennes respectives :
$2x - y - 2 = 0$ et $x - 2y + 2 = 0$.
Démontrer que l'on a : $f(D_1) = D_2$.

4° Soient s la réflexion affine par rapport à D et s_1 la symétrie d'axe D_1 et de direction la direction de D.

a) Calculer les coordonnées x'' et y'' de M'' image par s d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) Calculer les coordonnées x_1 et y_1 de M_1 image par s_1 d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

c) Démontrer que l'on a : $f = s \circ s_1$.

Tables numériques
Index

Mesure en degrés de l'angle φ	Sin φ	Sin φ / Cos φ	Cos φ / Sin φ	Cos φ	
0	0,0000	0,0000		1,0000	90
1	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,247	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	45
	Cos φ	Cos φ / Sin φ	Sin φ / Cos φ	Sin φ	Mesure en degrés de l'angle φ

Mesure en grades de l'angle φ	Sin φ	Sin φ / Cos φ	Cos φ / Sin φ	Cos φ	
0	0,0000	0,0000		1,0000	100
1	0,0157	0,0157	63,66	0,9999	99
2	0,0314	0,0314	31,82	0,9995	98
3	0,0471	0,0472	21,20	0,9989	97
4	0,0628	0,0629	15,89	0,9980	96
5	0,0785	0,0787	12,71	0,9969	95
6	0,0941	0,0945	10,58	0,9956	94
7	0,1097	0,1104	9,058	0,9940	93
8	0,1253	0,1263	7,916	0,9921	92
9	0,1409	0,1423	7,026	0,9900	91
10	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	90
11	0,1719	0,1745	5,730	0,9851	89
12	0,1874	0,1908	5,242	0,9823	88
13	0,2028	0,2071	4,829	0,9792	87
14	0,2181	0,2235	4,474	0,9759	86
15	0,2334	0,2401	4,165	0,9724	85
16	0,2487	0,2568	3,895	0,9686	84
17	0,2639	0,2736	3,655	0,9646	83
18	0,2790	0,2905	3,442	0,9603	82
19	0,2940	0,3076	3,251	0,9558	81
20	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	80
21	0,3239	0,3424	2,921	0,9461	79
22	0,3387	0,3600	2,778	0,9409	78
23	0,3535	0,3779	2,646	0,9354	77
24	0,3681	0,3959	2,526	0,9298	76
25	0,3827	0,4142	2,414	0,9239	75
26	0,3971	0,4327	2,311	0,9178	74
27	0,4115	0,4515	2,215	0,9114	73
28	0,4258	0,4706	2,125	0,9048	72
29	0,4399	0,4899	2,041	0,8980	71
30	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	70
31	0,4679	0,5295	1,889	0,8838	69
32	0,4818	0,5498	1,819	0,8763	68
33	0,4955	0,5704	1,753	0,8686	67
34	0,5090	0,5914	1,691	0,8607	66
35	0,5225	0,6128	1,632	0,8526	65
36	0,5358	0,6346	1,576	0,8443	64
37	0,5490	0,6569	1,522	0,8358	63
38	0,5621	0,6796	1,471	0,8271	62
39	0,5750	0,7028	1,423	0,8181	61
40	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	60
41	0,6004	0,7508	1,332	0,7997	59
42	0,6129	0,7757	1,289	0,7902	58
43	0,6252	0,8012	1,248	0,7804	57
44	0,6374	0,8273	1,209	0,7705	56
45	0,6494	0,8541	1,171	0,7604	55
46	0,6613	0,8816	1,134	0,7501	54
47	0,6730	0,9099	1,099	0,7396	53
48	0,6845	0,9391	1,065	0,7290	52
49	0,6959	0,9691	1,032	0,7181	51
50	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	50
	Cos φ	Cos φ / Sin φ	Sin φ / Cos φ	Sin φ	Mesure en grades de l'angle φ

x	cos x	sin x	tg x	x	cos x	sin x	tg x
0,00	1	0	0	0,50	0,877 6	0,479 4	0,546 [illegible]
0,01	1	0,010 0	0,010 0	0,51	0,872 7	0,488 2	0,559 [illegible]
0,02	0,999 8	0,020 0	0,020 0	0,52	0,867 8	0,496 9	0,572 [illegible]
0,03	0,999 6	0,030 0	0,030 0	0,53	0,862 8	0,505 5	0,585 [illegible]
0,04	0,999 2	0,040 0	0,040 0	0,54	0,857 7	0,514 1	0,599 4
0,05	0,998 8	0,050 0	0,050 0	0,55	0,852 5	0,522 7	0,61[illegible]
0,06	0,998 2	0,060 0	0,060 1	0,56	0,847 3	0,531 2	0,62[illegible]
0,07	0,997 6	0,069 9	0,070 1	0,57	0,841 9	0,539 6	0,64[illegible]
0,08	0,996 8	0,079 9	0,080 2	0,58	0,836 5	0,548 0	0,655 2
0,09	0,996 0	0,089 9	0,090 2	0,59	0,830 9	0,556 4	0,669 6
0,10	0,995 0	0,099 8	0,100 3	0,60	0,825 3	0,564 6	0,684 1
0,11	0,994 0	0,109 8	0,110 4	0,61	0,819 6	0,572 9	0,698 9
0,12	0,992 8	0,119 7	0,120 6	0,62	0,813 9	0,581 0	0,713 9
0,13	0,991 6	0,129 6	0,130 7	0,63	0,808 0	0,589 1	0,729 1
0,14	0,990 2	0,139 5	0,140 9	0,64	0,802 1	0,597 2	0,744 5
0,15	0,988 8	0,149 4	0,151 1	0,65	0,796 1	0,605 2	0,760 2
0,16	0,987 2	0,159 3	0,161 4	0,66	0,790 0	0,613 1	0,776 [illegible]
0,17	0,985 6	0,169 2	0,171 7	0,67	0,783 8	0,621 0	0,792 [illegible]
0,18	0,983 8	0,179 0	0,182 0	0,66	0,777 6	0,628 8	0,808 7
0,19	0,982 0	0,188 9	0,192 3	0,69	0,771 2	0,636 5	0,825 3
0,20	0,980 1	0,198 7	0,202 7	0,70	0,764 8	0,644 2	0,842 [illegible]
0,21	0,978 0	0,208 5	0,213 1	0,71	0,758 4	0,651 8	0,859 5
0,22	0,975 9	0,218 2	0,223 6	0,72	0,751 8	0,659 4	0,877 1
0,23	0,973 7	0,228 0	0,234 1	0,73	0,745 2	0,666 9	0,894 9
0,24	0,971 3	0,237 7	0,244 7	0,74	0,738 5	0,674 3	0,913 1
0,25	0,968 9	0,247 4	0,255 3	0,75	0,731 7	0,681 6	0,931 6
0,26	0,966 4	0,257 1	0,266 0	0,76	0,724 8	0,688 9	0,950 5
0,27	0,963 8	0,266 7	0,276 8	0,77	0,717 9	0,696 1	0,969 [illegible]
0,28	0,961 1	0,276 4	0,287 6	0,78	0,710 9	0,703 3	0,989 [illegible]
0,29	0,958 2	0,286 0	0,298 4	0,79	0,703 8	0,710 4	1,009 [illegible]
0,30	0,955 3	0,295 5	0,309 3	0,80	0,696 7	0,717 4	1,029 [illegible]
0,31	0,952 3	0,305 1	0,320 3	0,81	0,689 5	0,724 3	1,050 [illegible]
0,32	0,949 2	0,314 6	0,331 4	0,82	0,682 2	0,731 1	1,071 [illegible]
0,33	0,946 0	0,324 0	0,342 5	0,83	0,674 9	0,737 9	1,093 [illegible]
0,34	0,942 8	0,333 5	0,353 7	0,84	0,667 5	0,744 6	1,115 [illegible]
0,35	0,939 4	0,342 9	0,365 0	0,85	0,660 0	0,751 3	1,138 [illegible]
0,36	0,935 9	0,352 3	0,376 4	0,86	0,652 4	0,757 8	1,161 6
0,37	0,932 3	0,361 6	0,387 9	0,87	0,644 8	0,764 3	1,185 3
0,38	0,928 7	0,370 9	0,399 4	0,88	0,637 2	0,770 7	1,209 7
0,39	0,924 9	0,380 2	0,411 1	0,89	0,629 4	0,777 1	1,234 6
0,40	0,921 1	0,389 4	0,422 8	0,90	0,621 6	0,783 3	1 260,2
0,41	0,917 1	0,398 6	0,434 6	0,91	0,613 7	0,789 5	1,286 4
0,42	0,913 1	0,407 8	0,446 6	0,92	0,605 8	0,795 6	1,313 3
0,43	0,909 0	0,416 9	0,458 6	0,93	0,597 8	0,801 6	1,340 9
0,44	0,904 8	0,425 9	0,470 8	0,94	0,589 8	0,807 6	1,369 2
0,45	0,900 4	0,435 0	0,483 1	0,95	0,581 7	0,813 4	1,398 4
0,46	0,896 1	0,443 9	0,495 4	0,96	0,573 5	0,819 2	1 428 4
0,47	0,891 6	0,452 9	0,508 0	0,97	0,565 3	0,824 9	1,459 2
0,48	0,887 0	0,461 8	0,520 6	0,98	0,557 0	0,830 5	1,491 0
0,49	0,882 3	0,470 6	0,533 4	0,99	0,548 7	0,836 0	1,523 7
0,50	0,877 6	0,479 4	0,546 3	1,00	0,540 3	0,841 5	1,557 4

Index