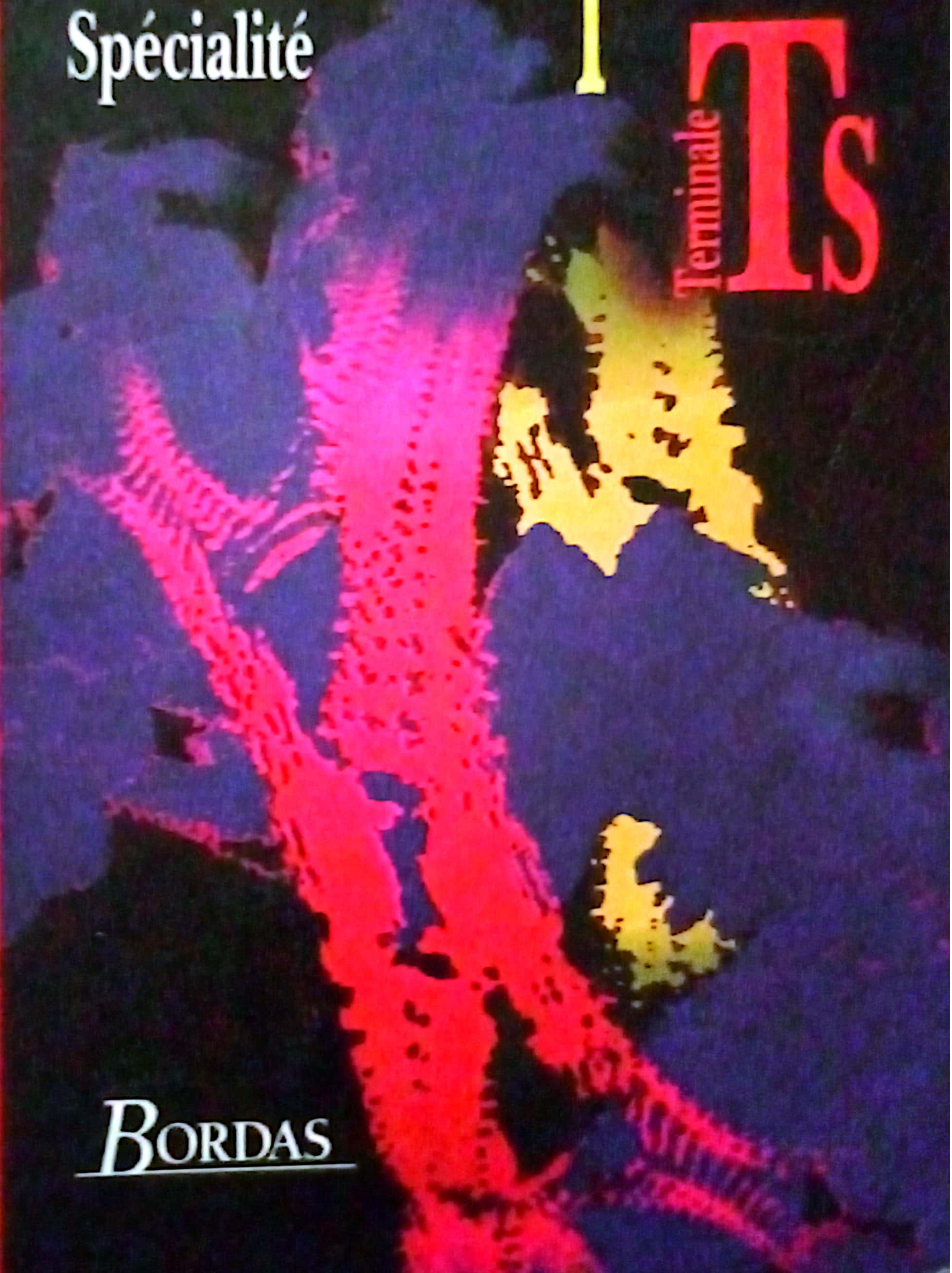
FRACTALE

Mathématiques

Spécialité

Terminale **Ts**



BORDAS

FRACTALE

Mathématiques

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Terminale **Ts**

Cet ouvrage a été rédigé sous la direction de **Guy BONTEMPS**, inspecteur pédagogique régional.

Hubert CARNEC
professeur au lycée Guist'hau, Nantes

Geneviève HAYE
professeur au lycée Jules Ferry, Paris

Monique NOUET
professeur au lycée Montesquieu, Le Mans

René SEROUX
professeur au lycée Jean-Perrin, Nantes

ÉRIC SERRA
inspecteur pédagogique régional

Jacqueline VENARD
professeur au lycée Joachim du Bellay, Angers

es élèves en

ne et difficulté

B

age.

mots clés et

PROGRAMME 1994

BORDAS

Un ensemble de Julia $J(A)$ à deux dimensions est paramétré par le point $A(a_1, a_2)$. Cet objet fractal (c'est-à-dire un objet dont la structure se répète à toutes les échelles d'observation) est obtenu par le processus itératif suivant.
En chaque point $C(c_1, c_2)$ du plan, on définit les deux suites :

$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a_1$ avec : $x_0 = c_1$

$y_{n+1} = 2x_n y_n + a_2$ $y_0 = c_2$

Lors de cette itération deux cas se rencontrent :

1° Le point (x_{n+1}, y_{n+1}) reste à distance finie de l'origine : on dit alors que le point courant $C(c_1, c_2)$ appartient à l'ensemble de Julia $J(A)$.

2° Le point (x_{n+1}, y_{n+1}) s'éloigne à l'infini : on dit alors que le point courant $C(c_1, c_2)$ n'appartient pas à l'ensemble de Julia $J(A)$.

La **photo de couverture** présente un ensemble de Julia défini de façon similaire à ce qui vient d'être décrit, mais dans un espace à quatre dimensions.

© J. F. Colonna, G.S.V.-Lactamme (École Polytechnique, C.N.E.T.)

CRÉDITS PHOTOGRAPHIQUES

p. 19 ph. Jeanbor © Archives Photeb.
p. 33 ph. Jeanbor © Photeb.
p. 48 2 ph. Jeanbor © Photeb.
p. 52 ph. Scala © Archives Photeb.
p. 84 ph. © Bildarchiv Preussischer Kulturbesitz, Berlin.
102 2 ph. © 1994, M. C. Escher/Cordon Art-Baarn, Holland. All rights reserved.
112 A gauche, Institut de France, Fondation Ephrussi de Rothschild, Musée « Ile de France », ph. © Lauros-Giraudon.
A droite, Musée du Louvre, Paris, ph. © Giraudon.
125 ph. © 1994, M. C. Escher/Cordon Art-Baarn, Holland. All rights reserved.
143 ph. Scala © Archives Photeb.

Édition : Michèle Miollany
Conception graphique : Datalog
Mise en page : Véronique Kempf
Iconographie : Laurence Vacher
Fabrication : Maria Pauliat
Couverture : Pierre Léotard
Schémas : Fractale

© BORDAS, Paris, 1994
ISBN 2-04-020993-X
ISSN 0933-5541

AVANT-PROPOS

Ce nouveau manuel de la collection **FRACTALE** a été conçu pour répondre aux exigences précises du programme de Terminale S — **enseignement de spécialité** — en vigueur à partir de septembre 1994.

Le programme, très dense, de l'**enseignement de spécialité** est centré sur deux objectifs : d'une part l'approfondissement de thèmes abordés en enseignement obligatoire, d'autre part l'introduction de notions nouvelles en géométrie des transformations.

Dans ce livre, les thèmes d'approfondissement font l'objet de trois chapitres atypiques de « Compléments » ne comportant que des travaux pratiques et des exercices : « 3. Compléments d'analyse », « 4. Compléments sur les nombres complexes », « 5. Compléments sur le calcul vectoriel ».
Les autres chapitres présentent la structure habituelle avec Activités Préparatoires, Cours, Travaux Pratiques, Fiche Méthode et Exercices.

Tout au long de ce manuel, l'objectif principal est d'entrainer les élèves à la **résolution méthodique des exercices** et de les préparer à l'épreuve du baccalauréat.
Les exercices et problèmes sont nombreux, variés et ciblés sur les besoins d'élèves de profil nettement scientifique. Ils ont été soigneusement sélectionnés afin de rester dans le strict cadre des deux heures hebdomadaires assignées à l'enseignement de spécialité.

Trois rubriques leurs sont réservées :

- **Exercices commentés**

Sur 2 à 3 pages, des exercices classiques sont suivis d'une brève analyse de l'énoncé et d'une correction détaillée qui peut servir de modèle aux élèves.

- **Le Jour du Bac**

Sur une page, un exercice ou extrait de problème du baccalauréat, entièrement résolu, met les élèves en situation.

- **Exercices et problèmes**

Ils portent sur toutes les notions abordées dans le cours et sont classés par thème et difficulté (■ facile, ■■ moins facile, ■■■ difficile).
Certains des exercices, repérés par la couleur rouge des ■, ont leur réponse en fin d'ouvrage.

A la fin du livre, pour mieux vous repérer dans ce manuel, vous trouverez un **index des mots clés** et un **index des méthodes**.

Nous espérons ainsi répondre aux attentes de tous les utilisateurs de ce manuel par notre conception ouverte et vivante des Mathématiques.

Les Auteurs

SOMMAIRE

1 COURBES PARAMÉTRÉES

OBJECTIFS

- *Introduire, pour l'étude de certaines courbes, une nouvelle représentation qui ne soit plus liée à la notion d'équation cartésienne.*
- *Savoir étudier quelques représentations paramétriques, tracer la courbe associée et définir la tangente en un point à cette courbe, dans les cas ne présentant pas de difficultés.*
- *Utiliser des propriétés de parité et de périodicité pour limiter l'intervalle d'étude.*

ACTIVITÉ *Préparatoire*

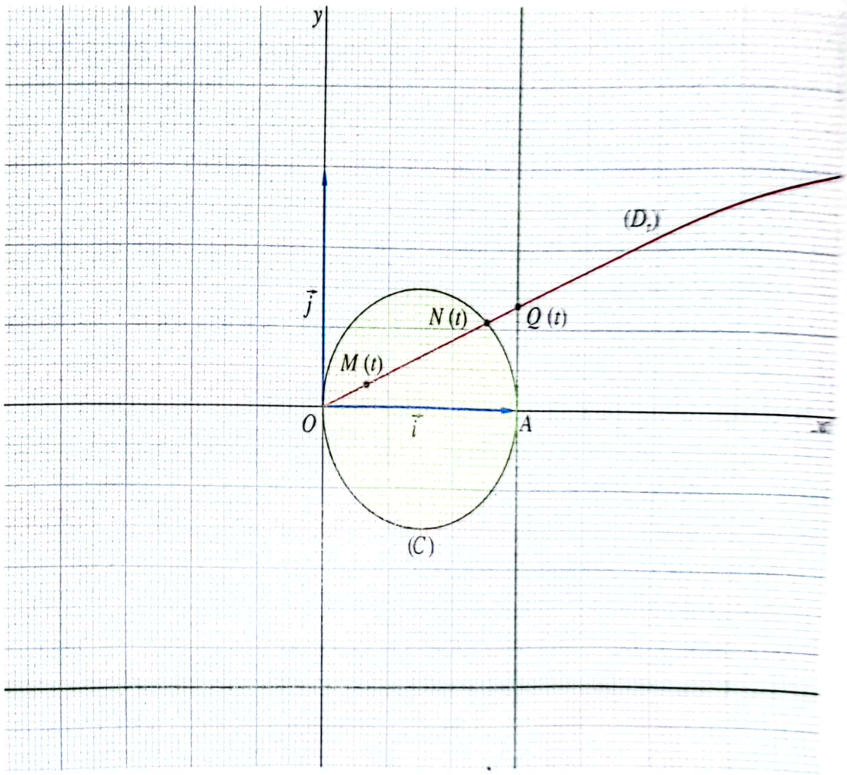
AP La cissoïde et la duplication du cube

L'objectif de cette activité est d'introduire, à l'aide d'un exemple historique, la notion de courbe paramétrée.

1. Définition de la cissoïde

LE SAVIEZ-VOUS ?
Un certain nombre de calculatrices graphiques récentes permettent de tracer ces courbes. Pour le mode opératoire, reportez-vous à la notice explicative fournie avec ce type de matériel.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal, A le point de coordonnées $(1, 0)$, (C) le cercle de diamètre $[OA]$. On note, pour tout nombre réel t, (D_t) la droite passant par O, de coefficient directeur t.
(D_t) coupe (C) en O et en un second point $N(t)$ et coupe la droite $(A, \vec{j})$ en un point $Q(t)$.
On définit le point $M(t)$ par la relation vectorielle :
$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{N(t)Q(t)}$.



1° Placez les points $M(t)$ correspondant aux valeurs suivantes de t : 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4.

Déduisez-en les points $M(t)$ correspondant aux valeurs suivantes de t : $-\frac{1}{2}$, -1, -2, -3, -4.

2° Calculez, en fonction de t, les coordonnées des points $Q(t)$ et $N(t)$.

3° On appelle (Γ) l'ensemble des points $M(t)$, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.
Montrez que (Γ) est l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ tels que :

$$x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

On dit que (Γ) est une courbe paramétrée car les coordonnées de ses points dépendent du paramètre t.

4° Comparez les coordonnées de $M(-t)$ et de $M(t)$. Que peut-on en déduire pour (Γ) ?

5° Achevez le tracé, point par point, de la courbe (Γ).
(Γ) s'appelle la **cissoïde de Dioclès** (mathématicien grec).

2. Équation cartésienne

On se propose de trouver une relation entre les coordonnées x et y de tout point M de (Γ), caractérisant l'appartenance de M à (Γ). Une telle relation s'appelle une équation cartésienne de (Γ).

1° On suppose que le point $M(x, y)$ est tel que :
$x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$ avec x non nul. Alors $t = \dfrac{y}{x}$.
Montrez que x et y vérifient : $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.
Vérifiez que cela est encore vrai pour le point O de (Γ).

2° Réciproquement, soit $M(x, y)$ vérifiant la relation :
$x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.

a) Si $x = 0$, que vaut y ?

b) Si x est non nul, on pose $t = \dfrac{y}{x}$. Calculez x et y en fonction de t.

3° Montrez alors que la relation $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$ caractérise l'appartenance de M à (Γ).
C'est donc une équation cartésienne de (Γ).

3. Le problème de la duplication du cube

LE SAVIEZ-VOUS ?
Les Grecs ont utilisé la cissoïde, étudiée par Dioclès au II^e siècle avant J.-C., pour trouver une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$. On raconte que ce problème a pour origine la construction d'un temple : les habitants de Délos auraient reçu d'un oracle l'ordre de construire un autel cubique, dédié à Apollon, d'un volume double de celui qui existait déjà.

C'est un des grands problèmes mathématiques de l'Antiquité. Il s'agit, étant donné un cube d'arête a, de construire un cube de volume double du précédent, c'est-à-dire d'arête $a\sqrt[3]{2}$***. Il faut donc construire un segment de longueur*** $\sqrt[3]{2}$ ***à l'aide de méthodes géométriques, c'est-à-dire d'une règle et d'un compas. C'est seulement au XIX^e siècle que l'on a montré l'impossibilité d'une telle construction.***

Voyons donc comment la cissoïde va nous aider à résoudre ce problème.

1° Écrivez une équation de la droite $(AM(t))$, pour t non nul.

2° Montrez que cette droite coupe l'axe $(O, \vec{j})$ en $P(t)$ de coordonnées $(0, t^3)$. Faites une figure.
La donnée du point $Q(t)$ et de la cissoïde permet de construire $P(t)$.
Expliquez comment, à partir de $P(t)$ et de la construction point par point de la cissoïde, on peut retrouver $Q(t)$. On peut donc, à partir de t^3, retrouver $\sqrt[3]{t^3}$, donc trouver $\sqrt[3]{2}$ à partir de 2...

3° Construisez alors le point $P(0, 2)$ et le point Q associé. Mesurez AQ.

COURS

1. Définition d'une courbe paramétrée

Définition 1

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.
Associons à ces deux fonctions le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ vérifiant :

pour tout élément t de I, $x(t) = f(t)$ et $y(t) = g(t)$.

On dit que l'ensemble des points $M(t)$ est une courbe paramétrée plane dont une représentation paramétrique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in I. \end{cases}$

LE SAVIEZ-VOUS ?
Souvent le point $M(t)$ est lié au paramètre temps ; on dit alors que $M(t)$ est un **point mobile**, ou la **position du point mobile** à l'instant t. La courbe (C) décrite par ce point $M(t)$ s'appelle, en cinématique, la **trajectoire du point mobile**.

■ **Remarques**

Toute courbe (C) d'équation cartésienne $y = f(x)$, x élément d'un intervalle I, peut être considérée comme une courbe paramétrée. Il suffit de choisir x comme paramètre.

Le système d'équations $\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad t \in I \end{cases}$ constitue alors une représentation paramétrique de (C).

La notion de courbe paramétrée généralise donc la notion de courbe que vous connaissez déjà.

■ **Équation cartésienne**

Soit (C) une courbe paramétrée, dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in I. \end{cases}$

S'il existe une relation liant x et y, équivalente au système précédent, et caractérisant donc l'appartenance du point $M(x, y)$ à la courbe précédente, on l'appelle **équation cartésienne de la courbe (C)**.

EXEMPLE

Soit (C) la courbe dont une représentation paramétrique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

On sait que : $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$; alors $y = 1 - 2x^2$.
Le point $M(t)$ appartient donc à la parabole d'équation $y = 1 - 2x^2$.

Cependant, lorsque t décrit $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t$ décrit l'intervalle $[-1 ; 1]$.

L'ensemble des points $M(t)$ est la portion de parabole d'équation cartésienne $y = 1 - 2x^2$, $x \in [-1 ; 1]$.

2 . Vecteur dérivé d'une courbe paramétrée

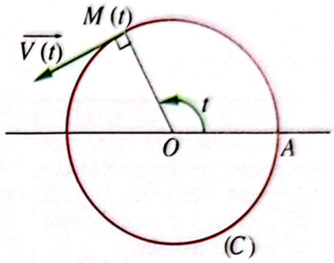
Définition 2

Soit f et g deux fonctions dérivables en un nombre réel t_0 d'un intervalle I, (C) la courbe paramétrée d'équations $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in I \end{cases}$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle vecteur dérivé au point $M(t_0)$ de la courbe (C) le vecteur $\overrightarrow{V(t_0)}$ défini par :
$\overrightarrow{V(t_0)} = f'(t_0)\,\vec{i} + g'(t_0)\,\vec{j}$.
Ce vecteur se note aussi : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$.

EXEMPLE

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon R. Une représentation paramétrique de (C) est :

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Le vecteur dérivé en $M(t)$, noté $\overrightarrow{V(t)}$, est défini par :
$\overrightarrow{V(t)} = -R \sin t\ \vec{i} + R \cos t\ \vec{j}$.

D'où $\|\overrightarrow{V(t)}\| = R$, donc $\overrightarrow{V(t)}$ n'est pas le vecteur nul.
Remarquons ici que $\overrightarrow{OM(t)} \cdot \overrightarrow{V(t)} = 0$,
$\overrightarrow{V(t)}$ est donc orthogonal à la droite $(OM(t))$; c'est donc un vecteur directeur de la tangente au cercle (C) en $M(t)$.

- **Notion de tangente**

Propriété 1 *admise*

Soit I un intervalle, (C) une courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in I. \end{cases}$
Soit t_0 un point de I. On suppose les fonctions f et g dérivables en t_0, et telles que le vecteur dérivé $\overrightarrow{V(t_0)}$ soit un vecteur non nul.
La droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{V(t_0)}$ est alors la tangente à (C) en $M(t_0)$.

L'exemple précédent illustre cette propriété.

- **Remarque**

Nous avons déjà rencontré la notion de tangente en un point M_0 d'abscisse x_0 d'une courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$ $(x \in I)$ lorsque f est dérivable en x_0.

Cette courbe a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad t \in I. \end{cases}$

Déterminons alors $\overrightarrow{V(t_0)}$, obtenu pour la valeur t_0 du paramètre t.
$\overrightarrow{V(t_0)} = \vec{i} + f'(t_0)\,\vec{j}$; $\overrightarrow{V(t_0)}$ est un vecteur non nul, il dirige donc la tangente à (C) en M_0, qui a donc bien pour coefficient directeur $f'(t_0)$.

TRAVAUX Pratiques

TP 1 Un lieu géométrique : l'astroïde

De nombreuses situations géométriques conduisent à des ensembles de points dont les coordonnées s'expriment à l'aide d'un paramètre. Nous donnons un exemple d'une telle courbe qui ne peut être associée à une équation de la forme $y = f(x)$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 8. Soit P le point de ce cercle tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$ ait pour mesure t, où t est un nombre réel de l'intervalle $[-\pi ; \pi]$. On désigne respectivement par A, B et M les projetés orthogonaux de P sur l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite (AB).

1° Démontrez qu'une équation de la droite (AB) est :
$x \sin t + y \cos t - 8 \sin t \cos t = 0.$

2° Démontrez que les coordonnées x et y du point M s'expriment, en fonction de t, par : $\begin{cases} x(t) = 8\cos^3 t \\ y(t) = 8\sin^3 t. \end{cases}$

LE SAVIEZ-VOUS ?
Si vous utilisez une calculatrice graphique, le mode RANGE vous permet de limiter la plage de valeurs de t en tenant compte des résultats ci-contre.

3° On se propose de tracer la courbe $(\mathcal{A})$, lieu géométrique des points M, lorsque P décrit le cercle (Γ), c'est-à-dire lorsque t décrit l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

a) Comparez les points $M(t)$ et $M(-t)$, $M(t)$ et $M(\pi - t)$, $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Dans chaque cas, quelle conclusion en tirez-vous pour la courbe $(\mathcal{A})$?

b) En utilisant les trois résultats précédents, justifiez le choix de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ comme intervalle d'étude.

c) On désigne par $(\mathcal{A}_1)$ la portion de la courbe $(\mathcal{A})$ obtenue lorsque t décrit l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$. Précisez les transformations qui permettent d'obtenir $(\mathcal{A})$ à partir de $(\mathcal{A}_1)$.

4° *a*) On suppose t élément de $\left]0 ; \frac{\pi}{4}\right]$.
Calculez $x'(t)$ et $y'(t)$. Montrez que le vecteur dérivé en $M(t)$ est colinéaire à $\vec{u}(t)$ avec $\vec{u}(t) = (-\cos t)\,\vec{i} + (\sin t)\,\vec{j}$.

b) On admet que $\vec{u}(t)$ est également un vecteur directeur de la tangente lorsque t est nul. Déterminez alors la tangente au point $M(0)$.

c) Donnez un tableau résumant l'étude conjointe des fonctions x et y.

d) Tracez $(\mathcal{A}_1)$ puis $(\mathcal{A})$.

5° Soit $M(t)$ un point de $(\mathcal{A})$ tel que la tangente en $M(t)$ ne soit pas parallèle aux axes de coordonnées.

a) Écrivez une équation de la tangente en $M(t)$.

b) Cette tangente coupe l'axe des abscisses en R et l'axe des ordonnées en Q. Démontrez que le segment $[RQ]$ a une longueur constante.

TP2 Où l'on utilise une rotation...

Afin de réduire l'intervalle d'étude d'une courbe paramétrée, on utilise le plus souvent des réflexions ou des symétries centrales. D'autres transformations géométriques peuvent être efficaces : dans cet exemple, c'est le cas d'une rotation.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Question préliminaire

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit $N(x, y)$ un point du plan et $N'(x', y')$ son image par r. Démontrez que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$

2. Une hypocycloïde

On se propose de tracer la courbe (C) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t + \sin 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

1° Démontrez que $M\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ est l'image de $M(t)$ par la rotation r.

Déduisez-en que l'on peut réduire l'étude à l'intervalle $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$.

2° Étudiez les variations des fonctions x et y sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$; rassemblez les résultats obtenus dans un tableau.

3° On suppose que t appartient à $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Montrez que le vecteur $\overrightarrow{u(t)} = (\sin t)\,\vec{i} + (1 + \cos t)\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente à (C) en $M(t)$.

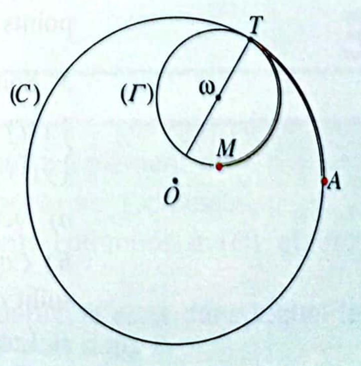
4° On admet que le résultat précédent reste valable lorsque $t = \frac{\pi}{3}$.

Montrez que la tangente à (C) au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ passe par O.

5° Tracez la partie (C_1) de la courbe (C) lorsque t décrit $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Précisez la tangente à (C) au point $M(0)$.
En utilisant la rotation r, déduisez-en la courbe (C).

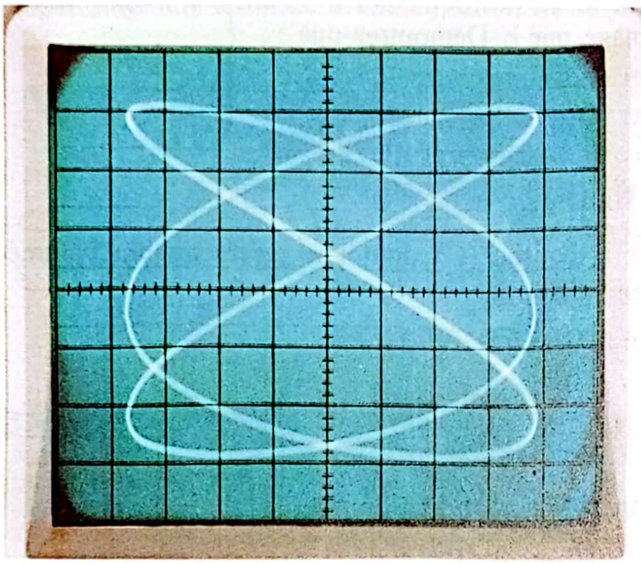
**Un cercle (Γ) de rayon r, roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle (C) de rayon R (ce qui suppose $r < R$).
A l'instant $t = 0$, M est en A.
Le lieu géométrique du point M lorsque t décrit $[0 ; +\infty[$ est une hypocycloïde. Dans le cas particulier où $r = \frac{R}{4}$, cette hypocycloïde est une astroïde.**



TP3 Courbes de Lissajous

On appelle courbe de Lissajous la trajectoire obtenue en composant deux mouvements sinusoïdaux de même origine, s'effectuant suivant deux directions $(O, \vec{i}\,)$ et $(O, \vec{j}\,)$ orthogonales. On suppose $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

On peut visualiser une telle courbe sur un oscillographe cathodique, lorsque l'on envoie des tensions sinusoïdales suivant deux axes orthogonaux. Ceci engendre sur l'écran un spot lumineux, dont la trajectoire est une courbe de Lissajous.



Soit $M(t)$ un point d'une courbe de Lissajous.

Les projetés orthogonaux $N(t)$ et $P(t)$ sur les axes $(O, \vec{i}\,)$ et $(O, \vec{j}\,)$ décrivant des mouvements sinusoïdaux, on a :

$\overline{ON}(t) = a \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$,

$\overline{OP}(t) = b \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$.

On appelle φ_1 et φ_2 les déphasages à l'origine.

Le point $M(t)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = a \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) = b \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

1° Montrez que le point $M(t)$ se trouve à l'intérieur d'un rectangle.

2° Soit (C_1) la courbe de Lissajous de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Comparez les points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$, $M(-t)$ et $M(t)$, $M(\pi - t)$ et $M(t)$.

b) Déduisez-en qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Déterminez le vecteur dérivé $\overrightarrow{V(t)}$, et montrez qu'il n'est jamais nul.

d) Après avoir étudié les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, tracez la courbe (C_1) en précisant les tangentes en $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $M(\pi)$ et le carré dans lequel elle est inscrite. Quels sont les points de contact entre la courbe et ce carré ?

LE SAVIEZ-VOUS ?
Jules Lissajous (1822-1880) est un physicien français qui a étudié la composition de mouvements vibratoires.

3° Soit (C_2) la courbe de Lissajous de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin t + \cos t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Déterminez les déphasages à l'origine φ_1 *et* φ_2.

b) Comparez $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$, puis $M(t + \pi)$ et $M(t)$. Déduisez-en qu'il suffit d'étudier x et y sur $[0\,;\pi]$.

c) Étudiez les variations de x et y ; tracez (C_2) en prenant pour unité de longueur 4 cm.

FICHE *Méthode*

Comment étudier une courbe paramétrée

La courbe $(\mathcal{C})$ est définie par les équations $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \end{cases}$ où $t \in E$.

Choix de l'intervalle d'étude 1

Périodicité

- Étudiez la périodicité éventuelle des fonctions f et g. Si T est une période commune à ces deux fonctions, on choisit pour intervalle d'étude $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

Parité

- Étudiez la parité des fonctions f et g. Si ces deux fonctions sont paires ou impaires, on réduit l'intervalle d'étude à $\left[0; \frac{T}{2}\right]$.

Symétries

- Calculez $f\left(\frac{T}{2} - t\right)$ et $g\left(\frac{T}{2} - t\right)$; comparez-les à $f(t)$ et $g(t)$ de façon à mettre en évidence une autre symétrie éventuelle de la courbe $(\mathcal{C})$ et à réduire l'intervalle d'étude à $\left[0; \frac{T}{4}\right]$.
- Si I désigne l'intervalle d'étude réduit et $(\mathcal{C}_1)$ la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à I, précisez les transformations permettant d'obtenir $(\mathcal{C})$ à partir de $(\mathcal{C}_1)$.

Étude des variations de f et g 2

- Résumez les résultats obtenus dans un tableau de variations commun aux deux fonctions f et g.
- Précisez les points particuliers (points en lesquels la tangente à $(\mathcal{C})$ est parallèle aux axes de coordonnées).

Tracé de la courbe 3

- Tracez la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à t élément de I.
- Complétez le tracé de $(\mathcal{C})$ comme prévu au 1 ci-dessus.
- Déterminez éventuellement les points communs à $(\mathcal{C})$ et aux axes de coordonnées.
- Il peut être utile de mettre en évidence le sens dans lequel le point M décrit la courbe $(\mathcal{C})$ lorsque t croît dans E.

EXERCICES Commentés

1 Équation cartésienne

On se propose d'étudier la courbe $(\mathcal{C})$ définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

1° Justifiez le choix de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ comme intervalle d'étude.

2° Déterminez une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$. Tracez $(\mathcal{C})$.

Commentaire

On mettra en œuvre la démarche proposée dans cet exercice chaque fois qu'il est possible de déterminer une équation cartésienne de la courbe $(\mathcal{C})$ et d'identifier ainsi sa nature.

Une solution

1° Réduction de l'ensemble d'étude

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(t) = \cos 2t$ et $g(t) = \sin^2 t$,

sont périodiques, de période π et paires. Ainsi, l'ensemble $(\mathcal{C})$ est obtenu lorsque t décrit $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2° Recherche d'une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$

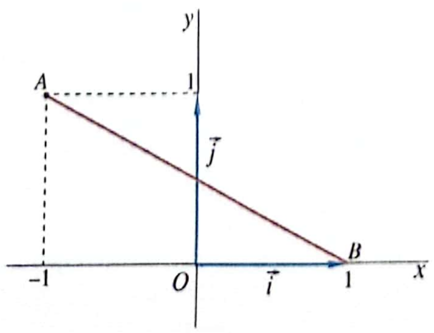
- Il s'agit de trouver une relation entre x et y, indépendante de t.

On sait que $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$; donc si $M(x, y)$ est élément de $(\mathcal{C})$, alors $x = 1 - 2y$.

- Comme, pour t élément de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos 2t$ décrit l'intervalle $[-1\,;1]$, $\sin^2 t$ l'intervalle $[0\,;1]$, $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1\,; \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire le segment $[AB]$, où $A(-1, 1)$ et $B(1, 0)$.



2 La cardioïde

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont un système d'équations paramétriques, dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\begin{cases} x = f(t) = (1 + \cos t)\cos t \\ y = g(t) = (1 + \cos t)\sin t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

1° En utilisant la parité et la périodicité des fonctions f et g, réduisez l'intervalle d'étude et déterminez les symétries de la courbe $(\mathcal{C})$.

2° Étudiez les variations des fonctions f et g.

3° *a)* Montrez que, si t est distinct de π, la droite $OM(t)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u(t)}$ avec :

$\overrightarrow{u(t)} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$.

b) Déduisez-en la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $M(\pi)$ de la courbe $(\mathcal{C})$, puis tracez la courbe $(\mathcal{C})$.

Commentaire

Cet exercice, très classique, permet de mettre en œuvre le plan d'étude proposé dans la fiche méthode. On prêtera plus particulièrement attention à la réduction de l'intervalle d'étude qui résulte des propriétés, connues, des fonctions sinus et cosinus.

Une solution

1° Recherche des éléments de symétrie de $(\mathcal{C})$

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π, on peut étudier f et g sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, l'ensemble des points de $(\mathcal{C})$ étant obtenu pour t élément de cet intervalle car, pour $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = M(t + 2\pi)$.

D'autre part, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus paire; donc pour t élément de $[-\pi\,;\pi]$:

$$\begin{cases} f(-t) = f(t) \\ g(-t) = -g(t). \end{cases}$$

Cela signifie que les points $M(t)$ et $M(-t)$, points de $(\mathcal{C})$, ont même abscisse et des ordonnées opposées. Ainsi, la courbe $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et on peut l'étudier lorsque t est élément de $[0\,;\pi]$.

2° Étude des variations de f et de g sur $[0\,;\pi]$

f et g sont des fonctions dérivables sur $[0\,;\pi]$ comme produit de fonctions dérivables :

$t \mapsto 1 + \cos t$ et $t \mapsto \cos t$ d'une part,

$t \mapsto 1 + \cos t$ et $t \mapsto \sin t$ d'autre part.

Leurs dérivées respectives f' et g' sont telles que :

$f'(t) = -\sin t - 2\sin t \cos t$,

$g'(t) = 2\cos^2 t + \cos t - 1$.

On remarque que : $f'(t) = -2\sin t\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)$,

$$g'(t) = 2(\cos t + 1)\left(\cos t - \frac{1}{2}\right).$$

Étude du signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\pi]$

- Si $t \in [0\,;\pi]$ alors $\sin t \geqslant 0$;
- $\cos t + \frac{1}{2} \geqslant 0$ équivaut à $\cos t \geqslant -\frac{1}{2}$, soit t élément de $\left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$.

D'où le tableau :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin t$	0	$+$		$+$	0
$\cos t + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0

De même pour $g'(t)$:

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos t + 1$	2	$+$		$+$	0
$\cos t - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$-\frac{3}{2}$
$g'(t)$	2	$+$	0	$-$	0

Le tableau suivant résume les variations de f et de g :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(t)$	0	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	-1	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$g'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1	$-$	-1	$-$	0
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Vous savez que si $f'(t)$ et $g'(t)$ ne sont pas simultanément nuls, alors le vecteur $\overrightarrow{u(t)} = f'(t)\,\vec{i} + g'(t)\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $M(t)$.

A la lecture du tableau de variations ci-contre, on peut préciser certaines tangentes à $(\mathcal{C})$.

- Si $t = 0$, le point M est en $A(2, 0)$; la tangente à $(\mathcal{C})$ en A a pour vecteur directeur $2\vec{j}$, elle est donc parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$.
- Si $t = \frac{\pi}{3}$, le point M est en $B\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$; un vecteur directeur de la tangente est alors $-\sqrt{3}\,\vec{i}$, celle-ci est donc parallèle à l'axe $(O, \vec{i})$.
- Si $t = \frac{2\pi}{3}$, le point M est en $C\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; un vecteur directeur de la tangente est alors $-\vec{j}$; celle-ci est donc parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$.
- Enfin, on remarque que, pour $t = \pi$, on a, simultanément, $f'(\pi) = 0$ et $g'(\pi) = 0$; on ne peut, dans ce cas, conclure directement.

3° Étude de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $M(\pi)$

a) Si $t \neq \pi$, le vecteur

$\overrightarrow{OM(t)} = (1 + \cos t)[\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}]$

est colinéaire au vecteur non nul $\overrightarrow{u(t)}$ avec :

$\overrightarrow{u(t)} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$.

b) Lorsque $t = \pi$, le point $M(t)$ est en O et, lorsque $t \neq \pi$, le vecteur $\overrightarrow{u(t)}$ dirige la droite $(OM(t))$. Comme :

$\lim_{t \to \pi} \cos t = -1$ et $\lim_{t \to \pi} \sin t = 0$,

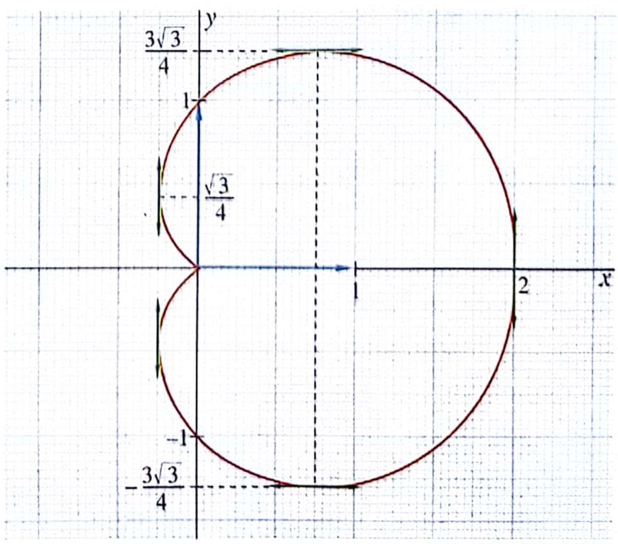
la droite variable $(OM(t))$ a pour position limite, lorsque t tend vers π, la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}_0 = -\vec{i}$.

On dit que la courbe $(\mathcal{C})$ admet pour tangente en O l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$.

Tracé de la courbe $(\mathcal{C})$

Il s'obtient en plaçant les points particuliers de la figure, avec les tangentes correspondantes à $(\mathcal{C})$. On effectue alors le tracé de $(\mathcal{C})$ pour t élément de $[0\,;\pi]$ et on le complète par symétrie par rapport à $(O, \vec{i})$.

On obtient ainsi une courbe, dénommée **cardioïde.**



LE JOUR DU BAC

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On se propose de tracer la courbe $(\mathcal{C})$, ensemble des points M du plan dont les coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \cos 3t \quad \text{où } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1° Préciser les valeurs de t correspondant :

a) aux points où la courbe $(\mathcal{C})$ coupe les axes ;

b) aux points d'abscisse 1.

2° Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (On admettra que la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $A(1, 1)$ a pour coefficient directeur $\frac{9}{4}$.)

(Bac 1978)

Analyse de l'énoncé

L'énoncé conduit à résoudre des équations trigonométriques élémentaires.
Rappelons que :

$\cos X = 0$ équivaut à $X = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$,

$\cos X = 1$ équivaut à $X = k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Une solution

1° *a*) • $\cos 2t = 0$ équivaut à :

$2t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, donc à $t = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

La courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des ordonnées lorsque :

$t = (2k+1)\frac{\pi}{4}$.

• $\cos 3t = 0$ équivaut à :

$3t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, donc à $t = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

La courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses lorsque :

$t = (2k+1)\frac{\pi}{6}$.

b) $\cos 2t = 1$ équivaut à : $2t = k2\pi$, donc à $t = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Les points de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1 correspondent à $t = k\pi$.

2° Réduction de l'intervalle d'étude

• La fonction x est périodique, de période π ; la fonction y est périodique, de période $\frac{2\pi}{3}$. Donc on peut restreindre l'étude à un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi ; \pi]$.

• Quel que soit t, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont confondus. On peut restreindre l'étude à $[0 ; \pi]$.

• Quel que soit t :

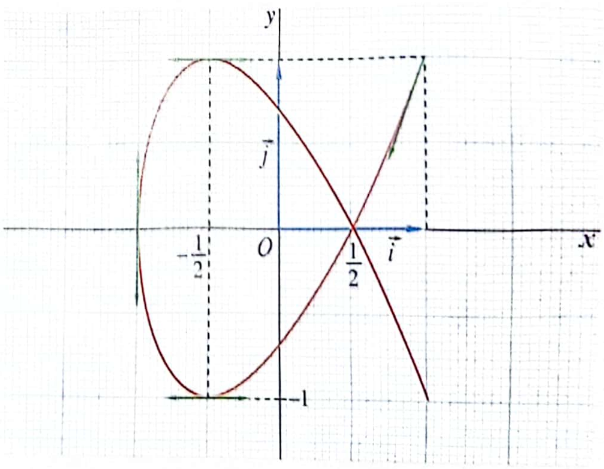
$x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$.

La courbe $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On peut réduire l'étude à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Étude des fonctions x et y :

$x'(t) = -2 \sin 2t$ et $y'(t) = -3 \sin 3t$.
Le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ est alors immédiat.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	-1	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	0
$y'(t)$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	3
$x(t)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-1
$y(t)$	1	↘	0	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	0



EXERCICES & PROBLÈMES

Q.C.M.

Dans chacun des exercices suivants, une au moins des réponses est exacte.

1 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :
$x(t) = \sin t$ et $y = \cos 2t$ où $t \in \mathbb{R}$.

- Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ☐
- Les points $M(t)$ et $M(t+\pi)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ☐
- La courbe $(\mathcal{C})$ est la parabole d'équation $y = 1 - 2x^2$ ☐
- Le point $A(1, 3)$ appartient à $(\mathcal{C})$ ☐

2 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :
$x = \sin t$ et $y = \sin 2t$ où $t \in \mathbb{R}$.

- Le point O est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$ ☐
- Le vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente en $M(0)$ ☐
- La tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est verticale ☐
- La tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est horizontale ☐

3 Chacune des courbes dont les équations paramétriques sont données ci-dessous est incluse dans une parabole :

- $x = t^2$ et $y = t^4$ avec $t \in \mathbb{R}$ ☐
- $x = t^2$ et $y = t$ avec $t \in \mathbb{R}$ ☐
- $x = t + \frac{1}{t}$ et $y = t^2 + \frac{1}{t^2}$ avec $t \in]0 ; +\infty[$ ☐
- $x = \sin t$ et $y = \sin 2t$ avec $t \in [0 ; 2\pi[$ ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARAMÉTRAGES D'UNE DROITE OU D'UN CERCLE

4 ■ On considère les points $A(-2, -1)$ et $B(4, 3)$.
Déterminez une représentation paramétrique :

a) du segment $[AB]$;

b) de la demi-droite d'origine A ne contenant pas B.

5 ■ Déterminez une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $A(1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$.

6 ■ Déterminez une représentation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1, -1)$, de rayon 2.

7 ■ On donne : $A(-2, 1)$ et $B(4, 1)$.
Déterminez une représentation paramétrique du demi-cercle de diamètre $[AB]$ dont les points ont une ordonnée supérieure ou égale à 1.

8 ■ Démontrez que la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

est un cercle que vous représenterez.

9 ■■ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{-2t}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in [0 ; +\infty[.$$

Démontrez que $(\mathcal{C})$ est un demi-cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

Dans chacun des exercices **10** *à* **16**, *déterminez une équation cartésienne du support de la trajectoire du point M dont les coordonnées sont données en fonction du temps, noté t, avec t élément de* $[0 ; +\infty[$.

10 ■ $x(t) = t + 1$ et $y(t) = 2t^2 - 1$.

11 ■ $x(t) = 1 + \cos 2t$ et $y(t) = \sin t$.

12 ■■ $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \sin 3t$.

13 ■ $x(t) = e^t$ et $y(t) = t - e^{-t}$.

14 ■■ $x(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $y(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

15 $x(t) = \cos t - 1$ et $y(t) = 2 \sin t + 2$.

16 $x(t) = 2 - \sin t$ et $y(t) = 1 + \cos 2t$.

TANGENTE À UNE COURBE PARAMÉTRÉE

Dans les exercices **17** *à* **20**, *déterminez un vecteur directeur de la tangente à la courbe* $(\mathcal{C})$ *de représentation paramétrique donnée, au point* $M(t_0)$.

17 $x(t) = t^2$ et $y(t) = t - t^5$ avec $t_0 \in \{0, 1\}$.

18 $x(t) = t - t^3$ et $y(t) = t^2 - t^4$ avec $t_0 = 1$.

19 $x(t) = \sin t$ et $y = \tan \frac{t}{2}$ avec $t_0 = 0$.

20 $x(t) = \sin 3t$ et $y = \cos t$ avec $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

Dans les exercices **21** *à* **24**, *déterminez une équation cartésienne de la tangente à la courbe* $(\mathcal{C})$ *de représentation paramétrique donnée, au point* $M(t_0)$.

21 $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3 - 3t$ avec $t_0 = \sqrt{3}$.

22 $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \sin 2t$ avec $t_0 = \pi$.

23 $x(t) = 2 \cos t$ et $y(t) = 3 \sin t$ avec $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

24 $x(t) = \tan \frac{t}{2}$ et $y(t) = \cos t$ avec $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

DES COURBES CLASSIQUES

25 **La conchoïde de Nicomède**

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

1° Comparez les points $M(-t)$ et $M(t)$. Quelle propriété en déduisez-vous pour la courbe $(\mathcal{C})$?

2° Étudiez les variations des fonctions x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

3° Tracez la courbe $(\mathcal{C})$.

26 **Une courbe de Lissajous**

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos t, \quad t \text{ élément de } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1° Déterminez l'intervalle d'étude utile.

2° Étudiez les variations de x et y.
Montrez que la courbe est inscrite dans un carré de côté 2. Déterminez les points de contact avec ce carré, et les tangentes en ces points.

3° Tracez la courbe.

27 **Une autre courbe de Lissajous**

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t, \quad t \text{ élément de } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1° Déterminez la période commune aux fonctions x et y.

2° Comparez $M(t)$, $M(t + \pi)$ et $M(-t)$.
Déduisez-en que l'intervalle d'étude peut être réduit à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3° Étudiez les variations de x et y.
Montrez que la courbe est inscrite dans le carré délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$.

4° Tracez la courbe $(\mathcal{C})$.

28 **Une strophoïde droite**

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal.
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(1, 0)$ et de rayon 1, (Δ) la droite d'équation $x = 1$, (D_t) la droite d'équation $y = tx$.

1° Donnez une équation du cercle $(\mathcal{C})$.

2° La droite (D_t) coupe (Δ) en un point M_0 et le cercle $(\mathcal{C})$ aux points O et M_1. On définit le point $M(t)$ par la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M_0M_1}$.
Déterminez les coordonnées de $M(t)$.

3° Soit (Γ) la courbe dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y(t) = \dfrac{t(1 - t^2)}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Étudiez et représentez la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4° On considère la droite (D_t) comme variable, et t élément de $[0; +\infty[$. Quelle est la trajectoire de $M(t)$?

29 Une boucle de la trissectrice de Mac-Laurin

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t^2 + 1} \\ y(t) = \dfrac{t(t^2 - 3)}{t^2 + 1}, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1° Démontrez que la courbe $(\mathscr{C})$ admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

2° Étudiez les variations des fonctions x et y sur $]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$.

3° Tracez la courbe $(\mathscr{C})$.

30 Une cycloïde

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t), \quad t \text{ élément de } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1° Comparez les coordonnées des points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ et montrez que ces points se correspondent dans une translation.

2° Déduisez-en l'intervalle d'étude utile.

3° Étudiez les variations de x et y et calculez le vecteur dérivé $\overrightarrow{V(t)}$.

4° On suppose ici t non nul. Montrez que la tangente en $M(t)$ à la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u(t)}$ défini par :

$$\overrightarrow{u(t)} = \frac{1}{t}(1 - \cos t)\,\vec{\imath} + \frac{1}{t}\sin t\,\vec{\jmath}.$$

Déterminez les limites en 0 des coordonnées de $\overrightarrow{u(t)}$ et déduisez-en la tangente en O à la courbe $(\mathscr{C})$.

5° Construisez la courbe $(\mathscr{C})$.

Trajectoire lumineuse de la valve d'une roue de bicyclette en mouvement : cette trajectoire est une cycloïde.

31 Spirale logarithmique

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit (C) la courbe dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1° *a)* Étudiez les variations des fonctions x et y pour t élément de $[0\,;\pi]$.

b) Construisez la partie correspondante, notée (C_1), de la courbe (C).

2° Quelles transformations géométriques permettent d'obtenir, à partir du point $M(t)$:

a) le point $M(t + \pi)$? *b)* le point $M(t - \pi)$?

Déduisez-en une construction de (C) à partir de (C_1).

3° Soit M le point de (C) correspondant à la valeur t du paramètre.

a) Déterminez un vecteur directeur $\overrightarrow{u(t)}$ de la tangente en M à la courbe (C).

b) Déduisez-en que l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u(t)})$ est indépendant du point M.

32 La lemniscate de Bernoulli

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique, dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t\sqrt{\cos 2t} \\ y(t) = \sin t\sqrt{\cos 2t}, \end{cases}$$

avec t élément de $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$.

1° Soit $M(t)$ un point de paramètre t, élément de $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$. Montrez que $M(\pi + t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport au point O.

Montrez alors qu'il suffit d'étudier la partie de la courbe obtenue pour t élément de $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

2° Comparez $M(-t)$ et $M(t)$, lorsque t est élément de $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

3° Montrez alors qu'il suffit d'étudier la partie de la courbe obtenue pour t élément de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$. Explicitez les symétries à utiliser pour obtenir $(\mathscr{C})$ en entier.

4° Montrez que, si t appartient à $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables et vérifient :

$$x'(t) = -\frac{\sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}.$$

Faites un tableau des variations de x et y.

5° Soit t différent de 0. Montrez que $(OM(t))$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u(t)} = \cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$.

Déduisez-en la position limite de $(OM(t))$ lorsque t tend vers zéro.

6° Tracez la courbe $(\mathscr{C})$ et les tangentes aux points particuliers de $(\mathscr{C})$. Montrez qu'au point O la courbe admet deux tangentes orthogonales.

PROBLÈMES

33 Un folium de Descartes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est 6 cm.
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1. A tout point M de $(\mathcal{C})$ on associe le point N tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = 2(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et le point P symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
On désigne par G le centre de gravité du triangle MNP et on se propose de déterminer le lieu géométrique du point G lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

1° On désigne par t une mesure en radians de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Déterminez les coordonnées des points M, N, P.

2° Déduisez-en que la courbe (Γ) admet pour équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}\sin 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

3° *a*) Comparez les points $G(t + 2\pi)$ et $G(t)$ puis $G(-t)$ et $G(t)$. Déduisez-en qu'il suffit d'étudier x et y sur l'intervalle $[0; \pi]$.

b) Soit (Γ_1) la position de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0; \pi]$. Précisez les transformations qui permettent d'obtenir (Γ) à partir de (Γ_1).

c) Étudiez les variations de x et y sur $[0; \pi]$.

d) Construisez la courbe (Γ). Cette courbe est un folium de Descartes.

34 Une rosace à quatre feuilles

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est 4 cm. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.
A tout nombre réel t on associe les points P et Q de $(\mathcal{C})$ tels que : $(\vec{i}, \overrightarrow{OP}) = t$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) = t + \frac{\pi}{2}$.
Soit A et B les projetés orthogonaux de P respectivement sur $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$; soit I et J les projetés orthogonaux de Q respectivement sur $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.
Soit M le point d'intersection (lorsqu'il existe) des droites (AB) et (IJ). On se propose de déterminer le lieu géométrique (Γ) du point M lorsque P décrit $(\mathcal{C})$.

1° Démontrez qu'une représentation paramétrique de (Γ) est : $\begin{cases} x(t) = \sin t \cos t(\sin t - \cos t) \\ y(t) = \sin t \cos t(\sin t + \cos t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2° Montrez, en faisant des réductions successives de l'intervalle d'étude, qu'il suffit d'étudier $(\mathcal{C})$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

3° Montrez que x et y sont dérivables et que :
$x'(t) = (\cos t + \sin t)(-1 + 3\sin t \cos t)$,
$y'(t) = (\cos t - \sin t)(1 + 3\sin t \cos t)$.

4° *a*) Montrez qu'il existe un unique nombre réel t_0 de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, vérifiant $\sin 2t_0 = \frac{2}{3}$, tel que $x'(t_0) = 0$.
Étudiez alors le signe de $x'(t)$, et calculez les coordonnées de $M(t_0)$.

b) Déterminez le signe de $y'(t)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

5° Déterminez les tangentes en $M(0)$, $M(t_0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6° Tracez la courbe $(\mathcal{C})$.

35 Une épicycloïde

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O, de rayon 1, et A le point de coordonnées $(1, 0)$.
A tout nombre réel positif t, on associe le point N de $(\mathcal{C})$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = t$. Soit Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ON}$ et $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$. Soit M le point de $(\mathcal{C}')$ tel que : $(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2t$.
On se propose de déterminer le lieu (Γ) du point M lorsque N décrit $(\mathcal{C})$.

1° Démontrez que l'arc $\widehat{AN}$ de $(\mathcal{C})$ et l'arc $\widehat{NM}$ de $(\mathcal{C}')$ ont même longueur.

2° Calculez, en fonction de t, les coordonnées de N et Ω.

3° Démontrez qu'une représentation paramétrique de la courbe (Γ) est : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(3\cos t - \cos 3t) \\ y(t) = \frac{1}{2}(3\sin t - \sin 3t). \end{cases}$

4° Soit (Γ_1) la partie de (Γ) correspondant à $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Comparez $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$, $M(-t)$ et $M(t)$ et enfin $M(\pi - 1)$ et $M(t)$. Comment peut-on obtenir (Γ) à partir de (Γ_1) ?

5° Étudiez les variations des fonctions x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; rassemblez les résultats dans un tableau.

6° *a*) On suppose que $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. Soit (T) la tangente à (Γ_1) au point $M(t)$. Montrez que (T) admet pour vecteur directeur : $(\cos 2t)\vec{i} + (\sin 2t)\vec{j}$.
On rappelle que :
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$,
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$.

b) On admet que le résultat démontré au *a*) est encore valable pour $t = 0$.
Que peut-on dire de la tangente à (Γ_1) au point correspondant à $t = 0$?

7° Tracez (Γ_1) puis (Γ).

2 CONIQUES

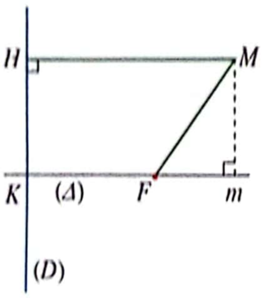
OBJECTIFS

- *Définir une conique comme un ensemble de points vérifiant une relation faisant intervenir des distances.*
- *Savoir déterminer une équation cartésienne d'une conique dans un repère convenablement choisi.*
- *Connaître la nature des courbes d'équation* $y^2 = 2px$, $\dfrac{x^2}{r} + \dfrac{y^2}{s} = a$, *et savoir en définir les éléments caractéristiques.*

ACTIVITÉS Préparatoires

AP1 Un ensemble de points

Le but de cette activité est de définir un ensemble de points du plan comme une ligne de niveau et d'en déterminer quelques propriétés élémentaires.



Soit e un nombre réel strictement positif, (D) une droite du plan (P), F un point non situé sur (D). A tout point M de (P), on associe son projeté orthogonal H sur (D). On se propose d'étudier l'ensemble (Γ) formé des points M de (P) tels que : $\dfrac{MF}{MH} = e$. (1)

1° *a*) Un point de (Γ) peut-il appartenir à (D) ?

b) On désigne par (Δ) la perpendiculaire à (D) passant par F et par K le point d'intersection de (Δ) avec (D). On suppose que (Γ) n'est pas vide. Montrez que si M appartient à (Γ) alors son image M' par la réflexion d'axe (Δ) appartient aussi à (Γ). Qu'en déduisez-vous pour (Γ) ?

2° Soit m le projeté orthogonal de M sur (Δ). Montrez que la condition (1) est équivalente à la condition : $Mm^2 = (e\overrightarrow{mK} + \overrightarrow{mF}) \cdot (e\overrightarrow{mK} - \overrightarrow{mF})$. (2)

• **Situation 1 : $e = 1$.** On désigne par S le milieu de $[KF]$.

1° *a*) Montrez que la condition (2) équivaut à : $Mm^2 = -2\overrightarrow{mS} \cdot \overrightarrow{KF}$ (3)

b) Existe-t-il des points communs à (Γ) et (Δ) ?

c) Démontrez que m appartient à la demi-droite, notée (Δ_1), d'origine S et contenant F.

2° *a*) Soit m un point quelconque de (Δ_1) ; montrez qu'il existe deux points de (Γ) se projetant orthogonalement sur (Δ) en m.

b) On donne $KF = 6$. A partir de la relation (3), et en expliquant la méthode utilisée, ébauchez la courbe (Γ).

• **Situation 2 : $e \neq 1$.** On désigne par A le barycentre de $\{(K, e) ; (F, 1)\}$ et par A' le barycentre de $\{(K, e) ; (F, -1)\}$.

1° Démontrez que (2) est équivalent à : $Mm^2 = (e^2 - 1)\overrightarrow{mA} \cdot \overrightarrow{mA'}$ (4)

2° *On suppose que* $e < 1$.

a) Montrez que m appartient au segment $[AA']$. Déduisez-en que M appartient à une partie du plan que vous préciserez.

b) Soit m un point quelconque de $[AA']$; montrez qu'il existe deux points de (Γ) se projetant orthogonalement sur (Δ) en m.

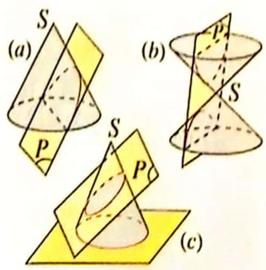
c) Ébauchez la courbe (Γ) lorsque $KF = 6$ et $e = 0{,}5$.

3° *On suppose que* $e > 1$.

Montrez que m n'appartient pas au segment ouvert noté $]AA'[$ puis reprenez le reste de la question **2°**. (On fera la figure lorsque $KF = 6$ et $e = 2$.)

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le mot *conique* vient du fait que, lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan ne contenant pas son sommet on obtient, suivant l'angle du plan et de l'axe du cône, l'une des trois courbes suivantes : parabole (*a*), hyperbole (*b*), ellipse (*c*).
Lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe du cône on obtient un cercle qui doit donc également être considéré comme une conique.



L'ensemble (Γ) des points M tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$ est une conique d'excentricité e, de foyer F et de directrice (D).

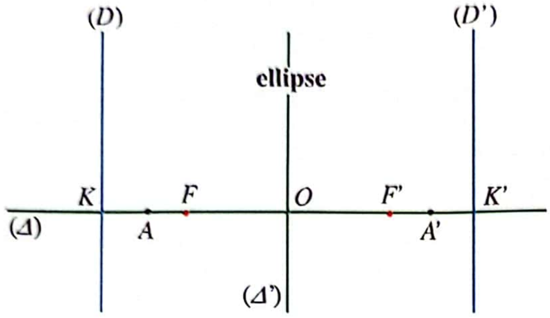
• **Si $e = 1$, (Γ) est une parabole.**	• **Si $e < 1$, (Γ) est une ellipse.**	• **Si $e > 1$, (Γ) est une hyperbole.**

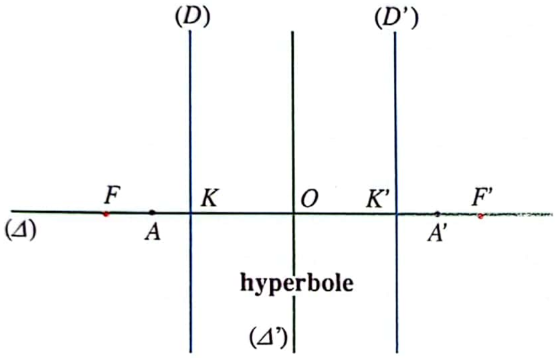
AP2 Coniques à centres

Le but de cette activité est d'étudier les propriétés de symétrie et quelques propriétés métriques des courbes (Γ). C'est une suite de l'AP1.

Les notations sont celles de l'AP1. e est différent de 1.
Pour tout point M de (Γ) de projeté orthogonal m sur (Δ), on a la relation : $Mm^2 = (e^2 - 1)\,\overline{mA} \cdot \overline{mA'}$.

1. Symétries de (Γ)





Nous savons déjà que (Γ) est symétrique par rapport à (Δ).

1° Soit M' le symétrique de M par rapport à la médiatrice (Δ') de $[AA']$.

a) Montrez que M' appartient à (Γ).

b) Qu'en déduisez-vous pour (Γ), en termes de symétries (axes de symétrie et centres de symétrie) ?
On désigne par O le milieu de $[AA']$, par F' le symétrique de F par rapport à O.

> **Une conique (Γ) d'excentricité e, $e \neq 1$, possède deux axes de réflexion : l'axe focal (Δ) et un axe (Δ') orthogonal à (Δ).**
> **En conséquence, elle possède un centre O, deux foyers F et F' et deux directrices (D) et (D') respectivement associées à F et F'.**

2. Propriétés métriques de (Γ)

On pose : $AA' = 2a$ et $FF' = 2c$.

1° En utilisant les définitions des différents points, montrez que :
$\overline{OF} = e\,\overline{OA}$ et $\overline{OA} = e\,\overline{OK}$.

2° Déduisez-en que : $e = \dfrac{c}{a}$ et $OK = \dfrac{a^2}{c}$.

3. Localisation de (Γ)

(Δ) étant munie d'un repère unitaire $(O, \vec{u})$, on pose $x = \overline{Om}$.

1° Exprimez Mm^2 en fonction de x. (On notera $Mm^2 = f(x)$.)

2° Cas où $e < 1$. On sait (*cf.* AP1) que m appartient à $[AA']$, donc que x appartient à $[-a, a]$.

a) Étudiez f sur $[-a, a]$. Déduisez-en que Mm prend une valeur maximale, notée b, que vous exprimerez en fonction de a et de c.

b) Placez les points correspondants, B et B', de (Γ) et déduisez-en que (Γ) est incluse dans un rectangle.

3° Cas où $e > 1$. On sait (*cf.* AP1) que m n'appartient pas au segment ouvert noté $]AA'[$, donc que x appartient à $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

a) En étudiant f sur cet ensemble, montrez que Mm n'est pas borné.

b) Dans quelle partie du plan (Γ) est-elle située ?

COURS

Il est impératif de traiter les activités préparatoires avant d'aborder le cours. Les propriétés des coniques découvertes dans ces AP sont directement utilisées, sans démonstration, dans le cours.

Définition 1 *Conique définie par foyer et directrice*

Dans le plan, soit (D) une droite, F un point non situé sur (D), e un nombre réel strictement positif.
On appelle conique, de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1 ▪ Équations cartésiennes

Soit (C) une conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

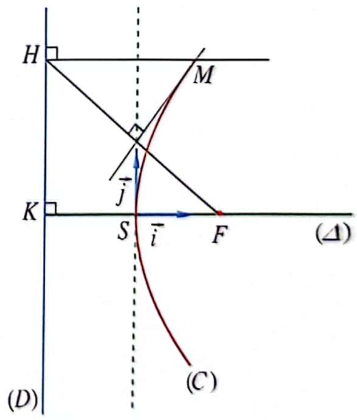
Propriété 1

Soit (D) une droite et F un point du plan non situé sur (D).
L'ensemble des points du plan équidistants de F et de (D) est une parabole ; F en est le foyer, (D) la directrice.

1. LA PARABOLE : $e = 1$

LE SAVIEZ-VOUS ?
Comme $MF = MH$, le point M appartient à la médiatrice de $[HF]$.

La figure ci-contre illustre une construction point par point de (C).
Notons p la distance KF ; p est appelé **le paramètre** de la conique (C).
Soit S le milieu de $[FK]$, choisissons un repère orthonormal $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\overrightarrow{KF} = p\,\vec{i}$.



Propriété 2 *équation réduite de la parabole*

Une équation de la parabole de foyer F et de directrice (D) dans un repère orthonormal $(S, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est de la forme :
$y^2 = 2px$ où $p = 2SF$ et S est le sommet de la parabole.

Remarque. Dans le repère $(S, \vec{j}, \vec{i})$, (C) a pour équation $x^2 = 2py$, c'est-à-dire $y = \dfrac{x^2}{2p}$. Ainsi nous retrouvons une équation de la forme $y = ax^2$, qui caractérise une parabole, en classe de Seconde.

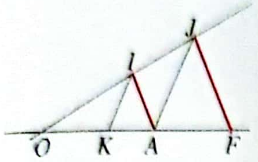
2. Conique à centre : $e \neq 1$

Soit (C) une conique de centre O, de directrices (D) et (D'), de foyers F et F', d'axe focal (Δ) qui coupe (D) en K.

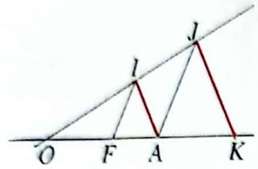
Soit A le barycentre du système $\{(K, e); (F, 1)\}$ et A' le barycentre du système $\{(K, e); (F, -1)\}$. O est le milieu de $[AA']$ et si $AA' = 2a$ et $FF' = 2c$ alors :

$$\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OA} = e\overrightarrow{OK}, \quad \text{d'où} \quad e = \frac{c}{a}, \quad OK = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} \quad \text{(voir AP2).}$$

LE SAVIEZ-VOUS ?
Les relations :
$\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA} = e\overrightarrow{OK}$
se traduisent géométriquement à l'aide de la propriété de Thalès par les figures suivantes :



$e>1$ hyperbole



$e<1$ ellipse

Choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que $\overrightarrow{OF} = c\vec{i}$.
Soit x et y les coordonnées d'un point M dans ce repère, H le projeté orthogonal de M sur (D). On a :
$M \in (C) \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2$.

Tous calculs faits, on obtient : $M \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Ainsi, (C) a pour équation : $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$.

On peut également retrouver cette équation à partir de la relation (4) de l'AP1.

Remarque. De cette équation, il résulte que O est centre de symétrie de (C) ; il est appelé **le centre de la conique,** dite **conique à centre**. De plus, la perpendiculaire (Δ') en O à (Δ) est un second axe de symétrie de (C).

Cas où $e < 1$

Lorsque $e < 1$, la conique est appelée **ellipse.**

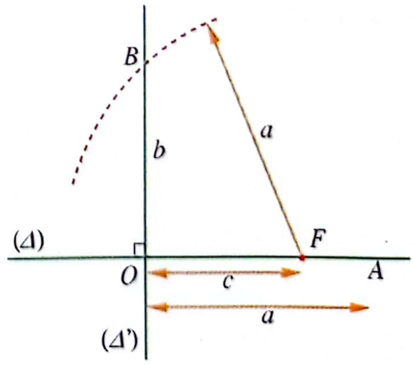
Alors : $a > c$; notons b le nombre réel $\sqrt{a^2 - c^2}$:
$\boldsymbol{b > 0}$ et $\boldsymbol{b^2 = a^2 - c^2}$ $(a^2 = b^2 + c^2)$.

ymptotes sont

Propriété 3 *équation réduite de l'ellipse*

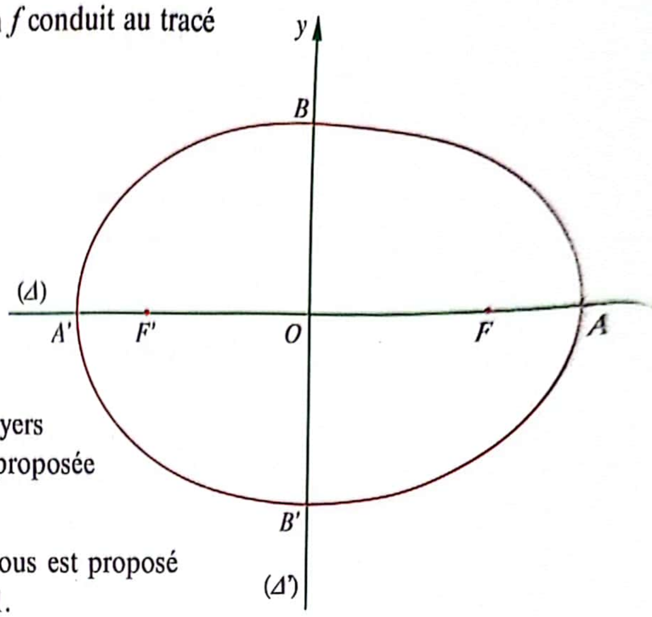
> **Une équation d'une ellipse de centre O, de demi-axe focal a et de demi-distance focale c, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant des vecteurs directeurs des axes de l'ellipse, est :**
> $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **où** $\boldsymbol{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$.

- De cette équation, il résulte que (C) coupe (Δ') aux points $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$. Le nombre b est appelé le **demi-axe non focal** de la conique (C).
- La relation $a^2 = b^2 + c^2$ justifie la construction de B à partir de O, F et A, comme l'indique la figure ci-contre.



L'ellipse (C) est la réunion de la courbe représentative de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, définie sur $[-a, a]$, et de sa symétrique par rapport à (Δ).

• Une étude de la fonction f conduit au tracé de l'ellipse (C).
A, B, A', B' sont les **sommets** de l'ellipse.



Remarques

1° $a > b$: a est dit **demi-grand axe** et b **demi-petit axe** de l'ellipse.

2° Une construction des foyers et des directrices vous est proposée dans l'exercice n° **47.**

3° Un exemple où $b > a$ vous est proposé dans l'exercice commenté 1.

Cas où $e > 1$

Lorsque $e > 1$, la conique est appelée **hyperbole** et $a < c$.

Notons b le réel $\sqrt{c^2 - a^2}$. Nous avons donc :

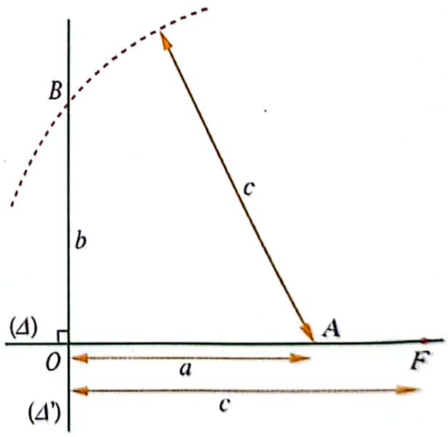
$\boldsymbol{b > 0}$ **et** $\boldsymbol{b^2 = c^2 - a^2}$.

Propriété 4 *équation réduite de l'hyperbole*

Une équation d'une hyperbole de centre O, de demi-axe focal a et de demi-distance focale c, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant des vecteurs directeurs des axes de l'hyperbole, est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

• De cette équation, il résulte que (C) n'a aucun point commun avec (Δ') ; on note quand même B le point de coordonnées $(0, b)$, et B' son symétrique par rapport à O. Alors $AB = c$.
La conique (C) est la réunion de la courbe (C_1) représentative de la fonction $g : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, définie sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, et de sa symétrique par rapport à (Δ).



• $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; de plus, pour tout nombre réel x supérieur à a :

$$g(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty}\left[g(x) - \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

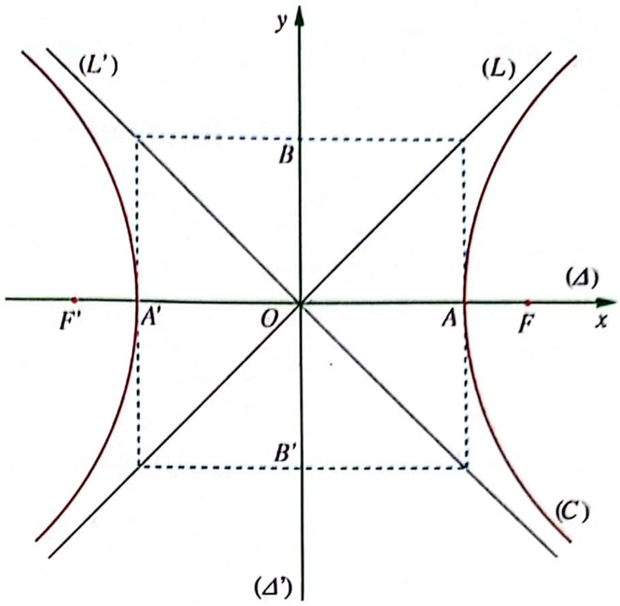
g étant paire, on déduit :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty}\left[g(x) + \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

Donc les droites (L) et (L') d'équations :

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

sont asymptotes à (C_1), donc à (C) ; leur réunion admet (Δ) et (Δ') pour axes de symétrie, donc (L) et (L') sont les asymptotes de (C).



- Les sommets A et A' de l'hyperbole ont pour coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$.

- Remarquons que les points d'abscisse a de (L) et (L') se projettent orthogonalement en B et B' sur (Δ'). Les asymptotes de (C) sont donc les diagonales du rectangle dont les milieux des côtés sont A, B, A', B'.

Propriété 5

Les équations des asymptotes d'une hyperbole sont : $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Remarques

1° La réunion des asymptotes a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

2° Si $a = b$, alors l'hyperbole est dite **équilatère**. Ses asymptotes sont perpendiculaires, et son excentricité est égale à $\sqrt{2}$.

3° Une construction des foyers et des directrices vous est proposée dans l'exercice n° **47**.

2 ▪ Équations $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. (E) est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ où α, β, γ sont des nombres réels donnés, non nuls. Cette équation est équivalente à $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$. Il résulte des études précédentes que :

$p < 0$ et $q < 0$	(E) est l'ensemble vide		
$p > 0$ et $q > 0$	(E) est une ellipse ou un cercle	$p > q$	L'axe focal est l'axe des abscisses
		$p = q$	(E) est un cercle
		$p < q$	L'axe focal est l'axe des ordonnées
$pq < 0$	(E) est une hyperbole	$q < 0 < p$	L'axe focal est l'axe des abscisses
		$p < 0 < q$	L'axe focal est l'axe des ordonnées

Des exemples des différents cas sont proposés en exercices commentés.

3 ▪ Étude particulière de l'ellipse

1. Représentation paramétrique d'une ellipse

Soit (E) une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormal.

• Quel que soit le point $M(x, y)$ du plan, si M appartient à (E) alors :
$\left|\frac{x}{a}\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{y}{b}\right| \leqslant 1$ et $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$,

donc il existe au moins un nombre réel t élément de $]-\pi\,;\pi]$ tel que $\frac{x}{a}=\cos t$ et $\frac{y}{b}=\sin t$, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

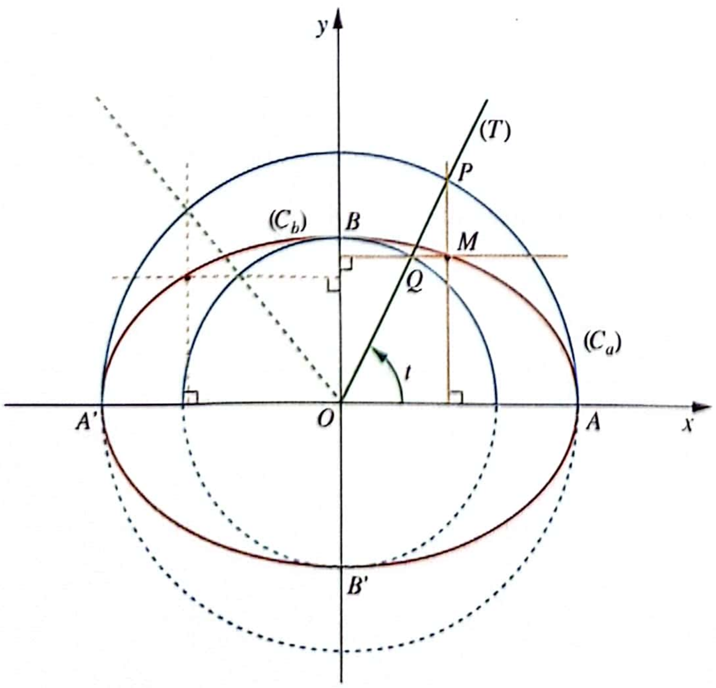
• **Réciproquement** : si t est un nombre réel élément de $]-\pi\,;\pi]$, alors le point $M(a\cos t, b\sin t)$ appartient à l'ellipse (E).

Propriété 6 **Soit (E) une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormal du plan.**
Une représentation paramétrique de l'ellipse (E) est :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \quad \text{avec } t \in [-\pi\,;\pi]. \end{cases}$$

2. Application : construction point par point de l'ellipse

Reprenons l'ellipse (E) précédente en supposant $0<b<a$.



Appelons (C_a) et (C_b) les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b (dits respectivement **cercle principal** et **cercle secondaire** de l'ellipse).

Une demi-droite $[OT)$ rencontre (C_a) en P et (C_b) en Q ; notons t une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$.

Les parallèles en $P(a\cos t, a\sin t)$ à l'axe des ordonnées et en $Q(b\cos t, b\sin t)$ à l'axe des abscisses se coupent en $M(a\cos t, b\sin t)$, point de l'ellipse.

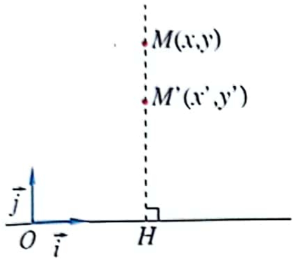
D'où une construction point par point de l'ellipse.

3. Image d'un cercle par une affinité orthogonale

Définition d'une affinité

Définition 2

> **Soit une droite (D) et un nombre réel k non nul.**
> **On appelle affinité orthogonale de base (ou d'axe) (D) et de rapport k l'application, notée $\mathcal{A}(D, k)$, qui à tout point M du plan de projeté orthogonal m sur (D) associe le point M' tel que $\overrightarrow{mM'} = k\,\overrightarrow{mM}$.**



$\overrightarrow{HM'} = k\,\overrightarrow{HM}$

Remarques.

1° Toute affinité de rapport k et d'axe (D) est une bijection et sa bijection réciproque est l'affinité d'axe (D) et de rapport $\frac{1}{k}$.

2° Si $(O, \vec{i})$ est un repère unitaire de (D) et si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan, alors l'image du point $M(x, y)$ par $\mathcal{A}(D, k)$ est le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky. \end{cases}$

Image d'un cercle par une affinité

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R dont l'image par $\mathcal{A}(D, k)$ est notée (C'). Un point $M(x, y)$ appartient à (C') si son antécédent $N(x_0, y_0)$, par $\mathcal{A}(D, k)$, appartient à (C).

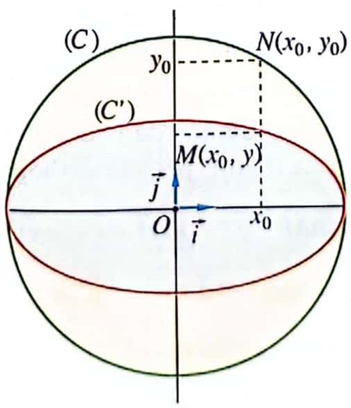
Or : $x = x_0$, $y = ky_0$ et $x_0^2 + y_0^2 = R^2$, donc le point $M(x, y)$ appartient à (C') si, et seulement si :

$$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = R^2 \quad \text{soit encore} \quad \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{k^2R^2} = 1 \quad \left(\text{de la forme } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right).$$

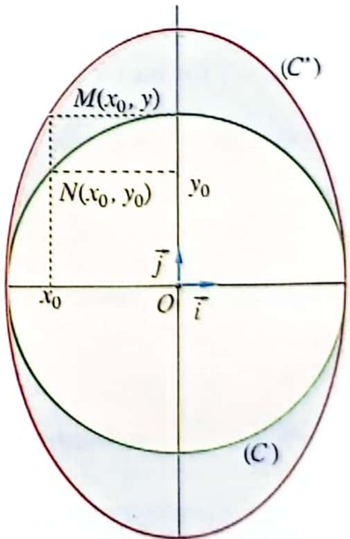
(C') est donc une ellipse de centre O.

Si $0 < |k| < 1$, l'axe focal ou grand axe est l'axe des abscisses.

Si $|k| > 1$, l'axe focal ou grand axe est l'axe des ordonnées.



$0 < k < 1$



$k > 1$

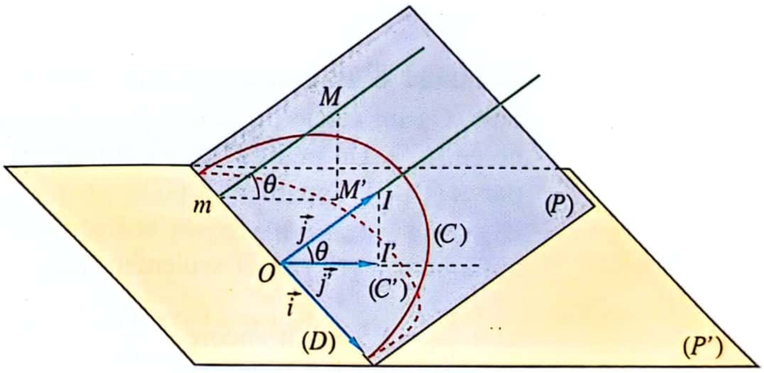
Propriété 7

> **L'image d'un cercle par une affinité orthogonale dont l'axe est un diamètre du cercle est une ellipse.**

Remarque. L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b$, de centre O, se déduit du cercle (C_a) de centre O et de rayon a par l'affinité orthogonale d'axe $(x'x)$ et de rapport $\frac{b}{a}$, et du cercle (C_b) de centre O et de rayon b par l'affinité orthogonale d'axe $(y'y)$ et de rapport $\frac{a}{b}$.

4. Projection d'un cercle sur un plan

Soit (C) un cercle d'un plan (P), de centre O et de rayon R, (P') un plan qui n'est ni parallèle à (P) ni perpendiculaire à (P).
La figure obtenue par projection orthogonale de (C) sur (P') est une courbe (C').
Les figures obtenues par projections orthogonales sur deux plans parallèles étant des figures égales, car déduites l'une de l'autre par translation, on peut supposer que le plan (P') passe par le centre O de (C). Alors (P) et (P') se coupent suivant une droite (D) qui passe par O.



Prenons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de (P) tel que $\vec{i}$ soit un vecteur directeur de (D), et un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}\,')$ de (P') tel que, si I est le point défini par $\overrightarrow{OI}=\vec{j}$, et I' son projeté orthogonal sur (P'), alors $\overrightarrow{OI'}$ et $\vec{j}\,'$, colinéaires, sont de même sens ; notons θ l'angle $\widehat{IOI'}$.
Un point M de (P), de coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se projette orthogonalement en m sur (D) et en M' sur (P').
Soit x' et y' les coordonnées de M' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}\,')$ de (P'). Alors :
$x = x'$ car M et M' ont même projeté orthogonal m sur (D).

$y' = \overrightarrow{mM'}\cdot\vec{j}\,'$; or $\overrightarrow{mM'}\cdot\vec{j}\,' = \overrightarrow{mM}\cdot\vec{j}\,'$ et $\overrightarrow{mM} = y\vec{j}$;

donc $y' = y(\vec{j}\cdot\vec{j}\,')$, c'est-à-dire : $y' = y\cos\theta$.

Ainsi : $x' = x$ et $y' = y\cos\theta$.
Or : $M \in (C) \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2$.

Donc : $M' \in (C') \Leftrightarrow \frac{x'^2}{R^2}+\frac{y'^2}{R^2\cos^2\theta}=1$.

L'équation $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2\cos^2\theta}=1$ est celle d'une ellipse.

Propriété 8 **La figure, projetée orthogonale d'un cercle sur un plan, est une ellipse.**

TRAVAUX Pratiques

TP1 Tangentes à une conique à centre

Dans ce TP, nous utiliserons les résultats portant sur les courbes paramétrées pour déterminer les tangentes à une conique à centre.
Dans chaque cas, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tangentes à une ellipse

Dans le cours, nous avons défini, pour l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

le paramétrage suivant : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ où $t \in]-\pi ; \pi]$.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ le point de (E) correspondant à la valeur t_0 du paramètre t.

1° *a*) Donnez, en fonction de t_0, les coordonnées (α, β) d'un vecteur directeur $\vec{u}_0$ de la droite (T_0) tangente en M_0 à (E).

b) Montrez que le vecteur $\vec{u}_0$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}_1$ de coordonnées (α_1, β_1) avec $\alpha_1 = -a^2 y_0$ et $\beta_1 = b^2 x_0$.

2° Montrez qu'une équation de (T_0) peut s'écrire : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

2. Tangentes à une hyperbole

Soit (H) l'hyperbole dont une équation est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- **Un paramétrage de (H)**

1° *a*) Montrez que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = a\vec{i} - b\vec{j}$ sont deux vecteurs directeurs des asymptotes à (H) et que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.

b) M est un point ayant pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Exprimez x et y en fonction de X et Y.

2° *a*) Déduisez-en qu'une équation de (H) dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est $4XY = 1$.

b) On décide de paramétrer (H) en posant $X = \frac{t}{2}$ et $Y = \frac{1}{2t}$ où $t \in \mathbb{R}^*$.

Montrez qu'alors $x = a\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2t}\right)$ et $y = b\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2t}\right)$.

c) Vérifiez que la courbe correspondant à ce paramétrage dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est bien la courbe (H).

- **Tangentes à l'hyperbole (H)**

Montrez que la tangente à (H) en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Une équation de la tangente au point de coordonnées (x_0, y_0) :

- **à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$;**
- **à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.**

TP2 Définition bifocale d'une conique à centre

Une conique à centre, définie dans le cours «par foyer et directrice», possède en fait deux foyers (et deux directrices). Nous vous proposons d'établir une autre définition, dite bifocale, d'une telle conique, à partir de ses deux foyers.

Soit (C) une conique à centre, d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. La distance du centre O de (C) à ses deux directrices (D) et (D') est $\dfrac{a^2}{c}$; les foyers F et F' de (C) sont tels que $\overrightarrow{OF'}=-\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OF}=c\,\vec{\imath}$.

1° Démontrez que si (C) est une ellipse alors (C) et les points F et F' sont entre (D) et (D') ; tandis que si (C) est une hyperbole alors (C) et les points F et F' sont hors de la bande de plan limitée par (D) et (D').

2° Soit M un point de (C), H et H' ses projetés orthogonaux respectifs sur (D) et (D').

a) Démontrez que $\dfrac{MF+MF'}{MH+MH'}=\dfrac{c}{a}$ et $\dfrac{MF-MF'}{MH-MH'}=\dfrac{c}{a}$ (si $MH \neq MH'$).

b) Démontrez que si (C) est une ellipse alors $MH+MH'=2\dfrac{a^2}{c}$ et si (C) est une hyperbole alors $|MH-MH'|=2\dfrac{a^2}{c}$.

c) Déduisez-en que si (C) est une ellipse alors $MF+MF'=2a$ et si (C) est une hyperbole alors $|MF-MF'|=2a$.

3° Réciproque. Soit $M(x, y)$ un point et H son projeté orthogonal sur (D).

a) Démontrez que : $\overline{MH}=\dfrac{a^2}{c}-x$ et $MF^2-MF'^2=-4cx$.

b) Déduisez-en que si $MF+MF'=2a$ alors $MF=a-\dfrac{c}{a}x$ et si $|MF-MF'|=2a$ alors $MF=\left|a-\dfrac{c}{a}x\right|$.

c) Démontrez alors que :

si $MF+MF'=2a$ alors $\dfrac{c}{a}<1$ et $\dfrac{MF}{MH}=\dfrac{c}{a}$;

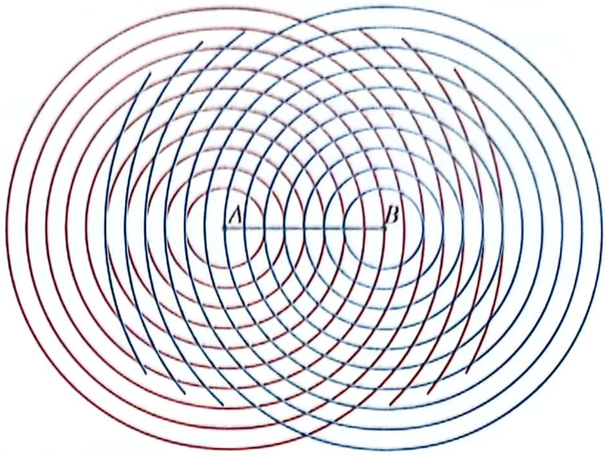
si $|MF-MF'|=2a$ alors $\dfrac{c}{a}>1$ et $\dfrac{MF}{MH}=\dfrac{c}{a}$.

4° Application. Soit A et B deux points du plan tels que : $AB=2\sqrt{2}$. Reconnaissez la nature des lignes de niveau 6, 2, $2\sqrt{2}$ de $M \mapsto MA+MB$ puis de $M \mapsto |MA-MB|$.

Soit F et F' deux points fixes du plan tels que $FF'=2c$ et un nombre donné strictement positif a.

- **Si $a>c$ alors l'ensemble des points M du plan tels que $MF+MF'=2a$ est une ellipse de foyers F et F'.**
- **Si $c>a$ alors l'ensemble des points M du plan tels que $|MF-MF'|=2a$ est une hyperbole de foyers F et F'.**

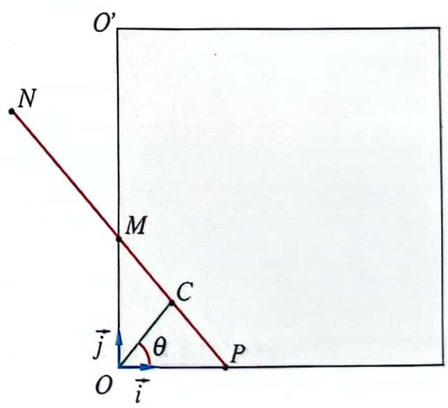
5° Justifiez que le dessin ci-dessous permet de construire point par point des ellipses et des hyperboles de foyers A et B.



TP3 La porte d'une cabine téléphonique

Dans ce TP, nous examinerons le mouvement de la porte d'une cabine téléphonique. Nous allons ainsi définir puis étudier la courbe décrite par l'un des points de cette porte.

Le système d'articulation de la porte peut être schématisé par la figure ci-contre où $OC = CM = a$; a est une longueur fixée, C est le milieu de $[MP]$, M est le milieu de $[PN]$, O est un point fixe et OC une barre pivotant autour d'un axe vertical passant par O.



Le segment $[NP]$ est la trace horizontale de la porte articulée en C et en M. Le point M est assujetti à glisser dans une rainure $[OO']$. La longueur OO' est égale à $4a$.

θ est une mesure de l'angle $\widehat{POC}$, θ est élément de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On choisit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure.

1° Déterminez, en fonction de a et θ, les coordonnées des points C, M, P. Déduisez-en que P décrit un segment porté par l'axe $(O, \vec{i})$.

2° *a*) Donnez, en fonction de θ, les coordonnées (x, y) du point N. En notant $x = f(\theta)$ et $y = g(\theta)$, on obtient un système d'équations paramétriques de la courbe (Γ) décrite par le point N.

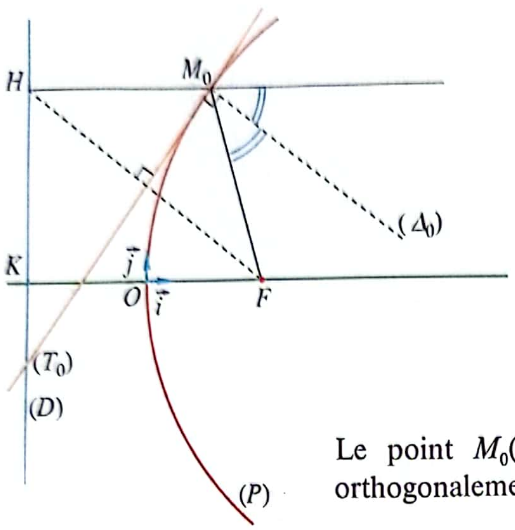
b) A partir de ces équations, déterminez une équation cartésienne de (Γ). Déduisez-en la nature de la courbe (Γ).

c) Tracez sur la figure donnée la trajectoire du point N lors de l'ouverture ou de la fermeture de la porte.

TP4 Tangentes à une parabole. Applications à l'optique

Dans ce TP nous vous proposons l'étude des tangentes à une parabole ainsi qu'une application à l'optique des résultats obtenus.

1. Tangentes à une parabole



Soit, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole (P) dont une équation cartésienne est $y^2 = 2px$.

Son foyer F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et sa directrice (D) pour équation $x = -\frac{p}{2}$.

Un paramétrage de cette parabole est $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Le point $M_0(x_0, y_0)$, associé à la valeur t_0 du paramètre t, se projette orthogonalement en H sur la directrice (D) de la parabole.

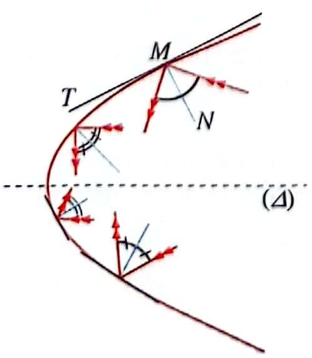
1° En utilisant les résultats sur les courbes paramétrées, donnez, en fonction de t, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$, directeur de la droite (T_0), tangente en M_0 à (P). Déduisez-en que (T_0) a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées (y_0, p).

2° Montrez que (FH) et (T_0) sont perpendiculaires, puis que (T_0) est la médiatrice de $[FH]$.

> **Soit une parabole (P) de foyer F et de directrice (D).**
> **Pour tout point M de (P) se projetant orthogonalement en H sur (D), la tangente à (P) en M est la médiatrice de $[FH]$.**

3° Soit (Δ_0) la droite perpendiculaire à (P) en M_0. (On dit que (Δ_0) est la normale à (P) en M_0.)
Montrez, par des considérations sur les angles, que (M_0H) et (M_0F) sont images l'une de l'autre par la réflexion d'axe (Δ_0).
C'est cette propriété de la parabole qui est utilisée en optique ou en radio-télécommunication, comme nous allons le voir dans l'application ci-dessous.

LE SAVIEZ-VOUS ?
Dans le bloc optique d'une automobile, la source lumineuse est située au foyer du miroir. Ce sont alors les rayons réfléchis qui sont parallèles à l'axe focal.



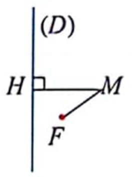
2. Optique : antenne parabolique

Une antenne parabolique est un dispositif permettant de concentrer, en un point fixe, le rayonnement électromagnétique dû à un émetteur d'ondes radio ou TV.
Ce dispositif comprend un « miroir » ayant la forme d'un paraboloïde, surface de révolution obtenue en faisant tourner une parabole autour de son axe.
Dans un plan contenant l'axe du miroir, un rayon venant frapper en M la parabole est réfléchi suivant la direction symétrique de la direction incidente par rapport à la normale en M à la parabole.
Montrez que, lorsque les rayons incidents sont parallèles à l'axe focal, alors les rayons réfléchis passent par le foyer où est placé le récepteur.

FICHE *Méthode*

COMMENT RECONNAÎTRE ET CARACTÉRISER UNE CONIQUE

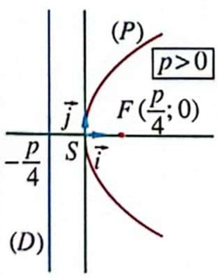
RETROUVER LA DÉFINITION PAR FOYER ET DIRECTRICE : $\dfrac{MF}{MH} = e$ — 1

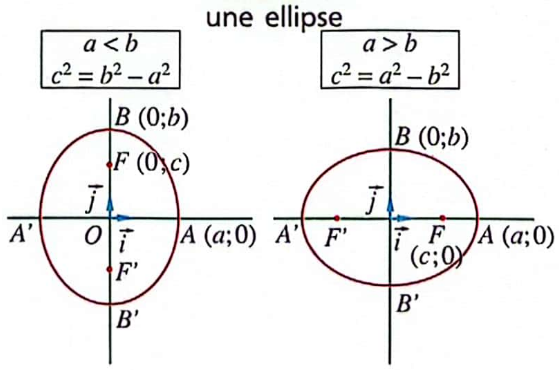


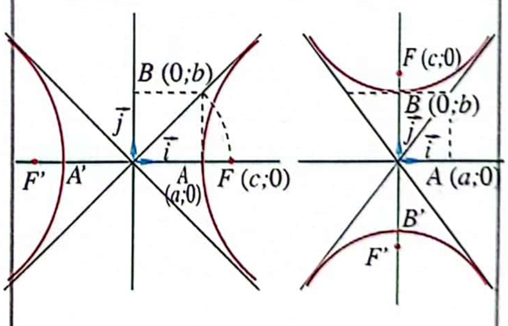
Si	$e = 1$	$0 < e < 1$	$e > 1$
alors la courbe est	une parabole	une ellipse	une hyperbole

RETROUVER L'ÉQUATION RÉDUITE DE LA CONIQUE — 2

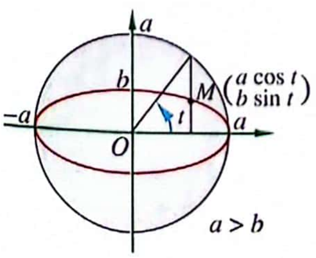
Équation : $y^2 = 2px$	Équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Équation : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Équation : $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$
Courbe : une parabole	Courbe : une ellipse	Courbe : une hyperbole	Courbe : une hyperbole







RETROUVER UN PARAMÉTRAGE DE LA COURBE — 3



Les équations $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ où $t \in]-\pi; \pi]$ définissent :

- une ellipse si $a \neq b$
- un cercle si $a = b$.

1 Reconnaître des courbes à partir d'une de leurs équations

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Donnez la nature et représentez graphiquement chacune des courbes dont une équation est :

a) $2x^2 + 2y^2 = 8.$ (1)

b) $x^2 + 4y^2 = 16.$ (2)

c) $4x^2 + y^2 = 16.$ (3)

d) $4x^2 - y^2 = 16.$ (4)

e) $x^2 - 4y^2 = -1.$ (5)

f) $4x - y^2 = 0.$ (6)

Commentaire

Vous reconnaîtrez la nature de chaque courbe en écrivant chacune des équations proposées sous sa forme réduite.

Une solution

a) L'équation (1) équivaut à :

$x^2 + y^2 = 4.$

C'est l'équation réduite du cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon $r = 2$.

b) L'équation (2) équivaut à :

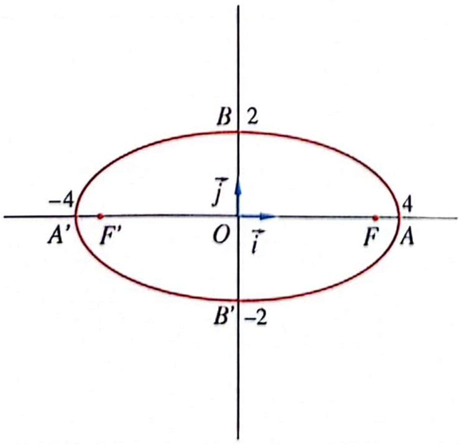
$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

C'est l'équation réduite de l'ellipse :

— d'axe focal l'axe des abscisses,

— de sommets $A'(-4, 0)$, $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ et $B'(0, -2)$,

— de foyers $F(2\sqrt{3}, 0)$ et $F'(-2\sqrt{3}, 0)$.



c) L'équation (3) équivaut à :

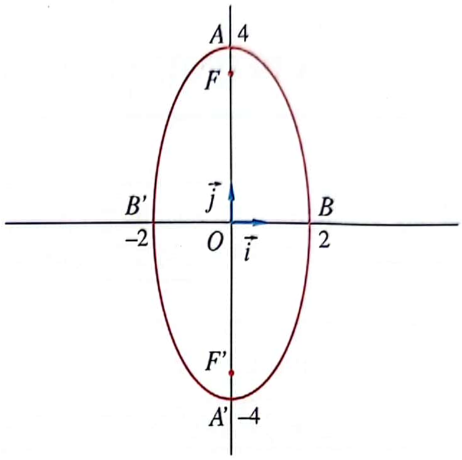
$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

C'est l'équation réduite de l'ellipse :

— d'axe focal : l'axe des ordonnées,

— de sommets $B'(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $A(0, 4)$ et $A'(0, -4)$,

— de foyers : $F(0, 2\sqrt{3})$ et $F'(0, -2\sqrt{3})$.



d) L'équation (4) équivaut à :

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

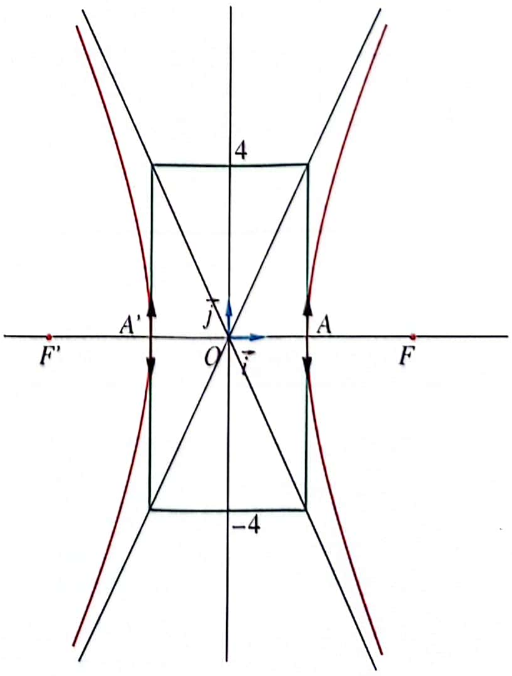
C'est l'équation réduite de l'hyperbole :

— d'axe focal : l'axe des abscisses,

— de sommets $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$,

— de foyers $F(2\sqrt{5}, 0)$ et $F'(-2\sqrt{5}, 0)$,

— d'asymptotes d'équations $y = 2x$ et $y = -2x$.



e) L'équation (5) équivaut à $\dfrac{y^2}{2^2} - \dfrac{x^2}{1^2} = 1$.

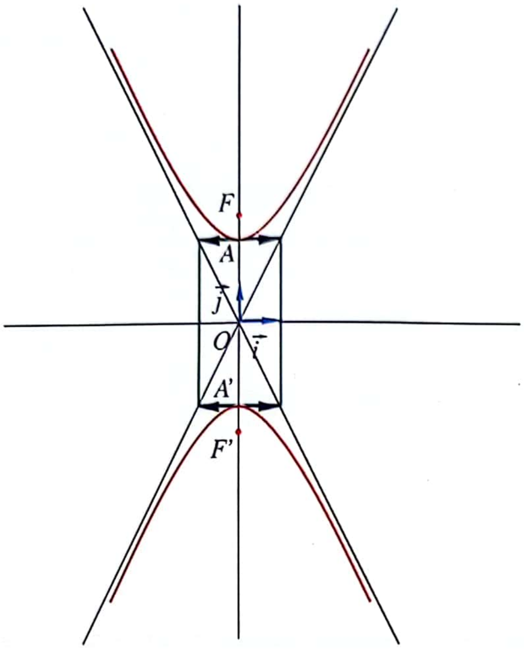
C'est l'équation réduite de l'hyperbole :

– d'axe focal l'axe des ordonnées,

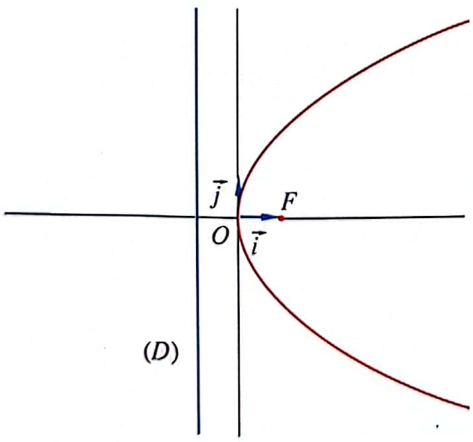
– de sommets : $A'(0, -2)$, $A(0, 2)$,

– de foyers : $F(0, \sqrt{5})$ et $F'(0, -\sqrt{5})$,

– d'asymptotes d'équations $y = 2x$ et $y = -2x$.



f) L'équation (6) est de la forme $y^2 = 2px$ avec $p = 2$; c'est une équation de la parabole d'axe de symétrie $(O, \vec{i})$, de foyer $F(1, 0)$ et de directrice (D) d'équation $x = -1$.



2 Définition analytique d'une conique

Soit (Γ) la courbe dont une équation dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est :

$3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 7 = 0$.

Déterminez la nature de (Γ) et précisez ses éléments caractéristiques : centre, foyers, sommets...

Commentaire

Si cette courbe est une conique, alors l'origine du repère n'est pas le centre de cette conique. Un changement d'origine s'impose donc. L'utilisation de la forme canonique de $3x^2 - 6x$ et de $4y^2 + 16y$ conduira à une équation de la forme :

$3X^2 + 4Y^2 = k$.

Une solution

L'équation $3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 7 = 0$ équivaut à :

$3(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) + 7 = 0$,

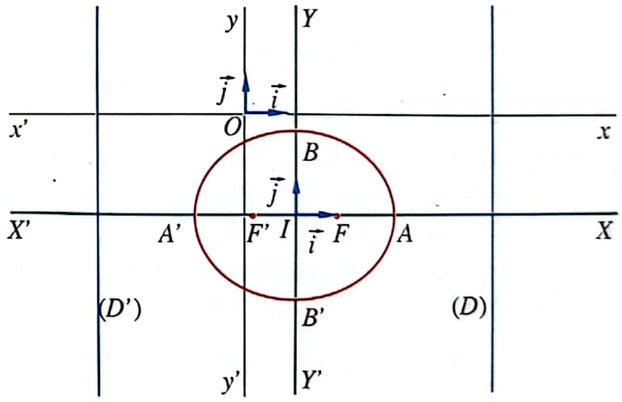
$3((x-1)^2 - 1) + 4((y+2)^2 - 4) + 7 = 0$,

$3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 12$, $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{3} = 1$.

Posons $X = x - 1$ et $Y = y + 2$. Soit I de coordonnées $(1, -2)$ et M de coordonnées (x, y).

On a : $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{IM} = (x-1)\,\vec{i} + (y+2)\,\vec{j}$.

X et Y sont donc les coordonnées de M dans le repère orthonormal $(I, \vec{i}, \vec{j})$.



La courbe (Γ), d'équation $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{3} = 1$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ est une ellipse.

Le centre de (Γ) est I, les demi-axes a et b sont tels que $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Alors $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ donc $c = 1$. L'excentricité est $\dfrac{c}{a}$ donc $\dfrac{1}{2}$.

Dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ les foyers ont pour coordonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$, les sommets $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$, les directrices ont pour équations :

$X = 4$ et $X = -4$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les foyers ont pour coordonnées $(0, -2)$ et $(2, -2)$, les sommets $(3, -2)$, $(-1, -2)$, $(1, \sqrt{3} - 2)$, $(1, -\sqrt{3} - 2)$, les directrices ont pour équations :

$x = 5$ et $x = -3$.

3 DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE D'UNE CONIQUE

FGH est un triangle équilatéral de côté de longueur ℓ. Soit (H) l'hyperbole de foyer F, de directrice (GH) et d'excentricité 2.

1° Déterminez les sommets S et S' de cette hyperbole (on remarquera que S et S' sont sur la hauteur issue de F dans le triangle FGH), son centre O et le deuxième foyer F'. Calculez, en fonction de ℓ, la distance des sommets $2a$ et la distance des foyers $2c$.

2° On choisit le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le centre de l'hyperbole et $\vec{i}$ un vecteur unitaire de la demi-droite $[OF)$.
Écrivez une équation de (H). Donnez l'allure de (H).

COMMENTAIRE

L'hyperbole proposée est définie par la donnée de son excentricité, de l'un de ses foyers et de la directrice associée à ce foyer. Il suffit donc d'utiliser directement les résultats du cours.

UNE SOLUTION

1° • L'axe focal de l'hyperbole (Γ) est la perpendiculaire à la directrice (GH) passant par le foyer F : c'est donc la hauteur issue de F du triangle FGH. Cette hauteur coupe la directrice en K.

• L'excentricité de (Γ) est 2, donc les sommets S et S' de (Γ) sont les points de l'axe focal tels que :

$\overrightarrow{SF} + 2\overrightarrow{SK} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{S'F} - 2\overrightarrow{S'K} = \vec{0}$.

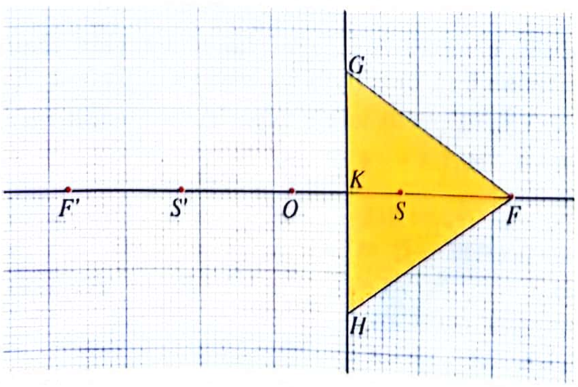
C'est-à-dire que S est le barycentre de $\{(F, 1), (K, 2)\}$ et S' le barycentre de $\{(F, 1), (K, -2)\}$.

$\overrightarrow{KS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KF}$, donc S est le centre de gravité du triangle FGH.

$\overrightarrow{KS'} = -\overrightarrow{KF}$, donc S' est le symétrique de F par rapport à K.

• Le centre de l'hyperbole est le point O, milieu de $[SS']$.

• Le foyer F' est le symétrique de F par rapport à O.



• Dans le triangle équilatéral FGH de côté ℓ, on a :

$$KF = \frac{\ell\sqrt{3}}{2},$$

donc $KS = \frac{1}{3}KF = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ et $KS' = KF = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Alors : $SS' = \frac{2\ell\sqrt{3}}{3}$ d'où $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$.

Or $\frac{c}{a} = 2$ donc $c = \frac{2\ell\sqrt{3}}{3}$,

soit $FF' = \frac{4\ell\sqrt{3}}{3}$.

2° Il s'agit d'écrire l'équation réduite de (Γ).

Celle-ci est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec

$$b^2 = c^2 - a^2 = \left(\frac{2\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \ell^2.$$

Alors une équation de (Γ) est :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\ell^2}{3}\right)} - \frac{y^2}{\ell^2} = 1$$

ou $3x^2 - y^2 = \ell^2$.

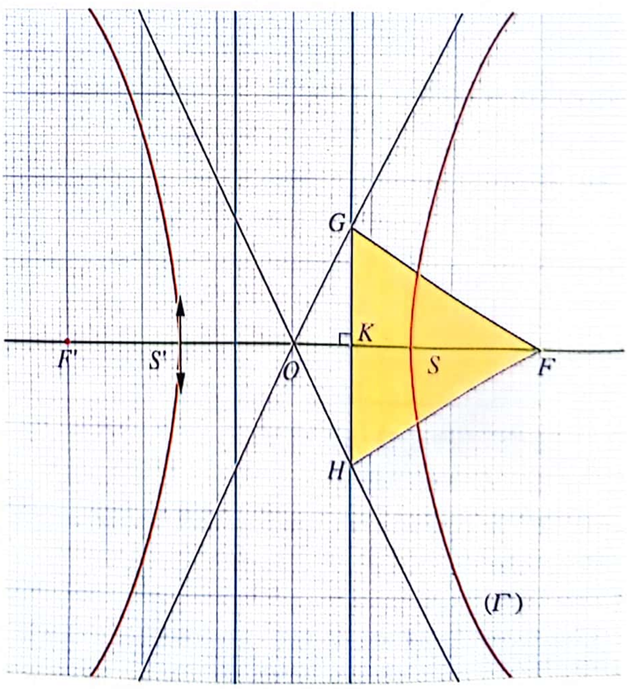
Remarque. La réunion des asymptotes a pour équation : $3x^2 - y^2 = 0$, donc les asymptotes ont pour équations :

$y = x\sqrt{3}$ ou $y = -x\sqrt{3}$.

Les coordonnées de G sont $\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}, \frac{\ell}{2}\right)$ donc

$y_G = x_G\sqrt{3}$.

Par suite : (OG) est l'une des asymptotes de (Γ). Par symétrie, (OH) est la seconde asymptote.



4 Un lieu géométrique

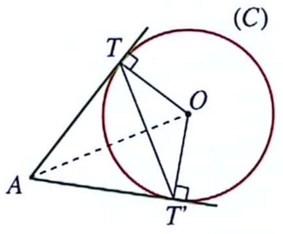
Dans le plan, on donne deux points A et B et la perpendiculaire (D) en B à (AB).

Un cercle (C) du plan est tel que les points de contact T et T' des tangentes menées de A à (C) déterminent avec A un triangle équilatéral.

Déterminez l'ensemble décrit par le centre O du cercle (C), celui-ci variant en restant tangent à (D).

Commentaire

- **La question porte sur le centre O du cercle (C) ; il est donc nécessaire de commencer par traduire la propriété qui définit (C) par une propriété sur O.**
- **Un triangle équilatéral ATT' étant donné, le centre O d'un cercle tangent en T à (AT) et en T' à (AT') est tel que $OA = 2OT$.**
- **Si un cercle est tangent à (D), alors son rayon est égal à la distance de son centre à (D).**

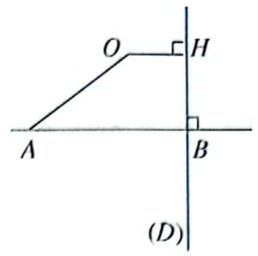


Une solution

1° Analyse. Si un cercle (C), de centre O et de rayon R, est tangent à (D), alors O se projette orthogonalement en H sur (D) et $OH = R$.

De plus : $R = OT$ et $OA = 2OT$; donc $\dfrac{OA}{OH} = 2$.

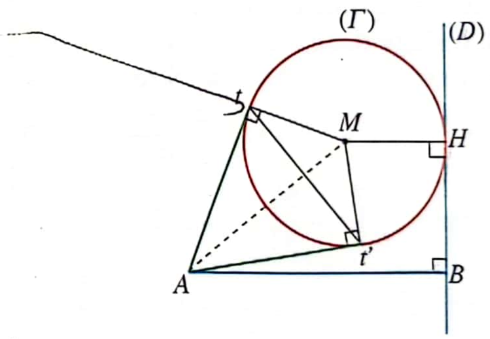
O est sur l'hyperbole (H) de foyer A, de directrice (D) et d'excentricité 2.



2° Réciproque. Soit M un point de l'hyperbole (H), (Γ) le cercle de centre M et tangent à (D), ρ le rayon de (Γ). Alors $AM = 2\rho$, donc A est extérieur à (Γ).

Les tangentes à (Γ) qui passent par A touchent (Γ) en T et T' et sont symétriques par rapport à (AM).

De plus : $\sin(\widehat{TAM}) = \dfrac{1}{2}$, donc le triangle TAT' est équilatéral et (Γ) est un cercle (C).



3° Conclusion. L'ensemble cherché est l'hyperbole (H).

LE JOUR DU BAC

L'espace (E) est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $3x + 4z - 5 = 0$ et l'ensemble (Γ) des points du plan (xOy) équidistants du plan (P) et de l'origine.

1° Calculer la distance au plan (P) d'un point M_0 de (E) de coordonnées (x_0, y_0, z_0). En déduire que (Γ) admet pour équation dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{3x-5}{5}\right)^2$.

2° Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (xOy). Montrer que (Γ) est une conique de foyer O et de directrice associée (D). Déterminer son excentricité.

(Bac 1989, Exercice partiel)

Analyse de l'énoncé

La question 1° a pour but de déterminer une équation de la courbe (Γ). La dernière partie de la question, dans sa formulation, permet de contrôler le résultat obtenu pour la distance de M_0 à (P).
Dans la question 2°, la courbe (Γ) doit être reconnue géométriquement (foyer, directrice, excentricité). Il s'agit donc d'interpréter géométriquement les termes de l'équation obtenue à la question 1° : $x^2 + y^2$ et $\dfrac{3x-5}{5}$ qu'il sera bon d'écrire $\dfrac{3}{5}\left(x - \dfrac{5}{3}\right)$ pour faire apparaître la différence de deux abscisses, x et $\dfrac{5}{3}$.

Une solution

1° Soit H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur (P), A un point de (P), de coordonnées (α, β, γ), et $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3, 0, 4)$.
$\vec{n}$ étant normal à (P) on a :

$\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H_0} \cdot \vec{n}$ donc $|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}| = M_0H_0 \times \|\vec{n}\|$,

d'où : $M_0H_0 = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\,|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|$ c'est-à-dire :

$$M_0H_0 = \frac{1}{5}\,|3(\alpha - x_0) + 4(\gamma - z_0)|.$$

$3\alpha + 4\gamma - 5 = 0$, donc $M_0H_0 = \dfrac{1}{5}|3x_0 + 4z_0 - 5|$.

Un point M_0 de coordonnées $(x, y, 0)$, puisque situé dans (xOy), appartient à (Γ) si et seulement si $OM_0^2 = M_0H_0^2$ c'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2.$$

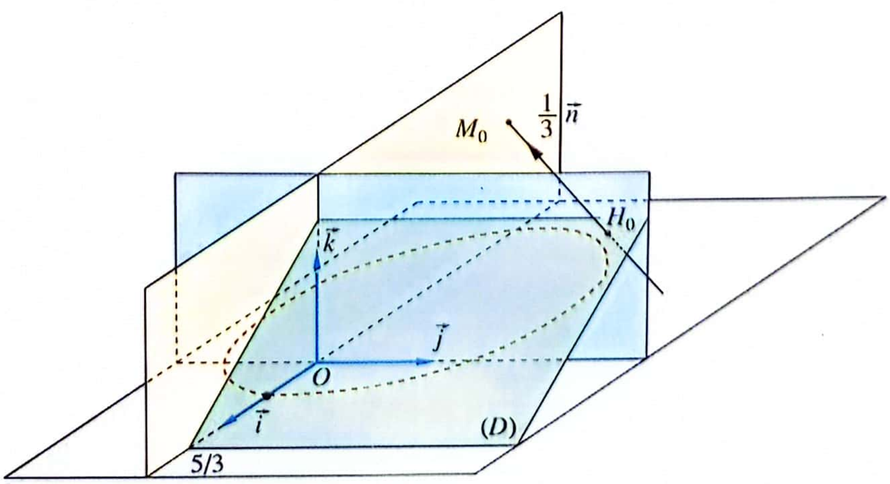
2° Une équation de (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $3x - 5 = 0$. Si un point M, de coordonnées (x, y) dans ce repère, se projette orthogonalement en H sur (D) alors les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{3}, y\right)$ et :

$$\overrightarrow{HM} = \left(x - \frac{5}{3}\right)\vec{i}, \quad HM = \left|x - \frac{5}{3}\right|, \quad \left|\frac{3x-5}{5}\right| = \frac{3}{5}HM.$$

L'équation de (Γ) équivaut donc à :

$$OM^2 = \frac{9}{25}HM^2 \quad \text{soit} \quad OM = \frac{3}{5}HM.$$

La courbe (Γ) est l'ellipse de foyer O, de directrice (D) et d'excentricité $\dfrac{3}{5}$.



EXERCICES & PROBLÈMES

Q. C. M.

Dans chacun des exercices suivants, une au moins des réponses est exacte.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 La parabole (P) a pour équation : $y^2 = -2x + 1$:

- son axe est l'axe des abscisses .... ☐
- son sommet est $S\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .... ☐
- son foyer est $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .... ☐
- sa directrice est (D) d'équation $x = 1$ .... ☐
- son excentricité est e .... ☐

2 L'ellipse (E) a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$:

- son axe focal est l'axe des abscisses .... ☐
- son excentricité est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... ☐
- $F(\sqrt{3}, 0)$ est un de ses foyers .... ☐
- la droite d'équation : $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ est une de ses directrices .... ☐

3 L'hyperbole (H) a pour équation $4x^2 - y^2 = 1$:

- son excentricité est $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .... ☐
- $F(\sqrt{5}, 0)$ est un de ses foyers......................... ☐
- la droite d'équation $y = 2x$ est une de ses asymptotes.. ☐
- la droite d'équation $y = 2\sqrt{5}$ est une de ses directrices .... ☐
- l'axe des abscisses est un axe de symétrie de (H).. ☐

4 La courbe d'équation $x^2 - 4y^2 + 2x = 0$:

- est une ellipse .... ☐
- est une hyperbole .... ☐
- a pour centre le point $\Omega(-1, 0)$ .... ☐
- a pour axe focal la droite d'équation $y = -1$ .. ☐
- a pour excentricité $\sqrt{5}$ .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Dans les exercices 5 à 17, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5 Déterminez les éléments caractéristiques : foyers, sommets, excentricité, directrices, éventuellement asymptotes, des coniques dont une équation, dans un repère orthonormal, est la suivante :

1° $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

2° $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

3° $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4° $25x^2 + 9y^2 = 225$.

5° $4x^2 + y^2 = 4$.

6° $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$.

7° $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} = 1$.

8° $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.

6 Dans chacun des cas suivants, une courbe $(\mathcal{C})$ est donnée par une équation cartésienne.
Déterminez l'équation réduite de la courbe $(\mathcal{C})$ et dessinez cette courbe.

1° $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$.

2° $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.

3° $x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0$.

4° $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$.

5° $\frac{x^2}{4} - x - y + 1 = 0$.

6° $y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$.

7° $3x^2 + 2y^2 + 8y + 2 = 0$.

7 Déterminez le foyer et la directrice de la parabole $(\mathcal{P})$ dont une équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la suivante :

1° $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$.

2° $y = 3x^2 + x - 4$.

3° $y^2 = 6x + 3$.

4° $y^2 = -4x + 1$.

5° $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

6° $y^2 - 2y - x - 2 = 0$.

8 Démontrez que la courbe d'équation : $4y^2 = |9x^2 - 36x|$ est la réunion de deux coniques que vous construirez.

9 On désigne par (H) et (E) les ensembles des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$(H) : 4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0,$

$(E) : 16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0.$

1° Déterminez les équations réduites de (H) et (E); déduisez-en la nature de ces courbes.

2° Déterminez les éléments caractéristiques de ces deux courbes.

3° Dessinez-les sur le même graphique.

10 Même exercice que le précédent avec :

$(H) : 16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$

et $(E) : 16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0.$

Déduisez-en la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation :

$16x^2 + 25y|y| + 96x - 256 = 0.$

11 On considère l'ensemble (Γ) des points dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation :

$\dfrac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1.$

Démontrez que (Γ) est la réunion de deux coniques. Dessinez (Γ).

ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

12 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \sin \dfrac{t}{2} \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

En exprimant $\cos t$ en fonction de $\sin \dfrac{t}{2}$, montrez que $(\mathcal{C})$ est une portion de parabole que vous construirez.

13 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{t} + e^{-t} \\ y(t) = 2e^{t} - e^{-t} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Démontrez que $(\mathcal{C})$ est une portion d'hyperbole que vous construirez.

14 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 3 \sin t - 1 \\ y(t) = 4 \cos t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi[.$$

Démontrez que $(\mathcal{C})$ est une ellipse que vous construirez.

15 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \tan 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[.$$

Démontrez que $(\mathcal{C})$ est une portion d'hyperbole que vous construirez.

16 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y(t) = 2\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \quad \text{où } t \in [1 ; +\infty[.$$

Démontrez que $(\mathcal{C})$ est une portion d'hyperbole que vous construirez.

17 Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin^2 t \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases} \quad \text{où } t \in [0 ; \pi].$$

Démontrez que $(\mathcal{C})$ est une ellipse que vous construirez.

CONIQUES ET NOMBRES COMPLEXES

Dans les exercices **18** *à* **26**, *la locution « plan complexe » désigne un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*
Si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ est le conjugué de z, $|z|$ est le module de z, et arg z un argument de z.

18 1° Démontrez que l'ensemble (Γ) des points M, d'affixe z tels que : $|z + 2\bar{z} + 1| = \sqrt{3}\,|z + \bar{z}|$ est une conique.

2° Déterminez la nature de (Γ). Précisez ses éléments remarquables : foyers, asymptotes, directrices. Tracez (Γ) en mettant en évidence les éléments précédents.

19 A tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = z^2 - (9 - 2i)z + 26.$

Soit M l'image de z dans le plan complexe.

1° Déterminez l'ensemble (Γ_1) des points M tels que Z soit réel. Précisez sa nature et ses éléments remarquables.

2° Déterminez l'ensemble (Γ_2) des points M tels que Z soit nul ou imaginaire pur.

3° Dessinez (Γ_1) et (Γ_2) sur le même graphique. Précisez les coordonnées de leurs points d'intersection.

20 A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe Z tel que : $Z = (3+2i)\,z + 3i\bar{z} - 1$.

1° Démontrez que l'ensemble (Γ) des points M tels que O, M et M' soient alignés est une conique.

2° Déterminez la nature de (Γ). Précisez ses éléments remarquables. Tracez (Γ) en mettant en évidence les éléments précédents.

21 Soit z un nombre complexe différent de $-4+i$.

1° Démontrez que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-i}{\bar{z}+4+i}$ soit imaginaire pur est inclus dans une conique (E).

2° Déterminez la nature de (E). Précisez ses éléments remarquables. Tracez (E) en mettant en évidence les éléments précédents.

22 Soit θ un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$.

1° Résolvez l'équation d'inconnue complexe z, notée (E) : $z^2 - (3\cos\theta + i\sin\theta)\,z + 2 = 0$.

2° Soit M_1 et M_2 les images des solutions de (E) et soit P le milieu de $[M_1 M_2]$. Déterminez l'ensemble (Γ) des points P quand θ décrit $[0\,;\pi]$. Tracez (Γ).

23 Soit α un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\pi[$.

1° Résolvez l'équation d'inconnue complexe z, notée (E) : $z^2\sin^2\alpha - 4z\sin\alpha + 4 + \cos^2\alpha = 0$.

2° Soit M' et M'' les images des solutions de (E) dans le plan complexe.

a) Démontrez que, lorsque α décrit $]0\,;\pi[$, l'ensemble des points M' et M'' est une branche d'une hyperbole (H).

b) Précisez les sommets, les foyers, les asymptotes de (H).
Dessinez (H) en mettant en évidence les éléments précédents.

24 Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z :

$(\cos^2\theta)\,z^2 - 4(\cos\theta)\,z + 5 - \cos^2\theta = 0$.

1° Résolvez l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes. Précisez pour quelle valeur de θ l'équation admet une solution double. Donnez la valeur de cette solution double.

2° Soit (P) le plan complexe. On appelle M' et M'' les points de (P) dont les affixes respectives sont les solutions z' et z'' de l'équation (E).
Montrez que, lorsque θ varie, M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H). Déterminez le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracez (H).

25 On désigne par f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = 2z^2 - 2(\cos\theta + i\sin\theta)\,z - \sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)$

où θ est un réel de l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
On pose $z = x + iy$ avec x et y réels et on appelle M le point d'affixe z.

1° Calculez la partie réelle de $f(z)$ en fonction de x et y.

2° Déterminez l'ensemble (Γ_θ) des points M pour lesquels $f(z)$ est un imaginaire pur.
On montrera que (Γ_θ) est une conique dont on précisera la nature et le centre Ω_θ.

3° Quel est l'ensemble des points Ω_θ quand θ décrit $[0\,;2\pi]$?

4° Représentez Γ_θ pour $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ et précisez les éléments caractéristiques (foyers, directrices, ...).

26 Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z telle que $z = x + iy$, vérifiant :

$\arg z + \arg(z-1) = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

FAMILLE DE CONIQUES

27 Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit la famille de courbes (C_m) d'équation :

$(m+1)\,x^2 - (m-1)\,y^2 - 8 = 0$,

où m est un nombre réel.

1° Étudiez, suivant les valeurs de m, la nature de la courbe (C_m).

2° Tracez sur le même graphique, les courbes (C_{-1}), (C_0), (C_1) et (C_3).

28 Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la famille de courbes (C_m) d'équations :

$(m-2)\,x^2 - y^2 - 2(m+3)\,x + 5m = 0$,

où m est un nombre réel.

1° Déterminez m pour que la courbe correspondante soit une parabole. Tracez cette parabole. Précisez son foyer et sa directrice.

2° Déterminez m pour que la courbe correspondante soit une hyperbole équilatère.
Tracez cette hyperbole. Mettez en évidence, sur la figure, ses foyers, ses directrices et ses asymptotes.

3° Étudiez, suivant les valeurs de m, la nature de la courbe (C_m).

29 Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M du plan (P), de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

$(m-1)x^2 + 3\,my^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0.$

1° Déterminer (E_m) pour les valeurs particulières $m = 0$ et $m = 1$.

2° Pour quelle valeur de m l'ensemble (E_m) est-il un cercle ? Précisez dans ce cas son centre et son rayon.

3° Dans cette question, m est un réel non nul et différent de 1.
Soit O' le point de coordonnées $(-1, 0)$.
On notera (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrez que l'équation de (E_m) dans ce repère est :

$(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0.$

b) Déduisez-en, en fonction de m, la nature de (E_m).

DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE

30 Dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (D) d'équation $x = 1$ et le point $F(3, 0)$. Soit H le projeté orthogonal d'un point $M(x, y)$ sur la droite (D).

1° Déterminez une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $MF = \sqrt{3}\,MH$.

2° Déterminez les sommets, les foyers et les asymptotes de (Γ).

3° Dessinez (Γ).

31 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (Δ) la droite d'équation $x + 3 = 0$ et H le projeté orthogonal d'un point $M(x, y)$ sur la droite (Δ).

1° Déterminez l'ensemble (E) des points M tels que $MO = \dfrac{1}{2}\,MH$.

2° Écrivez une équation de (E) puis déterminez ses éléments caractéristiques. Dessinez (E).

32 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$ et P le point de coordonnées $(-4, 6)$. Soit H le projeté orthogonal d'un point $M(x, y)$ sur la droite (D).

1° Quel est l'ensemble (C) des points M tels que : $MP = 2MH$?

2° Déterminez les éléments caractéristiques de (C) : centre, axes de symétrie, foyers, excentricité, directrices, asymptotes, Tracez (C).

33 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et F le point de coordonnées $(8, 0)$.

Soit θ un nombre réel tel que : $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

On désigne par (Γ_θ) l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1° Précisez la nature de (Γ_θ) suivant les valeurs de θ.
Construisez la courbe (Γ_0) correspondant à $\theta = 0$.

3° *a*) Écrivez une équation cartésienne de la courbe $(\Gamma_{\pi/6})$ correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

b) Précisez les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes).

c) Construisez la courbe $(\Gamma_{\pi/6})$.

4° Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10.

a) Écrivez une équation cartésienne de la courbe (E) transformée de (C) par l'affinité orthogonale d'axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{5}$.

b) Précisez les foyers de (E). Déduisez-en que les tangentes à $(\Gamma_{\pi/6})$ et à (E) aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.

34 L'unité de longueur est le centimètre. Soit (D) et (Δ) deux droites perpendiculaires en un point K, et soit F un point de (Δ) tel que $KF = 4$; α est un nombre réel de l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1° Soit M un point du plan déterminé par (D) et (Δ), et H son projeté orthogonal sur (D).
Donnez, suivant les valeurs de α, la nature de l'ensemble (Γ_α) des points M tels que :

$\dfrac{MF}{MH} = 4\cos^2\alpha.$

2° On suppose que $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et on désigne par (E) l'ensemble des points M correspondants.

a) Déterminez les sommets A et A' de la conique (E) et placez-les sur la figure. Déduisez-en le centre O de cette conique.

b) On suppose le plan orienté de façon habituelle.
Soit $\vec{i} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{KF}$ et $\vec{j}$ le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{i}$. Écrivez une équation cartésienne de (E) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Déterminez les équations des directrices et des asymptotes de la courbe (E). Placez-les sur la figure.

d) Tracez la courbe (E).

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

35 ■■ On considère une droite (D) et deux points distincts A et B tels que la droite (AB) ne soit pas parallèle à (D).
Déterminez l'ensemble des points S, sommets des paraboles contenant A et B, et dont l'axe est parallèle à (D).

36 ■■ Soit a un nombre réel strictement positif. (Δ) et (Δ') sont deux droites orthogonales. A tout couple de points (M, M') tels que M appartienne à (Δ), M' appartienne à (Δ') et $MM' = a$, on associe le point G barycentre du système $\{(M, 2), (M', 1)\}$.
Déterminez l'ensemble des points G quand M décrit (Δ).

37 ■■ Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle A le point de coordonnées $(2, 0)$ et B le point de coordonnées $(0, 3)$.
Déterminez, M étant un point de (E), le lieu (E') des centres de gravité des triangles ABM quand M décrit (E).

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

• Parabole

38 ■ On se propose de construire une parabole (P) de foyer F donné et passant par deux points A et B donnés. On désigne par (D) sa directrice.

1° *a*) Montrez que (D) est tangente aux cercles passant par F et de centres respectifs A et B.

b) Déduisez-en que (D) est une tangente commune à ces cercles.

2° *a*) Expliquez alors la construction de (P) et examinez les diverses situations possibles.

b) Tracez (P).

39 ■ On se propose de construire une parabole (P) de directrice (D) donnée et passant par deux points A et B donnés. On désigne par F son foyer.

1° Montrez que F appartient aux cercles de centres respectifs A et B, tangents à la directrice (D).

2° Déduisez-en la construction de (P).

Dans les exercices **40** *à* **43** *vous utiliserez le résultat suivant que vous avez vu dans le TP4.*

> Soit une parabole (P) de foyer F et de directrice (D). Pour tout point M de (P) se projetant orthogonalement en H sur (D), la tangente à (P) en M est la médiatrice de $[FH]$.

40 ■ On se propose de construire une parabole (P) de directrice (D) donnée et tangente en un point A donné à une droite donnée (L).

1° Soit H le projeté orthogonal de A sur (D). Montrez que le foyer F de (P) est le symétrique de H par rapport à (L).

2° Déduisez-en la construction de (P).

41 ■ On se propose de construire une parabole (P) de foyer F donné et tangente en un point A donné à une droite donnée (L).

1° Soit H le projeté orthogonal de A sur la directrice (D). Placez H puis (D).

2° Construisez la parabole (P).

42 ■■ Construisez une parabole (P) connaissant la directrice et deux tangentes.
Indication. Le symétrique du foyer F par rapport à une tangente appartient à la directrice.

43 ■■ Construisez une parabole (P) connaissant le foyer et deux tangentes.
Indication. Le symétrique du foyer F par rapport à une tangente appartient à la directrice.

44 ■■■ Soit (P) une parabole, F son foyer, (D) sa directrice, S son sommet.
Soit M et M' deux points de (P), I le point commun aux tangentes à (P) en M et M', H, H' et K les projetés orthogonaux respectifs de M, M' et I sur (D).

1° Démontrez que K est le milieu de $[HH']$.

2° Démontrez que si I est sur (D) alors (MM') passe par F, les droites (IM) et (IM') sont perpendiculaires et les droites (IF) et (MM') sont perpendiculaires.

3° Étant donné un point A de (P) autre que le sommet S, déduisez de l'étude précédente une construction simple du point d'intersection, autre que A, de la droite (AF) avec la parabole (P).

• Conique à centre

45 ■■ On se propose de construire une conique (Γ) connaissant une directrice (D), deux de ses points A et B et son excentricité e.
Montrez que si (Γ) existe alors son foyer F appartient à deux cercles que vous préciserez.
Détaillez alors la construction de la conique et précisez les conditions de son existence.

46 ■■ On se propose de construire une ellipse (Γ) connaissant ses deux sommets A et A' de l'axe focal et un point M. Les sommets situés sur le petit axe seront notés B et B'.

Soit O le centre de (Γ), (C) le cercle de diamètre $[AA']$ et (C') le cercle de diamètre $[BB']$.

1° *a*) Tracez le cercle (C).

b) Le cercle (C) se déduit de (Γ) par une affinité orthogonale *f*. Placez $N = f(M)$.

c) Déduisez-en la construction de (C') et des points B et B'.

2° Placez sur la figure les foyers et leurs directrices associées.

3° Construisez (Γ).

PROBLÈMES

47 ■■■ **Coniques à centre : construction des foyers et directrices.**

1° Cas de l'ellipse. Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $0 < b < a$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et A' les sommets sur l'axe focal, F et F' les foyers.
La perpendiculaire en F à l'axe focal coupe le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AA']$ en U et U', la tangente en U à $(\mathcal{C})$ coupe l'axe focal en T.
Démontrez que T est le pied, sur l'axe focal, de la directrice associée à F.

2° Cas de l'hyperbole. Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et A' les sommets de (H), F et F' les foyers, $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AA']$, (Δ) et (Δ') les asymptotes. La tangente en A à $(\mathcal{C})$ coupe (Δ) en E.

a) Calculez OE. Déduisez-en une construction de F et F', à la règle et au compas, à partir de A, A' et des asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des points communs à $(\mathcal{C})$, (Δ) et (Δ'). Déduisez-en une construction des directrices de (H) à partir de A, A', (Δ) et (Δ').

3° Appliquez les résultats précédents à la construction géométrique des foyers et directrices des coniques d'équations :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

48 ■■■ **Image d'une ellipse par une transformation géométrique.**
Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité de longueur est 6 cm.
On désigne par z l'affixe du point M de ce plan, de coordonnées x et y.

1° Soit (E) l'ensemble des points M du plan (P) d'équation cartésienne : $x^2 + 5y^2 = 1$. Déterminez la nature de (E) et ses éléments caractéristiques (centre, axes, sommets, foyers, directrices). Tracez (E) et mettez en évidence les éléments précédents.

2° On note $\bar{z}$ le conjugué de z et $|z|$ son module. Soit f la fonction de (P) dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = |z| + z - \bar{z}$.
Calculez les coordonnées x' et y' du point M' en fonction de x et y.

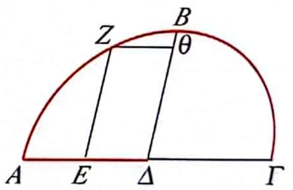
3° On note (E') l'image de (E) par f. Démontrez que si M appartient à (E) alors M' appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.

4° Soit M' le point de coordonnées (x', y'). Démontrez que M' a au moins un antécédent par f si, et seulement si : $x' \geqslant 0$ et $|y'| \leqslant 2x'$.
On désigne par (Γ) l'ensemble des points M' dont les coordonnées vérifient ces deux relations. Représentez graphiquement (Γ).
Déduisez-en que (E') est un arc du cercle $(\mathcal{C})$ que vous préciserez.

49 ■■■ **Archimède et la parabole.**
Voici deux propriétés ainsi énoncées par Archimède :

Propriété 1. Dans un segment compris entre une droite et une parabole, la droite menée du milieu de la base (parallèlement au diamètre) a une longueur égale aux quatre tiers de celle de la droite menée (parallèlement au diamètre) du milieu de la moitié de la base.

Traduction : $\Delta B = \frac{4}{3} EZ.$



Propriété 2. Si on inscrit dans un segment compris entre une droite et une parabole, un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si on inscrit dans les segments restants d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier sera octuple de chacun des deux triangles inscrits dans les segments qui restent.

Pour démontrer ces deux propriétés, résolvez le problème suivant :
Soit (P) une parabole, A et Γ deux points de (P), B le point de (P) où la tangente à (P) est parallèle à $(A\Gamma)$.
La parallèle en B à l'axe (L) de la parabole (diamètre, dans le texte d'Archimède) coupe $(A\Gamma)$ en Δ. Notons E le milieu de $[A\Delta]$. La parallèle en E à (L) coupe (P) en Z.

1° Démontrez que $\Delta B = \frac{4}{3} EZ.$

2° Démontrez que l'aire du triangle AZB est le huitième de l'aire du triangle $AB\Gamma$.

3 COMPLÉMENTS D'ANALYSE

OBJECTIFS

- *Appliquer les propriétés générales, rencontrées dans l'enseignement obligatoire, à la résolution de problèmes plus consistants.*
- *Connaître la propriété relative aux suites monotones bornées, et savoir l'appliquer sur quelques exemples simples.*
- *Savoir exploiter les encadrements en analyse.*

TP1 Dérivées successives et inégalités

L'objectif de ce TP est d'obtenir, en étudiant les signes de dérivées successives, des inégalités sur les fonctions sinus et cosinus, conduisant à des approximations polynomiales.

1. ÉTUDE DE $\varphi : x \mapsto \sin x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!}$

1° Calculez $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi^{(3)}(x)$, $\varphi^{(4)}(x)$, $\varphi^{(5)}(x)$, ainsi que les valeurs de ces dérivées en 0.

2° En étudiant le signe de $\varphi^{(5)}(x)$, déterminez les variations de $\varphi^{(4)}$, et son signe suivant le signe de x.

3° Déterminez de même le sens de variation de $\varphi^{(3)}$, puis de φ'', φ' et φ. Dressez un tableau donnant les variations de toutes ces fonctions.

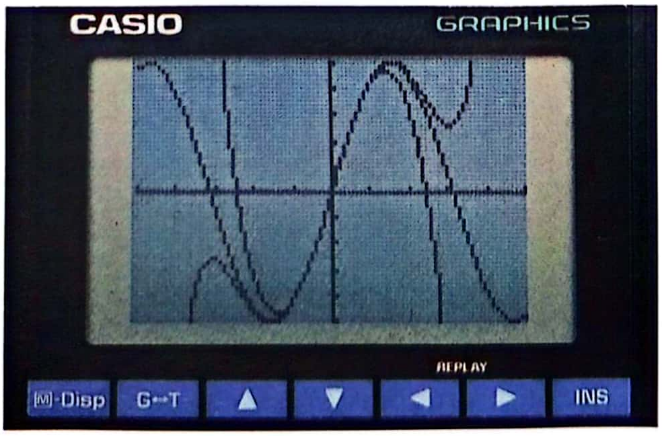
4° Déduisez-en, pour x positif, les inégalités suivantes :

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\ ;$$

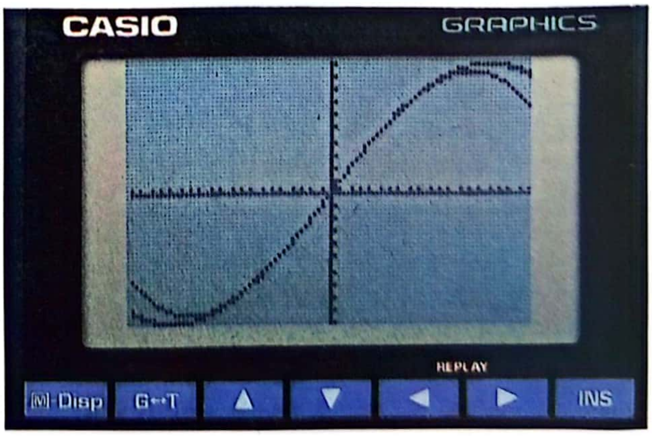
$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x\ ;$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leqslant \cos x \leqslant 1\ ;$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$



Courbes du sinus, de $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3!}$ et de $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ sur calculatrice graphique.



Courbes de ces mêmes fonctions après un « zoom » sur l'axe des abscisses.

5° Quelles inégalités du même type obtenez-vous pour x négatif ?

6° En utilisant deux de ces inégalités, précisez la position de la courbe de la fonction sinus par rapport à sa tangente à l'origine.

2. APPLICATIONS

1° Approximations.

a) Montrez que l'erreur commise en prenant pour valeur approchée de $\sin x$ le nombre $x - \frac{x^3}{3!}$ est inférieure à 10^{-7} sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{10} ; \frac{1}{10}\right]$.

b) Majorez l'erreur commise en prenant 0,995 pour valeur approchée de cos 0,1.

2° Étude d'une dérivabilité.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$

a) Justifiez la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) On se propose d'étudier la dérivabilité de f en zéro. Calculez $\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

En utilisant les encadrements obtenus dans la première partie, montrez que f est dérivable en zéro (vous distinguerez les cas : $x > 0$, $x < 0$ pour les encadrements). Quelle est la tangente à la courbe représentative de f au point $A(0, 1)$?

TP2 Convergence des suites monotones

Nous admettrons la propriété suivante :

Propriété

Toute suite croissante majorée est convergente.
Toute suite décroissante minorée est convergente.

L'objectif de ce TP est d'appliquer cette propriété et de conclure, selon les cas, à la convergence ou à la divergence de ces suites.

1. EXEMPLE 1 : SUITE (u_n) DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + u_n \\ u_0 \text{ distinct de } 0 \text{ et de } -1. \end{cases}$

1° Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).

2° On rappelle que, si (u_n) est une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, de limite ℓ, et si f est continue sur un intervalle contenant ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation $x = f(x)$.
Quelle est alors, si (u_n) converge, la seule limite possible de (u_n) ?

3° On suppose u_0 élément de $]-1 ; 0[$.

a) Montrez par récurrence que, pour tout nombre entier n, u_n appartient à $]-1 ; 0[$.

b) En utilisant la propriété citée au début de ce TP, montrez que (u_n) converge vers zéro.

4° On suppose u_0 élément de $]0 ; +\infty[$.

a) Montrez que, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n \geqslant u_0 + u_0^2$.

b) Concluez alors à la divergence de la suite (u_n).

5° Que se passe-t-il si u_0 est élément de $]-\infty ; -1[$?

2. Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1° Montrez que la suite (u_n) est croissante.

2° On se propose de montrer que la suite (u_n) est majorée.

a) Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2. Montrez que :

$$\frac{1}{p^2} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) Déduisez-en, en additionnant les inégalités obtenues en faisant varier p, que :

$$\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{puis que :} \quad u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

c) Déduisez-en que (u_n) est majorée par 2.

3° Concluez alors à la convergence de la suite (u_n).

Remarque. La propriété de convergence d'une suite croissante majorée démontre l'existence de la limite de la suite (u_n), mais ne permet pas de trouver cette limite.

Des méthodes d'analyse plus compliquées (séries de Fourier) permettent de montrer que (u_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Joseph Fourier (1768-1830).
Ses principaux travaux concernent la théorie de la propagation de la chaleur dans un solide, la résolution d'équations aux dérivées partielles et la représentation d'une fonction par une série trigonométrique, appelée depuis **« série de Fourier »**.
C'est aussi à Fourier que l'on doit le symbole d'intégration $\int_a^b$.

TP3 Exemple d'encadrement d'une intégrale

L'objectif de ce TP est de montrer comment déduire l'encadrement d'une intégrale, d'un encadrement de fonction.

1° Soit les fonctions A et B définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$A(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad B(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{4}.$$

En étudiant les signes de A' et B' (dérivées de A et B), démontrez que :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{4}.$$

2° *a*) Justifiez l'existence des trois intégrales :

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

b) Déduisez-en : $\frac{1}{3} \leqslant \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{12}$.

On pourra poser : $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = 1 + x$.

3° *a*) En utilisant une intégration par parties, vérifiez que :

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1.$$

b) Déduisez des questions précédentes que : $\frac{2}{3} \leqslant \ln 2 \leqslant \frac{17}{24}$.

Peut-on en déduire que 0,7 est une valeur approchée de $\ln 2$ à 0,1 près ?

TP4 Encadrement d'une fonction définie par une intégrale

L'objectif de ce TP est de montrer comment la propriété de « positivité » (page 145 du manuel « Enseignement obligatoire »), peut aider à calculer la limite en un point d'une fonction définie par une intégrale.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$

(Remarquez que $\quad f(x)=\displaystyle\int_1^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^{x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \quad$ par exemple.)

1° En utilisant les dérivées successives, démontrez que pour tout t de $\mathbb{R}$:

$1-\dfrac{t^2}{2}\leqslant \cos t\leqslant 1.$ (Reportez-vous si nécessaire au TP 1, p. 48.)

2° Déduisez-en un encadrement de $\dfrac{\cos t}{t}$ pour $t>0$, puis de $f(x)$ pour $x>0$.

3° Démontrez que $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=\ln 3.$

TP5 Encadrements de fonctions et suites

L'objectif de ce TP est d'utiliser un encadrement de $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ *pour étudier de deux façons la suite* (u_n) *définie par :* $\quad u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

1. Encadrement de $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

1° En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrez que pour tout x de $]0\,;+\infty[$: $\quad \dfrac{1}{x+1}\leqslant \ln(x+1)-\ln x\leqslant\dfrac{1}{x}.$

2° Déduisez-en l'inégalité :

$\dfrac{1}{x+1}\leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\leqslant\dfrac{1}{x}\quad$ pour tout x de $]0\,;+\infty[.\qquad (1)$

2. Étude « directe » de (u_n)

Soit $\quad u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad$ pour $\quad n\in\mathbb{N}^*.$

1° En utilisant l'inégalité $\quad \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\leqslant\dfrac{1}{x}\quad$ démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad u_n\leqslant \mathrm{e}.$

2° Déduisez de l'inégalité $\quad \dfrac{1}{x+1}\leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\quad$ que $\quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\geqslant \mathrm{e}.$

3° *a*) Utilisez les questions précédentes pour démontrer que, quel que soit n dans $\mathbb{N}^*$: $\quad 0<\mathrm{e}-u_n<\dfrac{1}{n}\,u_n\leqslant\dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}.$

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. ÉTUDE DE $u_n = f(n)$

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\quad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Alors $u_n = f(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1° Sens de variation de (u_n)

a) Soit φ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\quad \varphi(x) = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

En calculant $\varphi'(x)$, et en utilisant l'inégalité (1), déterminez le sens de variation de φ.

b) En remarquant que $\quad u_n = e^{\varphi(n)}$, déterminez le sens de variation de la suite (u_n).

2° Convergence de (u_n)

a) Déduisez du **1. 2°** (page 51) un encadrement de $x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

b) En exprimant $f(x)$ à l'aide de la fonction exponentielle, démontrez que pour tout x de $]0\,;+\infty[$: $\quad e^{\frac{x}{x+1}} < f(x) < e$.

c) Déduisez-en que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e\,; \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = e.$$

TP6 Suites récurrentes et nombre d'or

L'objectif de ce TP est d'étudier deux exemples de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$, toutes deux convergeant vers le nombre d'or.

L'équation $x^2 = x + 1$ admet deux solutions, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ notée ℓ, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ notée ℓ'. Sa solution positive $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelée nombre d'or, et intervient dans de nombreux problèmes de mathématiques.

Sandro Botticelli « Le Printemps », 1478, Galerie des Offices, Florence.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le nombre d'or a été utilisé en peinture : certains rapports entre les éléments d'un tableau, liés au nombre d'or, donnent à ce tableau une impression d'équilibre et d'harmonie. Ce rapport, égal au nombre d'or, a été utilisé par de nombreux peintres, en particulier par Botticelli dans son tableau « Le Printemps » où l'on relève de nombreux exemples de cette géométrie du nombre d'or.

1. Exemple 1 :

$$u_n = \sqrt{1 + \underbrace{\sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}_{n \text{ termes}}}$$

1° Vérifiez que la suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, n élément de $\mathbb{N}$.

2° Montrez que, si (u_n) converge, alors sa limite est solution de l'équation : $x = \sqrt{1 + x}$.

3° Montrez par récurrence que : $0 \leqslant u_n \leqslant \ell$, pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

4° Montrez que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - \ell)(u_n - \ell')}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} \quad \text{où} \quad \ell' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n).

5° Concluez alors à la convergence de (u_n) vers le nombre d'or.

2. Exemple 2 :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2u_n - 1}, \quad u_0 = 2$$

On a vu, dans le manuel « Enseignement obligatoire » (page 176), la méthode de Newton d'approximation d'un nombre solution d'une équation $g(x) = 0$, par une suite définie par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)}$.

1° En considérant ici g définie par $g(x) = x^2 - x - 1$, sur $[1 ; 2]$, montrez que la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2u_n - 1}$$

est la suite de la méthode de Newton de premier terme $u_0 = 2$. (On admettra que g vérifie les propriétés nécessaires.)

On a alors : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 1}$.

2° En utilisant la relation $\ell^2 = \ell + 1$, montrez l'égalité :

$$u_{n+1} - \ell = \frac{(u_n - \ell)^2}{2u_n - 1}.$$

3° Déduisez-en, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'inégalité : $u_n > \ell$, pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

4° Déterminez le sens de variation de (u_n), puis la convergence de (u_n).

5° Quelle est alors la limite de (u_n) ?

TP 7 Encadrement par des fonctions polynômes

Ce TP propose des exemples d'application des encadrements classiques de $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ par des fonctions polynômes à l'étude de suites ou d'intégrales.

1. Étude de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$, n élément de $\mathbb{N}^*$

On utilise ici l'encadrement démontré dans le TP1 : pour tout nombre x positif : $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

1° Encadrez le nombre $\sin \frac{k}{n^2}$ pour toute valeur entière de k dans $[1, n]$.

3° Déduisez-en que : $\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^6}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3° Montrez que : $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant n^4$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

4° Déduisez-en un nouvel encadrement de u_n, et la convergence de la suite (u_n).

2. Étude de $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)...\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

Voir TP 3

1° Montrez que, pour tout nombre réel x positif : $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2° On pose : $v_n = \ln u_n$.

a) A l'aide de l'encadrement précédent, montrez que :

$\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) Justifiez l'inégalité : $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et déduisez-en un nouvel encadrement de v_n.

3° *a*) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

b) Déduisez-en la convergence de (u_n) vers $\sqrt{e}$.

3. Étude de $u_n = \int_0^1 \sqrt{1 + t^n}\, dt$ $(n \geqslant 1)$

1° A l'aide d'une intégration par parties, calculez u_1.

2° Si $n \geqslant 2$, vous ne connaissez pas de primitive de $t \mapsto \sqrt{1+t^n}$. On se propose donc d'encadrer u_n.

a) Montrez que, pour tout t positif : $1 \leqslant \sqrt{1+t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} t$.

b) Déduisez-en un encadrement de $\sqrt{1+t^n}$.

3° *a*) Montrez alors que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2(n+1)}$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

FICHE *Méthode*

COMMENT UTILISER DES INÉGALITÉS EN ANALYSE

CAS DES FONCTIONS 1

Pour démontrer que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x de l'intervalle I, on peut étudier les variations sur I de la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ (ou de ses dérivées successives si nécessaire).

CAS DES SUITES 2

- Si une suite (u_n) est croissante et majorée par un nombre M, alors la suite (u_n) a une limite ℓ et $\ell \leqslant M$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et minorée par un nombre m, alors la suite (u_n) a une limite ℓ et $m \leqslant \ell$.

CAS DES INTÉGRALES 3

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x dans $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 ENCADREMENT D'UNE INTÉGRALE

1° Démontrez que pour tout x de $[0, +\infty[$:

$$1 - x \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1 - x + x^2.$$

2° Déduisez-en un encadrement de I définie par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

COMMENTAIRE

Vous ne savez pas calculer directement l'intégrale I. En encadrant $\frac{1}{1+t^2}$ par des fonctions polynômes vous pourrez encadrer I.
Le passage de la question 1° à la question 2° se fait en substituant t^2 à x.

UNE SOLUTION

1° Soit les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x),$$

$$g(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x}.$$

On a alors :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} \quad \text{soit} \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

et donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

De même : $g(x) = \frac{x^3}{1+x}$ et donc $g(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'où la double inégalité demandée.

2° Pour tout t, on a $t^2 \geqslant 0$, on peut donc substituer t^2 à x dans l'encadrement du 1° :

$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 - t^2 + t^4 \quad \text{pour tout } t,$$

donc en particulier pour tout t de $[0\,;\,1]$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ étant encadrée sur $[0\,;\,1]$ par les fonctions $t \mapsto 1 - t^2$ et $t \mapsto 1 - t^2 + t^4$, et ces trois fonctions étant continues sur $[0\,;\,1]$, on en déduit :

$$\int_0^1 (1-t^2)\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 (1 - t^2 + t^4)\,dt$$

d'où : $$\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \leqslant I \leqslant \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1,$$

$$\frac{2}{3} \leqslant I \leqslant \frac{13}{15}.$$

2 ÉTUDE DE SUITES RÉCURRENTES

(a_n) et (b_n) sont deux suites définies par leurs premiers termes :

$a_0 = 1 \quad b_0 = 2,$

et les relations de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}.$$

1° Montrez par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$.

2° Déduisez-en le sens de variation des deux suites, et la convergence de ces suites.

3° Montrez que la suite $(a_n - b_n)$ est constante. Déduisez-en les limites respectives des deux suites.

COMMENTAIRE

L'inégalité $0 < a_n < b_n$ permettra de montrer que les deux suites sont minorées. Si on les trouve décroissantes, on pourra alors conclure à la convergence des deux suites.
On note alors ℓ et ℓ' les limites respectives de (a_n) et (b_n) et on essaie d'obtenir des relations permettant de trouver ℓ et ℓ'.

UNE SOLUTION

1° Soit $P(n)$ la proposition : $0 < a_n < b_n$.
Comme $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $0 < a_0 < b_0$, $P(0)$ est vraie.
Soit n un nombre quelconque fixé. On suppose $P(n)$ vraie.

$a_n > 0$, $b_n > 0$,

donc $a_n + b_n > 0$,

$a_n^2 > 0$,

donc $\frac{a_n^2}{a_n + b_n} > 0$ et $a_{n+1} > 0$.

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = a_n - b_n.$$

Par hypothèse, $a_n < b_n$, d'où $a_{n+1} < b_{n+1}$.
On obtient donc l'inégalité :

$0 < a_{n+1} < b_{n+1}$,

$P(n+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

2° $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n} - a_n = \dfrac{-a_n b_n}{a_n + b_n}$.

D'après les signes de a_n et b_n on a : $a_{n+1} - a_n < 0$.
La suite (a_n) est décroissante.

De même : $b_{n+1} - b_n = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n} - b_n = \dfrac{-a_n b_n}{a_n + b_n}$.

La suite (b_n) est décroissante.

Les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes, minorées par zéro d'après **1°**, donc convergentes.

3° On a trouvé : $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$ pour tout n, la suite $(a_n - b_n)$ est donc constante, égale à $a_0 - b_0$, soit : -1.

Soit ℓ la limite de (a_n), ℓ' la limite de (b_n).
D'après les propriétés des opérations sur les limites :
$\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = \ell - \ell'$.
D'où la relation : $\ell - \ell' = -1$.

De plus, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$, d'où :

$\ell = \dfrac{\ell^2}{\ell + \ell'}$, ou encore $\ell\ell' = 0$.

Or $0 < a_n < b_n$, d'où $0 \leqslant \ell \leqslant \ell'$.

$\ell - \ell' = -1$ et le produit $\ell\ell'$ est nul : c'est donc ℓ qui est nulle.
D'où : $\ell = 0$, $\ell' = 1$.
(a_n) converge vers zéro, (b_n) vers 1.

3 ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Montrez que f est continue en zéro.

2° Démontrez que, pour tout x positif, on a l'encadrement :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3° Montrez que f est dérivable en zéro, et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

4° Précisez la position de la courbe (C) représentative de f par rapport à sa demi-tangente à l'origine.

5° *a*) Montrez que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et que, pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $u(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

b) A l'aide des variations de u, déterminez le signe de u, puis le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

6° Déterminez la limite de f en $+\infty$, et représentez la courbe (C).

COMMENTAIRE

- **Pour déterminer la limite de f en zéro, on utilise la limite du cours : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.**
- **Pour la dérivabilité de f, on utilise l'encadrement de $\ln(1+x)$ dont on déduit un encadrement du taux d'accroissement de f en zéro.**
- **Pour étudier les variations de f, le signe de la dérivée n'étant pas évident, on utilise une fonction auxiliaire.**

UNE SOLUTION ABRÉGÉE

1° $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1$, si x est strictement positif.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

La fonction f est continue en zéro.

2° Ce résultat a été démontré à la page 83 du manuel « Enseignement obligatoire ». On l'obtient en étudiant les variations des fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

$x \mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et

$x \mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$.

3° $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

En divisant les inégalités du **2°** par x $(x > 0)$, on obtient :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}. \qquad (1)$$

Or $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Le taux d'accroissement de f en zéro est encadré par deux fonctions de limite $-\dfrac{1}{2}$, donc tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

La fonction f est donc dérivable en zéro, et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

4° Une équation de la demi-tangente en zéro est donc $y = -\dfrac{x}{2}$.

D'après (1) :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\ln(1+x) - x}{x^2},$$

soit $f(x) \geqslant -\dfrac{x}{2}$.

(C) est au-dessus de sa demi-tangente à l'origine.

5° *a*) Sur $]0\,;+\infty[$, f est le quotient de deux fonctions dérivables car $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}(\ln(1+x) - x) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right),$$

$$f'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{u(x)}{x^2(1+x)}.$$

$x^2(1+x) > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $u(x)$.

b) u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $u'(x) = -\ln(1+x)$.

Sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $1 + x \geqslant 1$, $-\ln(1+x) \leqslant 0$.

u décroît sur $\mathbb{R}_+$. Or $u(0) = 0$, donc $u(x) \leqslant 0$, et f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et, par continuité en zéro, sur $\mathbb{R}_+$.

6° En écrivant $\ln(x+1) = \ln\left[x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

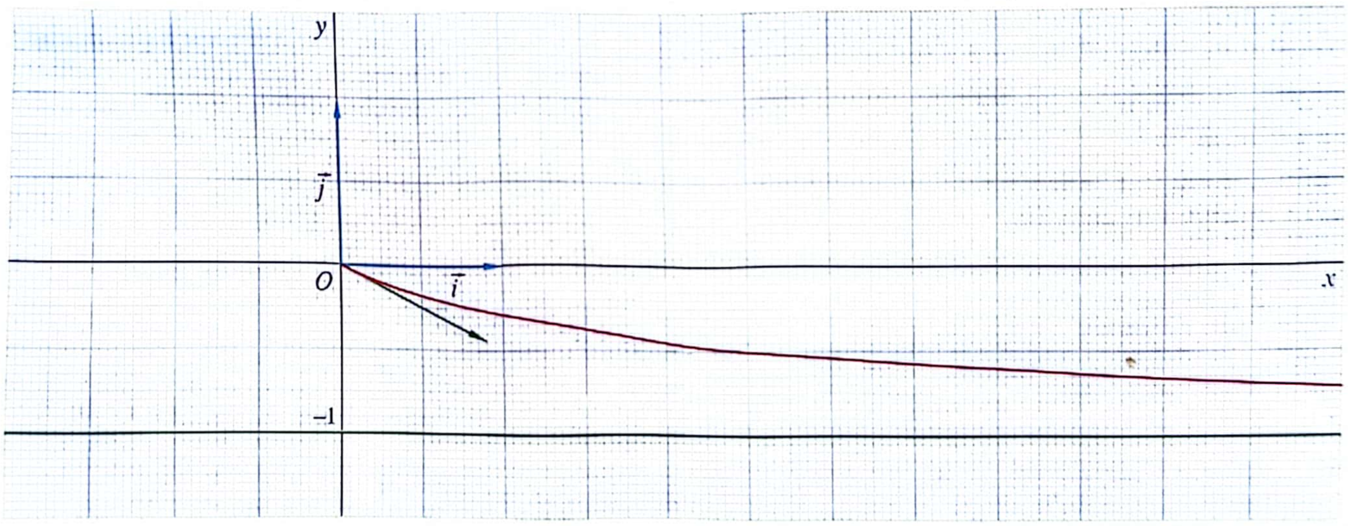
$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0.$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$ $\quad -$	
$f(x)$	0 $\searrow$	-1



Pour tout nombre entier naturel n, on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}\,dx$.

1° *Étude d'une suite auxiliaire* (v_n). Pour tout n, on pose : $v_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

a) Calculer v_n.

b) Déterminer $\lim v_n$, puis $\lim (nv_n)$.

2° *Comparaison de* (u_n) *à* (v_n).

a) Établir que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, on a $2 \leqslant e^x + 1 \leqslant 2e^x$.

b) En déduire que, pour tout n, on a : $\frac{1}{2} v_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} v_n$.

c) Déterminer $\lim u_n$, puis $\lim nu_n$.

3° *Étude d'une suite associée à* (u_n). On pose : $s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ et $t_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$.

a) Montrer que : $0 \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \leqslant \frac{1}{e-1}$.

(On observera que, pour tout p, on a : $\frac{e^{-p}}{p} \leqslant e^{-p}$.)

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[p, p+1]$, montrer qu'on a : $\frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$.

c) En déduire que, pour tout n, on a : $\ln(n+1) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln(n)$.

d) Montrer, en utilisant *a*) et *c*), que $\lim t_n = +\infty$.

e) Que peut-on en déduire pour s_n ?

(*Extrait Bac*)

ANALYSE DE L'ÉNONCÉ

On ne connaît pas de primitive de $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}$.

On encadre donc cette fonction, par deux fonctions plus simples, et on en déduit un encadrement par deux intégrales.

L'essentiel de cette partie de problème est basé sur des considérations d'encadrement.

UNE SOLUTION

1° *a*) $v_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-n}}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

$nv_n = 1 - e^{-n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (nv_n) = 1$.

2° *a*) Pour tout x de $[0\,;\,1]$: $e^x \geqslant e^0$, soit $e^x \geqslant 1$.

Donc : $1 + e^x \geqslant 2$, et $2e^x \geqslant 1 + e^x$.

D'où l'encadrement : $2 \leqslant e^x + 1 \leqslant 2e^x$.

b) Il en résulte que :

$\frac{1}{2} e^{-x} \leqslant \frac{1}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout x de $[0\,;\,1]$.

$e^{-nx} > 0$, donc $\frac{1}{2} e^{-x} \cdot e^{-nx} \leqslant \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2} e^{-nx}$.

Soit : $\frac{1}{2} e^{-(n+1)x} \leqslant \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2} e^{-nx}$.

En intégrant cette inégalité sur $[0\,;\,1]$, on obtient :

$\frac{1}{2} v_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} v_n$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} v_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} v_{n+1}\right) = 0$.

(u_n) est encadrée par deux suites de limite nulle, donc, d'après le théorème « des gendarmes », converge elle-même vers zéro.

On a : $\frac{1}{2} n v_{n+1} \leqslant n u_n \leqslant \frac{1}{2} n v_n$.

Or : $n v_{n+1} = (n+1) v_{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$.

Comme : $\lim_{n \to +\infty} (n+1) v_{n+1} = 1$,

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,

On obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} n v_{n+1} = \frac{1}{2}.$$

De plus, d'après 1° : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} n v_n = \frac{1}{2}$.

Donc, d'après le théorème « des gendarmes » :

$$\lim_{n \to +\infty} n u_n = \frac{1}{2}.$$

3° *a*) $\frac{e^{-p}}{p} \leqslant e^{-p}$ car $p \geqslant 1$,

donc $\sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \leqslant \sum_{p=1}^{n} e^{-p}$.

Or, comme somme de n termes d'une suite géométrique, de raison $\frac{1}{e}$:

$$\sum_{p=1}^{n} e^{-p} = \frac{1}{e} \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n\right).$$

$1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n \leqslant 1$, donc $\sum_{p=1}^{n} e^{-p} \leqslant \frac{1}{e-1}$.

b) Sur $[p, p+1]$ la dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ de la fonction logarithme vérifie l'inégalité :

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{p}.$$

On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a = p$, $b = p+1$, et on obtient :

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln p \leqslant \frac{1}{p}.$$

c) Pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$:
$\ln(p+1) - \ln p \leqslant \frac{1}{p}$.

En sommant ces n inégalités, on obtient :

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

De plus, pour tout $p \geqslant 2$:

$$\frac{1}{p} \leqslant \ln p - \ln(p-1).$$

En sommant ces inégalités, pour p compris entre 2 et n, on obtient :

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln n.$$

D'où $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n$ et on a bien l'encadrement :

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n.$$

d) $\sum_{p=1}^{n} v_n = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p}$.

D'après 3° *a*) : $-\sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \geqslant -\frac{1}{e-1}$ d'où :

$$t_n \geqslant \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{e-1}\right).$$

D'après 3° *c*) : $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \geqslant \ln(n+1)$;

or $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$,

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\right) = +\infty$, et $\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$.

e) $s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$, $u_p \geqslant \frac{1}{2} v_{p+1}$ pour tout p compris entre 1 et n, donc $s_n \geqslant \frac{1}{2}(t_{n+1} - v_1)$.

$\lim_{n \to +\infty} t_{n+1} = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$.

EXERCICES & PROBLÈMES

Q. C. M.

Dans chacun des exercices suivants, une au moins des réponses est exacte.

1 f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f' \leqslant g'$:

Pour tout réel x, $f(x) \leqslant g(x)$ .... ☐

Pour tout réel x, $f(x) - f(0) \leqslant g(x) - g(0)$... ☐

Si $f(0) = g(0)$, alors pour tout x positif, $f(x) \leqslant g(x)$... ☐

2 La suite $((-1)^n)$ est majorée par 1, donc convergente .... ☐

La suite $(\ln n)_{n \geqslant 1}$ est croissante, donc convergente .... ☐

La suite $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est croissante, majorée par 1, donc convergente... ☐

3 $1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\,dt \leqslant e$... ☐

$\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\,dt \geqslant \int_0^1 e^t\,dt$.. ☐

$\displaystyle\int_1^2 e^{t^2}\,dt \geqslant \int_1^2 e^t\,dt$.. ☐

4 f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, minorée par 1 et majorée par 2. On note, pour tout x réel, $I(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

Pour tout réel x, $x \leqslant I(x) \leqslant 2x$...................... ☐

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I(x) = +\infty$ .... ☐

Si $x \leqslant 0$, $I(x) \geqslant 2x$... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

DÉRIVÉES ET INÉGALITÉS

5 ■ 1° Démontrez que pour tout nombre t positif on a :

$$1 - t + t^2 - t^3 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 - t + t^2.$$

2° Déduisez-en que pour tout nombre x positif :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3° *a*) Donnez un encadrement de $\ln 2$, d'amplitude 0,25.

b) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles l'encadrement ci-dessus permet d'avoir une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 0,01 près ?

6 ■■ Soit f une fonction définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$, vérifiant les relations :

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

1° Étudiez les variations de f sur $[1\,;+\infty[$.

2° On définit la fonction g sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Comparez f' et g', puis f et g sur $[1\,;+\infty[$.

3° Montrez alors que f est majorée sur $[1\,;+\infty[$, et admet donc une limite ℓ en $+\infty$, vérifiant : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

7 ■■ Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ par :

$$f(x) = \sin x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x).$$

1° *a*) Montrez que les courbes (C_f) et (C_g) représentatives de f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrez que f et g coïncident en $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$ et ont même nombre dérivé en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2° Soit φ la fonction définie, sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, par : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

a) Calculez $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, et étudiez les signes de φ''', φ'', φ' sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrez alors que φ est négative sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, puis que, pour tout x de $[0\,;\pi]$, on a l'inégalité :

$$\sin x \leqslant \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x).$$

c) Construisez (C_f) et (C_g) sur le même graphique.

CONVERGENCE DES SUITES MONOTONES

8 ■ Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^4 + 5) & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \\ u_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1° a) Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{6}(x^4 + 5)$, I l'intervalle $[0; 1]$. Montrez l'inclusion : $f(I) \subset I$.

b) Déduisez-en, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2° Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - x$.

a) Étudiez les variations de φ sur I.

b) Montrez que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique sur I, que vous déterminerez.

c) Utilisez le signe de φ pour déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3° Concluez alors à la convergence de (u_n). Quelle en est la limite ?

9 ■ Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 strictement positif et la relation de récurrence :

$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1° Montrez que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 0$.

2° Que pouvez-vous dire de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$? Déduisez-en le sens de variation de (u_n).

3° Montrez alors que (u_n) est une suite convergente. En résolvant l'équation $xe^{-x} = x$, déterminez la limite de (u_n).

10 ■ Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1° Montrez que (u_n) est majorée par 4.

2° Déterminez le sens de variation de (u_n), et concluez à la convergence de la suite (u_n). Quelle en est la limite ?

11 ■■ On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}, & \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \\ u_0 = -1. \end{cases}$$

1° a) Démontrez par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 5.

b) Déduisez-en que la suite (u_n) converge.

2° En utilisant la continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{4x + 5}$ sur l'intervalle $[-1; 5]$, démontrez que la suite (u_n) a pour limite 5.

12 ■■ On considère la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} \qquad (n \geqslant 1).$$

1° Démontrez que pour tout nombre entier n non nul : $S_n \leqslant \frac{n}{n+1}$.

Déduisez-en que la suite (S_n) est majorée.

2° Déduisez-en la convergence de la suite (S_n).

13 ■■ Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2), & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \\ u_0 > 0. \end{cases}$$

1° Montrez par récurrence que u_n est positif, pour tout n de $\mathbb{N}$.

2° Soit f définie par : $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

a) Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $\mathbb{R}_+$, et que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant x$.

3° Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

4° Déduisez-en la convergence de (u_n). Quelle est sa limite ?

14 ■■■ Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - u_n^2, & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \\ 0 < u_1 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

I — 1° Déterminez le sens de variation de (u_n).

2° Soit $f(x) = x - x^2$.

a) Étudiez les variations de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b) Déduisez-en, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$: $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

3° Montrez alors la convergence de la suite (u_n) vers zéro.

II — Soit $v_n = nu_n$. On se propose de montrer que la suite (v_n) est convergente.

1° Vérifiez que, pour tout $n \geqslant 1$, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+2}$.

2° Montrez alors par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$:

$0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

3° Déduisez-en que la suite (v_n) est majorée par 1.

4° Montrez que $v_{n+1} - v_n = u_n[1 - (n+1)u_n]$, et déduisez-en la croissance de la suite (v_n).

5° Concluez alors à la convergence de la suite (v_n), vers un nombre réel de $]0; 1]$.

15 Soit r un nombre réel de l'intervalle $]0;1[$. On définit la suite (u_n) par la relation de récurrence :

$u_{n+1} = (1 + r^n)\,u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$,

et son premier terme u_1 strictement positif.

1° Calculez u_2 et u_3 en fonction de u_1.

2° Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$:

$u_n = (1 + r)\dots(1 + r^{n-1})\,u_1$.

3° Soit $v_n = \ln[(1 + r)\dots(1 + r^{n-1})] = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 + r^k)$.

a) Montrez que, pour tout $t \geqslant 0$, $\quad \ln(1 + t) \leqslant t$.

b) Déduisez-en que : $\quad v_n \leqslant \dfrac{r}{1 - r}$.

4° a) Montrez alors que la suite (u_n) est majorée. Quel est son sens de variation ?

b) Déduisez-en la convergence de (u_n).

16 **Suites adjacentes.**

On considère deux suites (u_n) et (v_n), telles que :

- (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante,
- pour tout nombre entier n :

$u_n \leqslant v_n$: et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

1° a) Démontrez que (u_n) est majorée par v_0.

b) Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

2° Soit $\quad u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!} \qquad$ (on pose $0! = 1$),

$$v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

ENCADREMENT D'INTÉGRALES

17 Soit f une fonction continue strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.

Démontrez que l'on a : $\quad f(1) \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(0)$.

18 Pour $x > 0$, on pose : $\quad I(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1° En utilisant l'inégalité :

$x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x \qquad$ (voir p. 48),

montrez que, pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{t^2}{6}\right) \mathrm{d}t \leqslant I(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2° Déduisez-en que : $\quad \lim\limits_{x \to 0} I(x) = \ln 2$.

19 Le but de cet exercice est de trouver un encadrement de l'intégrale $\quad I = \displaystyle\int_3^5 \ln(1 + x^2)\,\mathrm{d}x$.

1° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.

Étudiez les variations de f et tracez la courbe (C).

2° Montrez que pour tout nombre réel x positif, on a :

$1 + x^2 \leqslant (x + 1)^2$.

Déduisez-en que pour tout nombre réel x positif :

$\ln(1 + x^2) \leqslant 2\ln(x + 1)$.

3° A l'aide d'une intégration par parties, calculez :

$$J = \int_3^5 \ln(x + 1)\,\mathrm{d}x.$$

Déduisez-en une majoration de I.

4° Montrez que, pour tout nombre réel x strictement supérieur à 1, on a : $\quad 2\ln(x - 1) \leqslant \ln(1 + x^2)$.

5° Déduisez-en un encadrement de I.

20 1° Soit x élément de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Montrez les inégalités : $\quad \dfrac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$.

2° Déduisez-en que, pour tout x de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3° Soit I l'intégrale définie par : $\quad I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

a) Justifiez l'existence de I.

b) Déduisez de la question 2° l'encadrement :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(2 - \sqrt{2}) \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{2}\,(2 - \sqrt{2}).$$

21 On se propose dans cet exercice de trouver un encadrement du nombre $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \quad$ que l'on ne sait pas calculer en Terminale.

1° Démontrez que, pour tout x de $[0;1]$, on a :

$\dfrac{1}{1 + x^2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{2} x^2$.

2° Soit $\quad A(x) = 1 - (1 + x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrez que le signe de $\dfrac{1}{1 + x^2} - \mathrm{e}^{-x}$ est celui de $A(x)$.

b) Calculez $A'(x)$. Déduisez-en le signe de $A(x)$.

c) Démontrez que, pour tout nombre x de $[0;1]$, on a :

$$e^{-x} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

3° a) Déduisez des questions précédentes que :

$$1-\frac{1}{e} \leqslant I \leqslant \frac{5}{6}.$$

b) Peut-on à l'aide d'une calculatrice et de l'encadrement ci-dessus, trouver une valeur approchée de I à 0,1 près ?

SUITES D'INTÉGRALES

22 Soit la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n \, dx \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1° Montrez que la suite (I_n) est majorée par $\frac{\pi}{2}$.

2° Montrez que la suite (I_n) est convergente.

23 1° On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifiez l'existence de l'intégrale $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$, puis celle de l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx$, où n est un nombre entier non nul.

2° Calculez I_0, I_1 et I_2.

3° Montrez que la suite numérique $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Cette suite admet-elle une limite ?

4° Montrez que, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout nombre entier non nul, on a : $0 \leqslant \sin^n x \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Déduisez-en que : $0 \leqslant \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, et calculez la limite de la suite I_n.

24 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{n}} dt \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1° Montrez l'encadrement :

pour tout t de $[0;1]$, $\quad e^{-\frac{t}{n}} \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}} \leqslant 1.$

2° Déduisez-en un encadrement de (u_n), et la convergence de la suite (u_n) vers 1.

25 On considère, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, et x réel quelconque, l'intégrale :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1° Calculez $I_1(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2° a) En intégrant $I_n(x)$ par parties, calculez $I_{n+1}(x) - I_n(x) \quad (n \geqslant 1)$.

b) Déduisez-en que :

$$I_n(x) = e - \left(1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k!}\right) e^{1-x}.$$

3° On suppose maintenant que x est un élément fixé de l'intervalle $]0;1]$.

a) Démontrez que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant I_n(x) \leqslant \frac{1}{n!} e(1-e^{-x}).$$

Déduisez-en la limite de $I_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

b) En appliquant la convention $0! = 1$, montrez que l'on peut en déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}\right) = e^x.$$

ENCADREMENT D'INTÉGRALES ET SUITES

26 1° Soit p un nombre entier supérieur ou égal à un. En utilisant l'inégalité de la moyenne, montrez l'encadrement :

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{p}.$$

2° En appliquant ces inégalités pour tout nombre p compris entre n et $2n-1$, montrez l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n-1}.$$

3° Soit (v_n) la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Déduisez de l'encadrement précédent l'inégalité :

$$\ln 2 - \frac{1}{2n} \leqslant v_n \leqslant \ln 2.$$

4° Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

27 ■■■
Dérivées et inégalités
Soit M un nombre réel strictement positif.

I — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que la dérivée f' vérifie : $|f'(x)| \leqslant M|x^p|$, où p est un entier naturel non nul.

1° On définit les fonctions φ_1 et φ_2 sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(x) = f(x) - f(0) - M\frac{x^{p+1}}{p+1};$$

$$\varphi_2(x) = f(x) - f(0) + M\frac{x^{p+1}}{p+1}.$$

Étudiez les variations de φ_1 et φ_2 sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.

2° Déduisez-en, pour tout nombre réel x, l'inégalité :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \frac{M|x|^{p+1}}{p+1}.$$

II — **Application.** Soit f une fonction cinq fois dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, telle que $f'(0)$ soit nul et dont la dérivée cinquième vérifie : $|f^{(5)}| \leqslant M$.

1° Trouvez un exemple de fonction polynôme non nulle vérifiant ces hypothèses.

2° Soit $f_1 : x \mapsto \sin x - x$. Montrez que f_1 vérifie ces hypothèses.

3° **Cas général.** On pose : $\varphi(x) = f(x) - \frac{x}{3}f'(x)$.

a) Calculez $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$.

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $f^{(4)}$, montrez que :

$$|f^{(4)}(x)| \leqslant M|x|, \quad \text{puis} \quad |\varphi^{(3)}(x)| \leqslant \frac{Mx^2}{3}.$$

c) En appliquant les résultats de la partie I, déduisez-en l'inégalité :

$$\left|f(x) - \frac{x}{3}f'(x)\right| \leqslant \frac{M|x|^5}{180}.$$

d) Montrez que, si $f(x) = x^5$, cette inégalité est une égalité.

e) Déduisez-en : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \frac{x}{3}\cos x - \frac{2}{3}x}{x^4}$.

28 ■■■
Points fixes d'une fonction
On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,e^{-\frac{x}{2}}$.
On se propose d'étudier l'équation $(E) : f(x) = x$.

1° a) Calculez $f'(x)$. Étudiez les variations de f sur $]0; +\infty[$.

b) Démontrez que pour tout nombre réel x positif : $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

2° Soit $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrez que $g'(x)$ s'annule en un unique point β tel que $-0{,}6 < \beta < -0{,}5$.

b) Démontrez que l'équation (E) admet deux solutions de signes contraires.
Soit α la solution positive de (E). Vérifiez que $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

3° Soit (u_n) la suite définie par :
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. $(n \in \mathbb{N}.)$

a) Démontrez que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

b) Démontrez que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

c) Démontrez que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

d) Déterminez le plus petit entier n_0 pour lequel on soit sûr que u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-6} près. Donnez alors la valeur de u_{n_0} affichée par la calculatrice.

29 ■■■
Constante d'Euler.

1° n est un nombre entier supérieur ou égal à deux. A l'aide d'un encadrement par la méthode des rectangles de $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,dt$, montrez l'inégalité :

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leqslant \ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

2° a) Déduisez-en l'inégalité :

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n.$$

b) On pose : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Quelle est la limite de (u_n) ?

3° Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ln n$.
Quel est le signe de v_n ?

4° a) En minorant l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$, montrez l'inégalité : $\ln(n+1) - \ln n \geqslant \frac{1}{n+1}$.

b) Déduisez-en le sens de variation de la suite (v_n).

5° En utilisant la propriété de convergence des suites monotones, concluez alors à la convergence de (v_n).
Sa limite s'appelle la constante d'Euler, notée γ. (Une valeur approchée de γ est : $\gamma \approx 0{,}577$.)

30 ■■■
Intégrale et méthode des rectangles.
On considère la fonction f définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$.

1° Étudiez les variations de f sur $]0; 1]$ et tracez sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = 2$ cm$)$.

2° On se propose d'évaluer l'aire de la portion de plan située sous la courbe $(\mathcal{C})$, délimitée par les axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

Pour $\alpha > 0$, on note $\quad I(\alpha) = \int_\alpha^1 f(x)\,dx.$

a) Calculez $I(\alpha)$. (Vous pourrez intégrer par parties $\int_\alpha^1 \ln x\,dx$.)

b) Déduisez-en la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro.

3° Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On note : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Interprétez géométriquement S_n en termes de rectangles. Faites la figure pour $n = 5$.

b) Démontrez que, pour tout nombre entier naturel k compris entre 1 et $n-1$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

c) Déduisez-en que : $\quad S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n.$

d) Déduisez de la question précédente un encadrement de S_n. Quelle est la limite de la suite (S_n) quand n tend vers $+\infty$?

31 Étude d'une suite d'intégrales

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1 et soit I_n l'intégrale définie par :

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx.$$

Le but du problème est la détermination de la limite de la suite (I_n).

1° Montrez, pour tout nombre réel t positif, les inégalités : $\quad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$

(On pourra étudier le sens de variation des fonctions $\varphi_1 : t \mapsto \ln(1+t) - t$ et $\varphi_2 : t \mapsto \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.)

2° Déduisez-en les inégalités suivantes, pour tout nombre x de $[0; n]$:

$$x - \frac{x^2}{2n} \leqslant n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leqslant x,$$

$$e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x,$$

$$e^{-x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leqslant e^{-x}.$$

3° Calculez $\int_0^n e^{-x}\,dx$, et montrez alors que :

$I_n \leqslant 1 - e^{-n}. \qquad (1)$

4° a) Montrez, pour tout nombre réel t positif, l'inégalité : $\quad e^{-t} \geqslant 1 - t.$

b) Déduisez-en que, pour tout x de $[0; n]$:

$$e^{-x} \times e^{-\frac{x^2}{2n}} \geqslant e^{-x} - \frac{x^2}{2n} e^{-x}.$$

5° Calculez, à l'aide de deux intégrations par parties, $\int_0^n x^2 e^{-x}\,dx$.

6° Déduisez du 4° b) et du 5°, la minoration de I_n :

$$I_n \geqslant 1 - \frac{1}{n} + e^{-n}\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2}\right). \qquad (2)$$

7° A l'aide des encadrements (1) et (2), montrez que la suite (I_n) converge vers 1.

32 Le nombre de chiffres de 1 000 !

L'objectif de ce problème est de déterminer un encadrement de :

$S_n = \ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n,$

où n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$f(x) = \ln x.$

1° Tracez la courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

2° Pour tout nombre entier naturel non nul p, on désigne par A_p le point de coordonnées $(p, 0)$.

a) Construisez les rectangles de bases $[A_1 A_2]$, $[A_2 A_3]$, ..., $[A_{n-1} A_n]$ et de hauteurs respectives $\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\ln n$.

Montrez que la somme des aires de ces rectangles est S_n.

b) En utilisant une autre couleur qu'au a), construisez les rectangles de bases $[A_1 A_2]$, $[A_2 A_3]$, ..., $[A_{n-1} A_n]$ et de hauteurs respectives $\ln 1$, $\ln 2$, ..., $\ln(n-1)$.

Calculez la somme des aires de ces rectangles.

c) Interprétez graphiquement l'intégrale :

$$I_n = \int_1^n \ln x\,dx,$$

où n est un nombre entier supérieur ou égal à 2.

d) A l'aide de considérations géométriques, déduisez de a), b) et c) que, pour $n \geqslant 2$:

$S_{n-1} \leqslant I_n \leqslant S_n.$

3° a) Prouvez, à l'aide du 2° d), que, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:

$I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + \ln n.$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculez I_n.

c) Explicitez l'encadrement de S_n ainsi obtenu.

4° Déduisez-en un encadrement du nombre p tel que : $\quad 10^p \leqslant 1\,000\,! \leqslant 10^{p+1}$

Concluez alors quant au nombre de chiffres de 1 000 !

4 COMPLÉMENTS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

OBJECTIFS

- *Utiliser les outils relatifs aux nombres complexes, rencontrés dans le programme obligatoire, pour résoudre quelques problèmes plus avancés.*
- *Appliquer l'étude des nombres complexes à la recherche de propriétés caractéristiques de quelques configurations simples.*

TP1 Compléments de trigonométrie

L'objectif de ce TP est de transformer un produit de termes trigonométriques en une somme (et réciproquement).

1. Conversion d'un produit en somme

1° Exemple

$$\cos a \cos b = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right) \times \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) \qquad \text{(formules d'Euler)},$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} \quad e^{i(-a-b)}\right),$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} + \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2}\right),$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

2° A vous de jouer !

En utilisant la méthode du **1°**, démontrez que :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right),$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

3° Application : recherche de primitive

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 3x \cos 5x$.

a) Convertissez $f(x)$ en une somme trigonométrique.

b) Justifiez l'existence de primitives de f sur $\mathbb{R}$ et déterminez l'une d'elles.

2. Conversion d'une somme en produit

1° Factorisation de $\cos A + \cos B$

a) Étant donnés les nombres a et b, on pose $A = a + b$ et $B = a - b$.
Exprimez a et b en fonction de A et B.

b) Du résultat : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$, déduisez que :

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

2° Autres factorisations

Démontrez que : $\cos A - \cos B = -2 \sin \dfrac{A+B}{2} \sin \dfrac{A-B}{2}$,

$\sin A + \sin B = 2 \sin \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$, $\sin A - \sin B = 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \sin \dfrac{A-B}{2}$

3° Application : résolution d'une équation

Soit l'équation : $\sin 5x + \sin 7x = 0$. (E)

a) Factorisez $\sin 5x + \sin 7x$, en utilisant une des formules précédentes.

b) Résolvez les équations $\sin 6x = 0$ et $\cos x = 0$.

c) Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

Vous retiendrez :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

TP2 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Le but de ce TP est de factoriser toute expression du type $a \cos x + b \sin x$, où a et b sont deux nombres réels non simultanément nuls, sous la forme $r \cos(x - \theta)$. Cette seconde écriture est plus pratique pour des résolutions d'équations, recherches de signes, etc.

1. Méthode de factorisation

On note z le nombre complexe $a + ib$; on pose : $r = |z|$, $\theta = \arg z$.

1° Expliquez pourquoi r est non nul.

Écrivez $a + ib$ sous forme trigonométrique.

2° *a*) Déduisez-en : $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$.

b) Démontrez que : $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta)$.

2. Exemple de factorisation

Appliquons la méthode précédente à l'expression : $\cos x - \sqrt{3} \sin x$.

1° Écrivez sous forme trigonométrique le nombre complexe $1 - i\sqrt{3}$.

2° Déduisez-en que : $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Résolution d'équations

1° En utilisant la méthode précédente, résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x + \sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. *b*) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

2° Une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$ a-t-elle toujours des solutions ? Discutez suivant les valeurs de c (rappel : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$).

Pour factoriser une expression du type $a \cos x + b \sin x$:
1° on écrit le nombre $a + ib$ sous forme trigonométrique : $re^{i\theta}$;
2° on a alors : $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta)$.

TP3 Racines n-ièmes de l'unité

L'objectif de ce TP est de résoudre dans $\mathbb{C}$ toute équation du type $z^n = 1$. Une solution de cette équation sera appelée «racine n-ième de l'unité» ou «racine n-ième de 1».

1. Racines troisièmes de 1

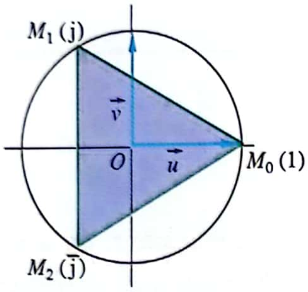
1° Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 1$.

a) Montrez que si $z^3 = 1$ alors $|z| = 1$.

b) Recherchez alors les solutions sous la forme $e^{i\theta}$, en écrivant $e^{i3\theta} = 1$.

c) Vous trouvez trois solutions correspondant à $\theta = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifiez que les trois solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont 1, j et $\bar{j}$.



2° Représentation géométrique des solutions.

Remarquez que les points M_0, M_1 et M_2 images de 1, j et $\bar{j}$ forment un triangle équilatéral.

a) Déterminez le vecteur $\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. Qu'en déduisez-vous ?

b) Expliquez pourquoi le triangle $M_0 M_1 M_2$ est inscrit dans le cercle trigonométrique.

2. Racines n-ièmes de 1

n désigne un nombre entier naturel non nul.

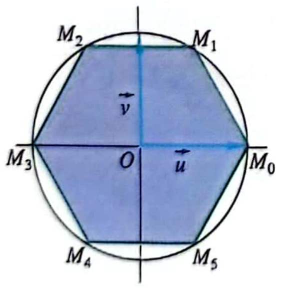
1° Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

a) Montrez que si $z^n = 1$ alors $|z| = 1$.

b) Expliquez pourquoi l'équation $z^n = 1$ équivaut à l'équation d'inconnue θ : $e^{in\theta} = 1$.

c) Déduisez de ce qui précède que l'équation $z^n = 1$ possède n solutions complexes : $1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$.

Chacun de ces nombres est appelé **racine n-ième** de l'unité.



2° Ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

a) Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Montrez que les racines n-ièmes de l'unité sont : $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.

b) Soit M_k le point d'affixe ω^k ($0 \leqslant k \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{N}$).
Montrez que M_{k+1} est l'image de M_k par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. (Vous pouvez utiliser l'application $z \mapsto \omega z$.)
Déduisez-en la nature de la figure géométrique déterminée par les points M_0, M_1, …, M_{n-1}.

3. Racines n-ièmes d'un nombre complexe a non nul

Nous n'étudierons que le cas où la forme trigonométrique de a est donnée ou facile à obtenir.

1° Étude d'un exemple.

a) Calculez $(2e^{i\frac{\pi}{12}})^3$ sous forme trigonométrique.

b) Montrez qu'alors l'équation $z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{2e^{i\frac{\pi}{12}}}\right)^3 = 1$.

c) Connaissant l'ensemble des racines troisièmes de 1, déduisez-en l'ensemble des racines troisièmes de $8e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2° Cas général. Cherchons les racines n-ièmes du nombre complexe $a = re^{i\alpha}$.

a) Cherchez une solution z sous sa forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$.

Remarquez que l'on a : $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$

b) Connaissant l'ensemble des racines n-ièmes de 1, déduisez-en que les racines n-ièmes de a sont les n nombres complexes de module $\sqrt[n]{r}$ et d'arguments respectifs :

$$\frac{\alpha}{n}, \quad \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}.$$

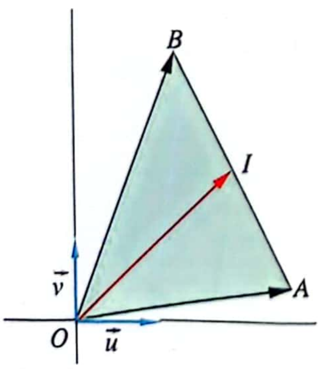
c) Vérifiez que, pour obtenir toutes les racines n-ièmes de a, il suffit de multiplier l'une d'entre elles par les racines n-ièmes de 1.

- **Les racines n-ièmes de 1 sont : $1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$.**
- **Pour obtenir les racines n-ièmes de $re^{i\alpha}$, il suffit de multiplier $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\alpha}{n}}$ par les racines n-ièmes de 1.**

TP4 Affixe d'un barycentre

L'objectif de ce TP est de traduire la notion de barycentre à l'aide des nombres complexes, et d'appliquer ce résultat à l'étude de configurations.

1. Milieux et barycentres



1° Soit deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
Soit $I(z_I)$ le milieu du segment $[AB]$.

a) Exprimez $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

b) Déduisez-en que : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

2° Soit n points pondérés $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \ldots, (A_n, \lambda_n)$ tels que la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ soit non nulle, soit G le barycentre de ce système.

On note z_{A_i} l'affixe d'un point A_i et z_G celle de G.
Exprimez le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$.

Déduisez-en l'égalité : $z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$

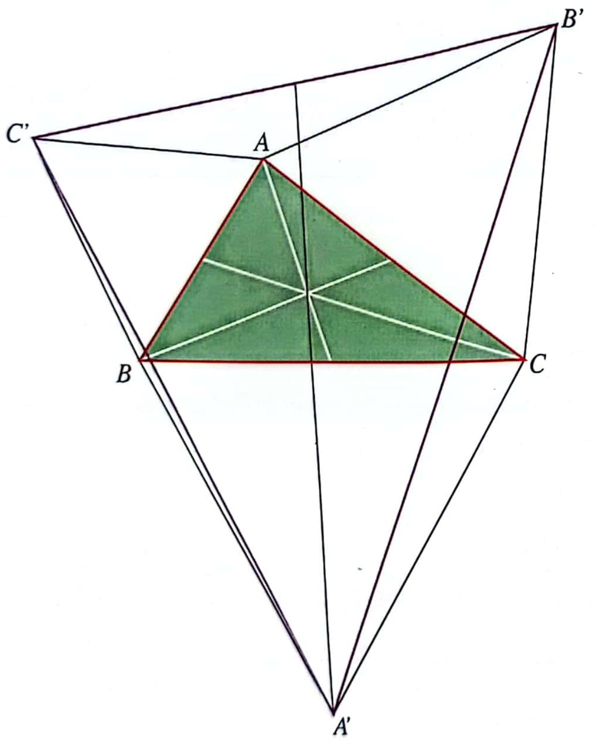
3° Déterminez en particulier, à partir de la formule précédente, l'affixe de l'isobarycentre G des points $A_1, ..., A_n$.

4° Déduisez-en l'affixe du centre de gravité du triangle ABC où :
$A(1+2\mathrm{i})$, $B(-2+\mathrm{i})$, $C(1+3\mathrm{i})$.

5° Soit A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $z_0 = 1$, $z_1 = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$, $z_2 = e^{4\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$, $z_3 = e^{6\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$, $z_4 = e^{8\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$.
Déterminez l'affixe de l'isobarycentre du pentagone $A_0\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4$. Expliquez géométriquement le résultat obtenu.
(*Indication* : remarquez que les affixes des points A_i sont les racines cinquièmes de l'unité.)

2. Application à l'étude d'une configuration

Soit ABC un triangle de sens direct (la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est élément de $]0, \pi[$).
A l'extérieur du triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux directs $AC'B$, $BA'C$, $CB'A$, conformément à la figure ci-dessous.
On note a, b, c, a', b', c' les affixes des points A, B, C, A', B', C'.



1° Montrez que $\dfrac{a'-c}{b-c}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

Déduisez-en la formule : $a' = b\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + c\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2° Déterminez de même les affixes b' et c' des points B' et C'.

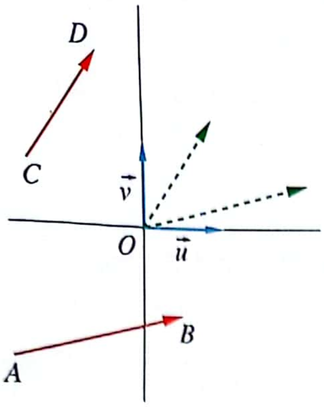
3° Calculez $a'+b'+c'$ en fonction de a, b, c et montrez que les triangles $A'B'C'$ et ABC ont même isobarycentre G.

4° *a*) Montrez que : $a' - a = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b'-b)$, et déduisez-en l'égalité : $AA' = BB'$.
b) Montrez l'égalité : $AA' = BB' = CC'$.

TP 5 Angle de deux vecteurs et condition d'orthogonalité

L'objectif de ce TP est d'obtenir l'angle de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ à l'aide d'un argument, et d'en déduire une condition caractérisant l'orthogonalité de ces deux vecteurs.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, dans lequel les points A, B, C, D ont pour affixes respectives a, b, c, d.
On suppose A distinct de B et C distinct de D. L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est alors défini.



1. Détermination de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

1° Exprimez l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ en fonction des angles $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{CD})$.

2° Déduisez-en la formule : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3° Soit A, B, C, D les points d'affixes :

$a = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}, \quad b = 3 + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}, \quad c = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}, \quad d = 3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i}.$

Déterminez $\arg \dfrac{d-c}{b-a}$, et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

2. Condition d'orthogonalité

1° Montrez que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

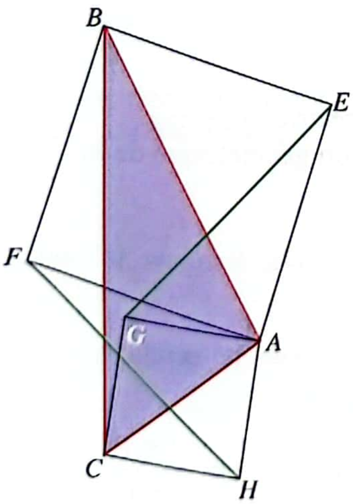
2° Traduisez cette relation à l'aide d'un argument.

3° Déduisez-en la condition d'orthogonalité : « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur ».

4° Soit A, B, C, D les points d'affixes respectives : $a = 1 - \mathrm{i}$, $b = 3 + 2\mathrm{i}$, $c = -4 - \mathrm{i}$, $d = 2 - 5\mathrm{i}$.
Représentez les points A, B, C, D et montrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Illustrez ce résultat par une figure.

3. Application à l'étude d'une configuration

1° Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A de sens direct.
a, b, c étant les affixes de A, B, C, déterminez le module et un argument du quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$, et déduisez-en l'égalité : $c - a = \mathrm{i}(b-a)$.



2° On considère le triangle ABC de sens direct ci-contre. On construit les points E, F, G, H tels que $AEBF$ et $AGCH$ soient des carrés de sens direct.

a) Mesurez EG et FH. Que constatez-vous ?
Estimez sur la figure l'angle formé par les deux segments $[EG]$ et $[FH]$.
Quelle conjecture pouvez-vous émettre à propos de ces deux segments ?

b) Quelle est la nature des triangles BAE et BAF ?
Déduisez-en les affixes de E et de F en fonction de celles de A et de B.
Effectuez un travail analogue dans l'autre carré.

c) Exprimez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$ en fonction de a, b, c.

d) Déduisez-en que : $EG = FH$ et $(EG) \perp (FH)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non nuls, a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D.

- **$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) + k\,2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.**
- **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur.**

TP6 Colinéarité de deux vecteurs

L'objectif de ce TP est d'interpréter la colinéarité de deux vecteurs à l'aide des nombres complexes.

1. Condition de colinéarité

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. On suppose que $\overrightarrow{AB}$ est non nul. On note a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D.

1° Montrez que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel λ tel que :

$d - c = \lambda(b - a)$.

2° Montrez alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si, le nombre $\dfrac{d-c}{b-a}$ est réel.

2. Premier exemple : étude d'une configuration

1° Soit A, B, C, D les points d'affixes respectives :

$4i$, $1 + 5i$, $-1 + i$, $4 + 6i$.

a) Représentez les points A, B, C, D.

b) Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

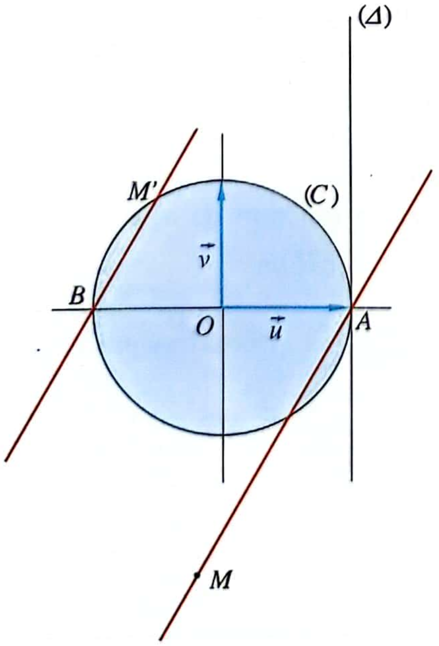
2° Calculez les distances AC et BD.

3° Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

3. Deuxième exemple : un problème de construction

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point M du plan d'affixe z distincte de 1, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}.$$



On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
On se propose de donner une construction géométrique de M' à partir de M.

1° Déterminez l'ensemble des points M pour lesquels M' est confondu avec le point B.

2° Montrez que le point M' est situé sur le cercle trigonométrique.

3° *a)* Soit r le nombre complexe défini par : $r = \dfrac{z'+1}{z+1}$.

Calculez r en fonction de z et montrez que r est un nombre réel.

b) Déduisez-en la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

4° On suppose M non situé sur la droite d'équation $x = 1$.
Utilisez les questions précédentes pour justifier la construction géométrique du point M' connaissant M, représentée par la figure ci-contre.

Comment utiliser les nombres complexes

En trigonométrie

1

Pour factoriser $a \cos x + b \sin x$

Si $r = |a + ib|$ et $\theta = \arg(a + ib)$ alors :
$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta)$.

En géométrie

2

Soit A, B, C, D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D.

Pour démontrer une orthogonalité

$(AB) \perp (CD)$ si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur.

Pour démontrer un parallélisme

$(AB) /\!/ (CD)$ si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ réel non nul.

1 ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

COMMENTAIRE
Il s'agit là de l'application directe de la méthode vue au TP2. Ensuite il faut savoir résoudre une équation du type $\cos x = \cos a$.

UNE SOLUTION

$|\sqrt{3} - i| = 2$;

$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; donc :

$\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$.

On obtient ainsi : $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

L'équation à résoudre est équivalente à :

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ soit $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$, d'où :

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{3} + k\,2\pi \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{2} + k\,2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2 RACINES n-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

1° Calculez $(1+i)^3$.

2° Déduisez-en la résolution de l'équation $z^3 = 2(1-i)$.

3° *a*) Écrivez $2(1-i)$ sous forme trigonométrique.

b) Déduisez des questions précédentes la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

COMMENTAIRE
Il s'agit là d'un exercice très classique.
Le calcul du 1° donne les éléments pour répondre au 2°, en suggérant une racine troisième de $2(1-i)$.
Dans le 3°, on retrouve la démarche du TP3.

UNE SOLUTION

1° $(1+i)^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2(1-i)$.

2° Du 1°, on déduit que $-1-i$ est une racine troisième de $2(1-i)$.
On sait que l'on aura toutes les racines troisièmes de $2(1-i)$ en multipliant $-1-i$ par les racines troisièmes de l'unité : $1, j, \bar{j}$.

$$(-1-i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$(-1-i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Les solutions de l'équation sont donc $-1-i$ et les deux nombres ci-dessus.

3° *a*) $|2(1-i)| = 2\sqrt{2}$;

$$2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

b) Reprenons la résolution de l'équation du 2°, en utilisant la forme trigonométrique (voir TP3, p. 70).

Posons $z = re^{i\theta}$.

$z^3 = 2\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ équivaut à : $r^3 e^{i3\theta} = 2\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$,

soit $\begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{-\pi}{4} + k\,2\pi \end{cases}$ ou $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{-\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D'où les solutions : $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$; $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

On a évidemment : $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -1-i$; il reste à identifier les deux autres solutions.

$\frac{-\pi}{12} \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) > 0$; on doit avoir :

$\mathrm{Re}\left[2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{-\pi}{12}\right)}\right] > 0$.

$\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{7\pi}{12} < 0$; on doit avoir :

$\mathrm{Re}\left[2\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}\right] < 0$.

Cela permet d'écrire : $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

d'où $e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$.

On en déduit : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

3 Nombres complexes et application ponctuelle

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe : $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right) z - \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right) \bar{z}$.

On note f l'application définie par $f(M) = M'$.

1° Pour $z = 2 + 3\mathrm{i}$, calculez z', et placez les points M et M' sur une figure.

2° Montrez que z' est imaginaire pur, ou nul.

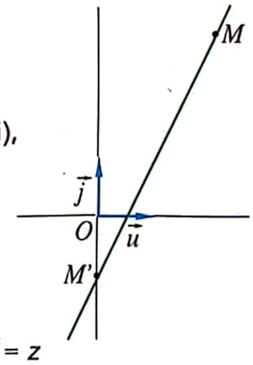
3° Calculez le quotient $\dfrac{z' - z}{1 + 2\mathrm{i}}$ et déduisez-en que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u} + 2\vec{v}$.

4° Expliquez comment, connaissant le point M, on construit le point M'. Quelle est la nature de f?

Commentaire

Il s'agit ici de prouver la colinéarité de deux vecteurs : $\overrightarrow{MM'}$ d'affixe $z' - z$, et $\vec{u} + 2\vec{v}$ d'affixe $1 + 2\mathrm{i}$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{z' - z}{1 + 2\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

Une solution abrégée



1° $z = 2 + 3\mathrm{i}$, d'où :

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right)(2 + 3\mathrm{i}) - \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)(2 - 3\mathrm{i}),$$

$z' = -\mathrm{i}$. M' a pour affixe $-\mathrm{i}$.

2° Pour montrer que z' est imaginaire pur, calculons $\bar{z}'$.

$$\bar{z}' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right) \bar{z} - \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right) z \quad \text{car} \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$\bar{z}' = -z'$, d'où $z' + \bar{z}' = 0$, $2 \operatorname{Re} z' = 0$,
z' est imaginaire pur, ou nul.

3° On trouve : $\dfrac{z' - z}{1 + 2\mathrm{i}} = -\dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$;

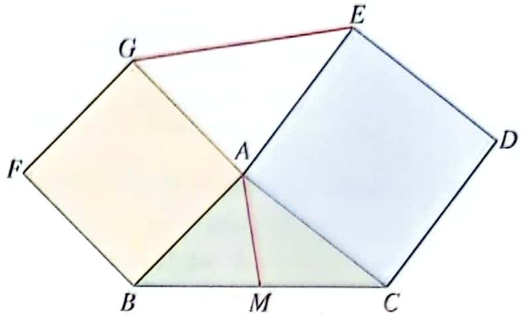
$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ est réel, donc $\dfrac{z' - z}{1 + 2\mathrm{i}}$ est réel.

Or $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, $1 + 2\mathrm{i}$ l'affixe du vecteur $\vec{u} + 2\vec{v}$. La condition : « $\dfrac{z' - z}{1 + 2\mathrm{i}}$ réel », traduit la colinéarité de ces deux vecteurs.

4° D'après 2°, M' appartient à l'axe $(y'Oy)$.
D'après 3°, M' appartient à la droite (Δ_M) passant par M, de vecteur directeur $\vec{u} + 2\vec{v}$.
M' est donc le point d'intersection de ces deux droites, et f est la projection ponctuelle sur $(y'Oy)$ parallèlement à $\vec{u} + 2\vec{v}$.

4 Nombres complexes et configuration

Soit ABC un triangle de sens direct. Sur ses côtés on construit deux carrés de sens direct : $ACDE$ et $BAGF$. Soit M le milieu du côté $[BC]$.
Démontrez que : $EG = 2AM$ et $(AM) \perp (EG)$.



Commentaire

**Nous allons traduire les données à l'aide des affixes a, b, c, g, ... des points A, B, C, G, ...
L'affixe du milieu de $[BC]$ s'obtient directement en fonction de b et c.
Pour obtenir l'affixe e du point E, on écrira :**

$$\arg \frac{e - a}{c - a} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad |e - a| = |c - a|,$$

relations qui traduisent les égalités :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2}, \qquad AC = AE.$$

On raisonne de même pour g. On détermine alors les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Une solution

$ACDE$ est un carré de sens direct donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $AC = AE$.

Le nombre $\dfrac{e - a}{c - a}$ est de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$, il vaut donc $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, soit i. D'où : $e - a = \mathrm{i}(c - a)$.

De même : $ABFG$ est un carré de sens indirect, donc $AG = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

$$\left|\frac{g - a}{b - a}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \frac{g - a}{b - a} = -\frac{\pi}{2}.$$

D'où : $\dfrac{g - a}{b - a} = -\mathrm{i}$, $g - a = -\mathrm{i}(b - a)$.

$e - g = (e - a) - (g - a) = \mathrm{i}(c - a) + \mathrm{i}(b - a)$,
$e - g = \mathrm{i}[(c - a) + (b - a)] = 2\mathrm{i}(m - a)$.

On a donc : $\dfrac{e - g}{m - a} = 2\mathrm{i}$. Il en résulte que :

$$\left|\frac{e - g}{m - a}\right| = 2 \quad \text{donc} \quad \frac{EG}{AM} = 2 \quad \text{et} \quad EG = 2AM.$$

$$\arg \frac{e - g}{m - a} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \quad \text{donc} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GE}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

et $(AM) \perp (EG)$.

Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm. On considère les trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts a, b et c tels que $|a| = |b| = |c|$. On désigne par A l'image dans (P) de a, par B celle de b et par C celle de c. On note H le point d'affixe $a + b + c$.
Le but de l'exercice est de montrer que H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.

1° a) Soit $w = \bar{b}c - b\bar{c}$.
Exprimer $\bar{w}$ à l'aide de w. En déduire que w est un nombre imaginaire pur, ou nul.

b) Montrer à l'aide de *a)* que $(b + c)(\bar{b} - \bar{c})$ et $\dfrac{b+c}{b-c}$ sont des nombres imaginaires purs, ou nuls.

2° a) Exprimer, en fonction de a, de b et de c, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) Utiliser *a)* et 1° *b)* pour montrer que la droite (AH) est la hauteur passant par A du triangle ABC.

c) Expliquer, sans calcul supplémentaire, pourquoi H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.

3° Placer les points A, B, C et H dans le plan (P) en donnant à a la valeur $\sqrt{3} + i$, à b la valeur $-1 + i\sqrt{3}$ et à c la valeur $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

(Bac 1991)

Analyse de l'énoncé

Il s'agit ici d'utiliser les propriétés de la conjugaison et d'interpréter le résultat obtenu : $\dfrac{b+c}{b-c}$ imaginaire pur, comme une condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

Une solution

1° *a)* $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. Le conjugué d'un produit étant le produit des conjugués, on obtient :

$\bar{w} = b\bar{c} - \bar{b}c$.

On remarque alors que $\bar{w} = -w$, donc w est imaginaire pur, ou égal à zéro ($\bar{w} + w = 2\,\mathrm{Re}(w)$ est nul).

b) $(b + c)(\bar{b} - \bar{c}) = b\bar{b} + \bar{b}c - \bar{c}b - c\bar{c}$.

Or $|b| = |c|$, donc $b\bar{b} = c\bar{c}$. On obtient ainsi :

$(b + c)(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{b}c - \bar{c}b = w$.

$(b + c)(\bar{b} + \bar{c})$ est donc imaginaire pur, ou nul.

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)(\overline{b-c})}{(b-c)(\overline{b-c})} = \frac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{|b-c|^2}.$$

On obtient alors : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

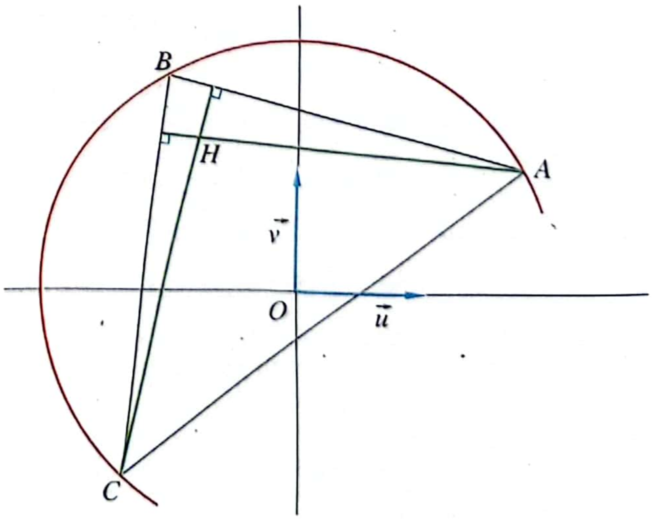
$|b-c|^2$ est réel, w imaginaire pur, ou nul, donc $\dfrac{w}{|b-c|^2}$ est imaginaire pur, ou nul. Donc $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur, ou nul.

2° *a)* Le point H a pour affixe $a + b + c$, donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour affixe $a + b + c - a$, soit $b + c$.
$\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $b - c$.

b) La condition $\dfrac{b+c}{b-c}$ imaginaire pur, en supposant $b + c$ non nul, est équivalente à l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$. Cela reste vrai si $b + c$ est nul, A et H sont alors confondus.
$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ étant orthogonaux, le point H appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

c) En permutant les rôles des sommets, et en utilisant le nombre complexe $\dfrac{a+c}{a-c}$, on montrerait que celui-ci est imaginaire pur, ou nul, ce qui assure l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CA}$. Le point H appartient alors à la hauteur issue de B du triangle ABC, et est ainsi l'orthocentre du triangle ABC.

3° Pour placer les points A, B et C on peut remarquer que : $a = \sqrt{3} + i = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, $b = 2\,e^{2i\frac{\pi}{3}}$, $c = 2e^{-\frac{3i\pi}{4}}$.



EXERCICES & PROBLÈMES

Q. C. M.

Dans chacun des exercices suivants, au moins une des réponses est exacte.

1 La différence $\cos 3x - \cos 2x$ se factorise en :

- $2\cos 5x \sin x$ .... ☐
- $-2\sin 5x \sin x$ .... ☐
- $-2\sin\frac{5}{2}x \sin\frac{x}{2}$ .... ☐

2 $\sin x - \cos x$ est égal à :

- $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ .... ☐
- $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ .... ☐
- $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ .... ☐

3 L'équation $z^3 = \mathrm{i}$ a pour solutions :

- $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, $e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ .... ☐
- $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$ .... ☐
- $-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}j$, $-\mathrm{i}\bar{j}$ .... ☐

Exercices 4 et 5 : *Soit A, B, C trois points d'affixes $a = 2 - i$, $b = -1 + i$, $c = 1 + 2i$, dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

4 Le barycentre du système $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 2)$ a pour affixe :

- $5 + 2\mathrm{i}$ .... ☐
- $2 + \mathrm{i}$ .... ☐
- $2{,}5 + \mathrm{i}$ .... ☐

5

- $a = -\mathrm{i}c$ .... ☐
- $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ .... ☐
- $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

TRIGONOMÉTRIE

6 Transformez en sommes les produits proposés :

1° $\sin 3x \cos 5x$. 2° $\cos 2x \cos 3x$.

3° $\sin x \sin 4x$.

7 Déterminez les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f définies par :

1° $f(x) = \sin 3x \cos 2x$.

2° $f(x) = \cos x \cos 5x$.

3° $f(x) = \sin x \cos 7x$.

Dans les exercices **8** *à* **12**, *résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations proposées.*

8 $\sin 3x - \sin 2x = \sin\frac{x}{2}$.

9 $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

10 $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x = 0$.

11 $\cos\frac{n+1}{2}x + \cos\frac{n-1}{2}x = \cos\frac{x}{2}$ (n entier).

12 $\sin\frac{n+1}{2}x - \sin\frac{n-1}{2}x = \sin x$ (n entier).

13 **Factorisation de $\cos a + \cos b$**

On se propose d'étudier une autre méthode de factorisation que celle vue en travaux pratiques.

1° *a*) Montrez que :

$(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 2[1 + \cos(a - b)]$.

b) Déduisez-en que : $|e^{ia} + e^{ib}|^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}$.

2° *a*) En utilisant la formule d'Euler pour $\cos\frac{a-b}{2}$,

démontrez que : $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\frac{a-b}{2}e^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$.

b) Retrouvez ainsi les factorisations de $\cos a + \cos b$ et de $\sin a + \sin b$.

14 Étudiez le signe de $\sin 3x + \sin 4x$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

15 **Application à l'étude d'une fonction trigonométrique**

Soit la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$.

1° Étudiez les variations de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

(Vous préciserez les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.)

2° a) Pour x élément de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, comparez $f(\pi - x)$ et $f(x)$.

b) Déduisez-en les variations de f sur $[0; \pi]$, puis sur $[-\pi; \pi]$.

c) Vérifiez vos résultats sur une calculatrice graphique ou sur un ordinateur.

16 ■ Mettez sous la forme $r\cos(x - \theta)$ les expressions :

1° $3\cos x - 3\sqrt{3}\sin x$.

2° $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x$.

3° $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x - (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x$.

Exercices 17 à 19 : *résolvez dans* $\mathbb{R}$ *les équations.*

17 ■ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

18 ■ $2\cos x - 3\sin x = 15$.

19 ■ $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

RACINES n-ièmes COMPLEXES

20 ■ Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations :

1° $z^4 = 1$. 2° $z^5 = 1$.
3° $z^6 = 1$. 4° $z^7 = 1$.

Représentez géométriquement les solutions trouvées.

21 ■ Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations :

1° $z^5 + 1 = 0$. 2° $z^5 + i = 0$.

22 ■ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 16i$.

23 ■ Écrivez sous forme trigonométrique $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ puis résolvez dans $\mathbb{C}$: $z^6 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

24 ■■ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 2(1 + i\sqrt{3})$.

25 ■■ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 8i$; déduisez-en $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

26 ■ Soit $P(z) = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5$.

1° Calculez $P(-1)$.

2° Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

AFFIXE D'UN BARYCENTRE

27 ■ Soit A et B les points d'affixes $4i$ et $-2-2i$, C et D les points d'affixes $-1+3i$ et $1+i$.

1° Déterminez les affixes des points I et J, milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

2° Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$|z + 1 - i| = |z - 2i|$.

3° Retrouvez le résultat précédent géométriquement.

28 ■ Soit A, B, C les points d'affixes respectives :

$a = 1 + i$, $b = -2 + 3i$, $c = 4 - i$.

Déterminez l'affixe du point D tel que l'isobarycentre du quadrilatère $ABCD$ soit le point O et placez les points A, B, C, D sur une figure.

29 ■ Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $1 + i$, $-2 - i$ et $-3i$.

1° Déterminez l'affixe de G, barycentre du système $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$.

2° Placez les points A, B, C et G sur une figure.

30 ■ A, B, C sont les points d'affixes :

$a = 1 - i$, $b = 2 + 3i$, $c = 3 + i$,

A', B', C' les points d'affixes :

$a' = -1 + 3i$, $b' = 3 - i$, $c' = 4 + i$.

1° Déterminez l'affixe de l'isobarycentre de chacun des triangles ABC et $A'B'C'$. Que remarquez-vous ?

2° Retrouvez le résultat en déterminant l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

ANGLES DE VECTEURS

31 ■ Soit A, B, C les points d'affixes respectives :

$a = 1 + i$, $b = 1 + (1 + \sqrt{3})i$, $c = (1 + \sqrt{3})i$.

Déterminez les angles de vecteurs :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

32 ■ Soit A et B les points d'affixes respectives $-1 - i$ et 1.

Déterminez l'ensemble des points C tels que ABC soit un triangle équilatéral.

(On envisagera les deux cas : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-\pi}{3}$.)

VECTEURS COLINÉAIRES ET VECTEURS ORTHOGONAUX

■

33 Soit M le point d'abscisse α de la droite (D) d'équation $y = x$ et A le point d'affixe i.

1° Déterminez l'affixe Z du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

2° Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $1 + 2i$.

Calculez le quotient $\dfrac{Z}{1+2i}$ et déterminez la valeur de α pour laquelle $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

■

34 On considère un triangle ABC. On note L, M, N et P les points tels que :

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Exprimez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{LN}$ et $\overrightarrow{PM}$ en fonction de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$. Déduisez-en la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{LN}$ et $\overrightarrow{PM}$.

■■

35 1° On considère un triangle OMN, rectangle en O. On note θ l'angle $\widehat{OMN}$, O l'origine du repère.

a) Calculez le rapport $\dfrac{ON}{OM}$.

b) En utilisant l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, exprimez l'affixe du vecteur $\overrightarrow{ON}$ en fonction de celle du vecteur $\overrightarrow{OM}$. (Attention, il y a deux cas de figure.)

2° Mêmes questions qu'au 1°, pour un triangle ABC rectangle en A. (Vous pourrez utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.)

■■■

36 Soit (C) le cercle de centre $A(1, 0)$, de rayon 1. Pour tout point M distinct de O du cercle (C), on considère le point M', symétrique de M par rapport à $(x'Ox)$.

1° Expliquez pourquoi l'affixe z du point M peut se mettre sous la forme : $z = 1 + e^{i\theta}$ $\quad (\theta \in]-\pi\,;\pi[)$.

2° Déterminez l'affixe z' de M'.

3° Calculez le quotient $\dfrac{z}{z'-1}$ en fonction de θ.

4° Déduisez-en les points M de (C) pour lesquels :

a) $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS

■

37 Soit A d'affixe $-i$, B d'affixe 2.

1° Déterminez les points C et D tels que $ABCD$ soit un carré de sens direct.

2° Déterminez l'affixe du centre de gravité de ce carré.

3° Déterminez les longueurs des côtés et des diagonales de ce carré.

■

38 Soit trois points A, B, C du plan, d'affixes respectives :

$1 + i, \quad 2i, \quad 2(1+i)$.

1° Montrez que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2° Déterminez l'affixe du point D tel que $OBCD$ soit un carré.

3° Soit $OB'C'D'$ l'image de $OBCD$ par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Déterminez les affixes de B', C', D' et du centre A' de ce carré.

4° Soit A_1 et A'_1 les symétriques de A et A', par rapport à la droite (OD). Calculez les affixes de A_1 et A'_1. Quelle est la nature du polygone $AA'A'_1A_1$?

5° Déterminez les affixes des sommets du polygone transformé de $AA'A'_1A_1$ par r.
Vérifiez que cette figure est globalement invariante par les réflexions d'axes (OB) et (OD).

■■

39 Soit A et B deux points d'affixes respectives a et b $(a \neq 0)$ tels que le triangle OAB soit direct, isocèle rectangle en A. Soit M le point d'affixe a^2.

1° Déterminez le triangle OAB tel que M soit le milieu de $[OB]$.

2° Déterminez le triangle OAB tel que $OABM$ soit un carré.

PROBLÈMES

■■

40 **Nombres complexes et configurations.**
Soit ABC un triangle de sens direct. On construit extérieurement au secteur angulaire saillant $([AB), [AC))$ les segments $[AM]$, $[CN]$ et $[BP]$ tels que :

— $AM = BC$ et (AM) et (BC) perpendiculaires,

— $CN = CA$ et (CN) et (CA) perpendiculaires,

— $BP = BA$ et (BP) et (BA) perpendiculaires.

Soit a, b, c, m, n, p les affixes respectives des points A, B, C, M, N, P.

1° *a*) Montrez que $\quad p - c = i(m - b)$.

b) Montrez que $PC = MB$ et (PC) et (MB) sont perpendiculaires.

c) Montrez que $BN = MC$ et (BN) et (MC) sont perpendiculaires.

d) En considérant le triangle BMC, montrez que les trois droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes.

2° Soit K d'affixe k le milieu de $[AN]$ et L d'affixe ℓ le milieu de $[AP]$.

a) Montrez que $\quad m - k = -i(b - k)$.

b) Montrez que $\quad m - \ell = i(c - \ell)$.

c) Quelle est la nature des triangles BKM et MLC ?

41 ■■ Nombres complexes et configurations

Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts. On note I le milieu de $[BD]$, J le milieu de $[AC]$ et O l'isobarycentre de A, B, C, D. On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$, $(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB})$, $(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC})$, $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD})$

ont pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

Soit K le milieu de $[MP]$ et L le milieu de $[NQ]$. On se propose d'étudier la configuration (I, J, K, L).
A cet effet, on pourra prendre un repère orthonormal direct d'origine O et introduire les affixes a, b, c, d de A, B, C, D, les affixes m, n, p, q de M, N, P, Q et les affixes f, g, k, ℓ de I, J, K, L.

1° Déterminez le milieu de $[IJ]$.

2° Prouvez que $m(1-\mathrm{i}) = a - \mathrm{i}b$. Calculez de façon analogue n, p et q.

3° Déterminez l'isobarycentre de M, N, P, Q. Déduisez-en le milieu de $[KL]$.

4° Réalisez une figure soignée en prenant :

$a = -2 + 2\mathrm{i}$, $b = -2 - \mathrm{i}$, $c = -2\mathrm{i}$ et $d = 4 + \mathrm{i}$.

5° Soit r le quart de tour direct de centre O. Montrez que $r(J) = K$.

6° Caractérisez les configurations (A, B, C, D) telles que $I = J$.
Indiquez alors la position de K et de L et la nature de $MNPQ$. Ce cas étant écarté, prouvez que $IJKL$ est un carré de centre O. (Bac)

42 ■■■ Nombres complexes et configurations

On considère un rectangle $OABC$ tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$.

On note θ l'angle $\widehat{AOB}$.
La droite perpendiculaire à la droite (OB) en B coupe les droites (OA) et (OC) respectivement en D et E.
On note F le point tel que $ODFE$ soit un rectangle.
a, b, c, ... désigneront les affixes des points A, B, C, ... dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1° a) Démontrez que :

$OA = OD\cos^2\theta$ et $OC = OE\sin^2\theta$.

b) Déduisez-en que $a = d\cos^2\theta$ et $c = e\sin^2\theta$.

2° Démontrez que $a\sin\theta = \mathrm{i}c\cos\theta$.

3° En utilisant les nombres $e + d$ et $c - a$, démontrez que les droites (OF) et (AC) sont perpendiculaires.

43 ■■ Étude d'une configuration mobile

On considère un segment $[AB]$ de longueur 1, pouvant pivoter autour du point O, barycentre du système $(A, \sqrt{3})$, $(B, 1)$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On note :
θ l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$,
I le projeté orthogonal de B sur la droite $(O, \vec{u})$,
J le projeté orthogonal de A sur la droite $(O, \vec{v})$.

On se restreint au cas $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

On considère le rectangle $OIKJ$ construit à partir du triangle rectangle OIJ.

1° Exprimez son périmètre $p(\theta)$ et son aire $\mathbb{A}(\theta)$ en fonction de θ.

2° Pour quelle valeur de θ le périmètre est-il maximal ?

3° Pour quelle valeur de θ l'aire est-elle maximale ?

44 ■■ Existence d'un triangle connaissant les milieux des côtés

Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c.
On cherche s'il existe un triangle $M_1 M_2 M_3$ tel que A soit le milieu du segment $[M_1 M_2]$, B le milieu de $[M_2 M_3]$, C le milieu de $[M_3 M_1]$.

1° Montrez que M_1, M_2, M_3 sont solutions du problème posé si et seulement si leurs affixes z_1, z_2, z_3 vérifient le système (S) :

$$(S)\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_2 + z_3 = 2b \\ z_3 + z_1 = 2c \end{cases}$$

2° En résolvant le système (S), montrez que le problème a une solution unique.

3° *Application numérique* : $a = 1 + 3\mathrm{i}$, $b = -1 + 2\mathrm{i}$, $c = -\mathrm{i}$.
Déterminez M_1, M_2, M_3, et faites une figure illustrant le résultat.

45 ■■ Nombres complexes et réflexion plane

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point M d'affixe z, on associe le point M_1, symétrique de M par rapport à $(x'Ox)$, puis le point M_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis le point M', image de M_2 dans la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.

1° Déterminez les affixes z_1, z_2 des points M_1 et M_2, et montrez que l'affixe z' de M' vérifie :

$z' = \mathrm{i}\,\bar{z} + 1 - \mathrm{i}$.

2° On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M'.
Déterminez l'ensemble (D) des points invariants par f.

3° a) Calculez le quotient $\frac{z' - z}{1 + \mathrm{i}}$ et montrez qu'il est imaginaire pur ou nul. Déduisez-en que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (D).

4° Calculez, en fonction de z, l'affixe du milieu I du segment $[MM']$, et montrez que I appartient à (D).

5° Quelle est la nature de l'application f?

5 CALCUL VECTORIEL. COMPLÉMENTS

OBJECTIFS

- *Appliquer les règles du calcul vectoriel à la recherche de quelques lignes de niveau usuelles.*
- *Connaître les conditions d'alignements ou de cocyclicité de quatre points en termes d'angles de vecteurs.*
- *Savoir simplifier l'écriture* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$ *dans le cas où* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ *et dans le cas où* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

TRAVAUX Pratiques

TP1 Lignes de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ non nul

L'objectif de ce TP est d'étudier, suivant les valeurs du nombre réel k, l'ensemble des points M du plan (ou de l'espace) tels que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2 = k$ *; cet ensemble est appelé ligne de niveau k de l'application* $f : M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). *Portrait anonyme,* 1787. *Historisches Museum, Hanovre.*

Leibniz fut théologien, philosophe, diplomate et mathématicien.
Il est avec Newton le fondateur de l'analyse infinitésimale. On lui doit les notations de la différentielle et de l'intégrale.

1. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

ABC est un triangle tel que : $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.
α, β, et γ sont trois nombres réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
On pose : $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$.
On désigne par G le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ) (il existe car $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$).

- **Transformation de $f(M)$**

1° En décomposant MA^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$, MB^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$, MC^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$, montrez que :

$$f(M) = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}) + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2.$$

2° Déduisez-en que : $f(M) = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + f(G)$.

Cette relation s'appelle **formule de Leibniz** associée au système pondéré (A, α), (B, β), (C, γ).

- **Une méthode de calcul de $f(G)$**

En appliquant la formule de Leibniz lorsque M est en A, on obtient :
$f(A) = \beta AB^2 + \gamma AC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) AG^2 + f(G)$, soit encore :
$\alpha f(A) = \alpha(\beta c^2 + \gamma b^2) = (\alpha + \beta + \gamma)\alpha AG^2 + \alpha f(G)$.

1° Déterminez de la même manière $\beta f(B)$ puis $\gamma f(C)$.

2° En additionnant termes à termes les trois égalités obtenues, montrez que :

$$f(G) = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

- **Recherche de lignes de niveau**

Dans cette partie, on suppose que le triangle ABC est isocèle avec $a = 4$, $b = c = 6$.
Soit, pour tout point M, le nombre $f(M) = 3MA^2 - MB^2 + 2MC^2$.

1° Calculez le nombre $f(G)$ où G est le barycentre du système $(A, 3)$, $(B, -1)$, $(C, 2)$.

2° Discutez, suivant les valeurs du nombre k, la nature de :
- (E_k), ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.
- (E'_k), ensemble des points M de l'espace tels que $f(M) = k$.

3° Quelle valeur faut-il donner à k pour que A appartienne à (E_k) ?

2. Cas général

D'une manière générale vous retiendrez que :

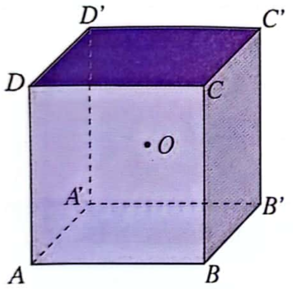
> • **Si G est le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ alors, pour tout point M du plan, on a :**
>
> $$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i GA_i^2,$$
>
> **soit** $$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) MG^2 + f(G).$$
>
> • **Les lignes de niveau k de l'application f sont, soit l'ensemble vide, soit des cercles (dans le plan), soit des sphères (dans l'espace), de centres G.**

3. Applications

1° Soit ABC un triangle équilatéral de côtés de longueur a.

a) Déterminez un triplet de nombres (α, β, γ) tel que le point I défini par $\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{CB}$ soit le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ).

b) Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que :
$MA^2 + 2\,MB^2 - 2\,MC^2 = -\,a^2$.
Montrez qu'il passe par B, et représentez-le.



2° Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube de centre O, d'arêtes de longueur a.
Soit f l'application définie, pour tout point M de l'espace $(\mathcal{E})$, par :
$f(M) = MA^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD^2$.

a) Montrez que : $f(M) = 4\,MO^2 + OA^2 + OB'^2 + OC'^2 + OD^2$.

b) Calculez alors $f(O)$.

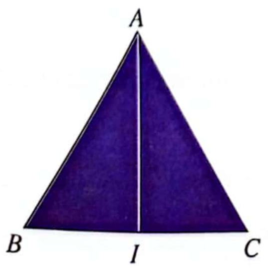
c) Déterminez l'ensemble des points M de $(\mathcal{E})$ tels que : $f(M) = 6a^2$.
Montrez que c'est la sphère circonscrite au cube.

TP2 Lignes de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ nul

Nous reprenons les notations du TP précédent.

Comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est nul, le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur $\vec{V}$ constant.

1. Étude d'un exemple



Soit a un nombre réel strictement positif, ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a, I le milieu de $[BC]$.
A tout point M du plan, on associe $f(M)$ avec :
$f(M) = 2MA^2 - MB^2 - MC^2$.

1° Calculez le vecteur $\vec{V}$ tel que $\vec{V} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

2° Montrez que, pour tout point M, on a : $f(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{V} + f(A)$.
(On pourra décomposer MB^2 en $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2$ et MC^2 en $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2$.)

3° a) Calculez $f(A)$ en fonction de a.

b) Déduisez-en que l'ensemble (E) des points M tels que $f(M) = -2a^2$ est une droite perpendiculaire à (AI).

4° Cherchons maintenant l'ensemble (E') des points M tels que $f(M) = a^2$. On désigne par (D) la droite de repère $(A, \vec{V})$ et, pour tout point M, on note H son projeté orthogonal sur (D). Il existe donc un nombre réel α tel que $\overrightarrow{AH} = \alpha\vec{V}$.

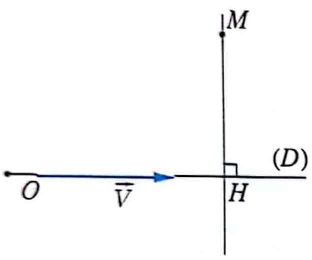
a) Déterminez α pour que $f(H) = a^2$.

b) Montrez que « M appartient à (E') » équivaut à « $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{V} = 0$ ». Déduisez-en l'ensemble (E').
Vous remarquez que les ensembles (E) et (E') sont deux droites parallèles orthogonales au vecteur $\vec{V}$.

2. Étude générale (dans le plan)

1° En choisissant un point O fixé du plan, et en décomposant $\overrightarrow{MA_i}^2$ en $(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2$, montrez la relation : $f(M) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{V} + f(O)$.

2° On suppose $\vec{V}$ égal au vecteur nul. Déterminez alors, suivant k, les lignes de niveau k de f.



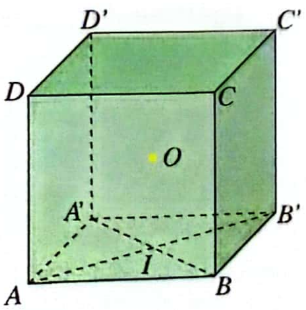
3° On suppose $\vec{V}$ distinct du vecteur nul.
$f(M) = k$ équivaut alors à $2\overrightarrow{OM} \cdot \vec{V} = f(O) - k$.
Soit (D) la droite passant par O et dont un vecteur directeur est $\vec{V}$.
a) Démontrez qu'il existe un unique point H de (D) tel que $f(H) = k$. (On pourra poser : $\overrightarrow{OH} = \lambda\vec{V}$, et déterminer λ tel que $f(H) = k$.)
b) Montrez que : $f(M) = k$ équivaut à $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{V} = 0$.
c) Déterminez alors, dans le plan, les lignes de niveau k de f.

Dans le plan, soit (A_i, λ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, n points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Posons : $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ et $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$.

- **Si $\vec{V} = \vec{0}$, alors l'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit le plan.**
- **Si $\vec{V} \neq \vec{0}$, alors la ligne de niveau k de f est une droite orthogonale à $\vec{V}$.**

3. Un exemple dans l'espace

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube de centre O et soit f définie par :
$f(M) = MA^2 + MB'^2 - MC'^2 - MD^2$.



1° Soit $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB'} - \overrightarrow{MC'} - \overrightarrow{MD}$.
Montrez que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{V(M)}$ est un vecteur constant égal à $2\overrightarrow{DA}$.

2° Calculez $f(O)$ et déduisez-en la relation : $f(M) = 4\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{DA}$.

3° On cherche les points de l'espace tels que $f(M) = -2a^2$. Soit I le milieu de $[AB']$.

a) Montrez que $\overrightarrow{IO}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DA}$, et calculez $f(I)$.

b) Déduisez-en que « l'ensemble » de niveau $-2a^2$ de f est le plan (ABB').

4° Retrouvez ce résultat en écrivant f sous la forme :
$f(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{V} + f(A)$ et en calculant $f(A)$.

TP3 Lignes de niveau de $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$

A et B sont deux points du plan, k un nombre réel positif.

L'objectif de ce TP est de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Comme MA et MB sont des distances, nous nous limiterons à $k > 0$.

1. Étude générale

1° On suppose $k = 1$.

$\dfrac{MA}{MB} = 1$ équivaut à $MA = MB$. Déterminez alors l'ensemble (E_1).

Nous retrouverons ce résultat dans la suite.

2° Montrez que $\dfrac{MA}{MB} = k$ équivaut à $MA^2 - k^2\,MB^2 = 0$.

On pose $f(M) = MA^2 - k^2\,MB^2$. L'ensemble (E_k) cherché est l'ensemble des points M tels que $f(M) = 0$.

a) On suppose $k \neq 1$. D'après les résultats du TP1, quelle est la nature de (E_k) ?

b) On suppose $k = 1$. D'après les résultats du TP2, quelle est la nature de (E_1) ? En remarquant que le milieu de $[AB]$ est un point de (E_1), retrouvez le résultat de la question **1°**.

3° On suppose k distinct de 1.
Soit G_1 le barycentre du système $(A, 1)$, (B, k),
G_2 le barycentre du système $(A, 1)$, $(B, -k)$.

a) Justifiez l'existence de G_1 et G_2.

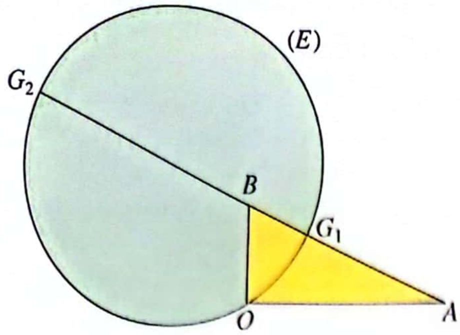
b) Montrez que $\dfrac{MA}{MB} = k$ équivaut à $\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$.

c) Déduisez-en que (E_k) est le cercle de diamètre $[G_1\,G_2]$.

Remarque. D'après le TP1, vous savez que le centre de ce cercle est le point G, barycentre de $(A, 1)$, $(B, -k^2)$.

- **L'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 1$ est la médiatrice de $[AB]$.**
- **L'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ $(k > 0, k \neq 1)$ est le cercle de diamètre $[G_1\,G_2]$, G_1 et G_2 étant respectivement les barycentres des systèmes $(A, 1)$, (B, k) et $(A, 1)$, $(B, -k)$.**

2. Application



Soit a un nombre réel strictement positif, OAB un triangle rectangle en O tel que : $OA = 2a$, $OB = a$.

On cherche à déterminer et à construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\dfrac{MA}{MB} = 2$.

1° Montrez que O appartient à (E).

2° Soit G_1 le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$.
G_2 le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -2)$.

a) Montrez que G_2 est le symétrique de A par rapport à B. Construisez alors G_2.

b) Déterminez la nature de (E). Déduisez-en que G_1 est situé sur la droite orthogonale à (OG_2) passant par O. Construisez alors G_1, puis (E).

TP4 Lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ modulo π

LE SAVIEZ-VOUS ?
Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont non nuls et colinéaires et si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont non nuls et colinéaires alors :
$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ modulo π
que l'on note aussi :
$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')\ \ (\pi)$.

1. Calcul du sinus d'un angle de vecteurs

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, d'affixes respectives $x + iy$, $x' + iy'$ (x, y, x', y' réels).

La formule donnant $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\text{dét}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \text{ où } \text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Traduisez-la à l'aide des coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

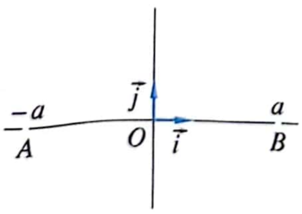
2. Ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ \ (\pi)$ où α est un nombre réel donné

Soit A et B deux points distincts du plan, M un point distinct de A et de B. L'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est alors défini.

Pour tout nombre réel α, notons (Γ_α) l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ (\pi)$.

1° On suppose $\alpha = 0\ (\pi)$.
Montrez que (Γ_α) est alors la droite (AB), privée de A et de B.

2° On suppose α non nul modulo π.



Choisissons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct du plan : prenons pour origine le milieu O de $[AB]$, pour vecteur $\vec{i}$ le vecteur $\dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$.

Posons : $AB = 2a$. A et B ont alors pour coordonnées respectives $(-a, 0)$ et $(a, 0)$, M a pour coordonnées (x, y).

a) Montrez que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ (\pi)$ équivaut à $\sin[(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \alpha] = 0$.

b) En développant $\sin[(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \alpha]$, montrez que M appartient à (Γ_α) si et seulement si :

$(\cos\alpha)\,\text{dét}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - (\sin\alpha)\,\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$

c) Montrez alors que (Γ_α) est l'ensemble des points $M(x, y)$, distincts de A et de B, tels que : $x^2 + y^2 - 2ay\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - a^2 = 0$.

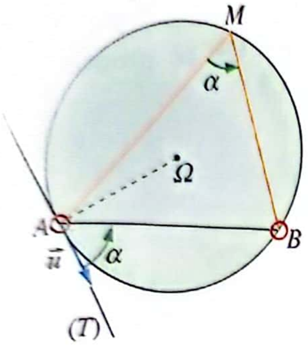
d) Notons $(\mathcal{C}_\alpha)$ le cercle d'équation $\quad x^2 + y^2 - 2ay \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - a^2 = 0.$

Montrez que A et B appartiennent à $(\mathcal{C}_\alpha)$. Donc : $\quad (\Gamma_\alpha) = (\mathcal{C}_\alpha) - \{A, B\}$.

Déterminez le centre Ω de ce cercle. Quel est le point Ω lorsque α vaut $\dfrac{\pi}{2}$?

(Quel résultat classique retrouvez-vous ?)

e) La tangente en A à $(\mathcal{C}_\alpha)$ est la droite orthogonale à (ΩA) passant par A. Montrez qu'elle admet pour vecteur directeur $\vec{u}$ avec :
$\vec{u} = (\cos \alpha)\,\vec{i} - (\sin \alpha)\,\vec{j}$.
Déterminez l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ modulo π.
Déduisez-en une construction géométrique du centre Ω de $(\mathcal{C}_\alpha)$.



Soit A et B deux points distincts, α un nombre réel non nul modulo π. L'ensemble (Γ_α) des points M du plan tels que $\quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ (\pi)$ est un cercle passant par A et B, privé de A et de B, tel que la tangente (T) en A à ce cercle ait pour vecteur directeur un vecteur $\vec{u}$ vérifiant :
$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \quad (\pi)$.

3. Applications

1° Soit A et B les points d'affixes respectives -1 et 1.

Déterminez l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z telle que $\dfrac{z-1}{z+1}$ ait pour argument $\dfrac{\pi}{3} \quad (\pi)$.

2° Montrez que cet ensemble contient le point C d'affixe $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.
Que représente (Γ) pour le triangle ABC ?

TP5 Condition d'alignement et de cocyclicité

Dans ce TP nous utiliserons le résultat du TP4.

1. Étude générale

A, B, C, D sont quatre points distincts du plan.

1° On suppose que A, B, C sont non alignés.

a) Quel est l'ensemble des points M tels que $\quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ modulo π ?

b) Déduisez-en que D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si, et seulement si, $\quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ modulo π.

2° On suppose que A, B, C sont alignés.
Montrez que D appartient à la droite (ABC) si, et seulement si, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ modulo π.

Quatre points distincts A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si $\quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$.

2. Exemples

- **Exemple 1.**

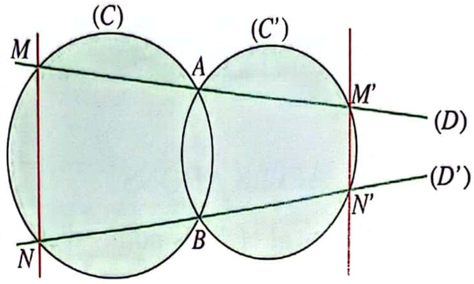
Soit A, B, C, D quatre points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c, d avec : $a = 1 + \mathrm{i}$, $b = 3 + \mathrm{i}$, $c = 3 + 3\mathrm{i}$, $d = 2 + \sqrt{2} + 2\mathrm{i}$.

Calculez $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ à l'aide des arguments de $\dfrac{b-c}{a-c}$ et $\dfrac{b-d}{a-d}$.

Montrez alors que A, B, C, D sont cocycliques.

- **Exemple 2.**

Soit (C) et (C') deux cercles sécants en deux points A et B.
Une droite (D) passant par A recoupe (C) en M et (C') en M' ; une droite (D') passant par B recoupe (C) en N et (C') en N'.
On suppose que les droites (MN) et $(M'N')$ existent. On se propose de montrer qu'elles sont parallèles.



a) Montrez que : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'})$ (π).

b) Justifiez que :
$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA})$ (π). Transformez de même $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'})$.

c) Montrez alors que $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = 0$ (π) et concluez.

TP6 Lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ modulo 2π

Nous reprenons les notations du TP4. Notons, pour tout nombre réel α, (Γ'_α) l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (2π).

1. Étude générale

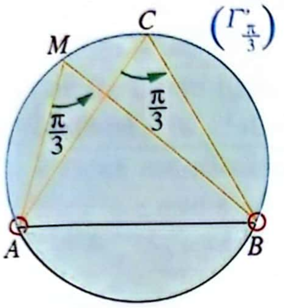
1° Montrez que (Γ'_α) est inclus dans l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (π), noté (Γ_α).

2° Soit M un point de (AB), distinct de A et de B.
Que vaut $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ lorsque M est sur le segment $[AB]$?
Que vaut $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ lorsque M est un point de la droite (AB), extérieur au segment $[AB]$?
Déduisez-en les ensembles (Γ'_0) et (Γ'_π). Faites des figures.

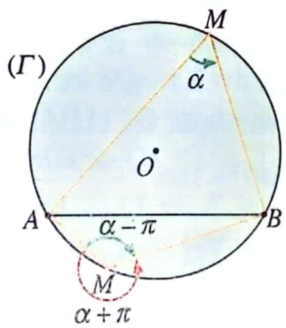
3° On suppose α non nul modulo π.
Soit M un point de (Γ_α). On a $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$, donc : soit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$, soit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + \pi \quad (2\pi)$.

a) Montrez que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$ équivaut, pour tout point M de (Γ_α), à la condition : $\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \sin \alpha > 0$.
En reprenant les calculs du TP précédent, exprimez, à l'aide des coordonnées de M, cette condition, et vérifiez qu'elle détermine un demi-plan ouvert de frontière (AB).

b) Montrez alors que l'ensemble (Γ'_α) est l'intersection de (Γ_α) avec le demi-plan ouvert d'équation $y \sin \alpha > 0$.



L'ensemble (Γ'_α) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$ est :
- **la droite (AB) privée de $[AB]$, si $\alpha = 0 \quad (2\pi)$;**
- **le segment $[AB]$ privé de A et de B, si $\alpha = \pi \quad (2\pi)$;**
- **un arc de cercle d'extrémités A et B, privé de A et B. On le détermine comme intersection de (Γ_α) et du demi-plan d'équation $y \sin \alpha > 0$.**



Remarque. Si $[AB]$ est une corde d'un cercle (Γ), et si M est un point variable de (Γ) distinct de A et de B, l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ varie de π (2π) lorsque l'on passe de l'un des arcs $\widehat{AB}$ au second.

2. Applications

1° Déterminez l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.
(Pour le construire, on pourra utiliser le point C tel que ABC soit rectangle en A, isocèle et direct).

2° Soit A et B les points d'affixes -1 et 1. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3$.
On cherche l'ensemble (E) des points M du plan tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre réel strictement négatif. Montrez que M appartient à (E) si et seulement si : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3} \quad \left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Prouvez alors que (E) est réunion des trois sous-ensembles, $\left(\Gamma'_{\frac{\pi}{3}}\right)$, (Γ'_π) et $\left(\Gamma'_{\frac{5\pi}{3}}\right)$, et admet la droite (AB) pour axe de symétrie. Représentez (E).

EXERCICES Commentés

1 LIGNE DE NIVEAU DE $M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$

ABC est un triangle, on pose : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
A' est le milieu du segment $[BC]$, B' celui de $[AC]$, C' celui de $[AB]$, G l'isobarycentre du triangle ABC.

1° Montrez que, pour tout point M du plan,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

2° En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, établissez que :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

3° On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BC]$. Montrez que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b, c.

COMMENTAIRE

- Au 1°, il faut décomposer MA^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$, puis MB^2 et MC^2, pour faire apparaître $3MG^2$. Il suffit alors de calculer $GA^2 + GB^2 + GC^2$... puis de penser au théorème de la médiane.
- Au 2°, il faut se laisser guider par le texte. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Pour faire apparaître $\overrightarrow{MA'}$, il faut regrouper $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, qui vaut $2\overrightarrow{MA'}$, et donc décomposer $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$ en $[\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})]^2$.

- Au 3°, l'énoncé propose de trouver un cercle de centre G ; il faut donc aboutir à une distance MG constante.

De plus, l'appartenance d'un point au cercle de diamètre $[AA']$ (respectivement $[BC]$), peut se traduire par : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$ (respectivement $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$).
Ces produits scalaires apparaissent au 2°.

UNE SOLUTION

1° $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$;

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\,MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, d'où :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \quad (1)$$

Or : $AG = \frac{2}{3} AA'$, donc $GA^2 = \frac{4}{9} AA'^2$.

Appliquons le « théorème de la médiane » :

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$, d'où :

$c^2 + b^2 = 2AA'^2 + \frac{a^2}{2}$;

$AA'^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$; et $GA^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$

Les sommets jouant des rôles symétriques, on a :

$GB^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}$, $GC^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{9}$,

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{9} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

En reportant dans l'égalité (1), on a bien :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

2° $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = (3\overrightarrow{MG})^2 = 9MG^2$.

$[\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})]^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MA'}$

(car $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA'}$). En égalant les deux expressions de $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, on a :

$$9MG^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$$

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

3° Si M est un point commun aux deux cercles de diamètres respectifs $[AA']$ et $[BC]$, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$ et $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$. D'où :

$$3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} = 0, \quad MG = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{18}}.$$

La distance MG est donc constante, M est bien sûr un cercle fixe de centre G, de rayon :

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{18}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

2 LIGNE DE NIVEAU $\frac{\pi}{2}$ DE $M \mapsto (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (2π)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $-2 + 3i$ et B le point d'affixe $1 - 3i$.
Soit M le point d'affixe z, $z \neq -2 + 3i$.

A z on associe le nombre complexe z' tel que : $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$.

1° Établissez une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

2° Déterminez et construisez l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Commentaire

■ **La question 1° vise à préparer la résolution de la question 2°. En effet, au 1°, on établit que : $\arg z' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi)$.**

Au 2°, la relation : $\arg z' = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ mène à l'étude d'une ligne de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ à 2π près.

■ **Deux connaissances sont requises :**

- **$\arg \frac{z - z_B}{z - z_A} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi)$;**
- **l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ est un des arcs d'extrémités A et B portés par le cercle de diamètre $[AB]$. (Attention, les points A et B sont exclus.)**

■ **Tout le préliminaire de l'énoncé est important. Remarquez les indications qu'il recèle :**

— le fait d'écrire les affixes de A et B juste avant celle de z' permet de faire l'association : $z' = \frac{z - z_B}{z - z_A}$;

— la précision $z \neq -2 + 3i$ est nécessaire à l'existence de z' ; cela attire l'attention sur le fait que, pour parler d'un argument de z', il faut que z' soit non nul et donc $z \neq 1 - 3i$.

Une solution

1° Pour qu'un argument de z' existe, il faut que z' existe et qu'il soit non nul. Il faut donc $z \neq 1 - 3i$ et $z \neq -2 + 3i$.

Le point M est alors distinct des points A et B et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ existe.

On a :

$$z' = \frac{z - z_B}{z - z_A}, \text{ donc } \quad \arg z' = \arg \frac{z - z_B}{z - z_A} \quad (2\pi),$$

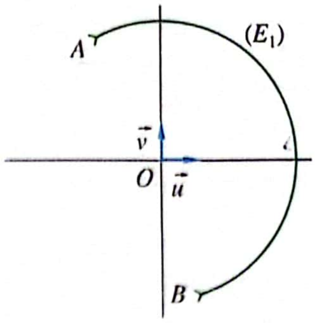
$$\arg z' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi),$$

d'après les connaissances du cours.

2° $\arg z' = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ équivaut à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ d'après la question 1°.

L'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ est un arc d'extrémités A et B porté par le cercle de diamètre $[AB]$ (lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ à 2π près).

Celui des deux demi-cercles qui est solution coupe l'axe $(O, \vec{u})$ en un point d'abscisse positive. L'ensemble (E) est le demi-cercle dessiné, les points A et B étant exclus.



3 Points cocycliques

ABC est un triangle, P, Q et R sont des points de (BC), (AC) et (AB) tels que les cercles circonscrits aux triangles AQR et CPQ soient sécants en deux points distincts Q et Ω. Montrez que le cercle circonscrit au triangle BRP passe par Ω.

Commentaire

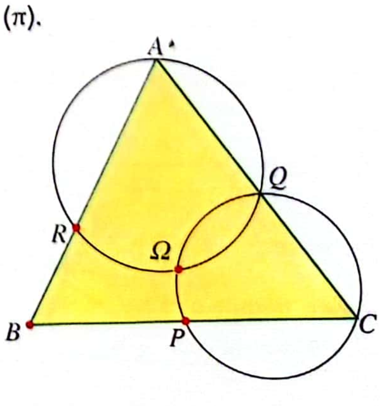
- **Pour montrer la cocyclicité des points Ω, B, R et P il suffit de montrer l'égalité : $(\overrightarrow{R\Omega}, \overrightarrow{RB}) = (\overrightarrow{P\Omega}, \overrightarrow{PB}) \ (\pi)$. Pour cela, on utilisera la cocyclicité connue des points Ω, A, Q et R d'une part, et celle des points Ω, C, P et Q d'autre part.**
- **Rappelons que si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ d'une part, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ d'autre part, sont colinéaires alors nous avons : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \ (\pi)$.**

Une solution

- $(\overrightarrow{R\Omega}, \overrightarrow{RA}) = (\overrightarrow{R\Omega}, \overrightarrow{RB})$ [π], car $\overrightarrow{RA}$ et $\overrightarrow{RB}$ colinéaires.
- Or Ω, R, A et Q sont cocycliques, donc : $(\overrightarrow{R\Omega}, \overrightarrow{RA}) = (\overrightarrow{Q\Omega}, \overrightarrow{QA}) \ (\pi)$.
- $(\overrightarrow{Q\Omega}, \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{Q\Omega}, \overrightarrow{QC}) \ (\pi)$, car $\overrightarrow{QA}$ et $\overrightarrow{QC}$ colinéaires.
- Or Ω, P, C et Q sont cocycliques donc : $(\overrightarrow{Q\Omega}, \overrightarrow{QC}) = (\overrightarrow{P\Omega}, \overrightarrow{PC}) \ (\pi)$.
- $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$ sont colinéaires donc : $(\overrightarrow{P\Omega}, \overrightarrow{PC}) = (\overrightarrow{P\Omega}, \overrightarrow{PB}) \quad (\pi)$.

De cette suite d'égalités on déduit que : $(\overrightarrow{R\Omega}, \overrightarrow{RB}) = (\overrightarrow{P\Omega}, \overrightarrow{PB})$ modulo π, ce qui signifie que Ω, B, R et P sont cocycliques, ou alignés.

Or B, R, P sont non alignés donc Ω, B, R sont cocycliques.



4 NOMBRES COMPLEXES ET POINTS COCYCLIQUES

Dans le plan complexe de repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\alpha = 1 - i$ et $\beta = 1 + i$. A tout point M d'affixe z, la fonction Φ associe le point M' d'affixe :

$$z' = 2 - \frac{2}{z} \quad \text{où } (z \neq 0).$$

1° Montrez que A et B sont invariants par Φ.

2° On considère un point M distinct de A et de B.

a) Montrez qu'il existe un nombre complexe u que l'on calculera tel que :

$$\frac{z' - \beta}{z' - \alpha} = u\frac{z - \beta}{z - \alpha}.$$

b) Déduisez-en que $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{M'A}{M'B}$ et donnez la relation entre $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$.

3° Pour tout point M, on note, $M' = \Phi(M)$ et $M'' = \Phi(M')$.
Montrez que A, B, M, M'' sont cocycliques ou alignés.

4° Soit la suite de points (M_n) définie par :

M_0 d'affixe i,

$M_{n+1} = \Phi(M_n)$ pour n élément de $\mathbb{N}$.

Montrez que tous les points de cette suite sont cocycliques.

COMMENTAIRE

• Les questions 1° et 2° permettent de déterminer des propriétés géométriques des points *A*, *B*, *M* et *M'*.

• Dans les questions 3° et 4°, on utilisera deux lignes de niveau très classiques, pour montrer la cocyclicité ou l'alignement de points.

UNE SOLUTION

Pour tout nombre complexe z, non nul, on pose :

$$z' = \varphi(z) = 2 - \frac{2}{z}.$$

1° $\varphi(\alpha) = \varphi(1 - i) = 1 - i = \alpha$ et

$\varphi(\beta) = \varphi(1 + i) = 1 + i = \beta$.

2° a) $z' - \alpha = \varphi(z) - \varphi(\alpha) = \left(2 - \dfrac{2}{z}\right) - \left(2 - \dfrac{2}{\alpha}\right) = \left(\dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{2}{z}\right)$,

soit $z' - \alpha = 2\dfrac{(z - \alpha)}{\alpha z}$.

De même, $z' - \beta = 2\dfrac{(z - \beta)}{\beta z}$.

On en déduit que :

$$\frac{z' - \beta}{z' - \alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{z - \beta}{z - \alpha} \quad \text{donc} \quad u = \frac{1 - i}{1 + i} = -i.$$

b) De la relation $\dfrac{z' - \beta}{z' - \alpha} = -i \times \dfrac{z - \beta}{z - \alpha}$ on tire :

• $\arg\left(\dfrac{z' - \beta}{z' - \alpha}\right) = \arg(-i) + \arg\left(\dfrac{z - \beta}{z - \alpha}\right) \quad (2\pi)$

$\arg\left(\dfrac{z' - \beta}{z' - \alpha}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \arg\left(\dfrac{z - \beta}{z - \alpha}\right) \quad (2\pi). \qquad (1)$

• $\dfrac{M'A}{M'B} = \left|\dfrac{z' - \alpha}{z' - \beta}\right| = |+i| \times \left|\dfrac{z - \alpha}{z - \beta}\right| = \dfrac{MA}{MB} \qquad (2)$

Comme $z - \beta$, $z - \alpha$, $z' - \beta$, $z' - \alpha$, sont les affixes respectives de $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM'}$, $\overrightarrow{AM'}$ on déduit de (1) :

$(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) = -\dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \ (2\pi)$.

3° $M' = \Phi(M)$ donc :

$(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) = -\dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \quad (2\pi)$;

$M'' = \Phi(M')$ donc :

$(\overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{BM''}) = -\dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) \quad (2\pi)$.

On en déduit : $(\overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{BM''}) = -\pi + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \quad (2\pi)$

d'où $\quad (\overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{BM''}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \quad (\pi)$.

Cette dernière relation signifie que A, B, M, M'' sont alignés ou cocycliques.

4° M_0 a pour affixe i.

a) Comme $M_1 = \Phi(M_0)$, on déduit de (2) que :

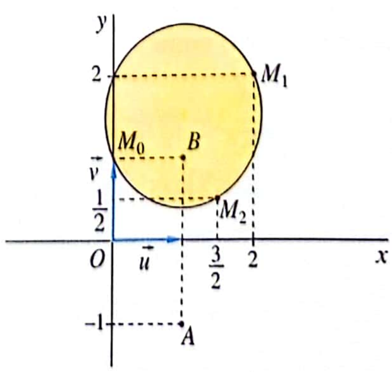
$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{M_0A}{M_0B} = \sqrt{5}.$$

De la même façon, on obtient : $\dfrac{M_2A}{M_2B} = \dfrac{M_1A}{M_1B} = \sqrt{5}$

et plus généralement :

$$\frac{M_nA}{M_nB} = \frac{M_{n-1}A}{M_{n-1}B} = \ldots\ldots = \frac{M_2A}{M_2B} = \frac{M_1A}{M_1B} = \frac{M_0A}{M_0B} = \sqrt{5}.$$

Tous les points M_n vérifient $\dfrac{M_nA}{M_nB} = \sqrt{5}$, donc ils appartiennent à l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = \sqrt{5}$. D'après le cours, cet ensemble est un cercle (C), donc les points M_n sont cocycliques.



Soit A, B, C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral.
On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
On pose : $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.
1° On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\,\overrightarrow{BC} + b^2\,\overrightarrow{CA} + c^2\,\overrightarrow{AB}$.
Montrer que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\,\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\,\overrightarrow{AB}$. En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.
2° Pour tout point M du plan on pose :
$f(M) = a^2\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'}$.
a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; calculer $f(O)$.
b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$. En déduire la valeur de $f(G)$.
c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que $f(M) = 0$. ***(Bac 1991)***

Analyse de l'énoncé

- **Dans la question 1°, il s'agit de prouver que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur non nul. On se souviendra pour cela de la définition d'une base de vecteurs du plan.**
- **Dans la question 2°, on recherche d'abord deux points particuliers de $\mathcal{D}$ puis, une fois la nature de $\mathcal{D}$ établie, on utilisera ces deux points pour préciser $\mathcal{D}$.**

On rappelle que, pour tout point M :
$2\,\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$,
où A' est le milieu de $[BC]$.

Une solution

1° Par utilisation de la relation de Chasles, on obtient :

$$\vec{u} = a^2\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + b^2\,\overrightarrow{CA} + c^2\,\overrightarrow{AB},$$

soit $\vec{u} = (a^2 - b^2)\,\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\,\overrightarrow{AB}$.

Le triangle ABC étant non aplati, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc une base des vecteurs du plan. Dans cette base les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(c^2 - a^2,\ a^2 - b^2)$.
L'une, au moins, est non nulle puisque ABC n'est pas équilatéral. Par conséquent, $\vec{u}$ est un vecteur non nul.

2° *a)* A' étant le milieu de $[BC]$ et O le centre du cercle circonscrit à ABC, les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. On a donc : $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA'} = 0$ et, pour des raisons analogues :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB'} = 0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC'} = 0$.

Par conséquent : $f(O) = 0$.

b) $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$, d'où :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{6}(b^2 - c^2).$$

De la même manière, on obtient :

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{GB'} = \frac{1}{6}(c^2 - a^2)$$

et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GC'} = \frac{1}{6}(a^2 - b^2)$.

On en déduit que :

$$f(G) = \frac{1}{6}\left[a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2)\right].$$

D'où $f(G) = 0$.

On remarquera que, ABC n'étant pas équilatéral, O et G sont distincts.

c) En écrivant :

$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA'}$

$\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB'}$

$\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC'}$

il vient :

$$f(M) = (a^2\,\overrightarrow{BC} + b^2\,\overrightarrow{CA} + c^2\,\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{MG} + (a^2\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{GB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GC'}).$$

Soit :

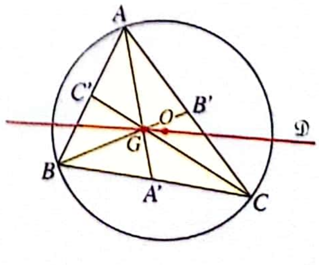
$f(M) = \vec{u}\cdot\overrightarrow{MG} + f(G)$

et, comme $f(G) = 0$,

$f(M) = \vec{u}\cdot\overrightarrow{MG}$.

$\vec{u}$ étant un vecteur non nul, l'ensemble $\mathcal{D}$ est la droite orthogonale à $\vec{u}$, passant par G.

O distinct de G, appartient à $\mathcal{D}$ car $f(O) = 0$, $\mathcal{D}$ est donc la droite (OG) appelée droite d'Euler du triangle.



EXERCICES & PROBLÈMES

Q.C.M.

Dans chacun des exercices suivants, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 A et B étant deux points du plan et I le milieu de $[AB]$, l'ensemble des points M du plan tels que :

- $\dfrac{MA}{MB} = 1$ est une droite passant par I .... ☐
- $MA^2 + MB^2 = 2AB^2$ est un cercle....................... ☐
- $MA^2 - MB^2 = AB^2$ est la médiatrice de $[AB]$.... ☐
- $\dfrac{MI}{MB} = \dfrac{1}{2}$ est un cercle passant par A.................... ☐

2 A, B, C étant des points du plan, l'ensemble (E) des points M tels que $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 0$ contient les points distincts O et Ω. Alors :

- (E) est le cercle de diamètre $[O\Omega]$ .... ☐
- (E) est une droite perpendiculaire à $(O\Omega)$ .... ☐
- (E) est la droite $(O\Omega)$.. ☐
- (E) est une droite orthogonale à $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ ..... ☐

3 (E) est l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = 2$.

Alors :

- (E) est un cercle dont le centre Ω est le milieu de $[AB]$ .... ☐
- (E) est un cercle dont le centre Ω est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -2)$ .... ☐
- (E) est un cercle dont le centre est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -4)$ .... ☐
- (E) est le cercle de diamètre (IJ) où I est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et J celui de $(A, -1)$, $(B, 2)$ .... ☐

4 Dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ (π) est :

- contenu dans la droite d'équation $y = x$........ ☐
- la demi-droite $]O, \vec{w})$ avec $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .... ☐
- la droite d'équation $y = x$ privée de O.............. ☐
- un arc du cercle de centre O et de rayon 1 .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

BARYCENTRES ET LIGNES DE NIVEAU

- **Dans le plan**

5 ■ Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que $BC = 2\sqrt{3}$ et $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{1}{2}$.

1° Calculez AC et AB. Faites une figure.

2° *a*) Construisez le point G barycentre du système de points $(A, 1)$, $(B, 3)$ et le point G', barycentre du système de points $(C, 1)$, $(D, 3)$.

b) Montrez que O est le milieu de $[GG']$, et calculez la distance OG.

3° Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|$.
Représentez-le.

4° Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = 108$.
Représentez-le.
Que représente cet ensemble pour le rectangle $ABCD$?

6 ■ ABC est un triangle équilatéral de côté a.

1° Construisez le barycentre G du système $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.

2° Déterminez l'ensemble (E_1) des points M du plan qui vérifient :
$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$. Construisez (E_1).

3° Déterminez l'ensemble (E_2) des points M du plan qui vérifient :

$2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \dfrac{3a^2}{2}$. Construisez (E_2).

7 ■ Soit $ABCD$ un carré. Déterminez un triplet de nombres réels (b, c, d) tel que A soit le barycentre du système (B, b), (C, c), (D, d).
Déterminez ensuite l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$.

8 ■■ Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$.

1° On définit, pour tout point M du plan, le nombre réel $f(M)$ par :
$f(M) = MB^2 + MC^2 - 2MA^2$.

a) Montrez que $f(M) = AB^2 + AC^2 + 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AA'}$.

b) Déduisez-en que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = AB^2 + AC^2$ est une droite orthogonale à la médiane (AA') du triangle ABC.

c) On suppose ABC rectangle en A, tel que $AB = 3$, $AC = 4$.
Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 25$.

2° Soit $g(M) = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$, I le milieu de $[AA']$.

a) Montrez que $g(M) = 4MI^2 + g(I)$.

b) On suppose à nouveau ABC rectangle en A, avec $AB = 3$, $AC = 4$. Calculez $g(A)$.
Déduisez-en l'ensemble des points M tels que $g(M) = 25$.

9 ■■ Dans un plan (P), on considère trois points A, B et C tels que : $AB = AC = 4a$ et $BC = 2a$ où a désigne un nombre réel strictement positif.
Soit λ un nombre réel différent de -2 et G_λ le barycentre du système (A, λ), $(B, 1)$, $(C, 1)$.

1° Déterminez l'ensemble (Δ) des points G_λ lorsque λ décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.

2° On suppose que $\lambda = -1$ et on appelle G le barycentre du système $(A, -1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.

a) Construisez G.

b) Déterminez l'ensemble (E) des points M du plan (P) tels que : $MB^2 + MC^2 = MA^2$.

3° a) Pour tout point M de (P) on pose :
$\vec{u}_M = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$.
Démontrez que $\vec{u}_M$ est un vecteur constant.

b) Déterminez l'ensemble (Γ) des points M du plan (P) tels que : $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 32a^2$.

10 ■■■ Dans un plan (P), on considère un triangle ABC et on désigne par G son centre de gravité.
Soit φ la fonction de (P) dans $\mathbb{R}$ définie pour tout point M par :
$\varphi(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$
et soit f la fonction $M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$ associée au système $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ (cf. TP1).

1° Démontrez que, quel que soit le point M :
$$\varphi(M) = 3MG^2 + \varphi(G) \quad \text{et} \quad \varphi(G) = -\frac{1}{2} f(G).$$

2° Calculez $f(G)$ en fonction de AB, AC, BC et déduisez-en l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG, AB, BC, CA.

3° Dans le cas particulier où le triangle ABC est équilatéral de côté a, déterminez l'ensemble des points M tels que : $\dfrac{a^2}{4} \leqslant \varphi(M) \leqslant \dfrac{a^2}{2}$.

11 ■■■ Soit $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone régulier, de centre O, inscrit dans un cercle de rayon unité.
Pour tout point M du plan, on définit $f(M)$ par :
$$f(M) = \sum_{i=1}^{6} MA_i^2.$$

1° Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 12$, puis tels que $f(M) = \dfrac{21}{2}$.

2° On note (Γ) la couronne circulaire définie par l'inégalité : $\dfrac{21}{2} \leqslant f(M) \leqslant 12$.
Montrez que (Γ) contient les côtés de l'hexagone.

• Dans l'espace

12 ■ On donne, dans l'espace $(\mathcal{E})$, quatre points A, B, C, D non coplanaires. I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, G le milieu de $[IJ]$.

1° Peut-on avoir $I = J$?
Existe-t-il des points de $(\mathcal{E})$ tels que :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$?

2° Déterminez l'ensemble (P_1) des points M de $(\mathcal{E})$ tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

3° Déterminez l'ensemble (P_2) des points M de $(\mathcal{E})$ tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

4° Peut-on avoir $(P_1) = (P_2)$?

13 ■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace $(\mathcal{E})$. A, B, C, D les points de coordonnées respectives :
$A(1, 1, 0)$; $B(0, 1, 1)$; $C(1, 0, 1)$; $D(1, 1, 1)$.
On pose : $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.
Montrez que f admet un minimum en un point G et déterminez ce minimum.

14 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace $(\mathcal{E})$, et $A(6, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$ deux points de $(\mathcal{E})$.

1° Déterminez le barycentre G du système $(O, 1)$, $(A, 2)$, $(B, 3)$. Faites une figure.

2° Soit $C(0, 0, 4)$. Déterminez l'ensemble (S) des points M de l'espace définis par :
$(\overrightarrow{MO} + 2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.
Donnez une équation cartésienne de (S).

3° Déterminez l'intersection de (S) et du plan d'équation $x = 0$, et dessinez-la sur la figure.

4° Soit (P) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$.
Montrez que G appartient à (P) et déterminez (P).

POINTS COCYCLIQUES

15 ■■ ABC est un triangle, a est le projeté orthogonal de A sur (BC), P et Q sont les projetés orthogonaux de a respectivement sur (AB) et (AC).

1° Montrez que $(\overrightarrow{aA}, \overrightarrow{aQ}) = (\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CB})$ (π) puis que $(\overrightarrow{aA}, \overrightarrow{aQ}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ})$ (π).

2° Déduisez-en que B, C, P, Q sont cocycliques.

16 A est un point d'un cercle (C). Deux sécantes à (C) issues de A recoupent (C) en M et N. Si B est le point diamétralement opposé à A sur (C) et H un point de (AB), la perpendiculaire en H à (AB) recoupe ces sécantes en M' et N' respectivement. On suppose distincts les points A, B, M, N, H, M', N'.

1° Montrez que A, B, M et N sont cocycliques. Déduisez-en que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN}) \quad (\pi)$.

2° Montrez que H, B, N et N' sont cocycliques. Déduisez-en que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{N'M'}, \overrightarrow{N'N}) \quad (\pi)$.

3° Montrez-en que M, N, M', N' sont cocycliques.

17 (C) et (C') sont deux cercles sécants en A et B. Si M est un point de (C) privé de $\{A, B\}$, (MA) recoupe (C') en M' et (MB) recoupe (C') en N'. On suppose que M' et N' sont distincts et n'appartiennent pas à (AB). Montrez que la tangente (Δ) en M à (C) est parallèle à $(M'N')$.

18 ABC est un triangle tel que B et C sont fixes. A est variable tel que : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} \quad (\pi)$.

1° Quel est l'ensemble des points A ?

2° Soit B' le symétrique de B par rapport à (CA) et C' le symétrique de C par rapport à (BA). Démontrez que (BB') et (CC') sont sécantes.

3° On note D le point d'intersection de (BB') et de (CC'). A quelle figure D appartient-il ?

19 Démontrez que les projetés orthogonaux du sommet A d'un triangle ABC, sur les bissectrices intérieures et extérieures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont quatre points alignés.

20 ABC est un triangle quelconque, I est le centre de son cercle inscrit, J le centre du cercle exinscrit dans l'angle B, K le centre du cercle exinscrit dans l'angle C. A se projette orthogonalement en B_1 sur (IB), en B_2 sur (KB), en C_1 sur (IC), en C_2 sur (JC).

1° Montrez que A, B_1, I, C_1 sont cocycliques ainsi que A, J, B_1, C_2. Calculez l'angle $(\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_1C_2})$.

2° Montrez que B_1, B_2, C_1, C_2 sont alignés.

21 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC non aplati. Les droites (S), (T), (U) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ passent respectivement par A, B, C et vérifient :

$(\overrightarrow{AB}, \vec{s}) = (\overrightarrow{BC}, \vec{t}) = (\overrightarrow{CA}, \vec{u}) = x \quad (\pi)$.

On note :

$(S) \cap (T) = \{C_1\}, \quad (T) \cap (U) = \{A_1\}, \quad (U) \cap (S) = \{B_1\}$.

1° Montrez que $(\vec{s}, \vec{u}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (\pi)$; $(\vec{t}, \vec{s}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \quad (\pi)$; $(\vec{u}, \vec{t}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad (\pi)$.

2° a) Démontrez que les cercles circonscrits aux triangles ABC_1, BCA_1, CAB_1 ont un point commun, noté Ω.

b) Démontrez que :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\Omega}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega}) \quad (\pi)$.

c) Démontrez que le cercle circonscrit au triangle ABC_1 est tangent en B à (BC).

22 ABC est un triangle non rectangle, O est le centre de son cercle circonscrit (Γ) et H est son orthocentre. Les droites (AH) et (BC) se coupent en a, (BH) et (AC) se coupent en b, (CH) et (AB) se coupent en c.

1° a) Montrez que A, B, a et b sont cocycliques. Déduisez-en que : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{bA}, \overrightarrow{ba}) \quad (\pi)$.

b) On note T un point quelconque de la tangente en C à (Γ). Montrez que : $(\overrightarrow{bA}, \overrightarrow{ba}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT}) \quad (\pi)$.

Déduisez-en que (ab) et (CT) sont parallèles.

c) Montrez que les droites (ab) et (OC) sont perpendiculaires.

2° En utilisant la cocyclicité des points A, C, c et a d'une part et a, C, b et H d'autre part, montrez l'égalité : $(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{aA}) = (\overrightarrow{aA}, \overrightarrow{ab}) \quad (\pi)$.
Déduisez-en que (AH) est une des bissectrices du triangle abc.

23 **Droite de Simson.**
ABC est un triangle dont le cercle circonscrit est noté (Γ). Soit I un point du plan dont les projetés orthogonaux sur (BC), (AC) et (AB) sont respectivement notés α, β et γ.

1° a) Montrez que les points I, β, A et γ sont cocycliques. Déduisez-en que :

$(\overrightarrow{\beta A}, \overrightarrow{\beta \gamma}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{I\gamma}) \quad (\pi)$. (1)

b) Montrez que les points I, β, α et C sont cocycliques. Déduisez-en que :

$(\overrightarrow{\beta C}, \overrightarrow{\beta \alpha}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{I\alpha}) \quad (\pi)$

$(\overrightarrow{\beta C}, \overrightarrow{\beta \alpha}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{I\alpha}) \quad (\pi)$. (2)

c) Montrez que les points I, α, γ et B sont cocycliques. Déduisez-en que :

$(\overrightarrow{I\alpha}, \overrightarrow{I\gamma}) = (\overrightarrow{B\alpha}, \overrightarrow{B\gamma}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \quad (\pi)$. (3)

2° En utilisant les relations (1) et (3) montrez que :

$(\overrightarrow{\beta A}, \overrightarrow{\beta \gamma}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{I\alpha}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \quad (\pi)$. (4)

3° On suppose dans cette question que le point I appartient au cercle (Γ).
En utilisant les égalités (2) et (4) montrez que :

$(\overrightarrow{\beta A}, \overrightarrow{\beta \gamma}) = (\overrightarrow{\beta C}, \overrightarrow{\beta \alpha}) \quad (\pi)$

et déduisez-en que α, β et γ sont alignés.

4° On suppose dans cette question que les points α, β et γ sont alignés.
Montrez que I, A, B et C sont cocycliques.

5° Concluez en énonçant la propriété démontrée.

24 A, B, C sont trois points alignés sur une droite (D) et I un point non situé sur (D). On désigne par a, b et c les milieux respectifs de $[IA]$, $[IB]$ et $[IC]$ et par α, β et γ les centres des cercles circonscrits aux triangles IBC, ICA et IAB.

a) Montrez que a, b et c sont alignés.

b) Montrez que a, b et c sont les projetés orthogonaux respectifs de I sur les droites $(\beta\gamma)$, $(\alpha\gamma)$ et $(\alpha\beta)$.

c) Prouvez que les points I, α, β et γ sont cocycliques.

25 Soit ABC un triangle isocèle, P un point de (BC), distinct de B et de C, $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit à ABC. On note $(\mathcal{C}')$ le cercle tangent en B à (AB), passant par P. Il recoupe la droite (AP) en un point M.
On se propose de montrer que M est sur le cercle $(\mathcal{C})$.

1° Montrez que : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PM}) \quad (\pi)$, puis
$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{MA}) \quad (\pi).$$

2° En décomposant les angles et en utilisant l'égalité $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ (que vous justifierez), montrez que l'on a : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) \quad (\pi)$. Concluez.

LIGNES DE NIVEAU ET NOMBRES COMPLEXES

26 Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe $4 + 2i$, B le point d'affixe $-2 - i$ et M le point d'affixe z.

Soit le nombre complexe : $Z = \dfrac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$.

1° Donnez une signification géométrique de $|Z|$ et de $\arg Z$.

2° Déterminez puis construisez :

a) l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $|Z| = 1$;

b) l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $|Z| = 2$;

c) l'ensemble des points M d'affixe z, tels que Z est un réel positif ;

d) l'ensemble des points M d'affixe z, tels que Z est un imaginaire pur.

27 Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C sont les points d'affixes respectives $-1 + 3i$, $1 + i$ et -4.

1° Déterminez l'affixe du point G, barycentre du système $(A, 4)$, $(B, 3)$, $(C, 5)$.

2° On désigne par f la fonction de (P) vers $\mathbb{R}$ définie pour tout point M de (P) par :
$f(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$.

a) Exprimez $f(M)$ en fonction de MG^2 et $f(G)$.

b) Calculez $f(C)$. Déterminez et dessinez l'ensemble (E) des points M de (P) tels que $f(M) = 18$.

28 Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe 1. Déterminez et dessinez l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^3$ soit imaginaire pur.

29 Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point m d'affixe z distincte de $-4i$, on associe le point M d'affixe Z telle que $Z = \dfrac{z - 2i}{iz - 4}$.

1° Déterminez, et dessinez, l'ensemble (E) des points m tels que : $\arg Z = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.

2° Déterminez et dessinez l'ensemble (F) des points m tels que : $|Z| = 2$.

30 Soit A, B, C trois points d'affixes $2i$, -1 et 2.

1° *a)* Déterminez l'affixe h de l'orthocentre H du triangle ABC.

b) Déterminez l'affixe h' du symétrique H' de H par rapport à la droite (BC).
Montrez que H', A, B et C sont cocycliques.

2° Soit ABC un triangle non rectangle d'orthocentre H. On note H_A le symétrique de H par rapport à (BC).

a) Montrez que $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \quad (\pi)$.

b) Comparez $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})$ et $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})$.

c) Montrez alors que H_A est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

31 Soit M_1, M_2, M_3 trois points d'affixes 1, z, z^2.

1° Déterminez l'ensemble des nombres complexes z tels que M_1, M_2 et M_3 soient deux à deux distincts.

2° On suppose les points M_1, M_2, M_3 deux à deux distincts. Déterminez l'ensemble des points M_2 tels que le triangle $M_1M_2M_3$ soit rectangle.

PROBLÈMES

32 **Lignes de niveau et nombres complexes.**
Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle A et B les points d'affixes respectives i et 2 (où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

1° *a)* Déterminez et représentez l'ensemble (S) des points M d'affixe z telle que : $(1 - 2i)\,z + (1 + 2i)\,\bar{z} = 4$ ($\bar{z}$ est le complexe conjugué de z).

b) Déterminez et représentez l'ensemble (T) des points M d'affixe z telle que : $(z - i)(\bar{z} + i) = 4$.

2° Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq i$), associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2\bar{z}}{\bar{z}+i}$.

a) Vérifiez que $z' - 2 = \dfrac{-2i}{\bar{z}+i}$. Déduisez-en que :

$M'B = \dfrac{2}{MA}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = (\vec{v}, \overrightarrow{AM})$ (2π).

b) Déterminez une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'})$.

c) Démontrez que f est une bijection du plan privé du point A dans le plan privé du point B. Déterminez l'image de (T) par f.

d) (S) et (T) ont deux points communs M_1 et M_2. Représentez $f(T)$, M_1, M_2, $f(M_1)$, $f(M_2)$.

33 ■■ Barycentres et coniques.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(1, 0)$, $B\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $C\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ et la droite (Δ) d'équation $x = 1$.

1° On désigne par G le point défini par $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$?

2° On note (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$, vérifiant : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$.

a) Démontrez que B et C appartiennent à (Γ).

b) Démontrez que (Γ) est l'ensemble des points M tels que : $MG = \sqrt{2}\ d(M, \Delta)$ où $d(M, \Delta)$ désigne la distance de M à la droite (Δ).

c) Déduisez-en la nature de (Γ) et précisez ses éléments remarquables. Représentez (Γ).

34 ■■■ Barycentres et coniques.

Dans un plan (P), on considère un triangle équilatéral de côté a, où a est un réel strictement positif.

1° Déterminez l'ensemble (E) des points M de (P) tels que : $2a^2 \leqslant 2AM^2 + BM^2 + CM^2 \leqslant 3a^2$.

Construisez (E).

2° k désignant un nombre réel, on considère l'ensemble (Δ_k) des points M du plan (P) tels que :

$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = k$.

On suppose $k = 3a^2$. Déterminez l'ensemble (Δ_k) correspondant. Construisez-le.

3° G désigne le barycentre du système de points $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,1)$; $\vec{i}$ est le vecteur unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, et de même sens; $\vec{j}$ est le vecteur unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{GA}$, et de même sens.

a) (H) est l'hyperbole de centre G, dont un sommet est A, d'asymptotes (GB) et (GC). Écrivez une équation cartésienne de (H) dans le repère $(G, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Déterminez, en fonction de a, le nombre réel k pour que (Δ_k) soit une directrice de cette hyperbole.

c) Construisez l'hyperbole (H). Déterminez les coordonnées de ses foyers F et F' et construisez-les.

N.B. — On tracera les figures en prenant $a = 6$ cm.

35 ■■■ Cocyclicité et nombres complexes.

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de 0, et f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$.

On désigne par (P) un plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O; si un point m de (P) a pour coordonnées x et y, le nombre complexe $z = x + iy$ est l'affixe de ce point.

Soit (P^*) l'ensemble (P) privé du point O, et F l'application de (P^*) dans (P) dans laquelle tout point m de (P^*), d'affixe z, a pour image le point M d'affixe $Z = f(z)$.

1° Montrez que, si $z \neq i$, le quotient $\dfrac{Z+i}{Z-i}$ s'exprime très simplement en fonction de $\dfrac{z+i}{z-i}$.

On désigne par U et U' les points de (P) d'affixes respectives i et $-$i.

Soit m un point de (P^*) distinct de U et de U', et $M = F(m)$.

Trouvez une relation simple entre les angles $(\overrightarrow{mU}, \overrightarrow{mU'})$ et $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'})$.

2° Soit (Γ_1) le cercle de diamètre $[UU']$.

En utilisant la relation angulaire précédente, trouvez l'image de (Γ_1) par F; trouvez l'ensemble (γ) des points m de (P^*) tels que $F(m)$ appartienne à (Γ_1). Dessinez (γ).

36 ■■■ Huit points sur un cercle.

Soit (C) un cercle de centre O, de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+^*$). Soit F un point fixé, intérieur strictement au cercle (C) et distinct de O. Par le point F, on mène deux droites perpendiculaires (L_1) et (L_2) qui coupent respectivement le cercle (C) en M, P et en N, Q. On suppose que les droites (L_1) et (L_2) pivotent autour du point F en restant perpendiculaires.

1° a) Démontrez que l'isobarycentre de M, N, P, Q est un point fixe G indépendant des droites (L_1) et (L_2).

b) Démontrez que la somme $FM^2 + FN^2 + FP^2 + FQ^2$ est égale à $4r^2$. Déduisez-en que :

$MN^2 + PQ^2 = MQ^2 + PN^2 = 4r^2$.

2° Démontrez que les produits scalaires $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FP}$ et $\overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{FQ}$ sont égaux et gardent une valeur constante ne dépendant que des distances OF et r.

3° Soit I, J, K, L les milieux respectifs des cordes $[MN]$, $[PQ]$, $[NP]$, $[QM]$. Soit T, U, V, W les projetés orthogonaux respectifs de F sur ces cordes.

a) Démontrez que la médiane (FI) du triangle MFN est hauteur du triangle PFQ.

b) Démontrez que les huit points I, J, K, L, T, U, V, W appartiennent à un même cercle (Γ) fixe (de centre G). Précisez le rayon R de ce cercle (Γ) en utilisant uniquement OF et r.

6 ISOMÉTRIES

OBJECTIFS

- *Étudier quelques propriétés des applications bijectives du plan qui conservent les distances.*
- *Savoir caractériser une isométrie, en fonction de ses points invariants.*
- *Savoir décomposer «simplement» certaines isométries.*

ACTIVITÉS Préparatoires

AP1 Symétries glissées

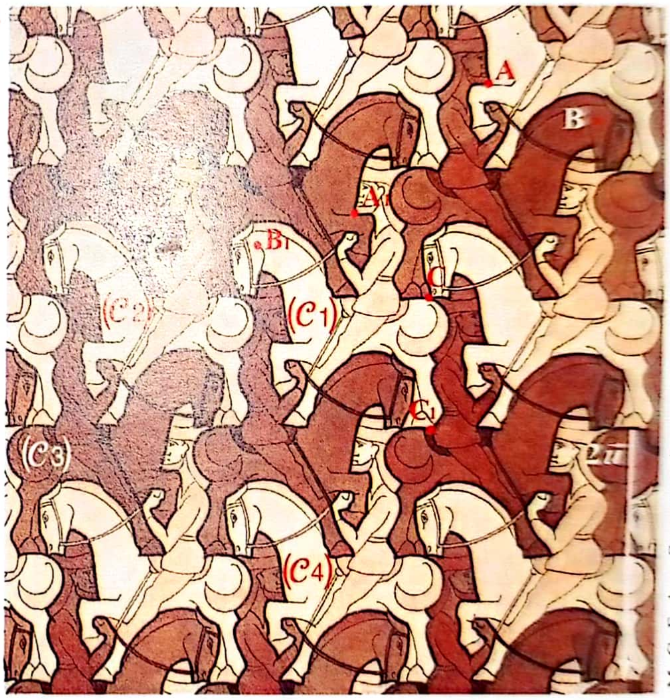
De nombreux dessins de M. C. Escher offrent des situations particulièrement variées de figures dites superposables. Comment cette propriété de telles figures se traduit-elle en termes de transformations ?

1. Étude globale

1° Observez la figure ci-dessous (à droite) et déterminez si possible deux cavaliers qui se correspondent :

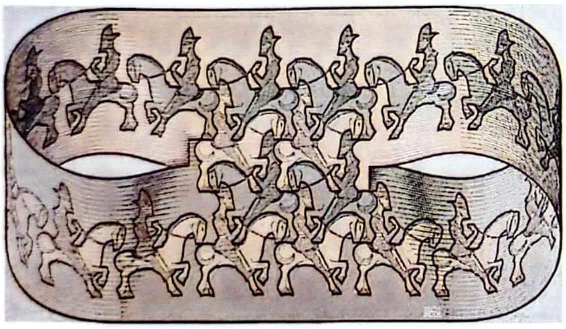
a) par une translation, *b*) par une rotation, *c*) par une réflexion.

Étude d'un remplissage périodique du plan avec cavaliers dans le carnet d'esquisses de M. C. Escher. ▸



M. C. Escher, *Symmetry drawing* (E67). 1946.

Dans la partie centrale de cette farandole on retrouve le pavage du plan par des cavaliers. ▾



M. C. Escher, *Cavaliers*. 1946

2° Les notations sont portées sur la figure. Proposez si possible une translation qui transforme le cavalier $\mathcal{C}_1$ en le cavalier $\mathcal{C}_2$. Reprenez cette question avec $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$, puis avec $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4$.

2. Vers une étude ponctuelle

1° Dessinez sur une feuille de papier transparent le cavalier $\mathcal{C}_1$.

2° Représentez, à l'aide du calque obtenu, l'image $\mathcal{C}_1'$ de $\mathcal{C}_1$ par la translation t de vecteur $\vec{u}$ (voir la figure, $2\vec{u}$ est dirigé vers le bas).

3° Par quelle transformation f le cavalier $\mathcal{C}_3$ est-il l'image de $\mathcal{C}_1'$?

4° Déterminez l'image de $\mathcal{C}_3$ par $f \circ t$.

5° *a*) Formulez une conjecture sur la nature de la transformation $(f \circ t) \circ (f \circ t)$.

b) Justifiez que $f \circ t = t \circ f$.

6° La transformation $f \circ t$ est dite **symétrie glissée**.
Comparez les distances AB et A_1B_1, AC et A_1C_1 puis les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A_1B_1C_1}$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{B_1C_1})$.

AP2 Étude d'une configuration

L'objectif de cette activité est de revoir, en les utilisant, les résultats de Première concernant les réflexions, translations et rotations.

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
Le plan est orienté de telle sorte que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est positive.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Dans un plan orienté, un triangle ABC tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est positive est dit **triangle direct.** Pour un tel triangle, les mesures principales des angles obtenus par permutation circulaire sur les lettres A, B, C, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, sont également positives.

1. Dessin et mesures d'angles

1° Construisez les points D et E tels que les triangles ACD et ABE soient isocèles, rectangles respectivement en D et E, et tels que :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = -\frac{\pi}{4}.$$

2° Donnez une mesure de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'D})$, $(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'E})$, $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{DB'})$ et $(\overrightarrow{C'E}, \overrightarrow{B'A'})$.

2. Translation. Rotation

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{C'B'}$, soit r la rotation de centre B' et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et f la composée $r \circ t$.

1° Quelles sont les images de A' et C' par t ? Construisez l'image E' de E par t.

2° Quelles sont les images de A' et C' par f ?

3° Démontrez que l'image de E par f est A'.

3. Nature de f

Soit (D) la perpendiculaire à $(B'C')$ en B', soit (D_1) la médiatrice de $[B'C']$, soit (D_2) l'image de (D) par la rotation de centre B' et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

On note s, s_1 et s_2 les réflexions d'axes respectifs (D), (D_1) et (D_2).

1° Démontrez que : $t = s \circ s_1$.

2° Démontrez que : $r = s_2 \circ s$.

3° Démontrez que f est une rotation.

4. Caractérisation de f

Soit O le centre de la rotation f.

1° Déduisez, des **1. 2°** et **3. 3°**, une mesure de l'angle de la rotation f.

2° Déterminez l'image de E par $f \circ f$. Justifiez que $f \circ f$ est la symétrie de centre O puis que O est le milieu de $[ED]$.

AP3 Géométrie analytique. Barycentre

Les translations, les rotations, les réflexions transforment le milieu d'un segment, isobarycentre des extrémités du segment, en le milieu du segment image. Cette propriété est-elle valable pour tout barycentre ?

Soit f une réflexion d'axe (Δ), $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal tel que $(O, \vec{i})$ est un repère de (Δ).

1. Expression analytique de f

Soit M un point du plan, de coordonnées (x, y), M' l'image de M par f, (x', y') les coordonnées de M'.
Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

2. Barycentre de trois points

Soit A, B, C les points de coordonnées respectives $(3, -1)$, $(1, 4)$, $(-7, 3)$. On appelle G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 1, 2, -1 et A', B', C', G' les images de A, B, C, G par f.

1° Calculez les coordonnées de G.

2° Déterminez les coordonnées de A', B', C', G'.

3° Vérifiez que G' est le barycentre des points A', B', C' affectés des coefficients 1, 2, -1.

3. Cas général

Généralisez la propriété obtenue au **2. 3°** :

1° Au cas de trois points quelconques affectés de coefficients de somme non nulle.

2° Au cas de n points ($n \in \mathbb{N}^*$) affectés de coefficients de somme non nulle.

COURS

1 ▪ Isométries du plan

1. Définition

Définition 1 **Dans le plan, on appelle isométrie toute bijection conservant la distance.**

LE SAVIEZ-VOUS ?
Isométrie vient du grec *isos* (égal) et *métron* (mesure).
Bien que les origines de la géométrie remontent à l'Antiquité égyptienne, les méthodes de transformations des figures n'apparaissent qu'au cours de la seconde moitié du XVIII^e siècle avec G. Monge (1746-1818), V. Poncelet (1788-1867), M. Chasles (1793-1880), J. Steiner (1796-1863).

EXEMPLES

Les translations, les rotations, les réflexions du plan sont des isométries.
Les homothéties dont le rapport est différent de 1 et -1 ne sont pas des isométries : elles sont des bijections mais ne conservent pas la distance.
Les projections orthogonales ne sont pas des isométries : elles ne sont pas des bijections.

2. Composée de deux isométries

Sachant que la composée de deux bijections est une bijection, la propriété suivante est immédiate.

Propriété 1 **La composée de deux isométries est une isométrie.**

3. Réciproque d'une isométrie

Soit f une isométrie.
f est une bijection. Elle admet donc une application réciproque, f^{-1}, dont nous admettrons que c'est une bijection.
Nous avons alors de façon évidente :

Propriété 2 **L'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.**

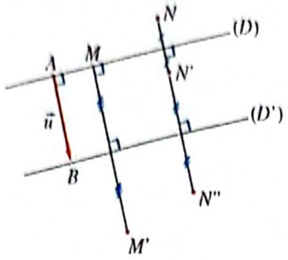
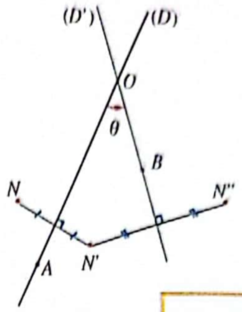
EXEMPLES

- L'application réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$, c'est donc bien une isométrie.
- L'application réciproque de la rotation de centre O et d'angle α est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$, c'est donc bien une isométrie.
- L'application réciproque d'une réflexion est la réflexion elle-même, c'est donc bien une isométrie.

2. Décomposition d'une translation, d'une rotation

1. Rappel

Soit (D) et (D') deux droites, $s_{(D)}$ et $s_{(D')}$ les réflexions d'axes respectifs (D) et (D').

Si $(D) \parallel (D')$ alors :	Si (D) et (D') sont sécantes alors :
$s_{(D')} \circ s_{(D)}$ est une translation	$s_{(D')} \circ s_{(D)}$ est une rotation
 $\boxed{s_{(D')} \circ s_{(D)} = t_{2\vec{u}}}$	 $\boxed{s_{(D')} \circ s_{(D)} = r(O, 2\theta)}$
Le vecteur de translation est $2\overrightarrow{AB}$, où A est un point de (D) et B son projeté orthogonal sur (D').	• Le centre de rotation est le point O commun à (D) et (D'). • L'angle de rotation est $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ où A est un point de (D) et B un point de (D'), A et B distincts de O.

2. Décomposition d'une translation

Soit t une translation. Peut-on trouver deux réflexions $s_{(D)}$ et $s_{(D')}$, d'axes respectifs (D) et (D'), telles que $s_{(D')} \circ s_{(D)} = t$?
La démonstration de la propriété suivante est une conséquence du paragraphe précédent.

Propriété 3

Toute translation t de vecteur $\vec{u}$ est décomposable en deux réflexions $s_{(D)}$ suivie de $s_{(D')}$ d'axes (D) et (D') parallèles.

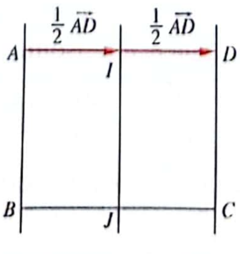
- **Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors, quelle que soit (D), $t = s_{(D)} \circ s_{(D)}$.**
- **Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors :**

— (D) a pour vecteur normal $\vec{u}$,

— (D') est l'image de (D) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

(D) ou (D') est arbitrairement choisie, de vecteur normal $\vec{u}$.

Exemple 1



$ABCD$ est un rectangle ; I et J sont les milieux de $[AD]$ et $[BC]$. Avec les notations précédentes, la translation t de vecteur $\overrightarrow{AD}$ est telle que :

$t = s_{(IJ)} \circ s_{(AB)}$, $\quad t = s_{(CD)} \circ s_{(IJ)}$.

Exemple 2

La propriété 3 permet de composer des isométries.

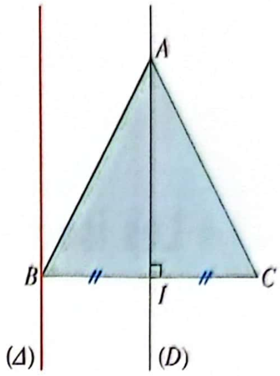
Soit ABC un triangle équilatéral et I le milieu du côté $[BC]$. Pour déterminer la composée $s \circ t$ de la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et de la réflexion s d'axe (AI), on décompose t en réflexions.

Puisque $\overrightarrow{BC}$ est normal à (AI) choisissons (AI) pour l'un des axes :

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc l'image de (AI) par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ est la droite (Δ) passant par B et parallèle à (AI).

Et, s' étant la réflexion d'axe (Δ) :

$s \circ t = s \circ (s \circ s')$, $\qquad s \circ t = (s \circ s) \circ s'$.



L'identité étant notée Id, alors :

$s \circ t = \mathrm{Id} \circ s'$, $\qquad s \circ t = s'$.

La composée $s \circ t$ est donc la réflexion s' d'axe (Δ).

3. Décomposition d'une rotation

Soit r une rotation. Peut-on trouver deux réflexions $s_{(D)}$ et $s_{(D')}$, d'axes respectifs (D) et (D'), telles que $s_{(D')} \circ s_{(D)} = r$?
La démonstration de la propriété suivante est une conséquence du paragraphe **2. 1**.

Propriété 4

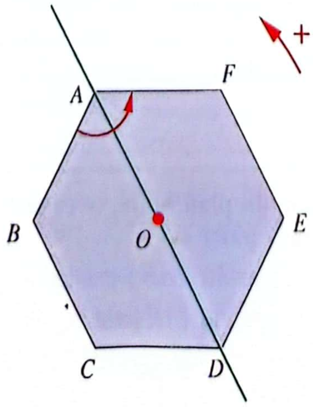
- **Toute rotation de centre O et d'angle de mesure θ est la composée de deux réflexions $s_{(D)}$ suivie de $s_{(D')}$ d'axes (D) et (D').**
- **Si $\theta = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ alors $(D) = (D')$.**
  Si $\theta \notin \{k2\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, alors :

— (D) passe par O,

— (D') est l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{1}{2}\theta$.

(D) ou (D') peut être choisie arbitrairement, passant par O.

Exemple 1



$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O tel que : $\quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = \frac{2\pi}{3}$.

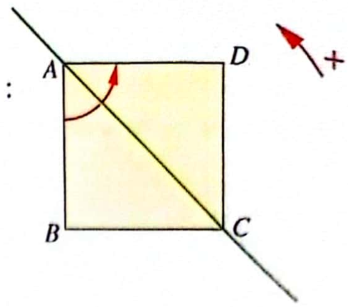
La rotation r de centre A et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ est telle que :

$r = s_{(AO)} \circ s_{(AB)} \quad$ et $\quad r = s_{(AE)} \circ s_{(AC)}$.

EXEMPLE 2

$ABCD$ est un carré tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Si r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors :



$r \circ s_{(AC)} = (s_{(AD)} \circ s_{(AC)}) \circ s_{(AC)}$

$r \circ s_{(AC)} = s_{(AD)} \circ (s_{(AC)} \circ s_{(AC)})$

$r \circ s_{(AC)} = s_{(AD)} \circ \mathrm{Id}$

$r \circ s_{(AC)} = s_{(AD)}$.

3 . Les isométries du plan

1. Isométrie fixant un point

Les rotations et les réflexions sont des isométries qui fixent au moins un point. Existe-t-il d'autres isométries fixant au moins un point ?
L'exercice **34**, page 121 propose une démonstration de la propriété suivante :

Propriété 5

Toute isométrie fixant un point O est :
— soit une réflexion dont l'axe passe par O,
— soit une rotation de centre O.

2. Isométrie fixant un point et translation

L'exercice **35**, page 121 propose une démonstration de la propriété suivante :

Propriété 6

Étant donné un point O, toute isométrie f se décompose de manière unique en $t \circ u$ où u est une isométrie fixant O et t une translation.

4 . Images de figures simples

Les propriétés énoncées ci-dessous résultent des propriétés 5 et 6 et des propriétés des réflexions.

Attention ! On se gardera cependant de dire que les propriétés des isométries sont les propriétés des réflexions : en effet, les réflexions transforment un angle orienté de vecteurs en son opposé alors que les translations, les rotations, composées de deux réflexions, conservent les angles orientés de vecteurs.

Propriété 7

Si f est une isométrie du plan alors, A et B étant des points distincts, A' et B' leurs images par f :
- **l'image par f de la droite (AB) est la droite $(A'B')$,**
- **l'image par f du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$,**
- **l'image par f d'un cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon R.**

5. Propriétés des isométries

1. Produit scalaire

Rappelons que :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(BC^2 - AC^2 - AB^2)$.

De la conservation des distances, on déduit alors immédiatement que :

Propriété 8 | **Toute isométrie conserve le produit scalaire.**

Remarque
En écrivant :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = A'B' \times A'C' \times \cos \widehat{B'A'C'}$,

on retrouve, puisque $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$, l'égalité des cosinus des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ donc des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$.

2. Propriétés conservées par isométries

Les propriétés suivantes sont des conséquences de la propriété 8 et de la remarque.

Propriété 9

Toute isométrie conserve :
- **le parallélisme des droites,**
- **l'orthogonalité des droites,**
- **le contact d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles.**

Notons également que les isométries conservent les aires des surfaces planes.

3. Barycentre

L'AP3 a permis de démontrer que, par une réflexion, l'image du barycentre de points pondérés est le barycentre des images des points affectées des mêmes coefficients. Il en est donc de même pour les translations et les rotations, qui sont des composées de deux réflexions.

De plus, toute isométrie étant, d'après la propriété 6, composée d'une isométrie fixant un point (donc d'une réflexion ou d'une rotation) et d'une translation, cette propriété est encore valable pour toute isométrie.

Propriété 10

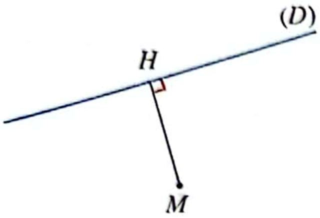
Soit f une isométrie, (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) des points pondérés admettant un barycentre G et A'_1, A'_2, ..., A'_n les images de A_1, A_2, ..., A_n par f.
L'image G' de G par f est le barycentre des points pondérés (A'_1, α_1), ..., (A'_n, α_n).

Cas particuliers

- L'image par une isométrie du milieu d'un segment est le milieu du segment image.
- L'image par une isométrie du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

4. Conique

Soit f une isométrie, (C) une conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.



Notons F' et (D') les images de F et (D) par f.
Soit M un point du plan non situé sur (D), H le projeté orthogonal de M sur (D).
Appelons M' et H' les images de M et H par f.
Puisque M n'est pas sur (D), M' n'est pas sur (D').
Les isométries conservant l'orthogonalité des droites, de «$(MH)\perp(D)$» on déduit : «$(M'H')\perp(D')$». Le point H' image de H par f est aussi le projeté orthogonal de M' sur (D').
Or f est une isométrie donc $M'F' = MF$ et $M'H' = MH$.
Par suite : $\dfrac{M'F'}{M'H'} = \dfrac{MF}{MH}$.

- Si M est un point de (C), alors $\dfrac{MF}{MH} = e$, donc $\dfrac{M'F'}{M'H'} = e$ et M' est un point de la conique (C') de foyer F', de directrice (D') et d'excentricité e.

L'image par f de tout point de (C) est donc sur (C') ; nous en déduisons que $f((C)) \subset (C')$.

- Si M' est un point de (C'), alors, f étant une bijection, M' admet un antécédent unique M par f.

H et H' étant les projetés orthogonaux respectifs de M sur (D) et de M' sur (D'), de «$\dfrac{M'F'}{M'H'} = e$» on déduit «$\dfrac{MF}{MH} = e$».
Tout point de (C') est donc l'image par f d'un point de (C) ; nous en déduisons : $(C') \subset f((C))$.

- Les deux conclusions, $f((C)) \subset (C')$ et $(C') \subset f((C))$, nous permettent de conclure que : $(C') = f((C))$.

Propriété11

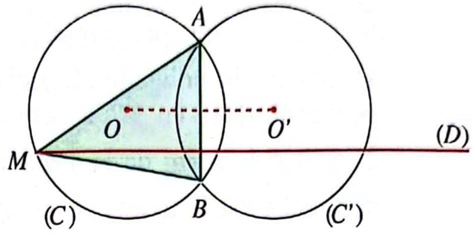
L'image d'une conique (C) par une isométrie f est une conique (C') de même excentricité. **Les foyers et directrices de (C') sont les images par f des foyers et directrices de (C).**

TRAVAUX Pratiques

TP1 Étude d'une configuration

Les propriétés des isométries (conservation des distances, effets sur des figures élémentaires, etc.) permettent de mettre en évidence et de démontrer des propriétés sur des figures plus complexes.

Soit (C) et (C') deux cercles de même rayon, sécants en A et B ; soit O et O' leurs centres respectifs.



Un point M étant pris sur (C), distinct de A et B, la droite (D) qui passe par M et qui est parallèle à (OO') rencontre le cercle (C') en deux points, éventuellement confondus. On se propose de démontrer que l'un d'eux est l'orthocentre du triangle ABM.

1° Démontrez que, des points communs à (C') et (D), l'un est l'image de M par la réflexion s d'axe (AB) et l'autre est l'image de M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

2° On note M' l'image de M par t et B_1 l'antécédent de B par t.

a) Démontrez que B_1 est sur (C).

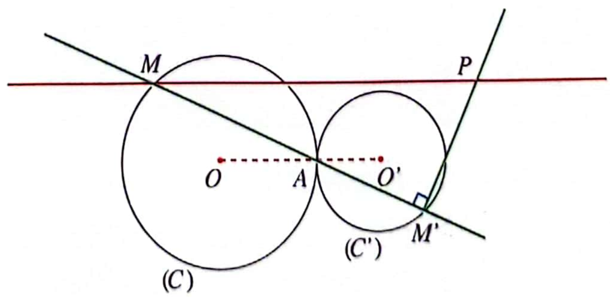
b) Démontrez que $[AB_1]$ est un diamètre de (C).

c) Déduisez-en l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ et concluez.

TP2 Un lieu géométrique

Les transformations sont l'un des outils que l'on peut souvent utiliser avec efficacité dans la recherche de lieux géométriques.

Soit (C) et (C') deux cercles tangents extérieurement ; on note O et O' leurs centres respectifs et A leur point de contact.



Étant donné un point M de (C), distinct de A, la droite (AM) recoupe le cercle (C') en M' ; la perpendiculaire en M' à (AM) coupe en P la parallèle à (OO') qui passe par M.

Déterminez le lieu (L) de P quand M varie sur (C).

1. Étude préliminaire

1° *a*) Justifiez que, si M est un point de (C) autre que A, alors la perpendiculaire en M' à (AM) et la parallèle à (OO') qui passe par M sont sécantes.

b) Quel est l'ensemble (C_1) des points M auxquels on peut associer un point P ?

2° *a*) Choisissez plusieurs points M (au moins trois, dont le point de (C) diamétralement opposé à A) et construisez les points P correspondants.

b) Quelle conjecture faites-vous sur la nature de (L) ?

2. Analyse

Soit M un point pris sur (C_1).

1° Soit B' le point de (C') diamétralement opposé à A. Démontrez que la perpendiculaire en M' à (AM) passe par B'.

2° Soit B le point de (C) diamétralement opposé à A.

a) Quelle est la nature du quadrilatère $BB'PM$?

b) Démontrez que P est l'image de M par la translation t de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

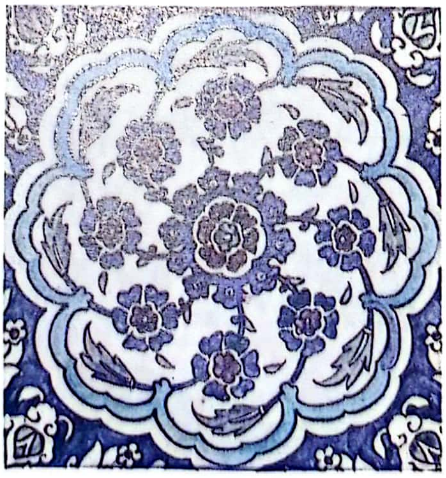
3. Synthèse

1° Quelle est l'image de (C) par t ? Donnez-en, outre la nature, les éléments caractéristiques.

2° Quel est le lieu (L) de P quand M décrit (C) ?

TP3 Isométries laissant une figure invariante

Construire des figures présentant des éléments de symétrie (centres, axes) peut être un objectif artistique.
Étudions le cas de deux figures simples : le segment, le triangle équilatéral.



Des objets artistiques qui suggèrent une invariance par rotation : à gauche, carreau de céramique (Grèce, 18e siècle) ; à droite, plat à décor de flammes (Turquie, 16e siècle).

1. Segment

Soit $[AB]$ un segment de droite et I le milieu de $[AB]$.

1° Démontrez que si une isométrie f laisse le segment $[AB]$ invariant alors f fixe I.

2° Quelles sont les rotations de centre I qui laissent $[AB]$ invariant ?

3° Quelles sont les réflexions qui laissent $[AB]$ invariant ?

4° Quelles sont les isométries qui laissent $[AB]$ invariant ?

2. Triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral, O le centre du cercle circonscrit à ABC. Déterminons l'ensemble $\mathcal{E}$ des isométries qui laissent ABC invariant.

1° L'identité est un élément de $\mathcal{E}$. Déterminez deux autres isométries de $\mathcal{E}$.

2° Démontrez que toute isométrie f de $\mathcal{E}$ fixe O.

3° Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$, autre que l'identité. On suppose que f fixe A.

a) Peut-on avoir $f(B) = B$? Justifiez votre réponse.

b) Quelle est, dans ce cas, l'isométrie f ?

4° Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$ autre que l'identité. On suppose que $f(A) = B$.

a) Quelle est l'image de C ?

b) Démontrez que f est soit une réflexion, et précisez l'axe de la réflexion, soit une rotation, et précisez le centre et l'angle de la rotation.

5° Énoncez les isométries de $\mathcal{E}$.

TP4 Isométries associant deux figures

Le but de ce TP est de rechercher des isométries transformant une figure donnée en une autre figure donnée.

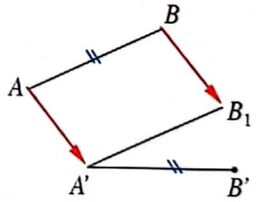
1. Isométries associant deux segments

Soit A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A'B' = AB$.

1° Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et B_1 l'image de B par t.

a) Démontrez que $A'B_1 \neq 0$ et que : $(\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

b) Soit r la rotation de centre A' et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. Posons $g = r \circ t$.



Démontrez que g est une isométrie qui transforme A en A' et B en B'.

2° Soit f une isométrie qui transforme A en A' et B en B'.

a) Démontrez que $g^{-1} \circ f$ est une isométrie qui laisse A et B invariants.

b) Déduisez-en que $g^{-1} \circ f$ est soit l'identité (Id) soit la réflexion d'axe (AB).

3° Quelles sont les isométries qui transforment A en A' et B en B' ?

4° *a*) Quelles sont les isométries qui transforment A en B' et B en A' ?

b) Quelles sont les isométries qui transforment $[AB]$ en $[A'B']$?

2. Isométries associant deux cercles

Soit (C) et (C') deux cercles de même rayon et de centres respectifs O et O'.

1° Démontrez que la translation t de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ transforme (C) en (C').

2° Soit f une isométrie qui transforme (C) en (C').

a) Démontrez que $f(O) = O'$.

b) Démontrez que $t^{-1} \circ f$ est une isométrie qui laisse O invariant.

3° *a*) Quelles sont les isométries qui laissent O invariant ?

b) Quelles sont les isométries qui transforment (C) en (C') ?

ISOMÉTRIES

QUAND UTILISER UNE ISOMÉTRIE 1

Face à une figure clé	Triangle isocèle. Triangle rectangle isocèle. Triangle équilatéral. Parallélogramme. ...
Pour démontrer des propriétés de figures	Parallélisme, orthogonalité, alignement, milieu, barycentre, contact, aires, angles sont des propriétés ou des grandeurs conservées par une isométrie.
Pour résoudre des problèmes de construction	Si un point A à construire est situé sur une courbe (C_1) et s'il est l'image par une isométrie f d'un point B situé sur une courbe (C_2) alors A est un point commun aux courbes (C_1) et $f((C_2))$, ce qui permet d'accéder à une construction de A.
Pour résoudre des problèmes de lieux géométriques	Si un point A, dont on cherche à déterminer le lieu géométrique, est l'image par une isométrie f d'un point B qui décrit une courbe (C), alors le lieu de A est la courbe $f((C))$.

COMMENT DÉTERMINER UNE COMPOSÉE DE DEUX ISOMÉTRIES 2

- Si ces isométries sont des réflexions, voyez si leurs axes sont parallèles ou sécants.
- Si ce ne sont pas des réflexions, décomposez chacune d'elles en des réflexions, les axes étant judicieusement choisis.

EXERCICES *Commentés*

1 POUR DÉMONTRER UNE PROPRIÉTÉ

Soit ABC un triangle équilatéral tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

On appelle O le centre du triangle, I, J, K les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{5}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1° Déterminez deux nombres réels a et b tels que I soit le barycentre de (A, a) et (B, b).

2° En utilisant la rotation de centre O qui transforme A en B, démontrez que O est le centre de gravité du triangle IJK.

COMMENTAIRE

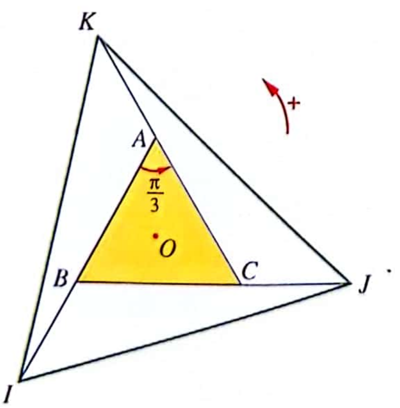
Le point O est le centre d'une rotation qui conserve le triangle ABC.
La première question oriente la recherche : il suffit d'interpréter I, J, K comme barycentres des points A, B, C pour déterminer leurs images par une telle rotation et résoudre le problème.

UNE SOLUTION

1° Recherche de a et b

De l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ nous déduisons la relation :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AA})$, qui prouve que I est le barycentre des points $(A, -2)$ et $(B, 5)$.



Notons que, de même, le point J est barycentre de $(B, -2)$ et $(C, 5)$ et K est barycentre de $(C, -2)$ et $(A, 5)$.

2° Centre de gravité du triangle IJK

Le point O étant le centre du triangle ABC, la rotation r de centre O qui transforme A en B transforme B en C et C en A.

Par cette rotation r, le barycentre I de $(A, -2)$ et $(B, 5)$ a pour image le barycentre de $(r(A), -2)$ et $(r(B), 5)$ c'est-à-dire $(B, -2)$ et $(C, 5)$; par suite $r(I) = J$.
Une démonstration analogue permet de prouver que $r(J) = K$, puis $r(K) = I$.

La rotation r est une isométrie et :

$$O \overset{r}{\longmapsto} O, \quad I \overset{r}{\longmapsto} J, \quad J \overset{r}{\longmapsto} K, \quad K \overset{r}{\longmapsto} I$$

donc $IJ = JK$ et $JK = KI$.
Le triangle IJK est donc équilatéral.

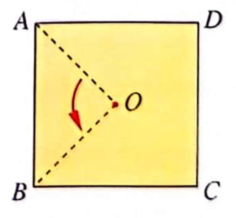
De plus, $OI = OJ$ et $OJ = OK$; le point O, équidistant de I, J et K, est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK et donc le centre de gravité de ce triangle.

2 POUR DÉTERMINER UNE COMPOSÉE D'ISOMÉTRIES

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ t$.
(Cet exercice sera repris, avec une autre méthode à l'excercice **1**, page 133.)



COMMENTAIRE

Il s'agit ici de composer deux isométries qui ne sont pas des réflexions. Nous allons donc décomposer chacune des deux isométries en réflexions dont nous choisirons judicieusement les axes.

UNE SOLUTION

Décomposons t et r en réflexions en notant (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4) quatre droites telles que, si on note s_i la réflexion d'axe (Δ_i) : $t = s_2 \circ s_1$ et $r = s_4 \circ s_3$.

Les droites (Δ_i) sont telles que :

$$\begin{cases} (\Delta_1) \text{ a pour vecteur normal } \overrightarrow{BC}, \\ (\Delta_2) \text{ est l'image de } (\Delta_1) \text{ par la translation de vecteur } \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta_3) \text{ passe par } O, \\ (\Delta_4) \text{ est l'image de } (\Delta_3) \text{ par la rotation de centre } O \text{ et d'angle de mesure } \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Alors : $\quad r \circ t = s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

Soit (Δ) la droite passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ (voir figure ci-dessous).

Si nous prenons $(\Delta_2) = (\Delta)$ et $(\Delta_3) = (\Delta)$, alors :

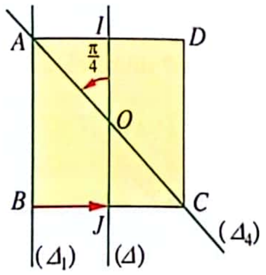
$r \circ t = s_4 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_1$, $\quad r \circ t = s_4 \circ \mathrm{Id} \circ s_1$,
$r \circ t = s_4 \circ s_1$.

Les droites (Δ_1) et (Δ) sont parallèles, (Δ) et (Δ_4) sont sécantes donc (Δ_1) et (Δ_4) sont sécantes.
La composée $r \circ t$ est donc une rotation.

Or (Δ_1) est l'image de (Δ) par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; c'est donc la droite (AB).

De plus, (Δ_4) est l'image de (Δ) par la rotation de centre O et de mesure $\frac{\pi}{4}$; c'est donc la droite (AC).

(En effet :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$;
si I est le milieu de $[AD]$,



alors $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$).

Puisque $(\Delta_1) = (AB)$ et $(\Delta_4) = (AC)$, et que $r \circ t = s_4 \circ s_1$, $r \circ t$ est la rotation de centre A et d'angle $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, soit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Remarque. Pour justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ sachant que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$, on peut utiliser la rotation r : elle transforme A en B et B en C; par suite $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

3 Lieu géométrique

Dans un plan orienté, les sommets A et B d'un parallélogramme sont fixes; les sommets C et D se déplacent, la distance de D à A restant constante. Sur le segment $[CD]$, on construit un triangle équilatéral CDE tel que $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{3}$.

Quel est le lieu géométrique du point E ?

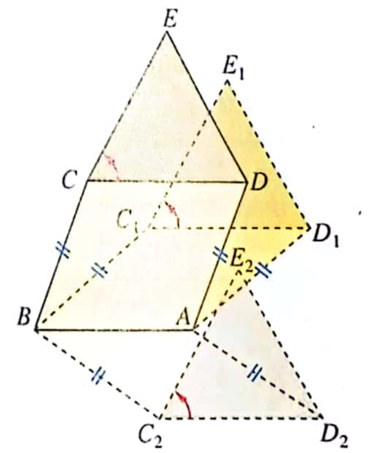
Commentaire

- **Repérez les éléments fixes (points, droites, segments, distances, cercles, angles, directions, ...) et les éléments variables de la figure. Il peut être utile de représenter plusieurs positions des points C, D, E pour avoir une idée du lieu cherché.**
- **Cherchez à définir E comme image par une transformation T connue d'un point variable dont on connaît le lieu (L).**
- **Étudiez, si nécessaire, si tout point de l'image (L') de (L) par T est un point du lieu cherché.**

Une solution

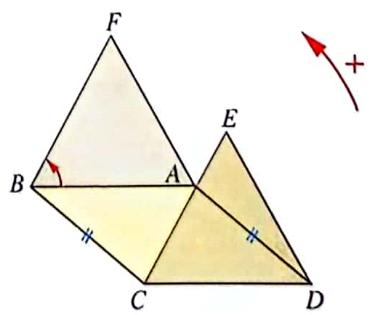
- Quand C et D varient, le quadrilatère $ABCD$ reste un parallélogramme, éventuellement plat.

A et B restent fixes, le segment $[AB]$ est donc fixe; les distances DA et CB, égales, sont constantes; le vecteur $\overrightarrow{CD}$, égal à $\overrightarrow{AB}$, est constant.



L'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE})$ est constant, donc la direction du vecteur $\overrightarrow{CE}$ est constante; de plus la norme de $\overrightarrow{CE}$ est constante, égale à AB. Donc le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est constant.

Le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CE}$ est donc fixe et E est l'image de C par la translation t de vecteur $\overrightarrow{BF}$.



- Le lieu de C est un cercle (Γ) de centre B; notons r son rayon. Le lieu de E est donc l'image de (Γ) par t.

Or l'image du cercle (Γ) par t est le cercle (Γ') de même rayon r que (Γ) et de centre l'image du centre B de (Γ) par t.

Donc le lieu de E est le cercle (Γ') de centre F et de rayon r.

LE JOUR DU BAC

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{3}$. On appelle (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

La médiatrice de $[BC]$ coupe (Γ) en A et D ; on appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1° Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2° On désigne par $S_{(BD)}$, $S_{(DC)}$, $S_{(CA)}$, $S_{(AB)}$ les symétries orthogonales par rapport aux droites (BD), (DC), (CA), (AB) respectivement.

a) Quelle est la nature des applications $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$? On précisera les éléments caractéristiques.

b) Soit (Δ) la parallèle à (DC) menée par A et $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale par rapport à (Δ).
Démontrer que $S_{(BD)} \circ S_{(DC)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ et $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$.

c) Retrouver le résultat du 1° en utilisant l'application $t = S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$ que l'on caractérisera.

(Bac 1985)

Analyse de l'énoncé

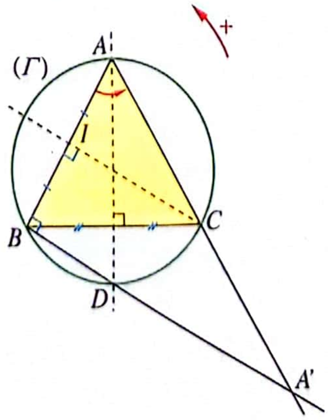
Le texte n'impose aucune méthode pour répondre à la première question.
Par contre, l'énoncé de la deuxième question fait nettement référence aux composées de réflexions.
Il suffit donc d'appliquer directement les propriétés du cours.
Les composées de réflexions conduisent à utiliser les angles orientés de vecteurs.

Une solution

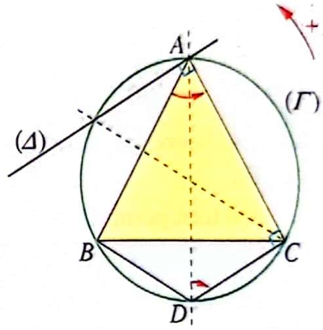
1° Les points D et A étant diamétralement opposés sur le cercle (Γ), les droites (BD) et (AB) sont perpendiculaires. Par conséquent, en désignant par I le milieu de $[AB]$, les droites (CI) et (BD) sont parallèles.
L'homothétie de centre A et de rapport 2 transforme I en B, (IC) en (BD) et C en le point commun à (BD) et (AC), donc en A' (voir figure ci-dessous).
On a ainsi démontré que : $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AC}$, ce qui prouve que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2° a) • $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$
Les droites (DC) et (BD) sont sécantes en D. Donc $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ est la rotation de centre D et d'angle $2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$.

Or : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ (π) (car A, B, C et D sont cocycliques) ; de plus :
$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$
(par hypothèse) ; donc :
$2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{-2\pi}{3}$.
Ainsi $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ est la rotation de centre D et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.



• $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$
Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A et $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$.
Donc $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



b) Remarquons d'abord que la droite (Δ) *passe par A* et par le point de (Γ) diamétralement opposé à C (car : $(CD) \perp (AC)$ et $(\Delta) /\!/ (CD)$).

• $S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$
Les droites (DA) et (DC) sont sécantes en D. Donc $S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ est la rotation de centre D et d'angle $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.
Or, par réflexion d'axe (AD) : $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.
A, B, C et D étant cocycliques et A et D étant de part et d'autre de la droite (BC) :
$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi$,
donc : $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{4\pi}{3}$ ou $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{-2\pi}{3}$.
$S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ est donc la rotation de centre D et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.
D'après a) : $S_{(DC)} \circ S_{(DA)} = S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$.

• $S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$
Les droites (Δ) et (DA) sont sécantes en A et $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de (Δ). Donc $S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$ est la rotation de centre A et d'angle $2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, de mesure $\frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{car } 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{-2\pi}{3}\right)$.
D'après a), on peut donc écrire :
$S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)} = S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$.

c) Nous vous laissons le soin de résoudre cette question. (Vous pourrez prouver que t est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AC}$ et déterminer l'image de A par t.)

LE JOUR DU BAC

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{3}$. On appelle (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

La médiatrice de $[BC]$ coupe (Γ) en A et D ; on appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1° Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2° On désigne par $S_{(BD)}$, $S_{(DC)}$, $S_{(CA)}$, $S_{(AB)}$ les symétries orthogonales par rapport aux droites (BD), (DC), (CA), (AB) respectivement.

a) Quelle est la nature des applications $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$? On précisera les éléments caractéristiques.

b) Soit (Δ) la parallèle à (DC) menée par A et $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale par rapport à (Δ).
Démontrer que $S_{(BD)} \circ S_{(DC)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ et $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$.

c) Retrouver le résultat du 1° en utilisant l'application $t = S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$ que l'on caractérisera.

(Bac 1985)

Analyse de l'énoncé

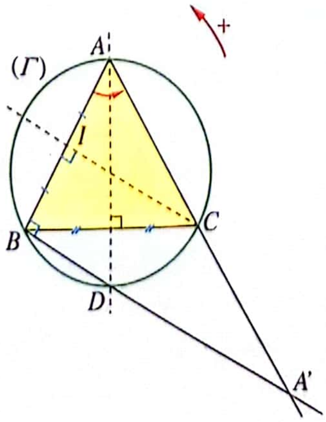
Le texte n'impose aucune méthode pour répondre à la première question.
Par contre, l'énoncé de la deuxième question fait nettement référence aux composées de réflexions. Il suffit donc d'appliquer directement les propriétés du cours.
Les composées de réflexions conduisent à utiliser les angles orientés de vecteurs.

Une solution

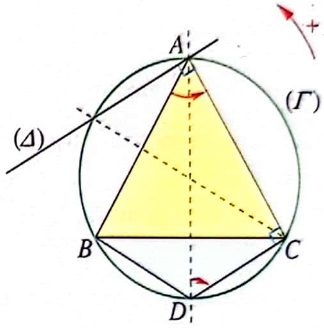
1° Les points D et A étant diamétralement opposés sur le cercle (Γ), les droites (BD) et (AB) sont perpendiculaires. Par conséquent, en désignant par I le milieu de $[AB]$, les droites (CI) et (BD) sont parallèles. L'homothétie de centre A et de rapport 2 transforme I en B, (IC) en (BD) et C en le point commun à (BD) et (AC), donc en A' (voir figure ci-dessous).
On a ainsi démontré que : $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AC}$, ce qui prouve que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2° a) • $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$
Les droites (DC) et (BD) sont sécantes en D. Donc $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ est la rotation de centre D et d'angle $2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$.

Or : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ (π) (car A, B, C et D sont cocycliques) ; de plus :
$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$
(par hypothèse) ; donc :
$2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{-2\pi}{3}$.
Ainsi $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ est la rotation de centre D et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.



• $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$
Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A et $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$.
Donc $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



b) Remarquons d'abord que la droite (Δ) *passe par A* et par le point de (Γ) diamétralement opposé à C (car : $(CD) \perp (AC)$ et $(\Delta) /\!/ (CD)$).

• $S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$
Les droites (DA) et (DC) sont sécantes en D. Donc $S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ est la rotation de centre D et d'angle $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.
Or, par réflexion d'axe (AD) : $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.
A, B, C et D étant cocycliques et A et D étant de part et d'autre de la droite (BC) :
$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi$,

donc : $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{4\pi}{3}$ ou $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{-2\pi}{3}$.

$S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ est donc la rotation de centre D et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

D'après a) : $S_{(DC)} \circ S_{(DA)} = S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$.

• $S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$
Les droites (Δ) et (DA) sont sécantes en A et $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de (Δ). Donc $S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$ est la rotation de centre A et d'angle $2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, de mesure $\frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{car } 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{-2\pi}{3}\right)$.

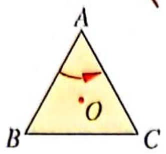
D'après a), on peut donc écrire :
$S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)} = S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$.

c) Nous vous laissons le soin de résoudre cette question. (Vous pourrez prouver que t est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AC}$ et déterminer l'image de A par t.)

Q. C. M.

Dans chacun des exercices suivants, au moins une des réponses est exacte.

1 ABC est un triangle équilatéral direct de centre O $\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$.



$r_{[C,\ \pi/3]} \circ s_{(CO)}$ est :

- la réflexion d'axe (CA) .... ☐
- la réflexion d'axe (CO) .... ☐
- la réflexion d'axe (CB) .... ☐
- la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ .... ☐

2 Une isométrie qui échange deux points distincts A et B :

- fixe tout point de (AB) .... ☐
- fixe le milieu de $[AB]$ .... ☐
- est une symétrie centrale .... ☐
- est une réflexion .... ☐

3 Une isométrie qui laisse invariants deux points A et B :

- est l'identité .... ☐
- fixe le milieu de $[AB]$ .... ☐
- laisse invariante la droite (AB) .... ☐
- laisse invariante la médiatrice de $[AB]$ .... ☐
- est la symétrie de centre le milieu de $[AB]$ .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

DÉFINITION D'UNE ISOMÉTRIE

Les exercices 4 à 6 utilisent un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

4 Soit f l'application qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 1 - i.$$

1° *a)* Quelles sont les images O', A', B' de O et des points A d'affixe 1 et B d'affixe i ?

b) Comparez OA et $O'A'$, OB et $O'B'$.

2° Soit M et N deux points du plan, M' et N' leurs images par f. Comparez MN et $M'N'$. Qu'en déduisez-vous pour f ?

5 Reprenez une étude analogue à celle de l'exercice précédent avec la relation :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6 On appelle f l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M' dont l'affixe z' est telle que :

$$z' = -e^{2i\frac{\pi}{3}} z + i.$$

1° Démontrez que f admet un point unique I invariant.

2° On suppose M distinct de I.

a) Calculez $\frac{IM'}{IM}$.

b) Calculez $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$.

3° Donnez la nature et les éléments caractéristiques de f.

7 Soit f l'application définie, dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, de la façon suivante : tout point M de (P), d'affixe z, a pour image M', d'affixe z' telle que $z' = i\bar{z} - i + 1$.

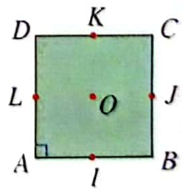
1° Déterminez l'ensemble (E) des points invariants par f.

2° *a)* Démontrez que, pour tout point M de (P), le milieu de $[MM']$ est un point de (E) et que (MM') est perpendiculaire à (E).

b) Quelle est la nature de f ?

COMPOSITION. DÉCOMPOSITION

8 La figure ci-dessous représente un carré $ABCD$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. Les points I, J, K, L sont les milieux des côtés, O le centre du carré. D'une façon générale $s_{(\Delta)}$ est la réflexion d'axe (Δ).



Déterminez les composées suivantes :

1° $s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$, $s_{(BA)} \circ s_{(BC)}$, $s_{(AC)} \circ s_{(IJ)}$.

2° $s_{(IJ)} \circ s_{(AC)}$, $s_{(IL)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(IL)}$.

9 Les notations sont celles de l'exercice précédent. Déterminez les composées suivantes :

1° $s_{(IL)} \circ s_{(IJ)}$, $s_{(KI)} \circ s_{(KJ)}$, $s_{(OD)} \circ s_{(OJ)}$.

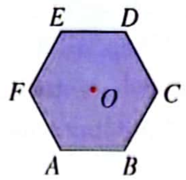
2° $s_{(KJ)} \circ s_{(IL)}$, $s_{(AB)} \circ s_{(DC)}$.

10 ■ Reprenez une étude analogue à celle de l'exercice **8** dans le cas de l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O.

1° $s_{(AF)} \circ s_{(AB)}$, $\quad s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$.

2° $s_{(AC)} \circ s_{(DF)}$, $\quad s_{(FC)} \circ s_{(ED)}$.

3° $s_{(OD)} \circ s_{(OC)}$, $\quad s_{(AE)} \circ s_{(AC)}$.



11 ■ Soit ABC un triangle équilatéral, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et O le centre du triangle.

Complétez les égalités suivantes.

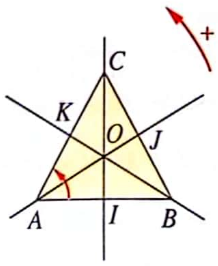
$S_{(\Delta)}$ désigne la réflexion d'axe (Δ); $R_{[P,\ \theta]}$ la rotation de centre P et d'angle θ.

1° $S_{\dots} \circ S_{(AJ)} = R_{\left[A,\ \frac{\pi}{3}\right]}$

$S_{\dots} \circ S_{(OB)} = R_{\left[O,\ \frac{2\pi}{3}\right]}$

2° $S_{(IC)} \circ S_{\dots} = R_{[I,\ \pi]}$

$S_{(AC)} \circ S_{\dots} = R_{\left[C,\ -\frac{2\pi}{3}\right]}$



12 ■■ Soit $[AB]$ un segment, $A \neq B$, soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit r' la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1° Déterminez deux droites (Δ) et (Δ') telles que :

$r = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta)}$ $\quad$ et $\quad$ $r' = s_{(\Delta')} \circ s_{(AB)}$.

2° Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de $r' \circ r$.

3° On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Déterminez chacune des composées :

$t \circ r$ $\quad$ et $\quad$ $r \circ t$.

13 ■■ Soit $ABCD$ un parallélogramme. On appelle :

r_1 la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$,
r_2 la rotation de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$,
r_3 la rotation de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$,
r_4 la rotation de centre D et d'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.
On pose : $\quad f = r_4 \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1$.

1° a) Construisez l'image de A par $r_2 \circ r_1$.

b) Caractérisez $\quad r_2 \circ r_1$.

2° Caractérisez $\quad r_4 \circ r_3$, $\quad$ puis f.

3° Pour quel quadrilatère $ABCD$ l'application f est-elle l'application identique du plan ?

IMAGES DE FIGURES SIMPLES

14 ■ Soit ABC un triangle, I le milieu du segment $[BC]$, B' et C' les projetés orthogonaux de B et C sur la droite (AI).
Démontrez que le quadrilatère $BB'CC'$ est un parallélogramme.

15 ■ Soit (Γ) un cercle de centre O et $[AB]$ un diamètre de (Γ). Une droite (Δ) passant par A recoupe (Γ) en C. La parallèle à (Δ) passant par B recoupe (Γ) en D.
Démontrez que $AC = BD$.

16 ■■ Soit ABC un triangle dont la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est positive. On construit les triangles ABD et ACE rectangles en A, isocèles et tels que :

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2}.$$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[BE]$.

1° Démontrez que :

$DC = BE$ $\quad$ et $\quad$ $(DC) \perp (BE)$.

2° Démontrez que le triangle IAJ est rectangle en A et isocèle.

17 ■■ Soit ABC un triangle. On construit les triangles ABD et ACE équilatéraux et tels que :

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}.$$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[BE]$. Démontrez que le triangle AIJ est équilatéral.

18 ■■■ Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On construit les points E, F, G, H tels que :

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

1° Déterminez deux nombres α et β tels que E soit barycentre des points (A, α), (B, β).

2° On appelle r la rotation de centre O qui transforme A en B.

a) Quelle est l'image de B par r ?

b) Déterminez l'image de E par r.

3° Déterminez, en procédant comme au **2°**, les images de F et G par r.

4° Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

19 ■■■ Soit $ABCD$ un carré de centre O, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

On appelle I et J les points tels que :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}.$$

Les droites (AI) et (CD) se coupent en E, les droites (BJ) et (AD) en F.
Démontrez que les droites (AJ) et (EF) sont orthogonales.

20 Soit ABC un triangle isocèle, $AB = AC$; on appelle I le milieu de $[BC]$. On construit les triangles ABD et ACE équilatéraux et tels que :

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$, $\quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$.

1° Tracez les droites (AI), (CD), (BE). Que constatez-vous ?

2° On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et s la réflexion d'axe (AI).

a) Justifiez que $r \circ s \circ r$ est une isométrie fixant A.

b) Construisez le triangle équilatéral AJK tel que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{BC}$ et $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}) = \frac{\pi}{3}$.

c) Caractérisez la composée $r \circ s \circ r$ (nature et éléments caractéristiques).

3° a) Déterminez l'image de D par $r \circ s \circ r$.

b) Déterminez l'image de B par $r \circ s \circ r$.

c) Démontrez que les droites (CD), (BE) et (AI) sont concourantes.

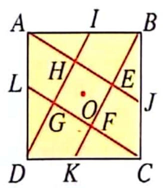
21 1° Soit O un point du plan orienté, r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On rappelle que $r^2 = r \circ r$...

a) Déterminez les transformations r^2, r^3, r^4 (nature et éléments caractéristiques).

b) A étant un point du plan, autre que O, on appelle A_1, A_2, A_3 les images respectives de A par r, r^2, r^3. Quelle est la nature du quadrilatère $AA_1A_2A_3$?

2° On donne un carré $ABCD$, de centre O, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle I, J, K, L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et E, F, G, H les points d'intersection des droites (AJ), (BK), (CL), (DI).



a) Quelle est l'image de la droite (AJ) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$?

b) Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

22 1° Quelles sont les isométries conservant un segment $[AB]$ de longueur non nulle ?

2° Quelles sont les isométries conservant un triangle ABC isocèle (non équilatéral) ?

3° Quelles sont les isométries conservant un cercle ?

4° Quelles sont les isométries conservant un rectangle (non carré) ?

5° Quelles sont les isométries conservant un losange (non carré) ?

6° Quelles sont les isométries conservant un pentagone régulier ? Un hexagone régulier ?

23 Soit ABC un triangle équilatéral de centre $O\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$, A', B' et C' les symétriques de A, B et C par rapport à O.

1° Quel est le centre du triangle $A'B'C'$?

2° Soit f une isométrie transformant ABC en $A'B'C'$ (exemple : s_O).

a) Quelle est l'image de O par f?

b) Quelles sont les rotations transformant ABC en $A'B'C'$?

c) Quelles sont les réflexions transformant ABC en $A'B'C'$?

24 Dans le plan, on considère un carré $ABCD$ de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

a) Soit $A'B'C'D'$ le carré transformé de $ABCD$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$; quel est son centre ?

b) Soit f une isométrie transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{A', B', C', D'\}$; montrez que $f(O) = O$.

c) Déduisez-en les isométries transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{A', B', C', D'\}$.

25 Soit (D) une droite, $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D), I un point non situé sur (D). Construisez un cercle (C) passant par I, tangent à (D) et contenant deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
(On pourra montrer que le problème admet une infinité de cercles solutions.)

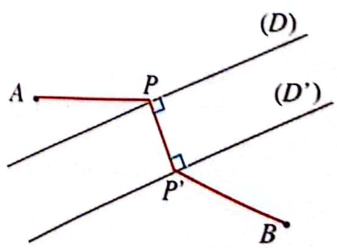
26 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, soit A et B deux points extérieurs à $(\mathcal{C})$. On se propose de construire une droite (T) tangente à $(\mathcal{C})$ et telle que, si (Δ) est la droite passant par B et perpendiculaire à (T), alors A est équidistant de (T) et (Δ).

1° Démontrez que, si (T) et (Δ) sont deux droites solutions, alors (Δ) est l'image de (T) par une rotation r de centre A; quel peut-être l'angle de r ?

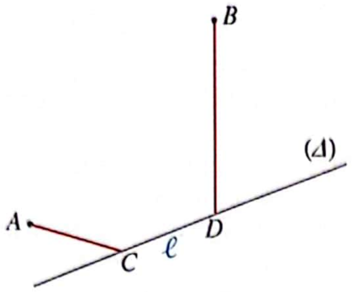
2° On appelle $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par r. Précisez la position relative de $(\mathcal{C}')$ et (Δ) (sont-ils sécants ? tangents ?...)

3° Donnez une construction de (T).

27 Soit (D) et (D') deux droites parallèles, A et B deux points situés de part et d'autre de la bande définie par (D) et (D').
Construisez deux points P sur (D) et P' sur (D') tels que (PP') soit perpendiculaire à (D) et $PA = P'B$.



28 Soit (Δ) une droite, A et B deux points situés du même côté de (Δ), ℓ un nombre strictement positif. Construisez deux points C et D de (Δ) tels que $CD = \ell$ et la longueur de la ligne polygonale $ACDB$ soit minimale.



29 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites non perpendiculaires et I un point non situé sur $(\mathcal{D})$ ou $(\mathcal{D}')$. Construisez un triangle AIB rectangle en I et isocèle tel que A soit sur $(\mathcal{D})$ et B sur $(\mathcal{D}')$.

30 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. Construisez deux points A et B de $(\mathcal{C})$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

31 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle, I un point intérieur à $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes en I. Construisez deux points A et A', A sur $(\mathcal{D})$ et A' sur $(\mathcal{C})$, tels que $(\mathcal{D}')$ soit la médiatrice du segment $[AA']$.

32 Soit (Γ) et (Γ') deux cercles et (Δ) une droite du plan.
Construisez un triangle ABC isocèle $(AB = AC)$ tel que A soit sur (Δ), B sur (Γ) et C sur (Γ') et que (Δ) soit la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Indication. Choisissez A sur (Δ) puis utilisez une réflexion.

33 Soit O un point du plan, f une isométrie fixant O. Démontrons que f est soit une réflexion dont l'axe passe par O, soit une rotation de centre O (propriété 5, page 108).

1° Supposons que f fixe également deux points A et B tels que O, A, B ne soient pas alignés.
Démontrez que f est l'identité du plan.
(On pourra, M étant un point d'image M' par f, chercher des points équidistants de M et de M'.)

2° Supposons que f fixe un point A autre que O.
On note g la réflexion d'axe (OA), C un point du plan, C' l'image de C par f.

a) On suppose $C' \neq C$. Démontrez que $g(C') = C$.

b) Déterminez la nature de $g \circ f$.

c) Démontrez que f est soit l'identité, soit la réflexion d'axe (OA).

3° Supposons que f fixe le seul point O.
Soit A un point autre que O, d'image A' par f, (Δ) la médiatrice du segment $[AA']$, g la réflexion d'axe (Δ).

a) Justifiez que O est un point de (Δ).

b) Démontrez que $g \circ f$ est une isométrie fixant au moins deux points distincts.

c) La composée $g \circ f$ peut-elle être l'identité du plan ?

d) Déterminez la nature de $g \circ f$; déduisez-en que f est une rotation de centre O.

34 Soit O un point et f une isométrie.
Démontrons que f est, de manière unique, la composée d'une isométrie g fixant O et d'une translation t (propriété 6, page 108).

1° Existence de g et t
Notons O' l'image de O par f, t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, g la composée $t^{-1} \circ f$.

a) Démontrez que g est une isométrie fixant O.

b) Déduisez-en que f est la composée d'une isométrie fixant O et d'une translation.

2° Unicité de g et t
Soit h une isométrie fixant O, t' une translation, h et t' telles que $f = t' \circ h$.

a) Quelle est l'image de O par t' ?

b) Déduisez-en que $t = t'$ puis que $h = g$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition de f.

PROBLÈMES

35 **Isométries et aires**
Soit $ABCD$ un parallélogramme, I un point du segment $[AC]$, autre que A et C. La droite passant par I et parallèle à (AB) coupe (AD) en E et (BC) en F. La droite passant par I et parallèle à (AD) coupe (AB) en H et (CD) en K.
En utilisant des symétries centrales, démontrez que les parallélogrammes $IFBH$ et $IEDK$ ont la même aire.

36 **Carré et parallélogramme**
Un parallélogramme $ABCD$ étant donné, on se propose de construire un carré $IJKL$ dont les sommets I, J, K, L soient respectivement sur les côtés (AB), (BC), (CD), (DA) du parallélogramme.

1° Le centre du carré est noté O.

a) Quelles sont les images de (AB) et (BC) par la symétrie de centre O ?

b) Quel est le centre du parallélogramme $ABCD$?

2° a) En utilisant une rotation de centre O, construisez le carré $IJKL$.

b) Quel est, suivant la nature du parallélogramme, le nombre de carrés solutions ?

37 **Figure de Torricelli**
Sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ d'un triangle ABC on construit les triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'. On suppose que ces trois triangles sont directs
$\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{3}\right)$.

1° Démontrez que les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ ont la même longueur.

2° Démontrez que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

38 Lieux géométriques

Soit ABC un triangle, H l'orthocentre, $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit à ABC, O le centre de $(\mathcal{C})$.
Le cercle de centre C passant par H et le cercle de centre H passant par C se coupent en deux points M et N. On se propose de déterminer les lieux géométriques de M et N quand C décrit $(\mathcal{C})$.

1° Quelle est la nature des triangles CHM et CHN ?

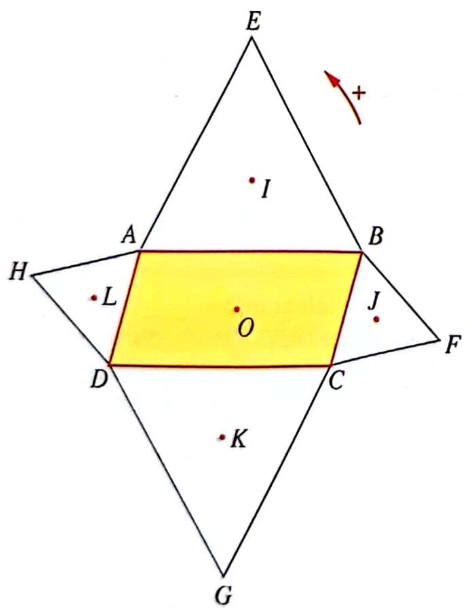
2° Démontrez que le symétrique H' de H par rapport à (AB) est sur $(\mathcal{C})$.

3° On appelle $(\mathcal{C}')$ le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à (AB) et O' son centre.
Démontrez que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OO'}$.

4° Déterminez les lieux géométriques des points M et N quand C décrit $(\mathcal{C})$.

39 Parallélogramme et rotation

Soit $ABCD$ un parallélogramme et O son centre. On construit, à l'extérieur du parallélogramme, les triangles équilatéraux ABE, BCF, CDG et ADH comme sur la figure ci-dessous ; on appelle I, J, K, L les centres respectifs de ces quatre triangles.



1° On note R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, R_D la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et s_O la symétrie de centre O.

a) Déterminez les images de B et E par R_B, puis par $s_O \circ R_B$, et enfin par $R_D \circ s_O \circ R_B$.

b) Démontrez que $R_D \circ s_O \circ R_B = s_O$. Déduisez-en que O est le milieu de $[EG]$.

2° Démontrez que $EFGH$ est un parallélogramme.

3° Démontrez que $IJKL$ est un parallélogramme.

40 Une propriété du trapèze

1° *Question préliminaire*
Soit $ABCD$ un trapèze ($(AB) /\!/ (CD)$) ; ses diagonales se coupent en I. La parallèle à (AB) passant par I coupe (AD) en J et (BC) en K. Démontrez que I est le milieu de $[JK]$.

2° Soit ABC un triangle non rectangle, D le pied sur (BC) de la hauteur issue de A, H l'orthocentre du triangle.
La perpendiculaire à (AB) passant par D coupe la perpendiculaire en B à (BC) en un point M ; la perpendiculaire à (AC) passant par D coupe la perpendiculaire en C à (BC) en un point N.
On appelle T la translation de vecteur $\overrightarrow{DH}$.

a) Démontrez que les images de (DM) et (DN) par T sont deux hauteurs du triangle ABC. Dessinez l'image du triangle MND par T.

b) On note M' et N' les images respectives par T de M et N, et K le point d'intersection des droites $(M'N')$ et (AD).
Déduisez de 1° une propriété des points D, H et K.

c) Démontrez que la droite (MN) passe par H.

41 Question de méthode...

Soit $ABCD$ un carré, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$, I et J les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{CB}$.

On se propose de démontrer, avec quatre méthodes différentes, que le triangle IDJ est rectangle en D et isocèle.

Première méthode : configurations

1° A l'aide des triangles ADI, DCJ et BIJ, calculez DI, DJ et IJ.

2° Concluez.

Deuxième méthode : vecteurs

1° En écrivant $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$, calculez DI, DJ et $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$.

2° Concluez.

Troisième méthode : transformations

1° Déterminez les images des points A, B puis I par la rotation R de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2° Concluez.

Quatrième méthode : analytique

1° Justifiez que, si $AB = 1$, le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ est orthonormal.

2° Calculez les coordonnées des points I et J.

3° Démontrez que le triangle DIJ est rectangle en D et isocèle.

7 DÉPLACEMENTS

OBJECTIFS

- *Connaître la partition de l'ensemble des isométries du plan en deux sous-ensembles, l'un étant composé des isométries conservant les angles orientés.*
- *Savoir trouver le déplacement transformant un bipoint (A, B) en un bipoint (A', B') lorsque $AB = A'B'$.*

ACTIVITÉS *Préparatoires*

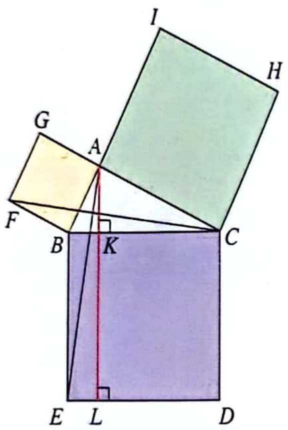
AP1 Isométries et configurations

L'utilisation des isométries permet d'apporter un nouveau regard sur les problèmes les plus anciens, comme la démonstration du théorème de Pythagore proposée par Euclide. La notion d'isométrie en tant que transformation se substitue à la notion de triangle isométrique telle qu'elle est étudiée en Première.

- **Énoncé du théorème**

La démonstration par Euclide du théorème de Pythagore se termine ainsi :

> Dans les triangles rectangles le carré sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit.



- **Figure**

Retrouvez sur la figure ci-contre les éléments intervenant dans l'énoncé précédent. Si on note : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, quelle expression de l'énoncé désigne la somme $AB^2 + AC^2$?

- **Démonstration**

1° *a*) Démontrez que les triangles ABE et FBC sont isométriques.

b) Quelle isométrie transforme ABE en FBC ?

2° Énoncez deux autres triangles isométriques et indiquez une isométrie transformant l'un de ces triangles en l'autre.

3° *a*) Comparez les aires des triangles FBA et FBC, puis ABE et KBE.

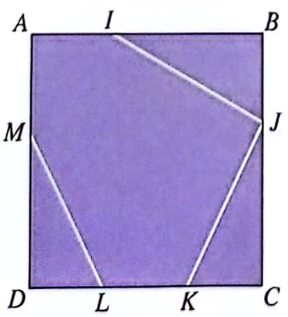
b) Comparez alors les aires du carré $ABFG$ et du rectangle $BELK$.

4° Démontrez que le carré $ACHI$ et le rectangle $CDLK$ ont la même aire.

5° Retrouvez le théorème de Pythagore.

AP2 Isométries et angles orientés

Les isométries ont-elles le même effet sur les angles géométriques et les angles orientés ?



Soit $ABCD$ un carré, I, J, K, L, M les points définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

1° Démontrez que les triangles BIJ, CJK, DLM sont isométriques.

2° Justifiez qu'il existe une réflexion transformant BIJ en DLM et précisez son axe (Δ_1).

3° Déterminez une réflexion, dont l'axe est noté (Δ_2), qui transforme DLM en CJK.

4° Déduisez des questions **2°** et **3°** qu'il existe une rotation qui transforme BIJ en CJK.

5° Comparez les angles :

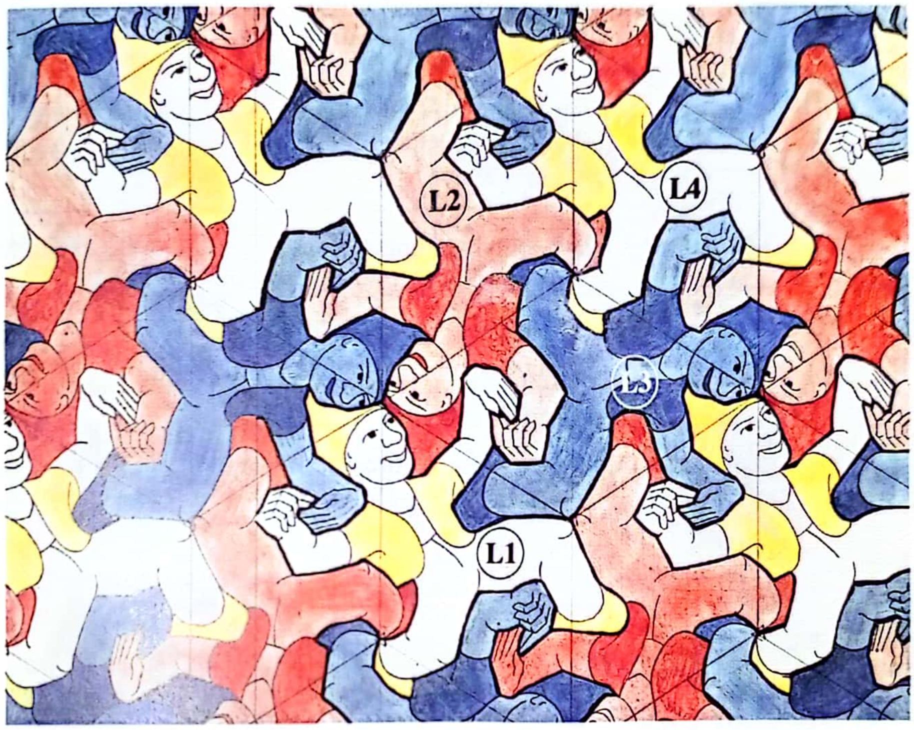
a) $\widehat{BIJ}$, $\widehat{DML}$ et $\widehat{CJK}$.

b) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IJ})$, $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ML})$ puis $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ML})$, $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JK})$ et enfin $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IJ})$, $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JK})$.

Rotation et réflexion ont le même effet sur les angles géométriques mais pas sur les angles orientés de vecteurs.

AP3 Composons des rotations

La composée de deux isométries, en particulier de deux rotations, est une isométrie (voir page 105). La composée de deux rotations de même centre O est une rotation de centre O (cours de Première). Visualisons, à l'aide d'une étude du dessin de M. C. Escher, la composée de deux rotations de centres différents.



M. C. Escher. Symmetry drawing (E. 21), 1938

La figure ci-dessus représente des lutins ; quatre d'entre eux sont notés L_1, L_2, L_3, L_4. Ces personnages sont manifestement superposables (une reproduction de l'un d'eux sur un papier calque peut être mise en coïncidence avec tout autre personnage du dessin).

1° *a*) Déterminez (par son centre et son angle) une rotation r_1 transformant L_1 en L_2, une rotation r_2 transformant L_2 en L_3, une rotation r_3 transformant L_1 en L_3.

b) Les centres de r_1, r_2, r_3 sont respectivement notés A, B, C. Vérifiez, sur le dessin, que ABC est un triangle équilatéral.

c) En utilisant des réflexions, démontrez que $r_3 = r_2 \circ r_1$.

2° *a*) Déterminez une rotation r' transformant L_2 en L_4.

b) Déterminez une isométrie f transformant L_1 en L_4.

c) Démontrez, à l'aide de réflexions, que : $f = r' \circ r_1$.

3° Déterminez trois autres lutins P_1, P_2, P_3 tels que P_1 soit transformé en P_2 par une rotation, P_2 en P_3 par une rotation, P_1 en P_3 par une translation.

4° On appelle I et J deux points de L_1, I' et J' leurs images par r_1, I'' et J'' les images de I' et J' par r_2 (ou par r'). Donnez une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{I'J'})$, $(\overrightarrow{I'J'}, \overrightarrow{I''J''})$, $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{I''J''})$.
Conjecturez un résultat relatif à la composée de deux rotations de centres différents.

1 ▪ Définition

D'après les propriétés 5 et 6 du chapitre précédent (page 108), toute isométrie s'écrit sous la forme $t \circ u$ où u est soit une réflexion, soit une rotation, et t une translation.
Les réflexions transforment les angles orientés de vecteurs en leurs opposés tandis que les translations et les rotations conservent les angles orientés de vecteurs (cf. AP2).
Il en résulte que les isométries du plan se classent en deux catégories : celles qui conservent les angles orientés de vecteurs, et les autres.

Définition 1 | **On appelle déplacement du plan toute isométrie du plan qui conserve les angles orientés de vecteurs.**

Remarque. Les isométries qui ne sont pas des déplacements sont appelées antidéplacements.

Exemples. L'identité, les translations et les rotations sont des déplacements ; les réflexions n'en sont pas.

2 ▪ Composée de deux déplacements. Réciproque d'un déplacement

1. Composée de deux déplacements

La composée de deux isométries est une isométrie. De plus, si deux isométries f et g conservent les angles orientés de vecteurs, alors il en est de même de leur composée $g \circ f$.

Propriété 1 | **La composée de deux déplacements est un déplacement.**

Exemples

1° La composée de deux translations est une translation ; c'est donc bien un déplacement.

2° La composée de deux rotations de même centre est une rotation ; c'est donc bien un déplacement.

2. Réciproque d'un déplacement

La réciproque d'une isométrie est une isométrie. De plus, si une isométrie f conserve les angles orientés de vecteurs, alors il en est de même de sa réciproque f^{-1}.

Propriété 2 **La réciproque d'un déplacement est un déplacement.**

EXEMPLES

1° La réciproque d'une translation est une translation, donc un déplacement.

2° La réciproque d'une rotation est une rotation, donc un déplacement.

3 ▪ Les déplacements du plan

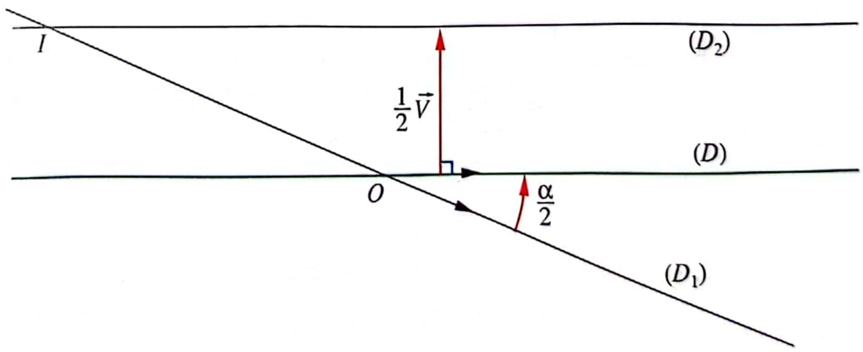
Les isométries fixant au moins un point sont les rotations et les réflexions. Puisqu'aucune réflexion n'est un déplacement, on a la propriété :

Propriété 3 **Tout déplacement qui fixe un point est une rotation.**

D'après la propriété 6 du chapitre précédent (page 108), tout déplacement est la composée d'une rotation et d'une translation.

Utilisons la décomposition des rotations et des translations en réflexions. Soit r une rotation, O son centre et α la mesure principale (en radians) de son angle ; soit t une translation de vecteur $\vec{V}$. Supposons que ni r ni t ne soit l'identité et étudions $t \circ r$.

Soit alors (D) la droite qui passe par O et dont $\vec{V}$ est un vecteur normal ; soit (D_1) l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\alpha}{2}$ et (D_2) l'image de (D) par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\vec{V}$.



Si s, s_1, s_2 sont les réflexions d'axes respectifs (D), (D_1), (D_2), alors :

$$t \circ r = (s_2 \circ s) \circ (s \circ s_1),$$

d'où : $t \circ r = s_2 \circ s_1$.

Le déplacement $t \circ r$ est donc la composée de deux réflexions ; c'est donc une translation ou une rotation.

Remarque. Si $t = \mathrm{Id}$, alors $t \circ r = r$; si $r = \mathrm{Id}$, alors $t \circ r = t$.

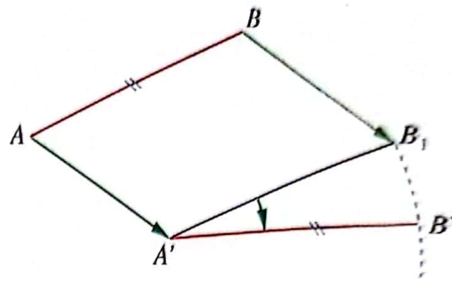
Propriété 4 **Tout déplacement est soit une translation soit une rotation.**

4. Détermination d'un déplacement

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que les segments $[AB]$ et $[A'B']$ soient de même longueur non nulle.

1. Existence et unicité d'un déplacement transformant A en A' et B en B'

Existence



La translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme A en A' et B en un point B_1 tel que $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, donc :

$$A'B_1 = A'B'$$

et $\quad (\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

La rotation r de centre A' et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ transforme donc B_1 en B' et fixe A'.

Ainsi : $A \overset{t}{\longmapsto} A' \overset{r}{\longmapsto} A'$
$\qquad B \longmapsto B_1 \longmapsto B'$

La composée $r \circ t$ est un déplacement transformant A en A' et B en B'.

Unicité

Notons f le déplacement $r \circ t$ et g un déplacement transformant A en A' et B en B' (il en existe, ne serait-ce que f). Alors f^{-1} est un déplacement qui transforme A' en A et B' en B et $f^{-1} \circ g$ est un déplacement qui fixe A et B, points distincts.
D'après la propriété 3, un déplacement qui fixe au moins un point est une rotation ; de plus, une rotation qui fixe deux points distincts est l'identité. Donc $f^{-1} \circ g$ est l'identité. Par suite $g = f$.

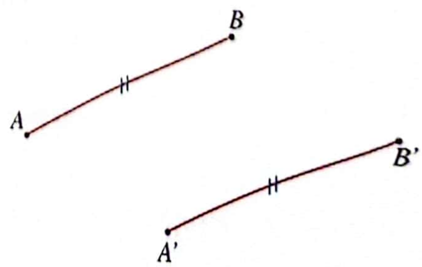
Propriété 5 **Étant donné quatre points A, B, A', B' tels que $AB = A'B'$ et $AB \neq 0$, il existe un déplacement et un seul transformant A en A' et B en B'.**

2. Nature du déplacement transformant A en A' et B en B'

D'après la propriété 4, ce déplacement f est une translation ou une rotation.

Cas où $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

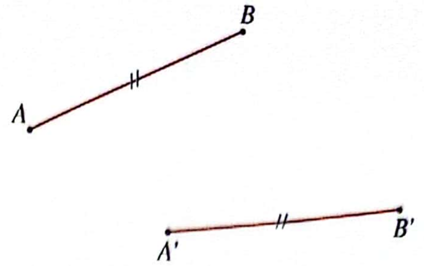
La translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme A en A' et B en B'.



D'après la propriété 5, le déplacement f est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

■ Cas où $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$

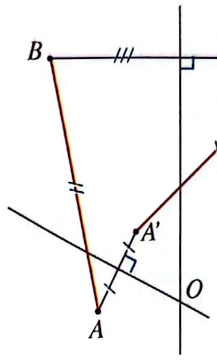
Le déplacement f n'est alors pas une translation ; c'est donc une rotation et l'angle de cette rotation est :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.



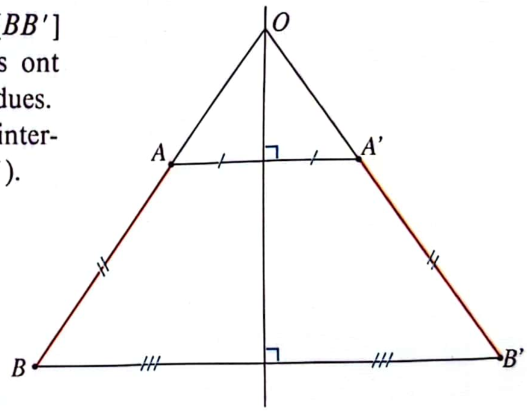
Construisons le centre O de la rotation f.

- Si $A' = A$ (ou $B' = B$), alors f est la rotation de centre A (ou B) et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.
- Si ($A' \neq A$ et $B' \neq B$), alors O, équidistant de A et A', de B et B', est commun aux médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.

— Si les médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ ne sont pas parallèles, alors O est leur unique point commun.

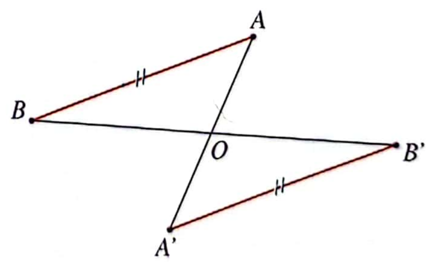


— Si les médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ sont parallèles, alors, puisqu'elles ont O en commun, elles sont confondues. Le point O est alors le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.



Remarque. Si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, alors :

— ou bien les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et dans ce cas :
$\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$,
donc la rotation f est une symétrie centrale (son centre O est le centre du parallélogramme $ABA'B'$) ;

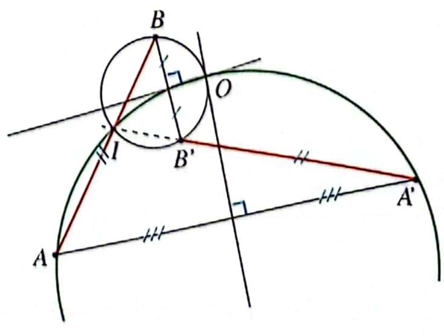


— ou bien les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en I et dans ce cas :

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \quad (\pi),$$

donc $\quad (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \quad (\pi)$

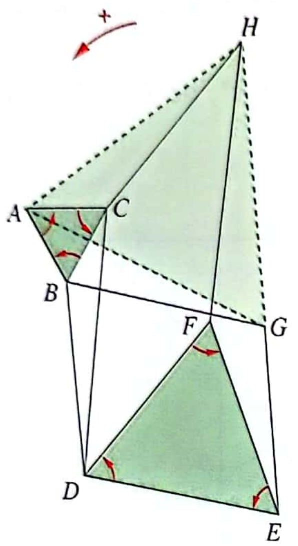
et, par suite, les points I, O, A, et A' sont cocycliques.
De même, I, O, B, B' sont cocycliques.



TRAVAUX Pratiques

TP1 Étude d'une configuration

Comme toutes les transformations, les déplacements peuvent être un outil puissant de démonstration.



Dans le plan orienté, on considère la figure ci-contre :

- ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux directs, c'est-à-dire que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$;
- $CDFH$ et $DEGB$ sont des parallélogrammes.

On se propose de démontrer que le triangle AGH est équilatéral.
Remarquons que, pour atteindre le but recherché, il suffirait de démontrer que H est l'image de G par une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$ et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{DF}$. On note f la composée $t' \circ r \circ t^{-1}$.

1° Démontrez que f est un déplacement.

2° *a*) Déterminez l'image de G par f.

b) On note I et I' les images respectives de A par t et t'.
Démontrez que $f(I) = I'$ et que $(\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{I'H}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (2\pi)$.

c) Démontrez que f est une rotation et précisez son angle.

3° Utilisez l'égalité $f(I) = I'$ pour déterminer le centre de la rotation f.

4° Concluez.

TP2 Lieu géométrique

En appliquant la méthode exposée dans la fiche méthode du chapitre 6. « Isométries » (page 114), étudions un problème de lieu géométrique.

Soit O un point et $\vec{V}$ un vecteur non nul. Étant donné un point M du plan, on appelle M' l'image de M par la translation de vecteur $\vec{V}$ et M'' l'image de M par la symétrie de centre O.
On se propose de déterminer le lieu géométrique des points M tels que : $\|\overrightarrow{M'M''}\| = \|\vec{V}\|$.

> **Indication.** Vous pouvez utiliser le milieu I du segment $[MM']$ et montrer :
>
> *a*) Que le lieu de I est un cercle ne dépendant que de O et de $\vec{V}$.
>
> *b*) Que M est l'image de I par une isométrie ne dépendant que de $\vec{V}$.

1° Étude préliminaire

Soit O un point, $\vec{V}$ un vecteur non nul.
Déterminez le lieu géométrique des points M tels que le triangle MOM' est rectangle en O.

2° Résolution du problème

a) Soit M un point solution.
Quelle est la nature du triangle $MM'M''$?
Quelle est la nature du triangle OMM' ?

b) Utilisez les résultats du 1° pour déterminer le lieu géométrique de M.

TP3 Déplacements associant deux figures

Recherchons, sur des exemples, des déplacements transformant une configuration donnée en une autre.

1. Déplacements associant deux cercles

On donne, dans le plan, deux cercles (C) et (C'), de centres respectifs O et O' distincts, et de même rayon. Cherchons les déplacements qui transforment (C) en (C').

1° Démontrez que, si d est un déplacement qui transforme (C) en (C'), alors d transforme O en O'.

2° Déterminez les translations transformant (C) en (C').

3° Soit (Δ) la médiatrice de $[OO']$, I un point de (Δ) et r la rotation de centre I qui transforme O en O'. Démontrez que r transforme (C) en (C').

4° Existe-t-il d'autres déplacements que ceux obtenus aux **2°** et **3°** qui transforment (C) en (C') ?

2. Déplacements associant deux triangles

$ABCD$ est un losange tel que le triangle ABC est équilatéral. On note O le centre du losange $ABCD$.

Cherchons les déplacements qui transforment le triangle ABC en le triangle ACD.

1° Démontrez que tout déplacement qui répond à la question transforme le centre I du triangle équilatéral ABC en I', centre du triangle équilatéral ACD.

2° *a*) Comparez IA, $I'A$, $I'C$, $I'D$.

b) Calculez les angles $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{I'A})$, $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{I'C})$, $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{I'D})$.

Reconnaissez les déplacements d_1, d_2, d_3 qui transforment I en I' et A respectivement en A, C, D.

3° Les déplacements d_1, d_2, d_3 répondent-ils à la question ? En existe-t-il d'autres ?

3. Déplacements associant deux rectangles

Deux rectangles $ABCD$ et $EFGH$ sont tels que E est le centre du rectangle $ABCD$, D est celui de $EFGH$ et $ABEH$ est un losange.

Cherchons les déplacements qui transforment le rectangle $ABCD$ en le rectangle $EFGH$.

1° Faites une figure et démontrez que les rectangles $ABCD$ et $EFGH$ ont les mêmes dimensions (longueur et largeur) et ne sont pas des carrés.

2° Démontrez que tout déplacement qui transforme $ABCD$ en $EFGH$ transforme E en D.

3° *a*) Soit O le milieu de $[DE]$. Démontrez que la symétrie s de centre O transforme le rectangle $ABCD$ en le rectangle $EFGH$.

b) Démontrez que les déplacements qui laissent invariant le rectangle $EFGH$ sont l'identité et la symétrie s' de centre D.

c) Reconnaissez de façon précise la composée $s' \circ s$.

4° Quels sont les déplacements qui transforment $ABCD$ en $EFGH$?

DÉPLACEMENTS

COMMENT RECONNAÎTRE UN DÉPLACEMENT 1

Voyez si la transformation est :

- une isométrie qui conserve les angles orientés de vecteurs ;
- une composée de deux réflexions ;
- une composée de déplacements.

COMMENT DÉTERMINER UN DÉPLACEMENT 2

Si c'est une translation

- par son vecteur ;
- par un point et son image.

Si c'est une rotation

- par son centre et son angle ;
- par son centre, un point particulier autre que le centre et l'image de ce point ;
- par son angle, un point particulier non fixe et l'image de ce point.

Sinon

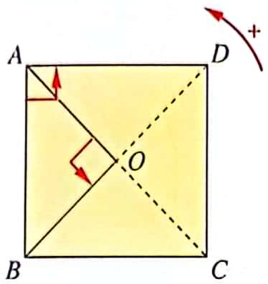
par deux points distincts et leurs images.

EXERCICES Commentés

1 Composée d'une translation et d'une rotation

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.



Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ t$.

Commentaire

Cet exercice figure au chapitre 6 « Isométries ». L'étude proposée utilisait des décompositions de rotations et de translations à l'aide de réflexions. Il est possible, en utilisant les propriétés des déplacements (propriété 1 et fiche méthode : « Comment déterminer un déplacement »), de résoudre plus rapidement cet exercice.

Pour déterminer le centre de la rotation composée, on cherche les images par $r \circ t$ de quelques points de la figure, en espérant trouver un point fixe ; à défaut, on utilise un point et son image, ceux-ci étant deux points de la figure.

Une solution

- Les deux transformations r et t sont des déplacements donc $r \circ t$ est un déplacement ; c'est donc une translation ou une rotation.
- Si M et N sont deux points alors :

$$M \overset{t}{\longmapsto} M' \overset{r}{\longmapsto} M'' \qquad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = 0 \quad [2\pi]$$
$$N \longmapsto N' \longmapsto N'' \qquad (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M''N''}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi],$$

donc $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}) = \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

Par suite : $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{M''N''}$ et $r \circ t$ n'est pas une translation ; $r \circ t$ est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Remarquons que :

$t(A) = D$ (car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

$r(D) = A$ (car $OA = OD$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$)

donc $r \circ t(A) = A$ et le centre de $r \circ t$ est A.

Ainsi $r \circ t$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2 Une construction

Dans le plan orienté d'un cercle (Γ) de centre O, A et B sont deux points donnés, A intérieur à (Γ) et B extérieur à (Γ).

Construisez deux points C et D de (Γ) tels que : $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ soient colinéaires et de même sens.

Commentaire

La figure donnée contient le cercle (Γ), son centre O et les deux points A et B. Les deux points C et D à construire sur (Γ) (à supposer que de tels points existent) doivent être tels que :

$$OC = OD \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi],$$

ce qui incite à introduire la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, rotation telle que $r(C) = D$.

Les points A et B ne sont pas sur (Γ) ; l'hypothèse portant sur $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ peut se traduire par : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 0\quad [2\pi]$; nous permet-elle de localiser C ou D sur une autre courbe que (Γ) ?

Une solution

- **Analyse**

Supposons que C et D soient deux points répondant à la question. Utilisons la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et l'image A' de A par r.

Alors : $O \overset{r}{\longmapsto} O$, $C \longmapsto D$, $A \longmapsto A'$,

donc : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$.

Or : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 0\quad [2\pi]$.

Donc : $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'D}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$,

c'est-à-dire : $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$.

Ainsi D appartient à (Γ) et à l'ensemble (Γ') des points M tels que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$; de plus : $C = r^{-1}(D)$, ce qui définit C connaissant D.

- **Synthèse**

Si D est un point commun à (Γ) et (Γ') et si C est l'antécédent de D par r, alors :

$C \in (\Gamma)$ et $D \in (\Gamma)$;

$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$;

$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$.

D'où :

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 0\quad [2\pi]$,

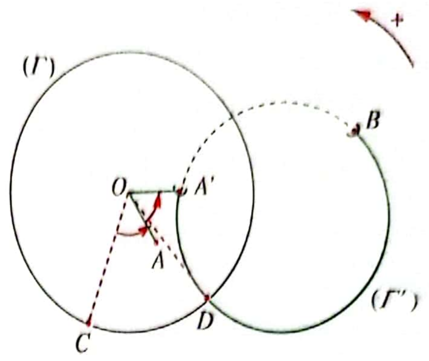
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens.

- **Construction et discussion**

(Γ') est un arc de cercle, d'extrémités A' et B. $OA' = OA$ et $OA < R$ (car A est intérieur à (Γ)), donc A' est intérieur à (Γ).

A' étant intérieur à (Γ) et B extérieur à (Γ), le cercle qui porte (Γ') coupe (Γ) en deux points situés de part et d'autre de la droite $(A'B)$. Donc (Γ') et (Γ) se coupent en un seul point.

Il existe donc un unique couple (C, D) répondant à la question.



LE JOUR DU BAC

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$ **et** $AB < AC$.

On note $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.
Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$.
La droite (OE) coupe $(\mathcal{C})$ en I et J, tels que J et A soient sur le même arc $\widehat{BC}$ du cercle $(\mathcal{C})$.

1° *a*) Faire une figure.

***b*) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :**

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$?

***c*) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :**

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}\quad [2\pi]$ **et** $MB < MC$?

2° *a*) Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$.
Déterminer son angle.

***b*) Démontrer que son centre est un point de $(\mathcal{C})$ que l'on précisera.**

***c*) Quelle est la nature du triangle JAP ?**

3° Déterminer l'image de B par la composée $R \circ S_B$, où S_B désigne la symétrie de centre B.
Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette composée. ***(Bac)***

ANALYSE DE L'ÉNONCÉ

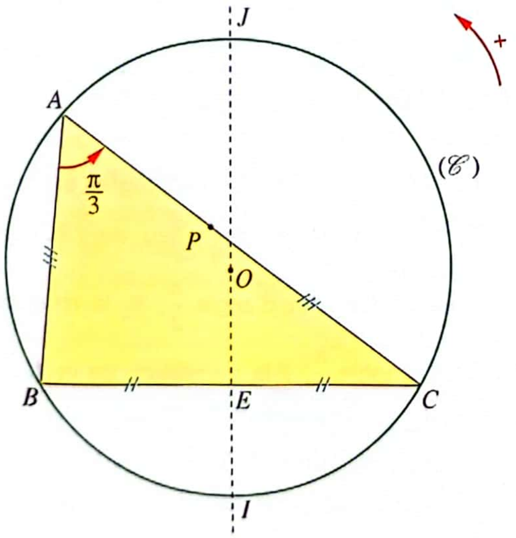
L'énoncé met nettement en évidence les parties du programme auxquelles il est bon de faire référence :

- **ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \alpha \quad [2\pi]$ où B et C sont deux points donnés et $\alpha = \frac{\pi}{3}$;**
- **détermination du déplacement qui transforme A en P et B en C avec $AB = PC$;**
- **reconnaissance de la composée de deux déplacements donnés.**

UNE SOLUTION

1° *a*) Remarquons que, E étant le milieu de la corde $[BC]$ du cercle $(\mathcal{C})$, E est aussi le projeté orthogonal de O sur (BC).

b) L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ est l'arc $\overset{\frown}{BAC}$ du cercle $(\mathcal{C})$, arc privé de B et C.



Remarque

$(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ et $\quad (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{3} + \pi \quad [2\pi]$.

c) L'ensemble des points M du plan tels que $MB < MC$ est le demi-plan de frontière (IJ) (frontière exclue) qui contient A.
Par suite, l'ensemble des points M du plan tels que :

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad$ et $\quad MB < MC$

est l'arc $\overset{\frown}{BAJ}$ du cercle $(\mathcal{C})$, arc privé de B et J.

2° *a*) Par hypothèse, $AB = PC$. De plus, $AB \neq 0$ (car, par hypothèse, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est défini).
Donc il existe un unique déplacement qui transforme A en P et B en C; c'est donc une translation ou une rotation. Pour en décider, calculons l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PC})$.

Par hypothèse : $P \in [AC]$, donc les vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens. Par suite : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, autrement dit :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Ce résultat prouve que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{PC}$, donc que le déplacement qui transforme A en P et B en C n'est pas une translation; c'est donc une rotation R d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Le centre de la rotation R est le seul point du plan situé sur la médiatrice de $[BC]$ et sur l'arc $\overset{\frown}{BAC}$ du cercle $(\mathcal{C})$. Le centre de la rotation R est donc le point J.

c) Le résultat précédent prouve que la rotation R, de centre J et d'angle $\frac{\pi}{3}$, transforme A en P, donc que le triangle APJ est équilatéral (et même : direct).

3° Le schéma $\quad B \overset{S_B}{\longmapsto} B \overset{R}{\longmapsto} C \quad$ justifie que l'image de B par $R \circ S_B$ est C.
La symétrie S_B de centre B est aussi la rotation de centre B et d'angle π. Donc S_B est un déplacement.
Composé de deux déplacements, $R \circ S_B$ est donc un déplacement, donc une translation ou une rotation.
Pour préciser, proposons deux méthodes.

Méthode 1. Décomposons S_B et R à l'aide de réflexions : notons S_{BI}, S_{BJ} et S_{JI} les réflexions d'axes respectifs les droites (BI), (BJ) et (JI).

Alors : $\quad S_B = S_{BJ} \circ S_{BI} \quad$ et $R = S_{JI} \circ S_{BJ}$; $\quad$ donc :
$R \circ S_B = S_{JI} \circ S_{BI}$.

Les droites (BI) et (JI) se coupent en I, et de plus :
$2(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IJ}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$.

Donc $R \circ S_B$ est la rotation R' de centre I et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Méthode 2. Calculons l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'})$, M étant un point quelconque, distinct de B, et M' l'image de M par $R \circ S_B$.
M_1 étant l'image de M par S_B, alors :

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_1}) + (\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{CM'}) \quad [2\pi]$,

donc : $\quad (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'}) = \pi + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Or $\quad \pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

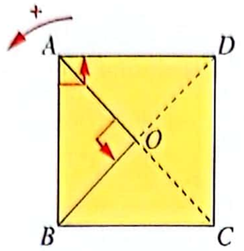
On retrouve le résultat précédent.

EXERCICES & PROBLÈMES

Q.C.M.

Dans chacun des exercices suivants, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 $ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.



$R_{(C,\ \pi/2)} \circ R'_{(A,\ \pi/2)}$ est la symétrie de centre :

B .... ☐
D .... ☐
O .... ☐

2 L'application $T_{\vec{u}} \circ R_{[O,\ \theta]}$, $\vec{u}$ non nul, $\theta \in \,]0\,;\,2\pi[$ est une rotation d'angle θ dont le centre est :

O .... ☐
$T_{\vec{u}}(O)$ .... ☐
autre que O et $T_{\vec{u}}(O)$ .... ☐

3 O et O' sont deux points distincts, $\theta \in \,]0\,;\,\pi[$. L'application $R_{[O',\ -\theta]} \circ R'_{[O,\ \theta]}$ est :

une rotation autre que l'identité .... ☐
la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ .... ☐
une translation .... ☐

4 I est le milieu du segment $[OO']$ de longueur non nulle. L'application $R'_{[O',\ -\pi/2]} \circ T_{\overrightarrow{OO'}} \circ R_{[O,\ \pi/2]}$ est :

l'identité .... ☐
une rotation de centre I .... ☐
la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ .... ☐
la symétrie de centre I .... ☐

5 Un déplacement qui transforme un couple (A, B) en un couple (A', B') tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \pi \quad [2\pi]$ est :

une translation .... ☐
une symétrie centrale .... ☐
une rotation .... ☐
une réflexion .... ☐

6 Si R est une rotation d'angle θ et si S est une réflexion, alors :

$S \circ R \circ S$ est une rotation d'angle θ .... ☐
$S \circ R \circ S$ est une rotation .... ☐
$S \circ R \circ S$ est une rotation de même centre que R .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

DÉPLACEMENTS CONSERVANT UNE FIGURE

7 1° Quels sont les déplacements conservant un segment $[AB]$ de longueur non nulle ?

2° Quels sont les déplacements conservant un triangle ABC isocèle (non équilatéral) ?

3° Quels sont les déplacements conservant un cercle ?

4° Quels sont les déplacements conservant un rectangle (non carré) ?

5° Quels sont les déplacements conservant un losange (non carré) ?

COMPOSITION DE DÉPLACEMENTS

8 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Notons I le milieu de $[BC]$, R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, $f = R_C \circ T \circ R_B$.

1° Déterminez la nature de f.

2° Quelle est l'image de B par f ?

3° Caractérisez f.

9 Soit A, I, J trois points du plan et r la rotation de centre I et d'angle α, α non nul et élément de $]-\pi\,;\,\pi[$. La rotation r transforme A en B et J en C. La rotation r' de centre A et d'angle α transforme J en D. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

10 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 2a$, $AD = a$, a nombre réel strictement positif, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On appelle O le centre du rectangle, r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1° Dessinez le rectangle $ABCD$ et son image $A'B'C'D'$ par l'application $t \circ r$.

2° a) Caractérisez l'application $t \circ r$.

b) On note Ω le point fixe de $t \circ r$. Donnez une construction de Ω.

Application : ce point Ω est utilisé en ébénisterie pour construire une table rectangulaire dont on veut doubler la surface par déploiement de deux panneaux après rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Ω, le centre de la table restant inchangé.

11 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
On appelle R la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose : $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1° a) Déterminez l'image de K par f, et l'image de J par g.

b) Précisez la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2° a) Déterminez la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$ (f^{-1} étant l'application réciproque de f).

b) Cherchez l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractérisez alors cette application.

c) Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.
Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

12 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct. Les points A', B', C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1° Montrez qu'il existe un point P et un seul vérifiant les conditions suivantes : $PA = PC$ et $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit Q le point tel que :

$QA = QB$ et $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}) = -\frac{\pi}{2}$.

2° a) On désigne par r_P la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$, par r_Q la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par $s_{A'}$ la symétrie de centre A'.

On pose $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.
Étudiez l'image de A par f. Que peut-on dire de f?

b) Quelle est la nature du triangle $A'PQ$?

13 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Notons I le milieu de $[BC]$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, $f = r_C \circ t \circ r_B$.

1° Déterminez la nature de f.

2° Quelle est l'image de B par f?

3° Caractérisez f.

14 Soit A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On appelle : R_1 la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$,
R_2 la rotation de centre B et d'angle π,
R_3 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1° Déterminez une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.

2° On pose $T = R_1 \circ R_2 \circ R_3$.

a) Quelle est la nature de T?

b) Caractérisez T.

3° On pose $U = R_3 \circ T$.

a) Quelle est la nature de U?

b) Caractérisez U.

15 Soit A, B et C les points de coordonnées respectives $(6, 0)$, $(3, \sqrt{3})$, $(3, 0)$ dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1° Déterminez une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

2° On pose : $T = R_1 \circ R_2$.
Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de T :

a) en utilisant des réflexions;

b) en n'utilisant pas de réflexions.

16 Soit ABC un triangle équilatéral, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On note : R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$,
T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$,
R' la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$,
R'' la transformation réciproque de R.

1° On pose $f = R' \circ R''$

a) Justifiez que f est un déplacement.

b) Soit M et N deux points, M' et N' leurs images par R'', M'' et N'' les images de M' et N' par R'. Calculez $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''})$.

c) Quelle est la nature de f ?

d) Déterminez l'image de B par f puis caractérisez f.

2° On pose : $g = R' \circ T \circ R$.

a) Justifiez que g est un déplacement.

b) Soit M et N deux points.

On pose : $M \overset{R}{\mapsto} M' \overset{T}{\mapsto} M'' \overset{R'}{\mapsto} M'''$

$N \mapsto N' \mapsto N'' \mapsto N'''$

Calculez $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'''N'''})$. Quelle est la nature de g ?

c) Déterminez l'image de B par g.

d) Caractérisez g (construisez son centre).

DÉTERMINATION D'UN DÉPLACEMENT

17 ■■ Un triangle ABC est rectangle en A et isocèle. Soit O le milieu de $[BC]$, M un point variable de $[BC]$, P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AC). Démontrez que le triangle OPQ est rectangle isocèle.

18 ■■ Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives $(1, 1)$, $(-3, 3)$, $(2, 2)$, $(-4, 4)$. On appelle E et F les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

1° Démontrez qu'il existe une rotation unique r qui transforme A en B et C en D. Déterminez son angle et son centre I.

2° Démontrez qu'il existe une rotation unique r' qui transforme A en D et C en B. Déterminez son angle et son centre J.

3° Que peut-on dire du quadrilatère $IEJF$?

19 ■■■ Dans le plan orienté, on trace un triangle ABC non isocèle et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

Soit (d_1) la demi-droite d'origine B contenant A.
Soit (d_2) la demi-droite d'origine C contenant A.
On place sur (d_1) un point P différent de B et sur (d_2) un point Q différent de C, tels que $BP = CQ$.

1° Justifiez l'existence d'une unique rotation r transformant B en C et P en Q. Précisez l'angle de r. Construisez le centre O de r et prouvez que ce point est indépendant de P et Q.

2° Quelle est la nature du triangle OPQ ?

3° Construisez les points P sur (d_1) et Q sur (d_2) sachant que $BP = CQ = PQ$.

20 ■■■ On donne, dans le plan orienté, un triangle isocèle $OO'A$ avec $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = \frac{\pi}{2}$.

Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B.
A tout point M de $(\mathcal{C})$, on associe le point M' de $(\mathcal{C}')$ tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})$ soit $-\frac{\pi}{2}$.

1° Montrez qu'il existe une rotation r, que l'on caractérisera, transformant O en O' et M en M'.

2° M étant distinct de B, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement $(\mathcal{C}')$ en N' et $(\mathcal{C})$ en N. Montrez que N' est l'image de N par la rotation r.

21 ■■■ Soit OAB un triangle isocèle $(OA = OB)$, et un point P variable du segment $[AB]$, distinct de A et de B. La parallèle à (OB) passant par P coupe (OA) en A'. La parallèle à (OA) passant par P coupe (OB) en B'.

1° Justifiez qu'il existe une rotation r transformant O en B et A en O.

2° Quelle est l'image de A' par r ?

3° Démontrez que les points O, A', B' et le centre Ω de r sont cocycliques.

PROBLÈMES

22 ■■ **Alignement. Lieu géométrique**

On considère, dans le plan orienté (P), deux points distincts A et B. Pour tout point M de (P), on appelle M' l'image de M par la rotation r_A de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{3}$, et M'' l'image de M par la rotation r_B de centre B, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1° De l'étude de $r_B \circ (r_A)^{-1}$ déduisez que, pour tout point M de (P), le milieu de $[M'M'']$ est un point fixe J dont on démontrera qu'il appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

2° Le but de cette question est de déterminer l'ensemble des points M pour lesquels M, M', M'' sont alignés.

a) Pour tout point M de (P) distinct de A et B, démontrez que :

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Déduisez-en l'ensemble des points M du plan tels que M, M', M'' sont alignés.

Indication. On pourra calculer, dans le triangle BMM'' :
$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM''}) + (\overrightarrow{M''M}, \overrightarrow{M''B})$.

23 Rotation et lieux géométriques

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B.

1° On considère la transformation : $T = R_B \circ R_A^{-1}$.

a) Construisez le point C image du point A par T.

b) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de T.

c) Déduisez-en la nature du quadrilatère $M_1 M_2 CA$.

2° On suppose que le point M décrit le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

a) Déterminez et construisez l'ensemble (Γ_2) décrit par le point M_2 quand M décrit (Γ).

b) Soit ω et ω_2 les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. Comparez les vecteurs $\overrightarrow{\omega\omega_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminez l'ensemble décrit par le point I, milieu de $[M_1 M_2]$ quand M décrit (Γ).

(Bac. 1991)

24 Triangle rectangle isocèle

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$,

I et J les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

On appelle K le point tel que KBI soit un triangle rectangle isocèle avec $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KI}) = \frac{\pi}{2}$.

1° Démontrez que la médiatrice de $[IJ]$ passe par O.

2° Démontrez que AKJ est rectangle isocèle.

25 Distances

On considère un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle (Γ). Soit M un point distinct de A et de C, situé sur celui des arcs $\overset{\frown}{AC}$ dont B n'est pas élément.
I est le point du segment $[MB]$ tel que $MI = MA$.

1° Montrez que le triangle IMA est équilatéral.

2° On oriente le plan de façon que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminez les images par r des points B et I.
Déduisez-en que $MA + MC = MB$.

26 Triangle équilatéral

Soit ABC un triangle, O un point du plan, distinct de A, B et C, r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

On appelle A', B', C' les images respectives de A, B, C par r et U, V, W les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$, $[C'A]$.
Démontrez que le triangle UVW est équilatéral.

Indication. On pourra utiliser les affixes des points A, B, C, A', ..., W dans un repère orthonormal direct d'origine O.

27 Construction d'un triangle équilatéral

Soit deux droites (D) et (D') distinctes et parallèles, et un point A n'appartenant ni à (D), ni à (D').
Construisez, à l'aide d'une transformation géométrique simple, un triangle équilatéral PAP' tel que P soit sur (D) et P' sur (D').
Combien de triangles répondent à la question ?

28 Un lieu géométrique

Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R dans un plan orienté (P), $(\mathcal{D})$ une droite ne coupant pas $(\mathcal{C})$.

1° Soit A un point de $(\mathcal{D})$. On note ε_A le lieu des points M de (P) vérifiant la propriété : « Il existe un point N de $(\mathcal{C})$ tel que le triangle AMN soit équilatéral direct $\left((\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{3}\right)$ ».

Montrez que ε_A est un cercle dont vous déterminerez le centre Ω_A et le rayon. Construisez ε_A.

2° Quel est le lieu des points Ω_A lorsque A décrit $(\mathcal{D})$? Construisez cet ensemble.

29 Quart de tour et symétrie centrale

Dans le plan orienté on suppose donnés deux points distincts O et I. On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie de centre I.

I — 1° Soit $OJO'G$ le carré direct de centre I (c'est-à-dire que $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{2}$). Placez ces différents points sur une figure (on prendra $OI = 4$ cm).

2° Prouvez que $s \circ r$ est la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3° Déduisez-en que J est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.
Pour tout couple (M, N) de points du plan, on note :

— A et B les images de M par r et s;

— C et D les images de N par r et s.

II — Soit M un point distinct de J. On suppose que J est le milieu du segment $[MN]$. Démontrez que $ABCD$ est un carré de centre G. Placez M et N et le carré $ABCD$ sur la figure.

III — Le point M étant toujours donné distinct de J, on suppose inversement que N est tel que $ABCD$ soit un carré. Prouvez que J est le milieu de $[MN]$ et que G est le centre du carré $ABCD$ (on introduira le milieu J' de $[MN]$ et le centre G' du carré; on comparera alors $r(J')$ et $s(J')$).

IV — Soit r' le quart de tour direct de centre G. Prouvez que $r' \circ r = s$. Déduisez-en que, sous les hypothèses de la question II, le carré $ABCD$ est direct (c'est-à-dire que $r'(A) = B$).

30 ■■■ Figure de Van Aubel

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un parallélogramme direct de centre O (si α est la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ alors α appartient à $]0\,;\pi[$).
On construit les carrés directs $BAFE$, $ADHG$, $DCJI$, $CBLK$ de centres respectifs M, N, P, Q.

1° La rotation r de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme B en A.

a) On appelle L' l'image de L par r.
Justifiez que $AD = AL'$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AL'}) = 0$. Déduisez-en que L' est le point D.

b) Déterminez de même l'image de C par r.

c) Déduisez-en que $r(Q) = N$.

d) On appelle r' la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$. r' transforme D en C. Démontrez que $r'(N) = Q$.

e) Démontrez que $MNPQ$ est un carré.

2° On appelle s la symétrie de centre O.

a) Déterminez les images de A et B par s.

b) On appelle E' l'image de E par s. En comparant DE' et DI puis $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE'})$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DI})$ démontrez que E' est le point I.

c) Démontrez que s transforme le carré $ABEF$ en $DCJI$.

d) Quel est le centre du carré $MNPQ$?

3° Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

a) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de l'application $r \circ t$.

b) Démontrez que le triangle BJG est rectangle isocèle.

31 ■■■ Aire maximale. Lieu géométrique

Soit A et B deux points distincts, C un point du segment $[AB]$. On pose $AB = 10$ (unité : le centimètre) et $AC = x$.
On construit, du même côté de la droite (AB), les triangles équilatéraux ACD et CBE ; on supposera que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE})$ ont pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

1° Démontrez que : $DB = AE$.

2° On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[AE]$. Démontrez que le triangle IJC est équilatéral.

3° a) Exprimez l'aire, notée $\alpha(x)$, du triangle CDE en fonction de x.

b) Représentez graphiquement, dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la fonction α et montrez que cette fonction admet un maximum pour une valeur de x que vous préciserez.

4° Les droites (AD) et (BE) se coupent en F.

a) Calculez $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{FE})$.

b) Justifiez l'existence d'une rotation r qui transforme A en F et D en E et précisez son angle θ.

c) Construisez le centre O de r.

d) Démontrez que la médiatrice du segment $[DE]$ passe par un point fixe quand C décrit le segment $[AB]$.

5° Démontrez que les points D, E, F, O sont cocycliques.

6° On appelle K le milieu du segment $[DE]$.
Déterminez le lieu géométrique de K lorsque C décrit le segment $[AB]$.
(On pourra utiliser le quadrilatère $CDFE$.)

7° On note L et M les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[BF]$ et (Δ) l'image de la droite (LM) par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

a) Démontrez que les droites (DE) sont tangentes à la parabole $(\mathscr{P})$ de foyer O et de directrice (Δ).

b) Dessinez $(\mathscr{P})$.

32 ■■■ Problème de Fagnano

Soit ABC un triangle dont on suppose tous les angles aigus.

1° Soit M un point fixé de $[BC]$, M' et M'' les symétriques de M par rapport à (AB) et (AC) respectivement, P et Q les intersections de $(M'M'')$ avec (AB) et (AC) respectivement. On admettra que P est sur $[AB]$, et Q sur $[AC]$.
Montrez que le triangle PMQ a pour périmètre la longueur du segment $[M'M'']$.

2° Déduisez de la question précédente que, le point M étant toujours fixé sur $[BC]$, parmi tous les triangles dont un sommet est M, un autre est sur $[AB]$ et le troisième sur $[AC]$, l'unique triangle de plus petit périmètre est MPQ. On notera $2p$ le périmètre de MPQ (qui dépend du point M).

3° a) Montrez que le triangle $AM'M''$ est isocèle, de sommet A, et admet pour angle au sommet l'angle $2\,\widehat{BAC}$.

b) On note h la longueur commune aux deux côtés égaux du triangle isocèle $AM'M''$.
Montrez l'égalité : $p = h \sin(\widehat{BAC})$.
Montrez alors que, lorsque M varie sur $[BC]$, p est minimal lorsque h est minimale.

c) En remarquant que h est égale à AM, montrez que p est minimal lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BC).

4° Montrez, en utilisant ce qui précède, le résultat suivant : parmi tous les triangles inscrits dans le triangle ABC, celui dont le périmètre est le plus petit est nécessairement celui dont les sommets sont les pieds des hauteurs du triangle.

8 SIMILITUDES

OBJECTIFS

- *Définir une nouvelle catégorie de transformations, composées d'une homothétie et d'une rotation de même centre.*
- *Donner une interprétation géométrique de la transformation du plan complexe définie par* $z \mapsto az + b$ *avec* a *et* b *nombres complexes (comme cela a été fait pour* $z \mapsto z + a$ *et* $z \mapsto e^{i\theta} z$*).*
- *Appliquer les similitudes à la recherche de problèmes de lieux géométriques et de constructions.*

ACTIVITÉS Préparatoires

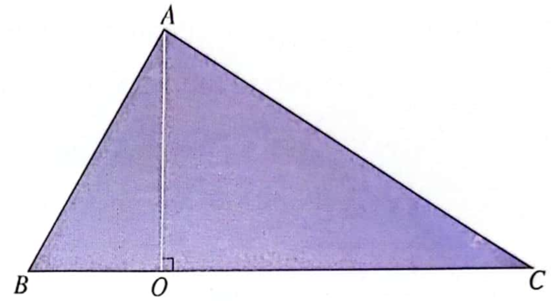
AP1 Composée d'une homothétie et d'une rotation

L'objectif de cette activité est de visualiser la composée d'une homothétie et d'une rotation et de mettre en évidence son effet sur les angles.

On considère le triangle rectangle ABC de la figure ci-dessous.

On sait que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$.

On nomme O le projeté orthogonal de A sur (BC).



1° Calculez une mesure de chacun des angles des trois triangles rectangles présents sur la figure.

2° Reproduisez la figure et faites-y apparaître l'image du triangle OAB par r, quart de tour indirect de centre O.

3° Recherchez une application h du plan telle que $h \circ r$ transforme le triangle OAB en le triangle OCA.
Déterminez alors le transformé du triangle OAB par $r \circ h$.

4° Que dire des effets de $h \circ r$ sur les angles géométriques ? sur les angles orientés ?

AP2 Homothéties. Rotations. Nombres complexes

L'étude des nombres complexes, en liaison avec les transformations, a permis d'établir une relation entre des rotations et l'application $z \mapsto az$, a étant un nombre complexe de module 1 (p. 249 du manuel « Enseignement obligatoire »). Cette activité propose d'étendre cette étude à des homothéties et des rotations afin de pouvoir traiter, à l'aide des nombres complexes, des situations telles que celle rencontrée dans l'AP1.

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormal direct du plan.

1. Homothétie et rotation de centre O

On note h l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Pour tout point M du plan, on note M_1 son image par r, M_2 l'image de M_1 par h et z, z_1, z_2 les affixes respectives de M, M_1, M_2.
Exprimez z_2 en fonction de z.

2. Étude réciproque

Soit f une application du plan définie de la façon suivante : si M est un point du plan, d'affixe z, et si M', d'affixe z', est son image par f alors $z' = (1 - i)z - i$.

1° Placez les points A et B d'affixes respectives $2i$ et $3 + 3i$ et leurs images A' et B' par f.

2° Calculez le rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$ et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

3° Démontrez que f est une bijection du plan.

4° *a*) Démontrez que f laisse un point unique, noté I, invariant.

b) L'affixe de I est notée z_I. Vérifiez que, quel que soit le point M, on a :

$$z' - z_I = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_I).$$

c) Calculez, pour M différent de I, le rapport $\dfrac{IM'}{IM}$ et l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$.

d) On appelle M'' le point d'affixe z'' telle que $z'' - z_I = e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_I)$. Justifiez que M'' est l'image de M par une rotation dont vous préciserez le centre et l'angle.

e) Justifiez que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie de centre commun I.

5° Déduisez-en que si M, N, P sont trois points distincts du plan et M', N', P' leurs images par f alors on a :

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{M'P'}{MP} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

Ainsi :

L'application f, bijective, transforme les distances dans un rapport donné et conserve les angles orientés. Une telle application est appelée une similitude directe.

Bramante : escalier en colimaçon du Vatican, 16e siècle.

Cette représentation plane d'une configuration spatiale suggère l'idée de similitude par la composée de rotations et de contractions (voir exercice commenté 3).

COURS

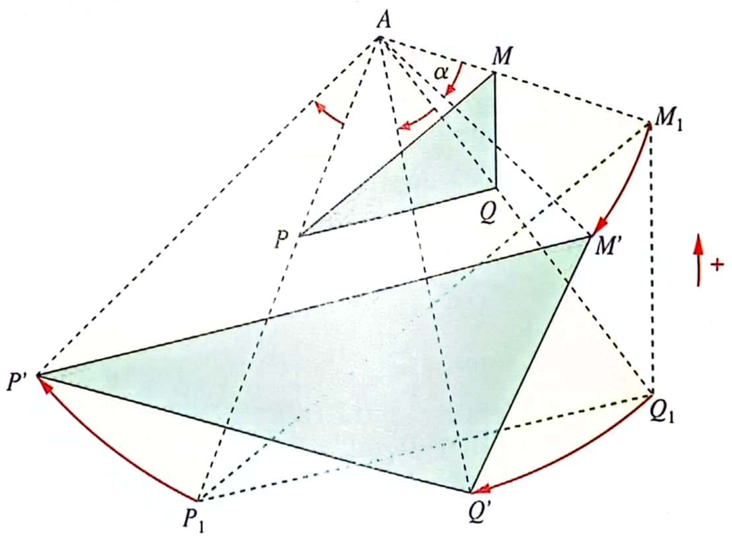
1 ▪ Composée d'une homothétie et d'une rotation

Soit h une homothétie, de rapport k **positif** et de centre A ; soit r une rotation de centre A, d'angle α. Intéressons-nous à la composée $r \circ h$.

1. Effet sur les distances et sur les angles

• L'homothétie h multipliant les distances par k, et la rotation r les conservant, $r \circ h$ multiplie les distances par k.

• L'homothétie h et la rotation r conservant les angles orientés de vecteurs, il en est de même de $r \circ h$.



Propriété 1 **La composée d'une homothétie de rapport k positif et d'une rotation de même centre est une transformation du plan qui multiplie les distances par k et conserve les angles orientés.**

2. Écriture complexe de $h \circ r$

On considère des points A, M, M' d'affixes respectives z_A, z, z'.
Soit h l'homothétie de centre A et de rapport k, r la rotation de centre A et d'angle α.

$M' = h(M)$ équivaut à $z' - z_A = k(z - z_A)$ (ce qui traduit $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$).

$M' = r(M)$ équivaut à $z' - z_A = e^{i\alpha}(z - z_A)$ (ce qui traduit $AM' = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \alpha$ si $M \neq A$).

• **Écriture complexe d'une composée $h \circ r$**

La combinaison des deux résultats ci-dessus mène au résultat :

$M' = h \circ r(M)$ équivaut à $z' = ke^{i\alpha}z + (1 - ke^{i\alpha})z_A$.

Propriété 2 **La composée d'une homothétie de rapport k et d'une rotation de même centre A et d'angle α a pour écriture complexe :**
$z \mapsto k e^{i\alpha} z + b$,
où b est un nombre complexe qui ne dépend que de k, α et A.

3. Comparaison de $r \circ h$ et de $h \circ r$

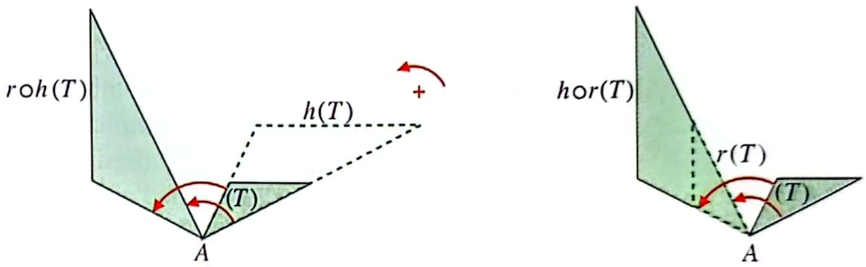
Propriété 3 **Étant donné une homothétie h et une rotation r de même centre :**
$h \circ r = r \circ h$.

On démontre facilement que $h \circ r$ et $r \circ h$ ont la même écriture complexe en utilisant la même démarche qu'au **2.**

Exemple

h : homothétie de centre A et de rapport 2.

r : rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



2 ▪ Similitudes directes

1. Définition

Définition 1 **On appelle similitude directe du plan toute bijection qui transforme les distances dans un rapport donné et qui conserve les angles orientés.**

En d'autres termes, si s est une similitude directe, alors s conserve les angles orientés et il existe un nombre réel positif k, non nul, tel que, quels que soient les points A et B distincts, d'images A' et B' par s, $A'B' = k \times AB$.
Le nombre k est appelé **rapport de la similitude s.**

Exemples et contre-exemples

- Les homothéties, les translations, les rotations et leurs composées sont des similitudes directes. (Voir AP1.)
- Les réflexions conservent les distances, mais ne conservent pas les angles orientés : ce ne sont pas des similitudes directes.
- Les projections ne sont pas des bijections : ce ne sont pas des similitudes directes.

2. Écriture complexe

Soit s une similitude directe du plan, de rapport k.
Notons A et B deux points, distincts, fixés du plan, A' et B' leurs images par s, M un point quelconque du plan, autre que A, M' son image par s.

■ D'après la définition de s, on a :

$B' \neq A'$ et $M' \neq A'$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$$

donc $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ d'après ce qui précède.

On a alors, quel que soit M : $A'M' = k \times AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha \quad (2\pi)$,

ce qui, dans le plan complexe, s'écrit : $z_{\overrightarrow{A'M'}} = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times z_{\overrightarrow{AM}}$,

ce qui équivaut à : $z_{M'} - z_{A'} = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z_M - z_A)$,

$$z_{M'} = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z_M + (z_{A'} - k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z_A).$$

Donc il existe des nombres complexes a et b, indépendants de M, a non nul, tels que : $z_{M'} = a \times z_M + b$.

■ **Réciproque :** soit a et b des nombres complexes, a non nul, et soit f l'application du plan d'écriture complexe $z \mapsto az + b$.
Démontrons que f est une similitude directe : par définition, à tout point du plan d'affixe z, f associe le point d'affixe z' telle que $z' = az + b$.

• Comme a n'est pas nul, nous avons : $z = \dfrac{1}{a} z' - \dfrac{b}{a}$, ce qui montre que f **est une bijection**.

• M, P, Q étant des points du plan, d'images respectives M', P', Q' par f, alors :

$z_{P'} - z_{M'} = a(z_P - z_M)$ et $z_{Q'} - z_{M'} = a(z_Q - z_M)$;

donc, si P et Q sont distincts de M, alors :

$$\frac{z_{\overrightarrow{M'P'}}}{z_{\overrightarrow{MP}}} = a \quad \text{et} \quad \frac{z_{\overrightarrow{M'Q'}}}{z_{\overrightarrow{MQ}}} = a, \quad \text{d'où :} \quad \frac{M'P'}{MP} = |a|$$

et : $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{M'P'}) = \arg a \quad (2\pi)$ et $(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{M'Q'}) = \arg a \quad (2\pi)$.

Par suite : $M'P' = |a| \times MP$ et $(\overrightarrow{M'P'}, \overrightarrow{M'Q'}) = (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})$.

Donc f **multiplie les distances par $|a|$ et conserve les angles orientés.**

Propriétés 4

> • **Toute similitude directe de rapport k a une écriture complexe $z \mapsto az + b$ où a et b sont des nombres complexes et où $|a| = k$.**
> • **L'écriture complexe $z \mapsto az + b$, où a et b sont des nombres complexes, a non nul, est celle d'une similitude directe de rapport $|a|$.**

Cas particulier
Si $|a| = 1$, alors f conserve les distances et les angles orientés : f est donc un déplacement.

3. Forme réduite d'une similitude directe

Soit f la similitude directe d'écriture complexe $z \mapsto az + b$, où a et b sont des nombres complexes donnés, a non nul. L'étude des éventuels points invariants par f conduit à la résolution de l'équation $z = az + b$, équation équivalente à :

$(1 - a)z = b$.

- **Si $a = 1$,** alors f est une translation de vecteur d'affixe b ; quel que soit le point M, d'image M' par f :

$z_{M'} = z_M + b$.

- **Si $a \neq 1$,** alors f admet un unique point invariant, notons-le I, d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$, noté z_I.

Quel que soit le point M du plan, d'image M' par f, on a :

$$z_{M'} = az_M + b \quad \text{et} \quad z_I = az_I + b,$$

donc $\quad z_{M'} - z_I = a(z_M - z_I)$,

c'est-à-dire : $\quad z_{\overrightarrow{IM'}} = a\, z_{\overrightarrow{IM}}$. $\quad$ (1)

où $z_{\overrightarrow{IM'}}$ est l'affixe de $\overrightarrow{IM'}$ et $z_{\overrightarrow{IM}}$ l'affixe de $\overrightarrow{IM}$.

Puisque $a = |a|\,e^{i \arg a}$, si on note h_I l'homothétie de centre I et de rapport $|a|$ et r_I la rotation de centre I et d'angle $\arg a$, alors l'égalité $z_{\overrightarrow{IM'}} = a\, z_{\overrightarrow{IM}}$ traduit que M' est l'image de M par $r_I \circ h_I$ (propriété 2).

Ainsi, quel que soit M : $\quad f(M) = r_I \circ h_I(M) \quad$ donc : $\quad f = r_I \circ h_I$.

En conclusion :

Propriété 5

> **Toute similitude directe du plan est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.**

Cas particulier
Si a est réel et différent de 1, alors l'égalité (1) équivaut à :
$\overrightarrow{IM'} = a \cdot \overrightarrow{IM}$; $\quad f$ est donc l'homothétie de centre I et de rapport a.

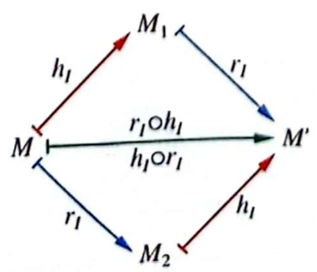
Remarques. Si le nombre complexe a est différent de 1 :

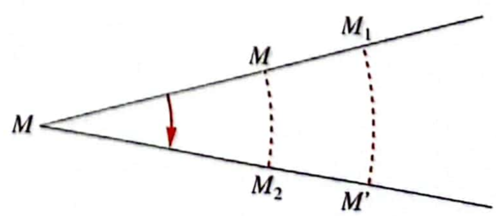
1° Pour tout point M, autre que I, d'image M' par f, on a :

$$\begin{cases} IM' = |a|\, IM \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \arg a \quad (2\pi). \end{cases} \qquad (2)$$

$|a|$ est **le rapport de la similitude directe f** ; I est appelé **le centre de f** ; $\arg a$ est appelé **l'angle de f.**

2° La propriété 3 permet de construire l'image M' de M par f.



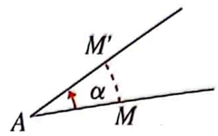


Propriété 6

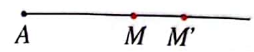
> **Toute similitude directe s autre qu'une translation :**
> **— admet un unique point invariant appelé centre de la similitude ;**
> **— est décomposable en une homothétie h de rapport positif et une rotation r, h et r ayant le même centre, celui de s.**
>
> **La composée $h \circ r$, égale à $r \circ h$, est dite forme réduite de la similitude.**
>
> **Le rapport de h est appelé le rapport de la similitude. L'angle de r est appelé l'angle de la similitude.**

Exemples

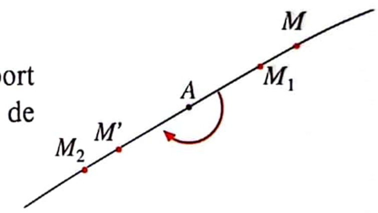
- Une rotation, de centre A et d'angle non nul de mesure α, est la similitude directe de centre A, de rapport 1 et d'angle α.



- Une homothétie, de centre A et de rapport **positif** k, est la similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle nul.



- Une homothétie, de centre A et de rapport **négatif** k, est la similitude directe de centre A, de rapport $(-k)$ et d'angle plat.

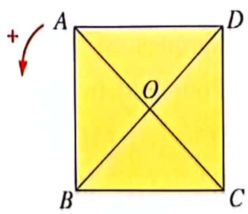


Autres exemples

- $ABCD$ est un carré de centre O et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ (2π).

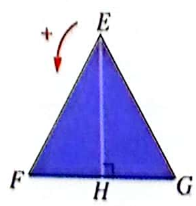
— C est l'image de B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

— O est l'image de A par la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



- EFG est un triangle équilatéral et $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) = \frac{\pi}{3}$ (2π).

H, milieu de $[FG]$, est l'image de F par la similitude directe de centre E, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.



3 ■ Propriétés des similitudes directes

1. Résultats immédiats

De la forme réduite d'une similitude directe et des propriétés connues des translations, homothéties et rotations, il résulte que :

Propriétés 7

- **Toute similitude directe :**
  - **transforme une droite en une droite ;**
  - **conserve le parallélisme ;**
  - **transforme un cercle en un cercle ;**
  - **conserve le contact.**
- **Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2.**

2. Résultats admis

Propriété 8

L'image du barycentre de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)$ par une similitude directe s est le barycentre des n points pondérés $(s(A_1), \alpha_1), ..., (s(A_n), \alpha_n)$.
Autrement dit : toute similitude directe conserve le barycentre.

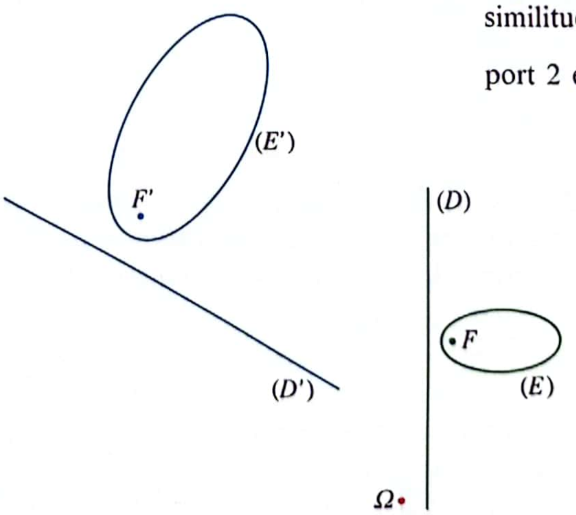
Propriété 9

L'image, par une similitude directe s, d'une conique de foyer F et de directrice (D) est une conique de même excentricité, de foyer $s(F)$ et de directrice $s(D)$.

Une démonstration de la propriété 9 est proposée dans le TP 4.

Exemple

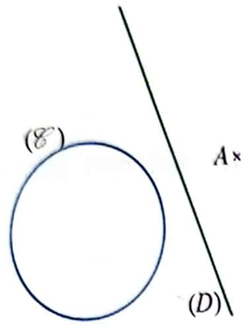
L'ellipse (E) de foyer F et de directrice (D) est transformée en l'ellipse (E') de foyer F' et de directrice (D') par la similitude directe de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



TP1 Problème de construction

L'objectif de ce TP est de montrer l'utilisation d'une similitude directe pour résoudre un problème de construction.

1. Énoncé du problème



Étant donné la droite (D), le cercle $(\mathscr{C})$ et le point A, représentés sur la figure ci-contre, construisez un triangle isocèle ABC, rectangle en C, de sens direct $\left((\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}\right)$ tel que B soit sur (D) et C soit sur $(\mathscr{C})$.

2. Analyse

1° Faites une figure « de travail » en partant d'un tel triangle ABC et en traçant une droite (D) passant par B et un cercle $(\mathscr{C})$ passant par C.

2° Déterminez la similitude directe s de centre A transformant B en C et la similitude directe σ de centre A transformant C en B.

3° Le sommet B étant sur la droite (D), précisez la droite (D') sur laquelle se trouve nécessairement le sommet C.

4° En utilisant la droite (D') et le cercle $(\mathscr{C})$, localisez les positions éventuelles du point C.

3. Synthèse

1° Construisez, sur la figure présentée avec l'énoncé, la droite (D') transformée de la droite (D) par la similitude s.
Dans ce cas de figure, la droite (D') coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points C_1 et C_2.

2° Construisez les points B_1 et B_2, images respectives des points C_1 et C_2 par la similitude σ.

3° Démontrez que les deux triangles ainsi construits, AB_1C_1 et AB_2C_2, sont solutions du problème.

4° Peut-il y avoir d'autres cas de figure que celui présenté ici ?

TP2 Similitudes vérifiant certaines conditions

L'objectif de ce TP est de montrer que, étant donné deux points distincts A et B, un nombre k strictement positif et un nombre θ, il existe une similitude directe de rapport k et d'angle θ qui transforme A en B et de construire le centre de cette similitude.

Nous prendrons $k = 2$ ***et*** $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Soit s une similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, qui transforme A en B. On suppose a priori que s existe.

1° Déterminez l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$. Déduisez-en l'appartenance de Ω à un arc de cercle (Γ) d'extrémités A et B.

2° *a*) Donnez le rapport $\frac{\Omega B}{\Omega A}$.

b) Rappelez pourquoi l'ensemble des points M tels que $\frac{MB}{MA} = 2$ est un cercle (C) de diamètre $[G_1 G_2]$ où G_1 est le barycentre du système $(B, 1)$, $(A, -2)$ et G_2 est le barycentre du système $(B, 1)$, $(A, 2)$.

3° Expliquez pourquoi (C) et (Γ) ont un seul point d'intersection, noté O.

4° Démontrez que la similitude s' de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme A en B.

5° Déduisez-en qu'il existe une unique similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en B.

6° Construisez alors (C) et (Γ) et placez le centre Ω de la similitude s.

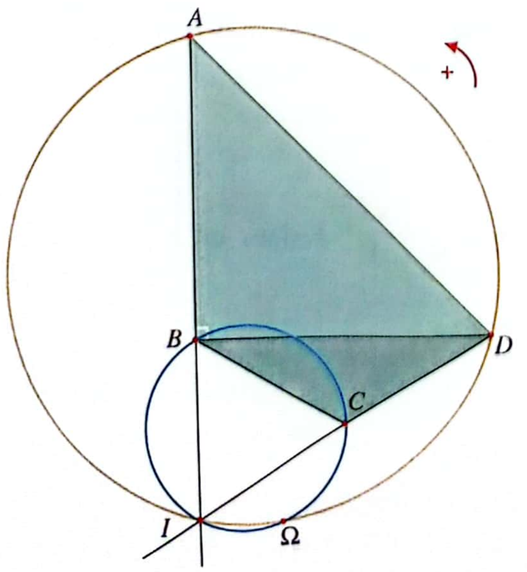
Étant donné deux points A et B distincts, un nombre k strictement positif et un nombre θ, il existe une unique similitude de rapport k et d'angle θ transformant A en B. Le centre Ω de cette similitude vérifie :

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \theta \quad \text{et} \quad \frac{\Omega B}{\Omega A} = k.$$

TP3 Utilisation de la cocyclicité

A, B, C, D sont quatre points tels que : ABD est un triangle rectangle isocèle avec $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$, BCD est un triangle isocèle avec $BC = CD$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{6}$. Les droites (AB) et (CD) se coupent en I.

On se propose de montrer qu'il existe une unique similitude directe s transformant A en D et B en C, et de prouver que son centre Ω est le deuxième point d'intersection des cercles (IAD) et (IBC), conformément à la figure ci-dessous.



1° On pose $a = AB$. Calculez la longueur DC. (Vous pouvez utiliser le milieu A' de $[BD]$, et calculer $\frac{A'D}{DC}$.)

2° Calculez l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$.

3° Soit f une similitude directe transformant A en D, B en C. Quel en est l'angle, quel en est le rapport ?

4° On note s la similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $-\frac{\pi}{3}$, transformant A en D. Soit B' l'image de B par s.

a) Précisez l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB'})$, et montrez que B' appartient à la demi-droite $[DC)$.

b) Calculez la distance DB', et montrez alors que B' est le point C. Cette similitude directe s est donc l'unique similitude transformant A en D et B en C. Soit Ω son centre.

5° Montrez que les points Ω, I, A, D sont cocycliques.

6° Montrez que les points Ω, I, B, C sont cocycliques.

7° Dans le triangle IAD, calculez la distance IB ; calculez alors $\dfrac{ID}{IA}$, et montrez que le point Ω ne peut être en I.

8° Prouvez alors que Ω est bien le deuxième point d'intersection des cercles (IAD) et (IBC).

TP4 Similitudes et coniques

L'objectif de ce TP est d'étudier l'action d'une similitude directe f sur une conique définie par un couple foyer, directrice et son excentricité e.

1. Cas général

Soit (Γ) la conique définie par un foyer F, la directrice associée (D), et son excentricité e.

(Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

Soit f une similitude de rapport k. On note F', M', H' les images des points F, M, H par f, (D') la droite image de (D), (Γ') l'ensemble image de (Γ) par f.

1° En utilisant la conservation de l'orthogonalité par f, montrez que, si H est le projeté orthogonal de M sur (D), H' est le projeté orthogonal de M' sur (D').

2° Comparez les rapports de distances $\dfrac{M'F'}{M'H'}$ et $\dfrac{MF}{MH}$.

3° Montrez alors que (Γ') est une conique de foyer F' et de directrice associée (D'), de même excentricité e.

4° Expliquez pourquoi les sommets de la conique (Γ') sont les images par f des sommets de (Γ).

2. Application

Soit (E) l'ellipse définie par l'équation $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit f la similitude de traduction complexe :

$z' = (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i}$.

On note (E') l'image de (E) par f.

1° Expliquez pourquoi (E') est une ellipse.

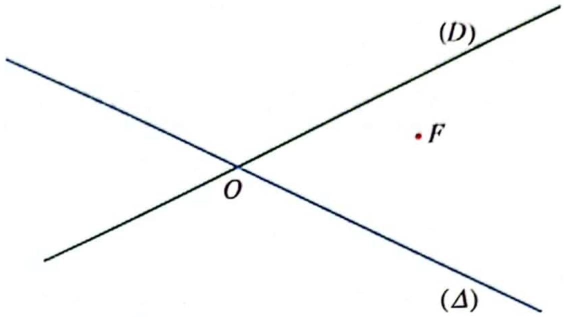
2° Déterminez son centre, ses sommets, son axe focal.

3° Représentez sur un même graphique les ellipses (E) et (E').

TP5 Exemple d'utilisation d'une homothétie

L'objectif de ce TP est de résoudre un problème mettant en jeu des triangles homothétiques.

On considère la parabole (P) de foyer F et de directrice (D) et la droite (Δ) coupant la droite (D) en un point O.
Le but du problème est de construire les points d'intersection de la droite (Δ) et de la parabole (P).



1° Considérez un point M de la droite (Δ), distinct de O. Soit H son projeté orthogonal sur la droite (D). Tracez le cercle (C) de centre M passant par H.

2° Dans le cas de figure présenté ici, le cercle (C) coupe la droite (OF) en deux points I et J. On considère les deux homothéties h et h' de centre O, transformant respectivement I et J en F.

On note : M_1 et H_1 les transformés de M et H par h,
M_2 et H_2 les transformés de M et H par h'.

a) Construisez les triangles IMH, FM_1H_1, JMH, FM_2H_2.

b) Démontrez que les points M_1 et M_2 sont les points d'intersection de la droite (Δ) et de la parabole (P).

3° Existe-t-il d'autres cas de figure que celui présenté ici ?

FICHE *Méthode*

SIMILITUDE DIRECTE

COMMENT RECONNAÎTRE QU'UNE APPLICATION f EST UNE SIMILITUDE DIRECTE — 1

- f est une bijection transformant les distances dans un rapport constant et conservant les angles orientés.
- f est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre.
- f admet pour écriture complexe $z' = az + b$ dans un repère orthonormal direct du plan, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

COMMENT CARACTÉRISER UNE SIMILITUDE DIRECTE f — 2

Si elle a pour centre I et qu'elle transforme un point A, distinct de I, en un point A', alors :

$$\begin{cases} \text{son rapport est } \dfrac{IA'}{IA} \\ \text{son angle est } (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}). \end{cases}$$

Si elle transforme un couple (A, B), $A \neq B$, en (A', B'), alors :

$$\begin{cases} \text{son rapport est } \dfrac{A'B'}{AB} \\ \text{son angle est } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}). \end{cases}$$

Si elle admet pour écriture complexe $z' = az + b$ dans un repère orthonormal direct, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, alors :

$a = 1$	$a \neq 1$		
	$\lvert a \rvert = 1$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\lvert a \rvert \neq 1$
• f est une translation • le vecteur de translation est d'affixe b	• f est une rotation • l'angle de rotation est $\arg(a)$	• f est une homothétie • le rapport d'homothétie est a	f est une similitude directe : – de rapport $\lvert a \rvert$ – d'angle $\arg(a)$

EXERCICES *Commentés*

1 ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Soit A, B, C, D les points d'affixes respectives :
$1+i$, $\quad 2-i$, $-2+i$, $\quad -1+4i$,
notées z_A, z_B, z_C, z_D.

1° Montrez qu'il existe une unique similitude s transformant A en C et B en D.

2° Déterminez les éléments caractéristiques de s.

COMMENTAIRE

Les points A, B, C, D étant donnés par leurs affixes, il est naturel de chercher s par son écriture complexe $\quad z' = az + b$.
Les deux conditions sont alors :

$$\begin{cases} z_C = az_A + b \\ z_D = az_B + b. \end{cases}$$

UNE SOLUTION

1° Soit s la similitude cherchée. Son écriture complexe est $\quad z' = az + b$, $\quad$ avec a non nul.

$s(A) = C$ équivaut à : $\quad z_C = az_A + b$,
$s(B) = D$ équivaut à : $\quad z_D = az_B + b$.

s existe donc si le système : $\begin{cases} a(1+i) + b = -2+i \\ a(2-i) + b = -1+4i, \end{cases}$

admet une solution unique (a, b).

En soustrayant, on obtient :
$a(1-2i) = 1+3i$

soit $\quad a = \dfrac{1+3i}{1-2i} = \dfrac{(1+3i)(1+2i)}{5} = -1+i.$

On trouve alors :
$b = -2+i-(1+i)\,a = -2+i-(1+i)(-1+i) = i.$

La similitude s existe donc, est unique, et a pour traduction complexe : $z' = (-1+i)\,z + i$.

2° Son rapport k vaut $|a|$ soit $\sqrt{2}$.
Son angle θ vaut : $\quad \arg a = \arg(-1+i)$.

Or : $-1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$. $\quad$ D'où $\quad \theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

Son centre est le point invariant Ω, d'affixe :

$z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$, $\quad z_\Omega = \dfrac{i}{2-i} = \dfrac{-1}{5} + \dfrac{2}{5}\,i.$

2 SIMILITUDES ET CONFIGURATIONS

ABC est un triangle équilatéral direct, A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[CA]$, C' celui de $[AB]$.
Le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une unique similitude directe transformant A en B', B en C', C en A'.

1° On suppose qu'une telle similitude f existe.

a) Montrez que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même isobarycentre G. Déduisez-en que le centre de f est nécessairement G.

b) En calculant $\dfrac{B'C'}{AB}$, déterminez le rapport de f.

c) Déterminez l'angle de f.

2° Soit f la similitude trouvée. Montrez qu'elle convient, c'est-à-dire qu'elle transforme effectivement A en B', B en C', C en A'.

COMMENTAIRE

Il s'agit ici de déterminer une similitude transformant une configuration donnée en une autre. On essaie d'abord de la trouver par condition nécessaire, puis on vérifie que la similitude trouvée convient. On utilise pour cela la définition du rapport et de l'angle d'une similitude, et la conservation du barycentre.

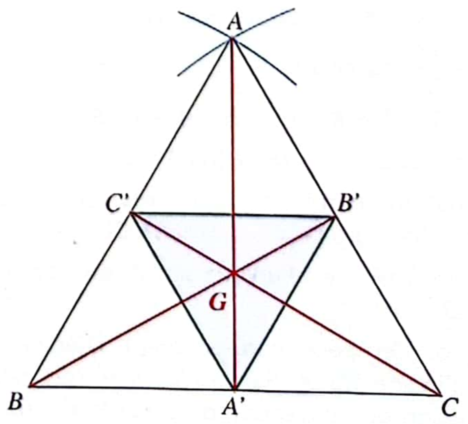
UNE SOLUTION

1° a) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.
G est défini par la relation vectorielle :
$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Or : $\quad \vec{GA'} = -\dfrac{1}{2}\,\vec{GA} \quad$ (G aux deux tiers de $[AA']$ à partir de A)

$\vec{GB'} = -\dfrac{1}{2}\,\vec{GB} \qquad \vec{GC'} = -\dfrac{1}{2}\,\vec{GC}.$

$\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \vec{0}$, $\quad$ donc G est l'isobarycentre du triangle $A'B'C'$.



Si f existe, f conserve le barycentre. f transforme donc le point G, isobarycentre de ABC, en l'isobarycentre de $B'C'A'$, qui est encore G.
Donc : $f(G) = G$ et, G étant invariant par f, est donc le centre de la similitude.

b) Soit a la longueur des côtés du triangle ABC.

$\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, d'où $B'C' = \frac{a}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} f(A) = B' \\ f(B) = C' \end{array}\right\}$ donc le rapport k de la similitude f est égal à $\frac{B'C'}{AB}$, soit $k = \frac{1}{2}$.

c) $f(A) = B'$, $f(B) = C'$, donc l'angle θ de la similitude cherchée est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C'})$.

Or $\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Donc $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$ (2π).

2° Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$,

R la rotation de centre G et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On veut montrer que $h \circ R$ transforme A en B', B en C', C en A'.
Introduisons une autre homothétie et une autre rotation :

- h' homothétie de centre G, de rapport $-\frac{1}{2}$,
- R' rotation de centre G, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

$GA = GB$, $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \frac{2\pi}{3}$, donc $R'(A) = B$.

$\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, donc $h'(B) = B'$.

Donc $(h' \circ R')(A) = B'$.

Or : $h' \circ R' = h\left(G, -\frac{1}{2}\right) \circ R\left(G, \frac{2\pi}{3}\right)$

et h', étant une homothétie de rapport négatif, est la composée de $h = h\left(G, \frac{1}{2}\right)$ par R_1, rotation de centre G et d'angle π.

Donc $h' \circ R' = h \circ R_1 \circ R'$.

$R_1 \circ R'$, composée de deux rotations de même centre, est la rotation de centre G, d'angle $\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$, ou encore $-\frac{\pi}{3}$.

D'où : $R_1 \circ R' = R$ et $h' \circ R' = h \circ R$.

On a donc bien : $(h \circ R)(A') = B'$.

En permutant le rôle des sommets, on obtient de même : $(h \circ R)(B) = C'$, $(h \circ R)(C) = A'$.

Donc $f = h \circ R$ est l'unique similitude transformant ABC en $B'C'A'$.

Remarque. On peut naturellement chercher directement l'image de A par $h \circ R$, mais ceci nécessite l'introduction de nouveaux points sur la figure.

3 Étude d'une suite de points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère la suite des points A_n d'affixes z_n définie par :

$$A_0 = O \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{1}{1+i} z_n + i \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}).$$

1° Quel que soit le nombre entier n, montrez que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe s dont vous déterminerez le centre Ω, l'angle et le rapport.

2° *a)* Démontrez que, quel que soit n, le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b) Déduisez-en la construction des points $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

3° On pose : $\ell_k = A_k A_{k+1}$ et $L_n = \sum_{k=0}^{n} \ell_k$.

a) Montrez que la suite (ℓ_k) est une suite géométrique.

b) Déduisez-en la limite de la suite (L_n).

Commentaire

Il s'agit là d'un exercice classique dont la résolution fait bien visualiser la notion de centre de similitude ainsi qu'un phénomène de rotation et contraction simultanées (voir photo p. 143).

Une solution

1° On a :

$$z_{n+1} = az_n + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et } b = i.$$

D'après la propriété du cours, il s'agit de l'écriture complexe de la similitude directe s de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a} = 1 + i$.

2° *a)* **Démonstration par récurrence.**

- Appelons $P(n)$ la propriété « Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} ».

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A_1}$ a pour affixe -1;
Le vecteur $\overrightarrow{A_0 A_1}$ a pour affixe i.
Ces deux vecteurs sont orthogonaux.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.

- Supposons $P(n)$ vraie.

Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est donc rectangle en A_{n+1}.
La similitude s transforme :

Ω en Ω
A_n en A_{n+1}
A_{n+1} en A_{n+2}.

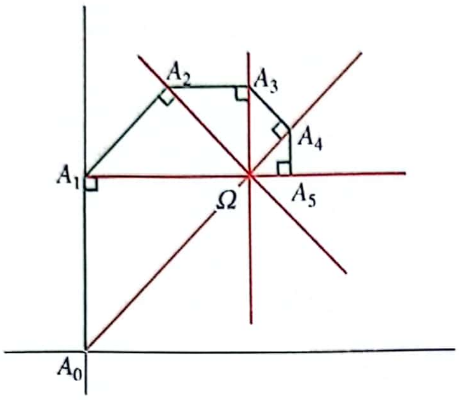
Comme elle conserve les angles, elle conserve l'orthogonalité et le triangle $\Omega A_{n+1} A_{n+2}$ est rectangle en A_{n+2}.
La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

On déduit de ce qui précède, en utilisant le raisonnement par récurrence, que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b) On utilise :

$$(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) = -\frac{\pi}{4}$$

et « $\Omega A_n A_{n+1}$ rectangle en A_{n+1} »
pour construire les points de proche en proche.



3° *a*) Le rapport de s étant égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :

$$A_{k+1}A_{k+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_k A_{k+1}$$

car $s(A_{k+1}) = A_{k+2}$ et $s(A_k) = A_{k+1}$.

La suite (ℓ_k) est une suite géométrique de terme initial $\ell_0 = 1$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) L_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (ℓ_k).

On a $L_n = \dfrac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Comme $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0 ;$$

d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} L_n = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 + \sqrt{2}.$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1° Déterminer l'ensemble (C) des points du plan d'affixe z vérifiant : $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i| = 4$.

2° Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S transformant le point A d'affixe i en O, origine du repère, et transformant le point B d'affixe $\sqrt{3}$ en B' d'affixe $-4i$.
Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.

3° En utilisant les résultats établis au 2°, retrouver l'ensemble (C) défini au 1°.

(Bac 1990)

Analyse de l'énoncé

La première question propose de reconnaître un ensemble de points défini par une équation complexe.
La seconde question met en place une similitude directe définie par deux couples de points homologues.
La troisième question a pour but de retrouver, à l'aide de la transformation étudiée dans la seconde question, le résultat établi dans la première.

Une solution

1° Quel que soit le nombre complexe z :

$$(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i = (1-i\sqrt{3})\left[z-\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right].$$

Or : $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = i$

et : $|1-i\sqrt{3}| = 2$;

donc : $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i| = 2|z-i|$. D'où : $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i| = 4$ équivaut à $|z-i| = 2$.

En conclusion : l'ensemble (C) est le cercle de centre A et de rayon 2.

2° *a)* La similitude directe S transforme $A(i)$ en O et $B(\sqrt{3})$ en $B'(-4i)$; son rapport est donc : $\dfrac{OB'}{AB}$ et son angle est : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'})$.

Or l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $\sqrt{3}-i$ et l'affixe de $\overrightarrow{OB'}$ est $-4i$, donc :

$$\frac{OB'}{AB} = \frac{|-4i|}{|\sqrt{3}-i|} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'}) = \arg\left(\frac{\text{affixe de } \overrightarrow{OB'}}{\text{affixe de } \overrightarrow{AB}}\right).$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'}) = \arg\left(\frac{-4i}{\sqrt{3}-i}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right);$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'}) = -\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

L'écriture complexe de S est donc :

$$z \mapsto 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z+b$$

où b est un nombre complexe tel que :

$$0 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}i+b,$$

relation qui traduit que : $S(A) = O$; donc :

$$b = -2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}-i.$$

L'écriture complexe de S est donc :

$$z \mapsto 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z-\sqrt{3}-i \quad \text{ou} \quad z \mapsto (1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i.$$

b) La similitude directe S a pour rapport 2, pour angle $-\dfrac{\pi}{3}$, pour centre le point Ω d'affixe ω telle que :

$$\omega = (1-i\sqrt{3})\omega-\sqrt{3}-i, \quad \text{c'est-à-dire : } \omega = \frac{-\sqrt{3}}{3}+i.$$

3° Soit M un point du plan, z son affixe, M' le point $S(M)$. (C) est l'ensemble des points M du plan tels que : $OM' = 4$.

Or : $O = S(A)$ et $M' = S(M)$;

d'où : $OM' = 2 \times AM$.

Donc (C) est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = 2$. (C) est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

EXERCICES & PROBLÈMES

Q. C. M.

Dans chacun des exercices suivants, une réponse au moins est exacte.

1 L'application du plan d'écriture complexe $z' = -2iz + 1 - i$ est une similitude directe :

de rapport -2 .... ☐

de centre I d'affixe $1 - i$........ ☐

de rapport 2 et transformant O d'affixe zéro en O' d'affixe $1 - i$........ ☐

2 La composée d'une rotation de centre O et d'angle θ et d'une homothétie de centre O et de rapport -4 :

n'est pas une similitude directe........ ☐

est une similitude directe de rapport -4 et d'angle θ........ ☐

est une similitude directe de rapport 4 et d'angle $\theta + \pi$........ ☐

3 Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = 3iz + 3$.

Le point O a pour antécédent le point A d'affixe i........ ☐

Pour tout point M d'image M' par s $AM = OM'$........ ☐

L'ensemble des points M d'affixe z telles que $|3iz + 3| = 3$ est le cercle de centre A et de rayon 1........ ☐

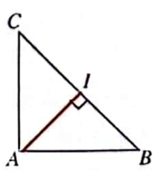
4 Si une similitude directe f conserve les distances, alors :

f est une rotation........ ☐

f est un déplacement........ ☐

f est l'identité du plan........ ☐

5 ABC est un triangle rectangle isocèle. I est le milieu de $[BC]$. On note $S(\Omega, k, \theta)$ la similitude de centre Ω, de rapport k, d'angle θ.



$S\left(A, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ transforme B en I...... ☐

$S\left(A, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ transforme I en C...... ☐

$S\left(B, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ transforme C en A..... ☐

$S\left(C, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ transforme A en B..... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

SIMILITUDES ET NOMBRES COMPLEXES

Les exercices **6** *à* **14** *utilisent un repère orthonormal direct* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Dans les exercices **6** *à* **9**, *déterminez l'écriture complexe de l'application f donnée.*

6 ■ 1° f est la translation de vecteur d'affixe $-2 + 3i$.

2° f est l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

7 ■ f est l'homothétie de centre I d'affixe $2 - 5i$ et de rapport $\frac{3}{4}$.

2° f est l'homothétie de centre I d'affixe $4i$ et de rapport $-\frac{1}{3}$.

8 ■ 1° f est la rotation de centre I d'affixe $-3 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2° f est la rotation de centre I d'affixe -2 et d'angle $-\frac{3}{4}\pi$.

9 ■ 1° f est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2° f est la similitude directe de centre I d'affixe $-3 - i$, de rapport $\frac{1}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de l'application f définie dans les exercices **10** *à* **13** *par son écriture complexe.*

10 ■ a) $z' = z - 3$. b) $z' = z + 1 + i$.

c) $z' = z - \frac{5}{3}i + 4$. d) $z' = z + 2 - 3i$.

11 ■ a) $z' = -2z + 4 - i$. b) $z' = \sqrt{2}\,z + i$.

c) $z' = \frac{3}{4}z + 1 - \frac{1}{2}i$. d) $z' = -3z + 2 - 4i$.

12 a) $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2.$

b) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

c) $z' = -iz + 2i - 2.$

d) $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + 5 - 7i.$

13 a) $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 1 + 2i.$

b) $z' = (1 + i)z + 2 - 3i.$

c) $z' = 2iz - 1 - i.$

d) $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + 2i.$

14 On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = u^2z + u$, où u désigne un nombre complexe.

1° Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une translation; caractérisez f pour chacune des valeurs trouvées.

2° Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (en radians); caractérisez f pour chacune des valeurs trouvées.

3° Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une homothétie de rapport -2; caractérisez f pour chacune des valeurs trouvées.

4° Caractérisez f lorsque $u = 1 - i$.

15 Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle (E) l'ensemble des points M, d'affixe z telle que :

$|(1 - i)z + 4i| = 3\sqrt{2}.$ (1)

1° **Première méthode.**
On pose $z = x + iy$, x et y nombres réels.

a) Déterminez une équation cartésienne de (E).

b) Dessinez (E).

2° **Deuxième méthode.**

a) Vérifiez que l'égalité (1) équivaut à :
$|z - (2 - 2i)| = 3.$

b) Caractérisez (E).

3° **Troisième méthode.**
Soit s la similitude d'écriture complexe :
$z \mapsto (1 - i)z + 4i.$

a) Déterminez le centre et le rapport de s.

b) Quelle est l'affixe du point O' dont l'image par s est O?

c) Calculez $O'M$ lorsque M est un point de (E) et caractérisez (E).

SIMILITUDES ET CONFIGURATIONS

Dans les exercices **16** *à* **18**, *le plan est rapporté à un repère orthonormal direct* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

16 On appelle A et B les points d'affixes respectives $2 + i$ et $4 + 2i$ et C le point tel que le triangle ABC soit équilatéral direct. Déterminez l'affixe de C.

17 Soit $ABCD$ un carré direct $\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\right)$.

Les affixes de A et B sont $-1 + i$ et $4 - i$. Quelle est l'affixe du centre du carré ?

18 Soit ABC un triangle équilatéral. Les affixes de A et B sont $1 - 2i$ et 2. Quelle est l'affixe du centre du triangle ? (Deux cas sont à envisager.)

19 Dans le plan, on donne deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O'. Ces deux cercles se coupent en A et B. Une sécante aux deux cercles passe par B, recoupe (C) en M et (C') en M'.
Démontrez que la similitude directe de centre A qui transforme O en O' transforme aussi M en M'.

20 Soit s une similitude directe, de centre O, de rapport k et d'angle θ. On note M un point du plan autre que O, M' sont image par s et G le centre de gravité du triangle OMM'.

1° Démontrez que, si s n'est pas une homothétie, alors G est l'image de M par une similitude directe s' indépendante de M.

2° On suppose que :

$k = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}.$

a) Démontrez que le triangle OMM' est rectangle isocèle.

b) Caractérisez la similitude s' (l'angle sera donné par son cosinus et son sinus, puis par une valeur approchée à 0,1 rad près).

21 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

$AB = 2AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $(\mathscr{C}_B)$ et $(\mathscr{C}_C)$ les cercles qui passent par A et de centres respectifs B et C.

1° Démontrez que la similitude directe de centre A qui transforme B en C transforme aussi $(\mathscr{C}_B)$ en $(\mathscr{C}_C)$.

2° Soit s une similitude directe qui transforme $(\mathscr{C}_B)$ en $(\mathscr{C}_C)$.

a) Quelle est la valeur du rapport de la similitude s?

b) On désigne par I le centre de s. Quelle est la valeur du rapport $\frac{IC}{IB}$?

Quel est l'ensemble (Γ) des centres I des similitudes directes transformant $(\mathcal{C}_B)$ en $(\mathcal{C}_C)$? Représentez cet ensemble.

22 ABCD est un quadrilatère et α est un nombre complexe de module r et d'argument θ; a, b, c, d sont les affixes de A, B, C, D dans un repère orthonormal direct du plan du quadrilatère.

La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ transforme B en Q. La similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ transforme C en M. La similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ transforme D en N. La similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ transforme A en P. On appellera q, m, n et p les affixes de Q, M, N et P.

1° Déterminez q en fonction de α, a et b.

2° a) Démontrez que : « MNPQ est un parallélogramme » équivaut à « $n + q = m + p$ ».

b) Déduisez-en que : « MNPQ est un parallélogramme » équivaut à « $\alpha = \frac{1}{2}$ ou ABCD est un parallélogramme ».

3° On suppose que ABCD est un parallélogramme et que $\alpha = \frac{1+i}{2}$. Déduisez-en que MNPQ est un carré.

23 Soit ABC un triangle équilatéral direct, D, E, F les points des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ tels que $AD = BE = CF = \frac{1}{3}AB$, G le centre de gravité du triangle ABC.

1° Démontrez que G est le centre de gravité du triangle DEF.

2° Justifiez que, s'il existe une similitude directe du plan qui transforme ABC en DEF, alors son centre est G.

3° Démontrez que la rotation de centre G qui transforme A en B conserve les triangles ABC et DEF.

4° Posons $\frac{GD}{GA} = k$ et $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GD}) = \theta$.

a) Démontrez que :

$GE = kGB$ et $GF = kGC$, et

$(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GE}) = \theta$ et $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF}) = \theta$.

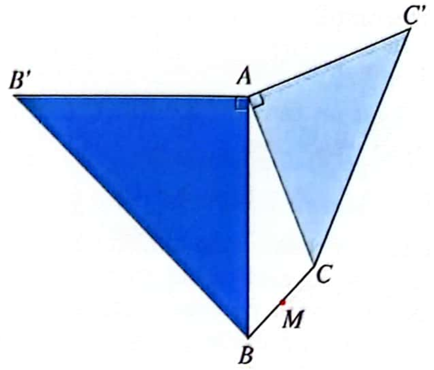
b) Déduisez de toute cette étude que DEF est l'image de ABC par une similitude directe s de centre G.

c) Calculez le rapport $\frac{DE}{AB}$. Déduisez-en le rapport de s.

24 Le triangle ABC est quelconque; M est le milieu du segment $[BC]$.

Les triangles BAB' et CAC' sont rectangles et isocèles de sommet A.

Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C' = 2AM$.



1° Méthode géométrique

a) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminez les images des points A et M par h. Trouvez une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C'.

b) Déduisez-en que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C' = 2AM$.

2° Utilisation des nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.

a) Quelles sont les affixes m, b', c' des points M, B', C' ?

b) Retrouvez alors les résultats du **1°** b).

25 On considère un triangle ABC tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait une mesure comprise entre 0 et π.

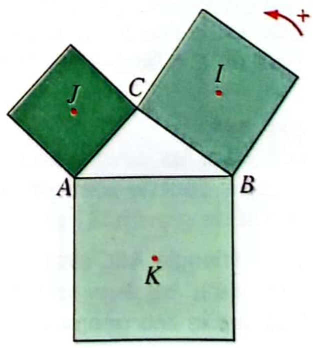
On construit, à l'extérieur de ce triangle, trois carrés de côtés respectifs $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, et on désigne par I, J et K leurs centres, conformément à la figure ci-dessous.

On a :

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JA})$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.



On se propose de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont orthogonaux et de même norme et que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; les affixes de B et C sont notées b et c.

1° a) Définissez géométriquement J à partir de C.

b) Calculez l'affixe z_J de J en fonction de c.

2° Calculez les affixes z_K et z_I de K et I en fonction de b et c.

3° a) Calculez en fonction de b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JK}$.

b) Déduisez-en que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont orthogonaux et de même norme.

4° Démontrez que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

26 ■■■ $ABCD$ est un carré ; $a = AB$; I, J, K, L sont les points situés respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ tels que : $AI = BJ = CK = DL = \frac{1}{4}a$.

Démontrez qu'il existe une similitude directe, dont vous préciserez le centre, qui transforme $ABCD$ en $IJKL$. (Pour cela, vous pourrez procéder à une étude analytique ou à une étude géométrique analogue à celle de l'exercice **25**.)

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

27 ■ Soit $ABCD$ un carré de centre O : A est fixe et B décrit un cercle qui passe par A.
Quels sont les lieux des points C, D, O ?

28 ■■■ Soit A un point et s une similitude directe du plan.
Soit M un point du plan, M' son image par s et P l'orthocentre du triangle AMM'.
Quel est le lieu de P quand M décrit :

a) une droite donnée ?

b) un cercle donné ?

29 ■■ Soit A et (D) un point et une droite donnés du plan, α un nombre réel tel que : $0 < \alpha < \pi$.
ABC est un triangle tel que B et C sont sur (D) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure α.
Quel est le lieu du pied de la hauteur du triangle ABC issue de B quand B décrit (D) ?

30 ■■■ Dans les deux questions qui suivent, ABC est un triangle dont le sommet A est fixe et dont G est le centre de gravité.

1° Le triangle ABC est équilatéral direct et B décrit un cercle $(\mathscr{C})$.
Quel est le lieu géométrique de G ? Dessinez ce lieu.

2° Le triangle ABC est rectangle en A, isocèle et direct et B décrit une droite (D).
Quel est le lieu géométrique de G ? Dessinez ce lieu.

31 ■■■ Soit A et A' deux points du plan et k un nombre réel strictement positif et distinct de 1.
Déterminez l'ensemble des centres des similitudes directes de rapport k qui transforment A en A'.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

32 ■■■ Soit (D) une droite du plan et A un point du plan n'appartenant pas à (D).
Construisez un triangle ABC tel que :

- le côté $[BC]$ soit porté par (D),
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$,
- $AC = 2AB$.

33 ■■ Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle en A et :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$,

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}$.

On note A' le symétrique de A par rapport à C.

1° Quels sont le rapport et l'angle de la similitude directe s transformant A' en C et C en B ?
On appelle Ω le centre de s.

a) Justifiez l'orthogonalité des droites (ΩC) et (BC).

b) Construisez géométriquement Ω.

PROBLÈMES

34 ■■■ **Utilisation des nombres complexes**
Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C, D, deux à deux distincts.
On note I le milieu de $[AC]$, J celui de $[BD]$ et O l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.
On construit les triangles rectangles isocèles MAB, NBC, PCD, QDA tels que les angles orientés $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$, $(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC})$, $(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD})$, $(\overrightarrow{QD}, \overrightarrow{QA})$ aient $\frac{\pi}{2}$ pour mesure.

On note enfin K et L les milieux respectifs des segments $[MP]$ et $[NQ]$.
On se propose d'étudier la configuration $IKJL$.

1° Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O, on note a, b, c, d, m, n, p, q, les affixes respectives des points A, B, C, D, M, N, P, Q.

a) Déterminez le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme B en M.

b) Exprimez m en fonction de a et b.

c) Déterminez de même n, p, q en fonction de a, b, c, d.

d) Déterminez l'isobarycentre des quatre points M, N, P, Q.

e) Démontrez que l'affixe de K est $i\,\frac{b+d}{2}$.

2° a) Démontrez que O est le milieu de $[IJ]$.

b) Démontrez que $IKJL$ est un carré.

35 Suite de points

Soit O et A deux points du plan orienté, distants de a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On construit la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$A_0 = A$

et, pour tout entier naturel n : $A_{n+1} = s(A_n)$.

1° Construisez les points $A_0, A_1, A_2, ..., A_{12}$.

2° *a*) Démontrez que la suite $(A_nA_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

b) Soit S_n la somme des longueurs A_pA_{p+1}, p variant dans $\mathbb{N}$ de 0 à n ($S_n = \sum_{p=0}^{n} A_pA_{p+1}$).

Calculez S_n en fonction de a et n.

c) Démontrez que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente : quelle est sa limite ?

36 Étude d'une configuration

On définit, dans le plan orienté, quatre points A, B, C, D tels que $AC = BD$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$.

On appelle M le milieu de $[AC]$, N le milieu de $[BD]$ et O le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

1° *a*) Justifiez l'existence de rotations transformant le couple (A, C) respectivement en (B, D) et (D, B).
On note I et J leurs centres respectifs. Construisez ces points I et J.

b) Démontrez que $IMJN$ est un carré.

2° On note P et R les symétriques de I par rapport aux droites (AB) et (CD) et Q et S les symétriques de J par rapport aux droites (BC) et (AD).
Quelle est la nature des quadrilatères $IAPB$ et $ICRD$?
Démontrez que les points P, J, R sont alignés et que J est le milieu de $[PR]$. Démontrez une propriété analogue pour les points S, I, Q.

3° Déterminez une mesure de l'angle $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{SQ})$.

4° On note H et K les projetés orthogonaux de I sur les droites (AC) et (BD).
Quelle est la nature du quadrilatère $OHIK$? Déduisez-en que les points O, P, J, R d'une part et S, O, I, Q d'autre part sont alignés. Quelle est l'intersection des droites (PR) et (QS) ?
(Vous pouvez faire soit une étude géométrique, soit une étude analytique du problème.)

37 Similitudes, isométries, homothéties et alignement

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, I le point de concours des bissectrices de ce triangle.

1° Déterminez la similitude f de centre C transformant A en B.

2° Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Montrez que $h \circ f$ est une rotation R de centre C (vous pourrez utiliser la forme réduite de f).

3° Montrez que R se décompose en produit de deux réflexions sous la forme : $R = s_{(CI)} \circ s_{(CA)}$.

4° Soit R' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Déterminez de même la droite $(\mathcal{D})$ telle que $R' = s_{(CA)} \circ s_{(\mathcal{D})}$.

5° Montrez alors que $R \circ R'$ est une rotation de centre I, dont vous déterminerez l'angle.

6° On note A' l'image de A par R.
Montrez que $IA = IA'$, et déterminez l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'})$.

7° Déduisez-en le parallélisme des droites (AB) et (IA').

8° La droite (CI) coupe (AB) en D.

a) Déterminez les points $h(B)$ et $h(D)$.

b) Déduisez-en que $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \overrightarrow{DB}$.

9° Les droites (IB) et $(A'D)$ se coupent en E.
Soit h' l'homothétie de centre E transformant A' en D. Montrez que h' transforme I en B.
Quel est alors le rapport de l'homothétie h' ?

10° *a*) Quelle est la traduction complexe d'une homothétie de rapport k ? Celle d'une homothétie de rapport $-\frac{1}{k}$?

b) Déduisez-en que la composée d'une homothétie de rapport k et d'une homothétie de rapport $-\frac{1}{k}$ est une symétrie centrale.

c) Quelle est alors la nature de $h' \circ h$?

d) Déterminez $(h' \circ h)(B)$, et déduisez-en que le centre de $h' \circ h$ est le milieu F de $[BD]$.

11° Soit C' l'image de C par $h' \circ h$.
En utilisant le point C', montrez que les points C, E et F sont alignés.

RÉPONSES AUX EXERCICES

Les réponses données correspondent aux exercices signalés en rouge.
Les réponses des Q.C.M. sont désignées par *A*, *B*, *C*.
A correspond à la première réponse proposée, *B* à la deuxième, *C* à la troisième...
« **3***BD* » signifie : « dans le Q.C.M. n° 3, les deuxième et quatrième réponses proposées sont vraies ».

1. COURBES PARAMÉTRÉES

Q.C.M. **1** *B*. **2** *ABC*. **3** *ABCD*.

7. $\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = 1 + 3\sin t \quad t \in [0\,;\pi]. \end{cases}$

9. • $x^2 + y^2 = \dfrac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2}$

$x^2 + y^2 = \dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1.$

Donc (C) est incluse dans le cercle de centre O et de rayon 1.

• L'étude des variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ montre que :
$x(t) \in]-1, 1]$ et $y(t) \in [-1\,;0]$.

11. $x(t) = 1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$
$x(t) = 2(1 - \sin^2 t) = 2(1 - y^2(t))$.
La trajectoire de M est incluse dans la courbe d'équation $x = 2(1 - y^2)$ qui est une parabole.

15. $\begin{cases} x(t) + 1 = \cos t \\ y(t) - 2 = 2\sin t \end{cases}$

donc $(x+1)^2 + \left(\dfrac{y-2}{2}\right)^2 = 1,$

soit : $(x+1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1.$

La trajectoire de M est incluse dans une ellipse (voir chapitre 2).

19. $x'(t) = \cos t\,;$

$y'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \dfrac{t}{2}\right);$

donc : $x'(0) = 1, \; y'(0) = \dfrac{1}{2}.$

Un vecteur directeur de la tangente à (C) en $M(0)$ est :

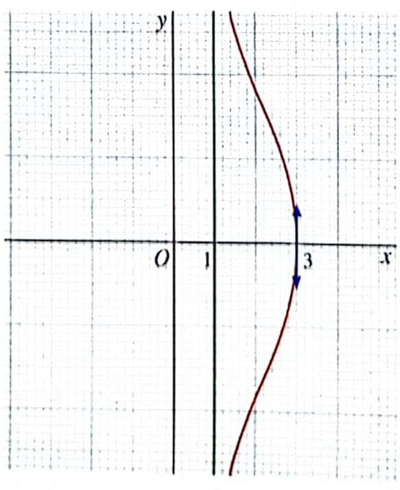
$\vec{u} = \vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j}.$

22. $x'(t) = \cos t,$
$y'(t) = 2\cos 2t\,;$
$x(\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0,$
$x'(\pi) = -1, \; y'(\pi) = 2.$
La tangente à (C) en $M(\pi)$ a pour équation :
$y = -2x.$

25. **La conchoïde de Nicomède**

$x'(t) = 2\sin t,$
$y'(t) = (1 + \tan^2 t) + 2\cos t.$

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	$0 \quad -$	
$x(t)$	$3 \searrow 1$	
$y'(t)$	$+$	
$y(t)$	$0 \nearrow +\infty$	



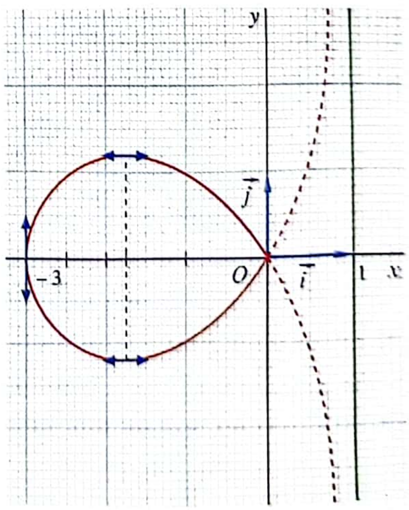
29. **La trissectrice de Mac Laurin**

$x'(t) = \dfrac{8t}{(t^2+1)},$

$y'(t) = \dfrac{t^4 + 6t^2 - 3}{(t^2+1)^2}.$

t	0	t_1	$\sqrt{3}$
$x'(t)$	$0 \quad +$	$+$	
$x(t)$	$-3 \nearrow$	$x(t_1) \nearrow$	0
$y'(t)$	$-$	0	$+$
$y(t)$	$0 \searrow$	$y(t_1) \nearrow$	0

$t_1 = \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0{,}68,$
$x(t_1) \approx -1{,}73,$
$y(t_1) \approx -1{,}18.$

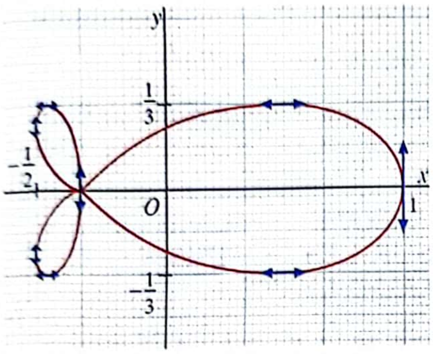


33. **Un folium de Descartes**

$x'(t) = -\dfrac{4}{3}\sin\dfrac{3t}{2}\cos\dfrac{t}{2},$

$y'(t) = \dfrac{2}{3}\cos 2t.$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$x(t)$	1	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0



2. CONIQUES

Q.C.M. 1 *ABD*. 2 *B*. 3 *C*. 4 *BC*.

6. 1° $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}}=1.$

2° $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1.$

3° $\dfrac{(x-1)^2}{9}-(y-2)^2=1.$

4° $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{1}{4}.$

5° $(x-2)^2=4y.$

6° $(y-1)^2=-2(x+1).$

7° $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(y+2)^2}{3}=1.$

11. (Γ) est la réunion de l'ellipse d'équation :

$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

et de l'hyperbole d'équation :

$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1.$

16. (C) est incluse dans l'hyperbole d'équation :

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1.$

18. (Γ) est l'hyperbole d'équation :

$3(x-1)^2-y^2=4.$

21. 1° $\dfrac{z-i}{\bar{z}+4+i}$ est imaginaire pur si, et seulement si :

$z\neq i,\quad z\neq -4+i$

et $\quad x(x+4)-(y-1)^2=0.$

(Γ) est inclus dans l'hyperbole équilatère, de centre $\omega(-2,\,1)$, d'équation réduite :

$\dfrac{(x+2)^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}}=1.$

22. Le discriminant de l'équation (E) s'écrit :

$(\cos\theta+3i\sin\theta)^2.$

Les solutions sont :

$z_1=\cos\theta-i\sin\theta$

et $\quad z_2=2\cos\theta+2i\sin\theta.$

Le point P, milieu de $[M_1M_2]$, a pour coordonnées :

$\left(\dfrac{3}{2}\cos\theta\,;\,\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$

et appartient à l'ellipse d'équation réduite :

$\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1.$

31. (E) est l'ellipse de foyer O et de directrice associée (Δ).
Une équation de cette ellipse est :

$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1.$

36. On désigne par t l'abscisse de M, $t\in[-a\,;a]$ dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ où O est le point d'intersection de (Δ) et (Δ'), $\vec{i}$ directeur de (Δ), $\vec{j}$, directeur de (Δ'). Alors :

$M(t,0)$, $M'(0,\sqrt{a^2-t^2})$,

$G\left(\dfrac{2}{3}t,\,\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2-t^2}\right).$

L'ensemble (E) des points G a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}t \\ y=\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2-t^2}, \quad t\in[-a\,;a]. \end{cases}$$

On en déduit que :

$\dfrac{x^2}{\left(\frac{4}{9}\right)a^2}+\dfrac{y^2}{\frac{a^2}{9}}=1.$

(E) est une ellipse de centre O.

43. La parabole est définie dès que l'on connaît son foyer F et sa directrice (D).
Les symétriques de F par rapport aux deux tangentes appartiennent à (D) : ainsi (D) est connue par deux de ses points.

46. Il suffit de suivre l'énoncé et de revoir dans le cours le paragraphe 3 (« Étude particulière de l'ellipse »).

48. 1° Une équation cartésienne de (E) est :

$\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=1.$

(E) est l'ellipse de centre O, dont l'axe focal est l'axe des abscisses ; ses foyers sont :

$F\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},0\right)$ et $F'\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},0\right)$;

ses sommets sont :

$A(1,0)$, $A'(0,1)$,

$B\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $B'\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

ses directrices ont pour équations :

$x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $x=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

2° $x'=\sqrt{x^2+y^2},\quad y'=2y.$

3° $M(x,y)\in(E)$ équivaut à :

$x^2+y^2+4y^2=1.$

Son image $M'(x',y')$ vérifie donc :

$x'^2+y'^2=1,$

ce qui signifie que M' appartient à (C).

4° Soit $M'(x',y')$ un point du plan, d'antécédent éventuel $M(x,y)$ par f.

• *a*) La condition $x'=\sqrt{x^2+y^2}$ entraîne $x'>0$.

b) La condition $y=\dfrac{y'}{2}$, combinée à la condition $x'^2=x^2+y^2$ entraîne que :

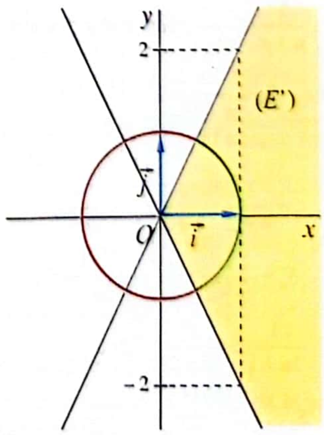
$4x'^2=4x^2+y'^2$

d'où : $\quad y'^2\leqslant 4x'^2,$

soit encore : $\quad |y'|\leqslant 2x'.$

• Ces conditions remplies, on a :

$y=\dfrac{1}{2}y'\quad$ et $\quad x=\sqrt{x'^2-\dfrac{y'^2}{4}}.$



(E') est la partie du cercle (C) incluse dans la partie coloriée du plan.

3. COMPLÉMENTS D'ANALYSE

Q.C.M. 1 *C*. 2 *C*. 3 *AC*. 4 *BC*.

6. 1° $f' > 0$ sur $[1, +\infty[$, donc f est strictement croissante.

2° $g'(x) = \frac{1}{x^2}$;

$f'(x) < g'(x)$ car $\sqrt{1+x^4} > x^2$.

$g - f$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$, nulle en 1, donc positive.
D'où : $f \leqslant g$.

3° $g \leqslant 1$, donc f est majorée par 1.
Comme fonction croissante majorée, elle a une limite ℓ en $+\infty$.
f est positive (croissante, avec $f(1) = 0$), donc :
$0 \leqslant f \leqslant 1$.
D'où : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

10. 1° Soit $P(n)$ la proposition : $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
$P(0)$ est vraie. Soit n quelconque fixé, tel que $P(n)$ soit vraie.
$0 \leqslant u_n \leqslant 4$, d'où $4 \leqslant 3u_n + 4 \leqslant 16$,
$0 \leqslant \sqrt{3u_n+4} \leqslant 4$,
ce qui démontre $P(n+1)$, et achève ainsi la récurrence.
(u_n) est donc majorée par 4.

2° $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n+4} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(4-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{3u_n+4} + u_n},$$

d'où : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, (u_n) croissante.
Comme suite croissante majorée, (u_n) est convergente.
$x \mapsto \sqrt{3x+4}$ étant continue sur $[0\,; 4]$, la limite ℓ de (u_n) est solution de l'équation :
$x = \sqrt{3x+4}$.
On obtient alors $\ell = 4$.

12. 1° $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p}$

$$\frac{1}{n+p} \leqslant \frac{1}{n+1}, \text{ pour tout } p,\ 1 \leqslant p \leqslant n.$$

D'où : $S_n \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$.
(S_n) est majorée par 1.

2° $S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}$.

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Or : $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$, d'où :

$$S_{n+1} - S_n > \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+1},$$

soit $S_{n+1} - S_n > 0$.
(S_n) est strictement croissante, majorée par 1 donc convergente.

17. Pour tout x de $[0\,; 1]$, par la décroissance de f, on a :
$f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$.
En intégrant cette inégalité, on obtient :

$$f(1) \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant f(0).$$

22. 1° $(\cos^2 x)^n \leqslant 1$, d'où :

$$I_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx, \quad I_n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

2° $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n(\cos^2 x - 1)\,dx$.

Or : $(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x)^n \leqslant 0$, d'où :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n(\cos^2 x - 1)\,dx \leqslant 0,$$

$I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite (I_n) est décroissante.

$\cos^2 x \geqslant 0$ sur $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$, d'où : I_n est positive.

(I_n) est décroissante, minorée par zéro, donc convergente.

24. 1° $t \in [0\,; 1]$, donc :

$t^2 \leqslant t$, $-\frac{t}{n} \leqslant -\frac{t^2}{n}$,

$e^{-\frac{t}{n}} \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}} \leqslant 1$

$\left(\text{car } -\frac{t^2}{n} \leqslant 0\right)$.

2° On en déduit :

$$\int_0^1 e^{-\frac{t}{n}} \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 1\,dt.$$

$\left[-n e^{-\frac{t}{n}}\right]_0^1 \leqslant u_n \leqslant 1$, soit :

$-n(e^{-\frac{1}{n}} - 1) \leqslant u_n \leqslant 1$.

Or : $-n(e^{-\frac{1}{n}} - 1) = \dfrac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}}$

et $\lim\limits_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$.

(u_n) est encadrée par deux suites de même limite 1, donc converge vers 1.

26. 1° Sur $[p\,; p+1]$, $\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{p}$,

d'où $\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{p}$.

2° $\int_n^{2n} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{p=n}^{2n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt$.

En sommant les inégalités obtenues au 1°, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p+1} \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n-1}.$$

3° L'encadrement précédent s'écrit :

$$v_n \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{t}\,dt \leqslant v_n + \frac{1}{2n}.$$

Or : $\int_n^{2n} \frac{1}{t}\,dt = \ln 2$.

D'où : $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leqslant v_n \leqslant \ln 2$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\ln 2 - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement, (v_n) converge vers $\ln 2$.

4. COMPLÉMENTS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Q.C.M. 1 *B*. 2 *B*. 3 *ABC*. 4 *C*. 5 *ABC*.

6. *a)* $\frac{1}{2}(\sin 4x - \sin x)$.

b) $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{5}{2}x + \cos \frac{x}{2}\right)$.

c) $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{3}{2}x - \cos \frac{5}{2}x\right)$.

10. $\sin 2x + \sin 7x = 2 \sin \frac{9}{2}x \cos \frac{5}{2}x$.

$\sin x + \sin 8x = 2 \sin \frac{9}{2}x \cos \frac{7}{2}x$.

D'où l'équation équivaut à :

$\sin \frac{9}{2}x = 0$ ou $\cos 3x = 0$ ou $\cos \frac{x}{2} = 0$.

Les solutions sont :

$x = 0 \left(\frac{2\pi}{9}\right)$ ou $x = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\pi}{3}\right)$.

17. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$,

soit $x = \frac{7\pi}{12}\,(2\pi)$ ou $x = \frac{\pi}{12}\,(2\pi)$.

18. $\cos(x - \varphi) = \frac{15}{\sqrt{13}}$: impossible.

Pas de solution.

25. $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Une solution est $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
On obtient toutes les solutions en multipliant celle-ci par les racines sixièmes de 1.

$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

31. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$;

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}$;

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$.

ABC rectangle en B.

36. 1° $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$;

$z_{\overrightarrow{OA}} = 1$ et $z_{\overrightarrow{AM}} = e^{i\theta}$

où $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AM})$.

2° $z' = 1 + e^{-i\theta}$ car $z' = \bar{z}$.

3° $\frac{z}{z'-1} = \frac{1+e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

$\frac{z}{z'-1} = (\cos\theta + \cos 2\theta) + i(\sin\theta + \sin 2\theta)$.

4° *a)* $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaires équivaut à $\frac{z}{z'-1}$ réel, soit :

$\sin\theta + \sin 2\theta = 0$

d'où : $\theta = 0$ ou $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.

b) $\overrightarrow{AM'} \perp \overrightarrow{OM}$ équivaut à $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z'-1}\right) = 0$

soit $\cos\theta + \cos 2\theta = 0$

d'où : $\cos\theta = -1$ ou $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

On obtient : $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$

($\theta = \pi$ impossible car $M \neq O$).

39. 1° $\begin{cases} b = 2a^2 \\ a = i(a-b) \end{cases}$

d'où : $a = \frac{1+i}{2}$ et $b = i$ $(a \neq 0)$.

2° $\begin{cases} a = i(a-b) \\ a = b - a^2 \end{cases}$

d'où : $a = i$ et $b = -1 + i$ $(a \neq 0)$.

43. 1° $OI = OB\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cos\theta$

$OJ = OA\sin\theta = \frac{1}{1+\sqrt{3}}\sin\theta$.

$p(\theta) = \frac{2}{1+\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)$.

2° $p'(\theta) = \frac{2}{1+\sqrt{3}}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)$

$p'(\theta) = \frac{4}{1+\sqrt{3}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

$p'(\theta) = 0$ équivaut à $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

soit $\theta = \frac{\pi}{6}$.

3° $\mathcal{A}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} \times \sin\theta\cos\theta$.

$\mathcal{A}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})^2} \times \sin 2\theta$.

$\mathcal{A}'(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} \times \cos 2\theta$.

$\mathcal{A}'(\theta) = 0$ équivaut à :

$2\theta = \frac{\pi}{2}$ soit $\theta = \frac{\pi}{4}$.

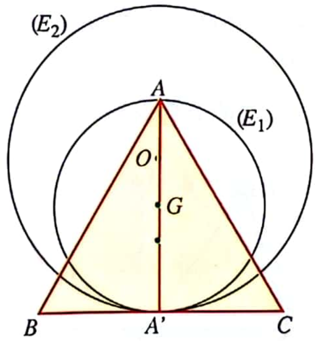
5. CALCUL VECTORIEL. COMPLÉMENTS

Q.C.M. 1 *ABD*. 2 *CD*. 3 *D*. 4 *AC*.

6. 1° Si A' est le milieu de $[BC]$ alors G est le milieu de $[AA']$.

2° (E_1) est le cercle de diamètre $[AA']$.

3° Soit O le milieu de $[AG]$. (E_2) est le cercle de centre O passant par A'.



10. Pour tout point M du plan :

$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

1° En écrivant :

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$,

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$,

on trouve immédiatement la première relation demandée.

En utilisant la relation :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

on obtient la seconde.

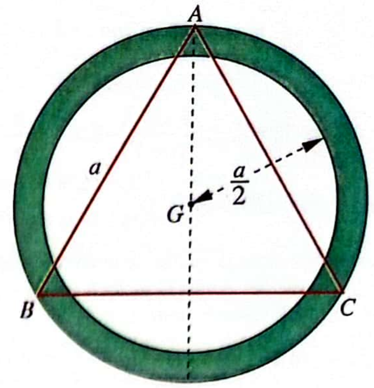
2° $f(G) = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$, d'où :

$\varphi(M) = 3MG^2 - \frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

3° Dans ce cas particulier, on a :

$\varphi(M) = 3MG^2 - \frac{a^2}{2}$.

L'ensemble des points M cherché est la couronne circulaire de la figure ci-après.



13. L'isobarycentre de A, B, C, D est $G\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

$f(M) = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$.

f est minimale en G, le minimum de f est alors :

$f(G) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \frac{9}{4}$.

22. 1° *a)* A, B, a et b sont cocycliques car :

$(\overrightarrow{bA}, \overrightarrow{bB}) = (\overrightarrow{aA}, \overrightarrow{aB})$ (π)

donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{Ba})$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{bA}, \overrightarrow{ba})$ (π) (1)

b) (CT) est tangente à (Γ) en C, donc :

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ (π)

d'où : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT}) = (\overrightarrow{bA}, \overrightarrow{ba})$ (π) (2)

En utilisant (1) et (2), on tire :

$(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{CT}) = (\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT})$ (π),

$(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{CT}) = (\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT})$ (π),

$(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{CT}) = 0$ (π), donc $(ab) /\!/ (CT)$.

c) (OC) et (CT) sont perpendiculaires donc (ab) et (OC) sont perpendiculaires.

2° A, C, a, c sont cocycliques, donc :

$(\overrightarrow{aC}, \overrightarrow{aA}) = (\overrightarrow{Cc}, \overrightarrow{CA})$ (π).

C, H, a, b sont cocycliques, donc :

$(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{Cb}) = (\overrightarrow{aH}, \overrightarrow{ab})$ (π),

soit encore :

$(\overrightarrow{Cc}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{aA}, \overrightarrow{ab})$ (π).

On en déduit que :

$(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{aA}) = (\overrightarrow{aA}, \overrightarrow{ab})$ (π),

ce qui signifie que (aH) est bissectrice de l'angle $\widehat{bac}$.

26. 1° $|Z| = \frac{MA}{MB}$

et $\arg Z = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$.

2° *a)* Médiatrice de $[AB]$.

b) Cercle de diamètre $[OI]$ où I est le point d'affixe $-8-4i$.

c) Droite (AB) privée du segment $[AB]$.

d) Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

28. $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^3$ est imaginaire pur si, et seulement si :

$z \neq 0,\quad z \neq 1 \quad$ et $\quad \arg\left(\dfrac{z}{z-1}\right) = (2k+1)\dfrac{\pi}{6}$

donc $\quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (2k+1)\dfrac{\pi}{6}$.

L'ensemble cherché est la réunion de trois cercles privée des points O et A.

32. 1° *a)* $(1-2i)z + (1+2i)\bar{z} = 4$ équivaut à :

$2\,\mathrm{Re}[(1-2i)z] = 4. \qquad (1)$

Si $\quad z = x + iy \quad$ alors (1) équivaut à :

$x + 2y = 2$.

(S) est donc une droite, la droite (AB).

b) $(z-i)(\bar{z}+i) = 4$ équivaut à :

$(z-i)(\overline{z-i}) = 4$,

soit $\quad |z-i| = 2$.

(T) est donc le cercle de centre A, et de rayon 2.

2° *a)* $z' - 2 = \dfrac{-2i}{(\overline{z-i})}. \qquad (2)$

$z'-2$ est l'affixe de $\overrightarrow{BM'}$.

$z-i$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$.

• De (2) on déduit que :

$|z'-2| = \dfrac{|-2i|}{|\overline{z-i}|}, \quad$ soit $\quad BM' = \dfrac{2}{AM}$.

• $\arg(z'-2) = \arg(-2i) - \arg(\overline{z-i}) \quad (2\pi)$

$\arg(z'-2) = -\dfrac{\pi}{2} + \arg(z-i) \quad (2\pi)$,

soit : $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -\dfrac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \quad (2\pi)$.

$(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = (\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \quad (2\pi)$,

soit : $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = (\vec{v}, \overrightarrow{AM}) \quad (2\pi)$.

b) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{AM}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

c) $z' - 2 = \dfrac{-2i}{\overline{z-i}}$ équivaut à :

$z - i = \dfrac{2i}{\overline{z'-2}}$

donc f est une bijection de $(P) - \{A\}$ sur $(P) - \{B\}$.

33. 1° $ABGC$ est un carré de centre $I\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

2° *b)* $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MG^2 + GB^2 + GC^2 - GA^2$

G est le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ avec $GB^2 + GC^2 - GA^2 = 0$.

$(x-1)^2 = [d(M,(\Delta))]^2$, donc :

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2[d(M,(\Delta))]^2 = MG^2$;

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{2}\,d(M,(\Delta)) = MG$;

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \dfrac{MG}{d(M,(\Delta))} = \sqrt{2}$.

c) (Γ) est une conique, l'hyperbole de foyer G, de directrice (Δ) et d'excentricité $e = \sqrt{2}$.

6. ISOMÉTRIES

Q.C.M. 1 *C*. 2 *B*. 3 *BCD*.

4. 1° *a)* $O'(1-i)$, $\quad A'\left(\dfrac{3}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right)$,

$B'\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$.

b) $OA = O'A' = 1, \quad OB = O'B' = 1$.

2° $MN = M'N'$. Si on ajoute le fait que f est une bijection alors on peut conclure que f est une isométrie.

5. 1° *a)* $O'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\qquad A'\left(\sqrt{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$B'\left(\sqrt{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) $OA = O'A', \quad OB = O'B'$.

2° Même conclusion qu'à l'exercice **4**.

8. 1° $r\left(A, \dfrac{\pi}{2}\right)$; $r(B, \pi)$; $t(\overrightarrow{BO})$.

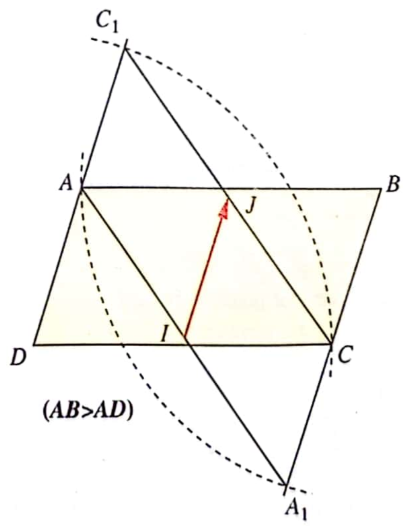
2° $t(\overrightarrow{OB})$; $t(2\overrightarrow{AB})$. (On pourra d'abord écrire $s_{(DC)} \circ s_{(IL)} = r_{\left(M, \frac{\pi}{2}\right)}$ en appelant M le symétrique de K par rapport à D, puis $s_{(IL)} \circ s_{(AB)} = r_{\left(I, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

11. Complétez les égalités avec :

1° $s(AC)$, $\quad s(OA)$.

2° $s(AB)$, $\quad s(BC)$.

13. 1° *a)* Voir la figure : $r_2 \circ r_1(A) = A_1$.



b) $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale.

Prouvez que $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \pi$ puis utilisez l'image A_1 de A par $r_2 \circ r_1$.

$r_2 \circ r_1$ est la symétrie de centre I milieu de $[AA_1]$.

2° Construisez l'image C_1 de C par $r_4 \circ r_3$.

(Remarquez que $r_4 \circ r_3(C) = r_4(C)$.).

Calculez $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$. Concluez :

$r_4 \circ r_3$ est la symétrie de centre J, milieu de $[CC_1]$.

Alors $f = s_J \circ s_I$, f est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

3° f est l'application identique si et seulement si $I = J$. Prouvez alors que $ABCD$ est un losange.

14. **Méthode 1** (avec une symétrie centrale).

La symétrie de centre I transforme B en C.

Elle transforme (BB') en la droite passant par C et parallèle à (BB') donc en (CC').

Elle conserve la droite (AI). Elle transforme donc B' en C'. Concluez.

Méthode 2

On peut utiliser, pour résoudre cet exercice, la projection orthogonale sur la droite (AI), application qui conserve la propriété « milieu ». Ainsi le milieu I de $[BC]$ se projette au milieu de $[B'C']$; puisque I est sur (AI), il est invariant par cette projection.

I est donc le milieu de $[BC]$ et de $[B'C']$.

Concluez.

16. 1° Utilisez la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Puisque $AD = AB$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$, $r(D) = B$.

De même : $r(C) = E$.

On déduit alors que :

$DC = BE$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BE}) = \dfrac{\pi}{2}$.

2° Le milieu I de $[DC]$ a pour image par r le milieu J de $[BE]$. Concluez.

19. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrez que (AJ) est une hauteur du triangle AEF.

Pour cela, montrez que :

$r(A) = B, \qquad r(B) = C, \qquad r(C) = D,$

$r(I) = J$.

Déduisez alors : $(AI) \perp (BJ)$ puis utilisez la propriété $(EJ) \perp (AF)$.

Le point J est l'orthocentre du triangle AEF et donc $(AJ) \perp (EF)$.

22. Dans chaque cas figure l'identité du plan, nous ne la rappellerons pas.

1° Symétrie de centre I, milieu de $[AB]$.

Réflexion d'axe (AB).

Réflexion d'axe (Δ), médiatrice de $[AB]$.

2° Réflexion d'axe (Δ), médiatrice de $[BC]$.

3° Toute rotation de centre O centre du cercle (donc la symétrie de centre O).

Toute réflexion ayant pour axe une droite passant par O.

4° Le rectangle est noté $ABCD$.

Symétrie de centre le centre du rectangle.

Réflexions ayant pour axes les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$.

5° Le losange est noté $ABCD$, son centre O.

Symétrie de centre O. Réflexions d'axes (AC) et (BD).

6° Le pentagone est noté $ABCDE$, son centre O. Les rotations de centre O et d'angle $k\dfrac{2\pi}{5}$, avec $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Les réflexions d'axes les médiatrices des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EA]$.

L'hexagone est noté $ABCDEF$, son centre O. Les rotations de centre O et d'angle $k\dfrac{\pi}{3}$, avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Les réflexions d'axes (OA), (OB), (OC) et les médiatrices de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$.

25. Tracez la droite (D') passant par I et parallèle à (D). Dans le demi-plan de frontière (D') et ne contenant pas (D), construisez un segment $[A_1B_1]$ tel que $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{u}$.

Tracez le cercle $(\mathcal{C})$ passant par A_1 et B_1 et tangent à (D). Il coupe (D') en deux points J et K. Tracez l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$ (ou $\overrightarrow{KI}$). Vérifiez que $(\mathcal{C}')$ est un cercle solution.

Remarque 1 : tout segment $[A_1 B_1]$ ainsi construit conduit à deux cercles $(\mathcal{C}')$ solutions.

Remarque 2 : il est possible de résoudre ce problème sans utiliser d'isométrie.

28. Projetez orthogonalement A et B en A' et B' sur (Δ).
Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur de (Δ), de même sens que $\overrightarrow{A'B'}$, de norme ℓ.
Construisez B_1, image de B par la translation de vecteur $-\vec{u}(\overrightarrow{B_1B}=\vec{u})$. Alors $CDBB_1$ est un parallélogramme et le minimum de $AC+CD+DB$ est obtenu quand $AC+DB$, c'est-à-dire $AC+CB_1$, est minimal.
On retrouve un problème classique.
Pour obtenir le point C, construisez le symétrique B_2 de B_1 par rapport à (Δ) ; C est l'intersection de (AB_2) et (Δ).

29. Le triangle ABI est rectangle en I et isocèle donc $IA=IB$ et $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})=\varepsilon\dfrac{\pi}{2}$, avec $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon=-1$ suivant que le triangle AIB est direct ou non direct.

Analyse

Si $\varepsilon=1$ alors B est l'image de A par la rotation r de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Le point B est donc sur la droite $(\mathcal{D}')$ et sur l'image par r de la droite $(\mathcal{D})$.

Synthèse

Construisez $r(\mathcal{D})$. Notez B un point commun à $(\mathcal{D}')$ et $r(\mathcal{D})$ (point dont l'existence est à étudier dans une discussion).
Construisez le point A, antécédent de B par r.
Prouvez que ABI est rectangle isocèle et que A est un point de $(\mathcal{D})$.

Discussion

Pour $\varepsilon=1$, le problème admet zéro, une ou une infinité de solutions suivant que $r(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont strictement parallèles, sécantes ou confondues.
Conclusions analogues pour $\varepsilon=-1$.

32. Choisissez A sur (Δ). Construisez l'image (Γ_1) de (Γ) par la réflexion d'axe (Δ). Justifiez que C est un point commun à (Γ') et (Γ_1).
Reprenez alors, pour chaque point A choisi, une étude analogue à celle de l'exercice **29.**

36. Appelez O le milieu de $[AC]$, O' le milieu de $[AI]$, O'' le milieu de $[IC]$.
L'aire de ABC est la somme des aires de AHI, $IHBF$, IFC. L'aire de ACD est la somme des aires de AEI, $IEDK$, IKC.
Les triangles ABC et ACD sont symétriques par rapport à O, ils ont donc la même aire.
Comparez les aires des triangles AHI et AEI d'une part, IFC et ICK d'autre part. Concluez.

40. 1° **Question préliminaire.**
Utilisez les égalités suivantes, égalités que vous justifierez :

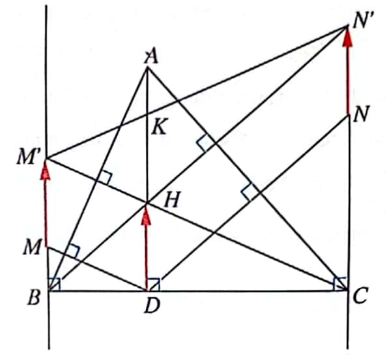
$$\frac{JI}{AB}=\frac{DI}{DB},\ \frac{DI}{DB}=\frac{CI}{CA},\ \frac{CI}{CA}=\frac{IK}{AB},$$

et le fait que I est intérieur au trapèze donc entre J et K.

2° *a)* L'image de (DM) par T est la droite passant par $T(D)$, donc H, et parallèle à (DM).
Or (DM) et (CH) sont parallèles donc :
$T((DM))=(CH)$.
De même, $T((DN))=(BH)$.
L'image de DMN par T est $HM'N'$ avec :
$M'=T(M)$ et $N'\in T(N)$.

b) Justifiez que M' image de M par T est un point de (HC) et que, de même, N' est un point de (BH).
Dans le trapèze $BM'N'C$, les diagonales (BN') et (CM') se coupent en H ; la droite (DH), parallèle à (BM'), coupe (BC) en D et $(M'N')$ en K.
D'après 1° : $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{HK}$.

c) Puisque $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{DH}$, $T(H)=K$.
Ainsi : $H=T^{-1}(K)$, $M=T^{-1}(M')$, $N=T^{-1}(N')$ et K, M', N' sont alignés donc M, N, H sont alignés ; la droite (MN) passe par H.



7. DÉPLACEMENTS

Q.C.M. 1 *A.* 2 *C.* 3 *C.* 4 *C.* 5 *BC.* 6 *B.*

7. Dans chacun des exemples proposés, l'identité du plan est solution. Nous n'énonçons donc que les autres déplacements.

1° La symétrie de centre le milieu de $[AB]$. (Pensez que l'isobarycentre des points A et B est fixé par tout déplacement conservant $[AB]$.)

2° Pas d'autre déplacement.

3° Le centre O du cercle étant fixé par le déplacement cherché, il n'y a pas d'autre translation que l'identité du plan.
Les rotations de centre O sont toutes solutions.

4° La symétrie de centre le centre du rectangle.

5° La symétrie de centre le centre du losange.

9. Par définition de r' :
$AJ=AD$ et $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AD})=\alpha\ (2\pi)$.
D'après les propriétés des rotations, donc de r,
$AJ=BC$ et $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{BC})=\alpha\ (2\pi)$.
Ainsi :
$AD=BC$ et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})=0\ (2\pi)$,
donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; $ABCD$ est un parallélogramme.

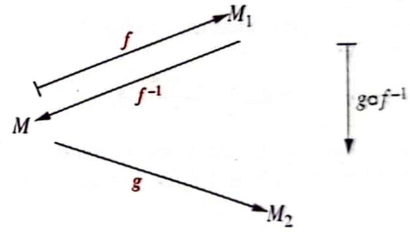
11. 1° *a)* $f(K)=K$. (Justifiez que :
$\overrightarrow{KJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc $T(K)=J$,
puis que $IJ=IK$ et $(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK})=\dfrac{\pi}{2}$
donc $R(J)=K$.)
D'après ce qui précède :
$g(J)=T(R(J))=T(K)=J$.

b) f est un déplacement.
Si M et N sont deux points d'images M' et N' par T et M'' et N'' par f, alors :
$(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})=0\ (2\pi)$
et $(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M''N''})=\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$,
donc $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M''N''})=\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$,
$\overrightarrow{MN}\neq\overrightarrow{M''N''}$.
f est donc une rotation, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Son centre est K.
Pour g : rotation de centre J, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2° *a)* f^{-1} est la rotation de centre K et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
$g\circ f^{-1}$ est une translation.

b) $g\circ f^{-1}(A)=g(I)=C$.
g est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) Le schéma :



visualise les égalités :
$M_2=g(M)$, $M_2=g(f^{-1}(M_1))$,
$M_2=g\circ f^{-1}(M_1)$,
desquelles on déduit que $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{AC}$ et donc que ACM_2M_1 est un parallélogramme.

12. 1° P est un point commun à la médiatrice de $[AC]$ et à un demi-cercle d'extrémités A et C. Ces deux courbes ont un point commun et un seul.

2° *a)* $r_P(A)=C$, $s_{A'}(C)=B$, $r_Q(B)=A$ donc $f(A)=A$.
f est un déplacement qui fixe un point, c'est une rotation. Or la somme des angles des trois rotations r_P, $s_{A'}$, r_Q est 0 donc f est l'identité du plan.

b) Posez $P'=s_{A'}(P)$. Puisque $f(P)=P$, $r_Q(P')=P$. Le triangle PQP' est rectangle en Q et isocèle. Or A' est le milieu de $[PP']$ donc PQA' est rectangle en A' et isocèle.

15. 1° $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{6}$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{3}$.
(Vous pouvez calculer $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, égal à $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$, et $\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, égal à $\dfrac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{AB\times AC}$.)

Remarque : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{2}$.

2° a) $R_1 = s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$,

$R_2 = s_{(AB)} \circ s_{(CB)}$.

donc $R_1 \circ R_2 = s_{(AC)} \circ s_{(CB)} = R_{(C,\pi)}$.

T est la symétrie de centre C.

b) T est un déplacement. De $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ on déduit que T est une rotation, et même une symétrie centrale.

$T(B) = R_1 \circ R_2(B) = R_1(B) = B'$;

B' est tel que :

$AB = AB'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Le triangle ABB' est équilatéral avec (AC) bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et hauteur issue de A.

Ainsi B' est le symétrique de B par rapport à C.

T est la symétrie de centre C.

Remarque. Avec les nombres complexes on peut écrire :

$$M(z) \overset{R_2}{\longmapsto} M_2(z_2) \overset{R_1}{\longmapsto} M_1(z_1)$$

$$z_2 - z_B = e^{2i\frac{\pi}{3}}(z - z_B),$$

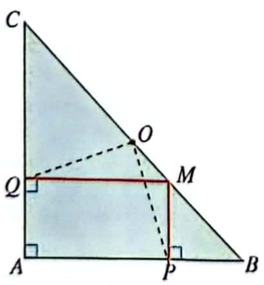
$$z_1 - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_2 - z_A).$$

Après remplacement de z_A par 6, de z_B par $3 + i\sqrt{3}$, de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ par $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de $e^{2i\frac{\pi}{3}}$ par $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, puis réduction, on obtient :

$$z_1 = -z + 6 \quad \text{et donc} \quad \frac{z_1 + z}{2} = 3,$$

égalité qui prouve que C est le milieu de $[MM_1]$ et donc que $R_1 \circ R_2$ est la symétrie de centre C.

17. Utilisons l'hypothèse supplémentaire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$, qui correspond au cas de figure ci-dessous.



$APMQ$ est un rectangle donc $AQ = PM$.

BMP est un triangle rectangle en P et isocèle $\left(\widehat{B} = \frac{\pi}{4}\right)$ donc $PM = PB$. Ainsi $AQ = BP$ et $\overrightarrow{AQ} \neq \overrightarrow{BP}$. Il existe donc une rotation r transformant A en B et Q en P.

D'après le choix de M :

$(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{BP}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \pi$

$(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{BP}) = \frac{\pi}{2}$ (2π).

r est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ transformant A en B. Son centre est donc O (prouvez que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$ et $OA = OB$.)

De $r(Q) = P$ on déduit alors que :

$OQ = OP$ et $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}) = \frac{\pi}{2}$.

Concluez.

20. 1° $OM = O'M'$ et $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{O'M'}$. Ceci prouve l'existence d'une rotation r transformant O en O' et M en M'.

r est la rotation de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{2}$

$((\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BO'}) = -(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = -\frac{\pi}{2}$

et $BO = BO'$).

2° $r(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$,

$r(BM') = (BM)$ car $(BM) \perp (BM')$,

donc $r(\{B, N\}) = \{B, N'\}$.

Or $r(B) = B$ et r est une bijection donc $r(N) = N'$.

24. 1° La rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme A en B et B en C. I, barycentre de $(A, 3)$, $(B, 1)$ est transformé en J, barycentre de $(B, 3)$, $(C, 1)$.

(Interprétez, en termes de barycentre, les égalités :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}(1\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AA})$.)

Ainsi $OI = OJ$; la médiatrice de $[IJ]$ passe par O.

2° Soit r' la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

$r'(B) = I$. Posons $r'(J) = J'$.

J' est tel que $BJ = IJ'$ et $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IJ'}) = \frac{\pi}{2}$ (2π).

$BJ = IA$ et $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$ (2π).

Par suite :

$IJ' = IA$ et $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IJ'}) = 0$ (2π),

donc $\overrightarrow{IJ'} = \overrightarrow{IA}$, $J' = A$.

De $r(J) = A$ on déduit que KJA est rectangle en K et isocèle.

26. **Méthode analytique**

Dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ les points $A, B, C, A', B', C', U, V, W$ ont pour affixes respectives $z_A, z_B, \dots, z_W$.

Démontrez que $z_W - z_U = e^{i\varepsilon\frac{\pi}{3}}(z_V - z_U)$ où $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Pour cela, écrivez :

$z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A$; $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_B$ ...

$z_U = \frac{1}{2}(z_{A'} + z_B) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} z_A + z_B\right)$;

de même pour z_V et z_W.

Alors :

$$z_W - z_U = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) + z_A - z_B\right),$$

$$z_V - z_U = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_C - z_B\right).$$

Vérifiez alors que :

$z_W - z_U = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_V - z_U)$ et concluez.

8. SIMILITUDES

Q.C.M. **1** C. **2** C. **3** AC. **4** B. **5** BD.

9. 1° $z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z$.

2° $z' = \frac{1}{6}\left[(\sqrt{3} + i)z - 19 + 3\sqrt{3} - i(3 - \sqrt{3})\right]$.

13. a) Similitude directe de centre d'affixe $2\frac{\sqrt{3}}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b) Similitude directe de centre d'affixe $3 + 2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c) Similitude directe de centre d'affixe $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Rotation de centre d'affixe $-\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

18. Deux cas : soit le centre de gravité G est l'image de A par la similitude de rapport $\frac{2}{3}$, de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$, soit C est l'image de A par la similitude de rapport $\frac{2}{3}$, de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

Deux solutions :

$$z_G = \frac{8 - \sqrt{3}}{3} - \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}i,$$

ou $$z_G = \frac{4 - \sqrt{3}}{3} + \frac{1 - 2\sqrt{3}}{3}i.$$

20. 1° L'affixe de G est égale à :

$\left(\frac{1}{2}\right)(1 + ke^{i\theta}) \times$ affixe de M.

Si s n'est pas une homothétie alors θ n'est pas un multiple de π, donc :

$\left(\frac{1}{2}\right)(1 + ke^{i\theta}) \neq 0$;

G est alors l'image de M par la similitude directe d'équation complexe :

$z' = \left(\frac{1}{3}\right)(1 + ke^{i\theta})z$,

qui ne dépend que de s.

2° a) Ou bien $M = O = M'$; ou bien :

$OM' = OM\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{4}$ (2π)

et le triangle OMM' est rectangle en M et isocèle.

b) $\frac{1+k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{3}=\frac{2+\mathrm{i}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ avec :

$\cos\theta'=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta'=\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\theta'\approx 0{,}5$ rad. à 0,1 rad. près.

22. 1° $q=(1-\alpha)a+\alpha b$.

2° *a*) Évident par : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

b) $n+q=m+p \Leftrightarrow (1-\alpha)(b+d)+\alpha(a+c)$

$=(1-\alpha)(a+c)+\alpha(b+d)$

$n+q=m+p \Leftrightarrow (1-2\alpha)(a+c-b-d)=0.$

$n+q=m+p \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ ou $a+c=b+d$.

3° *MNPQ* est un parallélogramme d'après 2°.

On a $1-\alpha=-\mathrm{i}\alpha$ d'où :

$\mathrm{i}(p-q)=\alpha(d-a)+\mathrm{i}\alpha(a-b)$.

Or $a+c=b+d$, d'où :

$\mathrm{i}(p-q)=\alpha(c-b)-\mathrm{i}\alpha(b-a)=m-q$.

On en déduit que *MNPQ* est un carré.

30. 1° *G* est l'image de *B* par la similitude directe *S* de centre *A*, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Si $A\notin(\mathcal{C})$, alors le lieu de *G* est le cercle $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par *S*.
Si $A\in(\mathcal{C})$, alors le lieu de *G* est $(\mathcal{C}')$ privé de *A*.

2° *G* est l'image de *B* par la similitude directe *S'* de centre *A*, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Si $A\notin(\mathcal{D})$, alors le lieu de *G* est la droite $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$ par *S'*.
Si $A\in(\mathcal{D})$, alors le lieu de *G* est $(\mathcal{D}')$ privée de *A*.

34. 1° *a*) $s\left(A,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

b) $m-a=\frac{1+\mathrm{i}}{2}(b-a)$,

d'où : $m=\frac{1+\mathrm{i}}{2}b+\frac{1-\mathrm{i}}{2}a$.

c) $n=\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b$;

$p=\frac{1+\mathrm{i}}{2}d+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c$;

$q=\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}d$.

d) L'affixe de l'isobarycentre est :
$\frac{a+b+c+d}{4}$, donc c'est *O*.

e) $z_K=\frac{m+p}{2}=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$

$+\frac{1}{4}\mathrm{i}(b-a+d-c)$;

de $a+b+c+d=0$, on tire $k=\mathrm{i}\frac{b+d}{2}$.

2° *a*) $z_I+z_J=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(b+d)=0$

car $a+b+c+d=0$.

b) En utilisant :

$m+n+p+q=0$,

on trouve : *O* milieu de [*KL*].
Donc *IKJL* est un parallélogramme.
De $z_K=\mathrm{i}z_J$, on déduit :

$OK=OJ$ et $(OK)\perp(OJ)$,

d'où : *IKJL* est un carré de centre *O*.

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES TS
Enseignement de spécialité

Cet enseignement a pour objectif d'approfondir et de développer certains des paragraphes déjà étudiés dans l'enseignement obligatoire.

ANALYSE

Fonctions numériques : étude locale et globale

Convergence des suites monotones :
Toute suite croissante majorée converge.

On dispose d'un énoncé analogue pour les suites décroissantes.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples (recherche de valeurs approchées en un point, recherche de limites...). Exemples d'emploi d'inégalités sur les dérivées pour l'obtention de telles majorations.

Pour tous les problèmes de majoration, d'encadrement et d'approximation des fonctions, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. L'exploitation, sur des exemples simples tels que e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, du théorème sur le sens de variation, appliqué aux dérivées d'ordre convenable d'une fonction auxiliaire, constitue un outil intéressant. Cependant aucun énoncé sur les majorations tayloriennes n'est au programme, et il n'y a pas de catalogue de situations classiques à mémoriser.

Étude du comportement de suites de la forme $u_n = f(n)$ (encadrement, monotonie, limite).

Certaines études de comportement asymptotique mettent en jeu des formes indéterminées : on se limitera à des exemples simples et, en dehors des cas figurant explicitement au programme (comparaison des suites de références), des indications doivent être fournies sur la méthode à suivre.

Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale.

Toute étude de ce type de suite devra comporter des indications sur la méthode à suivre.

Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.

Sur les exemples étudiés on mettra en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation au moyen d'une suite, étude de cette suite, obtention de la précision visée.

Calcul intégral

Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer; exemples d'applications à l'obtention d'encadrements d'une fonction.

On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer doivent être fournies.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Nombres complexes

Transformation de $a\cos\theta - b\sin\theta$, où a et b sont réels.
Conversion de produits trigonométriques en sommes et de sommes en produits.
Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ; interprétation géométrique.

Les élèves doivent savoir en déduire les solutions de l'équation $z_n = a$, où a est mis sous forme trigonométrique. Aucune connaissance n'est exigible sur les méthodes de résolution algébrique, même si $n = 2$.

Calcul vectoriel et géométrie

L'objectif est d'enrichir les applications géométriques du calcul vectoriel et des nombres complexes.

Travaux pratiques

Exemples de recherche de lieux géométriques dans le plan (conditions de distances et d'angles, lignes de niveau, points liés à une configuration mobile).
Réduction et lignes de niveau de $\Sigma\alpha_i MA_i^2$; cas de deux points : lignes de niveau de $\frac{MA}{MB}$.

Pour les lignes de niveau, on exploitera notamment des situations issues des sciences physiques.

Ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ modulo π, ou modulo 2π.

Les élèves doivent connaître la condition de cocyclicité de quatre points qui en résulte.

Exemple d'emploi des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane.

Les élèves doivent savoir déterminer l'affixe d'un barycentre, évaluer un angle à l'aide de l'argument d'un quotient et traduire l'orthogonalité ou la colinéarité de deux vecteurs. Toute autre formulation de propriétés géométriques à l'aide des nombres complexes doit faire l'objet d'indications.

Courbes planes

L'introduction de quelques notions sur les courbes paramétrées est motivée par l'étude de situations géométriques, mécaniques ou physiques : on évitera donc de multiplier les exemples posés a priori. On se gardera aussi de toute technicité ; en particulier l'étude des branches infinies et des points où le vecteur dérivé s'annule, la recherche des points multiples et l'emploi de coordonnées polaires sont hors programme. Pour l'obtention de périodicité et de symétries, toutes les indications utiles doivent être fournies.

a) **Notions sur les courbes paramétrées du plan**
Courbe définie en repère orthonormal par :
$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$.
Vecteur dérivé, interprétation cinématique (vecteur vitesse), tangente.

L'étude des fonctions vectorielles (limites, continuité, calcul différentiel...) est hors programme. Le vecteur dérivé est défini par ses coordonnées $x'(t)$, $y'(t)$; pour la notion de tangente on se limitera au cas où ce vecteur n'est pas nul. Les élèves doivent savoir dresser un tableau de variations coordonnées des fonctions x et y et l'utiliser pour le tracé de la courbe.

b) **Coniques**
Définition par foyer et directrice (lignes de niveau du rapport $\frac{MF}{MH}$), excentricité ; équation cartésienne dans un repère orthonormal adapté, équation réduite : cas d'un parabole, cas d'une conique à centre.
Mise en place d'une parabole ou d'une conique à centre à partir d'une équation de la forme $y^2 = 2px$ ou $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$.

La génération bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole pourra faire l'objet d'une activité, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce propos.

Représentation paramétrique $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ d'une ellipse. Projection d'un cercle sur un plan.

Les élèves doivent connaître le lien que cette représentation permet d'établir entre le cercle et l'ellipse par affinité orthogonale plane. Mis à part ce cas, aucune connaissance sur l'affinité n'est exigible.

Travaux pratiques

Exemples simples de courbes paramétrées du plan.
Exemples d'obtention et d'emploi de représentations paramétriques de coniques (détermination de la tangente en un point...).

Mis à part le paramétrage $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ de l'ellipse, aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur les paramétrages des coniques.

Exemples d'étude de situations issues de la géométrie, de la mécanique et de la physique menant à des coniques.

Transformations et configurations du plan

Il s'agit d'approfondir et de réorganiser les acquis des classes antérieures dans le cadre des ***isométries*** *et des* ***déplacements****, grâce à une étude plus systématique de la* ***composition des transformations*** *et de leur* ***effet sur les configurations****. Il ne convient donc pas de reprendre l'étude des isométries à partir de zéro : on s'appuiera sur les résultats acquis antérieurement concernant les translations, les réflexions et les rotations. Le programme comporte aussi quelques notions sur les* ***similitudes directes*** *; les objectifs sont* ***très modestes*** *: on se borne à exploiter leur écriture complexe.*

a) **Isométries du plan** (bijections conservant la distance).
La composée de deux isométries est une isométrie, la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

En s'appuyant sur les exemples étudiés en Première, on observera que la conservation de la distance est valable non seulement pour les réflexions, les translations et les rotations, mais aussi pour leur composées, ce qui amène à introduire les isométries.

Décomposition d'une translation ou d'une rotation en produit de deux réflexions.
Toute isométrie fixant un point O est, soit une réflexion, soit une rotation.
Étant donné un point O, une isométrie f se décompose de manière unique en $f = t \circ u$, où u est une isométrie fixant O et t une translation.
Conservation du produit scalaire par une isométrie.

Les élèves doivent connaître et savoir utiliser le fait que les isométries transforment les droites en droites, les cercles en cercles, les coniques en coniques, le parallélisme et le contact étant conservés ; il en est de même pour leur effet sur les barycentres, les angles et les aires.

Déplacements (isométries conservant les angles orientés) : composée de deux déplacements, réciproque d'un déplacement.
Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.

La notion d'antidéplacement est hors programme.

Étant donné des points A, B, A', B' tels que $A'B' = AB \neq 0$, il existe un déplacement et un seul transformant A en A', B en B'.

Les élèves doivent savoir déterminer ce déplacement et, dans le cas d'une rotation, construire son centre.

b) **Notions sur les similitudes directes du plan**

Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre : effet sur les distances, conservation des angles orientés.
Écriture complexe.
Similitudes directes (bijections transformant les distances dans un rapport donné et conservant les angles orientés).
Écriture complexe $z \mapsto az + b$. Application à l'obtention d'une forme réduite : rapport, centre et angle d'une similitude directe quand $a \neq 1$, c'est-à-dire quand elle n'est pas une translation.

L'étude générale des similitudes (bijections transformant les distances dans un rapport donné) est hors programme. Il en est de même pour la composition des similitudes directes.
Les élèves doivent savoir que les similitudes directes transforment les droites en droites, les cercles en cercles, les coniques en coniques, le parallélisme ou le contact étant conservés. Ils doivent connaître leur effet sur les barycentres et les aires.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi des transformations planes pour l'étude de configurations et de lieux géométriques.

Exemples d'étude des isométries laissant invariante une configuration du plan.

Des indications doivent être fournies sur la transformation à utiliser ; en outre, pour l'emploi de similitudes directes, on se limitera à quelques exemples très simples.

Exemples de recherche et d'emploi d'isométries ou d'homothéties planes transformant une configuration donnée en une autre (segments, triangles, rectangles, cercles...).

La recherche de similitudes directes transformant une configuration en une autre n'est pas un objectif du programme.

INDEX *des méthodes*

INDEX

Imprimé en France par Aubin Imprimeur (P 46564)
Dépôt légal 1re édition : 3e trimestre 1994
Dépôt légal : octobre 1994

MATHÉMATIQUES TERMINALE S
Enseignement de spécialité

Voici un nouveau manuel de la collection *FRACTALE* destiné aux élèves de Terminale S qui, en plus du programme obligatoire, ont choisi la **spécialité de Mathématiques**.
Ce livre est entièrement conforme au nouveau programme en vigueur à partir de septembre 1994.

L'enseignement de spécialité a pour objectif d'approfondir et de développer certaines notions déjà étudiées dans l'enseignement obligatoire. On trouve ainsi dans ce livre trois chapitres de **Compléments** – en analyse, en calcul vectoriel, et dans le domaine des nombres complexes – développés sous forme de travaux pratiques et d'exercices. Le second pôle d'enseignement de spécialité en Mathématiques Terminale S est la **Géométrie des transformations**. Tous ces thèmes s'adressent donc à des élèves dont le profil scientifique est nettement affirmé.

Dans ce contexte, le point fort de ce manuel est sa très grande richesse en exercices, que ce soit sous la forme de travaux pratiques prescrits par le programme, d'exercices commentés, ou enfin d'exercices d'entraînement, très nombreux, variés et progressifs.

Dans la même collection, pour tous les élèves de Terminale S :
MATHÉMATIQUES TERMINALE S, **enseignement obligatoire**.

FRACTALE

9 782040 209933

Code 020993
ISBN 2-04-020993-X