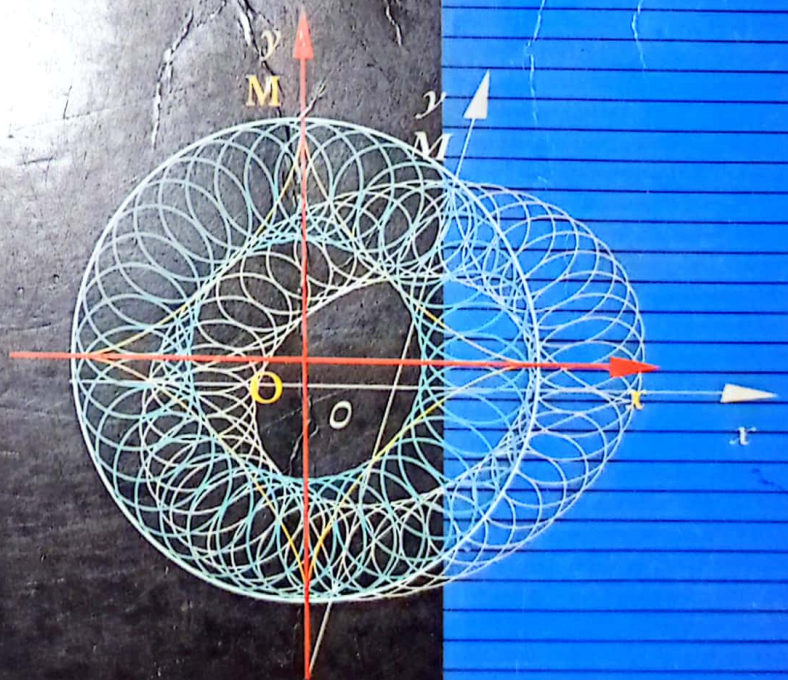


MATH

Term S

SPÉCIALITÉ



NOUVEAU
TRANSMATH

NATHAN

MATH

Term S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

M. BOUSSO
Mathématiques
LVND-KL

André ANTIBI
Raymond BARRA
Joël MALAVAL

avec
Geneviève LORIDON
Roseline MARQUÈS

M. BOUSSO
Mathématiques
LVND-KL

PROGRAMME 1994

NOUVEAU
TRANSMATH

NATHAN

AVANT- PROPOS

Ce manuel traite le nouveau programme de l'enseignement de spécialité de la classe de Terminale Scientifique applicable à la rentrée 1994 (B.O.E.N./ n° 7 du 07-07-94).

Comme pour le manuel de l'enseignement obligatoire, il s'agit de bien davantage que d'une nouvelle édition revue et corrigée : un effort particulier a été fait, tant dans le domaine pédagogique que dans la présentation matérielle, pour rendre l'ensemble encore plus **clair** et plus **accessible**, et de nombreux exercices ont été renouvelés ou adaptés. Toutes les innovations pédagogiques développées dans le tome *Obligatoire* sont reconduites, en particulier la page **DES IDÉES, DES RÉFLEXES**.

Outre les problèmes proposés dans chaque chapitre, une nouvelle partie **PROBLÈMES DE SYNTHÈSE**, en fin de livre, propose vingt-huit problèmes d'entraînement et d'approfondissement, reliant les connaissances de plusieurs chapitres ; les thèmes abordés sont précisés en tête d'énoncé.

Nous avons choisi de commencer par le chapitre **Déplacements-Isométries** suivi du chapitre **Courbes paramétrées** parce que chacun d'eux peut être abordé avec les seules connaissances acquises en classe de Première.

Les **Compléments d'Analyse** sont regroupés dans un chapitre unique (le 7) mais dont la structure est prévue pour que ces compléments puissent être traités en plusieurs étapes dans l'année.

D'avance, nous remercions les collègues qui voudraient bien nous faire part de leurs remarques.

Les Auteurs

COIN - COULEUR

-  Ces encadrés contiennent les énoncés des **définitions**.
-  Ces encadrés contiennent les énoncés des **théorèmes**, des **propriétés**, ou des **résultats**.
-  Démonstrations ou justifications balisées par un filet rouge vertical.
-  Mot ou résultat important.

*page 4***1. Déplacements.****Isométries**

Pour prendre un bon départ	5
Cours	7
Exercices résolus	16
Travaux pratiques d'application	19
Des idées, des réflexes	25
Exercices et problèmes	26

*page 34***2. Courbes paramétrées**

Cours	35
Travaux pratiques d'application	41
Des idées, des réflexes	43
Exercices et problèmes	44

*page 50***3. Compléments sur
les nombres complexes**

Travaux pratiques	51
Exercices et problèmes	61

*page 68***4. Lieux géométriques**

Travaux pratiques	69
Exercices et problèmes	80

*page 86***5. Les coniques**

Cours	87
Exercices résolus	99
Travaux pratiques d'application	100
Des idées, des réflexes	104
Exercices et problèmes	105

*page 114***6. Similitudes directes**

Cours	115
Exercices résolus	118
Travaux pratiques d'application	120
Des idées, des réflexes	123
Exercices et problèmes	124

*page 132***7. Compléments
d'analyse**

Première partie : Inégalités	133
Deuxième partie : Suites	139
Troisième partie : Calcul intégral	151
Exercices et problèmes	156

Problèmes de synthèse	161
-----------------------	-----

Réponses aux exercices	175
------------------------	-----

INDEX	176
-------	-----

DÉPLACEMENTS. ISOMÉTRIES

CHAPITRE

1

Ce chapitre peut être traité avec les seuls outils de la classe de Première, c'est la raison pour laquelle il débute le manuel de spécialité. Les problèmes de **lieux géométriques** seront plus particulièrement étudiés au chapitre 4, et l'utilisation des **nombres complexes** en géométrie sera exploitée au chapitre 3. L'objet de ce chapitre est d'abord de déterminer toutes les transformations appelées **déplacements**, qui **conservent la distance et les angles orientés**. Le résultat, *a priori* surprenant, est que seules les translations et les rotations possèdent ces deux propriétés. Ensuite, nous déterminerons toutes les transformations appelées **isométries**, qui **conservent la distance seulement**. Le résultat est que les seules transformations qui conservent la distance sont celles que nous connaissons déjà, les réflexions, les translations, les rotations, et leurs composées. Nous étudierons donc les composées de ces trois transformations.

SOMMAIRE

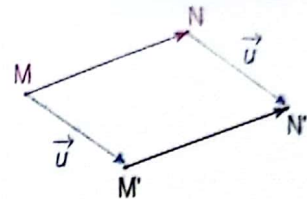
<i>Pour prendre un bon départ</i>	5
<i>Cours</i>	7
<i>Exercices résolus</i>	16
<i>Travaux pratiques d'application</i>	19
<i>Des idées, des réflexes</i>	25
<i>Exercices et problèmes</i>	26

1. TRANSFORMATIONS USUELLES

► 1. Définitions et propriétés spécifiques

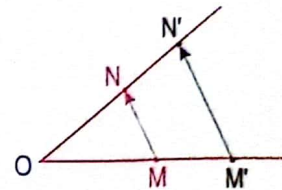
Translations

- La translation de vecteur $\vec{u}$ associe à chaque point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par la translation, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.



Homothéties

- L'homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) associe à chaque point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$.
- Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par l'homothétie, $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.

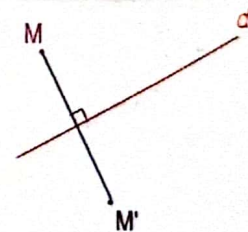


On en déduit $M'N' = |k| \times MN$.

Réflexions

La réflexion par rapport à la droite d associe :

- à chaque point M extérieur à d , le point M' tel que d soit la médiatrice de $[MM']$;
- à chaque point M de d , le point M lui-même.



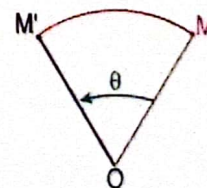
Rotations

- La rotation de centre O et d'angle θ laisse O invariant et associe à chaque point M , distinct de O , le point M' tel que :

$$OM' = OM \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta.$$

- Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' ,

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \text{ et } M'N' = MN.$$



► 2. Propriétés communes

1. Ces quatre transformations transforment les droites en droites, les segments en segments, les cercles en cercles, les parallélogrammes en parallélogrammes.

2. Conservation : Dans ce tableau, l'image d'un point A (resp. B, C) est notée A' (resp. B', C') et le rond noir indique que la transformation considérée conserve la propriété énoncée.

Dire qu'une transformation conserve :	signifie que :	Trans-lation	Homo-thétie	Réflexion	Rotation
le parallélisme	les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles	•	•	•	•
l'orthogonalité	les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires	•	•	•	•
les angles orientés	$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	•	•		•
les angles géométriques	$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$	•	•	•	•
la distance	$A'B' = AB$	•		•	•
le contact	les images de deux lignes tangentes sont deux lignes tangentes	•	•	•	•

REMARQUES :

- Les homothéties, ne conservant pas la distance, ne conservent pas les aires.
- Les réflexions transforment un angle orienté en son opposé.

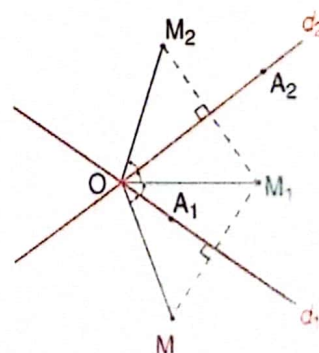
2. COMPOSITION DE DEUX RÉFLEXIONS

La notation s_d désigne la réflexion par rapport à la droite d .

► 1. Composée de deux réflexions d'axes sécants

Théorème 1

d_1 et d_2 sont deux droites sécantes en O. Alors $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ est la **rotation de centre O** et d'angle $2(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$ où A_1 est un point quelconque de d_1 et A_2 un point quelconque de d_2 , distincts de O.

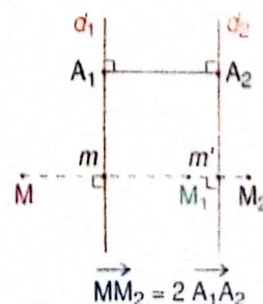


► 2. Composée de deux réflexions d'axes parallèles

Théorème 2

La composée $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles est une **translation**.

Le vecteur de cette translation est $2\overrightarrow{A_1A_2}$.



1. GÉNÉRALITÉS SUR LES TRANSFORMATIONS DU PLAN

1.1 Définitions

- Dire qu'une application f du plan dans lui-même est **bijective** signifie que tout point N est l'image par f d'un point M et d'un seul.
- Une application bijective du plan dans lui-même est appelée **transformation** du plan.

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLE :

- Les translations, les réflexions, les homothéties, les rotations sont des transformations.
- La projection sur une droite n'est pas une transformation : deux points distincts peuvent avoir le même projeté.

On appelle **identité**, et on note **Id**, la transformation qui à chaque point M associe le point M lui-même : **$\text{Id}(M) = M$** , pour tout M .

1.2 Égalité de deux transformations f et g

Dire que **$f = g$** signifie que pour **tout** point M , **$f(M) = g(M)$** .

1.3 Réciproque d'une transformation

1. Lorsque f est une transformation, à chaque point N on peut associer le point M tel que $f(M) = N$. On définit ainsi une transformation, dite **réciproque** de f , et notée **f^{-1}** .



$$\mathbf{N = f(M) \text{ équivaut à } M = f^{-1}(N) .}$$

2. Réciproques des transformations usuelles

Les résultats suivants ont été vus en classe de Première.

r est la **rotation** de centre **O** ,
d'angle **θ**

r^{-1} est la **rotation** de centre **O** ,
d'angle **$-\theta$**

t est la **translation** de vecteur **$\vec{u}$**

t^{-1} est la **translation** de vecteur **$-\vec{u}$**

s est une **réflexion**

$$\mathbf{s^{-1} = s}$$

h est l'**homothétie** de centre **O** ,
de rapport **k**

h^{-1} est l'**homothétie** de centre **O** ,
de rapport **$\frac{1}{k}$**

1.4 Composée de transformations

f et g étant deux transformations, la transformation $g \circ f$ est définie par :

$$(g \circ f)(M) = g(f(M)) \text{ pour tout point } M.$$

La transformation $f \circ g$ est définie par $(f \circ g)(M) = f(g(M))$, pour tout point M .
En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Par itération, on définit la composée de trois transformations et plus. Ainsi, $f \circ g \circ h$ est la transformation $f \circ (g \circ h)$, et c'est aussi la transformation $(f \circ g) \circ h$.

1. Des résultats utiles

f , g et h sont trois transformations quelconques.

- Il est immédiat de vérifier que :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id} \quad \text{et} \quad f \circ \text{Id} = f = \text{Id} \circ f.$$

- Si $h = f \circ g$, alors $f = h \circ g^{-1}$, $g = f^{-1} \circ h$.

En effet, de $h = f \circ g$, nous déduisons $h \circ g^{-1} = f \circ g \circ g^{-1}$.

Or, $g \circ g^{-1} = \text{Id}$ et $f \circ \text{Id} = f$, donc $h \circ g^{-1} = f$.

De l'égalité $h = f \circ g$, nous pouvons déduire aussi : $f^{-1} \circ h = f^{-1} \circ f \circ g = g$.

- Si $f \circ g = \text{Id}$, alors $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$.

En effet, de $f \circ g = \text{Id}$, nous déduisons $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ \text{Id}$; d'où $g = f^{-1}$.

On verrait de même que $g^{-1} = f$.

2. Propriétés de $g \circ f$, héritées des propriétés communes à f et à g

Si f et g transforment les droites en droites, les cercles en cercles, alors il en est de même de $g \circ f$.

En effet, f transforme une droite d quelconque en une droite d_1 , g transforme d_1 en une droite d' . Or d' est l'image de d par $g \circ f$ (pour obtenir l'image de d par $g \circ f$, on prend l'image d_1 de d par f , puis l'image d' de d_1 par g). D'où le résultat.

Dans le cas des cercles, la preuve serait analogue.

Si f et g conservent la distance, les angles (orientés ou géométriques), le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre, les aires, alors il en est de même de $g \circ f$.

En effet, f transforme deux points quelconques A, B en deux points A_1, B_1 , tels que $A_1B_1 = AB$; g transforme A_1, B_1 en deux points A', B' , tels que $A'B' = A_1B_1$. Donc $A'B' = AB$. Or A' et B' sont les images respectives de A et B par $g \circ f$ ($A' = g(A_1) = g(f(A)) = g \circ f(A)$). Donc $g \circ f$ conserve la distance.

Les autres assertions se démontreraient de manière analogue.

2. DÉPLACEMENTS

DEFINITION 1

Un **déplacement** est une transformation qui **conserve la distance** et les **angles orientés**.

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLE :

- L'identité, les translations, les rotations sont des déplacements.
- Une réflexion n'est pas un déplacement car elle « transforme un angle orienté en son opposé ».

2.1 Composition de deux déplacements

THÉORÈME 1

Si f et g sont deux déplacements, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des déplacements.

Nous avons dit au paragraphe 1.4 que si deux transformations f et g conservent la distance et les angles orientés, il en est de même de $f \circ g$ et $g \circ f$. Or un déplacement est une transformation, d'où l'assertion.

2.2 Égalité de deux déplacements

Nous allons voir que pour que deux déplacements f et g soient égaux, il suffit qu'ils coïncident en deux points distincts.

THÉORÈME 2

f et g sont deux déplacements tels que pour deux points distincts A et B , $f(A) = g(A)$ et $f(B) = g(B)$. Alors $f = g$.

Notons A' et B' les images respectives de A et B par f et g .

$$(A' = f(A) = g(A), B' = f(B) = g(B)).$$

M étant un point distinct de A , notons M_1 son image par f et M_2 son image par g . Puisque f et g sont des déplacements, f et g conservent les distances et les angles orientés, donc :

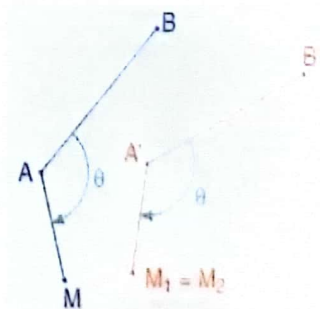
$$A'M_1 = AM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M_1}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \theta$$

$$A'M_2 = AM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \theta.$$

$$\text{D'où : } A'M_1 = A'M_2 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M_1}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M_2}).$$

Ces deux égalités prouvent que $M_1 = M_2$.

Ainsi pour tout M , $f(M) = g(M)$, donc $f = g$.



2.3 Déplacements transformant un segment donné en un autre segment donné, de même longueur

THÉORÈME 3

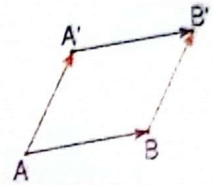
Étant donné quatre points A, B, A', B' , tels que $A \neq B$ et $A'B' = AB$,

- si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, il existe une **translation** et une **seule** qui transforme A en A' et B en B' ;
- si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, il existe une **rotation** et une **seule** qui transforme A en A' et B en B' .

Nous supposons $A \neq A'$, car si $A = A'$, la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est la seule (théorème 2) qui transforme A en A' et B en B' .

• Premier cas : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Alors, la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme A en A' et B en B' . Si t' est une autre translation telle que $t'(A) = A'$, $t'(B) = B'$, alors $t = t'$ d'après le théorème 2, car t et t' sont des déplacements.

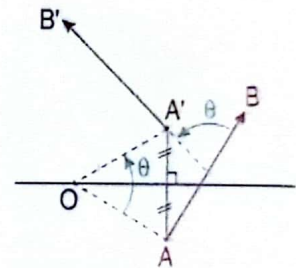


• Deuxième cas : $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.

Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \neq 0$. Posons $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ et notons O le point de la médiatrice de $[AA']$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$. La rotation r de centre O et d'angle θ transforme A en A' .

Posons $B_1 = r(B)$, alors $A'B_1 = AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B_1}) = \theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Donc $r(B) = B_1 = B'$. Si r' est une autre rotation qui transforme A en A' et B en B' , alors $r = r'$ (théorème 2) car r et r' sont des déplacements.



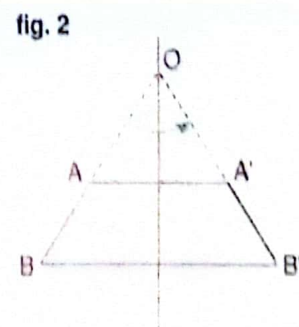
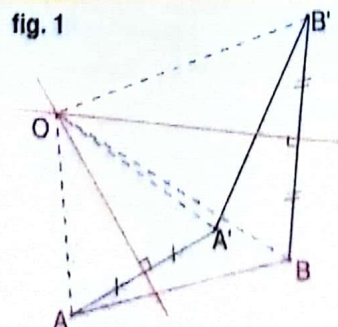
Note

Ce théorème permettra de dire par exemple, au cours d'une démonstration, « considérons la translation ou la rotation qui transforme A en A' et B en B' », sans avoir à en justifier l'existence.

• Détermination du centre de la rotation qui transforme A en A' et B en B'

On suppose encore $A \neq A'$ (lorsque $A = A'$, ce centre est le point A).

- Dans tous les cas, le centre O est le point de la médiatrice de $[AA']$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.
- Lorsque les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles (fig. 1), le centre O est l'intersection des médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$.
- Lorsque les droites (AA') et (BB') sont **parallèles** (fig. 2), le centre O est l'intersection de (AB) et de $(A'B')$.



2.4 Description des déplacements

THÉORÈME 4

Tout déplacement est soit une rotation, soit une translation.

f étant un déplacement quelconque, et A et B deux points distincts quelconques, posons $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Alors $AB = A'B'$. D'après le théorème 3,

ou bien il existe une rotation r telle que $r(A) = A'$, $r(B) = B'$, et alors $f = r$ d'après le théorème 2,

ou bien il existe une translation t telle que $t(A) = A'$, $t(B) = B'$, et alors $f = t$ toujours d'après le théorème 2. D'où le résultat annoncé.

• Conséquence

Puisque la réciproque d'une translation est une translation, que la réciproque d'une rotation est une rotation, il résulte du théorème 4 que :

La réciproque d'un déplacement est un déplacement.

REMARQUE : Ce résultat peut se démontrer directement par retour aux définitions d'une transformation réciproque et d'un déplacement.

3. COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS, D'UNE TRANSLATION ET D'UNE ROTATION

Nous pouvons dire dès maintenant que la composée de deux rotations, ou que la composée d'une rotation et d'une translation, est nécessairement une translation ou une rotation. En effet, les rotations et les translations sont des déplacements, or la composée de deux déplacements est encore un déplacement, donc une translation ou une rotation. Les théorèmes suivants donnent davantage de précision.

3.1 Composée de deux rotations

THÉORÈME 5

r_1 est une rotation d'angle θ_1 , r_2 une rotation d'angle θ_2 .

• Lorsque $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (modulo 2π), $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

• Lorsque $\theta_1 + \theta_2 = 0$ (modulo 2π), $r_2 \circ r_1$ est une translation.

En effet, r_1 transforme deux points A, B quelconques en deux points A_1, B_1 , tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \theta_1$. r_2 transforme A_1, B_1 en deux points A', B' , tels que $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta_2$. Il en résulte par la relation de Chasles que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta_1 + \theta_2$.

Puisque $r_2 \circ r_1$ est soit une translation, soit une rotation, on voit que :

• si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas colinéaires, donc $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$,

• si $\theta_1 + \theta_2 = 0$, $r_2 \circ r_1$ est une translation (car alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$).

Note

Vous verrez au TP 1, p. 19, comment construire le centre de $r_2 \circ r_1$.

3 = 2 Composée d'une translation et d'une rotation

THÉORÈME 6

t est une translation et r une rotation d'angle θ , $\theta \neq 0$.

Alors $t \circ r$ est une rotation d'angle θ .

Note

Vous verrez au TP 3, p. 21, comment construire le centre de $t \circ r$.

Si A' et B' sont les images respectives de deux points A et B quelconques par $t \circ r$, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$. Puisque $t \circ r$ est soit une translation, soit une rotation, et que $\theta \neq 0$, $t \circ r$ est une rotation d'angle θ .

REMARQUE : Nous verrons de même que $r \circ t$ est une rotation d'angle θ .

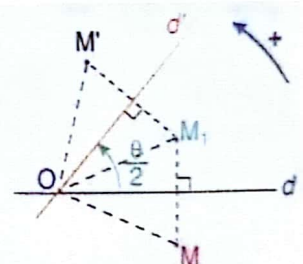
4. DÉCOMPOSITION DE DÉPLACEMENTS EN PRODUITS DE RÉFLEXIONS

4 = 1 Cas d'une rotation

THÉORÈME 7

Toute rotation r de centre O , d'angle θ peut être considérée comme la composée de deux réflexions d'axes sécants en O , l'une de ces réflexions pouvant être arbitrairement choisie.

En effet, choisissons n'importe quelle droite d passant par O , et traçons la droite d' , image de la droite d par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\theta}{2}$. Alors, d'après le théorème 1, rappelé dans POUR PRENDRE UN BON DÉPART, nous obtenons $r = s_{d'} \circ s_d$.



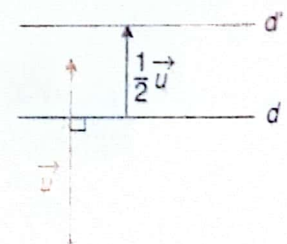
On dit que l'on a décomposé r en produit de deux réflexions.

4 = 2 Cas d'une translation

THÉORÈME 8

Toute translation t de vecteur $\vec{u}$ peut être considérée comme la composée de deux réflexions dont les axes sont orthogonaux à $\vec{u}$, l'une de ces réflexions pouvant être arbitrairement choisie.

En effet, choisissons arbitrairement une droite d orthogonale à $\vec{u}$, et traçons la droite d' , image de d par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$. Alors, d'après le théorème 2, rappelé dans POUR PRENDRE UN BON DÉPART, nous obtenons $t = s_{d'} \circ s_d$.



On dit que l'on a décomposé t en produit de deux réflexions.

5. ISOMÉTRIES

DEFINITION 2

On appelle **isométrie** toute transformation qui **conserve** la **distance**.

EXEMPLES :

Les déplacements sont des isométries.

Les réflexions, qui rappelons-le, ne sont pas des déplacements, sont des isométries.

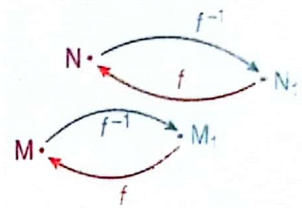
5.1 Composée de deux isométries. Réciproque d'une isométrie

- La **composée** de deux isométries est une **isométrie**.
- La **réciproque** d'une isométrie est une **isométrie**.

• En effet, si deux transformations f et g conservent la distance, il en est de même de $f \circ g$ et de $g \circ f$ (§ 1.4, p. 8).

• Considérons une isométrie f et sa réciproque f^{-1} . M et N sont deux points quelconques d'images respectives M_1 et N_1 par f^{-1} .

Montrons que $M_1N_1 = MN$; il en résultera que f^{-1} est une isométrie. Puisque $M_1 = f^{-1}(M)$, $N_1 = f^{-1}(N)$, alors $M = f(M_1)$, $N = f(N_1)$. Or f est une isométrie, donc $MN = M_1N_1$.



5.2 Description des isométries

Rappelons qu'on appelle **point fixe** d'une transformation f tout point M tel que $f(M) = M$. On dit aussi que M est **invariant** par f .

THÉORÈME 9

1. Une isométrie f qui a **trois** points fixes A, B, C , **non alignés** est l' **identité**.
2. Une isométrie f , distincte de l'identité, qui a **deux** points fixes A et B **distincts**, est la **réflexion** d'axe (AB) .
3. Une isométrie f qui a **un seul** point fixe O , est une **rotation** de **centre** O , d'angle **non nul**.

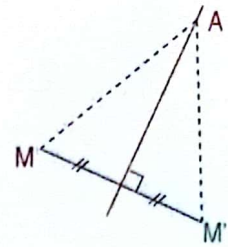
Dans toute la démonstration, l'image par f d'un point noté par une majuscule sera notée par cette même majuscule suivie d'un prime (A' sera l'image de A , ...).

• **Résultat préliminaire (R_1)**

f est une isométrie et A un point fixe de f .

M est un point tel que $M' \neq M$.

Alors A est sur la médiatrice de $[M'M]$.



En effet, puisque f est une isométrie et que $A = A'$, nous obtenons $AM' = AM$, d'où le résultat.

Démonstration du théorème

1. S'il existe un point M tel que $M' \neq M$, alors d'après (R_1), A , B et C sont tous trois sur la médiatrice de $[MM']$. Or ceci est impossible puisque A , B et C ne sont pas alignés. Donc pour tout M , $M = M' = f(M)$, et $f = \text{Id}$.

2. Puisque $f \neq \text{Id}$, f ne possède pas trois points invariants non alignés, donc il existe un point C non situé sur (AB) tel que $C' \neq C$. D'après le préliminaire (R_1), A et B sont sur la médiatrice de $[CC']$, donc C' est la symétrique de C par rapport à (AB) . Notons s la réflexion d'axe (AB) . Alors l'isométrie $s \circ f$ a trois points fixes non alignés, c'est donc l'identité. En effet, $(s \circ f)(A) = s(f(A)) = s(A) = A$. De même $(s \circ f)(B) = B$, et $(s \circ f)(C) = s(f(C)) = s(C') = C$. De $s \circ f = \text{Id}$, on déduit $f = s^{-1}$, et puisque $s^{-1} = s$, f est la réflexion d'axe (AB) .

3. Choisissons un point B distinct de O . Puisque O est le seul point fixe de f , $B' \neq B$, et d'après le préliminaire (R_1), O est sur la médiatrice d de $[BB']$. Notons s la réflexion d'axe d et posons

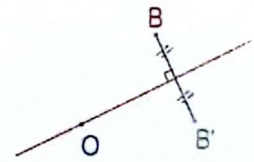
$g = s \circ f$. Alors $g(O) = s(f(O)) = s(O) = O$ et

$g(B) = s(f(B)) = s(B') = B$.

Ainsi g est une isométrie qui a au moins deux points fixes distincts, donc, d'après le 2.

du théorème, ou bien $g = \text{Id}$, ou bien g est la réflexion d'axe (OB) . Or, de $g = s \circ f$, nous déduisons $s^{-1} \circ g = s^{-1} \circ s \circ f = \text{Id} \circ f = f$. D'où $s^{-1} \circ g = f$ et $s \circ g = f$ (car $s^{-1} = s$). Si g est l'identité, $s = f$, ce qui est impossible puisque f n'a qu'un seul point fixe. Donc g est la réflexion d'axe (OB) .

Ainsi $f = s \circ g$ est la composée de deux réflexions dont les axes se coupent en O , donc f est une rotation de centre O (théorème 1, POUR PRENDRE UN BON DÉPART).



THÉORÈME 10

Étant donné un point O , toute isométrie f s'écrit de manière unique

$f = t \circ u$, égalité dans laquelle t désigne une translation et u

une isométrie telle que $u(O) = O$.

En effet, notons t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ ($O' = f(O)$), et posons $u = t^{-1} \circ f$. Alors u est une isométrie, comme composée de deux isométries (t^{-1} est une translation), et $u(O) = t^{-1}(f(O)) = t^{-1}(O') = O$.

Démontrons l'unicité de l'écriture $f = t \circ u$.



Si $f = t' \circ u'$, t' étant une translation et u' une isométrie telle que $u'(O) = O$, alors $O' = f(O) = t'(u'(O)) = t'(O)$. Le vecteur de t' est donc $\overrightarrow{OO'}$, d'où $t = t'$ et par suite $u = u'$ (en effet, de $t \circ u = t' \circ u'$, on déduit $t^{-1} \circ t \circ u = t^{-1} \circ t \circ u'$; or $t^{-1} \circ t = \text{Id}$, d'où $u = u'$).

Toute **isométrie** f est **soit une réflexion, soit la composée de deux réflexions, soit la composée de trois réflexions**.

En effet, f peut être une réflexion ou, d'après le théorème 10, s'écrire $f = t \circ u$, et u ayant un point fixe :

- soit u est l'identité, et alors f est une translation, donc la composée de deux réflexions (théorème 8) ;
- soit u est une réflexion, et alors f est la composée de trois réflexions ;
- soit u est une rotation d'angle non nul, et alors $f = t \circ u$ est une rotation, donc la composée de deux réflexions (théorème 7).

5.3 Conséquences : propriétés des isométries

PROPRIÉTÉS 1

- Outre la distance, les isométries **conservent** :
 - l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité ;
 - le contact ;
 - la mesure des angles géométriques ;
 - les aires.
- Les isométries **transforment** :
 - les droites en droites, les segments en segments ;
 - les cercles en cercles.

En effet, les réflexions possèdent les propriétés énoncées, il en est donc de même de leurs composées (paragraphe 1.4). Or toute isométrie est soit une réflexion, soit une composée de réflexions. D'où les résultats.

REMARQUE : Isométries et angles orientés

Une réflexion, ainsi que la composée de trois réflexions, changent les angles orientés en leurs opposés (on dit que ce sont des *antidéplacements*). La composée de deux réflexions est un déplacement, donc conserve les angles orientés. Ainsi, toute isométrie, soit conserve les angles orientés, soit les transforme en leurs opposés.

PROPRIÉTÉ 2

Toute isométrie f **conserve le produit scalaire**.

Dire qu'une isométrie f conserve le produit scalaire signifie que, quels que soient les points A, B, C, D , d'images respectives A', B', C', D' , par f ,

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Nous savons que $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = A'B' \times C'D' \times \cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Or $A'B' = AB$, $C'D' = CD$. En outre, ou $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, ou $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ (voir remarque précédente). Dans les deux cas, $\cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, d'où $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

De manière générale, dire qu'une transformation conserve le barycentre signifie que l'image du barycentre d'un système de points pondérés est le barycentre des points images affectés des mêmes coefficients.

La démonstration de la propriété 3 est proposée en exercice, n° 38, p. 31.

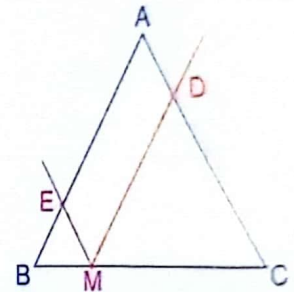
6. EXERCICES RÉSOLUS AVEC SOLUTIONS COMMENTÉES

6.1 Utiliser un déplacement transformant un segment en un segment de même longueur

ABC est un triangle isocèle en A.

M est un point du segment [BC]. La parallèle à (AC) menée par M coupe (AB) en E, et la parallèle à (AB) menée par M coupe (AC) en D.

Démontrez que lorsque M décrit le segment [BC], la médiatrice de [ED] passe par un point fixe.



POINT MÉTHODE Pour démontrer que la médiatrice d'un segment [PQ] passe par un point fixe, on peut prouver que P est l'image de Q par une rotation dont le centre est fixe.

Solution

Tirons quelques conséquences immédiates des hypothèses et de l'examen de la figure :

- MEAD est un parallélogramme ;
- les triangles MEB et MDC sont isocèles.

Il s'agit de trouver un point fixe de la figure équidistant de E et D. Nous remarquons que $EM = BE = AD$, donc il existe un déplacement f qui transforme B en A et E en D ;

$$\begin{aligned} f : B &\mapsto A \\ E &\mapsto D. \end{aligned}$$

Or (BE) et (AD) ne sont pas parallèles, donc ce déplacement est une rotation r et l'angle θ de cette rotation est $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD})$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ (voir la figure). Son centre O est sur la médiatrice de [AB] et sur la médiatrice de [ED]. Mais nous ne pouvons pas affirmer encore que O est fixe car E et D sont variables. Néanmoins, nous avons vu que A est l'image de B par r , et donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \theta$. Donc O est le point de la médiatrice de [AB] tel que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \theta$. Or cette médiatrice et θ sont fixes, donc O est fixe.

Commentaires

◀ La présence de segments isométriques suggère d'utiliser la méthode donnée dans le POINT-MÉTHODE.

◀ O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. En effet, dans un triangle isocèle en A, et de sens direct, le centre O du cercle circonscrit est le point O de la médiatrice de [AB] tel que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$.

6.2 Déterminer la composée d'isométries

Ex. 1. La composée est une symétrie centrale (ou rotation d'angle π)

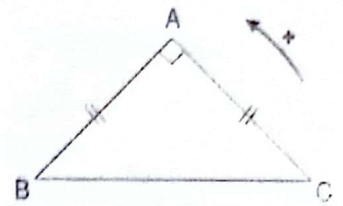
ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. On note r_B la rotation de centre B

et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Montrez que la transformation $s = r_C \circ t \circ r_B$ est une symétrie centrale et déterminez son centre.



POINT MÉTHODE Pour trouver le centre d'une symétrie centrale, on peut déterminer l'image M' d'un point M quelconque. Le centre est alors le milieu de $[MM']$. On choisit M de façon que M' soit facile à trouver.

Solution

• Étudions d'abord $t \circ r_B$.

r_B est une rotation d'angle non nul donc $t \circ r_B$ est une rotation d'angle égal à celui de r_B , c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ (voir théorème 6). Posons donc

$r = t \circ r_B$. Alors $s = r_C \circ r$ et nous savons que la composée de deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ lorsque $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (théorème 5). Or ici, $\theta_1 + \theta_2 = \pi$; donc $r_C \circ r$ est une rotation d'angle π , c'est-à-dire une **symétrie centrale**.

• Déterminons le centre de s ; c'est par exemple le milieu du segment $[B s(B)]$. Or $r_B(B) = B$; donc $t \circ r_B(B) = t(B) = C$ car t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$; d'où $s(B) = r_C \circ r(B) = r_C(C) = C$. Le centre de s est donc le **milieu I du segment $[BC]$** . En conclusion, s est la **symétrie centrale de centre I**.

Commentaires

- ◀ Nous pourrions préciser le centre de r , mais ici, et c'est très souvent le cas lors de la composition de plusieurs déplacements, cette précision est inutile.
- ◀ On utilise le point-méthode dans le cas simple $M = B$.

Ex. 2. La composée est une rotation

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_2 et la rotation de centre B d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Montrez que la transformation $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont vous déterminerez l'angle et le centre.

POINT MÉTHODE Pour trouver le centre d'une rotation, on peut déterminer les images P' et Q' de deux points P et Q . Le centre cherché est le point d'intersection des médiatrices de $[PP']$ et $[QQ']$ lorsqu'elles ne sont pas parallèles.

Solution

• La composée de deux rotations est une translation lorsque la somme de leurs angles est nulle (modulo 2π), une rotation dont l'angle est la somme de leurs deux angles lorsque cette somme n'est pas nulle. Donc $r_2 \circ r_1$ est une **rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$** .

Commentaire

• Déterminons le centre de cette rotation. Il est commode, dans cet exercice, de chercher les images de A et de B par $r_2 \circ r_1$.

$$r_1 : A \mapsto A' \text{ et } r_2 : A' \mapsto A'',$$

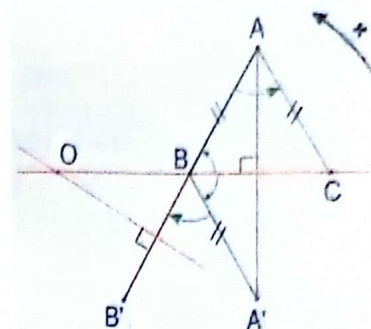
A' tel que : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}) = -\frac{\pi}{3}$, $BA' = BA$; A' est donc le symétrique de A par rapport à (BC). Et $r_2 \circ r_1 (A) = A''$.

$$r_1 : B \mapsto C \text{ et } r_2 : C \mapsto B',$$

B' tel que : $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BB'}) = -\frac{\pi}{3}$, $B'B = BC = BA = BA'$. Et $r_2 \circ r_1 (B) = B'$.

La médiatrice de $[AA']$, c'est-à-dire (BC), et la médiatrice de $[BB']$ se coupent en un point O de (BC). Ce point O est le centre de $r_2 \circ r_1$. Il est immédiat de vérifier que O est le symétrique de C par rapport à B (B est le milieu de [OC]).

La méthode suivie ici a déjà été utilisée en classe de Première.



6 ■ 3 Utiliser une composée pour démontrer

A, I, J sont trois points non alignés ; α est un réel donné, $\alpha \neq 0$.

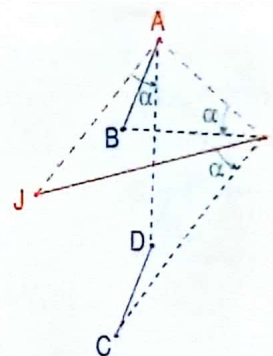
r_I est la rotation de centre I et d'angle α .

B est l'image de A par r_I , C est l'image de J par r_I .

r_A est la rotation de centre A et d'angle α .

D est l'image de J par r_A .

Montrez que ABCD est un parallélogramme.



Solution commentée

Parmi toutes les méthodes connues pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, laquelle choisir, compte tenu des hypothèses ?

Par hypothèse, nous disposons de rotations de centres distincts, d'angles égaux. Or « parallélogramme » évoque plutôt « translation ». Mais nous savons que la composée de deux rotations peut être une translation, lorsque la somme de leurs angles est égale à 0 (modulo 2π). Or ce peut être le cas ici, car r_I^{-1} , r_A^{-1} ont un angle égal à $-\alpha$, et r_I , r_A un angle égal à α .

Un examen plus attentif des hypothèses montre que : $C \xrightarrow{r_I^{-1}} J \xrightarrow{r_A} D$.

Donc D est l'image de C par $r_A \circ r_I^{-1}$. Et $r_A \circ r_I^{-1}$ est une translation dont le vecteur est évidemment $\overrightarrow{CD}$. Notons t cette translation.

Si nous prouvons que son vecteur est aussi $\overrightarrow{BA}$, alors nous obtiendrons $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, et nous pourrions conclure que ABCD est un parallélogramme.

Cherchons donc $t(B)$.

$r_A \circ r_I^{-1}(B) = r_A(A) = A$. Donc $t(B) = A$, le vecteur de t est bien $\overrightarrow{BA}$.

D'où le résultat annoncé.

Les travaux pratiques 1 à 6 font partie du programme.

TP 1

CENTRE DE LA COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS

1.1 Détermination du centre

Note

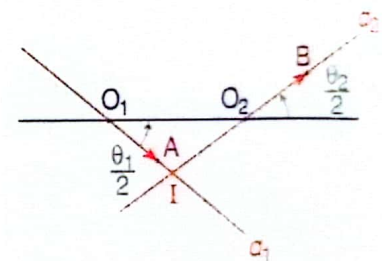
Une autre méthode utilisant les nombres complexes sera donnée au chapitre 3, TP 4, p. 58.

$r_1(O_1; \theta_1)$ et $r_2(O_2; \theta_2)$ sont deux rotations de centres distincts, et $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$. Nous savons (Cours § 3.1) que $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Pour trouver le centre O de $r_2 \circ r_1$, on peut utiliser les deux méthodes indiquées dans la page « Des idées, des réflexes », méthodes valables pour trouver le centre de n'importe quelle rotation. Dans le cas d'une composée $r_2 \circ r_1$, voici une troisième méthode.

On décompose chacune des deux rotations en produit de deux réflexions en utilisant chaque fois la réflexion d'axe (O_1O_2) .

1. Notons s la réflexion d'axe (O_1O_2) et décomposons r_1 en produit de deux réflexions $s \circ s_1$ (voir § 4.1, p. 12). Alors s_1 est la réflexion d'axe d_1 , où d_1 est la droite qui passe par O_1 et qui est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{O_1A}$ tel que $(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1O_2}) = \frac{\theta_1}{2}$.



Décomposons ensuite r_2 en produit $s_2 \circ s$; s_2 est alors la réflexion dont l'axe est la droite d_2 qui passe par O_2 et qui est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{O_2B}$ tel que $(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_2B}) = \frac{\theta_2}{2}$. Puisque $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (modulo 2π), les droites d_1 et d_2 sont sécantes. Nous obtenons donc $r_2 \circ r_1 = s_2 \circ s \circ s \circ s_1 = s_2 \circ s_1$, car $s \circ s = \text{Id}$ et $s_2 \circ \text{Id} \circ s_1 = s_2 \circ s_1$.

Or $s_2 \circ s_1$ est une rotation de centre I , où I est le point d'intersection de d_1 et de d_2 (POUR PRENDRE UN BON DÉPART, théorème 1). **Donc I est le centre de $r_2 \circ r_1$.**

2. Mise en pratique

Sur une figure, placez deux points O_1 et O_2 , puis en utilisant la troisième méthode, placez le centre de la rotation $r_2 \circ r_1$ dans chacun des deux cas suivants :

a) $\theta_1 = +\frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

b) $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.

1.2 Une condition pour que $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$

r_1 et r_2 sont des rotations d'angles non nuls.

Montrez que l'égalité $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$ n'est possible qu'à la condition que r_1 et r_2 aient le même centre.

TP 2

COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS

2.1 Des médiatrices qui passent par un point fixe

$[AB]$ est un segment de longueur 6 cm. Soit r_1 la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$, et r_2 , la rotation de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Notons M_1 l'image d'un point quelconque M par r_1 , et M_2 l'image de M_1 par r_2 . Montrez que la médiatrice de $[M_1 M_2]$ passe par un point fixe O.

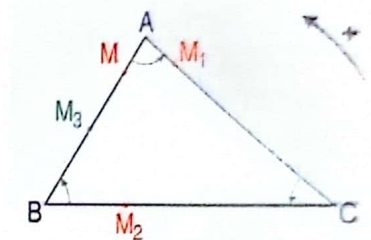
INDICATION : Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une rotation de centre fixe.

2.2 La boucle se refermera-t-elle ?

ABC est un triangle quelconque de sens direct.

M est un point de (AB).

M_1 est l'image de M par la rotation r_1 de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; M_3 est l'image de M_2 par la rotation r_3 de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



Le but de l'exercice est de savoir si l'on peut choisir M pour que $M_3 = M$. Pour répondre, nous cherchons à lier directement M_3 à M, et plus particulièrement, à voir si M_3 n'est pas l'image de M par une transformation connue.

1. Vérifiez que M_3 est l'image de M par la transformation $r_3 \circ r_2 \circ r_1$, puis montrez que cette transformation est une symétrie centrale s.

INDICATION : Pour le triangle ABC, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi$.

2. Montrez que le centre I de s est sur (AB). Pour cela, vous pourrez montrer que $A' = s(A)$ est sur (AB). Placez le point A'. Placez I.

3. Concluez en répondant à la question initiale.

2.3 Autour d'un quadrilatère

ABCD est un quadrilatère convexe quelconque.

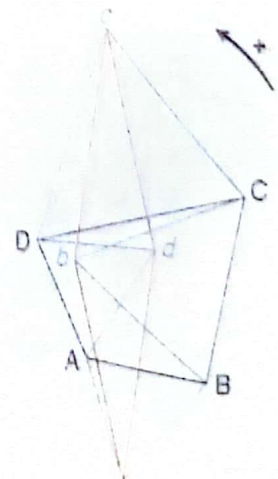
On construit sur ses côtés, alternativement à l'extérieur et à l'intérieur, les triangles équilatéraux ABa , BCb , CDc et DAd .

Le but de l'exercice est de montrer que le quadrilatère $abcd$ est un parallélogramme.

Pour cela, notons r_1 la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$, et r_2 la rotation de centre C, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

1. Vérifiez que $r_2 \circ r_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{ab}$.

2. Quelle est l'image de d par $r_2 \circ r_1$? Concluez.



TP 3

COMPOSÉE D'UNE ROTATION r ET D'UNE TRANSLATION t

3.1 Construction du centre de la rotation $t \circ r$

Nous savons que lorsque r est distincte de l'identité, l'isométrie $t \circ r$ est une rotation, d'angle θ , où θ est l'angle non nul de r .

Les méthodes connues pour trouver le centre d'une rotation (voir page « Des idées, des réflexes ») peuvent alors être appliquées à la détermination du centre de $t \circ r$. Voici, dans ce cas, une autre méthode.

On décompose t et r en produit de réflexions.

On note $\vec{u}$ le vecteur de t ($\vec{u} \neq \vec{0}$), O le centre de r , et θ l'angle de r ($\theta \neq 0$).

On introduit la droite d qui passe par O et qui est orthogonale à $\vec{u}$, et la réflexion s d'axe d ; $\vec{v}$ étant un vecteur directeur de d , on note d_1 la droite qui passe par O et qui est dirigée par un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{w}, \vec{v}) = \frac{\theta}{2}$. On note s_1 la réflexion d'axe d_1 .

1. Vérifiez que $r = s \circ s_1$.

2. On note d_2 l'image de d par la translation de vecteur $\frac{1}{2} \vec{u}$, et s_2 la réflexion d'axe d_2 .

Vérifiez que $t = s_2 \circ s$, puis déduisez-en que $t \circ r = s_2 \circ s_1$.

3. Montrez que d_1 et d_2 sont sécantes et que leur point d'intersection est le centre de la rotation $t \circ r$.

4. **Application** : ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$; r est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$; t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

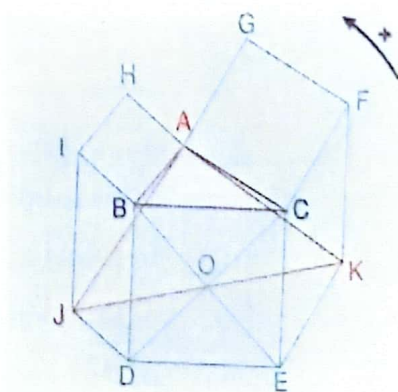
Déterminez le centre de chacune des rotations $t \circ r$ et $r \circ t$.

3.2 Utilisation de composées de rotations et translations

ABC est un triangle ; à l'extérieur de celui-ci, on construit les carrés BAHI, BDEC, CFGA et les parallélogrammes BIJD et CEKF.

Le but de l'exercice est de montrer que le triangle AJK est isocèle et rectangle en A.

Pour cela, notons r la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.



1. Montrez que la rotation $t \circ r$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre, le centre O du carré BDEC. Quelle est l'image de A par $t \circ r$?
2. On note r' la rotation de centre C , d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{KF}$.
 - a) Quelle est l'image de K par $r' \circ t'$?
 - b) Montrez que $r' \circ t'$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. Déduez de tout ce qui précède que le triangle AJK est rectangle et isocèle en A , et que O est le milieu de son hypoténuse.

TP 4

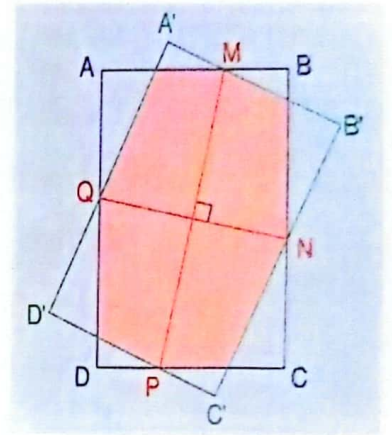
RECTANGLES ISOMÉTRIQUES

Deux rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont isométriques ($AB = A'B'$, $AD = A'D'$). Ils sont disposés de telle sorte que leurs frontières se coupent en huit points distincts, comme sur la figure.

Alors, quelle que soit la disposition, on obtient :
 $(MP) \perp (QN)$,

et $(\text{aire de l'intersection}) > \frac{1}{2} (\text{aire du rectangle})$.

Voici une démonstration de ce résultat surprenant.



1. a) Justifiez l'existence d'un déplacement qui transforme A en A' et B en B' , donc le rectangle $ABCD$ en le rectangle $A'B'C'D'$.
 - b) Pourquoi ce déplacement n'est-il pas une translation ?
C'est donc une rotation r . Notons O son centre et α son angle.
2. a) M est l'image par r d'un point M_1 de $[AB]$. Pourquoi ?
 - b) N est l'image par r d'un point N_1 de $[BC]$. Pourquoi ?
 - c) O est donc situé à l'intersection des médiatrices de $[MM_1]$ et de $[NN_1]$. Pourquoi ? Remarquez que ces médiatrices sont perpendiculaires.
3. Déduez de la question 2. que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{\pi}{2}$.

CONSEIL : Si nécessaire, faire une figure auxiliaire représentant les triangles OM_1M et ON_1N .

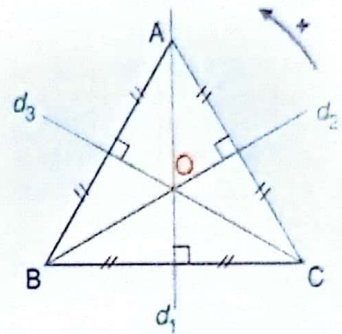
4. a) Démontrez de même que :
 $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = -\frac{\pi}{2}$, et $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{2}$.
 - b) Déduez-en que (MP) et (NQ) sont perpendiculaires.
5. a) Montrez que : $\text{aire}(MNPQ) > \frac{1}{2} BC \times AB$.
 - b) Déduez-en que l'aire de l'intersection des deux rectangles isométriques est supérieure (strictement) à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$.

TP 5

ISOMÉTRIES LAISSANT UNE FIGURE GLOBALEMENT INVARIANTE

5.1 Isométries laissant un triangle équilatéral globalement invariant

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
Le but de l'exercice est de trouver toutes les isométries f qui laissent ce triangle globalement invariant, c'est-à-dire telles que l'image de ABC par f soit le triangle ABC.



1. a) Montrez que si une isométrie f laisse ABC globalement invariant, alors nécessairement f transforme chaque côté en un côté.
b) Déduisez-en que f transforme l'ensemble $\{A, B, C\}$ en l'ensemble $\{A, B, C\}$.
2. Montrez que, réciproquement, si une isométrie f transforme $\{A, B, C\}$ en $\{A, B, C\}$, alors elle laisse globalement invariant le triangle ABC.
3. Montrez que si f est une isométrie qui laisse globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$, alors $f(O) = O$, où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
4. Déduisez de tout ce qui précède que si f est une isométrie qui laisse ABC globalement invariant, alors f est l'une des transformations suivantes :

$$s_{d_1}, s_{d_2}, s_{d_3}, \text{Id}, r\left(O; \frac{2\pi}{3}\right), r\left(O; \frac{4\pi}{3}\right),$$

où d_1, d_2, d_3 sont les trois médiatrices du triangle.

5.2 Isométries laissant un carré globalement invariant

ABCD est un carré de sens direct, de centre O .

1. En vous inspirant du travail fait en 5.1, montrez qu'il existe **huit** isométries laissant ce carré globalement invariant.
2. composez deux à deux ces isométries, présentez les résultats dans un tableau à double entrée, et vérifiez que chaque composée est bien une isométrie déjà trouvée.

TP 6

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

6.1 Étude d'un exemple

d_1 et d_2 sont deux droites sécantes en I.

P et Q sont deux points donnés tels que la droite (PQ) n'est parallèle ni à d_1 , ni à d_2 . Construisez un point M sur d_1 et un point N sur d_2 tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

POINT MÉTHODE Pour résoudre un problème de construction, on procède en deux étapes : analyse, synthèse.

1. a) On suppose le problème résolu, c'est-à-dire la construction effectivement réalisée.
- b) On repère comment les éléments à construire (points, droites, cercles ...) sont liés aux éléments donnés.
- c) On essaie souvent de ramener le problème à la recherche de « points clés » dont la connaissance permet de construire la figure demandée. En général, on détermine ces « points clés » comme intersections de lignes connues.

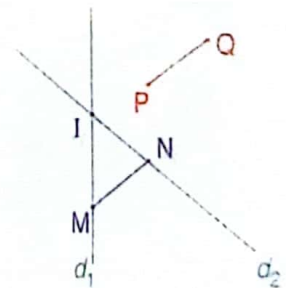
a) On suppose le problème résolu. On réalise une figure approximative.

b) M est sur d_1 , N sur d_2 , et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

c) On cherche à faire apparaître l'un des points à construire, N par exemple, comme intersection de deux lignes que l'on pourrait facilement construire. N est sur d_2 . On cherche à voir si N est sur une autre droite fixe.

• Montrez que N est aussi sur la droite d' image de d_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Le point N est l'intersection de d_2 et d' ; le point M est l'intersection de d_1 et de la parallèle à (PQ) menée par N.

• Comment pourra-t-on, à partir du point N trouvé, construire le point M ?



2. On donne la construction en justifiant que la figure faite répond aux conditions posées.

Indiquez comment construire N et M de façon que M soit sur d_1 , N sur d_2 , et que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$. Justifiez votre réponse.

REMARQUE : Dans certains cas, on doit discuter dans la phase synthèse, pour savoir si la construction est possible ou non.

6.2 Exercice

d_1, d_2, d_3 sont trois droites données, parallèles deux à deux.

Construisez un carré ABCD de sorte que A soit sur d_1 , B sur d_2 , D sur d_3 .

DES IDÉES DES RÉFLEXES

...

Boussat
176046716

Des idées à retenir

- Les seules transformations du plan qui **conservent la distance** (isométries) sont les réflexions, les translations, les rotations, et leurs composées.
- Les seules transformations du plan qui **conservent à la fois la distance et les angles orientés** (déplacements) sont les translations et les rotations.
- La composée de deux translations est toujours une translation, mais la composée de deux rotations peut être une rotation (si la somme de leurs angles est non nulle) ou une translation (si cette somme est nulle).
- La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul est toujours une rotation.
- Si deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont la **même longueur**, il existe un déplacement d et un seul tel que $d(A) = A'$, $d(B) = B'$. Ce déplacement est une translation lorsque $(AB) \parallel (A'B')$, c'est une rotation dans le cas contraire.
- La composée de deux réflexions d'axes sécants en O est une rotation de centre O . Réciproquement, toute rotation de centre O peut être considérée comme la composée $s_2 \circ s_1$ de deux réflexions dont les axes se coupent en O , l'axe de s_1 pouvant être arbitrairement choisi.
- Résultats analogues pour une translation, en remplaçant « axes sécants » par « axes parallèles ».
- Si une **isométrie** a un point fixe, c'est soit une **rotation**, soit une **réflexion**.

Des réflexes à avoir

► Pour trouver l'image M' d'un point M par f , f étant une rotation, ou une translation, ou une réflexion, pensez que :

- si M est sur une ligne (droite, cercle), alors M' est sur la ligne image ;
- si M est un point d'intersection de deux lignes, alors M' est un point d'intersection des images de ces deux lignes ;
- si $AM = AB$,
alors $A'M' = A'B'$ ($A' = f(A)$, $B' = f(B)$) ;
- si M est le milieu de $[AB]$, alors M' est le milieu de $[A'B']$. Plus généralement, si M est le barycentre d'un système de n points pondérés, alors M' est le barycentre des n points images affectés des mêmes coefficients.

Remarque : Bien qu'une homothétie h de rapport $|k| \neq 1$ ne soit pas une isométrie, tout ce qui précède reste valable lorsque $f = h$, sauf évidemment le résultat sur la distance (si $AM = AB$, alors $A'M' = |k| A'B'$).

► Pour trouver le centre O d'une rotation r d'angle θ connu, pensez, au moins, aux deux méthodes suivantes :

1. On cherche l'image A' d'un point A , alors O est le point de la médiatrice de $[AA']$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$.
2. On cherche les images A' et B' de deux points A et B , alors :
 - O est l'intersection des médiatrices de $[AA']$, $[BB']$, lorsque ces médiatrices ne sont pas parallèles ;
 - O est l'intersection de (AB) et de $(A'B')$ si ces médiatrices sont parallèles. (Voir figures du § 2.3 du cours.)

Des erreurs à éviter

■ Savoir que, en général, la composition de deux transformations n'est pas commutative. En général $f \circ g$ est distincte de $g \circ f$. (Néanmoins, si t_1 et t_2 sont deux translations, $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$, si r_1 et r_2 sont deux rotations de **même** centre, alors, $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$. Idem pour des homothéties de **même** centre.)

POUR COMMENCER

VÉRIFICATION DES CONNAISSANCES

- S1** A, B, A', B', sont quatre points tels que $A \neq B$ et $AB = A'B'$.
- Dans quel cas existe-t-il une translation t telle que $t(A) = A'$, $t(B) = B'$? Y a-t-il unicité d'une telle translation ?
 - Dans quel cas existe-t-il une rotation r telle que $r(A) = A'$, $r(B) = B'$? Y a-t-il unicité d'une telle rotation ? Comment trouve-t-on le centre de r ?
- S2** Dans quel cas la composée de deux rotations est-elle une rotation ? Une translation ?
- S3** Quelle est la nature de la transformation $t \circ r$, lorsque t est une translation de vecteur non nul, et r une rotation d'angle non nul ?
- S4** Quelles sont les transformations qui constituent l'ensemble des isométries ?

Q.C.M.

Une seule des réponses proposées est exacte

	a	b	c
Q1 t est une translation de vecteur non nul, r est une rotation d'angle non nul. Alors $t \circ r$ est une ...	translation	rotation	réflexion
Q2 ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$. C' est le symétrique de C par rapport à D ; r_1 est la rotation de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{2}$; r_2 est la rotation de centre C, d'angle $\frac{\pi}{2}$. Alors $r_1 \circ r_2$ est ...	une rotation	la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$	la translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$
Q3 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. O est le centre de gravité de ABC ; r est la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{3}$, s est la réflexion d'axe (CO). Alors $r \circ s$ est ...	une rotation	la réflexion d'axe (CB)	la réflexion d'axe (CA)
Q4 r_1 et r_2 sont deux rotations de centres respectifs I_1 et I_2 , d'angles respectifs α_1 et α_2 . $r_1 \circ r_2$ n'a pas de point fixe. Alors :	$\alpha_2 = \alpha_1$ (modulo 2π)	$\alpha_2 = -\alpha_1$ (modulo 2π)	$I_1 = I_2$
Q5 r est une rotation d'angle non nul, s une réflexion. Alors $s \circ r$...	est un déplacement	n'est jamais un déplacement	peut être un déplacement

Réponses page 175

COMME LES RÉSOLUS

Pour l'exercice 1, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu 6.1, p. 16.

1 ABC est un triangle quelconque. À tout point M du segment [AB], on associe le point N de la demi-droite (AC) tel que $\vec{CN}$ et $\vec{AC}$ sont de même sens et $CN = BM$. Montrez que lorsque M décrit le segment [AB], la médiatrice de [MN] passe par un point fixe.

Pour l'exercice 2, vous pouvez vous reporter au paragraphe 6.2, p. 17.

2 ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}.$$

r est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t est la translation de vecteur $\vec{AB}$. Identifiez la transformation $t \circ r$.

POUR S'ENTRAÎNER

Détermination des composées

Pour les exercices 3 à 7, ABCD est un carré tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$. Identifiez la transformation $h = g \circ f$, et précisez l'image du carré ABCD par h .

3 f est la réflexion d'axe (AB), g est la réflexion d'axe (CD).

4 f est la réflexion d'axe (AC), g est la réflexion d'axe (BD).

5 f est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, g est la rotation de centre C, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

6 f est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$, g est la rotation de centre C, d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

7 f est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, g est la réflexion d'axe (AC).

Pour les exercices 8 à 10, ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$. Identifiez la transformation $h = g \circ f$, et précisez l'image du triangle ABC par h .

8 f est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$, g est la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

9 f est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$, g est la réflexion d'axe (AO).

10 f est la rotation de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$, g est la réflexion d'axe (AO).

Pour les exercices 11 à 13, ABCD est un carré tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$. Décomposez la rotation h donnée en deux réflexions g et f , $h = g \circ f$.

11 h est la rotation de centre A, d'angle plat, f est la réflexion d'axe (AB).

12 h est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, g est la réflexion d'axe (AB).

13 h est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, f est la réflexion d'axe (AB).

14 Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(\sqrt{3}; 0)$, $B(0; 3)$.

r_1 est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

r_2 est la rotation de centre B, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

s est la réflexion d'axe (AB).

Précisez la nature et les éléments géométriques de chacune des applications suivantes : $r_2 \circ r_1$, $s \circ r_1$, $r_2 \circ s$.

15 Dans le plan orienté, on donne trois points A, B, C, non alignés, se succédant dans le sens direct sur le cercle circonscrit au triangle qu'ils déterminent (on dit que le triangle ABC est « direct »).

1. On appelle O et O' les points tels que :

- le triangle BAO est isocèle, rectangle en O et direct ;
 - le triangle ACO' est isocèle, rectangle en O' et direct.
- Faites la figure, en justifiant la construction de O et O'.

2. Soit r la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r' la rotation de centre O', d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminez l'image de B par $r' \circ r$, puis la nature et les éléments caractéristiques de $r' \circ r$.

Des composées pour démontrer

16 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$, $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

On note r la rotation de centre I, d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\frac{1}{2} \vec{BC}$. On pose $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1. Trouvez l'image de K par f et celle de J par g . Précisez la nature et les éléments caractéristiques de f et de g .

2.a. Précisez la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$.

b. Quelle est l'image de A par $g \circ f^{-1}$?

Caractériser alors cette transformation.

c. M est un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g .

Construisez le quadrilatère ACM_2M_1 .

17 BAC Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct. A' , B' et C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit P et Q les points tels que :

$$PA = PC \text{ et } (\vec{PA}, \vec{PC}) = \frac{\pi}{2}, \quad QA = QB \text{ et } (\vec{QA}, \vec{QB}) = -\frac{\pi}{2}.$$

1. r_P est la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r_Q est la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$s_{A'}$ est la symétrie de centre A' .

Étudiez l'image de A par la transformation $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.

Que pouvez-vous dire de f ?

2. Quelle est la nature du triangle $A'PQ$?

INDICATION : Introduire P' , symétrique de P par rapport à A' .

18 A, B, C, D sont des points distincts tels que :

$$AB = CD \text{ et } (\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\pi}{2}.$$

On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1.a. Justifiez l'existence d'une rotation unique r telle que $r(A) = C$ et $r(B) = D$.

Faites une figure sur laquelle vous placerez le centre E de r . Précisez l'angle de la rotation r .

b. On appelle r' la rotation transformant A en D et B en C. Précisez son angle.

Placez le centre F de r' sur la figure précédente.

2.a. Montrez que le quadrilatère EIFJ est un carré.

b. Identifiez chacune des transformations suivantes :

$$r' \circ r^{-1}, \quad r' \circ r, \quad r' \circ r^{-1} \circ r'.$$

19 BAC Dans le plan orienté, soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

I est le milieu de $[BC]$ et J le point tel que B soit le milieu de $[JC]$.

r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rota-

tion de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

1. Soit A' et B' les images respectives de A, B par $r_2 \circ r_1$. Démontrez que I est le milieu de $[AA']$ et B le milieu de $[AB']$.

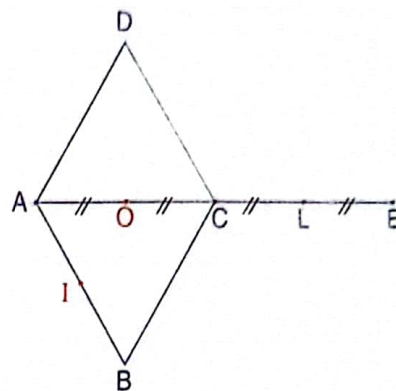
2. En précisant la nature de $r_2 \circ r_1^{-1}$, démontrez que pour tout point M du plan, I est le milieu de $[M, M_2]$, M_1 étant l'image de M par r_1 et M_2 l'image de M par r_2 .

3. Démontrez que $r_2 \circ r_1$ est une rotation. Précisez son centre et son angle.

20 BAC Dans le plan orienté, on considère la figure ci-dessous.

Les triangles ABC et ACD sont équilatéraux directs, tels que $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{DA}, \vec{DC}) = \frac{\pi}{3}$.

Les points O et I sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$, et les points L et E sont tels que $\vec{OC} = \vec{CL} = \vec{LE}$.



Soit r la rotation de centre A dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{3}$, et t la translation de vecteur $\vec{OA}$. On note $r' = r \circ t$.

1.a. Quelle est l'image de O par r' ?

b. Donnez une mesure de l'angle $(\vec{IO}, \vec{IA})$.

c. Précisez la nature et les éléments caractéristiques de l'application r' .

2. M est un point quelconque du plan, on note $N = r(M)$, J le milieu du segment $[EM]$, et K le milieu du segment $[ND]$.

a. Soit P l'antécédent de M par t . Quel est le milieu du segment $[LP]$?

b. Montrez que, lorsque I, J et K sont distincts, le triangle IJK est équilatéral. Vous pourrez utiliser $r'(L)$ et $r'(P)$.

VOCABULAIRE : « P est l'antécédent de M par t » signifie « $t(P) = M$ ».

21 BAC ABCD désigne un rectangle du plan orienté tel que $AD = BC = a$, et $AB = CD = 2a$, et $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

O est le point d'intersection des diagonales du rectangle.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\frac{1}{4} \vec{AB}$.

1. Dessinez le rectangle ABCD et son image $A'B'C'D'$ par $f = t \circ r$ (avec $a = 4$ cm).

2. Expliquez pourquoi f est une rotation. Déterminez son angle. Donnez une construction de son centre Ω .

NOTE : Ce point Ω est utilisé par les ébénistes lorsqu'ils construisent une table rectangulaire que l'on peut faire pivoter autour de Ω puis déplier pour en doubler la surface, la table restant centrée sur son rectangle d'assiette.

22 **BAC** Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct, c'est-à-dire tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$, $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

1.a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminez $r(D)$ et $r(B)$.

b. Montrez que r est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de [BD].

2.a. Montrez que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω .

INDICATION : Considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA})$ (voir chap. 4, p. 74).

b. Prouvez que Γ admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à Γ . Construisez le cercle Γ .

23 **BAC** Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(-a; 0)$ et $(a; 0)$ (a réel, $a > 0$).

r_A est la rotation de centre A, d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

r_B est la rotation de centre B, d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on note $M_A = r_A(M)$ et $M_B = r_B(M)$.

1. M étant un point donné du plan, construisez les points M_A et M_B ; justifiez la construction.

2. Démontrez que le milieu du segment $[M_A M_B]$ est un point fixe indépendant du choix de M :

a. en composant les applications r_A^{-1} puis r_B ;

b. en utilisant les nombres complexes.

NOTE : Si nécessaire, voir chapitre 3 pour résoudre la question b.

24 **BAC** Dans le plan orienté, ABCD et AEFG sont deux carrés tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}$.

On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [BD], [DE], [EG], [GB].

1. Montrez que MNPQ est un parallélogramme.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminez l'image du segment [BE] par cette rotation R. Déduisez-en que MNPQ est un carré.

3. On désigne par ℓ et m les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et AEFG. On pose :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \alpha, \quad \alpha \in [0; 2\pi[.$$

a. Exprimez en fonction de ℓ , m et α , la longueur des côtés du carré MNPQ.

b. Déterminez α pour que l'aire du carré MNPQ soit maximale.

25 **BAC** Dans le plan orienté, on suppose donnés deux points distincts O et I. On note r le quart de tour direct de centre O (c'est-à-dire la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$) et s la symétrie centrale de centre I.

1.a. Soit OJO'G le carré direct de centre I (c'est-à-dire que $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{2}$).

Placez ces points sur une figure. (On prendra $OI = 4$ cm.)

b. Prouvez que $s \circ r$ est la rotation de centre J, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c. Déduisez-en que J est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.

Désormais, pour tout couple (M, N) de points du plan, on note : $A = r(M)$, $B = s(M)$; $C = r(N)$, $D = s(N)$.

2. Soit M un point donné distinct de J. On suppose que J est le milieu du segment [MN]. Démontrez que ABCD est un carré de centre G. Placez M et N et le carré ABCD sur la figure.

3. Le point M étant toujours donné distinct de J, on suppose inversement que N est tel que ABCD soit un carré. Prouvez que J est le milieu de [MN] et que G est le centre du carré ABCD.

INDICATION : Introduire le milieu J' de [MN] et le centre G' du carré ; déterminer $(s \circ r)(J')$.

4. Soit r' le quart de tour direct de centre G. Prouvez que $r' \circ r = s$. Déduisez-en que sous les hypothèses de la question 2., le carré ABCD est direct (c'est-à-dire que $r'(A) = B$).

26 **BAC** **Problème de construction**

1. Dans le plan orienté, on considère un carré PQRS de centre O pour lequel l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ est égal à $\frac{\pi}{2}$. Soit ABCD un parallélogramme tel que P, Q, R, S appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA].

a. Montrez que les droites (AD) et (DC) sont les images des droites (BC) et (AB) par la symétrie s de centre O. Montrez que O est le centre du parallélogramme ABCD.

b. Soit Δ l'image de la droite (AB) par la rotation r de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrez que Q est commun aux droites (BC) et Δ .

2. Soit A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1; -2)$, $(3; 2)$, $(-1; 2)$ et $(-3; -2)$, dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

En utilisant la question précédente, construisez un carré inscrit dans le parallélogramme ABCD (donnez les coordonnées des sommets de ce carré).

22 **BAC** Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct, c'est-à-dire tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$, $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

1.a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminez $r(D)$ et $r(B)$.

b. Montrez que r est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de [BD].

2.a. Montrez que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω .

INDICATION : Considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{M\Lambda})$ (voir chap. 4, p. 74).

b. Prouvez que Γ admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à Γ . Construisez le cercle Γ .

23 **BAC** Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(-a; 0)$ et $(a; 0)$ (a réel, $a > 0$).

r_A est la rotation de centre A, d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

r_B est la rotation de centre B, d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on note $M_A = r_A(M)$ et $M_B = r_B(M)$.

1. M étant un point donné du plan, construisez les points M_A et M_B ; justifiez la construction.

2. Démontrez que le milieu du segment $[M_A M_B]$ est un point fixe indépendant du choix de M :

a. en composant les applications r_A^{-1} puis r_B ;

b. en utilisant les nombres complexes.

NOTE : Si nécessaire, voir chapitre 3 pour résoudre la question b.

24 **BAC** Dans le plan orienté, ABCD et AEFG sont deux carrés tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}$.

On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [BD], [DE], [EG], [GB].

1. Montrez que MNPQ est un parallélogramme.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminez l'image du segment [BE] par cette rotation R. Déduisez-en que MNPQ est un carré.

3. On désigne par ℓ et m les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et AEFG. On pose :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \alpha, \quad \alpha \in [0; 2\pi[.$$

a. Exprimez en fonction de ℓ , m et α , la longueur des côtés du carré MNPQ.

b. Déterminez α pour que l'aire du carré MNPQ soit maximale.

25 **BAC** Dans le plan orienté, on suppose donnés deux points distincts O et I. On note r le quart de tour direct de centre O (c'est-à-dire la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$) et s la symétrie centrale de centre I.

1.a. Soit OJO'G le carré direct de centre I (c'est-à-dire que $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{2}$).

Placez ces points sur une figure. (On prendra $OI = 4$ cm.)

b. Prouvez que $s \circ r$ est la rotation de centre J, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c. Déduisez-en que J est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.

Désormais, pour tout couple (M, N) de points du plan, on note : $A = r(M)$, $B = s(M)$; $C = r(N)$, $D = s(N)$.

2. Soit M un point donné distinct de J. On suppose que J est le milieu du segment [MN]. Démontrez que ABCD est un carré de centre G. Placez M et N et le carré ABCD sur la figure.

3. Le point M étant toujours donné distinct de J, on suppose inversement que N est tel que ABCD soit un carré. Prouvez que J est le milieu de [MN] et que G est le centre du carré ABCD.

INDICATION : Introduire le milieu J' de [MN] et le centre G' du carré; déterminer $(s \circ r)(J')$.

4. Soit r' le quart de tour direct de centre G. Prouvez que $r' \circ r = s$. Déduisez-en que sous les hypothèses de la question 2., le carré ABCD est direct (c'est-à-dire que $r'(A) = B$).

26 **BAC** Problème de construction

1. Dans le plan orienté, on considère un carré PQRS de centre O pour lequel l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ est égal à $\frac{\pi}{2}$. Soit ABCD un parallélogramme tel que P, Q, R, S appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA].

a. Montrez que les droites (AD) et (DC) sont les images des droites (BC) et (AB) par la symétrie s de centre O. Montrez que O est le centre du parallélogramme ABCD.

b. Soit Δ l'image de la droite (AB) par la rotation r de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

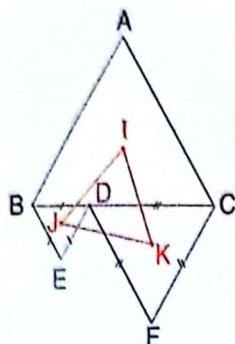
Montrez que Q est commun aux droites (BC) et Δ .

2. Soit A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1; -2)$, $(3; 2)$, $(-1; 2)$ et $(-3; -2)$, dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

En utilisant la question précédente, construisez un carré inscrit dans le parallélogramme ABCD (donnez les coordonnées des sommets de ce carré).

27* ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.
I est le centre de ABC. D est un point de [BC] distinct de B et C. On construit les triangles équilatéraux BED et DFC tels que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}) = -\frac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FD}) = \frac{\pi}{3}$.

On note J et K les centres respectifs de BED et de DFC.



Le but de l'exercice est de montrer que IJK est équilatéral.

Pour cela, on utilise la rotation r_1 de centre K, d'angle $\frac{2\pi}{3}$

et la rotation r_2 de centre J, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. Montrez que $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre I, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

2. Déduisez-en que IJK est équilatéral.

NOTE : Une solution utilisant les nombres complexes est intéressante. Vous pouvez la tenter dès maintenant ou revenir sur cet exercice après l'étude du chapitre 3.

Déplacements transformant

[AB] en [A'B']

28 $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles de même rayon, de centre O et O' distincts. A est un point de $\mathcal{C}$ et B est un point de $\mathcal{C}'$. Déterminez les déplacements qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ de façon que A vienne en B.

29 [AB] est un segment. M est un point de [AB], distinct de A et B. Dans le même demi-plan de frontière (AB), on construit les triangles équilatéraux AMP et BQM. Le but de l'exercice est de montrer que lorsque M décrit]AB[, la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe.

1. Montrez que les droites (AP) et (BQ) passent par un point fixe. On note C ce point.

2. Prouvez qu'il existe une rotation r telle que $r(A) = C$ et $r(P) = Q$. Montrez que le centre de r est fixe, puis concluez.

30 ABC est un triangle tel que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit positive. I, J et K sont les milieux respectivement de [BC], [CA] et [AB]. U et V sont les centres des carrés construits extérieurement au triangle sur les côtés [AB] et [AC].

1. Montrez que $KU = IJ$.

2. Montrez que les droites (IU) et (IV) sont perpendiculaires, et que $IU = IV$.

INDICATION : Utiliser la rotation r telle que $r(K) = J$, $r(U) = I$, dont l'existence résulte du 1. et déterminer $r(I)$.

NOTE : Une solution utilisant les nombres complexes est intéressante. Vous pouvez l'aborder dès maintenant ou revenir à cet exercice après l'étude du chapitre 3.

Recherche d'isométries

31 Déplacements conservant deux droites

d et d' sont deux droites données. Trouvez tous les déplacements qui laissent globalement invariante la figure formée par ces deux droites dans chacun des cas suivants :

- d et d' sont distinctes et parallèles ;
- d et d' sont perpendiculaires ;
- d et d' sécantes, et non perpendiculaires.

32 Isométries conservant un losange

ABCD est un losange, non carré. Trouvez toutes les isométries qui laissent ce losange globalement invariant.

33 **BAC** ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. Les points I, J, K, sont respectivement les

milieux de [BC], [AC], [AB]. $\mathcal{G}$ est l'ensemble des isométries f telles que $B = f(A)$ et $K = f(J)$.

1. Démontrez que $\mathcal{G}$ contient une rotation r . Précisez l'angle et le centre de r . Quelle est l'image du triangle ABC par r ?

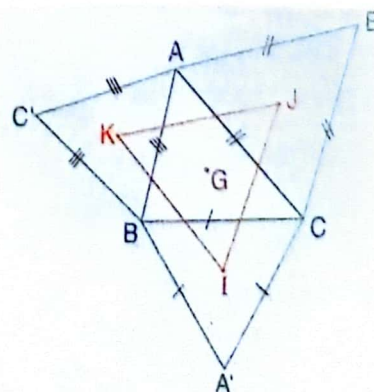
2. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{JK}$ et s la réflexion d'axe (JK). Montrez que $u = t \circ s$ est un élément de $\mathcal{G}$.

Quelle est l'image du triangle ABC par cette isométrie ?

3. f est un élément de $\mathcal{G}$. Quelles sont les images possibles du triangle équilatéral IJK ? Déduisez-en que $f = u$, ou $f = r$, et donc que $\mathcal{G} = \{r, u\}$.

Divers

34 Le problème de Napoléon



Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC de sens direct, et à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux BCA', CAB', ABC'. On désigne par I, J, K les centres de gravité respectifs de ces triangles. G désigne le centre de gravité de ABC.

Le but de l'exercice est de montrer que I J K est un triangle équilatéral et que G est son centre de gravité.

1. Montrez que $\vec{AA'} = 3\vec{GI}$.

INDICATION : Introduire le milieu A₁ de [BC].

2. Montrez que $\vec{BB'} = 3\vec{GJ}$ et que $\vec{CC'} = 3\vec{GK}$.

3.a. En utilisant la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, montrez que $\vec{BB'} = \vec{CC'}$ et que $(\vec{BB'}, \vec{CC'}) = \frac{2\pi}{3}$.

b. Montrez que :

$$AA' = BB' \text{ et } (\vec{AA'}, \vec{BB'}) = \frac{2\pi}{3}, (\vec{CC'}, \vec{AA'}) = \frac{2\pi}{3}.$$

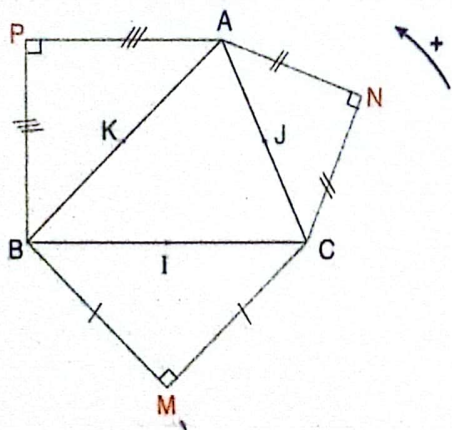
c. Déduez de 1. et 2. et des égalités $AA' = BB' = CC'$, que G est le centre du cercle circonscrit au triangle I J K.

d. Déduez-en que $(\vec{GI}, \vec{GJ}) = (\vec{GJ}, \vec{GK}) = (\vec{GK}, \vec{GI}) = \frac{2\pi}{3}$.

4. Montrez enfin que IJK est un triangle équilatéral dont G est le centre de gravité.

NOTE : Ce résultat est attribué à Napoléon Bonaparte, mais rien ne prouve que Napoléon en soit vraiment l'auteur.

35 ABC est un triangle de sens direct (la mesure principale de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est positive) ; M, N, P sont les sommets des triangles rectangles, isocèles, directs MCB, NAC et PBA ; I, J, K sont les milieux de [BC], [CA], [AB], R et S sont les milieux de [AM] et [NP].



1. Démontrez que les triangles INP, KMN et JPM sont rectangles isocèles. Déduez-en que les segments [AM], [BN], et [CP] sont égaux et perpendiculaires respectivement à [NP], [PM] et [MN], et qu'ils sont concourants.

2. Démontrez que JSKR est un carré de centre le milieu de [AI].

3. On construit le parallélogramme NAPQ. Démontrez que BMCQ est un carré, puis que les triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

36 Géométrie analytique

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct (unité graphique : 1 cm).

1. Placez les points : A(1 ; 1), B(2 ; 2), C(-3 ; 3), D(-4 ; 4).

2. Justifiez l'existence d'un déplacement qui transforme A en C et B en D, et montrez que ce déplacement est une rotation.

3. Notez r cette rotation, I son centre, α son angle. Donnez la valeur de α , et les coordonnées de I.

4.a. Justifiez l'existence d'une rotation qui transforme A en D et B en C.

b. Précisez la valeur de son angle, et les coordonnées de son centre, que nous noterons J.

5. Notez K le milieu de [AB] et L le milieu de [CD]. Montrez que le quadrilatère IKJL est un carré.

37 Géométrie analytique

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, A et B sont les points de coordonnées respectives $(0; \sqrt{3})$ et $(1; 0)$; r_1 est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{6}$; r_2 est la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par f la composée $r_2 \circ r_1$.

1.a. Précisez la nature et les éléments caractéristiques de f .

b. A' et B' étant les images de A et B par f , montrez analytiquement que la droite (A'B') est la médiatrice du segment [AB].

2.a. En utilisant des arguments géométriques, démontrez que A' est sur la médiatrice de [AB].

b. On désigne par B₁ l'image de B par r_1 . Démontrez que B' est le centre du cercle passant par A, B, B₁.

c. Déduez-en que la droite (A'B') est la médiatrice de [AB].

38 Conservation du barycentre

Le but de l'exercice est de démontrer que toute isométrie conserve le barycentre. Toute isométrie étant une réflexion ou une composée de réflexions, il suffit donc de démontrer que toute réflexion conserve le barycentre.

On considère donc une réflexion s d'axe d , et un système de points pondérés $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ ayant un barycentre G. Il s'agit de démontrer que $G' = s(G)$ est le barycentre de $(A'_1, a_1), \dots, (A'_n, a_n)$, avec $A'_i = s(A_i)$ pour tout i .

1. Choisissez un repère orthonormal dont l'axe des abscisses est porté par la droite d .

a. Calculez les coordonnées de G dans ce repère, en fonction des coordonnées de $A_1, \dots, A_n$.

b. Calculez les coordonnées de $G', A'_1, \dots, A'_n$.

2. Concluez.

Problèmes de construction

39 $\mathcal{C}$ est un cercle, D et Δ sont deux droites sécantes en I ; I est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$. Trouvez M sur D et M' sur $\mathcal{C}$ tels que Δ soit la médiatrice de $[MM']$.

40 $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et A un point de $\mathcal{C}$; B est le point tel que $\vec{OB} = \frac{3}{2} \vec{OA}$ et D la perpendiculaire à (OB) passant par B . Trouvez un point M de D et un point N de $\mathcal{C}$ tels que $OAMN$ soit un parallélogramme.

41 Construisez un quadrilatère $ABCD$, connaissant les longueurs et les directions des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ et les longueurs AB et CD .

INDICATION : Placer $[AC]$, puis utiliser la translation de vecteur $\vec{BD}$.

42 d et d' sont deux droites données, A est un point donné de d , et A' un point donné de d' . ℓ est un réel donné, $\ell > 0$. Construisez deux points M et M' , M sur d et M' sur d' , tels que $AM = A'M'$ et $MM' = 2\ell$.

43 $ABCD$ est un carré, de centre O , tel que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

1. On construit un parallélogramme $PQRS$ de sorte que A appartienne à $[PQ]$, B appartienne à $[QR]$, C à $[RS]$ et D à $[SP]$. Montrez, en utilisant la symétrie de centre O , que O est le centre du parallélogramme $PQRS$.

2. On note Δ l'image de (PQ) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrez que, sauf dans un cas que vous préciserez, B est l'intersection de Δ et de (QR) .

3. On donne un parallélogramme $P'Q'R'S'$ de centre O' . Indiquez un procédé de construction pour inscrire un carré dans ce parallélogramme.

44 $[AB]$ est un segment de longueur a , M est un point variable de ce segment.

On construit d'un même côté de la droite (AB) les triangles équilatéraux PAM et QMB ; C est le point d'intersection des droites (AP) et (BQ) ; I est le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BC]$.

1. Quel est l'ensemble des milieux O de $[PQ]$ lorsque M décrit le segment $[AB]$?

2. Démontrez qu'il existe une rotation qui transforme P en Q et I en J . Déduisez-en que la médiatrice de $[PQ]$ passe par un point fixe F .

Que représente F pour le triangle ABC ?

Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle MPQ ?

3. K désigne le centre du cercle circonscrit au triangle PQC . Quel est l'ensemble des points K lorsque M décrit le segment $[AB]$?

4. Construisez les points P et Q lorsque :

a. on connaît la direction de la droite (PQ) ;

b. on connaît la longueur du segment $[PQ]$.

EXERCICE COMMENTÉ

45 ÉNONCÉ :

ABC est un triangle non isocèle tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

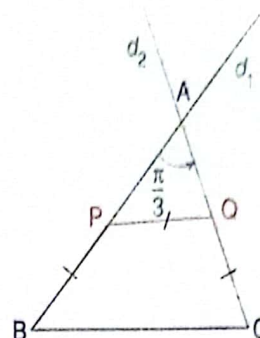
d_1 est la demi-droite d'origine B qui passe par A .

d_2 est la demi-droite d'origine C qui passe par A .

Construisez un point P sur d_1 , un point Q sur d_2 , de telle sorte que $BP = CQ = PQ$.

VERS UNE SOLUTION :

Supposons le problème résolu et faisons une figure approximative, pour voir quelles conditions nécessaires doivent satisfaire ces points P et Q .



Il est clair qu'il est facile de réaliser $BP = CQ$, et même qu'il y a une infinité de choix possibles pour P et Q tels que $BP = CQ$. La difficulté est d'obtenir aussi $BP = PQ$.

1. Il est clair que, par exemple, le point Q dépendra du choix de P . Puisque les segments $[BP]$ et $[CQ]$ sont isométriques et non parallèles, Q est l'image de P par une rotation telle que B devient C . Cette rotation est-elle intéressante ? Autrement dit, son centre et son angle sont-ils fixes ?

a. Montrez que puisque $BP = CQ$, la rotation r telle que $r(B) = C$, $r(P) = Q$, a un centre fixe O , et un angle fixe.

b. Que pouvez-vous dire alors du triangle OPQ ? Déduisez-en que $BP = OP$.

c. Ce renseignement doit permettre de construire P .

2. Synthèse

Construisez les points P et Q répondant à la question en justifiant le résultat.

3. Indiquez si la construction est toujours possible, s'il y a plusieurs solutions.

Prolongement

• Pourquoi ABC n'est-il pas isocèle ?

• Et si $(\vec{AB}, \vec{AC})$ a une mesure différente de $\frac{\pi}{3}$?

PROBLÈMES

46 THÈMES : Symétries centrales et problèmes de construction

A. Préliminaire

1. Pourquoi la composée de trois symétries centrales est-elle une symétrie centrale ?
2. Pourquoi la composée de quatre symétries centrales est-elle une translation ?

B. Problèmes de construction

Utilisons les résultats du A. pour étudier les trois situations suivantes, indépendantes les unes des autres.

1. ABC est un triangle et $f = s_C \circ s_B \circ s_A$ est la composée des symétries de centres A, B et C.

Soit I le centre de la symétrie f . On pose $J = s_A(I)$, $K = s_B(J)$. Que pouvez-vous dire des triangles IJK et ABC ? Déduez-en une construction du point I.

2. Construction d'un pentagone connaissant les milieux de ses côtés.

On donne cinq points A, B, C, D, E et on cherche un pentagone IJKLM tel que A, B, C, D et E soient les milieux respectifs de [IJ], [JK], [KL], [LM] et [MI].

a. S'il y a une solution, que pouvez-vous dire de l'image de I par la composée $f = s_E \circ s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A$?

b. Construisez alors le pentagone IJKLM.

3. Construction d'un quadrilatère connaissant les milieux de ses côtés.

On donne quatre points A, B, C, D et on cherche un quadrilatère IJKL tel que A, B, C, D soient les milieux respectifs de [IJ], [JK], [KL] et [IL].

Montrez que cela n'est possible que si ABCD est un parallélogramme et qu'alors il y a une infinité de solutions.

47 THÈMES : Transformations. Famille de courbes

f est la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

1. Étudiez la fonction f et tracez sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

INDICATION : f est impaire.

2. Pour tout réel a , on définit les applications S_a et T_a du plan dans lui-même : au point M de coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on associe les points $S_a(M)$ de coordonnées $(-y + 2a; -x + 2a)$, et $T_a(M)$ de coordonnées $(x + a; y + a)$.

a. Montrez que S_a est une réflexion dont vous préciserez l'axe, et T_a une translation dont vous préciserez le vecteur.

b. Vérifiez que pour tout réel a , $S_a = T_a^{-1} \circ S_0 \circ T_a^{-1}$.

3. On note $\mathcal{C}_a$ l'image de $\mathcal{C}$ par T_a .

a. Utilisez la question 2.b. pour montrer que le point $I(a; a)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_a$.

b. Montrez qu'il existe une fonction f_a telle que l'équation de $\mathcal{C}_a$ soit $y = f_a(x)$. Vérifiez que $f_a(x) = a + f(x - a)$.



Applications linéaires

On note E l'ensemble des vecteurs du plan. Lorsqu'on associe à chaque vecteur $\vec{u}$, un vecteur $\vec{u}'$ et un seul, on dit que l'on définit une application f de E dans E, $\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \vec{u}'$.

1. Exemple

Soit k un réel non nul fixé. On note f l'application de E dans E définie par $f(\vec{u}) = k\vec{u}$; f est appelée homothétie vectorielle de rapport k .

Vérifiez que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout réel a :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \text{ et } f(a\vec{u}) = af(\vec{u}).$$

Par définition, on dit qu'une application g de E dans E est linéaire lorsqu'elle vérifie $g(\vec{u} + \vec{v}) = g(\vec{u}) + g(\vec{v})$ et $g(a\vec{u}) = ag(\vec{u})$, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel a .

2. Rotation vectorielle

θ désigne un réel et O un point fixé. À chaque vecteur $\vec{u}$ de E, on associe le vecteur $\vec{u}'$ obtenu de la manière suivante : on place le point A tel que $\vec{OA} = \vec{u}$, puis le point A' image de A par la rotation de centre O, d'angle θ ; on pose alors $\vec{u}' = \vec{OA}'$.

a. Montrez que l'application g définie par $g(\vec{u}) = \vec{u}'$ est linéaire. (On dit que g est une rotation vectorielle d'angle θ .)

b. Vérifiez que $\|g(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.

3. Réflexion vectorielle

O est un point fixe du plan et $\vec{w}$ un vecteur non nul. On note d la droite qui passe par O et qui est dirigée par $\vec{w}$. À chaque vecteur $\vec{u}$ de E, on associe le vecteur $\vec{u}'$ obtenu de la manière suivante : on place le point A tel que $\vec{OA} = \vec{u}$, puis le point A' image de A par la réflexion d'axe d ; on pose alors $\vec{u}' = \vec{OA}'$. Montrez que l'application h définie par $h(\vec{u}) = \vec{u}'$ est linéaire (h est appelée réflexion vectorielle par rapport à $\vec{w}$).

Vérifiez que pour tout vecteur $\vec{u}$, $\|h(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.

NOTE : Les rotations et les réflexions vectorielles sont des applications linéaires qui conservent la norme ; on dit que ce sont des isométries vectorielles.

COURBES PARAMÉTRÉES

CHAPITRE

2

Considérons deux fonctions, $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Associons à tout réel t de I le point $M(t)$ dont les coordonnées dans un repère orthonormal choisi sont $(x(t); y(t))$. Lorsque t décrit l'intervalle I , le point $M(t)$ décrit une courbe $\mathcal{C}$ appelée courbe paramétrée. Par exemple, la trajectoire d'un point en mouvement dans le plan est une courbe paramétrée.

Certaines courbes planes qui ne sont pas des représentations graphiques de fonctions du type $x \mapsto f(x)$, comme le cercle par exemple, sont des courbes paramétrées. Nous en verrons quelques exemples.

Le but du chapitre est de montrer, sur quelques cas simples, comment tracer une courbe paramétrée lorsqu'on connaît les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$.

SOMMAIRE

<i>Cours</i>	35
<i>Travaux pratiques d'application</i>	41
<i>Des idées, des réflexes</i>	43
<i>Exercices et problèmes</i>	44

Dans ce chapitre, les repères utilisés seront toujours des repères **orthonormaux**. Cette précision sera parfois omise.

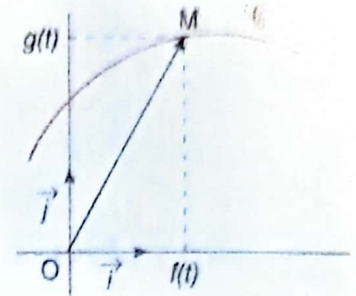
1. DÉFINITIONS. EXEMPLES

1-1 Point de vue cinématique

Pour décrire le mouvement plan d'un point mobile M , on précise à chaque instant de date t sa position par rapport à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées $(x ; y)$ de M sont des fonctions connues du temps et le système :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in I \text{ (I est un intervalle de } \mathbb{R} \text{)}, \end{cases}$$

appelé **équation horaire** du mouvement. L'ensemble $\mathcal{C}$ des positions du point mobile M est appelé **trajectoire** du point M .



1-2 Point de vue mathématique

En mathématiques, on n'utilise pas le même vocabulaire. On dit que le système ci-dessus est une **représentation paramétrique** de la courbe $\mathcal{C}$. De façon générale, on pose les définitions suivantes.

DÉFINITIONS 1 f et g sont des fonctions définies sur un même intervalle I . $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.

- L'ensemble des points de coordonnées $(f(t) ; g(t))$, où t appartient à I , est appelé **courbe paramétrée**.

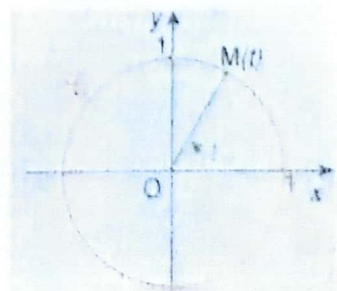
- Le système $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in I \end{cases}$ est appelé **représentation paramétrique** de cette courbe paramétrée.

- On dit que le point M de coordonnées $(f(t) ; g(t))$ est le point de **paramètre t** . On le note **$M(t)$** ou M_t .

EXEMPLE : Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad t \in [0 ; 2\pi[. \end{cases}$$

En effet, pour tout réel t , $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, donc le point $M(t)$ est sur $\mathcal{C}$. Et il est clair que lorsque t décrit $[0 ; 2\pi[$, $M(t)$ décrit tout le cercle $\mathcal{C}$.



Note

Des représentations paramétriques d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment ont été vues au chapitre 16, p. 358, du tome Obligatoire.

Commentaire

Les courbes d'équation $y = f(x)$ sont des courbes paramétrées. Il est immédiat de vérifier que la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad t \in I \end{cases}$ est la courbe représentant f restreinte à l'intervalle I .



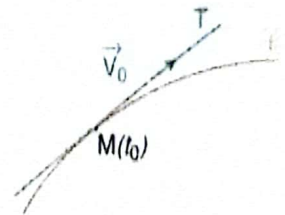
2. VECTEUR DÉRIVÉ. TANGENTE

2.1 Définitions

Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie dans un repère orthonormal par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in I. \end{cases}$

Supposons les fonctions f et g dérivables sur I . On dit que le vecteur $\vec{V}(f'(t); g'(t))$ est le vecteur dérivé en t .

Supposons, en outre, qu'en un point t_0 de I , les deux nombres $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ ne soient pas simultanément nuls. Le vecteur $\vec{V}_0(f'(t_0); g'(t_0))$ n'est donc pas nul, et nous pouvons alors considérer la droite T dirigée par $\vec{V}_0$ et passant par $M(t_0)$.

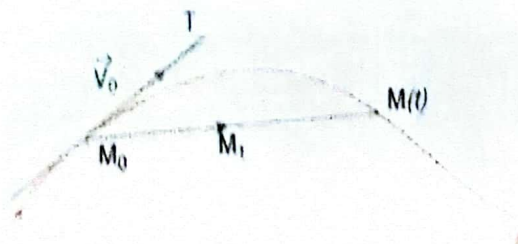


DÉFINITIONS 2 Dans les conditions énoncées ci-dessus :

- On dit que le vecteur $\vec{V}(f'(t); g'(t))$ est le **vecteur dérivé** en t de la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$.
- Lorsqu'en t_0 , le vecteur dérivé $\vec{V}_0$ n'est pas nul, on dit que la droite T passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{V}_0$ est la **tangente** à la courbe paramétrée au point $M(t_0)$.

Justifions l'origine de cette définition.

Notons M_0 le point $M(t_0)$ et considérons pour $t \neq t_0$, le vecteur $\frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{M_0 M(t)}$.



En géométrie

Ce vecteur est un **vecteur directeur** de la sécante $(M_0 M(t))$. Ses coordonnées sont :

$$\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} ; \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Lorsque t tend vers t_0 , elles ont pour limite $(f'(t_0) ; g'(t_0))$.

Ainsi, lorsque $M(t)$ tend vers M_0 , le vecteur $\vec{V}_0$ apparaît comme la position limite des vecteurs directeurs des sécantes $(M_0 M(t))$. Donc la droite T apparaît comme la position limite des sécantes $(M_0 M(t))$, d'où son nom, en conformité avec ce qui a été dit pour les tangentes aux courbes d'équation $y = f(x)$.

En cinématique

$\vec{M_0 M_t} = \frac{1}{t - t_0} \vec{M_0 M(t)}$ est le vecteur **vitesse moyenne** entre les instants de dates t_0 et t .

$\vec{V}_0$, limite des vecteurs vitesse moyenne, est le vecteur **vitesse instantanée** à l'instant de date t_0 . Le sens de $\vec{V}_0$ est celui du mouvement.

2.2 Exemple : tangente au cercle

Nous avons vu au paragraphe 1.3 que la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in [0 ; 2\pi[\end{cases}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Pour une valeur t_0 du paramètre, en posant

$f(t) = \cos t$ et $g(t) = \sin t$, nous obtenons :

$f'(t_0) = -\sin t_0$, $g'(t_0) = \cos t_0$. Quel que soit t_0 ,

$f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ ne sont pas tous les deux nuls, donc

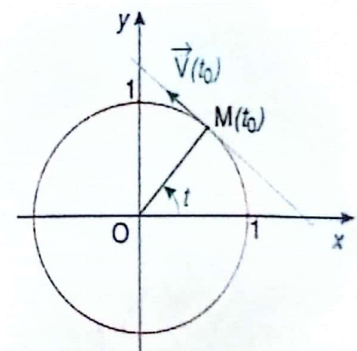
la droite T passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur

$\vec{V}_0(-\sin t_0 ; \cos t_0)$, est tangente au cercle en $M(t_0)$.

Remarquons que le produit scalaire $\vec{OM}(t_0) \cdot \vec{V}_0$ est nul, car égal à :

$$-\sin t_0 \cos t_0 + \cos t_0 \sin t_0.$$

Les droites (OM_0) et T sont donc perpendiculaires. Nous retrouvons la définition connue de la tangente en M_0 , à savoir la droite passant par M_0 et perpendiculaire au rayon.



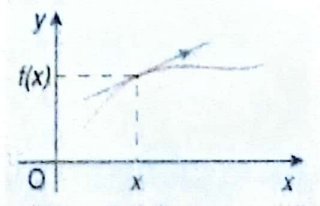
Commentaire

Cas des courbes d'équation $y = f(x)$

Nous avons vu qu'une représentation paramétrique d'une

telle courbe est $\begin{cases} x = t \\ y = f(t), t \in I. \end{cases}$

Lorsque f est dérivable sur I , le vecteur dérivé en t_0 a pour coordonnées $(1 ; f'(t_0))$; il est donc non nul et il y a donc une tangente en $M(t_0 ; f(t_0))$.



3. EXEMPLE DE TRACÉ D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 2 \\ y = 3t - t^3, \quad t \in [-2; 2]. \end{cases}$$

Voici les différentes étapes qui conduisent au tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

Posons $f(t) = 3t^2 - 2$ et $g(t) = 3t - t^3$.

3.1 Étude des fonctions f et g sur l'intervalle $[-2; 2]$

Établissons un tableau de variation commun pour ces deux fonctions.

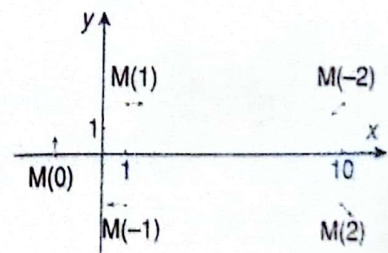
Pour tout t , $f'(t) = 6t$ et $g'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1 - t^2)$. Ainsi :

t	-2	-1	0	1	2				
f'	-12	-	-6	-	0	+	6	+	12
f	10		1		-2		1		10
g	2		-2		0		2		-2
g'	-9	-	0	+	3	+	0	-	-9

3.2 Utilisation du tableau de variation pour tracer la courbe

1. Première étape : on place les cinq points correspondant aux valeurs du paramètre qui apparaissent dans le tableau des variations simultanées.

$M(-2)$	$M(-1)$	$M(0)$	$M(1)$	$M(2)$
$(10; 2)$	$(1; -2)$	$(-2; 0)$	$(1; 2)$	$(10; -2)$



2. Deuxième étape : on trace le vecteur dérivé en chacun des points.

Lorsque ce vecteur n'est pas nul, il indique « le sens du mouvement » et c'est un vecteur directeur de la tangente au point.

Pratiquement, lorsqu'on veut seulement tracer la tangente, on peut remplacer le vecteur dérivé par un vecteur non nul colinéaire et de même sens.

Ainsi, par exemple, le vecteur dérivé pour $t = -2$ a pour coordonnées $(-12; -9)$.

Pour des commodités de dessin, nous préférons le remplacer par le vecteur de coordonnées $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$.

Notez que les tangentes en $M(-1)$, $M(1)$ sont horizontales ($g'(-1) = 0$, $g'(1) = 0$), et que la tangente au point $M(0)$ est verticale ($f'(0) = 0$).

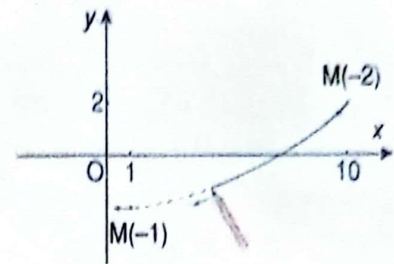
En $M(-1)$, nous avons choisi pour vecteur directeur le vecteur $(-1; 0)$; en $M(1)$, le vecteur $(1; 0)$; ...

3. Troisième étape : on trace la courbe sur les intervalles où f et g sont monotones toutes les deux.

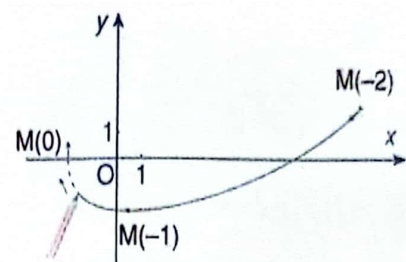
Ici, il s'agit des intervalles $[-2; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; 1]$ et $[1; 2]$.

a) Dans l'intervalle $[-2; -1]$, f et g sont décroissantes toutes les deux : « $M(t)$ se déplace de $M(-2)$ à $M(-1)$ de façon que son abscisse décroisse, donc vers la *gauche*, et de façon que son ordonnée décroisse, donc vers le *bas*. »

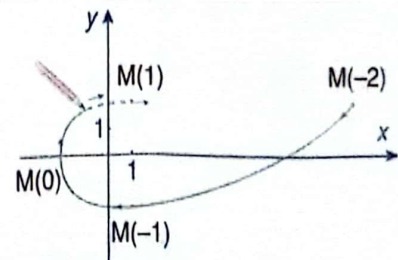
D'où le tracé indiqué par la figure.



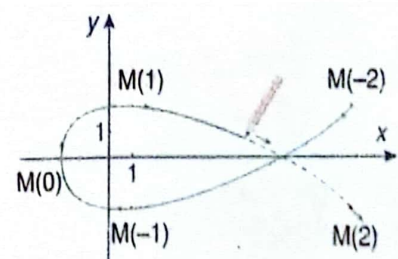
b) Dans l'intervalle $[-1; 0]$, l'abscisse de $M(t)$ décroît et son ordonnée croît, donc : « à partir de $M(-1)$ jusqu'au point $M(0)$, $M(t)$ se déplace vers la *gauche* (l'abscisse décroît) et vers le *haut* (l'ordonnée croît) ». D'où le tracé indiqué par la figure.



c) Dans l'intervalle $[0; 1]$, l'abscisse de $M(t)$ croît et l'ordonnée croît. D'où le tracé indiqué par la figure.



d) Dans l'intervalle $[1; 2]$, l'abscisse de $M(t)$ croît et l'ordonnée décroît. D'où le tracé indiqué par la figure.



Commentaires

- Les tracés ont été réalisés dans « le sens des t croissants ».
- L'orientation des vecteurs dérivés (ou des vecteurs colinéaires à ces vecteurs et de même sens) est utile pour le tracé.

3.3 Éléments de symétrie de la courbe

On constate que l'axe des abscisses semble être un axe de symétrie de la courbe. C'est effectivement le cas, car l'intervalle $[-2; 2]$ est centré en zéro, et pour tout t de cet intervalle, nous obtenons :

$$f(-t) = 3(-t)^2 - 2 = f(t)$$

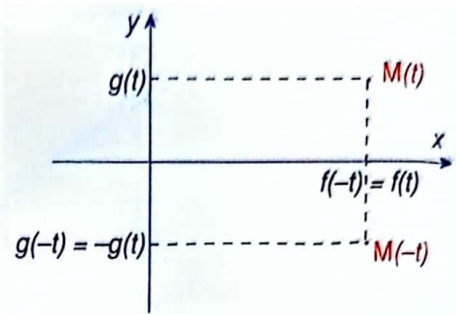
$$g(-t) = 3(-t) - (-t)^3 = -g(t).$$

Il en résulte que les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont même abscisse et des ordonnées opposées ; ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

La portion de la courbe décrite lorsque t varie de -2 à 0 est symétrique de la portion de courbe décrite lorsque t varie de 0 à 2 .

Nous aurions donc pu réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0; 2]$.

REMARQUE : En pratique, on cherche à réduire l'intervalle d'étude évidemment avant l'étude elle-même. Cette année, conformément au programme, les indications utiles vous seront données lorsque cette réduction sera possible.



Commentaire

La courbe « se coupe elle-même » en un point appelé point double. De manière générale, il y a point double lorsque pour deux valeurs distinctes t_1 et t_2 du paramètre, $f(t_1) = f(t_2)$ et $g(t_1) = g(t_2)$.

M. BOUSSOU
Mathématiques
LVND-KL

Les travaux pratiques 1 à 2 font partie du programme.

TP 1

UNE COURBE DE LISSAJOUS

■ Le savez-vous ? ■

Lissajous (Jules Antoine), physicien français (1822-1880). On lui doit un traité sur l'étude optique des mouvements vibratoires.

En Mécanique, les courbes de Lissajous représentent la trajectoire d'un point dont le mouvement résulte de la superposition de deux mouvements vibratoires sinusoïdaux de même centre et ayant des directions perpendiculaires.

On considère la courbe paramétrée définie dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

par la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. a) Déterminez les périodes des fonctions $t \mapsto \sin 2t$ et $t \mapsto \sin 3t$ et montrez que 2π est une période commune à ces deux fonctions.

b) t_0 est une valeur du paramètre ; montrez que les points $M(t_0)$ et $M(t_0 + 2\pi)$ sont confondus. Que peut-on dire des points $M(t_0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$?

c) Déduez-en que l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in [a; b]$ est identique à l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in [a + 2\pi; b + 2\pi]$. Que peut-on dire des ensembles des points $M(t)$ pour $t \in [a + 2k\pi; b + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$?

d) Montrez que l'on obtient tous les points de la courbe en considérant les points $M(t)$ pour $t \in [-\pi; \pi]$.

2. Montrez que les points $M(t_0)$ et $M(-t_0)$ sont symétriques par rapport à l'origine ; déduisez-en que la portion de courbe correspondant à $t \in [-\pi; 0]$ est symétrique, par rapport à l'origine, de la portion de courbe correspondant à $t \in [0; \pi]$.

3. Montrez que les points $M(t_0)$ et $M(\pi - t_0)$ sont symétriques par rapport à (Oy) .

Déduez-en que la portion de courbe correspondant à $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ est symétrique, par rapport à (Oy) , de celle qui correspond à $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Étudiez les fonctions $t \mapsto \sin 2t$ et $t \mapsto \sin 3t$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et établissez un tableau des variations simultanées de ces fonctions.

5. Montrez que la portion de courbe correspondant à $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ coupe l'axe (Ox) en un point ; déterminez ses coordonnées et un vecteur tangent en ce point.

6. Tracez la portion de courbe correspondant à $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (unité graphique : 5 cm).

7. À l'aide des propriétés géométriques de la courbe, obtenues en 2. et 3., indiquez comment on peut tracer toute la courbe à partir du tracé réalisé en 6.

8. Démontrez que cette courbe admet un second axe de symétrie.

Commentaire

La courbe Γ que vous venez de tracer s'obtient facilement sur l'écran d'un oscilloscope en appliquant une d.d.p. sinusoïdale $V_1 = \sin 2\omega t$ pour le balayage horizontal et une d.d.p. sinusoïdale $V_2 = \sin 3\omega t$ pour le balayage vertical.

TP 2

COURBES DE BÉZIER

■ Le savez-vous ? ■
Vers 1962, Pierre Bézier, ingénieur chez Renault, mit au point une méthode pour obtenir le tracé de courbes planes (ou de l'espace) soumises à certaines conditions.

L'idée directrice est de tracer une courbe en déplaçant le barycentre d'un certain nombre de points affectés de coefficients dépendant d'une variable, appelés « points de contrôle ». En modifiant la position des points de contrôle, on déforme la courbe jusqu'à l'obtention du tracé désiré.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère les points M_0, M_1, M_2 . t est un réel appartenant à $[0; 1]$.

A_1 est le barycentre de $(M_0, 1-t), (M_1, t)$, A_2 celui de $(M_1, 1-t), (M_2, t)$, et M celui de $(A_1, 1-t), (A_2, t)$.

Démontrez que $\overrightarrow{OM} = (1-t)^2 \overrightarrow{OM_0} + 2t(1-t) \overrightarrow{OM_1} + t^2 \overrightarrow{OM_2}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M obtenus lorsque t décrit $[0; 1]$ est appelé courbe de Bézier associée aux trois points de contrôle M_0, M_1, M_2 .

2. On suppose dans cette question que $M_0 = O, M_1 = B(4; 8), M_2 = C(7; 4)$.

a) Déterminez les coordonnées de M .

On obtient la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = f(t) = -t^2 + 8t \\ y = g(t) = -12t^2 + 16t, \quad t \in [0; 1]. \end{cases}$$

b) Étudiez les variations des fonctions f et g pour t élément de l'intervalle $[0; 1]$.

c) Vérifiez que $\mathcal{C}$ passe par O et est tangente en O à (OB) , puis que $\mathcal{C}$ passe par C et est tangente en C à (BC) . La courbe $\mathcal{C}$ passe-t-elle par B ?

d) Déterminez, en fonction de t , les coordonnées des points A_1 et A_2 . Vérifiez que $\mathcal{C}$ est tangente en M à (A_1A_2) .

e) Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

3. On désire construire une courbe de Bézier $\mathcal{C}'$ répondant aux conditions suivantes :

• les points de contrôle sont $O, B'(\frac{7}{2}; b), C(7; 4)$;

• au point D d'abscisse $\frac{7}{4}$, $\mathcal{C}'$ admet une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{7}$.

a) Déterminez b puis l'ordonnée du point D .

b) Démontrez que $\mathcal{C}'$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = h(t) = 7t \\ y = \ell(t) = 2t^2 + 2t, \quad t \in [0; 1]. \end{cases}$$

c) Étudiez h et ℓ lorsque t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

d) Tracez la courbe $\mathcal{C}'$.

e) Démontrez que $\mathcal{C}'$ est l'arc d'une parabole $\mathcal{P}$; précisez les coordonnées du sommet S de cette parabole.

DES IDÉES DES RÉFLEXES ...

Des idées à retenir

- La trajectoire d'un point mobile en mouvement dans le plan est une courbe paramétrée.
- Se donner une courbe paramétrée $\mathcal{C}$, c'est se donner un repère orthonormal, et deux fonctions f, g définies sur le **même** intervalle I de $\mathbb{R}$; $\mathcal{C}$ est alors l'ensemble de tous les points de coordonnées $(f(t) ; g(t))$, t décrivant I .
- Le **vecteur dérivé** au point $M(t_0)$ n'existe que si $f'(t_0) \neq 0$, ou $g'(t_0) \neq 0$. Dans ce cas, $\mathcal{C}$ a une **tangente** en $M(t_0)$, cette tangente est la droite qui passe par $M(t_0)$ et qui est dirigée par le vecteur dérivé.
- Une même courbe paramétrée peut avoir plusieurs représentations paramétriques.
Exemple : La droite d dirigée par le vecteur $\vec{u}(2 ; 3)$ et qui passe par le point $A(1 ; 1)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Mais on peut dire aussi que d est la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{v}(4 ; 6)$, puisque ce vecteur non nul est colinéaire à $\vec{u}$. Une représentation paramétrique de d est alors :

$$\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 6t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
- Les courbes d'équation cartésienne $y = f(x)$ sont des courbes paramétrées particulières. Mais une courbe paramétrée n'est pas toujours une courbe d'équation $y = f(x)$.

Exemple : Le cercle.

Des réflexes à avoir

- Pensez que le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon a , est la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, \quad t \in [0 ; 2\pi[. \end{cases}$
- **Pour tracer une courbe paramétrée** $x = f(t)$, $y = g(t)$, après avoir dressé le tableau des variations simultanées de f et g , pensez :
 - à travailler par intervalles, tels que sur chacun de ces intervalles, f et g soient toutes les deux monotones ;
 - à placer des points particuliers, et en chacun de ces points, lorsque cela est possible, tracer la tangente ;
 - à tracer la courbe dans le sens des t croissants.
- Pensez que certaines courbes paramétrées peuvent avoir une équation cartésienne.
Exemple : La courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad t \in [0 ; 2\pi[\end{cases}$$
est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O (origine du repère) et de rayon 1. Donc $\mathcal{C}$ a aussi pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Notez qu'en passant du « paramétrique » au « cartésien » on perd de l'information, du moins pour la cinématique, car, par exemple, la représentation paramétrique indique le sens de parcours de la trajectoire, tandis que l'équation cartésienne ne le donne pas.

Q.C.M.

Une seule des réponses proposées est exacte

a

b

c

Q1 La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + t^3, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Au point $M(1)$, $\mathcal{C}$ a une tangente dont un vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées ...

$(-1; 2)$

$(0; 4)$

$(1; 0)$

Q2 La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = t + \sin 2t \\ y = 2t - \cos t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\mathcal{C}$ a une tangente dont le coefficient directeur est ...

2

-3

1

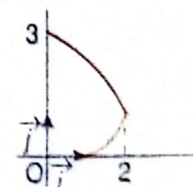
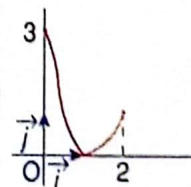
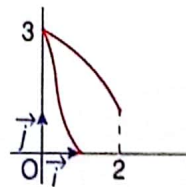
Q3 La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [0; 4]. \end{cases}$$

Le tableau des variations de f et de g est :

t	0	2	4
f	2	0	1
g	1	3	0

Alors $\mathcal{C}$ est la courbe :



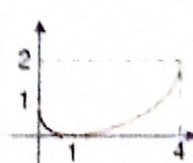
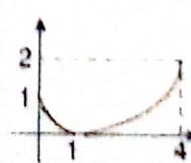
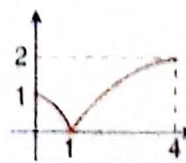
Q4 La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [0; 4]. \end{cases}$$

Le tableau des variations de f et g est :

t	0	2	4
f'	0	-	-1
f	4	1	0
g	2	0	1
g'	-1	0	+

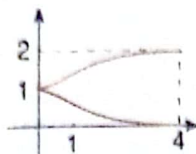
Alors $\mathcal{C}$ est la courbe :



Q.C.M. (suite)

Q5 La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [0; 8]. \end{cases}$$



Un tableau possible des variations de f et g est :

t	0	4	8
f	0	4	4
g	0	1	2

Réponses p. 175

POUR S'ENTRAÎNER

Représentation paramétrique et équation cartésienne

Pour les exercices 1 à 4, la courbe paramétrée proposée a une équation cartésienne simple. Donnez cette équation et représentez la courbe.

1 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = 1 + \ln t, t \in]0; +\infty[. \end{cases}$

UNE MÉTHODE : Trouver une relation entre x et y dans laquelle t ne figure pas. Bien préciser le domaine dans lequel x varie et celui dans lequel y varie.

2 $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2t^2, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = \frac{1}{e^t + 1}, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = 1 - 2 \sin^2 t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Tangente à une courbe paramétrée

Pour les exercices 5 à 8, trouvez une équation cartésienne de la tangente à la courbe paramétrée au point M de paramètre donné.

5 $\begin{cases} x = t^2 + 4t \\ y = t + \frac{1}{t}, \text{ en } M(1). \end{cases}$

6 $\begin{cases} x = \cos t + 2 \sin t \\ y = \sin 2t - \cos t, \text{ en } M\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

7 $\begin{cases} x = \tan t \\ y = \cos t, \text{ en } M\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

8 $\begin{cases} x = t - \ln t \\ y = e^{-2t}, \text{ en } M(1). \end{cases}$

Tracés de courbes paramétrées

Pour les exercices 9 à 12, tracez les courbes paramétrées définies par :

9 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - 2t + 2, t \in [-1; 2]. \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = 2t^3 - 3t^2 \\ y = (t+1)^2, t \in [-2; 2]. \end{cases}$

11 $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - 3t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

12 $\begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t^3}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Éléments de symétrie. Tracés

13 $\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \cos 3t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Étudiez les positions respectives des points $M(t)$, $M(-t)$, $M(\pi+t)$, $M(\pi-t)$.

Déduisez-en les éléments de symétrie de $\mathcal{C}$.

14 $\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t}, t \in]0; +\infty[. \end{cases}$$

Étudiez les positions respectives de $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$.

Déduisez-en que la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

15 $\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = t^2, t \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

1. Étudiez les positions respectives des points $M(t)$ et $M(-t)$. Déduisez-en que $\mathcal{C}$ possède un axe de symétrie.

2. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

16 $\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t}, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Étudiez les positions respectives de $M(t)$ et $M(-t)$. Déduisez-en que $\mathcal{C}$ possède un axe de symétrie.

2. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

17 $\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = t^3 + 2t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Étudiez les positions respectives de $M(t)$ et $M(-t)$. Déduisez-en que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.

2. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

18 **BAC** 1. Dans un repère orthonormal, on considère le point G_t de coordonnées $(x(t); y(t))$ où :

$$x(t) = \frac{1}{3}(\cos 2t + 2 \cos t), y(t) = \sin 2t.$$

Pour tout t réel, comparez $G_{t+2\pi}$ et G_t , puis G_{-t} et G_t .

2. Étudiez les variations des fonctions $x \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

3. Tracez la courbe Γ , ensemble des points G_t pour $t \in [-\pi; \pi]$. En particulier, prenez soin de préciser les points de contact des tangentes parallèles à l'un des axes de coordonnées.

19 **BAC** Le plan P est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de tracer la courbe $\mathcal{C}$ ensemble des points du plan dont les coordonnées sont définies en fonction de la variable réelle t par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t + \sin 2t. \end{cases}$$

1. Montrez que l'on passe du point de paramètre t au point de paramètre $t + \frac{2\pi}{3}$ par une rotation de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$.

2. Montrez que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

3. On appelle I et A les points correspondant respectivement à $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{3}$. Construisez la tangente en I à $\mathcal{C}$.

On admettra que la tangente en A à $\mathcal{C}$ existe et passe par O . Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

20 $\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = \sin t \\ y = g(t) = \tan t, t \in \mathbb{R}, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

1. Étudiez les positions respectives de $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$.

2. Étudiez les positions respectives de $M(t)$ et $M(-t)$.

3. Étudiez les positions respectives de

$$M\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \text{ et } M\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

4. Déduisez des questions précédentes que pour tracer la courbe $\mathcal{C}$, il suffit de savoir tracer la partie de $\mathcal{C}$ constituée des points $M(t)$ pour t variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

5. Étudiez les variations de f et g sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Interprétez graphiquement les limites de f et g en $\frac{\pi}{2}$.

7. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

8. Vérifiez qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est :

$$y^2(1 - x^2) = x^2.$$

■ Courbe définie par ses tangentes ■

Pour les exercices 21 à 24, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminez une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$ passant par le point $A(t_0)$ et admettant en chacun de ses points $M(t)$ un vecteur dérivé $\vec{V}(t)$.

21 $\vec{V}(t) = (\cos t)\vec{i} + (2 \sin 2t)\vec{j}; (t \in \mathbb{R}), t_0 = \frac{\pi}{2}, A(1; 1).$

22 $\vec{V}(t) = (t^2 - 2t)\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j}; (t \in \mathbb{R}), t_0 = 1, A(1; 1).$

23 $\vec{V}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j}; (t \in \mathbb{R}), t_0 = 0, A(1; 1).$

24 $\vec{V}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\tan t)\vec{j}; \left(t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], t_0 = 0, A(1; 1).$

25 Paramétrage d'un triangle, d'un quadrilatère

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. ABC est un triangle dont on connaît les coordonnées des sommets :

$$A(1; 2), B(3; 1), C(2; 4).$$

Trouvez une représentation paramétrique du contour de ce triangle, de la forme :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [0; 3]. \end{cases}$$

INDICATION : La fonction f est une fonction affine par morceaux :

$$\begin{cases} f(t) = \dots & \text{lorsque } t \in [0; 1] \\ f(t) = \dots & \text{lorsque } t \in [1; 2] \\ f(t) = \dots & \text{lorsque } t \in [2; 3]. \end{cases}$$

De même pour la fonction g .

26 Une cycloïde

$\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = t - \sin t \\ y = g(t) = 1 - \cos t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.a. Par quelle transformation géométrique passe-t-on de $M(t)$ à $M(t + 2\pi)$?

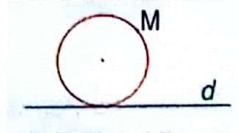
b. Étudiez les positions respectives de $M(t)$ et $M(-t)$.

c. Déduisez de a. et b. qu'il suffit, pour savoir tracer la courbe $\mathcal{C}$, de tracer la partie de $\mathcal{C}$ constituée des points $M(t)$ pour t variant de 0 à π .

2. Étudiez les fonctions f et g sur $[0; \pi]$.

3. Tracez la partie de $\mathcal{C}$ constituée des points $M(t)$ pour t variant de -2π à 2π .

NOTE : Un cercle roule sans glisser sur une droite d . M est un point fixe du cercle. La trajectoire du point M est une cycloïde.



27 L'astroïde

$\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos^3 t \\ y = g(t) = \sin^3 t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.a. Étudiez les positions respectives des points $M(t)$, $M(t + 2\pi)$, $M(-t)$.

b. Étudiez les positions respectives des points $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$.

c. Déduisez de a. et b. qu'il suffit, pour savoir tracer la courbe $\mathcal{C}$, de tracer la partie de $\mathcal{C}$ constituée des points $M(t)$ pour t variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

2. Étudiez les variations de f et g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Vérifiez que le vecteur directeur de la tangente en $M(t)$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(t) = (-\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$.

Déduisez-en que $\mathcal{C}$ admet au point $A(0; 1)$ une tangente verticale et au point $B(1; 0)$ une tangente horizontale.

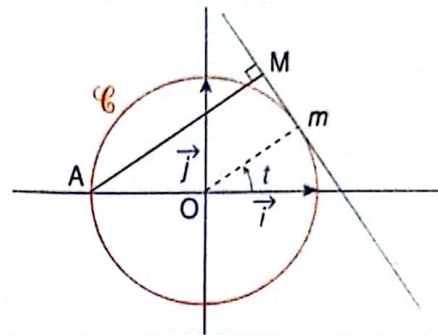
4. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

5. Étudiez les positions respectives de $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Déduisez-en que la droite d'équation $y = x$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$. Quels sont tous les axes de symétrie de $\mathcal{C}$?

28 Une cardioïde

Dans le plan muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées $(-1; 0)$. À tout point m de $\mathcal{C}$, on associe le point M, projeté orthogonal de A sur la tangente en m à $\mathcal{C}$. On appelle t une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{Om})$.



1. Démontrez que le point M a pour coordonnées :

$$(\cos t - \sin^2 t; \sin t \cos t + \sin t).$$

Lorsque m décrit $\mathcal{C}$, l'ensemble des points M est une courbe $\mathcal{C}'$ définie comme la courbe paramétrée ensemble des points $M(t)$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$.

2. Étudiez les positions relatives de $M(t)$, $M(t + 2\pi)$, $M(-t)$. Déduisez-en qu'il suffit, pour tracer la courbe $\mathcal{C}'$, de limiter les variations de t à l'intervalle $[0; \pi]$.

3. Tracez $\mathcal{C}'$ en précisant les tangentes aux points de paramètres $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. On admet qu'au point de paramètre π , $\mathcal{C}'$ a une tangente horizontale.

NOTE : Pourquoi la courbe $\mathcal{C}'$ est-elle appelée cardioïde ?

29 Une spirale

$\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = e^t \cos t \\ y = g(t) = e^t \sin t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

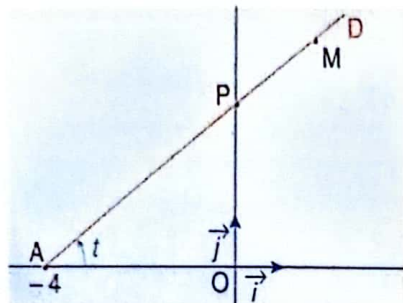
1. Par quelles transformations du plan les points $M(t + 2\pi)$ et $M(t - 2\pi)$ se déduisent-ils du point $M(t)$?

2. Étudiez f et g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

3. Tracez la partie de la courbe $\mathcal{C}$ constituée des points $M(t)$ pour t variant de 0 à 2π . Déduisez-en alors la partie de la courbe $\mathcal{C}$ constituée des points $M(t)$ lorsque t varie de -2π à 4π .

30 La conchoïde de Nicomède

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(-4; 0)$ et une demi-droite D , passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$ avec $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. D coupe $(O; \vec{j})$ en P . Soit M le point de D qui n'appartient pas au segment $[AP]$ et tel que $PM = 2$.



1. Exprimez les coordonnées de P puis celles de M en fonction de t .

2. Lorsque t varie, l'ensemble des points M est une courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x = f(t) = 2 \cos t \\ y = g(t) = 4 \tan t + 2 \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ cette courbe.

a. Pour tracer la courbe $\mathcal{C}$, il suffit de savoir tracer la partie de $\mathcal{C}$ constituée des points $M(t)$ pour t variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$,

$\frac{\pi}{2}$ exclu. Justifiez cette affirmation.

b. Étudiez les variations de f et g sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c. Étudiez les limites de f et g en $\frac{\pi}{2}$.

Interprétez graphiquement les résultats obtenus.

d. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

NOTE : La courbe épouse la forme d'une coquille, d'où son nom. Nicomède est un géomètre grec qui vécut entre -200 et -100. Plusieurs rois de Bithynie (Asie Mineure) portèrent ce nom.

PROBLÈMES

31 **BAC** THÈMES : Équations différentielles. Courbes paramétrées. Complexes

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

1. Résolvez l'équation différentielle $f''(x) + 4f(x) = 0$ [1], x étant une variable réelle.

2. Déterminez la solution f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{2}{3}$.

3. Le but de cette question est de résoudre l'équation : $g''(x) + 4g(x) = 2 \cos x$ [2].

a. Montrez que la fonction h définie par $h(x) = \frac{2}{3} \cos x$ est solution de l'équation [2].

b. Démontrez que g est solution de [2] si et seulement si la fonction $(g - h)$ est solution de [1].

c. Déduisez-en toutes les solutions de [2].

d. Déterminez la solution g de [2] définie par : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.

Partie B

Dans le plan muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 9 cm), on considère les points A, B, M, N, Q , d'affixes respectives $1, -1, z, z^2, \frac{1}{z}$, z étant un complexe de module 1 et d'argument t , t réel.

1. Soit S le point d'affixe $Z = z^2 + z + \frac{1}{z}$. Montrez que les points B, M et S sont alignés.

2. Calculez en fonction de t l'affixe de l'isobarycentre de M, N, Q . Précisez sa partie réelle et sa partie imaginaire.

3. On considère le point $G(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3} (\cos 2t + 2 \cos t) \\ y(t) = \frac{1}{3} \sin 2t. \end{cases}$$

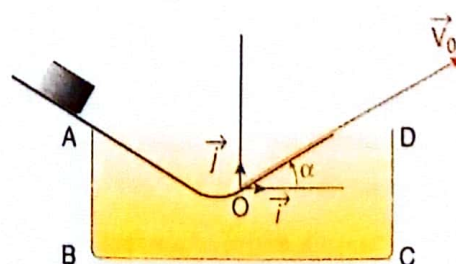
Étudiez les positions respectives de $G(t + 2\pi)$ et $G(t)$, puis de $G(-t)$ et $G(t)$.

4. Étudiez les variations des fonctions x et y sur $[0; \pi]$.

5. Tracez la courbe $\mathcal{C}$, ensemble des points $G(t)$, t décrivant $\mathbb{R}$. En particulier, précisez les points de contact des tangentes parallèles à l'un des axes de coordonnées.

32 THÈMES : Équations différentielles. Courbes paramétrées

Au sortir d'un four pour traitement thermique, des pièces sont trempées dans un bain d'huile. Elles glissent sur une rampe d'accès. On se propose de modéliser le mouvement de la pièce dans le bain d'huile au sortir de la rampe. La figure représente la section de la cuve par un plan vertical.



Dans cette modélisation, on étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le plan vertical muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On choisit $\vec{j}$ «vertical». On néglige la poussée d'Archimède. Ce point est soumis à son poids et à la force de frottement représentée par le vecteur $(-k\vec{V})$. La constante positive k est le coefficient de viscosité et $\vec{V}$ le vecteur vitesse de M à l'instant de date t .

À l'instant de date $t = 0$:

- le point M est en O ;
- le vecteur vitesse $\vec{V}_0$ est tel que $\|\vec{V}_0\| = 10$ et $(\vec{i}, \vec{V}_0) = \frac{\pi}{6}$.

Les coordonnées x et y de M sont des fonctions du temps t ; si l'on note x', x'', y', y'' leurs dérivées par rapport à t , la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M conduit aux équations différentielles :

$$\begin{cases} mx'' = -kx' \\ my'' = -ky' - mg \end{cases}, g \text{ accélération de la pesanteur.}$$

A. On donne : $k = 2, m = 1, g = 10$.

1. Montrez que dans ce cas, on obtient les équations différentielles $[E_1]$ et $[E_2]$, la variable t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$\begin{cases} x'' = -2x' & [E_1] \\ y'' = -2y' - 10 & [E_2] \end{cases}$$

2. Résolvez l'équation différentielle $[E_1]$.

3.a. Déterminez une fonction polynôme de degré 1 solution particulière de $[E_2]$.

b. Résolvez l'équation différentielle $[E_2]$.

4.a. Déterminez la fonction f solution de $[E_1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 5\sqrt{3}.$$

b. Déterminez la fonction g solution de $[E_2]$ telle que :

$$g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 5.$$

B. On considère, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, la courbe $\mathcal{C}$ ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} x = f(t) = \frac{5}{2}\sqrt{3}(1 - e^{-2t}) \\ y = g(t) = 5(1 - e^{-2t}) - 5t, \quad t \in [0; +\infty[. \end{cases}$$

1. Étudiez les variations des fonctions f et g ; précisez les limites de f et de g quand t tend vers plus l'infini. Interprétez graphiquement le résultat.

2. Déterminez le coefficient directeur de la tangente au point O. Interprétez le résultat à l'aide du vecteur $\vec{V}_0$.

3. Complétez le tableau de valeurs suivant :

t	0,1	0,2	0,4	0,6	1	1,5	2	2,5	3
x									
y									

On donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} .

4. Tracez l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ constitué des points $M(t)$ pour t variant de 0 à 3.

5. On suppose que la distance du point O à la paroi CD est 4,5 cm. Le point M peut-il rencontrer la paroi CD ?

D'après BTS Conception de produits industriels.



Notion d'intégrale curviligne

A. Définitions

1. Une fonction f à deux variables réelles, définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, associe à chaque couple $(x; y)$ un nombre réel et un seul, noté $f(x, y)$. Exemple : $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = xy$.

2. Considérons un arc de courbe paramétrée, $\widehat{AB}$, défini par la donnée de deux fonctions $x(t), y(t)$, dérivables sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et considérons deux fonctions, f et g , à deux variables.

On appelle intégrale curviligne de $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ relative à ce paramétrage de $\widehat{AB}$, le nombre :

$$\int_a^b [f(x(t), y(t)) x'(t) + g(x(t), y(t)) y'(t)] dt.$$

B. Exemples

1. Dans un repère orthonormal, les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(1; 1), (2; 3)$.

a. Vérifiez que $[AB]$ peut être défini paramétriquement par :

$$x(t) = t + 1, y(t) = 2t + 1, t \in [0; 1].$$

b. Calculez l'intégrale curviligne de $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ relative à ce paramétrage de $[AB]$ lorsque $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = x + y$.

c. Vérifiez que $[AB]$ peut aussi être défini paramétriquement par :

$$x(t) = \frac{t}{2} + 1, y(t) = t + 1, t \in [0; 2].$$

Calculez l'intégrale curviligne de $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ relative à ce nouveau paramétrage de $[AB]$, les fonctions f et g étant celles définies à la question b. Constatez que le résultat obtenu est le même que celui obtenu en b.

NOTE : Sur cet exemple, on voit que l'intégrale curviligne ne dépend pas des paramétrages choisis. Ceci est général, pour des paramétrages « usuels ». On parle alors de l'intégrale curviligne de $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ sur l'arc $\widehat{AB}$ parcouru de A vers B et on note $\int_{\widehat{AB}} f(x, y) dx + g(x, y) dy$ cette intégrale curviligne.

2. Dans un repère orthonormal, les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(1; 0), (-1; 0)$. On considère le demi-cercle $\widehat{AB}$ de centre O, de rayon 1, situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$, et parcouru de A vers B. Après avoir trouvé un paramétrage de cet arc $\widehat{AB}$, calculez l'intégrale curviligne sur $\widehat{AB}$ de $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ lorsque $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = x + y$.

COMPLÉMENTS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

CHAPITRE

3

Ce court chapitre de travaux pratiques, voulu comme tel par le programme, n'a pas la structure habituelle annoncée dans l'avant-propos.

Il traite essentiellement des points suivants : transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$, conversions de sommes trigonométriques en produits, exemples d'utilisation des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane. De tels exemples ont déjà été donnés lors du chapitre NOMBRES COMPLEXES du tome *Enseignement obligatoire* ; d'autres exemples seront vus dans les chapitres suivants de ce manuel.

SOMMAIRE

<i>Travaux pratiques</i>	51
<i>Exercices et problèmes</i>	61

Tous les travaux pratiques proposés font partie du programme.

PREMIÈRE PARTIE : Compléments d'algèbre

TP 1

TRANSFORMATION DE $a \cos \theta + b \sin \theta$

De nombreux problèmes, en Physique notamment, conduisent à une équation $a \cos \theta + b \sin \theta = c$, dans laquelle l'inconnue est le nombre θ . En général, pour résoudre une telle équation, on l'écrit sous la forme $r \cos (\theta - \varphi) = c$; r et φ étant connus, on sait alors trouver $\theta - \varphi$, donc θ .

Nous allons voir comment on peut opérer pour obtenir l'écriture $r \cos (\theta - \varphi) = c$.

1-1 Transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$ (a, b, θ , réels)

1. Par utilisation des nombres complexes

La méthode qui suit repose sur la remarque suivante : $a \cos \theta + b \sin \theta$ est la partie réelle du complexe $e^{i\theta} (a - ib)$.

a) Justifiez cette affirmation.

b) On suppose que a et b ne sont pas tous deux nuls.

On pose $r = |a + ib|$ et $\varphi = \arg(a + ib)$. Montrez alors que pour tout réel θ :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = r \cos (\theta - \varphi).$$

c) **Application** : En utilisant la question b), transformez chacune des expressions :

$$\bullet \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \quad \bullet \cos 3\theta + \sin 3\theta \quad \bullet 2 \cos \theta - 3 \sin \theta.$$

INDICATION : Pour la dernière expression, trouver une valeur approchée de φ (en radians) à l'aide d'une calculatrice.

2. Par le produit scalaire

La méthode qui suit repose sur la remarque suivante : $a \cos \theta + b \sin \theta$ est de la forme $xx' + yy'$, et peut donc s'exprimer comme un produit scalaire. Dans un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, considérons les points $M(\cos \theta; \sin \theta)$ et $N(a; b)$.

a) Vérifiez que $a \cos \theta + b \sin \theta = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$.

b) Posez $r = ON$ et $\varphi = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})$.

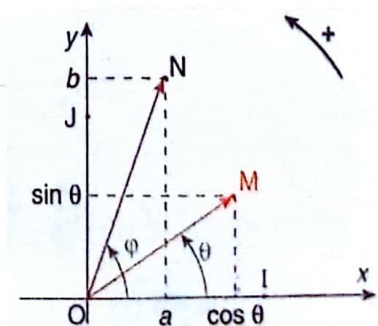
Déduisez alors de a) que $a \cos \theta + b \sin \theta = r \cos (\theta - \varphi)$.

3. En posant $\tan \varphi = \frac{b}{a}$

Supposons $a \neq 0$.

a) Vérifiez qu'alors, en utilisant la représentation graphique de la fonction tangente,

il existe toujours un nombre φ dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.



b) En écrivant $a \cos \theta + b \sin \theta = a \left(\cos \theta + \frac{b}{a} \sin \theta \right)$ et en remplaçant $\frac{b}{a}$ par $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, vérifiez que $a \cos \theta + b \sin \theta = \frac{a}{\cos \varphi} \cos (\theta - \varphi)$.

1.2 Résolution d'équations $a \cos x + b \sin x = c$

1. En utilisant le résultat de l'un des sous-paragraphes du 1.1, montrez que l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ n'a pas de solution lorsque $c^2 > a^2 + b^2$.

2. Résolvez chacune des équations suivantes :

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$

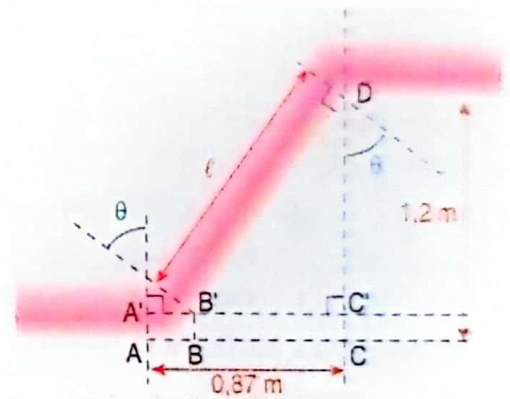
b) $2 \cos x - 3 \sin x = -6$

c) $\cos 3x + \sin 3x = 1$

d) $\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = \sqrt{2}$.

1.3 Une application : un problème de tuyaux

Un plombier doit raccorder un tuyau posé sur le sol à un tuyau horizontal situé 1,2 mètre au-dessus du sol comme indiqué sur la figure ci-contre. Pour relier ces deux tuyaux, il dispose de tuyaux droits et de tuyaux courbes. Tous les tuyaux utilisés ont pour rayon 70 mm. Le plombier veut déterminer la longueur ℓ du tuyau droit et l'angle θ des tuyaux.



1. Exprimez AB en fonction de $\sin \theta$ et BC en fonction de $\cos \theta$.

Déduisez-en que : $140 \sin \theta + \ell \cos \theta = 870$ [1].

2. Exprimez CC' en fonction de $\cos \theta$ et C'D en fonction de $\sin \theta$.

Déduisez-en que : $140(1 - \cos \theta) + \ell \sin \theta = 1200$ [2].

3. Déduisez de [1] et [2] que : $87 \sin \theta - 106 \cos \theta = 14$.

4. Donnez des valeurs approchées, tronquées au centième, du module et d'un argument de $87 - 106i$.

Donnez alors des valeurs approchées de θ en degrés et de ℓ en mètres.

TP 2

CONVERSION DE SOMMES EN PRODUITS

Le but de ce TP est de transformer en produits des sommes comme $\cos p + \cos q$, $\sin p + \sin q$, ..., et d'appliquer les résultats obtenus à la résolution d'équations trigonométriques. On rappelle les formules d'Euler :

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta, \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta, \quad (\theta \text{ réel}).$$

2.1 Les formules

1. Avec les nombres complexes

p et q sont deux réels quelconques, $\cos p + \cos q$ est la partie réelle de $e^{ip} + e^{iq}$.

Écrivons $e^{ip} + e^{iq}$ en mettant en facteur $e^{i\frac{p+q}{2}}$:

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2 e^{i\frac{p+q}{2}} \cos \frac{p-q}{2}.$$

a) Montrez que :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

b) Déduisez-en les formules :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

2. En utilisant des formules déjà établies

a) À partir des formules donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$, vérifiez que :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b.$$

Puis posez $a+b=p$ et $a-b=q$, et retrouvez la formule qui donne $\cos p + \cos q$.

b) Retrouvez de même la formule donnant $\sin p + \sin q$.

2.2 Des applications à la résolution d'équations

Résolvez chacune des équations suivantes :

a) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x.$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

c) $\cos 5x + 2 \cos 3x + 3 \cos x = 0.$

INDICATION : b) Transformer $\sin x + \sin 3x$ en un produit.

TP 3

RACINES $n^{\text{ième}}$ DANS $\mathbb{C}$

3.1 Définitions

n étant un naturel non nul, on appelle **racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

On appelle **racine $n^{\text{ième}}$ du complexe a** ($a \neq 0$), tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

Notez que, quel que soit n non nul, 1 est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Le but de ce TP est de prouver que tout nombre complexe non nul a a exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ (donc que l'équation $z^n = a$ a exactement n solutions).

Commentaire

Notez la différence entre racine $n^{\text{ième}}$ dans $\mathbb{R}$ et racine $n^{\text{ième}}$ dans $\mathbb{C}$. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, -1 n'a pas de racine carrée, tandis que dans $\mathbb{C}$, -1 a deux racines carrées, qui sont i et $-i$ (en effet $z^2 = -1$ équivaut à $z^2 = i^2$ et encore à $(z-i)(z+i) = 0$). En outre, lorsque dans $\mathbb{R}$, un réel a une racine carrée, cette racine carrée est unique, par exemple, dans $\mathbb{R}$, 1 n'a qu'une racine carrée qui est 1, tandis que dans $\mathbb{C}$, 1 a deux racines carrées qui sont 1 et -1 .

3.2 Exemple : racines troisièmes de l'unité

Rechercher les racines troisièmes de l'unité, c'est donc résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Notez que zéro ne peut pas être solution, donc les solutions sont à rechercher parmi les complexes non nuls. Puisque les **formes trigonométriques** ou **exponentielles** se prêtent bien aux calculs sur les puissances, c'est sous cette forme-là que nous allons rechercher les solutions de $z^3 = 1$.

1. z est un complexe non nul, de module r et d'argument θ , $z = re^{i\theta}$.

Vérifiez que les propositions (P_1) et (P_2) sont équivalentes :

$$\bullet (P_1) : z^3 = 1 \quad \bullet (P_2) : r = 1 \text{ et } 3\theta = 0 \text{ (modulo } 2\pi\text{)}.$$

2. On est donc amené à résoudre l'équation $3\theta = 0 \text{ (modulo } 2\pi\text{)}$.

Vérifiez que les nombres θ tels que $\theta = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les solutions.

Calculez les valeurs $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, correspondant respectivement aux valeurs $k = 0, k = 1, k = 2$.

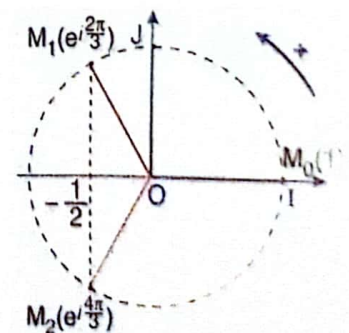
Déduisez-en que les nombres $1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}$, sont solutions de $z^3 = 1$. Nous avons représenté ces solutions sur le cercle trigonométrique du plan complexe.

3. On suppose :

a) $k = 3p$. Vérifiez que $\theta_k = \theta_0 \text{ (modulo } 2\pi\text{)}$.

b) $k = 3p + 1$. Vérifiez que $\theta_k = \theta_1 \text{ (modulo } 2\pi\text{)}$.

c) $k = 3p + 2$. Vérifiez que $\theta_k = \theta_2 \text{ (modulo } 2\pi\text{)}$.



4. Conclusion

$z^3 = 1$ n'a pas d'autres solutions que celles trouvées à la question 2, à savoir : $1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

5. Montrez que les images M_0, M_1, M_2 de ces trois solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral.

6. On note j le nombre $e^{2i\frac{\pi}{3}}$, $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, alors $j^3 = 1$.

Vérifiez que $j^2 = \bar{j}$, puis que $1 + j + j^2 = 0$. Déduisez de ce dernier résultat que $\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \vec{0}$, donc que O est l'isobarycentre de M_0, M_1, M_2 , c'est-à-dire le centre de gravité de $M_0 M_1 M_2$.

3.3 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

1. La recherche, dans le cas général, des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité suit la même méthode que celle utilisée dans l'exemple de la recherche des racines troisièmes.

z est un complexe non nul de module r et d'argument θ .

a) Vérifiez que les propositions (P_1) et (P_2) sont équivalentes :

$$\bullet (P_1) : z^n = 1 \quad \bullet (P_2) : r = 1 \text{ et } n\theta = 0 \text{ (modulo } 2\pi).$$

b) En procédant comme dans l'exemple précédent, montrez que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les n nombres complexes $\omega_k = e^{2ik\frac{\pi}{n}}$, k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$.

2. Interprétation géométrique

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, notons $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$, les points dont les affixes sont respectivement $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$.

a) Pourquoi ces points sont-ils sur le cercle trigonométrique de centre O ?

b) Vérifiez que :

$$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}) = \dots = (\overrightarrow{OM_{n-2}}, \overrightarrow{OM_{n-1}}) = \frac{2\pi}{n}.$$

Déduisez-en que $M_0 M_1 = M_1 M_2 = \dots = M_{n-2} M_{n-1}$.

On dit que le polygone obtenu en traçant successivement les segments $[M_0 M_1], [M_1 M_2], \dots, [M_{n-2} M_{n-1}]$, est un **polygone régulier convexe**.

c) Montrez que la **somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle**.

INDICATION : Remarquer que pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, $(\omega_k)^n = (\omega_1)^k$, et donc que la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ s'écrit $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^{n-1}$.

d) Déduisez-en que O est l'isobarycentre de $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$.

e) Représentez dans le plan complexe les images des racines quatrièmes de l'unité, puis le polygone régulier convexe qui leur est associé.

3.4 Équation $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. Lorsque $a = 0$, la seule solution de $z^n = 0$ est $z = 0$. Par la suite, nous supposons donc $a \neq 0$. Écrivons alors a sous la forme $a = |a| e^{i\alpha}$, $\alpha = \arg a$. Nous allons ramener la résolution de l'équation $z^n = a$ à la résolution d'une équation $Z^n = 1$. Pour cela, introduisons le complexe $a' = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

a) Vérifiez que $(a')^n = a$ (donc a' est une racine $n^{\text{ième}}$ de a), puis montrez que $z^n = a$ équivaut à $\left(\frac{z}{a'}\right)^n = 1$.

b) En utilisant les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, déduisez-en que les solutions de $z^n = a$, c'est-à-dire les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a , sont les n nombres $a' \omega_k$, ω_k désignant le nombre $e^{2i\pi \frac{k}{n}}$ (k entier, $0 \leq k \leq n-1$).

REMARQUE : Pour résoudre $z^n = a = |a| e^{i\alpha}$, on peut aussi résoudre $(re^{i\theta})^n = |a| e^{i\alpha}$, d'où : $r^n e^{in\theta} = |a| e^{i\alpha}$, $r = |a|^{\frac{1}{n}}$, $n\theta = \alpha + 2k\pi$.

2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :

a) $z^2 = 1 + i$ b) $z^5 = i - \sqrt{3}$.

Commentaire

Un peu d'Histoire... En fait, dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré n , $n \geq 1$, à coefficients complexes ou réels, possède exactement n racines, distinctes ou confondues. Ce résultat est appelé « théorème fondamental de l'Algèbre », et parfois, théorème de d'Alembert. Conjecturé par Albert Girard (1629), ce théorème est presque démontré par d'Alembert (1749), Laplace (1795). Mais c'est Gauss qui, en 1799, fournira plusieurs solutions satisfaisantes. Plus tard, Cauchy, en utilisant des propriétés des fonctions de variable complexe, en donnera une démonstration claire et courte.

DEUXIÈME PARTIE : Les complexes en géométrie

Rappels sur l'utilisation des nombres complexes en géométrie.

Un repère orthonormal direct a été choisi. Dans ce qui suit, les affixes des points $A, B, C, \dots$, seront désignées par les lettres minuscules correspondantes : $a, b, c, \dots$

1. Les nombres complexes peuvent être utilisés pour :

• calculer une distance : $AB = |b - a|$

• calculer un angle :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b - c}{a - c}\right), \text{ et plus généralement } (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}) = \arg\left(\frac{q - n}{p - m}\right).$$

• démontrer que des points sont alignés :

A, B, C distincts sont alignés équivaut, par exemple, à

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 0 \text{ ou } \pi \text{ (modulo } 2\pi), \text{ donc à } \frac{b - c}{a - c} \text{ est réel.}$$

• démontrer que des vecteurs sont colinéaires :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non nuls sont colinéaires équivaut, par exemple, à

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \text{ ou } \pi \text{ (modulo } 2\pi), \text{ donc à } \frac{d - c}{b - a} \text{ est réel.}$$

• démontrer que des droites sont perpendiculaires :

(AB) et (CD) sont **perpendiculaires** équivaut, par exemple, à

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi), \text{ donc à } \frac{d-c}{b-a} \text{ est } \mathbf{\text{imaginaire pur}}.$$

2. L'écriture complexe de la **translation** de vecteur $\vec{t}(b)$ est $\mathbf{z' = z + b}$.

3. L'écriture complexe de la **rotation** de centre O, origine du repère, et d'angle θ est $\mathbf{z' = e^{i\theta} z}$.

TP 4

ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSFORMATION

4.1 Définition

1. Munissons le plan d'un repère orthonormal direct. Alors, à toute transformation T du plan, nous pouvons associer une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la manière suivante : si z est l'afixe du point M , alors $z' = f(z)$ est l'afixe du point $M' = T(M)$.

$\mathbf{z' = f(z)}$ est appelée **écriture complexe de T** dans le repère orthonormal direct considéré.

$$\begin{array}{ccc} T: M & \mapsto & M' \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ f: z & \mapsto & z' \end{array}$$

REMARQUE : *Égalité de deux transformations.*

Il est clair que si deux transformations T_1 et T_2 ont la même écriture complexe dans le même repère orthonormal direct, alors $T_1 = T_2$.

4.2 Écriture complexe d'une homothétie

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct.

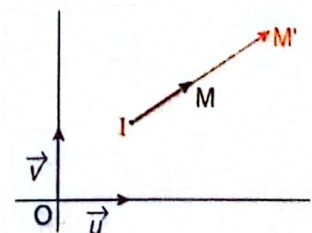
h est l'homothétie de centre I et de rapport k .

Si $M' = h(M)$, alors $\overrightarrow{IM'} = k \overrightarrow{IM}$. Soit ω l'afixe de I .

1. Déduisez-en que l'écriture complexe de h dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\mathbf{z' - \omega = k(z - \omega)} \text{ (ou } \mathbf{z' = k(z - \omega) + \omega}).$$

2. Quelle est la transformation dont l'écriture complexe est $\mathbf{z' = 2z + i}$?



Dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe de l'**homothétie h** , de **centre I** d'afixe ω , de **rapport k** , est $\mathbf{z' - \omega = k(z - \omega)}$.

4.3 Écriture complexe d'une rotation. Centre de la composée de deux rotations

1. $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct, r est la rotation de centre I et d'angle θ , $r(I; \theta)$.

Si $M' = r(M)$ et $M \neq I$, alors :

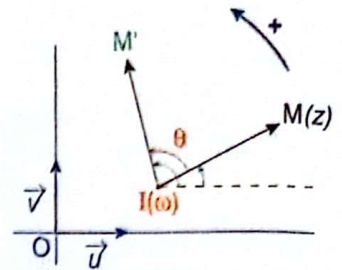
$$IM' = IM \text{ et } (\vec{IM}, \vec{IM'}) = \theta.$$

Notons ω l'affixe de I , z l'affixe de M et z' celle de M' .

a) Vérifiez que le nombre complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et pour argument θ .

b) Déduisez-en que l'écriture complexe de r est $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$.

2. Quelle est la transformation dont l'écriture complexe est $z' = iz + 3$?



Dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe de la rotation r de centre I d'affixe ω , d'angle θ , est $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$.

2. Application : détermination du centre de la composée de deux rotations
 $r_1(O_1; \theta_1)$ et $r_2(O_2; \theta_2)$ sont deux rotations telles que $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (modulo 2π) et $O_1 \neq O_2$. Nous savons (chapitre 1, p. 11) que $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. Notons r cette rotation.

Le but de l'exercice est de déterminer le centre de r . Pour cela, nous choisissons le repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'origine O_1 et tel que $\vec{u}$ et $\vec{O_1O_2}$ soient de même sens. Notons a l'abscisse de O_2 , notons M_1 l'image par r_1 d'un point M , z_1 l'affixe de M_1 , et notons M_2 l'image de M_1 par r_2 , z_2 l'affixe de M_2 .

a) Donnez l'écriture complexe de r_1 , puis celle de r_2 , enfin celle de $r_2 \circ r_1$.

b) On note I le centre de r . En utilisant le fait que le centre de r est le seul point invariant par r , $r(I) = I$, trouvez l'affixe de I .

c) On suppose que $O_1O_2 = 5$ cm.

Faites une figure et placez le point I dans chacun des cas suivants :

$$\bullet \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{4} \quad \bullet \theta_1 = -\frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

4.4 Écriture complexe d'un déplacement

L'écriture complexe d'une translation est $z' = z + b$, que nous pouvons encore écrire $z' = e^{i\theta} z + z_0$, avec $\theta = 0$, $z_0 = b$.

Vérifiez que l'écriture complexe d'une rotation, trouvée au § 4.3, peut aussi s'écrire $z' = e^{i\theta} z + z_0$.

Or tout déplacement est soit une translation, soit une rotation. Donc,

Dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe d'un déplacement est $z' = e^{i\theta} z + z_0$.

TP 5

COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

5.1 Problème du BOA, du BOUC, du PAON

D'après P. Chevrier – IREM de Poitiers.

BOA est un triangle quelconque. La mesure principale de $(\vec{OA}, \vec{OB})$ appartient à $]0; \pi[$. BOUC et PAON sont des carrés construits extérieurement au triangle BOA.

$$(\vec{OB}, \vec{OU}) = \frac{\pi}{2}, (\vec{OA}, \vec{ON}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que (AU) et (BN) sont perpendiculaires et que $AU = BN$.

Pour cela, nous utiliserons les nombres complexes. (D'autres solutions existent, qui ne font pas intervenir les nombres complexes, par exemple, par le produit scalaire.)

1. Choix du repère, des affixes de certains points. Traduction des hypothèses

Choisissons un repère orthonormal direct d'origine O et notons a, b , les affixes respectives des points A et B.

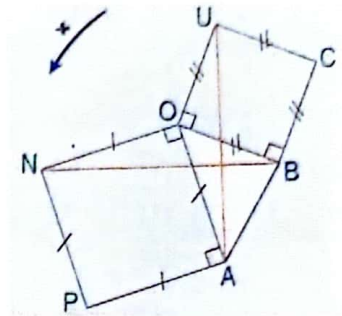
Montrez que l'affixe u de U est égale à ib , et que l'affixe n de N est égale à $-ia$.

2. Traduction de la conclusion

Pour démontrer que $AU = BN$ et que $(AU) \perp (BN)$, il suffit maintenant de démon-

trer que $|u - a| = |n - b|$ et que $\frac{u - a}{n - b}$ est un imaginaire pur. Pourquoi ?

3. Démontrez que $\frac{u - a}{n - b} = -i$. Concluez.



5.2 Des relations métriques dans le triangle

Dans le plan orienté, ABC est un triangle direct. Notons :

- z_A, z_B, z_C les affixes des points A, B, C ;
- a, b, c les longueurs des segments [BC], [AC], [AB] ;
- $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les angles géométriques du triangle ABC.

1. Démontrez que :

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{c}{a} (\cos \hat{B} + i \sin \hat{B}) \quad \text{et} \quad \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{b}{a} (\cos \hat{C} - i \sin \hat{C}).$$

2. Vérifiez que $\frac{c}{a} (\cos \hat{B} + i \sin \hat{B}) + \frac{b}{a} (\cos \hat{C} - i \sin \hat{C}) = 1$. Déduisez-en que :

$$a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} \quad \text{et} \quad \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

3. Par « permutation de lettres », donnez des relations analogues aux deux précédentes dans le triangle ABC.

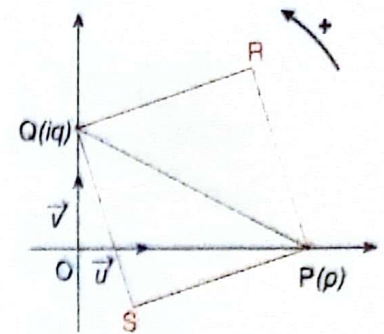
5.3 Lieu géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. P est le point dont l'afixe est le réel p strictement positif et Q est le point d'afixe qi (avec q réel strictement positif) de façon que la somme $p + q$ reste constante et égale à un réel a donné :

$$p + q = a.$$

On construit un carré $PRQS$ de diagonale $[PQ]$ de façon que :

$$(\vec{RQ}, \vec{RP}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } (\vec{SQ}, \vec{SP}) = -\frac{\pi}{2}.$$



Le but de l'exercice est de démontrer que la position de R ne dépend pas du choix de p et q , puis de trouver le lieu géométrique de S lorsque p et q varient de façon que $p + q = a$, $p > 0$, $q > 0$.

1. Notons z l'afixe de R et z' celle de S .

Montrez que $\frac{z-p}{z-iq} = i$ et $\frac{z'-p}{z'-iq} = -i$.

2. Dédisez-en que la position de R ne dépend pas du choix de p et q .

3. Montrez que $z' = \frac{a-2q}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Dédisez-en le lieu géométrique du point S lorsque les points P et Q se déplacent comme il a été dit.

5.4 Des triangles équilatéraux

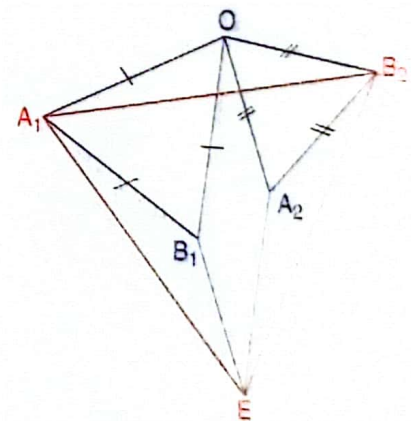
OA_1B_1 et OA_2B_2 sont des triangles équilatéraux directs et OB_1EA_2 est un parallélogramme. Le but de l'exercice est de démontrer que le triangle A_1EB_2 est équilatéral.

Pour cela, on utilise les nombres complexes et on note a_1, a_2, b_1, b_2, e , les affixes respectives des points A_1, A_2, B_1, B_2, E , dans un repère orthonormal direct d'origine O .

1. Montrez que :

$$e - a_1 = e - b_1 + b_1 - a_1 = a_2 + (b_1 - a_1).$$

2. Dédisez-en que : $e^{-i\frac{\pi}{3}}(e - a_1) = b_2 - a_1$. Concluez.



5.5 Affixe du barycentre

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n points du plan d'afixes respectives $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Quelle est l'afixe du barycentre G de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$, lorsqu'il existe :

POUR S'ENTRAÎNER

PREMIÈRE PARTIE : ALGÈBRE

Des équations

1 Écrivez chacune des expressions suivantes sous la forme $r \cos(x - \varphi)$.

a. $3 \cos x - 3 \sqrt{3} \sin x$.

b. $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x - (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x$.

c. $\sqrt{6} \cos x + \sqrt{2} \sin x$.

INDICATION : b. $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$.

Pour les exercices 2 à 7, résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation proposée.

UNE MÉTHODE POUR 2, 3 ET 4 : Écrire le premier membre sous la forme $r \cos(x - \varphi)$. Voir TP 1, p. 51.

UNE MÉTHODE POUR 5, 6 ET 7 : Factoriser le premier membre. Voir TP 2, p. 53.

2 a. $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{2}$ b. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

3 $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4 $2 \cos x - 3 \sin x = 15$.

5 $1 + \cos 2x + \cos 4x = 0$.

6 $\cos x + \cos 3x - \cos 5x = 0$.

7 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Racines $n^{\text{ièmes}}$

8 Quelles sont les racines cinquièmes de -1 ?
Quelles sont les racines cinquièmes de i ?

9 Déterminez les racines sixièmes du nombre $a = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

INDICATION : Écrire a sous forme trigonométrique ou exponentielle.

10 Déterminez les racines sixièmes de $8i$. Déduisez-en une expression de la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

11 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 2(1 + i\sqrt{3})$.

12 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = (z-1)^n$.
Déterminez la partie réelle et la partie imaginaire de chaque solution.

13 1. Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z-1| = |\bar{z}+1|$?

Expliquez géométriquement le résultat trouvé.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n = (\bar{z}+1)^n$.

14 1. u étant un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \in]0; 2\pi[$, déterminez le module et un argument du nombre complexe z tel que $\frac{z-i}{z+i} = u$.

2. On considère l'équation $(z^2+1)^n - (z+i)^{2n} = 0$ (E), où n est un entier non nul donné.

En remarquant que $-i$ est solution de (E), résolvez dans $\mathbb{C}$ cette équation.

15 1. Écrivez sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $a = 16(1-i)$.

2. Pour λ nombre réel quelconque, on pose :

$$z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda} = x_\lambda + iy_\lambda.$$

a. Calculez les réels x_λ et y_λ en fonction de λ .

b. Déterminez l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M_λ de coordonnées $(x_\lambda; y_\lambda)$ quand λ décrit $[0; 2\pi]$.

c. Montrez que les solutions de l'équation $(z - (1+i))^3 = a$ sont les affixes de points de $\mathcal{C}$.

16 1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{12} = 1$. Donnez les solutions sous forme trigonométrique, puis algébrique.

2. u étant un nombre complexe différent de 1, calculez, au moyen des seuls nombres u^{n+1} et u , la somme :

$$1 + u + u^2 + \dots + u^n.$$

3. Donnez les solutions de l'équation $z^3 + z^4 + 1 = 0$, par exemple en utilisant les questions précédentes.

17 1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations :

a. $z^4 = 1$ b. $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$.

2. Soit n un entier naturel non nul et A un nombre complexe. Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = A.$$

On appelle P et Q les points du plan complexe d'affixes respectives i et $-i$, et M le point d'affixe z .

Montrez que si z vérifie l'équation (E), alors $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$.

18 Trouver les racines carrées sous forme algébrique z_0 est un complexe dont la forme algébrique est $a + ib$. On se propose d'exprimer les racines carrées complexes de z_0 sous forme algébrique.

1. On suppose $b = 0$. Quelles sont alors les racines carrées de z_0 ?

2. On suppose $b \neq 0$.

z est un complexe de forme algébrique $x + iy$.

a. Vérifiez que les deux propositions (P_1) et (P_2) sont équivalentes.

• (P_1) : z est une racine carrée de z_0 .

$$\bullet (P_2) : (S) \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = |z_0|. \end{cases}$$

b. Justifiez l'inégalité $|z_0| \geq |a|$ et déduisez-en les deux valeurs possibles x_1, x_2 , de x , et celles y_1, y_2 , de y .

c. Il y a donc a priori quatre couples solutions (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) , (x_2, y_2) . Mais parmi ces couples, seuls conviennent les deux couples (x, y) tels que le signe du produit x, y soit celui de b . Pourquoi ?

d. Vérifiez que ces deux couples sont bien solutions du système (S).

3. Trouvez de cette manière les racines carrées de chacun des nombres suivants :

a. i ; b. $1 + i$; c. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE COMMENTÉ

19 ÉNONCÉ :

On pose $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $w' = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour quelles valeurs du naturel n obtient-on $w^n + w'^n = -1$?

VERS UNE SOLUTION :

Puisque la forme trigonométrique (ou exponentielle) facilite les calculs sur les puissances et que l'on doit travailler avec w^n et w'^n , une première idée consiste à écrire w et w' sous forme trigonométrique (ou exponentielle). Pour contrôler les calculs, on utilisera une représentation géométrique de w et w' . On pourra ainsi remarquer, si cela n'a pas été fait auparavant, que w et w' sont conjugués.

1. Écrivez w et w' sous forme trigonométrique (ou exponentielle). Observez que $w' = w^2$, et que $w^3 = 1$. En fait, on reconnaît en w et w' les deux racines troisièmes complexes de l'unité (l'autre racine troisième de l'unité est 1). (Dans le TP3, nous avons posé selon l'usage $w = j$, $w' = \bar{j} = j^2$, et nous avons vu que $j^3 = 1$, que $1 + j + j^2 = 0$.)

2. On est donc amené à chercher les naturels n tels que $w^n + w'^n = -1$, c'est-à-dire tels que :

$$1 + w^n + w'^n = 0.$$

D'après 1., $n = 1$ convient.

Comment trouver toutes les valeurs convenables de n ? Lorsqu'on n'a pas d'idées préconçues, on peut toujours examiner « ce qui se passe pour les petites valeurs de n ».

a. En utilisant les égalités $w^3 = 1$, $1 + w + w^2 = 0$, vérifiez que $n = 1$ (déjà vu), $n = 2$, $n = 4$, $n = 5$, sont solutions du problème, mais que $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$, ne le sont pas.

b. Observez que jusqu'à 6, les seules valeurs de n qui ne conviennent pas sont les multiples de 3.

3. Déduisez-en une conjecture sur les valeurs de n telles que $w^n + w'^n + 1 = 0$, puis démontrez cette conjecture, et concluez.

INDICATION : Tout nombre qui n'est pas un multiple de 3 s'écrit $3p + 1$ ou $3p + 2$, $p \in \mathbb{N}$.

4. Autre solution

À partir de $w^{2n} + w^n + 1 = 0$, posez $X = w^n$ et retrouvez la conclusion de la question 3.

DEUXIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE

Écriture complexe

20 Au point M d'affixe z , on associe M' d'affixe Z par une rotation f d'angle $\frac{\pi}{2}$; on sait que $f(A) = B$ où A et B ont pour affixes les nombres complexes $1 + i$ et $-2 + 2i$. Exprimez Z en fonction de z .

21 Les points A et B ont pour affixes les nombres complexes a et b . En utilisant des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, déterminez les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carré de sens direct.

Pour les exercices 22 à 25, trouvez, dans un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, l'écriture complexe de f , de g et de $h = g \circ f$; puis identifiez h .

22 f est la rotation de centre $A(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$; g est la translation de vecteur $\vec{i}(1 - i)$.

23 f est la translation de vecteur $\vec{i}(1 - i)$; g est la rotation de centre $A(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

24 f est la rotation de centre $A(1 - i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$; g est la rotation de centre $B(2 + i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

25 f est la rotation de centre $A(2 + i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; g est la rotation de centre $B(-1 + 2i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

26 ABCD est un carré de sens direct, $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

r est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

t est la translation de vecteur $\vec{AC}$.

s est la symétrie de centre C.

1. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques des transformations $f = t \circ r$, $g = s \circ t \circ r$, $f \circ g$.

2.a. Donnez les écritures complexes de f et g dans un repère orthonormal que vous préciserez.

b. Quel est l'ensemble des points M tels que $f(M) = g(M)$?

INDICATION : $f(M) = g(M)$ équivaut à $M = f^{-1}(g(M))$.

■ Utilisation des nombres complexes ■ pour l'étude de figures

27 **BAC** Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M d'affixe Z différente de 1, on associe le point M' d'affixe Z' définie par $Z' = \frac{1+Z}{1-Z}$.

1. Calculez les coordonnées X' et Y' de M' en fonction des coordonnées X et Y de M .

2. Soit D la droite d'équation $x = 0$.

Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

Montrez que, lorsque M décrit la droite D , M' se déplace sur le cercle Γ .

3.a. Montrez que, lorsque M décrit le cercle Γ privé du point A d'affixe 1, M' se déplace sur une droite. Précisez cette droite.

b. Montrez que si le point M est un point de Γ différent de A, alors les points A, M et M' sont alignés. Déduisez-en, dans ce cas, une construction de M' connaissant M.

28 **BAC** 1. On considère deux nombres complexes Z_1 et Z_2 donnés sous forme algébrique par :

$$Z_1 = 2 + 2i \text{ et } Z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Déterminez le module et un argument de Z_1 et Z_2 .

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note A le point d'affixe Z_1 et B le point d'affixe Z_2 .

a. La rotation r de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$ radians transforme le point A en un point C.

Montrez que l'affixe Z_3 du point C est donnée par :

$$Z_3 = -(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i.$$

b. Montrez que le quotient $\frac{Z_3 - Z_2}{Z_1 - Z_2}$ est imaginaire pur.

Calculez le module et un argument de ce quotient.

Interprétez géométriquement ces résultats en indiquant les particularités du triangle ABC.

29 **BAC** On considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - (4 + 4i)z - 16 + 16i$$

où z désigne une variable complexe.

1. Montrez que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée a , et une solution imaginaire pure notée b .

2. Déterminez le complexe c tel que :

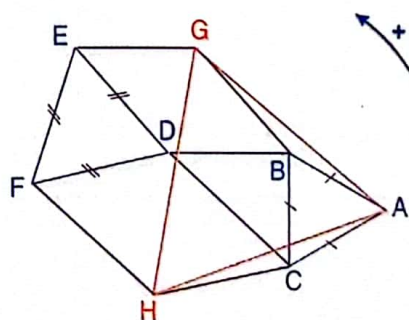
$$P(z) = (z - a)(z - b)(z - c).$$

3. On désigne par A, B et C les points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a , b et c .

Calculez $\frac{c-b}{a-b}$ et déduisez-en la nature du triangle ABC.

30 **BAC** Dans le plan orienté, on considère la figure ci-après : ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux directs, $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{DE}, \vec{DF}) = \frac{\pi}{3}$. Les points G et H sont tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux manières (l'une utilisant les affixes complexes, l'autre utilisant des composées de déplacements) que le triangle AGH est équilatéral.



A. Le plan orienté étant muni d'un repère orthonormal direct, on note a, b, c, d, e, f, g, h , les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H.

1. Montrez que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

Exprimez $(f - d)$ en fonction de $(e - d)$.

2. Exprimez g en fonction de b, d, e , puis h en fonction de c, d, f .

3. Démontrez que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$.

Déduisez-en que le triangle AGH est équilatéral.

B. On note :

t_1 la translation de vecteur $\vec{BD}$,

t_2 la translation de vecteur $\vec{DC}$,

R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $T = t_2 \circ R \circ t_1$.

1. Justifiez que T est une rotation et précisez son angle.

Déterminez l'image de B par T ; déduisez-en le centre de T.
 2. Déterminez l'image de G par T et montrez que le triangle AGH est équilatéral.

31 BAC Le but de l'exercice est de montrer, à l'aide des nombres complexes, qu'un triangle ABC, dans lequel le centre O du cercle circonscrit est aussi isobarycentre, est un triangle équilatéral.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On note w le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1.a. Mettez w et w^2 sous la forme $\alpha + \beta i$, avec α et β réels.

b. Montrez que $1 + w + w^2 = 0$ et $\bar{w} = w^2$.

2. On cherche les nombres complexes z tels que :

$$|z| = |1 + z| = 1 \quad (*)$$

a. Montrez que w satisfait aux conditions (*).

b. Montrez que si un nombre $z = x + yi$, avec x et y réels, vérifie les conditions (*), alors $x = -\frac{1}{2}$.

Déduisez-en que w et $\bar{w}$ sont les seuls complexes satisfaisant aux conditions (*).

3. Soit A, B et C trois points du cercle Γ de centre O et de rayon R, $R > 0$. On suppose que O est l'isobarycentre des points A, B et C, c'est-à-dire que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

On note a l'affixe de A, b l'affixe de B, c l'affixe de C ; et on pose $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$.

a. Montrez que $|p| = |q| = 1$ et $1 + p = -q$.

b. Montrez, à l'aide de 2.b., que soit $p = w$, soit $p = \bar{w}$. Dans ce qui suit, on supposera que $p = w$.

c. Montrez, à l'aide de 1., que $q = w^2 = \bar{w}$.

d. Montrez que :

$$b - a = (w - 1)a, \quad c - b = (w - 1)b, \quad c - a = (\bar{w} - 1)a.$$

Déduisez-en que le triangle ABC est équilatéral.

32 Dans le plan complexe orienté d'origine O, on considère un triangle ABC dont les sommets ont pour affixes les nombres complexes a, b, c . Le triangle est choisi de telle sorte que le sens de parcours ABC soit le sens trigonométrique. A' désigne le milieu du segment [BC].

1. On construit, extérieurement au triangle ABC, les triangles rectangles isocèles BPC, CQA et ARB (respectivement rectangles en P, Q et R).

a. Montrez que l'affixe p du point P est donnée par :

$$p = \frac{b+c}{2} + i \frac{b-c}{2}.$$

b. Exprimez de la même façon les affixes respectives q et r des points Q et R.

c. Déduisez de ces résultats que les triangles ABC et PQR ont même centre de gravité.

2. Quelle est la nature du triangle A'QR ?

3. Montrez que $p - a = i(r - q)$ et déduisez-en que les droites (AP) et (QR) sont perpendiculaires.

4. Déduisez de ce qui précède que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

D'après BTS Géomètre topographe

33 ABC est un triangle rectangle isocèle en A ; H est le milieu de son hypoténuse.

M est un point quelconque de la droite (BC), les points P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur les droites (AB) et (AC) respectivement.

En utilisant les nombres complexes, démontrez que le triangle HPQ est rectangle isocèle.

34 BAC Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{OA}$, $\vec{OB}$). Unité de longueur : 8 cm.

On note C le milieu du segment [AB].

Soit r la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M du plan d'affixe u , on note M' le transformé de M par r .

1.a. Placez sur une figure O, A, B, M et M' lorsque $u = \frac{3}{4}$.

b. Déterminez l'image du segment [OA] par r .

c. Calculez l'affixe u' de M' en fonction de l'affixe u de M.

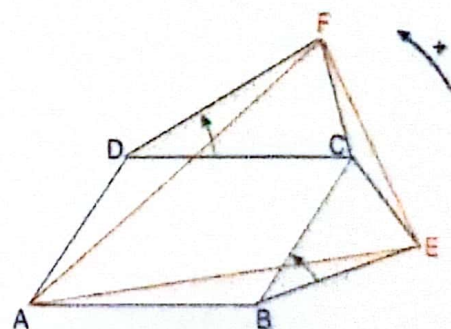
2. On note P le milieu du segment [OC]. Soit N le milieu du segment [BM] et N' le milieu du segment [AM].

a. Exprimez en fonction de u les affixes Z et Z' des vecteurs $\vec{PN}$ et $\vec{PN'}$.

b. Prouvez que le triangle PNN' est rectangle et isocèle.

35 ABCD est un parallélogramme ; DCF et BEC sont des triangles isocèles, l'un en D, l'autre en B, tels que :

$$(\vec{DC}, \vec{DF}) = (\vec{BE}, \vec{BC}).$$



En utilisant les nombres complexes, montrez que le triangle AEF est isocèle en A.

INDICATION : Choisir A comme origine d'un repère orthonormal direct et introduire les affixes b et d de B et D respectivement.

36 **BAC** Soit $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
 - a. Montrez que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et déduisez-en que α et β sont solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ [1].
 - b. Déterminez α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
 - c. Résolvez l'équation [1] et déduisez-en la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
2. On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 - a. Soit H le point d'intersection de la droite $(A_1 A_4)$ avec l'axe $(O; \vec{u})$. Montrez que $\vec{OH} = \cos \frac{2\pi}{5} \vec{u}$.
 - b. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par B d'affixe i . Ce cercle coupe $(O; \vec{u})$ en M et N (on note M le point d'abscisse positive).
Montrez que $\vec{OM} = \alpha \vec{u}$, $\vec{ON} = \beta \vec{u}$ et que H est le milieu de $[OM]$.
 - c. Déduisez-en une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0 .

37 **BAC** Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts. On note I le milieu de $[BD]$, J le milieu de $[AC]$, et O l'isobarycentre de A, B, C, D . On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés $(\vec{MB}, \vec{MA}), (\vec{NC}, \vec{NB}), (\vec{PD}, \vec{PC}), (\vec{QA}, \vec{QD})$ ont pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

Soit K le milieu de $[MP]$ et L le milieu de $[NQ]$.
On se propose d'étudier la configuration (I, J, K, L) . À cet effet, on pourra prendre un repère orthonormal direct d'origine O et introduire les affixes a, b, c, d de A, B, C, D , les affixes m, n, p, q de M, N, P, Q et les affixes f, g, k, l de I, J, K, L .

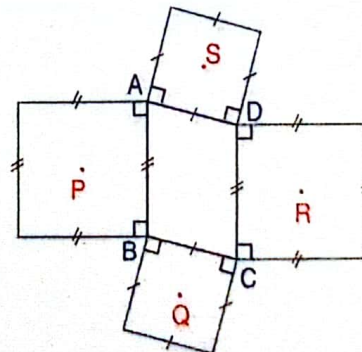
1. Déterminez le milieu de $[IJ]$.
2. Prouvez que $m(1-i) = a - ib$. Calculez de façon analogue n, p et q .
3. Déterminez l'isobarycentre de M, N, P, Q .
Déduisez-en le milieu de $[KL]$.
4. Effectuez une figure soignée en prenant :
 $a = -2 + 2i, b = -2 - i, c = -2i$ et $d = 4 + i$.
5. Soit r le quart de tour direct de centre O . Montrez que $r(J) = K$.
6. Caractérisez les configurations (A, B, C, D) telles que $I = J$. Indiquez alors la position de K et de L et la nature de $MNPQ$. Ce cas étant écarté, prouvez que $IJKL$ est un carré de centre O .

38 ABC est un triangle quelconque, O est un point distinct de A, B et C . On note r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$; A', B', C' sont les images respectives de A, B, C par r ; U, V, W , sont les milieux respectifs de $[A'B], [B'C], [C'A]$. En utilisant les nombres complexes, démontrez que le triangle UVW est équilatéral.

INDICATION : Choisir un repère orthonormal direct d'origine O et introduire les affixes a, b, c , de A, B, C .

39 Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points distincts A, B, C d'affixes respectives $a, b, -b$.

1. Donnez une condition nécessaire et suffisante vérifiée par a et b pour que les points A, B, C soient alignés.
On suppose dans la suite que les points A, B, C ne sont pas alignés et que la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est directe, c'est-à-dire que la mesure principale de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est positive.
 2. Sur les droites (AB) et (AC) , à l'extérieur du triangle ABC , on construit les carrés $AFGB$ et $ACDE$, et le parallélogramme $AEHF$ de façon que les bases $(\vec{AF}, \vec{AB})$ et $(\vec{AC}, \vec{AE})$ soient directes.
 - a. En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E , montrez que l'affixe e du point E est :
$$e = -ib + a(1-i).$$
 - b. Calculez les affixes respectives f, h, d des points F, H, D en fonction de a et b .
 3. Déduisez du 2. que :
 - a. $FE = 2OA$ et que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires.
 - b. $BD = CH$ et que les droites (BD) et (CH) sont perpendiculaires.
- 40** $ABCD$ est un parallélogramme. Sur chacun de ses côtés, on construit un carré à l'extérieur du parallélogramme.



En utilisant les nombres complexes, démontrez que les centres R, S, P, Q , de ces carrés sont les sommets d'un carré.
INDICATION : Choisir un repère orthonormal direct d'origine A et introduire les affixes b et d de B et D .

PROBLÈMES

PREMIÈRE PARTIE : ALGÈBRE

41 THÈME : Factorisation d'un polynôme bicarré

On pose, pour $a \neq 0$ et b, c réels, $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$.
On suppose $b^2 - 4ac < 0$.

1. Montrez qu'il existe deux complexes conjugués z_1 et $\bar{z}_1$, tels que, pour tout complexe z , $P(z) = a(z^2 - z_1)(z^2 - \bar{z}_1)$.

2. On pose $z_1 = u + iv$ avec u, v réels, et on cherche x et y réels tels que $t = x + iy$ et $t^2 = z_1$.

a. Montrez que xy a le signe de v et que x^2 et $-y^2$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 + (-y^2) = u \\ x^2(-y^2) = -\frac{v^2}{4} \end{cases}$$

b. Montrez que ce système admet un couple solution formé de deux réels de signes contraires.

c. Déduisez-en l'existence d'un couple $(x; y)$ tel que :

$$P(x + iy) = 0.$$

3. En posant $t = x + iy$, montrez que :

$$P(-t) = 0, P(\bar{t}) = 0, P(-\bar{t}) = 0.$$

4. Montrez que les coefficients du polynôme $z \mapsto (z - t)(z - \bar{t})$ sont réels et déduisez-en la factorisation de P en produit de deux polynômes du second degré.

5. Application

Factorisez $x^4 - 6x^2 + 25$ et $x^4 - x^2 + 1$.

42* THÈMES : Racines $n^{\text{ièmes}}$. Polynômes complexes

n est un entier naturel strictement supérieur à 2.

On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et pour tout complexe z ,
 $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 - (z - w)(z - w^2) \dots (z - w^{n-1})$.

1. Vérifiez que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 2$.

2.a. Montrez que $w, w^2, \dots, w^{n-1}$, sont $n - 1$ racines de P , et que ces racines sont deux à deux distinctes.

INDICATION : w est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

b. Déduisez-en que $P(z) = 0$, pour tout complexe z .

INDICATION : Un polynôme non nul de degré p a exactement p racines complexes (résultat admis).

3. Par calcul de modules, montrez que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin\left((n-1)\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

INDICATION : $z = 1$.

DEUXIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE

43 THÈMES : Composition et décomposition de rotations. Utilisation des complexes

1. ABC est un triangle équilatéral de sens direct, et M est un point du segment [BC]. On construit à l'extérieur de ABC les triangles équilatéraux BME et CMF. On note G, G_1, G_2 les centres de gravité des triangles ABC, BME et CMF, respectivement.

a. On note R_1 la rotation de centre G_1 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, et

R_2 la rotation de centre G_2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. Montrez que

$R_2 \circ R_1$ est la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b. En décomposant R_1 et R_2 en réflexions, montrez que le triangle GG_1G_2 est équilatéral.

2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a. Précisez dans quel repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C ont pour affixes $\ell, \ell j$ et ℓj^2 , où ℓ est un réel strictement positif.

b. P est un point quelconque du plan ; on note p son affixe. On note Q l'image de P par la rotation de centre B et d'angle

$-\frac{\pi}{3}$, et R l'image de P par la rotation de centre B et

d'angle $\frac{\pi}{3}$. Enfin H_1 et H_2 sont les centres de gravité respectifs

des triangles BPQ et CPR.

Calculez les affixes de H_1 et H_2 en fonction de ℓ et p , et montrez que OH_1H_2 est un triangle équilatéral.

44 THÈME : Étude géométrique de la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z}$

Pour chaque complexe z non nul, nous noterons z' l'image de z par f , $z' = \frac{1}{z}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, et on associe à tout complexe z le point M d'affixe z .

On note M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{z}$. À la fonction $f : z \mapsto z'$,

on associe alors une fonction F du plan complexe dans lui-même, $F : M(z) \mapsto M'(z')$.

1. Sans calculs de coordonnées, en n'utilisant que les résultats connus sur les inverses et les conjugués :

a. Montrez que l'axe des abscisses est globalement invariant par F , c'est-à-dire que F transforme tout point de cet axe en un point de cet axe.

b. Déterminez l'ensemble des points invariants par F .

c. Montrez que z et z' ont mêmes arguments, puis déduisez-en que O, M, M' sont alignés, et que toute droite qui passe par l'origine est globalement invariante par F .

d. Montrez que $OM \times OM' = 1$, et déduisez-en que l'image par F d'un cercle de centre O est un cercle de centre O.



2. Image d'un cercle qui passe par l'origine

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre A d'affixe z_0 , de rayon r , et qui passe par l'origine O du repère. Donc, $M(z)$ appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à $|z - z_0| = |z_0| = r$.

a. Justifiez cette affirmation.

b. Montrez que $|z - z_0| = r$ équivaut à $\left| \frac{1 - z_0 \bar{z}}{z} \right| = r$ ou

encore à $\left| z_0 \left| \frac{1}{z} - \bar{z} \right| \right| = r |z'|$.

(z' désigne encore l'affixe de M' image de $M(z)$ par F).

Déduisez-en que $|z - z_0| = r$ équivaut à $\left| \frac{1}{z_0} - z' \right| = |z'|$.

c. Montrez alors que l'image de $\mathcal{C}$ par F est une droite et que cette droite est perpendiculaire à (OA).

d. Faites une figure lorsque $z_0 = 1 + i$.

3. Lorsque $z = x + iy$, (x et y réels), on notera $z' = x' + iy'$, (x' et y' réels).

a. Montrez que $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$ et $y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

b. Montrez que $z = \frac{1}{z'}$, puis sans nouveaux calculs, déduisez-en que $x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}$ et $y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$.

4. Image d'une droite qui ne passe pas par l'origine

a. d est la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

Montrez que l'image par F de la droite d est un cercle $\mathcal{C}$ dont vous préciserez le centre I et le rayon.

INDICATION : Écrire l'équation de l'image de d par F trouvée sous la forme $(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = r^2$.

Vérifiez que ce cercle passe par l'origine et que (OI) et d sont perpendiculaires.

b. d est la droite d'équation $ax + by + c = 0$, $c \neq 0$.

Montrez que l'image par F de la droite d est un cercle $\mathcal{C}$ qui passe par l'origine.

5. Image d'un cercle qui ne passe pas par l'origine

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon r , où A est un point d'affixe z_0 , avec $z_0 = a + ib$, a et b réels, $|z_0| \neq r$. Donc, $M(z)$ appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à $|z - z_0| = r$.

a. Déduisez-en une relation entre x' et y' .

b. Montrez alors que l'image de $\mathcal{C}$ par F est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

NOTE : F est appelée inversion de pôle O, de puissance 1.

De manière générale, l'inversion de pôle un point O, de puissance k , fait correspondre à chaque point M distinct O, le point M' de la droite (OM) tel que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

Notion de groupe

A. Exemple. Définition

Notons G l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des n nombres $\omega_k = e^{2\pi i k/n}$ (k entier, $0 \leq k \leq n-1$). Vérifiez que :

1. si a et b sont éléments de G , alors ab est élément de G ;
2. si a et b sont éléments de G , alors $ab = ba$;
3. si a, b, c sont éléments de G , alors $a(bc) = (ab)c$;
4. il existe un élément e de G tel que pour tout a de G , $ea = a$;
5. si a est un élément de G , alors il existe un élément b de G tel que $ab = e$ (le nombre e a été défini en 4.).

Définition :

De manière générale, on dit qu'un ensemble G de nombres, muni d'une opération (usuellement, multiplication, addition), est un groupe commutatif pour cette opération lorsque les cinq propriétés énoncées ci-dessus sont vérifiées.

Ainsi, l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est un groupe commutatif pour la multiplication.

B. Autres exemples. Contre-exemples

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est-il un groupe commutatif pour l'addition ? est-il un groupe commutatif pour la multiplication ?

INDICATION : Si une seule des propriétés 1 à 5 n'est pas vérifiée, G n'est pas un groupe.

2. Vérifiez que $\mathbb{C}^*$ est un groupe commutatif pour la multiplication.

3. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de module 1 est-il un groupe commutatif pour la multiplication ? est-il un groupe commutatif pour l'addition ?

4. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes non nuls dont un argument est 0 ou π est-il un groupe commutatif pour la multiplication ? pour l'addition ?

5. Citez d'autres ensembles de nombres qui sont des groupes commutatifs, soit pour l'addition, soit pour la multiplication.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

CHAPITRE

4

Conformément au programme, ce chapitre ne contient que des travaux pratiques et ne possède donc pas la structure habituelle. Ces travaux pratiques traitent des points suivants du programme :

- exemples de recherche de lieux géométriques en géométrie plane ;
- réduction et lignes de niveau de $\sum a_i MA_i^2$;
- ensemble des points M tels que $(\overline{MA}, \overline{MB}) = \alpha$; cocyclicité ;
- recherche d'homothéties planes transformant une configuration donnée en une autre.

D'autres études de lieux géométriques seront proposées en exercices dans les chapitres qui suivent.

SOMMAIRE

Travaux pratiques	69
Exercices et problèmes	80

TP 1

LIEU DE POINTS LIÉS À UNE CONFIGURATION MOBILE

1.1 Préliminaires

1. En quoi consiste, en général, un tel problème de lieux ?

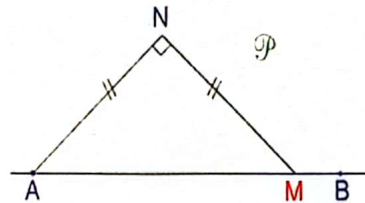
On donne une figure et on suppose qu'un point M de la figure se déplace sur une ligne **fixe** (L), de sorte qu'un autre point N lié à M se déplace également.

Le problème est de savoir quelle ligne **fixe** est décrite alors par le point N . C'est cette ligne qu'on appelle le lieu géométrique du point N .

REMARQUE : Notons f la correspondance $M \mapsto f(M) = N$.

Chercher le lieu de N , c'est chercher l'ensemble de tous les points $f(M)$, c'est donc chercher l'image par f de la ligne (L) sur laquelle M se déplace.

EXEMPLE :



$[AB]$ est un segment donné, $AB = 1$. M est un point de $[AB]$.

Dans le demi-plan $\mathcal{P}$ de frontière (AB) , on construit le triangle rectangle isocèle ANM .

Quel est le lieu géométrique du point N lorsque M décrit le segment $[AB]$?

2. Méthode à suivre, en général, dans un problème de lieu

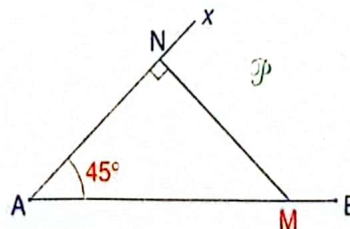
• Étude directe

a) Repérer les éléments fixes de la figure et les éléments variables.

b) Chercher les liens entre les éléments fixes et les points variables M et N .

En général, on peut alors déduire que N appartient à une ligne fixe (L_1).

EXEMPLE (suite) :



a) Le segment $[AB]$ est fixe donc en particulier A et B sont fixes.

b) AMN est rectangle et isocèle, donc $\widehat{MAN} = 45^\circ$.

Donc N est sur la demi-droite fixe $[Ax)$. Notons (L_1) cette demi-droite.

• Étude réciproque

On pose la question de savoir si le point N décrit toute la ligne (L_1) . Ce n'est pas toujours le cas (voir ci-après), d'où la nécessité de cette étude réciproque.

EXEMPLE (fin) :

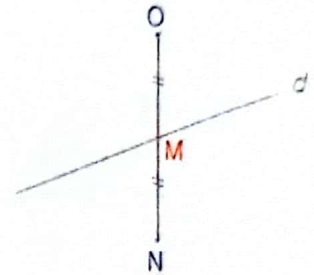
On déduit des hypothèses que $AN = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$. Or AM varie de 0 à 1, donc AN varie de 0 à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. N ne décrit que le segment $[AP]$ de $[Ax)$, avec $AP = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Cas pour lesquels la réciproque est inutile

Lorsqu'on peut prouver que la fonction $f: M \mapsto N$ est une transformation connue, alors en général, on connaît facilement $f(L)$, donc le lieu cherché (voir remarque du 1.).

EXEMPLE : d est une droite, O un point extérieur à d . M est un point de d , et N le symétrique de O par rapport à M . Quel est lieu géométrique du point N lorsque le point M décrit d ?

Nous remarquons que $\overrightarrow{ON} = 2 \overrightarrow{OM}$. Donc N est l'image de M par l'homothétie de centre O , point fixe, et de rapport 2. Le lieu de N est donc l'image de d par cette homothétie.



À RETENIR

Il n'est pas nécessaire d'envisager l'étude réciproque lorsqu'on parvient à démontrer que le point N dont on cherche le lieu est l'image, par une transformation (usuelle), du point M qui « bouge ».

1 = 2 Exercices

• Exercice 1

A est un point extérieur à une droite d . B est un point de d , et C est le point tel que ABC soit un triangle équilatéral de sens direct $\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \right)$. Quel est le lieu géométrique du point C lorsque B décrit d ?

• Exercice 2

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , Δ une droite extérieure à $\mathcal{C}$. La perpendiculaire à Δ menée par O coupe le cercle en Q et Q' . P est un point de $\mathcal{C}$; on trace le cercle $\mathcal{C}'$ de centre P , de rayon PO . On note M et M' les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}'$ parallèles à Δ , M étant tel que les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{PM}$ soient de même sens. Quel est le lieu de M et quel est le lieu de M' lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$?

• Exercice 3

B et C sont deux points fixes. Un point A varie de sorte que le triangle ABC soit rectangle en A . Quel est le lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABC ?

• Exercice 4

$\mathcal{C}$ est un demi-cercle de diamètre $[AB]$. M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B . N est le point de la demi-droite $[BM)$ tel que $AM = BN$. Quel est le lieu géométrique du point N lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B ?

INDICATION : Considérer la rotation qui transforme A en B et M en N .

TP 2

RÉDUCTION DE $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$.

LIGNES DE NIVEAU DE $M \mapsto \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$

Le but de ce TP est de réduire des sommes de nombres telles que :

$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2$. La méthode pour y parvenir et le résultat obtenu sont valables tant en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace. Aussi nous ne précisons pas d'abord si les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace ; c'est seulement dans les applications que nous ferons cette distinction.

2.1 Réduction de $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$ lorsque $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$

$A_1, A_2, \dots, A_n$, sont n points donnés, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n réels donnés tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$. M est un point quelconque.

POINT MÉTHODE Pour réduire la somme $a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2$ lorsque $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$,

- on introduit le barycentre G de $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$
- on écrit que pour tout i , $MA_i^2 = \overrightarrow{MA_i} \cdot \overrightarrow{MA_i} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})$.

En utilisant la méthode exposée ci-dessus, vérifiez que :

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) MG^2 + a_1 GA_1^2 + a_2 GA_2^2 + \dots + a_n GA_n^2$$

2.2 Réduction de $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$ lorsque $\sum_{i=1}^n a_i = 0$

On suppose maintenant que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$.

On sait alors que le vecteur $a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n}$ est constant (indépendant de M), et que si, par exemple, $a_1 \neq 0$, alors :

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{A_1 H},$$

H étant le barycentre de $(A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$.

En supposant $a_1 \neq 0$, montrez que :

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2 = a_1 HA_1^2 + a_2 HA_2^2 + \dots + a_n HA_n^2 + 2(a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{A_1 H}$$

INDICATION : Écrire $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA_i}$.

Note

Voir chapitre 16, théorème 3, p. 356 du tome Enseignement obligatoire.

2.3 Ensemble des points M

tels que $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2 = k$

1. Dans le plan

$A_1, A_2, \dots, A_n$, sont n points donnés du plan, $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels donnés.

On veut déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2 = k, \quad k \text{ réel arbitraire.}$$

(E) est appelée **ligne de niveau k** de l'application $f: M \mapsto \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$.

Commentaire

Cet ensemble est aussi appelé **lieu géométrique** des points M tels que :

$a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 = k$. Nous voyons ici un problème de lieu géométrique différent de celui exposé dans le TP1. Dans le TP1, il s'agit d'un lieu de points liés à une configuration mobile ; ici, il s'agit du lieu de points satisfaisant à une condition donnée.

a) On suppose $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$.

• En utilisant le résultat du 2.1, montrez que :

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2 = k \text{ équivaut à } MG^2 = \frac{k - k'}{\alpha}$$

k' et α étant des réels indépendants de M.

• En discutant selon le signe de $k - k'$ et sa nullité, montrez que (E) est soit l'ensemble vide, soit ne contient que le point G, soit est un cercle de centre G. Précisez dans ce dernier cas, le rayon de ce cercle.

• Quel est l'ensemble (E) des points M du plan (ABC) tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 25 ?$$

b) On suppose $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ et $a_1 \neq 0$ et $\overrightarrow{A_1H} \neq \vec{0}$.

• En utilisant le résultat du 2.2, montrez alors que :

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2 = k \text{ équivaut à } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{A_1H} = k',$$

k' étant un réel indépendant de M.

• Déduisez-en que l'ensemble (E) est dans ce cas, une droite orthogonale à (A_1H) .

INDICATION : Introduire le point M_0 de (A_1H) tel que $\overrightarrow{M_0H} \cdot \overrightarrow{A_1H} = k'$.

• Quel est l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 3$?

2. Dans l'espace

On suppose maintenant que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des points de l'espace, et on veut déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 + \dots + a_n MA_n^2 = k.$$

En vous inspirant de la démarche suivie dans 1., déterminez l'ensemble (E) lorsque $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$, puis lorsque $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ avec $a_1 \neq 0$.

2 = 4 Application : ensemble des points M

tels que $\frac{MA}{MB} = k$

A et B sont deux points donnés, k est un réel donné strictement positif. On veut déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

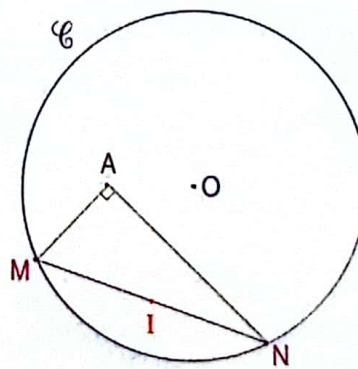
1. Prouvez que (E) est aussi l'ensemble des points M tels que $MA^2 - k^2 MB^2 = 0$.
2. Montrez alors que dans le plan, (E) est une droite lorsque $k = 1$, et un cercle lorsque $k \neq 1$. Précisez le centre et le rayon de ce cercle.
3. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

TP 3

D'AUTRES APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION DE $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$

3 = 1 Un lieu géométrique

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, de rayon r , et A est un point fixe intérieur à $\mathcal{C}$. Les points M et N sont les extrémités d'une corde mobile qui se déplace de telle sorte que l'angle $\widehat{MAN}$ soit toujours droit.



Le but de l'exercice est de trouver le lieu géométrique du point I milieu de [MN].

1. On cherche un lien entre le point mobile I et les points fixes A et O.

Prouvez que $IA^2 + IO^2 = r^2$.

Déduisez-en, en utilisant le 1. du paragraphe 2.3 (TP2), que I se déplace sur un cercle fixe $\mathcal{C}'$ dont vous préciserez le centre et le rayon.

2. Examinez la réciproque : le point I décrit-il tout le cercle $\mathcal{C}'$, c'est-à-dire tout point I de $\mathcal{C}'$ est-il le milieu d'une corde [MN] de $\mathcal{C}$ telle que $\widehat{MAN}$ soit droit ?

3 = 2 Intersection de deux sphères

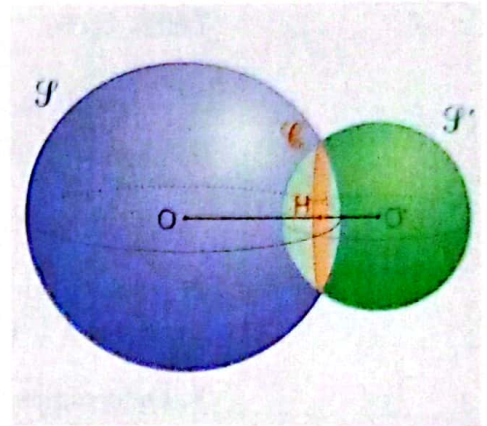
$\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont deux sphères sécantes de rayons respectifs r et r' , $r > r'$, de centres respectifs O et O' . On note I le milieu de $[OO']$. Montrez que l'intersection de ces deux sphères est un cercle $\mathcal{C}$ et que $\mathcal{C}$ est déterminé par les conditions suivantes :

- le plan de $\mathcal{C}$ est perpendiculaire à (OO') ;
- le centre de $\mathcal{C}$ est le point H de $[OO']$ défini

$$\text{par } \frac{r^2 - r'^2 + OO'^2}{2 OO'} = OH ;$$

- le rayon de $\mathcal{C}$ est égal à $r^2 - OH^2$.

INDICATION : Dire qu'un point M est commun aux deux sphères équivaut à dire que M appartient à $\mathcal{S}$ et que $MO^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2$.



TP 4

ENSEMBLE DES POINTS M DU PLAN TELS QUE $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$

4 = 1 Préliminaires

1. Angles géométriques inscrits dans un cercle

Rappelons le résultat suivant établi en classe de Troisième, sur les angles inscrits.

THÉORÈME 1

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , $[AB]$ est une corde de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{P}_1$ est le demi-plan de frontière (AB) qui contient le point O ,
 $\mathcal{P}_2$ est l'autre demi-plan.

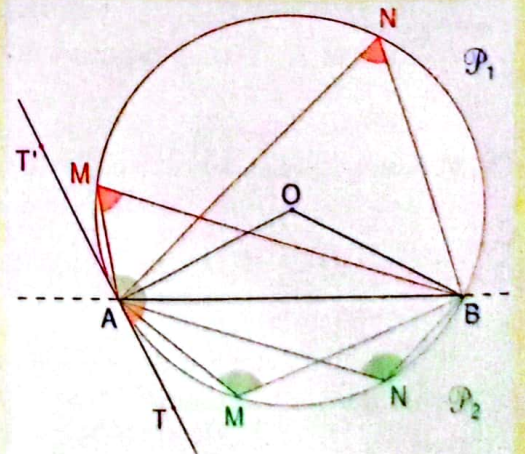
La droite $(T'T)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en A , le point T' est dans $\mathcal{P}_1$ et le point T dans $\mathcal{P}_2$. Alors :

• lorsque M et N sont deux points de $\mathcal{P}_1$ distincts de A et B ,
 $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \widehat{T'AB}$

• lorsque M et N sont deux points de $\mathcal{P}_2$ distincts de A et B ,

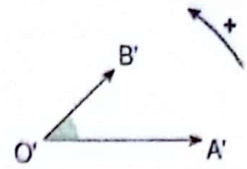
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \pi - \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \widehat{T'AB}.$$

Il en résulte, en particulier, que lorsque M et N sont de part et d'autre de A et B , $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$.



2. Énoncé du théorème en angles de vecteurs

Rappelons que la mesure principale α de l'angle de vecteurs $(\vec{O'A'}, \vec{O'B'})$ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{A'O'B'}$ lorsque pour amener la demi-droite $[O'A')$ sur la demi-droite $[O'B')$, on tourne dans le sens direct, et que c'est l'opposé de la mesure de $\widehat{A'O'B'}$ dans le cas contraire. Toute autre mesure de $(\vec{O'A'}, \vec{O'B'})$ est alors $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Vérifiez, en utilisant la figure du théorème 1, que l'on peut, dans son énoncé, remplacer les angles géométriques par des angles de vecteurs et obtenir :

THÉORÈME 1 bis

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, $[AB]$ est une corde de $\mathcal{C}$.

Alors, pour tous points M et N de $\mathcal{C}$ distincts de A et B,

- $(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{NA}, \vec{NB})$ lorsque M et N sont du même côté de $[AB]$.
- $(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{NA}, \vec{NB}) + \pi$, lorsque M et N sont de part et d'autre de $[AB]$.

3. Énoncé du théorème en angles modulo π de vecteurs non nuls

L'utilisation des angles de vecteurs modulo π permet d'éviter de distinguer les cas M et N du même côté de $[AB]$, M et N de part et d'autre de $[AB]$.

DÉFINITION 1

Dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u'}, \vec{v'})$ (modulo π) signifie que :

- ou bien $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u'}, \vec{v'})$ (modulo 2π) ;
- ou bien $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u'}, \vec{v'}) + \pi$ (modulo 2π).

Vérifiez qu'avec cette définition, le théorème 1 bis s'énonce :

THÉORÈME 1 ter

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, $[AB]$ une corde de $\mathcal{C}$.

Pour tous points M et N de $\mathcal{C}$ distincts de A et B,

$$(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{NA}, \vec{NB}) \pmod{\pi}.$$

4.2 Ensemble des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$, modulo 2π ou modulo π

A et B sont deux points donnés, α est un réel donné. Nous allons déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$ (modulo 2π), et l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$ (modulo π). Pour cela, nous allons d'abord déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $\widehat{AMB} = \alpha$, lorsque $0 < \alpha < \pi$.

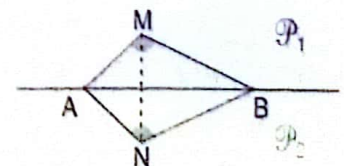
1. Détermination de l'ensemble (E) .

a) Vérifiez que la droite (AB) est un axe de symétrie de (E) . Il suffit donc de déterminer $\mathcal{P}_1 \cap (E)$.

b) On suppose que M est un point de (E) situé dans $\mathcal{P}_1$, $M \neq A$, $M \neq B$.

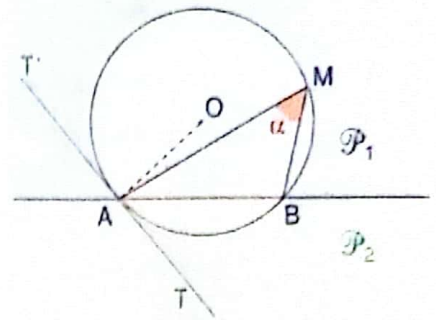
Notons $(T'T)$ la tangente en A au cercle circonscrit au triangle AMB.

• En utilisant le théorème 1, vérifiez que $\widehat{TAB} = \alpha$ et déduisez-en que la position de $(T'T)$ ne dépend pas de M (voir figure p. 76).



• Montrez que le centre O de ce cercle circonscrit est situé à l'intersection de deux droites fixes (indépendantes de M).

• Nous venons de montrer que si M appartient à $(E) \cap \mathcal{P}_1$, alors M est sur un arc d'un cercle $\mathcal{C}$ qui ne dépend que de A , B et de α . Indiquez une construction de ce cercle $\mathcal{C}$.



c) Réciproquement, en utilisant le théorème 1,

vérifiez que si un point M de $\mathcal{P}_1$ est sur $\mathcal{C}$, alors $\widehat{AMB} = \alpha$.

d) Tracez alors l'ensemble (E) lorsque $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $AB = 6$ cm.

e) Sur le dessin obtenu, précisez aussi l'ensemble (E') des points M tels que : $\widehat{AMB} = \pi - \frac{\pi}{3}$.

2. Ensemble (E_1) des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (modulo 2π)

a) Sur le dessin obtenu à la question d) du paragraphe précédent, précisez l'ensemble (E_1) dans chacun des cas suivants : $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

b) En choisissant $AB = 8$ cm, représentez l'ensemble (E_1) lorsque $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

c) Examinez les cas particuliers $\alpha = 0$ (modulo 2π), $\alpha = \pi$ (modulo 2π).

3. Ensemble (E_2) des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (modulo π)

a) Sur le dessin obtenu à la question d) du paragraphe 1, précisez l'ensemble (E_2) dans chacun des cas suivants : $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

b) En choisissant $AB = 8$ cm, représentez l'ensemble (E_2) lorsque $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

c) Examinez le cas particulier $\alpha = 0$ (modulo π).

4. Conclusion

• Lorsque $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pi$ (mod. 2π), l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (mod. 2π) est un **arc de cercle** limité par la corde $[AB]$ et privé des points A et B .

• Lorsque $\alpha \neq 0$ (mod. π), l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (mod. π) est un **cercle** passant par A et B (et privé des points A et B).

4.3 Points cocycliques

Des points cocycliques sont des points qui appartiennent à un même cercle.

1. Nous allons prouver le résultat suivant :

A, B, C, D sont quatre points dont trois quelconques ne sont pas alignés.

Alors A, B, C, D cocycliques

équivalent à : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ (modulo π).

a) On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. On suppose que D est sur $\mathcal{C}$. En utilisant le théorème 1 *ter*, p. 75, vérifiez que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ (modulo π).

b) Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (modulo π).

D appartient donc à l'ensemble (E_2) des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \text{ (modulo } \pi).$$

Vérifiez que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \alpha \neq 0$ et que $D \neq A, D \neq B$, puis en utilisant les résultats du paragraphe 4.2, vérifiez que cet ensemble est le cercle $\mathcal{C}$. Concluez.

2. On note a, b, c, d , les affixes, dans le plan complexe, des points A, B, C, D respectivement. Montrez, sous les hypothèses faites sur A, B, C, D, que :

$$A, B, C, D \text{ sont cocycliques } \text{équivaut à } \frac{b-c}{a-c} : \frac{b-d}{a-d} \text{ est réel.}$$

TP 5

DES APPLICATIONS DE LA COCYCLICITÉ

5.1 Des propriétés des angles modulo π de vecteurs non nuls

DÉFINITION 2 Dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ (modulo π) signifie que :

- ou bien $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ (modulo 2π)
- ou bien $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + \pi$ (modulo 2π).

1. Cette définition permet de traduire plus simplement certains résultats, comme nous l'avons vu, par exemple, au TP 4.

a) Un autre exemple est la colinéarité de deux vecteurs : elle se traduit par

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ (modulo } 2\pi) \text{ ou } (\vec{u}, \vec{v}) = \pi \text{ (modulo } 2\pi)$$

et peut s'exprimer simplement en disant :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires } \text{équivaut à } (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ (modulo } \pi).$$

b) On peut aussi énoncer le résultat suivant :

Si $\vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{u}$, si $\vec{v}'$ est colinéaire à $\vec{v}$, alors :

$$(\vec{u}', \vec{v}') = (\vec{u}, \vec{v}) \text{ (modulo } \pi).$$

Vérifiez ce résultat sur les figures ci-dessous, remarquez qu'il n'est pas vrai lorsqu'on l'énonce modulo 2π .



2. La **relation de Chasles** est vraie modulo π . Elle dit que :

si $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ (modulo π), et si $(\vec{v}, \vec{w}) = \beta$ (modulo π), alors $(\vec{u}, \vec{w}) = \alpha + \beta$ (modulo π).

Vérifiez cette affirmation. On écrit alors : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$ (modulo π).

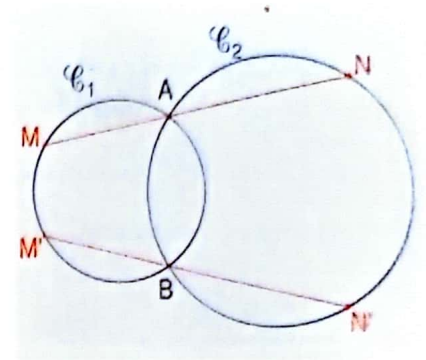
5.2 Une application : un parallélisme surprenant

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles sécants en A et B.

Par A, on mène une sécante quelconque qui coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en M et le cercle $\mathcal{C}_2$ en N.

Par B, on mène une sécante quelconque qui coupe $\mathcal{C}_1$ en M' et $\mathcal{C}_2$ en N'. Alors les droites (MM') et (NN') sont parallèles. Pour le démontrer, nous allons prouver que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont colinéaires, ce qui revient à prouver, d'après 5.1,

que $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{NN'}) = 0$ (modulo π).



1. Justifiez chacune des égalités suivantes :

a) $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{NN'}) = (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'B}) + (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{NN'})$ (modulo π).

b) $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'B})$ (modulo π).

c) $(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB})$ (modulo π).

d) $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{N'N}, \overrightarrow{N'B}) = (\overrightarrow{N'N}, \overrightarrow{M'B})$ (modulo π).

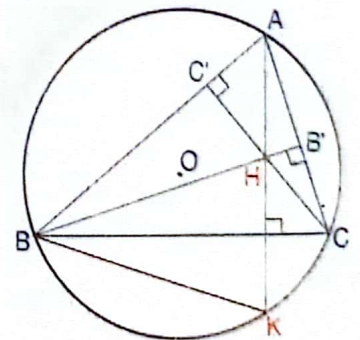
2. Concluez.

5.3 Les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés

ABC est un triangle, H est son orthocentre.

Nous allons montrer que le symétrique de H par rapport à l'un quelconque des côtés est sur le cercle circonscrit à ABC.

Ce résultat a déjà été démontré en classe de Première et de plusieurs façons. En voici une autre. Notons K le symétrique de H par rapport à (BC).



1. En utilisant le fait que la réflexion transforme un angle de vecteurs en son opposé, vérifiez que :

$$(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) \text{ (modulo } 2\pi).$$

2. Quel résultat énoncé en 5.1 permet d'affirmer que :

$$(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) \text{ (modulo } \pi) ?$$

3. Montrez que $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (modulo π), puis concluez.

TP 6

CERCLES HOMOTHÉTIQUES SEGMENTS HOMOTHÉTIQUES

6.1 Cercles homothétiques

1. Cercles non concentriques et de rayons différents

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des cercles non concentriques, de centres respectifs O et O' , de rayons respectifs r et r' , $r \neq r'$.

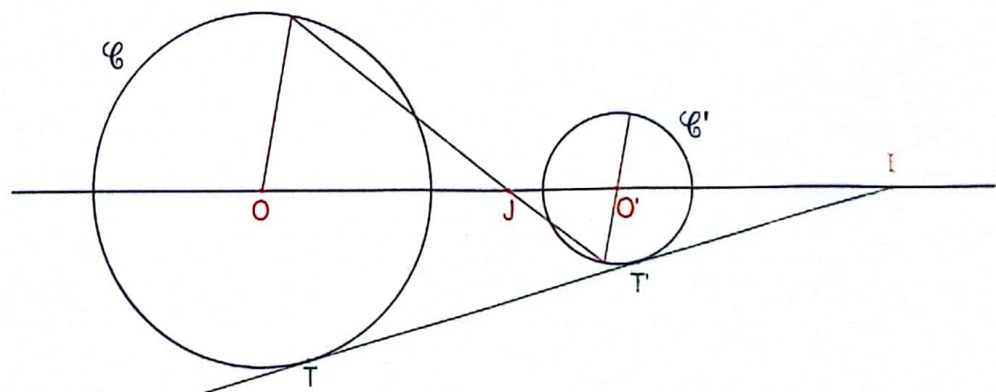
Alors il existe deux homothéties, et deux seulement, transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$:

- l'une a pour rapport $\frac{r'}{r}$ et pour centre le point I de (OO') tel que $\overrightarrow{IO'} = \frac{r'}{r} \overrightarrow{IO}$;
- l'autre a pour rapport $-\frac{r'}{r}$ et pour centre le point J de (OO') tel que $\overrightarrow{JO'} = -\frac{r'}{r} \overrightarrow{JO}$.

Chacune des tangentes communes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passe par l'un des points I ou J .

a) Démontrez chacun des résultats énoncés ci-dessus.

b) Indiquez et justifiez la façon dont ont été construits I et J sur la figure suivante.



c) Dans le cas de la figure, combien y a-t-il de tangentes communes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

2. Autres cas

Déterminez les homothéties transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ lorsque :

- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont des rayons distincts et sont tangents
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont des rayons distincts et sont concentriques.
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont même rayon.

6.2 Segments homothétiques

$[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments donnés, $AB \neq A'B'$, et (AB) parallèle à $(A'B')$.

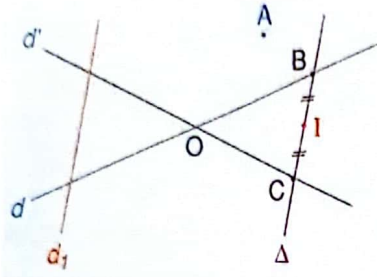
1. Montrez qu'il existe deux homothéties et deux seulement qui transforment $[AB]$ en $[A'B']$, situez leurs centres et précisez leurs rapports.

2. Montrez que les deux centres et les milieux de $[AB]$ et de $[A'B']$ sont alignés.

POUR S'ENTRAÎNER

Lieux géométriques

1 d et d' sont deux droites fixes sécantes en O . A est un point fixe extérieur à d et à d' . Une droite Δ varie en restant parallèle à une droite fixe d_1 , d_1 n'est pas parallèle à d et n'est pas parallèle à d' , et d_1 ne passe pas par O ; Δ coupe d en B et d' en C . On note I le milieu de $[BC]$.



1. Quel est le lieu géométrique des points I lorsque Δ varie comme il est dit dans l'énoncé ?

INDICATION : Introduire le point B_1 intersection de d_1 et d , le point C_1 intersection de d_1 et d' , le point I_1 milieu de $[B_1C_1]$.

2. Quel est le lieu géométrique des centres de gravité des triangles ABC ?

2 $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , A est un point fixe extérieur au disque. M est un point variable de $\mathcal{C}$. Dans le triangle AOM , la bissectrice intérieure issue de O coupe (AM) en N . Quel est le lieu géométrique des points N lorsque M décrit $\mathcal{C}$?

INDICATION : Dans tout triangle BCD , si E est le point de rencontre de la bissectrice intérieure de $\widehat{CBD}$ et de (CD) , alors $\frac{EC}{CB} = \frac{ED}{DB}$, d'où $\vec{EC} = -\frac{CB}{DB} \vec{ED}$.

3 O et I sont deux points donnés, r est la rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quel est le lieu géométrique des points M tels que $M, I, M' = r(M)$, soient alignés ?

INDICATION : Introduire le point $I' = r(I)$.

4 d est une droite et B un point de d . On note $\mathcal{P}_1$ l'un des demi-plans dont la frontière est la droite d . C étant un point de d , on construit dans $\mathcal{P}_1$ un triangle BMC isocèle en M , dont le rayon du cercle circonscrit a une longueur donnée $r, r > 0$. On note O le centre de ce cercle circonscrit.

1. Montrez que cette construction n'est possible que lorsque C appartient à un segment fixe que vous préciserez.

2. Quel est le lieu géométrique des points M lorsque C décrit ce segment ?

3. On note H l'orthocentre du triangle BCM . On sait que le symétrique de H par rapport à (BC) est sur le cercle circonscrit à BCM (résultat démontré par exemple au TP 5). Déduisez-en que H est l'image de O par la composée d'une translation et d'une réflexion, et précisez le lieu géométrique de H lorsque C décrit le segment déterminé en 1.

5 Trois points donnés A, B, C sont tels que $\vec{AC} = 3\vec{AB}$. Un point M décrit le cercle de diamètre $[BC]$. La parallèle à (CM) passant par B coupe (AM) en P . Quel est le lieu géométrique des points P ?

6 d est une droite fixe. A et B sont deux points fixes non situés sur d . On note C le symétrique de A par rapport à un point M de d . Le point M décrit d .

1. Quel est le lieu géométrique du milieu E de $[AM]$?

2. Quel est le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle ABM ?

3. Quel est le lieu géométrique de C ?

4. Quel est le lieu géométrique du point d'intersection de (BM) et (CO) (O étant le milieu de $[AB]$) ?

7 On donne un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, de centre O , et un point I de la droite (AB) extérieur au cercle $\mathcal{C}$. À tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et B , on associe le point N diamétralement opposé à M sur $\mathcal{C}$, et le point M' d'intersection des droites (BN) et (IM) . Quel est le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B ?

INDICATION : Poser $\vec{IB} = k\vec{IA}$, k réel fixé. Prouver alors que $\vec{IM'} = k\vec{IM}$.

8 B et C sont deux points fixes. H est un point fixe du segment $[BC]$. A est un point variable de la droite Δ perpendiculaire en H à (BC) . Le point G est le centre de gravité du triangle ABC , E est le milieu de $[AC]$, F est le milieu de $[AB]$. Quels sont les lieux géométriques respectifs des points G, E et F ?

9 $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , A et B sont deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

1. Pour tout point M de $\mathcal{C}$, distinct de A et B , on construit le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme. Déterminez le lieu géométrique du point I , milieu du segment $[MQ]$, puis le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle BQM , lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B .

2. On note N le symétrique de A par rapport à M , et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM) . Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ?

Trouvez une homothétie de centre B transformant M en P et déterminez le lieu géométrique des points P lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B .

10 Axe radical de deux cercles

On appelle puissance d'un point M par rapport à un cercle de centre K et de rayon r , le nombre $p(M) = KM^2 - r^2$.

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre J et de rayon r .

$\mathcal{C}'$ est un cercle de centre K et de rayon r' , $K \neq J$.

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu géométrique des points M qui ont même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

On note I le milieu de $[JK]$.

1. Démontrez que « M a même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ » équivaut à « $\vec{IM} \cdot \vec{JK} = \frac{r^2 - r'^2}{2}$ ».

2. Dédisez-en que le lieu cherché est une droite orthogonale à (JK) . Précisez la position de son point d'intersection avec (JK) . Cette droite est appelée *axe radical des deux cercles*.

3. Montrez que lorsque deux cercles sont sécants en A et B , leur axe radical passe par A et B .

11 Rotations transformant deux droites

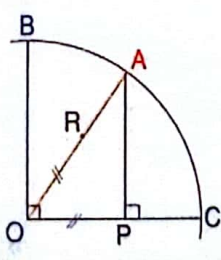
1.a. r est une rotation de centre O et d'angle θ . d est une droite qui ne passe pas par O , et d' est son image par r . Prouvez que O est équidistant de d et de d' .

b. Dédisez-en une construction de l'image d'une droite par une rotation.

2. d et d' sont deux droites sécantes données. Quel est le lieu géométrique des centres des rotations qui transforment d en d' ?

12* $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , de diamètre $[AB]$. M est un point de $\mathcal{C}$, Δ est la tangente en M à $\mathcal{C}$. La parallèle à (AM) menée par O coupe Δ en N . Quel est le lieu géométrique des points N lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

13 Un point A décrit un quart de cercle de centre O , limité par deux rayons perpendiculaires (OC) et (OB) . P est le projeté orthogonal de A sur (OC) . Sur la demi-droite d'origine O qui passe par A , on place le point R tel que $OR = OP$.



1. Quel est le lieu géométrique des points R lorsque A décrit le quart de cercle ?

INDICATION : On peut introduire la médiatrice Δ de $[AC]$ et utiliser une réflexion par rapport à Δ .

2. Quel serait le lieu géométrique des points R si A décrivait le demi-cercle ?

14 Utilisation de la cocyclicité

ABC est un triangle équilatéral direct du plan orienté.

m est un point de la droite (BC) distinct de B et C .

$\mathcal{C}$ est le cercle qui passe par m et qui est tangent en B à (AB) . La droite (Am) recoupe $\mathcal{C}$ en M' .

Quel est le lieu géométrique des points M' lorsque m décrit la droite (BC) privée des points B et C ? Construisez ce lieu.

INDICATION : Calculer $(\vec{M'A}, \vec{M'B})$.

15 Utilisation de la cocyclicité

I et J sont deux points d'un cercle $\mathcal{C}$. M est un point de $\mathcal{C}$.

La perpendiculaire en I à (MI) rencontre (MJ) en P , et la perpendiculaire en J à (MJ) rencontre (MI) en Q .

M décrit le cercle $\mathcal{C}$.

1. Quel est alors le lieu géométrique du point P ? celui du point Q ?

INDICATION : Montrer que, modulo π , les angles $(\vec{PI}, \vec{PJ})$ et $(\vec{QI}, \vec{QJ})$ sont constants.

2. Montrez que (PQ) passe par un point fixe.

16 Utilisation de lignes de niveau

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles donnés de centres respectifs O et O' , de rayons respectifs r et r' .

Quel est le lieu géométrique des points M d'où l'on peut mener des tangentes à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$ de même longueur ?

Lignes de niveau dans le plan

17 **BAC** Une unité de longueur a été choisie.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de $[AC]$ et D le point défini par la relation $4\vec{AD} = \vec{AB} + 3\vec{BC}$.

1. Démontrez que D est le barycentre du système :

$$\{(A, 3); (B, -2); (C, 3)\}.$$

Dédisez-en que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.

2. Démontrez que $\vec{BD} = \frac{3}{2} \vec{BB'}$.

3. Calculez DA^2 et DB^2 .

4. Déterminez l'ensemble (E) des points M tels que :

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12.$$

Vérifiez que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E) . Tracez (E) .

18 **BAC** Dans le plan, on considère un triangle ABC tel que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$ (unité graphique : 1 cm). Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Montrez que $AI = \sqrt{33}$.

2.a. Soit M un point du plan.

Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{U}$ indépendant du point M ?

Déterminez alors le vecteur $\vec{U}$ en fonction du vecteur $\vec{AI}$.

b. Déterminez et construisez l'ensemble (E) des points M du plan tels que $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$.

3. Soit D le barycentre du système $\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

Justifiez votre réponse.

b. Déterminez et construisez l'ensemble (F) des points M du plan tels que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

19 **BAC** ABCD est un rectangle du plan, de diagonales [AC] et [BD] de longueur a .

1. Soit m un réel non nul.

On note G_m le barycentre du système $\{(A, m); (B, -1); (C, 1)\}$.

a. Précisez la position de G_1 .

b. Déterminez l'ensemble (E_1) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

2. Quel est l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = a ?$$

3. Quel est l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{4} ?$$

4. Faites une figure représentant le rectangle ABCD et les ensembles (E_1) , (E_2) et (E_3) .

20 **BAC** Une unité de longueur étant choisie, on considère, dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a$ et $AC = a$, où a est un réel positif donné.

1. Déterminez et construisez l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$.

2. On désigne par H le point du plan tel que :

$$\vec{AH} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2 \vec{AC}.$$

a. Démontrez que H est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que vous déterminerez.

b. On considère l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k.$$

Pour quelle valeur du nombre réel k , cet ensemble contient-il le point A ? Pour cette valeur, précisez l'ensemble obtenu, noté (E_2) , et construisez-le.

21 ABC est un triangle quelconque du plan.

1.a. Déterminez et placez sur la figure le barycentre I du système $\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$.

b. Exprimez $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\|$ en fonction de MI.

2.a. Déterminez et placez sur la figure le barycentre J du système $\{(A, 8); (B, -1); (C, -1)\}$.

b. Exprimez $\|8\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$ en fonction de MJ.

3. Construisez l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = \|8\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|.$$

22 **BAC** ABC est un triangle équilatéral de côté a . On note A' le milieu de [BC] et O le centre du triangle.

1.a. Déterminez l'ensemble (E) des réels m tels que les points A, B, C affectés respectivement des coefficients $m, 1, 1$ admettent un barycentre.

b. Quel est l'ensemble des barycentres obtenus lorsque m décrit (E) ?

2. Dans cette question, on choisit $m = 2$.

a. Déterminez le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 1, 1.

Placez sur une figure les points A, B, C, O, A', G.

b. Déterminez et construisez l'ensemble (F) des points M tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

3. Dans cette question on choisit $m = -2$.

Soit (D) l'ensemble des points M tels que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0.$$

Précisez la nature de (D) et de son intersection avec la droite (AA') . Tracez (D) sur la figure précédente.

23 **BAC** Soit A, B, C trois points du plan non alignés et tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

1. On considère le vecteur $\vec{u} = a^2 \vec{BC} + b^2 \vec{CA} + c^2 \vec{AB}$.

Montrez que $\vec{u} = (a^2 - b^2) \vec{AC} + (c^2 - a^2) \vec{AB}$.

Déduisez-en que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.

2. Pour tout point M du plan, on pose :

$$f(M) = a^2 \vec{BC} \cdot \vec{MA'} + b^2 \vec{CA} \cdot \vec{MB'} + c^2 \vec{AB} \cdot \vec{MC'}.$$

a. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calculez $f(O)$.

b. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrez que

$$\vec{BC} \cdot \vec{GA'} = \frac{1}{6} (b^2 - c^2).$$
 Déduisez-en la valeur de $f(G)$.

c. Déterminez l'ensemble (D) des points M du plan tels que :

$$f(M) = 0.$$

24 Dans le plan, on donne un triangle ABC rectangle en A et isocèle avec $AB = AC = a$, a réel strictement positif.

1. Déterminez et construisez le barycentre G du système $\{(A, 4); (B, -1); (C, -1)\}$.

2. Déterminez et construisez, dans chaque cas, l'ensemble des points M du plan tels que :

a. les vecteurs $4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ et $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ soient colinéaires.

b. $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2a^2$.

c. $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$.

d. $(4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}) \cdot (\vec{MB} + \vec{MC}) = 0$.

e. $\|4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = k \|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|$, k étant un réel. (Discutez selon les valeurs de k .)

25 A et B sont deux points donnés du plan. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$?

26 Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = a$ et $AC = 3a$ (où $a > 0$). On fera une figure en prenant $a = 2$ cm.

1. Construisez le barycentre G du système :
 $\{(A, -5); (B, 6); (C, 2)\}$.

2. Calculez GA^2 , GB^2 et GC^2 en fonction de a .

INDICATION : Choisir un repère orthonormal d'origine A.

3. Déterminez et construisez l'ensemble $\mathcal{I}$ des points M du plan vérifiant $-5MA^2 + 6MB^2 + 2MC^2 = 12a^2$.

27 L'unité est le cm. On donne, dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ et $AC = 4$.

1. Construisez le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 3, -1, 2.
2. Déterminez et construisez l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant $3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32$.
3. Déterminez et construisez l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant $\|3\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$.

28 Curieux ?

ABC est un triangle quelconque, G est son centre de gravité.

1. Est-il évident sur une figure, que pour tous points M et M' du plan, lorsque $M'G > MG$, alors :

$$M'A^2 + M'B^2 + M'C^2 > MA^2 + MB^2 + MC^2 ?$$

Prouvez que cela est pourtant vrai.

2. On note m_A , m_B , m_C , les médianes de ABC issues respectivement de A, B et C. Prouvez que pour tout point M du plan (ABC), $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{4}{9}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2)$, et que l'égalité n'a lieu que pour un seul point M que vous préciserez.

29 ABC est un triangle équilatéral, D est le point tel que $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$.

Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 3AB^2.$$

INDICATION : Rvoir le paragraphe 2.3 du TP 2, p. 72.

Lignes de niveau dans l'espace

30 A, B et C sont trois points de l'espace, non alignés.

1. M est un point quelconque de l'espace. Que pouvez-vous dire du vecteur $\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$?
2. Quel est l'ensemble des points M tels que :
 $\vec{OM} \cdot \vec{MA} + 2\vec{OM} \cdot \vec{MB} - 3\vec{OM} \cdot \vec{MC} = 0$
 où O est un point donné ?

31 A et B sont deux points donnés de l'espace. Quel est l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = \frac{5}{2}AB^2$?

32 A et B sont deux points de l'espace tels que $AB = 2$. Trouvez, dans chaque cas, l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- a. $MA^2 - MB^2 = 1$; b. $MA^2 + MB^2 = 3$; c. $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -2$.

33 Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD tel que $BA = BC = a\sqrt{5}$ et $AC = 2a$, a réel positif.

I est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 2) ; K est le milieu du segment [AB] ; J est tel que $\vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BD}$.

1. Montrez que J est le barycentre des points B, C, D affectés de coefficients que vous préciserez. Faites une figure et placez les points I, J, K.
2. Montrez que les droites (ID) et (AJ) sont sécantes.
3. On se place dans le plan (ABC) noté $\mathcal{P}$. E est le point tel de $\mathcal{P}$ que $\vec{AE} = \vec{BC}$.

a. Démontrez que ABCE est un losange. Soit O son centre. Calculez OB.

b. Démontrez que K est le barycentre de (B, 2), (C, -1), (E, 1).

c. Démontrez que pour tout point M du plan $\mathcal{P}$,
 $\vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{ME} = \vec{EB}$.

d. Déterminez et construisez l'ensemble (E₁) des points M de $\mathcal{P}$ tels que $(\vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{ME}) \cdot (2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{ME}) = 0$.

e. Déterminez et construisez les ensembles des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$(E_2) : MA^2 + MC^2 - 2ME^2 = -6a^2$$

$$(E_3) : MA^2 + MC^2 - 2ME^2 \geq -6a^2$$

Ensembles de points

et angles orientés dans le plan

34 A et B sont deux points donnés.

Représentez l'ensemble des points M tels que :

$$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{4} \text{ (modulo } 2\pi),$$

puis l'ensemble des points N tels que :

$$(\vec{NA}, \vec{NB}) = \frac{\pi}{4} \text{ (modulo } \pi).$$

35 A et B sont deux points donnés.

Représentez l'ensemble des points M tels que :

$$(\vec{MA}, \vec{MB}) = -\frac{\pi}{3} \text{ (modulo } \pi).$$

36 ABC est un triangle quelconque. A', B', C', sont trois points situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Montrez que les cercles (AB'C'), (BC'A'), (CA'B'), ont au moins un point commun.

37 Deux cordes orthogonales [AB] et [CD] d'un cercle se coupent en P. Montrez que la médiane du triangle PBC issue de P est une hauteur du triangle PAD.

38 ABC est un triangle isocèle en A, $\mathcal{C}$ est son cercle circonscrit. M est un point de $\mathcal{C}$, et P l'intersection des droites (AM) et (BC).

Montrez que le cercle circonscrit au triangle BMP est tangent en B à (AB).

39 A et B sont deux points du plan.

1. Construisez un point C tel que $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{3}$ (modulo π).

2. La perpendiculaire en A à (CA) et la perpendiculaire en B à (CB) se coupent en C'.

Le point O est le milieu du segment [CC']. Montrez que O est fixe lorsque C varie.

INDICATION : Calculer $(\vec{OA}, \vec{OB})$ (modulo 2π).

3. On pose $AB = 2a$. Calculez les distances CC', OA, OB.

40 Un problème de construction

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, d est une droite qui ne rencontre pas le cercle, A est un point de d .

Le but de l'exercice est de construire un cercle $\mathcal{C}'$ tangent à d en A, et tangent à $\mathcal{C}$.

1. Analyse

a. On suppose le problème résolu

Tracez, même approximativement, un cercle $\mathcal{C}'$ répondant à la question. Notez O' son centre, et I le point de contact avec $\mathcal{C}$.

b. Étude de la figure

- Montrez que O' est sur une droite fixe. Tracez cette droite.
- Il existe une homothétie h de centre I qui transforme $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}$. Quelle est l'image de O' par h ?

Posez $B = h(A)$. Montrez que B est sur une droite fixe et sur $\mathcal{C}$, et que la connaissance de B permet de placer I, puis O'.

2. Synthèse

Indiquez, en justifiant, la construction d'un cercle $\mathcal{C}'$.

3. Discussion

Montrez qu'il existe deux cercles $\mathcal{C}'$ répondant à la question.

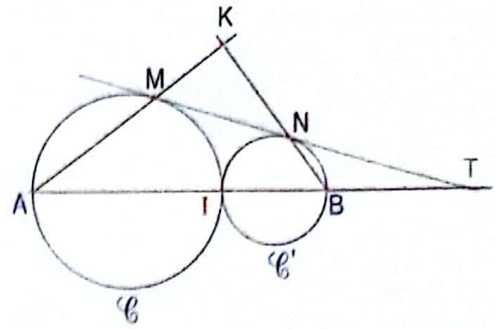
EXERCICES COMMENTÉS

41 ÉNONCÉ :

[AB] est un segment, I est un point de [AB].

$\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [AI], $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre [BI]. (MN) est une tangente commune extérieure aux deux cercles, avec M sur $\mathcal{C}$ et N sur $\mathcal{C}'$. (AM) et (BN) se coupent en K.

Quel est le lieu géométrique des points K lorsque I décrit [AB] privé de A et B ?



VERS UNE SOLUTION :

À l'examen de la figure, l'angle $\hat{K}$ semble droit, et si cela est bien vrai, le lieu de K sera inclus dans le cercle fixe de diamètre [AB].

Mais, auparavant, on tire quelques conséquences immédiates des hypothèses. On obtient en particulier que $\widehat{AMI}$ et $\widehat{INB}$ sont droits, et donc, pour démontrer que $\widehat{AKB}$ est droit, il suffit de démontrer que (AK) et (IN) sont parallèles.

1. Justifiez toutes ces affirmations.

2. Retour aux hypothèses et à la figure pour trouver, compte tenu de la situation, un moyen pour démontrer que (AK) // (IN). Deux cercles, une tangente commune, c'est une « figure-clé » de l'homothétie : les deux cercles sont homothétiques par une homothétie de centre T (ou I).

a. Vérifiez que l'homothétie h de centre T qui transforme le centre de $\mathcal{C}$ en le centre de $\mathcal{C}'$, transforme (AM) en (IN).

b. Déduisez-en que $\widehat{AKB}$ est droit et donc que K est sur le cercle de diamètre [AB]. Notons $\mathcal{C}_1$ ce cercle.

3. Étude de la réciproque

Il reste maintenant à répondre à la question : le point K décrit-il tout le cercle $\mathcal{C}_1$? Autrement dit, si K appartient à $\mathcal{C}_1$, existe-t-il un point I de [AB] tel qu'en effectuant, à partir de ce point I, la construction de l'énoncé, on retrouve ce point K ? Pour cela, on cherche d'abord un lien entre I et K.

a. Montrez que la droite (KI) est perpendiculaire à (AB).

INDICATION : Par exemple, remarquer que [IK] et [MN] ont le même milieu O et que, C étant le centre de $\mathcal{C}$, $\widehat{CIO}$ est le symétrique de $\widehat{CMO}$ par rapport à (OC).

b. K étant un point de $\mathcal{C}_1$, notez I le projeté orthogonal de K sur [AB]. Tracez les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de diamètres respectifs [AI] et [BI].

La droite (KA) recoupe $\mathcal{C}$ en M, et la droite (KB) recoupe $\mathcal{C}'$ en N.

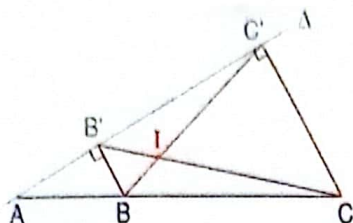
La droite (MN) est-elle tangente commune à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$?

c. Concluez alors sur le lieu de K.

42 ÉNONCÉ :

A, B, C sont trois points du plan tel que $\vec{AC} = 3\vec{AB}$. Δ est une droite qui passe par A. Les points B' et C' sont respectivement les projetés orthogonaux de B et C sur Δ . Les droites (BC') et (B'C) se coupent en I.

Quel est le lieu géométrique des points I lorsque Δ pivote autour de A ?



VERS UNE SOLUTION :

Seuls A, B et C sont fixes !

En faisant la figure et en tirant les premières conséquences des hypothèses, on pense qu'il est dommage que l'énoncé n'ait pas plutôt demandé le lieu de B' et le lieu de C'. Ils sont en effet faciles à trouver.

1. Prouvez que chacun des points B' et C' est situé sur un cercle fixe de la figure. B' décrit-il tout le cercle en question lorsque Δ pivote autour de A ?
Même question pour C'.

2. Néanmoins, cette remarque permet d'avancer. En effet, puisque par exemple B est fixe et que le lieu de C' est connu, l'idée vient de « trouver une relation entre B, I et C' ». Un nouvel examen de la figure permet de voir que c'est une « figure-clé » de Thalès ou de l'homothétie : les triangles ABB' et ACC' sont homothétiques, et donc [BB'] et [CC'] le sont aussi.

a. Puisque l'homothétie de centre A et de rapport 3 transforme B en C et B' en C', l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{3}$ transforme B en C'. Prouvez cette dernière affirmation.

b. De $\vec{IC'} = -\frac{1}{3}\vec{IB}$, déduisez que $\vec{BI} = k\vec{BC'}$, k réel constant.

c. Déduisez alors le lieu de I.

Remarque : Le fait que $\vec{AC} = 3\vec{AB}$ n'est pas important. Ce qui est essentiel, c'est que $\vec{AC} = a\vec{AB}$ avec a constante positive.

PROBLÈME

43 THÈMES : Distance du centre du cercle inscrit au centre de gravité

ABC est un triangle. On pose $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

1. D est le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de A et de (BC). Le but de cette question est de démontrer que $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$.

a. Première démonstration

• On mène de C la parallèle à (AD). Cette parallèle coupe (AB) en K. En utilisant des résultats connus sur les angles alternes-internes et correspondants, montrez que le triangle AKC est isocèle en A.

• Montrez que $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$.

b. Deuxième démonstration

On note E le projeté orthogonal de B sur (AD) et F le projeté orthogonal de C sur (AD).

• Vérifiez que $\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{c}{\sin \widehat{BDA}}$ et $\frac{CD}{\sin \widehat{DAC}} = \frac{b}{\sin \widehat{CDA}}$.

INDICATION : Dans tout triangle MNP, $\frac{NP}{\sin \widehat{M}} = \frac{MP}{\sin \widehat{N}} = \frac{MN}{\sin \widehat{P}}$.

• Déduisez-en que $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$.

2.a. Déduisez de la question 1. que D est le barycentre de (B, b), (C, c).

b. On note I le point de concours des bissectrices intérieures du triangle ABC. Le point I est aussi le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Montrez que I est le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c).

3. Le but de cette question est de calculer la distance de I au centre de gravité G du triangle ABC. (On suppose ABC non équilatéral.)

a. Prouvez que $GA^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

b. Montrez que pour tout point M du plan :

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 =$$

$$(a + b + c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2.$$

c. En calculant $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$ lorsque M = A, puis M = B, puis M = C, montrez que $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

d. En calculant $aGA^2 + bGB^2 + cGC^2$ de deux manières, calculez GI^2 .

LES CONIQUES

CHAPITRE

5

Les coniques sont les **paraboles**, les **hyperboles**, et les **ellipses**.

Vous connaissez déjà les paraboles, courbes représentatives des fonctions polynômes du second degré, et les hyperboles, courbes représentatives des fonctions homographiques. Nous allons définir les coniques de manière géométrique, établir leurs équations dans un repère orthonormal bien choisi, et à partir de ces équations, déduire quelques propriétés et leurs tracés.

Les coniques furent étudiées très tôt dans l'Histoire [Menechme, mathématicien grec vers 350 avant notre ère ; Apollonius, mathématicien et astronome grec (– 260 ; – 200), publie un traité célèbre *Sections coniques*].

Les mathématiciens de l'Antiquité étudient les coniques non pas à partir de leurs équations, mais d'un point de vue purement géométrique comme intersection d'un cône de révolution par un plan.

SOMMAIRE

Cours	87
Exercices résolus	99
Travaux pratiques d'application	100
Des idées, des réflexes	104
Exercices et problèmes	105

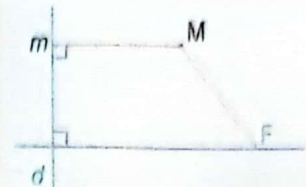
1. CONIQUES : DÉFINITIONS, ÉLÉMENTS REMARQUABLES

1.1 Définitions

DÉFINITION 1

Étant donné une droite d , un point F non situé sur d , un nombre réel e strictement positif, on appelle **conique** de foyer F , de directrice d et d'excentricité e , l'ensemble des points M du plan tels que

$$\frac{MF}{Mm} = e \quad \text{où } m \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } d.$$



REMARQUE : Puisque, pour tout M appartenant à la conique $\mathcal{C}$, les nombres MF , Mm , e sont strictement positifs, $\mathcal{C}$ est aussi l'ensemble des points M tels que $MF^2 - e^2 Mm^2 = 0$. Nous utiliserons souvent cette remarque.

DÉFINITION 2

- Une **parabole** est une conique dont l'excentricité e est égale à 1, $e = 1$.
- Une **ellipse** est une conique dont l'excentricité e est strictement inférieure à 1, $e < 1$.
- Une **hyperbole** est une conique dont l'excentricité e est strictement supérieure à 1, $e > 1$.

1.2 Axe focal de la conique

DÉFINITION 3

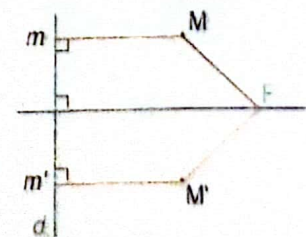
La perpendiculaire à d menée par F est l'**axe focal** de la conique.

PROPRIÉTÉ

L'**axe focal** est un **axe de symétrie** de la conique.

En effet, la réflexion par rapport à l'axe focal, comme toutes les réflexions, conserve la distance et l'orthogonalité. Donc, pour les symétriques M' et m' de M et m , nous obtenons $M'F = MF$ et $Mm = M'm'$, d'où $\frac{MF}{Mm} = \frac{M'F}{M'm'}$.

Ainsi, si M appartient à la conique, M' aussi, d'où l'assertion.



1.3 Sommets

Notons K le projeté orthogonal de F sur d .

Les points communs à l'axe focal et à la conique sont les points tels que « M, F, K sont alignés et

$\overrightarrow{MF} = e \overrightarrow{MK}$ ». Vectoriellement, cette condition se traduit par $\overrightarrow{MF} = e \overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = -e \overrightarrow{MK}$,

c'est-à-dire par : $\overrightarrow{MF} - e \overrightarrow{MK} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MF} + e \overrightarrow{MK} = \vec{0}$ [1].

Lorsque $e \neq 1$, la condition [1] se traduit en disant que M est le barycentre de $(F, 1)$, $(K, -e)$ ou que M est le barycentre de $(F, 1)$, (K, e) .

Lorsque $e = 1$, nous obtenons $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$. Or, il n'existe pas de point M tel que $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$, mais il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$, c'est le milieu M de $[FK]$. En résumé,



- Si $e \neq 1$, c'est-à-dire si la conique est une ellipse ou une hyperbole, l'axe focal rencontre la conique en deux points distincts ; ces points sont appelés les **sommets** de l'ellipse ou de l'hyperbole.
- Si $e = 1$, c'est-à-dire si la conique est une parabole, l'axe focal rencontre la conique en un seul point, appelé **sommet** de la parabole.

2. PARABOLES

2.1 Définitions

DÉFINITION 4

On appelle **paramètre** d'une **parabole** la distance du foyer à la directrice. On note p ce paramètre.

REMARQUE : Le paramètre p est un nombre strictement positif.

2.2 Équation réduite d'une parabole

THÉORÈME 1

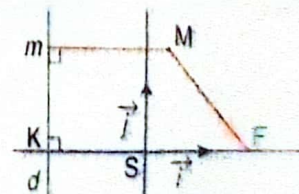
$\mathcal{P}$ est une parabole de sommet S , de foyer F , de paramètre p .

$(S; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal d'origine S et dont l'axe des abscisses est l'axe focal de $\mathcal{P}$, orienté du sommet vers le foyer.

Dans un tel repère, $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$.

Notons d la directrice de $\mathcal{P}$, K le projeté orthogonal de F sur d . Nous avons vu, § 1.3, que S est le milieu de $[FK]$. Puisque p est le paramètre, $p = FK$ et $FS = \frac{p}{2}$.

Choisissons un repère orthonormal



$(S; \vec{i}, \vec{j})$ dont l'axe des abscisses est l'axe focal de $\mathcal{P}$ orienté de S vers F.

Les coordonnées de K sont alors $\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, celles de F sont $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Pour tout point $M(x; y)$ du plan :

$$MF^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \quad \text{et} \quad Mm^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2$$

donc :

$$MF^2 - Mm^2 = y^2 - 2px.$$

Or, dire que M appartient à $\mathcal{P}$ équivaut à dire que $MF^2 - Mm^2 = 0$ (voir remarque § 1.1), donc à dire que $y^2 = 2px$.

DÉFINITION 5

L'équation $y^2 = 2px$ est appelée **équation réduite de la parabole** $\mathcal{P}$ de paramètre p .

REMARQUE : Le foyer F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, la directrice a pour équation $x = -\frac{p}{2}$ (dans le repère utilisé pour trouver l'équation réduite).

2.3 Tracé de la parabole $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ dans $(S; \vec{i}, \vec{j})$ sont telles que $y^2 = 2px$. Puisque $p > 0$, nécessairement $x \geq 0$, et donc :

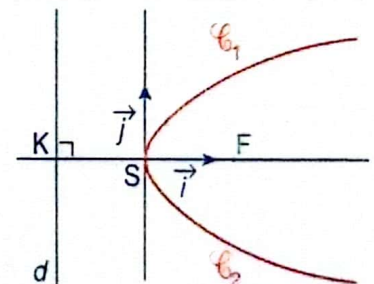
$$y = \sqrt{2px} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{2px}.$$

Notons $\mathcal{C}_1$ la courbe représentant la fonction

$f_1: x \mapsto \sqrt{2px}$ et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentant la fonction $f_2: x \mapsto -\sqrt{2px}$.

$\mathcal{P}$ est la réunion de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$.

Mais puisque $f_2 = -f_1$, $\mathcal{C}_2$ est symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.



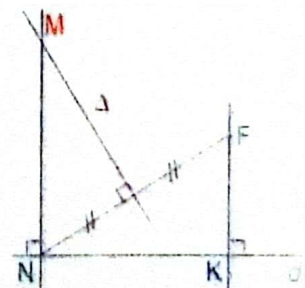
Note

Pour l'étude de la fonction f_1 , voir l'exercice 42, p. 111.

Commentaire

Tracé point par point de la parabole $\mathcal{P}$

On trace la médiatrice Δ de $[NF]$, N étant un point quelconque de d . L'intersection M de Δ et de la perpendiculaire à d en N est un point de $\mathcal{P}$, puisque $MF = MN$.



2.4 Réciproque : courbe d'équation $y^2 = ax$, $a \neq 0$

THÉORÈME 2

Si dans un repère orthonormal, une courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y^2 = ax$, $a \neq 0$, alors $\mathcal{C}$ est la **parabole** de foyer $F\left(\frac{a}{4}; 0\right)$, de **directrice** la droite d d'équation $x = -\frac{a}{4}$. Son paramètre est alors $\left|\frac{a}{2}\right|$, et son sommet est l'origine du repère.

Introduisons le point $F\left(\frac{a}{4}; 0\right)$ et la droite d d'équation $x = -\frac{a}{4}$.

Notons $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F , de directrice d et m le projeté orthogonal d'un point $M(x; y)$ sur d .

$$\text{Alors : } MF^2 - Mm^2 = \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 = y^2 - ax \quad [1].$$

Or dire que M appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à dire que $y^2 = ax$, donc d'après [1], à dire que $MF^2 = Mm^2$, et donc que $M \in \mathcal{P}$. D'où $\mathcal{C} = \mathcal{P}$.

REMARQUE : En Analyse, nous avons appelé parabole la courbe représentant une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. L'exercice 43, p. 111, prouve en effet que toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour équation $Y^2 = 2pX$ dans un repère convenablement choisi ; c'est donc une parabole.

3. ÉQUATION RÉDUITE D'UNE CONIQUE À CENTRE

Les ellipses et les hyperboles sont appelées **coniques à centre**. Cette appellation sera justifiée à la fin de cette partie.

3.1 Notations et résultats préliminaires

Considérons la conique $\mathcal{C}$ de foyer F , de directrice d , d'excentricité e , avec $e \neq 1$. Notons (FK) son axe focal.

Nous avons vu que cette conique a deux sommets ; l'un, noté S_1 , est le barycentre de $(F, 1)$, (K, e) , l'autre, noté S_2 , le barycentre de $(F, 1)$, $(K, -e)$:

$$\overrightarrow{S_1F} + e \overrightarrow{S_1K} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{S_2F} - e \overrightarrow{S_2K} = \vec{0}.$$

Comme e est positif, le sommet S_1 est un point du segment $[FK]$.

Notons O le milieu de $[S_1 S_2]$ et considérons un repère orthonormal $\mathcal{R}$ d'origine O et tel que l'axe des abscisses est l'axe focal orienté de O vers F ; alors l'axe des ordonnées est parallèle à la directrice.

Scanné avec CamScanner

Pour cette raison, on dit que **O est le centre** de la conique $\mathcal{C}$.

2. La perpendiculaire en O à l'axe focal, c'est-à-dire la médiatrice de $[S_1, S_2]$, est un second axe de symétrie de la conique $\mathcal{C}$. Il suffit encore, pour prouver cette assertion, d'utiliser l'équation réduite de $\mathcal{C}$.

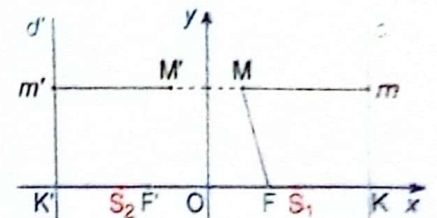
Commentaire

Foyers et directrices associées

Introduisons le point F' symétrique de F par rapport à O , et la droite d' symétrique de d par rapport à O .

Notons s la réflexion dont l'axe est la médiatrice de $[S_1, S_2]$. En utilisant cette réflexion et le fait que $\mathcal{C}$ est invariante par s , il est immédiat de vérifier que $\mathcal{C}$ est aussi la conique de foyer F' de directrice d' .

Ainsi, toute conique à centre admet deux paires de foyer et directrice associée, $\{F, d\}$ et $\{F', d'\}$.



4. ÉQUATIONS RÉDUITES D'UNE ELLIPSE, D'UNE HYPERBOLE. TRACÉS

4.1 Théorème et définitions

THÉORÈME 4

$\mathcal{C}$ est une conique à centre de centre O , de foyer F , de sommets S_1 et S_2 , d'excentricité e . $OS_1 = a$, $OF = c$, $c = ea$.

$\mathcal{R}$ est un repère orthonormal dont l'axe des abscisses est la droite (OF) orientée de O vers F . Alors,

- si $\mathcal{C}$ est une **ellipse**, $\mathcal{C}$ a pour équation dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [1].$$

- si $\mathcal{C}$ est une **hyperbole**, une équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [2].$$

En effet, dans le repère $\mathcal{R}$, la conique $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (\text{voir § 3.2}).$$

- Si $\mathcal{C}$ est une ellipse, $e < 1$, et puisque $c = ea$, on obtient $c < a$.

En posant $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, on obtient l'équation [1].

- Si $\mathcal{C}$ est une hyperbole, $e > 1$, et puisque $c = ea$, on obtient $c > a$.
En posant $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, on obtient l'équation [2].

DÉFINITIONS 6

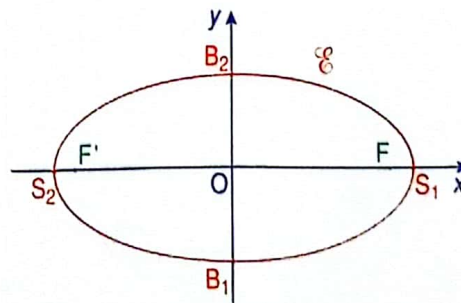
- L'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée **équation réduite** de l' **ellipse** .
- L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée **équation réduite** de l' **hyperbole** .

4.2 Tracés de l'ellipse et de l'hyperbole dans le repère $\mathcal{R}$

1. Tracé de l'ellipse. Grand axe, petit axe.

Puisque l'axe focal est axe de symétrie de l'ellipse, il suffit de tracer la portion de l'ellipse contenue dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$. Or, sous l'hypothèse « $y \geq 0$ », $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ équivaut à $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. On trace la courbe représentant la fonction $f: x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. En la complétant par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on obtient toute l'ellipse.

Note
Pour le tracé de la courbe représentant f , voir l'exercice 44, p. 111.



Le segment $[S_1S_2]$ est appelé **grand axe** de l'ellipse et le segment $[B_1B_2]$, le **petit axe** de l'ellipse.

2. Tracé de l'hyperbole.

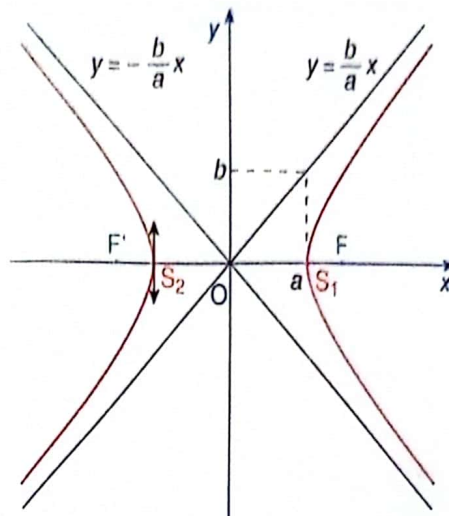
Puisque les axes de coordonnées sont axes de symétrie de l'hyperbole, il suffit de tracer la branche d'hyperbole située dans le premier quadrant défini par $x \geq 0, y \geq 0$. Or, sous l'hypothèse « $x \geq 0, y \geq 0$ », $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ équivaut à $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$.

Note

Pour le tracé de la courbe représentant f et l'existence des deux asymptotes, voir l'exercice 45, p. 111.

On trace la courbe représentant la fonction $f: x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ sur $[a; +\infty[$.

En la complétant par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, puis par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient toute l'hyperbole.



L'hyperbole a deux asymptotes : la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$, et la droite d'équation $y = -\frac{b}{a}x$.

4.3 Réciproques

THÉORÈME 5

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal, a et b sont deux réels **strictement positifs**, avec $a \neq b$.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une **ellipse**.

L'**axe focal** de cette ellipse est l'**axe des abscisses** lorsque $a > b$, et c'est l'**axe des ordonnées** lorsque $a < b$.

• Supposons $a > b$, et introduisons alors les éléments suivants :

– le point F de coordonnées $(c; 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; notons que $c < a$ et $c > 0$;

– la droite d d'équation $x = \frac{a^2}{c}$;

– le réel strictement positif $e = \frac{c}{a}$; notons que $0 < e < 1$.

D'après l'étude faite au § 4.1, l'équation de l'ellipse de foyer F, de directrice d et d'excentricité e , est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; donc l'ensemble $\mathcal{C}$ est cette ellipse.

• Supposons $a < b$, et considérons alors le repère $(O; \vec{j}, \vec{i})$.

Si un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, ses coordonnées $(X; Y)$ dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$ sont $X = y, Y = x$.

Donc, dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble $\mathcal{C}$ a pour équation $\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$ et $b > a$.
 Nous avons vu ci-dessus que dans ce cas, $\mathcal{C}$ est une ellipse dont l'axe focal est l'axe $(O; \vec{j})$.

De manière analogue, nous démontrerions le résultat suivant :

THÉORÈME 6

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal, a et b sont deux réels **strictement positifs**, avec $a \neq b$.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une **hyperbole** dont l'axe focal est l'axe des abscisses.

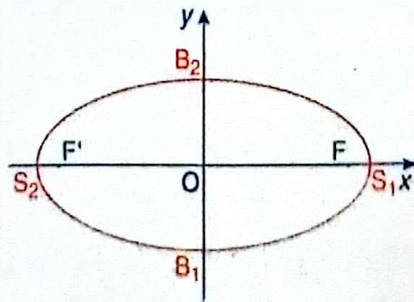
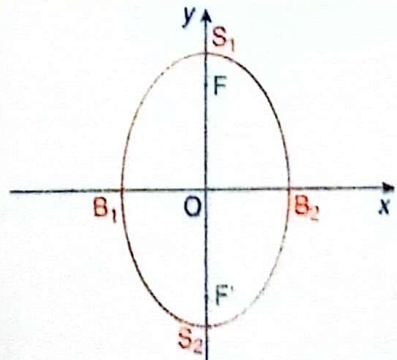
L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une **hyperbole** dont l'axe focal est l'axe des ordonnées.

Note

En Analyse, nous avons appelé hyperbole toute courbe d'équation $y = \frac{k}{x}$. La justification en est donnée en exercice 38, p. 110.

5. RÉSUMÉ

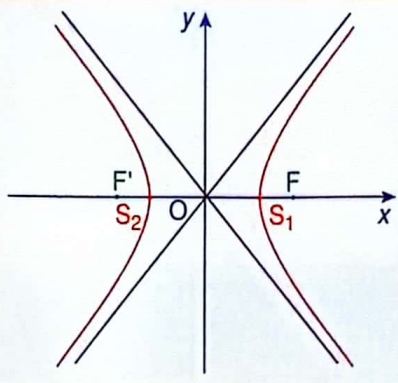
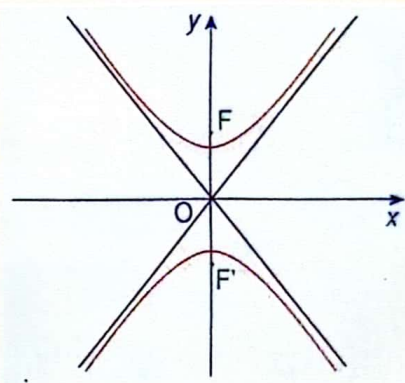
5.1 Ellipses

Équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		
	$a > b$	$b > a$
c	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\sqrt{b^2 - a^2}$
e	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$
Axe focal	axe des abscisses	axe des ordonnées
Foyer F	coordonnées $(c; 0)$	coordonnées $(0; c)$
Directrice associée	équation $x = \frac{a^2}{c}$	équation $y = \frac{b^2}{c}$
		

Coin-mémo

Dans le cas $b > a$, on remplace a par b et b par a , et on remplace x par y (on permute les axes de coordonnées).

5 = 2 Hyperboles

	Équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Équation : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
c	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{a^2 + b^2}$
e	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$
Axe focal	axe des abscisses	axe des ordonnées
Foyer F	coordonnées (c ; 0)	coordonnées (0 ; c)
Directrice associée	équation $x = \frac{a^2}{c}$	équation $y = \frac{b^2}{c}$
		

6. COURBES D'ÉQUATIONS $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal donné. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, où α, β, γ sont des réels donnés, non nuls.

Alors $\mathcal{C}$ est une **conique à centre ou l'ensemble vide**. En effet, puisque γ est non nul, par division par γ , l'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ est **équivalente** à une équation de la forme $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$ [1].

Il résulte directement des théorèmes 4 et 5 que :

1. Si $p < 0, q < 0$, il n'existe pas de couple $(x ; y)$ solution de l'équation [1] : $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide.

2. Si $p > 0, q > 0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre O.

• Si $p > q > 0$, l'axe des abscisses est l'axe focal.

• Si $q > p > 0$, l'axe des ordonnées est l'axe focal.

• Si $q = p$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{p}$.

3. Si $pq < 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole de centre O.

• Si $p > 0, q < 0$, l'axe focal est l'axe des abscisses.

• Si $p < 0, q > 0$, l'axe focal est l'axe des ordonnées.

7. AUTRES PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE

7.1 Une représentation paramétrique de l'ellipse

THÉORÈME 7

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est aussi la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi[.$$

Notons $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par l'énoncé.

Si $M(x; y)$ est un point de $\mathcal{C}$, alors $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$;

donc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ et M appartient à $\mathcal{E}$.

Réciproquement, si $M(x; y)$ est un point de $\mathcal{E}$, alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donc

$\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ et $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, ce qui implique que $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ sont dans $[-1; 1]$. Puisque,

en outre $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, il existe un réel θ tel que $\frac{x}{a} = \cos \theta$ et $\frac{y}{b} = \sin \theta$,

θ dans $[0; 2\pi[$. Donc M appartient à $\mathcal{C}$.

En conclusion, tout point de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{E}$ et tout point de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{E} = \mathcal{C}$.

REMARQUE :

Lorsque $a > b$, le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon a est appelé **cercle principal** de l'ellipse. Considérons l'application f du plan dans lui-même, qui à chaque point P associe le point M tel que $\overline{HM} = \frac{b}{a} \overline{HP}$

(H projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses). $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

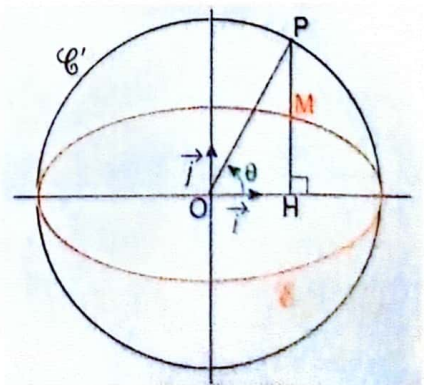
$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta \in [0; 2\pi[.$$

L'image de $\mathcal{C}'$ par f est donc l'ensemble des points $M'(x'; y')$ tels que :

$$x' = x = a \cos \theta, y' = \frac{b}{a} (a \sin \theta) = b \sin \theta, \theta \in [0; 2\pi[.$$

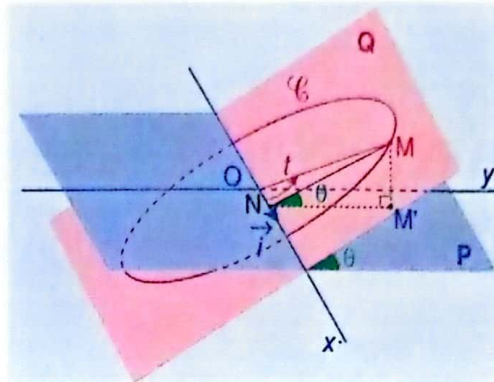
Cette image est donc l'ellipse $\mathcal{E}$. L'application f est

appelée **affinité orthogonale d'axe $(O; \vec{i})$ et de rapport $\frac{b}{a}$** . L'ellipse $\mathcal{E}$ est donc l'image de son cercle principal par cette affinité orthogonale.



7.2 Projection d'un cercle sur un plan

La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.



$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O situé dans un plan Q .

P est un plan qui passe par O . Désignons par $\mathcal{C}'$ l'ensemble des projetés orthogonaux de tous les points de $\mathcal{C}$ sur le plan P . Choisissons dans P un repère orthonormal, d'origine O , et dont l'axe des abscisses ($O ; \vec{i}$) est la droite d'intersection des plans P et Q . Notons r le rayon du cercle $\mathcal{C}$, et θ l'angle aigu formé par les plans P et Q .

M est un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$, M' son projeté orthogonal sur P , N son projeté sur l'axe ($O ; \vec{i}$). Notons t l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, et $(x' ; y')$ les coordonnées de M' . Alors (voir figure), x' est aussi l'abscisse de N , donc :

$$x' = OM \cos t = r \cos t \text{ et}$$

$$y' = \overline{NM'} = NM \cos \theta ; \text{ or } NM = OM \sin t, \text{ donc } y' = r \sin t \cos \theta.$$

Or $r \cos \theta$ est constant ; en posant $b = r \cos \theta$, nous obtenons :

$$x' = r \cos t, \quad y' = b \sin t.$$

Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, t décrit l'intervalle $[0 ; 2\pi[$; donc une représentation paramétrique de $\mathcal{C}'$ est :

$$\begin{cases} x' = r \cos t \\ y' = b \sin t, \quad t \in [0 ; 2\pi[. \end{cases}$$

$\mathcal{C}'$ est donc une ellipse, d'après le théorème 7.

8. IMAGES D'UNE CONIQUE

L'image d'une conique par une isométrie, ou par une homothétie, est une conique de même excentricité.

Ce résultat tient au fait qu'une isométrie et une homothétie conservent l'orthogonalité et conservent le rapport des distances.

Une démonstration est proposée à l'exercice 46, p. 111.

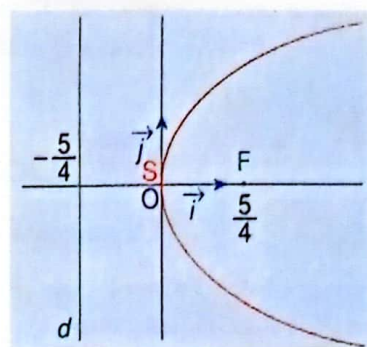
9. EXERCICES RÉSOLUS AVEC SOLUTIONS COMMENTÉES

9.1 Mise en place d'une courbe $y^2 = 2px$

Précisez le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ qui, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, a pour équation $y^2 = 5x$.

Solution commentée

D'après le théorème 2, le foyer de $\mathcal{P}$ est donc le point $F\left(\frac{5}{4}; 0\right)$, et sa directrice est donc la droite d d'équation $x = -\frac{5}{4}$.



9.2 Mise en place d'une courbe $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

Ex. 1. Identifiez et déterminez les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{C}$ qui, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$.

Ex. 2. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.

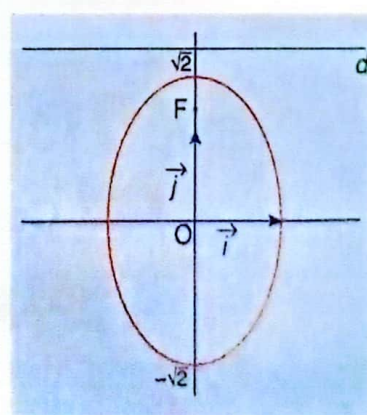
Déterminez les éléments caractéristiques de la conique d'équation $2y^2 - x^2 = 2$.

Solution commentée

1 L'équation de $\mathcal{C}$ est du type $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; c'est donc une ellipse.

Ici, $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ car $a > 0$, $b > 0$. Donc $a < b$, l'axe focal est l'axe des ordonnées. Ici $c^2 = 1$. Donc dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le foyer F a pour coordonnées $(0; 1)$, la directrice d associée à ce foyer a pour équation $y = 2$, et l'excentricité est $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (Voir § 5.1.)

Nous obtenons l'ellipse représentée ci-contre; le grand axe est porté par l'axe des ordonnées. Les sommets sont les points de coordonnées $(0; \sqrt{2})$ et $(0; -\sqrt{2})$.



2 L'équation s'écrit $-\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. $\mathcal{C}$ est donc une hyperbole dont l'axe focal est l'axe des ordonnées. Ici $c = \sqrt{3}$. Donc dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le foyer F a pour coordonnées $(0; \sqrt{3})$ et la directrice d a pour équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Voir § 5.2.)

Les travaux pratiques 2, 3, 4, font partie du programme.

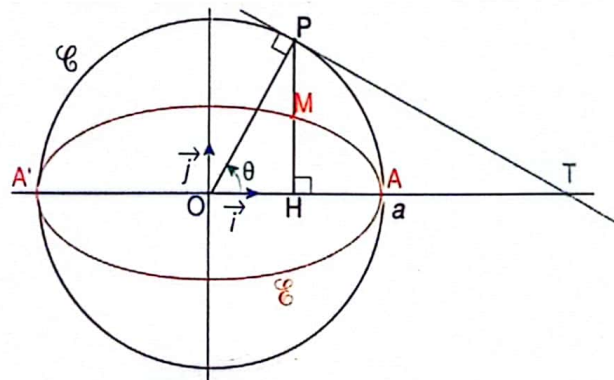
TP 1

DEUX EXEMPLES D'UTILISATION DU CERCLE PRINCIPAL DE L'ELLIPSE

Dans ce TP, $\mathcal{E}$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b$), dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est son cercle principal, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon a .

1.1 Construction de la tangente en un point

La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en P coupe la droite $(A'A)$ en T. On pose $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OP})$.



1. a) Calculez en fonction de θ les coordonnées de T.

b) En utilisant une représentation paramétrique de $\mathcal{E}$, démontrez que la droite (TM) est tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ en M.

2. Déduisez de ce qui précède un procédé pour construire la tangente en un point d'une ellipse.

1.2 Construction point par point de l'ellipse $\mathcal{E}$

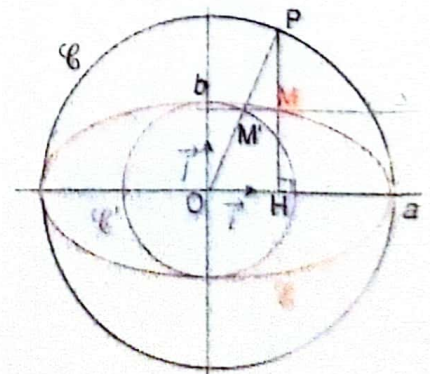
On trace le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon b .

On prend un point P sur $\mathcal{C}$. Le rayon $[OP]$ coupe $\mathcal{C}'$ en M' .

On appelle H le projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses et Δ la parallèle à l'axe des abscisses passant par M' .

1. Expliquez pourquoi le point d'intersection M de (PH) et de Δ est un point de $\mathcal{E}$.

2. Déduisez-en un procédé de construction point par point de $\mathcal{E}$.



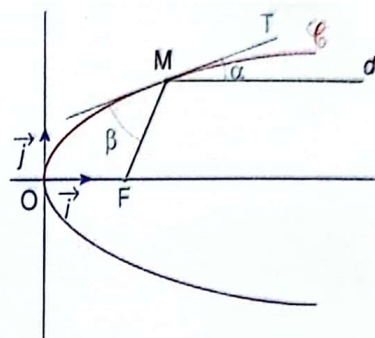
TP 2

MIROIRS PARABOLIQUES

2-1 Une propriété importante de la parabole

$\mathcal{P}$ désigne la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et F son foyer. Par un point M de $\mathcal{P}$, on trace :

- la droite (MF)
- la tangente T à la parabole
- la demi-droite d , parallèle à l'axe de la parabole et contenue dans la portion de plan intérieure à $\mathcal{P}$.



On se propose de démontrer que les angles géométriques α et β sont égaux. Par raison de symétrie, il suffit de démontrer cette propriété dans le cas où M est sur la demi-branch supérieure de la parabole, que nous noterons $\mathcal{C}$ (en rouge sur la figure).

1. a) Expliquez pourquoi une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2pt}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

- b) Déduisez-en que $\vec{u} \left(1; \frac{p}{\sqrt{2pt}} \right)$ est un vecteur directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point $M(t)$ lorsque $t \neq 0$.

2. a) Calculez en fonction de t les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MF}$.

- b) Expliquez pourquoi le vecteur $\vec{v}(1; 0)$ est un vecteur directeur de d .

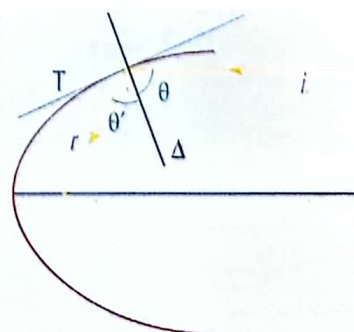
3. a) Expliquez pourquoi $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ et $\cos \beta = \frac{(-\vec{u}) \cdot \overrightarrow{MF}}{\|\vec{u}\| \|\overrightarrow{MF}\|}$.

- b) Montrez que $\cos \alpha = \cos \beta$. Déduisez-en que $\alpha = \beta$.

2-2 Application : miroirs paraboliques

La parabole ci-contre représente la coupe d'un miroir parabolique. Un rayon lumineux incident i et le rayon réfléchi r sont tels que $\theta = \theta'$. Δ désigne la normale à la parabole au point d'incidence, c'est-à-dire la perpendiculaire à la tangente T à la parabole en ce point.

Expliquez pourquoi tous les rayons incidents i parallèles à l'axe ont des rayons réfléchis qui passent tous par un même point.



TP 3

LOCALISATION D'UN BATEAU

3.1 Une propriété caractéristique de l'hyperbole

$\mathcal{H}$ désigne l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$ ses foyers.

1. $M(x; y)$ est un point du plan. Vérifiez que $MF^2 = (x - c)^2 + y^2$.

2. Déduisez-en les propriétés suivantes :

a) M appartient à $\mathcal{H}$ équivaut à $MF^2 = (x - c)^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$.

b) M appartient à $\mathcal{H}$ équivaut à $MF^2 = \left(a - \frac{c}{a}x \right)^2$.

3. On note $\mathcal{C}$ la demi-branch de l'hyperbole contenant les points $M(x; y)$ tels que $x \geq a$. Démontrez que :

a) si M appartient à $\mathcal{C}$, alors $MF' - MF = 2a$.

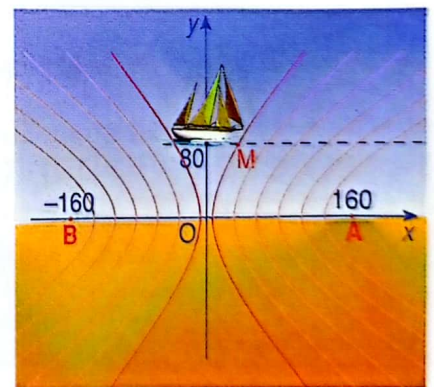
b) si $MF' - MF = 2a$, alors M appartient à $\mathcal{C}$.

INDICATION : Calculer $MF'^2 - MF^2$ et déduisez-en que si $MF' - MF = 2a$, alors $MF' + MF = \frac{2cx}{a}$. Utiliser alors la propriété caractéristique 2.b).

Ainsi, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M tels que $MF' - MF = 2a$.

3.2 Application : localisation d'un bateau

Deux postes émetteurs A et B situés le long d'une côte à 320 km l'un de l'autre, émettent des signaux radio à une vitesse égale à 300 m/ μ s. Un bateau M navigue dans une direction parallèle à celle de (AB), à 80 km de la côte. À la date t_0 , le signal en provenance de B atteint le bateau avec un retard de 400 μ s sur le signal en provenance de A. Nous allons voir que ces données permettent de localiser M dans le repère considéré par la figure.



Notons d_B la distance MB et d_A la distance MA à la date t_0 .

1. Vérifiez que $d_B - d_A = 120$ km.

2. À la date t_0 , M est donc sur une branche de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $2a = 120$.

Calculez alors l'abscisse x de M à la date t_0 .

Note

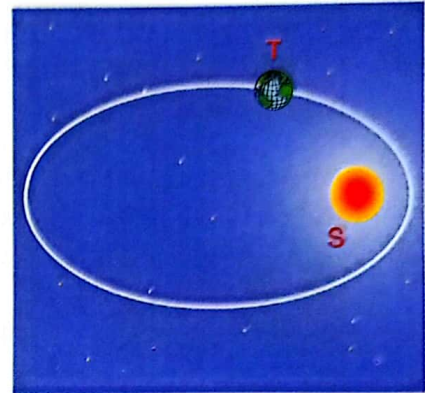
Le procédé présenté est à la base d'un procédé appelé LORAN (Long Range Aid to Navigation).

TP 4

DISTANCE DE LA TERRE AU SOLEIL

La deuxième loi de Kepler énonce que toute planète tourne autour du Soleil en décrivant une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers. La trajectoire de la Terre tournant autour du Soleil est donc une ellipse. Cette trajectoire porte le nom d'**écliptique**.

Sachant que la longueur du grand axe est égale à 3×10^8 km, et que l'excentricité est 0,017, on se propose de calculer la distance maximale Terre-Soleil et la distance minimale.



4-1 Un résultat préliminaire

$\mathcal{E}$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, et $F(c ; 0)$ désigne l'un de ses foyers.

1. $M(x ; y)$ est un point de $\mathcal{E}$.

a) Montrez que $MF^2 = (x - c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

b) Déduisez-en que $MF^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$.

c) Expliquez pourquoi $MF = a - \frac{c}{a}x$.

INDICATION : Lorsque $M(x ; y)$ décrit l'ellipse, $-a \leq x \leq a$.

2. Déduisez de ce qui précède la propriété suivante : « Lorsque M décrit l'ellipse, la distance MF est maximale lorsque M se trouve à l'une des extrémités du grand axe de l'ellipse ; cette distance est minimale lorsque M se trouve à l'autre extrémité. »

Note

Le point où la distance est maximale est appelé **aphélie** ; le point où elle est minimale est appelé **périhélie**.

4-2 Calcul des distances maximale et minimale de la Terre au Soleil

1. Calculez la distance maximale Terre-Soleil.

2. Calculez la distance minimale Terre-Soleil.

Des idées à retenir

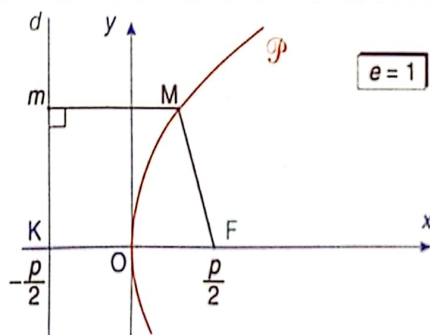
• Les éléments caractéristiques d'une conique sont au nombre de trois : foyer, directrice associée, excentricité e .

• Comme son nom l'indique, l'axe focal passe par le (les) foyer(s) ; c'est un axe de symétrie de la conique.

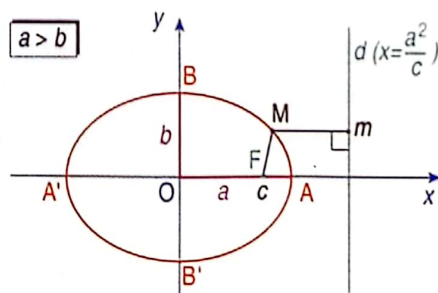
• La place de e , $e = \frac{MF}{Mm}$, par rapport à 1 permet de distinguer trois sortes de coniques.

$e = 1$: parabole $y^2 = 2px$.

$p = FK$ est le **paramètre** de la parabole.



$e < 1$: ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $e = \frac{c}{a}$. Axe focal : axe des abscisses.

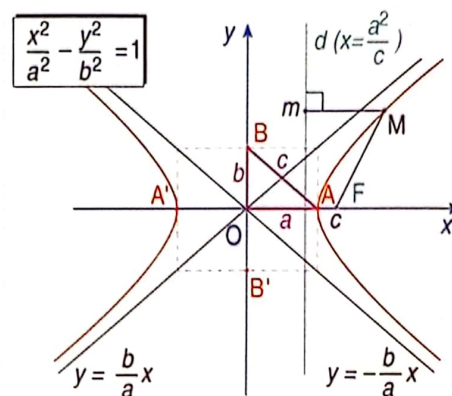
Sommets : A' et A.

Grand axe : [A'A] ; petit axe : [B'B].

• Si $a < b$, les foyers sont sur l'axe des ordonnées. L'ellipse est « tournée vers le haut ».

$e > 1$: hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $e = \frac{c}{a}$. Axe focal : axe des abscisses

• Si l'équation est $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les foyers sont sur l'axe des ordonnées. Les branches de l'hyperbole sont « tournées vers le haut et vers le bas ».

• Une **représentation paramétrique** de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta, \theta \in [0 ; 2\pi[\end{cases}$$

Des réflexes à avoir

► Pour mettre en place une courbe d'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, pensez à vous ramener à une équation réduite soit d'une parabole, soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole.

Des erreurs à éviter

■ L'axe des abscisses n'est pas toujours l'axe focal.

POUR COMMENCER

VÉRIFICATION DES CONNAISSANCES

- S1** Comment définit-on l'axe focal, le ou les sommets d'une conique ?
- S2** Qu'appelle-t-on paramètre d'une parabole ?
- S3** $\mathcal{P}$ est la parabole de foyer F , de directrice d , de paramètre p . Dans quel repère l'équation de $\mathcal{P}$ est-elle $y^2 = 2px$?
- S4** $\mathcal{E}$ est l'ellipse de foyer F , de centre O , de directrice d , d'excentricité e . Dans quel repère écrit-on l'équation réduite de $\mathcal{E}$? Quelle est cette équation ?
- S5** Dans un repère orthonormal, l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a > b$. Quelles sont les coordonnées d'un foyer et une équation de la directrice associée ?
- S6** $\mathcal{H}$ est l'hyperbole de foyer F , de centre O , de directrice d , d'excentricité e . Dans quel repère écrit-on l'équation réduite de $\mathcal{H}$? Quelle est cette équation ?
- S7** Dans un repère orthonormal, l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Quelles sont les coordonnées d'un foyer et une équation de la directrice associée ?
- S8** Quelle est une représentation paramétrique de l'ellipse dont l'équation réduite est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

Q.C.M.

Une seule des réponses proposées est exacte

Q1 Dans un repère orthonormal, la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = -2x^2$. Alors, le foyer de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées :

$$\left(-\frac{1}{8}; 0\right)$$

$$\left(0; -\frac{1}{8}\right)$$

$$\left(0; -\frac{1}{4}\right)$$

Q2 Dans un repère orthonormal direct, l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Alors, l'un des foyers de $\mathcal{E}$ a pour coordonnées :

$$(\sqrt{5}; 0)$$

$$(-\sqrt{5}; 0)$$

$$(0; \sqrt{5})$$

Q3 Dans un repère orthonormal, l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Alors, l'un des foyers de $\mathcal{H}$ a pour coordonnées :

$$(-\sqrt{13}; 0)$$

$$(\sqrt{13}; 0)$$

$$(0; \sqrt{13})$$

Q4 La courbe $\mathcal{C}$ représente, dans un repère orthonormal, la fonction $x \mapsto \sqrt{4x^2 - 1}$. Alors, $\mathcal{C}$ est une demi-...

ellipse

parabole

hyperbole

Réponses page 175

COMME LES RÉSOLUS

Pour l'exercice 1, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu 9.1, p. 99.

1 Précisez, dans chaque cas, le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ qui, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, a pour équation :

a. $y^2 = -3x$

b. $2y^2 = 5x$.

Pour les exercices 2 et 3, vous pouvez vous reporter aux exercices résolus du paragraphe 9.2, p. 99.

2 Dans chaque cas, identifiez puis précisez les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{C}$ qui, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, a pour équation :

a. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$

b. $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$.

3 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. Dans chaque cas, précisez les éléments caractéristiques de la conique $\mathcal{C}$ d'équation :

a. $3y^2 - 2x^2 = 4$

b. $y^2 - 5x^2 = 5$.

POUR S'ENTRAÎNER

Identifier une conique

Pour les exercices 4 à 8, on donne dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ une équation cartésienne d'une conique. Précisez la nature de cette conique et donnez ses éléments caractéristiques.

4 a. $y^2 = x + 4$

b. $y = x^2 + 4$.

5 a. $y^2 = 2x - 5$

b. $x^2 - y = 4$.

6 a. $4x^2 - 9y^2 = 1$

b. $9x^2 - 4y^2 = 1$.

7 a. $9y^2 - 4x^2 = 1$

b. $4y^2 - 9x^2 = 1$.

8 a. $4x^2 + 9y^2 = 1$

b. $9x^2 + 4y^2 = 1$.

Trouver une équation d'une conique

Pour les exercices 9 à 10, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. Donnez une équation cartésienne de la conique $\mathcal{C}$ et représentez-la.

9 $\mathcal{C}$ est une parabole :

a. de foyer $F(3; 2)$

et de directrice la droite d d'équation $x = 1$.

b. de foyer $F(1; 4)$

et de directrice la droite d d'équation $y = 2$.

10 $\mathcal{C}$ est une conique à centre dont F est un foyer, de directrice associée la droite d , et d'excentricité e :

a. $F(1; 0)$; $d: x = 10$; $e = \frac{4}{5}$.

b. $F(5; 0)$; $d: x = 1$; $e = \frac{5}{4}$.

c. $F(0; 4)$; $d: y = 6$; $e = \frac{1}{2}$.

d. $F(0; 6)$; $d: y = 3$; $e = 2$.

11 $\mathcal{C}$ est une conique dont F est un foyer, de directrice associée la droite d , et d'excentricité e . On note ℓ la distance de F à d . Choisissez un repère et donnez une équation de $\mathcal{C}$ dans les cas suivants :

a. $\ell = 4$ et $e = 1$

b. $\ell = 1$ et $e = 2$.

c. $\ell = 9$ et $e = \frac{4}{5}$

d. $\ell = 1$ et $e = \frac{1}{2}$.

Paraboles

12 Déterminez la directrice d'une parabole dont on connaît le foyer F et deux points A et B .

INDICATION : Utiliser la définition de la parabole par foyer et directrice.

13 Déterminez la directrice d'une parabole de foyer F , passant par un point A et d'axe D donné.

Discutez le nombre de solutions.

14 Déterminez le foyer F d'une parabole passant par deux points A et B et de directrice d .

INDICATION : Discuter l'existence et l'unicité de F selon les positions de A et B .

15 Déterminez le foyer F d'une parabole dont on connaît la directrice d , un point A et l'axe D .

Discutez le nombre de solutions.

16 Quelques particularités de la parabole

$\mathcal{P}$ est une parabole de foyer F , de directrice d . On appelle K le projeté orthogonal de F sur d , et S le sommet de $\mathcal{P}$.

1. M est un point de $\mathcal{P}$, Δ est la tangente en M à $\mathcal{P}$.

a. Montrez que le symétrique de F par rapport à Δ appartient à d .

b. Réciproquement, N est un point de d et Δ' est la médiatrice de $[FN]$. Montrez que Δ' est tangente à $\mathcal{P}$.

INDICATION : Travailler dans un repère orthonormal tel que, dans ce repère, une équation de $\mathcal{P}$ soit $y^2 = 2px$.

2. M est un point de $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de M sur d . Le point m est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal (FK). La tangente en M à $\mathcal{P}$ coupe l'axe focal en T . La perpendiculaire en M à cette tangente coupe l'axe focal en N .

a. Faites la figure.

b. Montrez que mN est égal au paramètre.

c. Montrez que S est le milieu de $[mT]$.

d. Montrez que F est le milieu de $[TN]$.

NOTE : Le segment $[mN]$ est appelé sous-normale. Le segment $[mT]$ est appelé sous-tangente.

17 Déterminez la directrice d'une parabole dont on connaît le foyer F et deux tangentes (mais pas les points de contact). F n'appartient pas à ces deux droites.

INDICATION : Le symétrique du foyer par rapport à la tangente en un point appartient à la directrice. Voir question 1, exercice 16.

Coniques à centre

18 BAC On considère, dans le plan P , un triangle AFB rectangle en A et on note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{B}$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Soit M un point quelconque du plan. On trace par M les parallèles aux droites (AF) et (FB) qui rencontrent la droite (AB) respectivement en H et M' . On appelle Γ l'ensemble des points M du plan tels que $MM' = MF$.

1. Montrez que M appartient à Γ si et seulement si :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

Déduisez-en que Γ est une conique.

2. Dans cette question, on prend $FA = 6 \text{ cm}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Après avoir construit le triangle AFB , représentez les sommets, les foyers et le centre de la conique Γ . Achetez ensuite la construction de Γ .

19 BAC Dans le plan, on donne deux points A et B , $AB = 6 \text{ cm}$. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O . Les tangentes à $\mathcal{C}$ menées de A ont pour points de contact T et T' . Cet exercice étudie plus particulièrement les cercles $\mathcal{C}$ tels que le triangle ATT' soit équilatéral.

1. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{C}$ passe par B .

a. Calculez le rapport des distances $\frac{OA}{OB}$.

b. Déduisez-en l'ensemble $\mathcal{C}$ des centres des cercles $\mathcal{C}$. Représentez $\mathcal{C}$.

2. D est la perpendiculaire en B à (AB) . On suppose que $\mathcal{C}$ est tangent à D (pas nécessairement en B).

a. Quel est l'ensemble $\mathcal{C}'$ des centres des cercles $\mathcal{C}$? Précisez sa nature et ses éléments caractéristiques.

b. Représentez $\mathcal{C}'$.

c. Quel est le centre du cercle $\mathcal{C}$ tangent en B à D ?

20 FGH est un triangle équilatéral de côté de longueur ℓ . Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole dont F est un foyer, de directrice associée la droite (GH) et d'excentricité 2.

Déterminez les sommets S et S' de cette hyperbole (vous remarquerez que S et S' sont sur la hauteur issue de F dans le triangle FGH), son centre O et le deuxième foyer F' . Calculez en fonction de ℓ , la distance $2a$ des sommets et la distance $2c$ des foyers.

21 Construction point par point d'une ellipse

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le but de cet exercice est de trouver une méthode de construction point par point de l'ellipse $\mathcal{E}$ dont $F(4; 0)$ est un foyer, de directrice associée la droite d d'équation $x = 9$, et d'excentricité $e = \frac{2}{3}$.

1. Déterminez les coordonnées des sommets A et A' de $\mathcal{E}$, sommets situés sur l'axe focal. Quel est le centre de $\mathcal{E}$? Donnez l'équation réduite de $\mathcal{E}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. T et T' sont les tangentes à $\mathcal{E}$ respectivement en A et A' . Un point M de $\mathcal{E}$ distinct de A et A' se projette orthogonalement en H sur d . La droite (FH) passant par H coupe T et T' respectivement en I et I' .

a. Calculez les rapports $\frac{MF}{MH}$, $\frac{IF}{IH}$, $\frac{I'F}{I'H}$.

b. F et H étant donnés, quel est l'ensemble $\mathcal{C}$ des points P du plan tels que $\frac{PF}{PH} = \frac{2}{3}$?

c. Déduisez-en que le point M appartient au cercle de diamètre $[II']$.

3. Connaissant les points A, A', F et la droite d , donnez une construction des points d'intersection, lorsqu'ils existent, de $\mathcal{E}$ avec une droite parallèle à (AA') . Discutez selon la position de la droite.

Représentation paramétrique d'une conique

22 On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie paramétriquement dans un repère orthonormal par :

$$x(t) = \frac{3}{\sin t}, \quad y(t) = \frac{\sqrt{3} \cos t}{\sin t}, \quad t \in]0; \pi[.$$

1. Exprimez en fonction de t les coordonnées des points $M\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Que pouvez-vous en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Étudiez les variations des fonctions x et y .

3. Déterminez le vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en :

$$M(t_0), \quad M\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad M\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

4. Montrez que $\mathcal{C}$ est contenue dans la conique $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - 3y^2 = 9$. Identifiez $\mathcal{H}$ et représentez-la en précisant ses éléments caractéristiques.

23 <BAC> Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 6 cm). On considère les points M_θ de coordonnées $(x; y)$ définies par :

$$x = \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta}, \quad y = \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta}, \quad \theta \in [0; 2\pi].$$

1. Calculez en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite D d'équation $x = 1$.

2. Déduisez-en que pour tout réel θ élément de $[0; 2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse $\mathcal{E}$ dont vous préciserez l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

3. Tracez l'ellipse $\mathcal{E}$.

24 <BAC> Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit $M(a; b)$ un point de $\mathcal{C}$.

a. Donnez, en fonction de a et b , les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente en M à $\mathcal{C}$.

b. Soit N le point de coordonnées $(b; a)$ et T le point défini par $\vec{OT} = \vec{OM} + \vec{ON}$. Montrez que la droite (MT) est la tangente en M à la courbe $\mathcal{C}$.

2.a. Montrez que la courbe $\mathcal{C}$ est contenue dans l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 8$.

b. Tracez l'hyperbole $\mathcal{H}$ et précisez les éléments caractéristiques suivants : centre, sommets, foyers, asymptotes.

Coniques et complexes

25 <BAC> Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les points A de coordonnées $(-1; 0)$ et I de coordonnées $(4; 0)$. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de centre I , dont un sommet est A et un foyer est O .

a. Déterminez les trois autres sommets de $\mathcal{E}$.

b. Calculez l'excentricité de $\mathcal{E}$ et donnez une équation de sa directrice associée au foyer O , dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

c. Donnez une équation de $\mathcal{E}$ dans le repère $(I; \vec{u}, \vec{v})$.

d. Tracez $\mathcal{E}$.

2. Dans cette question, à tout réel θ de l'intervalle $[0; \pi]$ on associe l'équation $z^2 - 2(4 + 5 \cos \theta)z + (4 \cos \theta + 5)^2 = 0$.

a. Résolvez l'équation dans $\mathbb{C}$.

b. Lorsque θ appartient à l'intervalle $]0; \pi[$, on note z_1 la solution de l'équation dont la partie imaginaire est strictement positive, et z_2 l'autre solution.

Soit M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 .

Déterminez les coordonnées de M_1 en fonction de θ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ puis dans le repère $(I; \vec{u}, \vec{v})$.

Déduisez-en l'ensemble des points M_1 , puis celui des points M_2 , lorsque θ varie dans l'intervalle $]0; \pi[$.

26 <BAC> 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation : $y^2 - x^2 = 1$.

a. Déterminez ses sommets et ses asymptotes.

b. Tracez cette hyperbole.

2. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha + 2 - \cos^2 \alpha = 0 \quad [E].$$

3. Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de $[E]$ dont la partie imaginaire est positive.

a. Démontrez que M appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$ définie au 1.

b. Déterminez le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ décrit par M lorsque α décrit l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

27* Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $z^2 - 4(1 - i)$ soit un imaginaire pur et $\mathcal{H}'$ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $z^2 - 4(1 - i)$ soit un réel.

1. Donnez une équation de $\mathcal{H}$, puis représentez-le en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Donnez une équation de $\mathcal{H}'$, puis représentez-le, dans le même repère que $\mathcal{H}$, en précisant ses éléments caractéristiques.

3. Soit a le complexe tel que $a^2 = 4(1 - i)$. On appelle A et A' les points d'abscisses respectives a et $-a$.

a. Déterminez le module et l'argument de a . Déduisez-en une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{AA'})$.

b. Soit S la réflexion d'axe (AA') . Démontrez que l'image de $\mathcal{H}$ par S est $\mathcal{H}'$.

INDICATION : Définir S sous forme complexe.

28 <BAC> Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $3(x + 1)^2 + 4y^2 = 12$.

1.a. Quelle est la nature de cette conique ? Construisez-la.

b. Déterminez les foyers, les directrices et l'excentricité de $\mathcal{C}$.

INDICATION : Trouver une équation de $\mathcal{C}$ dans $(I; \vec{i}, \vec{j})$, où $I(-1; 0)$.

2. À chaque point M de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x; y)$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M .

Démontrez que $|z| = \frac{1}{2}(3 - x)$. Déduisez-en que :

$$|z| = \frac{3}{2 + \cos \theta}, \quad \theta \text{ étant un argument de } z.$$

3. Soit M' et M'' les points de $\mathcal{C}$ ayant pour affixes respectives z' et z'' d'arguments respectifs θ et $\theta + \pi$.

- Calculez $\|\vec{M'M''}\|$ en fonction de θ .
- Déterminez θ pour que $\|\vec{M'M''}\|$ soit maximum, puis minimum.

29 ($O; \vec{i}, \vec{j}$) est un repère orthonormal direct.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation $2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et $\mathcal{E}'$ l'image de $\mathcal{E}$ par r .

- Déterminez une équation cartésienne de $\mathcal{E}'$, puis $\mathcal{E}$.
- Déduisez-en le tracé de $\mathcal{E}$ (unité graphique : 5 cm).

30 **BAC** Le plan est muni d'un repère orthonormal direct ($O; \vec{u}, \vec{v}$). Soit f l'application du plan privé du point O dans le plan, qui au point M d'affixe $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$) associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z - \frac{1}{z}$.

- Calculez les coordonnées x' et y' de M' en fonction de r et θ .
- a. Montrez que lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2, M' décrit une ellipse $\mathcal{E}$.
- b. Déterminez les sommets et les foyers de $\mathcal{E}$.
- c. Représentez $\mathcal{E}$.

31 **BAC** Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct ($O; \vec{u}, \vec{v}$).

Au point M d'affixe $z = x + iy$, où x et y sont réels, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z^2 + 2z$.

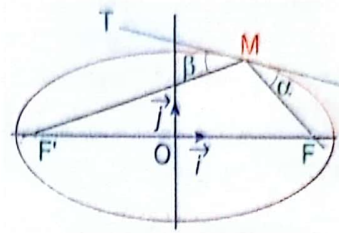
- Calculez les coordonnées (x' ; y') du point M' en fonction des coordonnées (x ; y) du point M .
 - Montrez que l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole dont vous préciserez le centre, les sommets et les asymptotes. Tracez $\mathcal{H}$.
2. Soit Ω le point d'affixe -1 .
Déterminez les points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'\Omega$ soit un parallélogramme.

Divers

32 Une propriété de l'ellipse utilisée en Optique, en Acoustique

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormal ($O; \vec{i}, \vec{j}$), et $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$ ses foyers. Par un point M de $\mathcal{E}$, on trace les demi-droites (MF) et (MF') et la tangente T à l'ellipse. On se propose de démontrer que les angles géométriques α et β sont égaux.

Par raison de symétrie, il suffit de démontrer cette propriété dans le cas où M se trouve sur la portion d'ellipse que nous noterons $\mathcal{E}$, située dans le quart de plan « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ ».



1.a. Expliquez pourquoi une représentation paramétrique de $\mathcal{E}$ est :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}, \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

b. Déduisez-en que le vecteur $\vec{u}(-a \sin \theta; b \cos \theta)$ est un vecteur directeur de T .

2. Calculez en fonction de θ les coordonnées des vecteurs $\vec{MF}$ et $\vec{MF'}$.

a. Expliquez pourquoi :

$$\cos \alpha = \frac{(-\vec{u}) \cdot \vec{MF}}{\|\vec{u}\| \|\vec{MF}\|} \text{ et } \cos \beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{MF'}}{\|\vec{u}\| \|\vec{MF'}\|}.$$

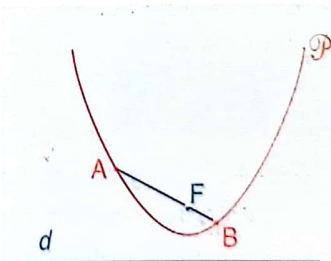
b. Montrez que $\cos \alpha = \cos \beta$.

c. Déduisez-en que $\alpha = \beta$.

NOTE : L'égalité des angles α et β permet de dire que l'ellipse possède une propriété de réflexion : un son, ou un rayon lumineux, émis d'un des foyers est réfléchi sur l'autre foyer. Cette propriété est utilisée dans la conception de certains instruments optiques ou acoustiques, dans la conception de galeries à écho (une personne placée en l'un des foyers peut être entendue de l'autre foyer, même si elle ne fait que chuchoter).

33 Corde focale d'une parabole

On joint un point A d'une parabole $\mathcal{P}$ au foyer F de cette parabole. La droite (AF) recoupe $\mathcal{P}$ en B . On dit que le segment $[AB]$ est une corde focale.



Démontrez que les tangentes aux extrémités A et B d'une corde focale sont perpendiculaires et qu'elles se coupent sur la directrice.

34 Une autre propriété de la parabole

La tangente Δ au point M d'une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F coupe la directrice en N .
Démontrez que l'angle $\widehat{NFM}$ est droit.

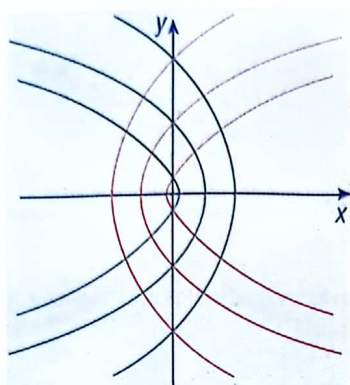
35 Paraboles cofocales

On considère les paraboles qui, dans un repère orthonormal fixé, ont pour équation $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$, $p \in \mathbb{R}$.

1. Vérifiez que toutes ces paraboles ont leur foyer à l'origine et que chacune admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie.

2. Lorsque p décrit $\mathbb{R}$, on obtient une famille de paraboles cofocales.

On rencontre de telles familles en Électricité, en Magnétisme.

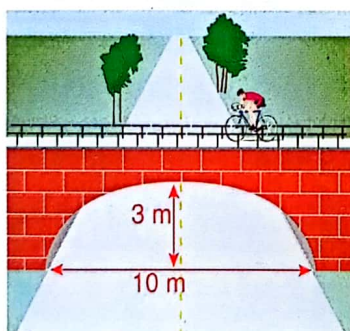


a. On fixe un point M quelconque de coordonnées $(x_0; y_0)$, $y_0 \neq 0$. Montrez qu'il y a exactement deux paraboles de la famille qui passent par M .

b. Montrez que deux telles paraboles sont orthogonales (leurs tangentes en M sont perpendiculaires).

36 L'arche d'un pont

L'arche d'un pont a la forme d'une demi-ellipse. Le grand axe de cette ellipse mesure 10 m. La partie la plus haute du pont est à 3 m au-dessus du niveau de la route.



Quelle est la hauteur du pont au-dessus d'un point situé à 2 m du centre de l'ellipse ?

37* Courbe orthoptique de la parabole

1. Une parabole $\mathcal{P}$ a pour foyer F et pour directrice d ; on note H le projeté orthogonal d'un point M de $\mathcal{P}$ sur d . Prouvez que la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[FH]$.

2. Deux droites T_1 et T_2 sécantes et non perpendiculaires sont données, ainsi qu'un point F n'appartenant ni à T_1 , ni à T_2 . Trouvez la directrice d'une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F à laquelle T_1 et T_2 sont tangentes.

3. Deux droites T_1 et T_2 sécantes et non perpendiculaires sont données, ainsi qu'une droite d qui coupe T_1 et T_2 . Trouvez le foyer d'une parabole $\mathcal{P}$ de directrice d à laquelle T_1 et T_2 sont tangentes.

4. Trouvez l'ensemble E des points N du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à une parabole $\mathcal{P}$ donnée.

REMARQUE : Des points de E , on voit la parabole sous un angle droit ; E est la courbe orthoptique de $\mathcal{P}$.

38 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. $\mathcal{H}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$. Le but de l'exercice est de démontrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole, au sens de la définition géométrique.

1. Vérifiez que le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$, est orthonormal.

2. Un point M a pour coordonnées $(X; Y)$ dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Prouvez que ses coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y).$$

3. Déduisez-en que dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{H}$ a pour équation $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = 1$, et donc que $\mathcal{H}$ est une hyperbole. Précisez ses éléments caractéristiques.

39 Une propriété géométrique de l'ellipse

$\mathcal{E}$ est l'ellipse dont une représentation paramétrique dans un repère orthonormal est :

$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$M(t)$ est un point de $\mathcal{E}$, distinct des sommets.

La tangente Δ en $M(t)$ coupe l'axe focal en $T(t)$.

La perpendiculaire Δ' à Δ en $M(t)$ coupe l'axe focal en $N(t)$.

1. Déterminez les équations cartésiennes de Δ et Δ' .

2. Déduisez-en les coordonnées des points $T(t)$ et $N(t)$.

3. Soit F un foyer de $\mathcal{E}$. Donnez ses coordonnées.

4. Démontrons que pour tous les points $M(t)$ distincts des sommets, $\vec{OT}(t) \cdot \vec{ON}(t) = \vec{OF}^2$.

40 « L'ellipse du jardinier »

1. Une propriété caractéristique importante de l'ellipse

$\mathcal{E}$ désigne l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$ désignent ses foyers.

a. $M(x; y)$ est un point du plan. Vérifiez que :

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

b. Déduisez-en les propriétés suivantes :

• M appartient à $\mathcal{E}$ équivaut à :

$$MF^2 = (x - c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad [1];$$

- M appartient à $\mathcal{E}$ équivaut à :

$$MF^2 = \left(\frac{c}{a} x - a \right)^2 \quad [2].$$

c. Démontrez que :

- Si M est un point de $\mathcal{E}$, alors $MF + MF' = 2a$.
- Si $MF + MF' = 2a$, alors M est un point de $\mathcal{E}$.

INDICATION : Calculer $MF'^2 - MF^2$. En déduire que :

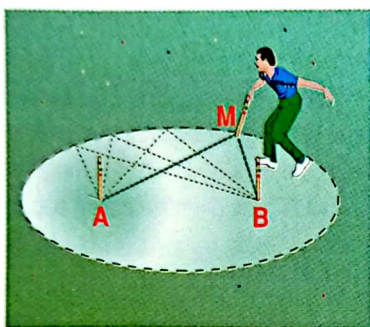
si $MF + MF' = 2a$, alors $MF' - MF = \frac{2cx}{a}$. Utiliser [2].

Ainsi, l'ellipse $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$MF + MF' = 2a.$$

2. Application : un procédé de construction de l'ellipse

Un jardinier fixe les deux extrémités d'une corde de longueur ℓ à deux points fixes A et B. On suppose que $\ell > AB$.



Expliquez pourquoi tous les points M obtenus en tendant la corde sont sur une ellipse dont vous préciserez les foyers et la longueur du grand axe.

41 Lieu géométrique

A et B sont deux sommets d'une ellipse $\mathcal{E}$, situés sur deux axes distincts. Quel est le lieu géométrique du centre de gravité des triangles ABM lorsque M décrit $\mathcal{E}$?

INDICATION : On peut se limiter « au quart de l'ellipse ».

42 Tracé de la parabole

Les notations sont celles du paragraphe 2.3 du Cours, p. 89.

1. Étudiez le sens de variation de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Précisez la limite de f_1 en $+\infty$.

2. Montrez que f_1 n'est pas dérivable en zéro, et que $\mathcal{C}_1$ admet une tangente verticale à l'origine du repère. Tracez $\mathcal{C}_1$, puis la parabole $\mathcal{P}$.

43 Paraboles d'équations $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$

En classe de Première, nous avons appelé parabole la courbe représentant une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Nous allons justifier cette définition.

1. $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal, $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = ax^2$, $a \neq 0$, dans ce repère.

Montrez que dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $Y^2 = \frac{X}{a}$. (Si M a pour coordonnées $(x ; y)$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$,

on notera $(X ; Y)$ ses coordonnées dans $(O ; \vec{j}, \vec{i})$.) $\mathcal{C}$ est donc une parabole.

2. Dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}'$ est la courbe d'équation :

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

S est le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{a} ; \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$. Montrez

que dans $(S ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}'$ a pour équation $y' = ax'^2$. Prouvez alors que $\mathcal{C}'$ est une parabole.

44 Tracé de l'ellipse

Les notations sont celles du paragraphe 4.2 du Cours, p. 93.

1. Montrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ est dérivable sur $[0 ; a]$ et calculez sa fonction dérivée.

2. Déduisez-en que f est décroissante sur $[0 ; a]$, puis tracez la courbe $\mathcal{C}$ représentant f restreinte à $[0 ; a]$, dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Prouvez que $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale au point A de coordonnées $(a ; 0)$.

4. En utilisant des symétries, tracez l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

5. Montrez que la tangente à $\mathcal{E}$ au point C d'abscisse c coupe l'axe focal en K (K est le projeté orthogonal de F sur la directrice d associée).

45 Tracé de l'hyperbole

Les notations sont celles du paragraphe 4.2 du Cours, p. 94.

1. Montrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ est dérivable sur $]a ; +\infty[$ et calculez sa fonction dérivée.

2. Déduisez-en que f est croissante sur $]a ; +\infty[$, puis tracez la courbe $\mathcal{C}$ représentant f restreinte à $]a ; +\infty[$, dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Prouvez que $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale au point A de coordonnées $(a ; 0)$.

4. En étudiant la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{b}{a}x$, vérifiez que la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

5. En utilisant des symétries, tracez l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

6. Montrez que la tangente à $\mathcal{H}$ au point C d'abscisse c coupe l'axe focal en K (K est le projeté orthogonal de F sur la directrice d associée).

46 Image d'une conique par une isométrie, par une homothétie

$\mathcal{C}$ est une conique dont F est un foyer, de directrice associée d , et d'excentricité e .

1. f est une isométrie. On note F' et d' les images respectives de F et d par f , et on note $\mathcal{C}'$ la conique dont F' est un foyer, de directrice associée d' , et d'excentricité e .

a. M est un point de $\mathcal{C}$, m son projeté orthogonal sur d . En utilisant le fait que f conserve l'orthogonalité et la distance, montrez que $M' = f(M)$ appartient à $\mathcal{C}'$.

b. Réciproquement, en utilisant f^{-1} , montrez que tout point M' de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un point M de $\mathcal{C}$. Concluez que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par f .

2. h est une homothétie de rapport k . En procédant comme dans 1., montrez que l'image de $\mathcal{C}$ par h est une conique de même excentricité.

INDICATION : Utiliser le fait qu'une homothétie conserve l'orthogonalité et le rapport des distances.

EXERCICE COMMENTÉ

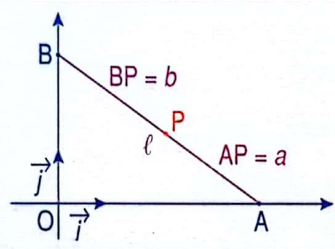
47 ÉNONCÉ : Un lieu géométrique

On suppose qu'un segment $[AB]$ se déplace de façon que ses extrémités A et B restent sur les axes de coordonnées d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

En position initiale, $[AB]$ est porté par l'axe des abscisses et B est en O . En position finale, $[AB]$ est porté par l'axe des ordonnées et A est un O .

P est un point fixe du segment $[AB]$. On pose :

$$AB = \ell, \quad AP = a, \quad PB = b.$$



Quel est le lieu géométrique du point P lorsque le segment $[AB]$ se déplace comme il vient d'être dit ?

VERS UNE SOLUTION :

L'énoncé invite à une solution analytique. Cherchons une représentation paramétrique du lieu de P .

Les seules données $AP = a$, $AB = \ell$, $PB = b$, ne permettent pas d'exprimer les coordonnées du point P . Il faut introduire un autre paramètre qui permettra de calculer les coordonnées de P en fonction de a et b . Pour cela, on peut poser $\widehat{OAB} = \alpha$ (radians). Alors $(\vec{i}, \overrightarrow{AP}) = \pi - \alpha$.

1. Montrez que :

$$\overrightarrow{OA} = \ell \cos \alpha \vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} = -a \cos \alpha \vec{i} + a \sin \alpha \vec{j}.$$

2. Déduisez-en que $\overrightarrow{OP} = b \cos \alpha \vec{i} + a \sin \alpha \vec{j}$, et donc que P appartient à une ellipse fixe $\mathcal{E}$. Précisez le centre de $\mathcal{E}$, ses foyers, ses directrices.

3. Reste à savoir si P décrit toute l'ellipse.

Quel est l'intervalle décrit par α ? Déduisez-en le lieu géométrique de P .

PROBLÈMES

48 THÈME : Famille de coniques

Le plan est muni d'un repère orthonormal (unité de longueur : 4 cm), a est un réel strictement positif, b est un réel quelconque.

A.1. Écrivez l'équation d'une parabole $\mathcal{P}$, de foyer $F(a; b)$, de directrice (Oy) . Montrez que cette parabole passe par le point $A(1; 0)$ si et seulement si son foyer appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A , de rayon 1.

2. Sachant que le point F appartient au cercle $\mathcal{C}$, montrez que le sommet S de la parabole $\mathcal{P}$ appartient à une conique que vous déterminerez et représenterez.

3. Dans le cas où F appartient au cercle $\mathcal{C}$, écrivez une équation de la tangente en A à $\mathcal{P}$. Si on considère deux paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, de foyers respectifs $F(a; b)$ et $F'(a'; b')$, démontrez que les tangentes en A à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$ sont orthogonales si et seulement si (OF) est orthogonale à (OF') (ou encore si F et F' sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$).

Représentez $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ lorsque $F\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

B.1. Plus généralement, on considère maintenant l'ensemble des coniques Γ dont $F(a; b)$ est un foyer, de directrice associée (Oy) , et d'excentricité e . Écrivez une équation d'une conique Γ .

Montrez que cette courbe passe par le point $A(1; 0)$ si et seulement si son foyer F appartient au cercle de centre A , de rayon e .

2.a. On considère la conique $\mathcal{C}$ de directrice (Oy) , de foyer $F\left(1; \frac{1}{2}\right)$, passant par A . Quelle est l'excentricité de cette courbe ? Écrivez son équation, et celle de la tangente en A à cette courbe.

b. On considère la conique $\mathcal{H}$ de directrice (Oy) , de foyer $F'\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$, passant par A . Quelle est son excentricité ?

Écrivez son équation, ainsi que celle de la tangente en A à cette courbe.

Que pouvez-vous conclure au sujet des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$?

c. Construisez au mieux les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ sur un nouveau graphique. (Pour $\mathcal{H}$, limitez-vous à la branche située à droite de l'axe (Oy) .)

d. La tangente en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ coupe (Oy) en T . Démontrez que les droites (FA) et (FT) d'une part, $(F'A)$ et $(F'T)$ d'autre part, sont orthogonales. Déduisez-en que les points A , T , F , F' appartiennent à un même cercle.

D'après BTS Opticien lunetier.

49 «BAC» THÈMES : Coniques. Étude de fonctions.

Calcul intégral

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{H}$ la courbe plane dont une équation dans le repère $\mathcal{R}$ est $y^2 - x^2 = 1$.

On introduit également les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt.$$

On se propose d'étudier la fonction F et de l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

A.1. Quelle est la nature de la courbe $\mathcal{H}$?

Précisez ses axes et ses sommets.

2. Étudiez le sens de variation de f .

On note G_f la représentation graphique de f dans le repère $\mathcal{R}$.

3. Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Vérifiez que pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad [1].$$

Déduisez-en que la courbe G_f admet une droite D asymptote en $+\infty$; précisez la position relative de G_f et de D .

4. Tracez $\mathcal{H}$; montrez que G_f est une partie de $\mathcal{H}$ que vous préciserez (unité graphique : 2 cm).

B.1. Étudiez le sens de variation de F sur $[0; +\infty[$.

2. Montrez que pour tout réel x positif, $x \leq f(x)$.

Déduisez-en que pour tout réel positif t , $\frac{t^2}{2} \leq \int_0^t f(x) dx$.

Déduisez-en la limite de F en $+\infty$.

C. On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs définis par :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{i} + \vec{j}),$$

et $\mathcal{R}'$ désigne le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Si M est un point quelconque du plan, on note $(x; y)$ ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ et $(X; Y)$ ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$.

1. Vérifiez que $\mathcal{R}'$ est orthonormal.

2. Exprimez x et y en fonction de X et Y .

3. Déduisez-en que $\mathcal{H}$ a pour équation $XY = \frac{1}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

4. On travaille maintenant dans le repère $\mathcal{R}'$. Soit X_1 et X_2 deux réels strictement positifs tels que $X_1 < X_2$.

a. Soit g une fonction continue, strictement positive, et décroissante sur $[X_1; X_2]$. On appelle G_g la représentation graphique de g dans le repère $\mathcal{R}'$. Soit M et N les points de G_g d'abscisses X_1 et X_2 . Soit Q et P les points de $(O; \vec{u})$ d'abscisses X_1 et X_2 et S la partie bornée limitée par les segments $[OM]$, $[ON]$ et l'arc $\widehat{MN}$ de G_g .

Montrez que l'aire de S est égale à :

$$\int_{X_1}^{X_2} g(t) dt + \frac{1}{2} X_1 g(X_1) - \frac{1}{2} X_2 g(X_2).$$

INDICATION : Décomposer la partie limitée par $[OM]$, $\widehat{MN}$, $[NP]$ et $[PO]$ de deux façons, en faisant intervenir les deux triangles OMQ et ONP .

b. Déduisez-en, dans le cas où G_g est l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ d'abscisse X vérifiant $X_1 < X < X_2$, que l'aire de S est :

$$\mathcal{A}(S) = \frac{1}{2} \ln \frac{X_2}{X_1}.$$

5. Soit t un réel positif ; déduisez de l'expression de $\mathcal{A}(S)$, où $X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et en interprétant $F(t)$ en terme d'aire, l'expression de F , $F(t) = \frac{1}{2} t \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.



Équation d'une conique dans un repère orthonormal quelconque

1. Formules de changement de repère

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ sont deux repères orthonormaux. On note $(a; b)$ les coordonnées de O' dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et θ l'angle $(\vec{i}, \vec{i}')$. Un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(X; Y)$ dans $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$.

Montrez que $x = a + \alpha X - \beta Y$, $y = b + \beta X + \alpha Y$, avec $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = \sin \theta$.

INDICATION : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ et $\vec{O'M} = X\vec{i}' + Y\vec{j}'$.

2. On suppose $a = 3$, $b = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$. On note :

$\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

$\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

$\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2x$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Trouvez une équation de $\mathcal{E}$, une équation de $\mathcal{H}$, une équation de $\mathcal{P}$, dans le repère $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$.

NOTE : Chacune des trois équations trouvées est de la forme $AX^2 + BY^2 + 2XY + DX + EY + F = 0$. De manière générale, on démontre qu'une telle équation est l'équation d'une conique, et on sait, à partir de cette équation, trouver l'équation réduite de la conique.

SIMILITUDES DIRECTES

CHAPITRE

6

Nous nous intéressons au problème suivant : quelles sont les transformations qui conservent les angles orientés et qui transforment les distances dans un rapport donné ?

Nous verrons que ces transformations, appelées similitudes directes, ne sont autres que les composées $h \circ d$ (ou $d \circ h$) d'une homothétie h et d'un déplacement d , et que toute similitude directe est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

Conformément au programme, « les objectifs de ce chapitre sont très modestes », ils se limitent à « exploiter l'écriture complexe des similitudes ».

SOMMAIRE

<i>Cours</i>	115
<i>Exercices résolus</i>	118
<i>Travaux pratiques d'application</i>	120
<i>Des idées, des réflexes</i>	123
<i>Exercices et problèmes</i>	124

1. PRÉSENTATION DES SIMILITUDES

On dit qu'une transformation f « transforme les distances dans un rapport k » lorsque pour tous points distincts M et N et leurs images respectives M' et N' par f ,

$$\frac{M'N'}{MN} = k \quad (\text{ou } M'N' = k MN).$$

(Notez que k est alors nécessairement strictement positif.)

DÉFINITION 1

On appelle **similitude directe de rapport k** (k réel strictement positif) toute transformation qui **conserve les angles orientés** et qui **transforme les distances dans le rapport k** .

EXEMPLES :

- Les déplacements sont des similitudes directes de rapport 1.
- Une homothétie de rapport k , $k > 0$, est une similitude directe de rapport k . En effet, elle conserve les angles orientés et si M, N sont deux points quelconques, et M', N' , leurs images, alors $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$, et donc $M'N' = k MN$, puisque $k > 0$.

THÉORÈME 1

Toute **similitude directe s** est la composée $h \circ d$, **$s = h \circ d$** , d'une homothétie h de rapport strictement positif et d'un déplacement d .

Notons k le rapport de s ($k > 0$), et h_1 une homothétie de centre quelconque, de rapport $\frac{1}{k}$. Posons $d = h_1 \circ s$. Alors d conserve les angles orientés car s et h_1 les conservent. Montrons que d conserve les distances.

Pour cela, posons $M_1 = s(M)$, $N_1 = s(N)$. Alors, $M_1N_1 = k \times MN$.

Posons $M' = h_1(M_1)$, $N' = h_1(N_1)$:

Alors, $M'N' = \frac{1}{k} \times M_1N_1 = \frac{1}{k} \times k \times MN = MN$. Or, $M' = d(M)$ et $N' = d(N)$. Ainsi d conserve la distance, et les angles orientés, donc d est un déplacement. De $d = h_1 \circ s$, on déduit $(h_1)^{-1} \circ d = s$, or $(h_1)^{-1}$ est une homothétie h de rapport $k > 0$, d'où le résultat.

2. LE RÉSULTAT FONDAMENTAL

Nous allons démontrer le résultat suivant : **toute similitude est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.**
Pour cela, intéressons-nous d'abord à l'écriture complexe d'une similitude.

2.1 Écriture complexe d'une similitude

THÉORÈME 2

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormal direct et s une similitude directe.

• L'écriture complexe de s dans $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est de la forme $z' = az + b$, a et b complexes, $a \neq 0$.

• Réciproquement, si une transformation s a pour écriture complexe $z' = az + b$, $a \neq 0$, alors s est une similitude de rapport $|a|$.

• Écrivons $s = h \circ d$, et notons I le centre de l'homothétie h , k son rapport ($k > 0$). Posons $d(M) = M_1$, et notons z_1 l'axe de M_1 .

Alors, si z est l'axe de M , $z_1 = e^{i\theta} z + z_0$ (voir chapitre 3, p. 58).

Posons $h(M_1) = M'$ et notons z' l'axe de M' , ω l'axe de I . Alors : $z' - \omega = k(z_1 - \omega)$ (voir chapitre 3, p. 57).

Donc $z' - \omega = k(e^{i\theta} z + z_0 - \omega)$, et :

$z' = ke^{i\theta} z + k(z_0 - \omega) + \omega = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$, $b = k(z_0 - \omega) + \omega$.

(Il est clair que $a \neq 0$, car $|a| = k$, et k est non nul.)

Or, $M' = h(M_1) = h(d(M)) = s(M)$; d'où le résultat.

• Réciproquement, si f est une transformation d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \neq 0$), notons A', B', C' , les images par f de trois points quelconques A, B, C . Alors, il est immédiat de vérifier que $|z'_{A'} - z'_{B'}| = |a| |z_A - z_B|$,

donc $A'B' = |a| AB$, et que $(z'_{C'} - z'_{A'}) : (z'_{B'} - z'_{A'}) = (z_C - z_A) : (z_B - z_A)$;

donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Ainsi f conserve les angles orientés et multiplie les distances par $|a|$, c'est donc une similitude directe de rapport $|a|$.

2.2 Le résultat fondamental

THÉORÈME 3

Toute similitude directe s est soit une **translation**,

soit la composée $r \circ h$ d'une **rotation** r et d'une **homothétie** h de même centre. En outre, $r \circ h = h \circ r$.

Notons $z' = az + b$, $a \neq 0$, l'écriture complexe de s dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

• Si $a = 1$, alors $z' = z + b$, et s est une translation, le vecteur de cette translation a pour affixe b (chapitre 3, p. 56).

• Si $a \neq 1$, l'équation $z = az + b$ a une solution et une seule, le nombre $\omega = \frac{b}{1-a}$. Donc le point I d'axe ω est invariant par s , $s(I) = I$ (et I est le seul point invariant par s).

Puisque $b = \omega - a\omega$, $z' = az + \omega - a\omega$, d'où : $z' - \omega = a(z - \omega)$ [1].

Notons h l'homothétie de centre I , de rapport $k = |a|$, et r la rotation de centre I , d'angle $\theta = \arg a$. Montrons que $s = r \circ h$.

Il résulte de [1] que :

$$\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{IM'}{IM} = |a|, \text{ et que } \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \theta,$$

avec z affixe de M , $M \neq I$, z' affixe de $M' = s(M)$.

Posons $M_1 = h(M)$. Alors $IM_1 = k IM$ et $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM_1}) = 0$.

Posons $M'' = r(M_1) = r(h(M))$. Alors $IM'' = IM_1$ et $(\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IM''}) = \theta$.

Il en résulte que $IM'' = k IM$ et $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM''}) = \theta$, donc que $M'' = M'$. Ainsi

$r \circ h(M) = s(M)$ pour tout $M \neq I$, et $r \circ h(I) = s(I)$. D'où $r \circ h = s$.

Il est facile de vérifier que l'écriture complexe de $h \circ r$ dans $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est $z' - \omega = a(z - \omega)$, donc $s = r \circ h = h \circ r$.

2.3 Récapitulation

THÉORÈME 4

s est une similitude directe, dont l'écriture complexe dans un repère orthonormal direct est $z' = az + b$.

• Si $a = 1$, s est une **translation**.

• Si $a \neq 1$, alors :

– s admet un **point invariant** et un seul, le point I d'affixe ω telle que $\omega = a\omega + b$. On obtient alors $z' - \omega = a(z - \omega)$.

– $s = r \circ h = h \circ r$, h désignant l'homothétie de centre I , de rapport $|a|$, et r la rotation de centre I , d'angle $\arg a$.

Note

Ce théorème a été établi lors de la démonstration du théorème 3.

DÉFINITIONS 2

Note

Le centre, le rapport, l'angle de s , sont appelés **éléments caractéristiques** de s .

s est une similitude directe dont l'écriture complexe dans un repère orthonormal direct est $z' = az + b$.

Lorsque $a \neq 1$, on dit que le point invariant de s est le **centre de s** , et que $\arg a$ est **l'angle de s** .

REMARQUES :

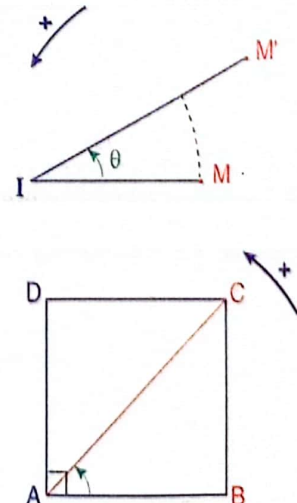
1. Lorsqu'on connaît le centre I , le rapport k , l'angle θ d'une similitude, on peut construire l'image M' de n'importe quel point M ; le point M' est défini par :

$$IM' = k IM, (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \theta.$$

2. Si h est l'homothétie de centre I , de rapport $k > 0$, et si r est la rotation de même centre I , d'angle θ , alors $r \circ h$ est la similitude de centre I , de rapport k , d'angle θ .

EXEMPLE :

Le carré ABCD est tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$; C est l'image de B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$.



3. PROPRIÉTÉS DES SIMILITUDES DIRECTES

Une similitude directe est soit une translation, soit une composée $r \circ h$ où h est une homothétie et r une rotation.

Il en résulte, compte tenu des propriétés des homothéties et des rotations que :

- Toute similitude **transforme** les droites en droites, les segments en segments, les cercles en cercles, les coniques en coniques de même excentricité.
- Toute similitude **conserve** le parallélisme, l'alignement, l'orthogonalité, le contact.
- Toute similitude de rapport k **multiplie** les distances par k et les aires par k^2 .

Toute similitude conserve le barycentre.

En effet, nous savons que les translations et les rotations conservent le barycentre. Donc pour montrer qu'une similitude $r \circ h$ conserve le barycentre, il suffit de montrer que toute homothétie h conserve le barycentre.

Montrons qu'une homothétie h conserve le barycentre G de deux points (A, a) , (B, b) , c'est-à-dire montrons que G' est le barycentre de (A', a) , (B', b) avec $G' = h(G)$, $A' = h(A)$, $B' = h(B)$.

Pour cela, il suffit de montrer que $a \overrightarrow{G'A'} + b \overrightarrow{G'B'} = \vec{0}$.

Or, par hypothèse, $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Notons k le rapport de h .

Alors $ka \overrightarrow{GA} + kb \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Mais $k \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'A'}$, $k \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{G'B'}$; d'où le résultat.

La démonstration se généralise immédiatement au cas de n points.

4. EXERCICES RÉSOLUS AVEC SOLUTIONS COMMENTÉES

4.1 Préciser les éléments caractéristiques d'une similitude à partir de son écriture complexe

Déterminez la similitude directe s dont l'écriture complexe dans un repère orthonormal direct donné est $z' = (i - 1)z + 2 - i$.

Solution

L'écriture complexe de s est de la forme $z' = az + b$, avec $a \neq 1$.
Donc s n'est pas une translation, et possède nécessairement un point fixe ;

alors $\omega = (i - 1)\omega + 2 - i$, d'où $\omega = 1$.

Le rapport de s est $|i - 1|$, c'est-à-dire $\sqrt{2}$.

L'angle de s est $\arg(i - 1)$, c'est-à-dire $\frac{3\pi}{4}$. s est donc la similitude directe de centre $I(1)$, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Commentaires

◀ Voir d'abord si $a = 1$, auquel cas s est une translation.

Si $a \neq 1$, s a un point fixe dont l'affixe ω est la solution de $az + b = z$.

◀ Appliquer le théorème 4, p. 117.

4.2 Résoudre un problème de lieu géométrique

ABCD est un carré direct du plan orienté.

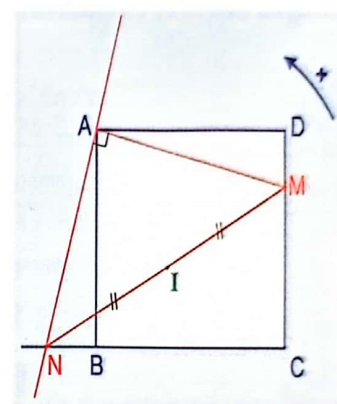
M est un point de (DC) ; la perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N et I est le milieu de [MN].

1. Montrez que le triangle rectangle AMN est isocèle.

2. Montrez que I est l'image de M par une similitude fixe.

3. Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit (DC) ?

D'après Exercices de géométrie, I.R.E.M. de Nantes.



Solution

1 Démontrons que N est l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

L'image de (DC) par r est (BC) et l'image de (AM) par r est la perpendiculaire à (AM) en A, c'est-à-dire (AN). Le point $r(M)$ est donc à l'intersection de ces deux droites, donc $r(M) = N$.

Le triangle **AMN** est donc **isocèle en A**.

2 Puisque le triangle AMN est rectangle isocèle en A, le milieu I

de [MN] est tel que : $AI = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{4}$.

Donc I est l'image de M par la **similitude s** de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3 M décrit la droite (DC) et $I = s(M)$, donc I décrit l'image de (DC) par s . Nous savons que cette image est une droite d' .

Pour trouver d' , on peut chercher les images de D et C par s . Nous trouvons $s(D) = O$, où O est le centre du carré et $s(C) = B$. Donc le lieu de I est la **droite (OB)**.

Commentaires

◀ La présence d'angles droits dans la figure suggère d'utiliser cette méthode pour démontrer que AMN est rectangle isocèle en A.

◀ Pour trouver $r(M)$, on utilise la méthode classique : M est l'intersection de deux lignes, donc son image $r(M)$ est dans l'intersection de ces deux lignes.

◀ $\frac{AI}{AM}$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI})$ ne dépendent pas de M. Ces constantes déterminent donc bien une similitude de centre A.

Seul le T.P. 1 fait partie du programme.

TP 1

COMPLEXES ET SIMILITUDES

1.1 Étude d'une configuration

ABCD est un quadrilatère convexe. On construit, à l'extérieur du quadrilatère, les triangles rectangles isocèles $A'BA$, $B'CB$, $C'DC$, $D'AD$, rectangles respectivement en A' , B' , C' , D' .

Le but de l'exercice est de montrer que les droites $(A'C')$ et $(B'D')$ sont perpendiculaires et que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ ont même longueur.

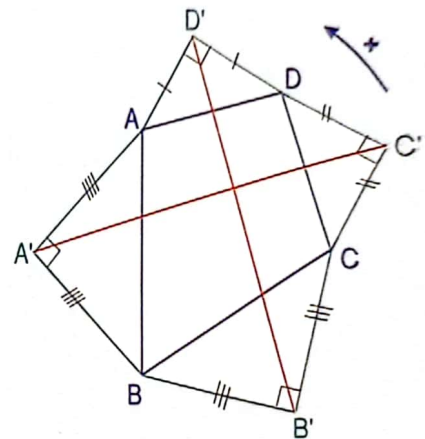
Pour cela, utilisons les nombres complexes.

Supposons choisi un repère orthonormal direct (dans cette situation, il n'y a pas de choix privilégié qui s'impose), et notons a, b, c, d , les affixes respectives des points A, B, C, D .

1. Calculez les affixes des points A', B', C', D' .

INDICATION : A' se déduit de B par la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. Calculez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{B'D'}$, puis concluez.



1.2 Recherche d'un ensemble de points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$|(1-i)z + 2-i| = \sqrt{2}.$$

Pour déterminer cet ensemble, nous allons utiliser une similitude. En effet, nous remarquons que $z' = (1-i)z + 2-i$ est l'écriture complexe d'une similitude s .

1. Déterminez le centre, l'angle, et le rapport de la similitude s .

2. Notons M' le point d'affixe z' définie par $z' = (1-i)z + 2-i$.

Alors M' est l'image par s du point $M(z)$ et $|z'| = OM'$. Il s'agit donc de trouver l'ensemble des points M tels que $OM' = \sqrt{2}$, avec $M' = s(M)$.

a) Déterminez le point O_1 tel que $s(O_1) = O$.

b) Déduisez-en que $OM' = \sqrt{2}$ équivaut à $O_1M = 1$.

c) Déterminez l'ensemble cherché.

3. Proposez une autre solution.

TP 2

SIMILITUDE TRANSFORMANT $[AB]$ EN $[A'B']$

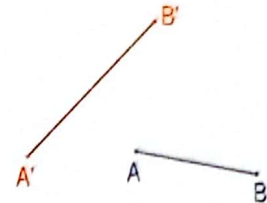
2.1 Préliminaire

Nous allons démontrer le résultat suivant :

A, B, A', B' sont quatre points deux à deux distincts.

Il existe une similitude s , et une seule, telle que :

$$s(A) = A', s(B) = B'.$$



1. Supposons qu'il existe une similitude s telle que $s(A) = A', s(B) = B'$.

a) Quel est alors le rapport de s ? Quel est l'angle de s ?

b) Notons a le nombre complexe dont le module est $\frac{A'B'}{AB}$ et dont un argument est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. En supposant choisi un repère orthonormal direct, donnez l'écriture complexe de s en fonction des affixes z_A et $z_{A'}$ des points A et A' .

2. Nous venons de voir que si une similitude s transforme A en A' et B en B' , alors nécessairement s est la similitude définie par $z' = az + (z_{A'} - az_A)$, dans le repère considéré.

Il reste à montrer que cette similitude transforme effectivement A en A' et B en B' .
Démontrez qu'il en est bien ainsi.

2.2 Une application

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$. Soit Δ une droite variable passant par O ; on appelle A' et B'

les projetés orthogonaux respectivement de A et B sur Δ .

Le but de l'exercice est de démontrer que lorsque Δ varie, le cercle de diamètre $[A'B']$ passe par un point fixe.

On note s la similitude directe qui transforme O en A et B en O .

1. Déterminez l'angle de s .

2. Démontrez que le centre K de s appartient aux cercles de diamètres $[OA]$ et $[OB]$.
Déduez-en que K est le pied de la hauteur du triangle OAB issue de O .

3. On appelle D la droite passant par B , orthogonale à Δ .

a) Déterminez les images par s des droites D et Δ ; déduisez-en l'image de B' par s .

b) Montrez que le cercle de diamètre $[A'B']$ passe par un point fixe quand Δ varie.

TP 3

COMPOSITION DE DEUX HOMOTHÉTIES

3.1 Les deux homothéties sont de centres distincts

$h_1(O_1; k_1)$ et $h_2(O_2; k_2)$ sont deux homothéties données, avec $O_1 \neq O_2$. Le but de l'exercice est de caractériser la transformation $h_2 \circ h_1$.

1. Donnez l'écriture complexe de $h_2 \circ h_1$.
2. Dédisez-en que $h_2 \circ h_1$ est une translation lorsque $k_1 k_2 = 1$, et que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$ lorsque $k_1 k_2 \neq 1$.
3. Dans ce dernier cas, montrez que le centre de $h_2 \circ h_1$, le centre de h_1 et le centre de h_2 sont alignés.

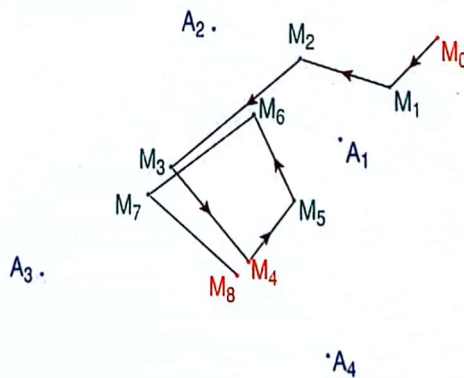
3.2 Une application

D'après *Mélanges géométriques* de M. Dofal

A_1, A_2, A_3, A_4 sont quatre points donnés.

Un mobile ponctuel M se déplace de la manière décrite ci-après.

À l'instant initial, M est en M_0 . Ensuite, M se dirige de M_0 vers A_1 en ligne droite. Arrivé au point M_1 , milieu de $[M_0 A_1]$, il se dirige en ligne droite vers A_2 . Arrivé en M_2 , milieu de $[M_1 A_2]$, il se dirige en ligne droite vers A_3 . Arrivé en M_3 , milieu de $[M_2 A_3]$ il se dirige en ligne droite vers A_4 . Arrivé en M_4 , milieu de $[M_3 A_4]$, il se dirige en ligne droite vers A_1 , et ainsi de suite...



Les points M_0, M_4, M_8 semblent alignés. Nous allons voir que ce n'est pas fortuit.

1. Montrez que M_4 est l'image de M_0 par la composée de quatre homothéties, $h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$, où pour chaque entier i de 1 à 4, h_i est une homothétie de centre A_i . Quel est le rapport de h_i ?
2. Notons h_0 l'homothétie $h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$. Quel est le rapport de h_0 ?
3. Quelle est l'image de M_4 par h_0 ? Concluez sur l'alignement des points M_0, M_4, M_8 .
4. Montrez que tous les points d'indice $4n$, $n \in \mathbb{N}$, sont alignés.
5. On note G_0 le centre de h_0 . Placez G_0 sur la figure.

DES IDÉES DES RÉFLEXES ...

Des idées à retenir

- Une similitude directe s conserve les angles orientés et multiplie les distances par un nombre $k > 0$. Ce nombre k est le rapport de la similitude. Il en résulte que les proportions sont conservées. (Si A', B', C', D' sont les images de A, B, C, D par s , alors $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$, $C \neq D$).
- Les translations, les rotations, les homothéties, sont des similitudes particulières.
- L'écriture complexe d'une similitude est $z' = az + b$, $a \neq 0$. Lorsque $a \neq 1$, l'écriture complexe est aussi $z' - \omega = a(z - \omega)$, ω étant le nombre tel que $\omega = a\omega + b$ (le point d'affixe ω est invariant par la similitude).
- Une similitude directe qui n'est pas une translation est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre. Ce centre est le **centre** de la similitude. L'angle de la rotation est l'**angle** de la similitude.
- L'image d'un point M par une similitude de centre I , de rapport k , d'angle θ , est le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \theta$.

Des réflexes à avoir

- **Pour trouver le centre I d'une similitude s** , pensez que c'est le seul point invariant de s ($s(I) = I$).
- **Pour préciser la similitude s à partir de son écriture complexe $z' = az + b$** , pensez que « la discussion ne porte que sur a », et d'abord sur les cas $a = 1$, $a \neq 1$.
 - Si $a = 1$, s est une translation ($z' = z + b$).
 - Si $a \neq 1$, il y a un point invariant I dont l'affixe ω est telle que $\omega = a\omega + b$. Alors $z' - \omega = a(z - \omega)$. D'où,
 - si a est **réel**, s est une homothétie de centre I , de rapport a ;
 - si a est **non réel**, s est la similitude de centre I , de rapport $|a|$, d'angle $\arg a$. Si en outre $|a| = 1$, s est la rotation de centre I , d'angle $\arg a$.

- **Pour trouver le rapport ou l'angle d'une similitude s** , pensez qu'il suffit de connaître les images M' et N' de deux points distincts M et N .

Le rapport est alors $\frac{M'N'}{MN}$.

L'angle est $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ (si N est le centre I , le rapport est $\frac{IM'}{IM}$ et l'angle est $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$).

Des erreurs à éviter

- Ne pas croire qu'une homothétie h de rapport k négatif n'est pas une similitude directe ; h est une similitude, mais son rapport est $|k|$ et son angle est π .

Exemple : Si h est l'homothétie de centre O de rapport -3 , alors pour tout point M , $\overrightarrow{OM'} = -3\overrightarrow{OM}$, donc, $OM' = |-3| OM = 3OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi$ (modulo 2π).

VÉRIFICATION DES CONNAISSANCES

- S1** Qu'est-ce qu'une similitude directe ?
- S2** Quelle est, dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe d'une similitude ?
- S3** Qu'appelle-t-on forme réduite d'une similitude qui n'est ni un déplacement, ni une homothétie ?
- S4** Qu'appelle-t-on centre, rapport, angle, d'une similitude ?
- S5** Quelle est l'image d'une droite, d'un cercle, d'une conique, par une similitude ?
- S6** Une similitude directe conserve-t-elle le parallélisme ? l'orthogonalité ? l'alignement ? le contact ? le barycentre ?

Q.C.M.

Une seule des réponses proposées est exacte	a	b	c
Q1 ABCD est un carré de centre O et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. s est la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Alors :	$s(D) = O$	$s(D) = C$	$s(C) = D$
Q2 Dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe d'une transformation f est $z' = 2z - i$. Alors f est une...	translation	rotation	homothétie
Q3 Dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe d'une transformation f est $z' = 2iz - 1$. Alors f est une similitude de ...	rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$	rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$	rapport 2, d'angle π
Q4 s est la similitude directe dont l'écriture complexe, dans un repère orthonormal direct, est $z' = (1 + i)z + 3$. Alors le centre de s a pour affixe...	3	$\frac{1}{1+i}$	3i

Réponses page 175

COMME LES RÉSOLUS

Pour les exercices 1 à 3, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu 4.1, p. 118.

1 Déterminez la similitude directe dont l'écriture complexe dans un repère orthonormal direct est $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 1$.

2 Déterminez la similitude directe dont l'écriture complexe dans un repère orthonormal direct est :

$$z' = (-1 + 2i)z + 3 - 4i.$$

3 Déterminez la similitude directe dont l'écriture complexe dans un repère orthonormal direct est $z' = -2iz - 1$.

POUR S'ENTRAÎNER

Construction d'images

4 ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Construisez l'image de ce carré par la similitude s de centre A, de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. Construisez l'image de ce carré par la similitude s' de centre A, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$.

5 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. On note O le centre de gravité de ABC.

Construisez l'image de ce triangle par la similitude de centre O, de rapport 2, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

6 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

Construisez l'image de ce triangle par la similitude de centre J, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

7 ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

On construit le carré CBED tel que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$. On note s la similitude de centre D, d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\sqrt{2}$.

Construisez l'image de ABC par s . Que pouvez-vous dire du triangle image ?

Écritures complexes

Pour les exercices 8 à 12, on donne l'écriture complexe, dans un repère orthonormal direct, d'une transformation f . Reconnaissez f et précisez ses éléments caractéristiques.

8 $z' = (3 + 4i)z + 4 - 2i$. 9 $z' = \frac{1+i}{1-i}z + 2i$.

10 $z' = \frac{2-i}{i+1}z$. 11 $z' = 5z - 3i$.

12 $z' = \sqrt{2}iz + 4$.

13 f est la transformation dont l'écriture complexe est : $z' = u^2z + u - 1$, ($u \in \mathbb{C}$).

1. Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels :

a. f est une translation.

b. f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c. f est une homothétie de rapport -2 .

2. On suppose que $u = 1 - i$. Déterminez alors la nature de f et ses éléments caractéristiques.

Recherche d'images

14 Dans le plan orienté, ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$. Le point H est le projeté orthogonal de A sur (BC), le point I est le symétrique de A par rapport au milieu A' de [BC].

Quelle est l'image de H, et quelle est l'image de C, par la similitude s de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{6}$, de rapport $\frac{2}{\sqrt{3}}$?

Pour les exercices 15 à 18, on donne, dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe d'une transformation f . Trouvez l'image par f des droites ou des cercles donnés.

15 $z' = (1 + 2i)z + 2 - 5i$;

• D passe par A(1 - 2i) et B(-1 + i) ;

• $\mathcal{C}$ a pour centre I(1 - i) et pour rayon $\sqrt{5}$.

16 $z' = 2iz - 3$;

• $\mathcal{C}_1$ a pour centre I(1 + i) et pour rayon 2 ;

• $\mathcal{C}_2$ a pour centre O(0) et pour rayon 1 ;

• D est la droite passant par les points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

17 $z' = (\sqrt{3} - i)z$;

• $\mathcal{C}$ passe par O(0) ;

• D est la droite passant par A(1 + i) et B(-4i).

18 $z' = (3 + 4i)z - 4 + 2i$;

$\mathcal{C}$ passe par I(1 - i) et est tangent en J(2) à la droite passant par J et K(2i).

19 $\mathcal{C}_1$ est un demi-cercle de diamètre [AB], de centre O. La médiatrice de [AB] coupe $\mathcal{C}_1$ en I. $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre I et de rayon [IA]. La demi-droite d'origine O et qui passe par I coupe $\mathcal{C}_2$ en D. La droite (DB) recoupe $\mathcal{C}_1$ en K.

1. En utilisant le théorème de l'angle inscrit, montrez que

$$\widehat{BDA} = \frac{\pi}{4}.$$

2.a. Montrez que le triangle DKA est isocèle en précisant la mesure de ses angles.

b. J est le milieu de [AD]. Montrez que K, I et J sont alignés.

3. On note s la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Quelle est l'image de O par s ?

b. On note L le point dont l'image par s est J, $s(L) = J$. Déterminez L.

Utilisation des similitudes

pour démontrer

Les modifications du programme font que nombre d'exercices du baccalauréat sur les similitudes ne sont plus d'actualité.

Parmi les modifications, il faut noter : suppression de la composition des similitudes, des homothéties, suppression du théorème sur l'existence et l'unicité d'une similitude échangeant deux segments donnés (a fortiori la recherche du centre d'une telle similitude n'est plus un objectif du programme).

20 Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminez l'ensemble des points $M(z)$ du plan P tels que :

$$|(1-i)z + 2i| = 2.$$

2. Étudiez la transformation de P qui au point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe :

$$z' = (1-i)z + 2i.$$

3. En utilisant la transformation précédente, retrouvez le résultat du 1.

21 Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 1 cm).

On donne les points A et B d'affixes respectives 12 et $9i$. On note f la similitude directe dont l'écriture complexe est :

$$Z = -\frac{3}{4}iz + 9i.$$

1. Déterminez le centre Ω , l'angle et le rapport de f .

2. Quelles sont les images par f des points A et O ? Montrez que Ω est un point commun aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$. Établissez que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB et montrez que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.

Faites une figure comportant les points A , B , Ω ainsi que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

22 **BAC** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité de longueur est le centimètre. Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de $[BC]$, N celui de $[CA]$ et P celui de $[AB]$. Les affixes respectives des points M , N et P sont notées m , n et p .

1. Dans cette question $m = -1 - 3i$, $n = 2$.

Construisez les triangles MNP et ABC .

2. Soit f la transformation du plan qui à chaque point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :

$$z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} (-z + m + n + p).$$

Quelle est la nature de f ? Donnez ses éléments caractéristiques.

3. a , b , c sont les affixes respectives des points A , B , C .

a. Montrez que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$. Déduisez-en que $a = n + p - m$.

b. Exprimez b et c en fonction de m , n et p .

4. On pose $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

On désigne par a' , b' et c' les affixes respectives des points A' , B' et C' .

a. Démontrez que :

$$a' = (1+i)m, \quad b' = (1+i)n, \quad c' = (1+i)p.$$

b. Déduisez-en que $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et que A' appartient à la droite (BC) .

c. Montrez de même que B' appartient à la droite (AC) et que C' appartient à la droite (AB) .

5. Complétez la figure réalisée au 1. par les points A' , B' , C' .

23 **BAC** Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points :

A d'affixe -4 ; B d'affixe 4 ; E d'affixe $4i$; C et D tels que les quadrilatères $AOEC$ et $BOED$ soient des carrés.

1. Placez les points précédents dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et donnez les affixes des points C et D .

2. Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1+i)z + 4 + 4i$.

a. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f .

b. Précisez les points $f(A)$ et $f(O)$.

Déterminez l'image par f de la droite (CA) , et celle de la médiatrice du segment $[AO]$.

c. Exprimez, pour tout point M d'affixe z , l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z . Déduisez-en que $MM' = MC$ et, pour M distinct de C , montrez qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$.

3. Soit J le milieu du segment $[EB]$ et I le milieu de $[AO]$. Déterminez l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

24 **BAC** Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 2 . Soit φ l'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe Z associe le point $M' = \varphi(M)$ d'affixe Z' définie par :

$$Z' = \frac{3 + \sqrt{3}i}{4} Z + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

1. Déterminez :

a. L'affixe de l'image $\varphi(A)$ du point A .

b. L'affixe du point P tel que $\varphi(P) = O$.

2. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de φ .

3. Lorsque le point M est distinct du point A :

a. Démontrez que le triangle AMM' , $M' = \varphi(M)$, est rectangle en M' .

b. Le point M et le milieu du segment [AM] étant donnés, déduisez-en une construction au compas du point M'.

25 BAC Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\vec{DA}, \vec{DC}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit E le milieu du segment [CD]. On considère alors le carré DEFG de centre O' tel que $(\vec{DE}, \vec{DG}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Faites une figure soignée avec AB = 6 cm.
2. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
 - a. Déterminez les éléments caractéristiques de s. Précisez l'image de E par s. Déduisez-en l'angle $(\vec{AE}, \vec{BF})$.
 - b. On note Γ le cercle circonscrit au carré ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF). Placez Γ et I sur la figure. Montrez que I appartient à Γ .
 - c. Montrez que les droites (ID) et (BF) sont orthogonales. Montrez que I appartient à Γ' , cercle circonscrit au petit carré DEFG.
3. Montrez que les points C, G et I sont alignés.

26 Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O. On suppose que ce carré est direct, c'est-à-dire que $(\vec{AB}, \vec{AD})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par :

r le quart de tour direct de centre A,
 t la translation de vecteur $\vec{AB}$,
 h l'homothétie de centre C de rapport $\sqrt{3}$.

- 1.a. Prouvez que $r' = t \circ r$ est une rotation, dont vous préciserez l'angle.
 - b. Déterminez les images de A et B par r' . Déduisez-en le centre de r' .
 2. On se propose d'étudier la transformation $f = r' \circ h$.
 - a. Montrez que f est une similitude directe dont vous préciserez l'angle et le rapport.
 - b. Soit I le centre de f . Déterminez l'image de C par f . Prouvez que $(\vec{IC}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et que $ID = \sqrt{3} IC$.
 - c. Déterminez et construisez l'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\vec{MC}, \vec{MD}) = \frac{\pi}{2}$.
- Donnez une mesure de l'angle $(\vec{CD}, \vec{CI})$. Placez I sur la figure.

27 BAC Lieu géométrique

Dans le plan, on considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O', de même rayon R, tangents extérieurement en un point A.

À tout point M de $\mathcal{C}$, on associe le point M' de $\mathcal{C}'$ tel que :

$$(\vec{OM}, \vec{O'M'}) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Montrez qu'il existe une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, dont vous construirez géométriquement le centre Ω , qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$. Quelle est l'image de M par cette rotation ?

2. Montrez que I, milieu de [MM'], est l'image de M par une similitude f directe de centre Ω . Déterminez les éléments caractéristiques de cette similitude. Déduisez-en le lieu de I quand M décrit $\mathcal{C}$.

3. Donnez l'image de O par la similitude f et une mesure de l'angle $(\vec{OM}, \vec{AI})$.

28 Problème de construction

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (unité graphique : 2 cm). r est un réel strictement supérieur à 1. On considère les points A(-1 ; 0), A'(r ; 0) et I(0 ; -r). Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1, $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A' et de rayon r .

La figure sera faite dans le cas $r = 2$.

1. Déterminez le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}_1$, transformé du cercle $\mathcal{C}'$ par la similitude de centre I, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. Dans cette question, $r = 2$. Construisez l'un des triangles rectangles isocèles IMM' dont le sommet de l'angle droit M appartient au cercle $\mathcal{C}$ et le sommet M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$.

29 Lieu géométrique

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O (c'est-à-dire tel que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$).

Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faites une figure (prenez BC = 3 cm et BP = 1 cm et placez (BC) horizontale sur la feuille).
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a. Précisez l'image de la droite (BC) par r .
 - b. Déterminez les images de R et P par r .
 - c. Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?
3. On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR]. Soit s la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - a. Précisez les images des points R et P par s .
 - b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
 - c. De ce qui précède, déduisez que les points M, B, N et D sont alignés.

30 Une similitude cachée

(O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormal direct. On note D la droite (O ; $\vec{i}$) et Δ la droite (O ; $\vec{j}$).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls tels que :

$$(\vec{i}, \vec{u}) = (\vec{j}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}.$$

Pour chaque point M , on note D_M et Δ_M les droites qui passent par M et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. D_M coupe D en m , Δ_M coupe Δ en p .

On note M' le point dont les projections orthogonales sur D et Δ sont respectivement m et p .

Enfin, on note f l'application $M \mapsto M'$.

Le but de l'exercice est de démontrer, de deux façons, que f est une similitude.

1. Méthode géométrique

a. Construisez l'image de M dans chacun des cas suivants :

- M n'appartient pas à la réunion de D et de Δ .
- M appartient à D , et M est distinct de O .
- M appartient à Δ , et M est distinct de O .
- $M = O$.

b. On suppose M distinct de O . Montrez que les points O, m, p, M et M' sont sur le cercle de diamètre $[mp]$, et que le triangle OMM' est rectangle en M et que $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \frac{\pi}{3}$.

Déduisez-en que f est une similitude.

2. Méthode analytique

a. Démontrez que les coordonnées $(x'; y')$ de M' sont :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

où $(x; y)$ sont les coordonnées de M .

b. Exprimez l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M , et déduisez-en que f est une similitude.

31 Lieu géométrique

$OO'A$ est un triangle rectangle isocèle en A et :

$$(\vec{AO}, \vec{AO'}) = \frac{\pi}{2}.$$

Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B .

À tout point M de $\mathcal{C}$, on associe le point M' de $\mathcal{C}'$ tel qu'une mesure de $(\vec{OM}, \vec{OM'})$ soit $-\frac{\pi}{2}$.

1. Montrez qu'il existe une rotation r , que vous caractériserez, transformant O en O' et M en M' .

2. M étant distinct de B , les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement $\mathcal{C}'$ en N' et $\mathcal{C}$ en N . Montrez que N' est l'image de N par la rotation r .

3. On construit les carrés $MBM'P$ et $NBN'Q$. Montrez que les points P et Q sont respectivement les images des points M et N par une similitude directe s dont vous préciserez centre, rapport et angle. Déduisez-en les ensembles décrits par les points P et Q lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

32 Dans le plan orienté, on donne un triangle isocèle OAO' tel que $(\vec{AO}, \vec{AO'}) = \frac{\pi}{2}$. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passant par A

et de centres respectifs O et O' se recoupent au point B . On note I le centre du carré $AOBO'$.

1. D et D' étant les points diamétralement opposés à A sur les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement, démontrez à l'aide d'une homothétie de centre A que les points D, B et D' sont alignés.

2. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ ($M \neq A, M \neq B$) et M' le point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle $\mathcal{C}'$.

On note r la rotation de centre A qui transforme O en O' . Quelle est l'image par r de la droite (BM) ? Déduisez-en que $r(M) = M'$.

3. Soit N le point d'intersection de la droite $(M'A)$ avec le cercle $\mathcal{C}$ et N' le point d'intersection de la droite (MA) avec le cercle $\mathcal{C}'$. Démontrez que $r(N) = N'$.

4. On suppose que M est distinct de D .

a. Prouvez que N est distinct de A . On construit alors le carré $NAN'F$.

b. Montrez que les points B et F sont les images respectives des points O et N par une similitude directe s dont vous préciserez les éléments caractéristiques.

c. Construisez l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la similitude s .

33 <BAC> Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1,5 et un cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et de rayon 3. On suppose de plus que la distance de O à O' est égale à 6. Faites une figure (unité graphique : 1 cm).

1. On appelle Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\frac{MO'}{MO} = 2.$$

a. Montrez que si I est le centre d'une similitude directe qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, alors I est un point de Γ .

b. Montrez que Γ coupe la droite (OO') en deux points A et B que vous caractériserez comme barycentres des points O et O' .

c. Montrez que M est élément de Γ si et seulement si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. Déterminez Γ et représentez-le sur la figure.

2. On veut prouver l'existence et l'unicité d'une similitude directe f d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

a. Dans cette question, on admet l'existence de f .

Quelle est alors l'image de O par f et quel est le rapport de f ? Soit T le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec le segment $[OO']$. Déterminez l'image T' de T par f .

b. Déduisez-en l'existence et l'unicité de f . Construisez le centre de f .

34 <BAC> Composées de rotations, d'homothéties Dans le plan orienté, ABC désigne un triangle rectangle isocèle en A , avec $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

Le point I est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle ABC.

On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

et par r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1.a. Construisez le point A', image de A par r_C .

b. Donnez la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_C \circ r_A$.

INDICATION : Écrire chaque rotation comme composée de réflexions convenablement choisies. Voir chapitre 1, TP 1, p. 19.

c. Montrez que $IA' = IA$ et que les droites (IA') et (AB) sont parallèles.

2. La droite (CI) coupe (AB) en E ; les droites $(A'E)$ et (BI) se coupent en K. On désigne par h_C l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et par h_K l'homothétie de centre K et de

rapport $-\sqrt{2}$.

a. Déterminez $h_C(B)$ et $h_C(E)$.

Déduisez-en que $\overrightarrow{BE} = -\sqrt{2} \overrightarrow{IA'}$.

b. Quelle est l'image de B par $h_K \circ h_C$?

c. Reconnaissez la transformation $h_K \circ h_C$ et déduisez-en que C et K sont alignés avec le milieu M du segment $[BE]$.

PROBLÈMES

35 THÈMES : Rotations. Cocyclicité. Complexes.

Homothéties

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i . On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, et C l'image de B par la rota-

tion de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1.a. Montrez que les points A, B, C, D sont sur un même cercle Γ dont vous préciserez le centre et le rayon.

b. Déterminez la nature du triangle OCD ; déduisez-en que $AB = CD$.

2.a. Calculez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$. Déduisez-en la nature du quadrilatère ABCD.

b. Démontrez que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires et que $AC = BD$.

3. On désigne par J le point d'intersection de (AC) et (BD) (le calcul de l'affixe de J n'est pas demandé dans cette question).

Démontrez que (OJ) est un axe de symétrie de ABCD.

4. Soit h l'homothétie qui transforme A en C et D en B, et soit r la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

NOTE : Composition d'une rotation r et d'une homothétie h de rapport négatif. La composée est évidemment une similitude directe, puisque $r \circ h$ conserve les angles orientés et transforme les distances dans le rapport $|k|$, k étant le rapport de h . Mais le rapport de cette similitude est $|k|$ (et non k), et son angle est $0 + \pi$ (et non 0), 0 étant l'angle de r .

a. Comparez $r \circ h$ et $h \circ r$.

b. On note $S = h \circ r$. Donnez la nature de S et ses éléments caractéristiques.

c. Déterminez l'image de A par S. Déduisez-en l'affixe de J.

d. Démontrez géométriquement que l'image O' de O par S est sur la droite (OB). Calculez l'affixe de O' .

36 THÈMES : Coniques. Similitudes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3 cm).

1. On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ de paramètre t réel. Tout point $M(t)$ de $\mathcal{C}$ a pour coordonnées :

$$x(t) = \sin \pi t \quad \text{et} \quad y(t) = \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{3} \right).$$

a. Précisez les transformations ponctuelles qui, quel que soit le réel t , associent au point $M(t)$ les points $M(t+2)$ et $M(t+1)$.

On appelle $\mathcal{C}_1$ la partie de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de t comprises entre 0 et 1. Expliquez comment on peut déduire $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}_1$.

b. Étudiez les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0; 1]$ et construisez $\mathcal{C}$ en précisant les tangentes aux points de paramètres : $0; \frac{1}{6}; \frac{1}{2}; 1$.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points dont les coordonnées $(X; Y)$ vérifient l'équation $X^2 + Y^2 - XY = \frac{3}{4}$ [E].

a. Démontrez que $\mathcal{C}$ est contenue dans $\mathcal{E}$.

b. Soit $M(X; Y)$ un point de $\mathcal{E}$.

Démontrez que [E] est équivalente à :

$$\left(Y - \frac{1}{2}X \right)^2 = \frac{3}{4} (1 - X^2)$$

Déduisez-en que X est compris entre -1 et 1, et qu'il existe un réel t tel que $X = \sin \pi t$. Déduisez-en que Y est alors

égal à $\sin \left(\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$ ou à $\sin \left(\pi t - \frac{\pi}{3} \right)$.

En remarquant que $\sin \pi t = \sin (\pi(1-t))$ et que

$\sin \left(\pi t - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\pi(1-t) + \frac{\pi}{3} \right)$, montrez que $\mathcal{E}$ est contenu

dans $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{E} = \mathcal{C}$.

3. On considère la similitude s de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. On note $\mathcal{C}'$ l'image de $\mathcal{C}$ par s , $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

- a. Démontrez que $\mathcal{C}'$ a pour équation $x'^2 + 3y'^2 = 3$.
- b. Déterminez la nature de $\mathcal{C}'$ ainsi que ses éléments caractéristiques.
- 4.a. Démontrez, en utilisant la définition par foyer et directrice d'une ellipse, que l'image d'une ellipse par une similitude est une ellipse.
- b. Déduisez-en que $\mathcal{C}$ est une ellipse dont vous préciserez le grand axe, les foyers, les directrices associées, ainsi que l'excentricité. Précisez les coordonnées des points et les équations des directrices dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

37 THÈMES : Similitude. Hyperbole. Calcul d'aire

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). f est l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i\sqrt{3})z$.

- Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f .
- Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, M a pour coordonnées $(x; y)$ et M' a pour coordonnées $(x'; y')$. Exprimez x et y en fonction de x' et y' .
- Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - 3y^2 = 3$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminez ses asymptotes, son foyer F d'abscisse positive et la directrice associée D . Calculez son excentricité. Construisez $\mathcal{H}$.
- Soit $\mathcal{H}'$ la courbe image de $\mathcal{H}$ par f .
 - Prouvez que $\mathcal{H}'$ est une hyperbole dont vous préciserez l'excentricité, un foyer, ainsi que la directrice associée.
 - Construisez $\mathcal{H}'$. (On admet que les asymptotes de $\mathcal{H}'$ sont les images par f de celles de $\mathcal{H}$.)
 - Démontrez que $\mathcal{H}'$ est la représentation graphique de la fonction définie par $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x + \frac{6}{x} \right)$.
- Soit L la droite d'équation $x = 2$ et L' son image par f . Déterminez les coordonnées des points d'intersection de L' et $\mathcal{H}'$. Calculez, en centimètres carrés, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{H}'$, la droite L' et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- Interprétez graphiquement l'intégrale

$$I = \int_{\sqrt{5}}^2 \sqrt{\frac{x^2}{3} - 1} \, dx \text{ et déduisez sa valeur du résultat du 5.}$$

COMMENTAIRE : Ce problème a permis de calculer une intégrale que l'on ne peut calculer directement par les méthodes apprises jusqu'à présent.

38 «BAC» THÈMES : Produit scalaire. $\sum a_i MA_i^2$.

Réflexion. Similitude

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O . On pose $AB = d$ ($d > 0$).

- 1.a. Démontrez que l'ensemble Δ des points M du plan tels

que $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} d^2$ est une droite que vous déterminerez avec précision.

b. Déterminez le réel k afin que l'ensemble δ des points du plan tels que $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} = k$ passe par le milieu de $[BC]$.

c. Démontrez que l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2d^2$ est un cercle que vous déterminerez avec précision.

d. Montrez que Δ est tangente à Γ .

2. À tout point M du plan, on associe le point M' défini par :

$$M' = S_{(AC)} \circ S_{(AO)}(M)$$

où $S_{(AO)}$ et $S_{(AC)}$ désignent les symétries orthogonales par rapport aux droites (AO) et (AC) respectivement.

a. Démontrez que M' est l'image de M par une rotation r dont vous donnerez les éléments caractéristiques.

b. Quelle est l'image par r de la droite (BC) ?

c. Démontrez que $O' = r(O)$ est un point de Γ .

3. À tout point M de la droite (BC) , on associe le point M'' d'intersection de la droite (AM') et de δ (M' est le point défini à la question 2.).

a. Démontrez que M'' est l'image de M par une similitude s dont vous préciserez les éléments caractéristiques.

b. Construisez l'image Γ'' de Γ par s .

4. Soit N un point de Γ distinct de A et de O' . La droite (NO') coupe Γ'' en Q .

a. Démontrez que $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A})$ (modulo π).

b. Déterminez $s(N)$.

39 «BAC» THÈMES : Complexes. Suites. Similitudes

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A.1. On prend pour point M_0 l'origine O du repère ; soit alors M_1 le point du plan P tel que $\overrightarrow{OM_1} = \vec{i}$.

On fixe un nombre réel $r > 0$, et un nombre réel θ dans $\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Soit M_2 le point du plan P tel que :

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r \|\overrightarrow{OM_1}\| \text{ et } (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) = \theta.$$

Calculez l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Les points M_0, M_1, M_2 ayant été définis ci-dessus, pour tout $n \geq 1$ dans $\mathbb{N}$, on définit le point M_{n+1} à partir des points M_{n-1} et M_n par :

$$\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = r \|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\| \text{ et } (\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta.$$

On obtient ainsi une suite de points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1], [M_1M_2], \dots, [M_nM_{n+1}], \dots$ est appelée « jolygone ».

On note v_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

a. Montrez que pour tout naturel $n \geq 1$, $v_n = re^{i\theta} v_{n-1}$.

b. Déduisez-en, pour tout naturel $n \geq 0$, l'expression de v_n en fonction de n, r et θ .

c. Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Calculez v_n pour $0 \leq n \leq 3$ et placez les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 , en prenant 8 cm pour unité de longueur.

B. Dans toute la suite du problème, on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout naturel $n \geq 0$, on note z_n l'affixe du point M_n .

1. Calculez z_0, z_1 et z_2 .

2. Pour tout $n \geq 0$, exprimez v_n en fonction de z_n et z_{n+1} ; déduisez-en que pour tout $n \geq 1$, $z_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

3. On rappelle que pour tout nombre complexe $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Calculez, pour tout $n \geq 0$, z_n en fonction de n, r et θ .

4.a. Démontrez que le module du nombre complexe

$$z_n - \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$$
 tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b. On note Ω le point du plan P d'affixe $\omega = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$.

Interprétez géométriquement le résultat de la question a.

5. Pour tout $n \geq 0$, on note z'_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

a. Calculez z'_n en fonction de n, r et θ .

b. Établissez qu'il existe un nombre complexe $a \neq 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $z'_n = a z'_{n-1}$.

c. En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminez une similitude directe f telle que pour tout $n \geq 1$,

$$f(M_{n-1}) = M_n.$$

Précisez le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d. Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Calculez dans ce cas les coordonnées du point Ω et placez ce point sur la figure précédemment tracée.

Indiquez une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placez les points M_5, M_6, M_7 et M_8 sur la figure.



Transformations conformes

Nous dirons que deux courbes sont orthogonales en un point d'intersection lorsque leurs tangentes respectives en ce point sont orthogonales.

1. $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct. A est le point de coordonnées $(1; 0)$ et B le point de coordonnées $(3; 0)$. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

a. Vérifiez que $[AB]$ et $\mathcal{C}$ sont des courbes orthogonales.

b. Vérifiez que $[AB]$ peut être défini paramétriquement par :

$$x = t, y = 0, t \in [1; 3].$$

c. Donnez une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ sous la forme : $x(t) = \dots, y(t) = \dots, t \in [\dots; \dots]$.

2. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2.$$

a. Trouvez l'image par f du segment $[AB]$. On notera $\mathcal{C}_1$ cette image.

b. L'image par f de tout point $M(x(t); y(t))$ de $\mathcal{C}$ est un point $M'(X(t); Y(t))$. Calculez $X(t)$ et $Y(t)$, et déduisez-en une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_2$, image de $\mathcal{C}$ par f . (On ne demande pas de construire $\mathcal{C}_2$.)

c. Déterminez l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$.

d. Montrez que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonales.

INDICATION : Calculer des coordonnées de vecteurs directeurs de leurs tangentes respectives et utiliser le produit scalaire.

3. On considère les points $C(-2; 0), D(4; 0), E(0; -1), F(0; 3)$.

a. Vérifiez que les segments $[CD]$ et $[EF]$ sont orthogonaux.

b. Trouvez les images de $[CD]$ et $[EF]$ par f . Vérifiez que O est un point d'intersection de ces images et que, en O, ces images ne sont pas orthogonales.

NOTE : On appelle fonction holomorphe une fonction définie dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, dérivable par rapport à z ($f'(z) = z^2$ est holomorphe, sa dérivée est $2z$). À toute fonction holomorphe f , on associe une transformation ponctuelle T_f et on sait démontrer le résultat suivant :

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étant deux courbes sécantes en un point $M(z_0)$, si $f'(z_0) \neq 0$, et si les deux courbes font en $M(z_0)$ un angle α (angle de leurs tangentes orientées), alors les courbes images par f font aussi en $M'(f(z_0))$ un angle α . On dit alors que T_f est une application conforme en z_0 .

Les similitudes sont des applications conformes, puisqu'elles sont associées aux fonctions $z \mapsto az + b, a \neq 0$, et que ces fonctions sont holomorphes de dérivées non nulles.

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

CHAPITRE

7

Conformément au programme, ce chapitre d'approfondissement est essentiellement un chapitre de travaux pratiques, et comme tel, il n'a pas la structure habituelle. Les énoncés nouveaux sont les définitions d'une suite minorée, majorée, bornée, et le théorème admis de la convergence monotone.

Pour mieux gérer ce chapitre qui porte sur tout le programme d'Analyse de l'enseignement obligatoire, nous l'avons divisé en trois grandes parties, comme l'indique le sommaire ci-dessous.

SOMMAIRE

Première partie : Inégalités

Travaux pratiques 1 à 5 133

Deuxième partie : Suites 139

Travaux pratiques 6 à 12 140

Troisième partie : Calcul intégral

Travaux pratiques 13 à 16 151

Exercices et problèmes 156

PREMIÈRE PARTIE : Inégalités. Encadrements.

A. Obtention et emploi de majoration, d'encadrements

TP 1

QUELQUES RÈGLES POUR MAJORER, MINORER

Les règles énoncées ont été démontrées et utilisées dans les classes antérieures. Nous nous bornons à les rappeler et à proposer quelques exemples d'application.

1 = 1 La somme de n nombres est :

- supérieure à n fois le plus petit d'entre eux ;
- inférieure à n fois le plus grand d'entre eux.

1. f est la fonction définie par $f(x) = x^3 + x^2 + x$. Vérifiez que pour tout x de $[0 ; 1]$, $3x^3 \leq f(x) \leq 3x$. Interprétez graphiquement ce résultat.

2. (u_n) est la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vérifiez que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$. Déduisez-en que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

3. (u_n) est la suite définie par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$. Vérifiez que pour tout n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. La suite (u_n) peut-elle avoir une limite strictement supérieure à 1 ?

1 = 2 Lorsque a et b sont des réels **strictement positifs** pour obtenir un réel supérieur à $\frac{a}{b}$, on peut remplacer a par un nombre c plus grand ou/et b par un réel d plus petit et strictement positif :

$$c \geq a > 0 \text{ et } 0 < d \leq b \text{ impliquent } \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}.$$

1. Indiquez comment trouver un nombre inférieur à $\frac{a}{b}$ lorsque $a > 0$, $b > 0$.

2. f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1 + 2x + 3x^2}{2 + 3x}$.

Montrez que pour tout $x \geq 1$, $\frac{3}{5}x \leq f(x) \leq 2x$.

Interprétez graphiquement ce résultat. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

1 ■ 3 • Lorsque a et b sont des nombres non nuls de même signe,

$$a \leq b \text{ équivaut à } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

- Lorsque a et b sont des nombres positifs, $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.
- On peut additionner membre à membre des inégalités, mais on ne peut pas les retrancher ($a \leq b$ et $c \leq d$ implique $a + c \leq b + d$).
- On peut multiplier membre à membre des inégalités entre nombres positifs ($0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ implique $ac \leq bd$).

1. Montrez que pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{1+x^2} \leq 1+x$.

2. f est la fonction définie par $f(x) = x^3 + 8x^2 + x + 5$.

Montrez, sans étudier la fonction f , que pour tout $x > 100$, $x^3 \leq f(x) \leq 1,081 x^3$.

INDICATION : Pour montrer que $f(x) \leq 1,081 x^3$ lorsque $x > 100$, écrire $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)$.

3. Montrez, sans étude de fonctions, que pour tout réel $x \geq 0$:

$$-x \leq x \cos x + e^{-x} \leq x + 1.$$

INDICATION : Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \leq 1$, et pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$.

1 ■ 4 Pour tous réels a et b , $|a+b| \leq |a| + |b|$, $|a-b| \leq |a| + |b|$,

$$|ab| = |a||b|, \text{ et lorsque } b \neq 0, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

1. Montrez que pour tout réel x , $\left| \frac{\sin x - 1}{2x^2 + 5} \right| \leq \frac{2}{5}$.

2. Montrez, que pour tout réel x , tout naturel $n \geq 1$, $\left| x^n \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|^n$.

Déduisez-en $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^n \cos \frac{1}{x} \right)$.

TP 2

DES ÉTUDES DE FONCTIONS POUR ÉTABLIR DES INÉGALITÉS

2 ■ 1 Inégalités valables

pour tout réel x d'un intervalle

Pour démontrer des inégalités valables pour tout réel x d'un intervalle, lorsque les règles élémentaires (par exemple, celles vues au TP 1) ne peuvent s'appliquer, une méthode efficace, et déjà utilisée, consiste à introduire des fonctions.

Par exemple, pour montrer que $\ln x \leq x + 1$ pour tout $x > 0$, on montrera que la fonction $x \mapsto x + 1 - \ln x$ est positive sur $]0; +\infty[$.

1. Démontrez que pour tout naturel $n \geq 1$, tout réel $x \geq 0$, $x^n - 1 \geq n(x - 1)$.
(Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité de Bernoulli.)
2. Démontrez que pour tout x dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \tan x$.
3. Montrez que pour tout x dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.
4. Montrez que pour tout réel x tel que $0 < x \leq 1$, $x \ln x \geq -e^{-1}$.

2 = 2 Inégalités valables

pour tous réels a et b d'un même intervalle

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{a}{b} \leq \frac{\sin a}{\sin b} \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{b} \right).$$

L'inégalité porte sur deux « variables », (a et b pouvant prendre toutes valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, avec $a < b$), ce qui empêche, *a priori*, l'introduction d'une fonction à une seule variable $x \mapsto f(x)$. Alors, en général, on se ramène au cas d'une variable en supposant que a , par exemple, est fixé, et en considérant alors b comme une variable x . (C'est de cette façon que l'on a démontré l'égalité $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ valable pour tous réels a et b strictement positifs.)

1. On suppose donc que a est un nombre fixé, dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Considérez la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

- a) Montrez que cette fonction est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

INDICATION : Lorsque $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \tan x$.

- b) Déduisez-en que pour tout x dans $\left[a; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\sin a}{a} \geq \frac{\sin x}{x}$, puis que $\frac{a}{x} \leq \frac{\sin a}{\sin x}$.

2. En utilisant le fait que pour tout x dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ (démontré dans la question 3., § 2.1, mais qui résulte aussi du 1.a.), montrez que $\sin x \geq \left(\frac{2x}{\pi}\right) \frac{\sin a}{a}$.

3. En donnant comme argument que les résultats obtenus sont vrais quel que soit a dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et quel que soit le réel x tel que $a < x < \frac{\pi}{2}$, déduisez-en que pour

tous réels a et b tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{b} \leq \frac{\sin a}{\sin b} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{a}{b}$.

TP 3

ENCADREMENTS, IRRATIONALITÉ DE e

Les mathématiciens se sont intéressés à la « nature » du nombre e : e est-il rationnel, c'est-à-dire s'écrit-il sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers positifs ? Au XVIII^e siècle Euler montra que la réponse est non. Nous vous proposons une démonstration de l'irrationalité de e . Auparavant, donnons des encadrements de e qui permettent d'obtenir rapidement des approximations décimales de e .

3.1 Des encadrements du nombre e

1. Pour tout naturel n , on note P_n le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Montrez que pour tout naturel n et tout réel $x > 0$, $0 < e^x - P_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$.

INDICATION : Raisonner par récurrence après avoir remarqué que pour $n \geq 1$, $P'_n = P_{n-1}$.

2. Déduisez-en que $2 < e < 3$. (Prenez $n = 2$.)

3. Montrez que la suite $1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ converge vers e .

4. Sachant que $2 < e < 3$, déduisez un majorant de l'erreur commise lorsqu'on remplace e par $P_n(1)$. Qu'obtient-on avec $n = 5$? $n = 10$?

3.2 Irrationalité de e

Les résultats précédents montrent que e est strictement compris entre 2 et 3 ; ce n'est donc pas un naturel. Montrons, en raisonnant par l'absurde, que ce n'est pas non plus un rationnel.

Supposons donc e rationnel et écrivons $e = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels.

D'après 1., § 3.1, nous obtenons lorsque $x = 1$, pour tout naturel n :

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{e}{(n+1)!}$$

d'où :

$$0 < n! \left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{n!} \right) < \frac{e}{n+1}.$$

Posons $A_n = n! \left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{n!} \right)$.

1. Montrez que lorsque $n \geq 2$, A_n est dans l'intervalle $]0 ; 1[$.

2. Montrez que pour tout naturel $n \geq b$, A_n est un entier.

3. Vérifiez que b ne peut pas être égal à 1, donc $b \geq 2$, et déduisez alors de 1. et 2. une contradiction. Le nombre e peut-il alors être rationnel ?

Note

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai le contraire de ce que l'on veut démontrer et à en déduire alors une impossibilité. Il en résulte que ce que l'on veut démontrer est vrai.

B. Encadrements d'une fonction à partir d'inégalités sur ses dérivées

PRÉLIMINAIRE

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et telles que pour tout x de I , $f'(x) \leq g'(x)$. Alors, si a est un nombre de I ,

pour tout x de I tel que $x \geq a$, $f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$.

TP 4

DES ENCADREMENTS DE $\sin x$ ET DE $\cos x$

4.1 Encadrements

1. On rappelle que pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$. En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrez que pour tout réel $x \geq 0$, $-x \leq \sin x \leq x$.

2. Utilisez le préliminaire pour montrer successivement que pour tout $x \geq 0$:

a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$

b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

c) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

d) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

3. a) Montrez, en utilisant la parité de la fonction cosinus, que les inégalités a) et c) sont encore vraies lorsque x est négatif.

b) Quels encadrements de $\sin x$ peut-on déduire de b) et d), lorsque x est négatif ?

4.2 Recherche de limites et de valeurs approchées

1. Étudiez la limite en zéro de la fonction $f: x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

2. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1$ lorsque $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, est dérivable en zéro et précisez la valeur de $f'(0)$.

3. Montrez que $1 - \frac{x^2}{2}$ est une approximation de $\cos x$ avec une erreur inférieure à $\frac{x^4}{24}$. Donnez un majorant de l'erreur commise lorsqu'on écrit $\cos 0,1 = 0,995$.

4. Montrez que $\frac{\pi}{9} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3$ est une approximation de $\sin \frac{\pi}{9}$ avec une erreur inférieure à $\frac{1}{3\,000}$. (Penser que $\frac{\pi}{9} < \frac{1}{2}$.)

TP 5

DES ENCADREMENTS DE $\ln(1+x)$ **5.1** Encadrements par des polynômes

$x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive sur $] -1 ; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Pour encadrer $\ln(1+x)$, il suffit donc d'encadrer $\frac{1}{1+x}$.

1. Montrez, par exemple, que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$ ($x \neq -1$).

INDICATION : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

2. Déduisez-en que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{1}{1+x} \leq x^5$.

3. Montrez que pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$

4. Donnez un encadrement de $\ln(1+x)$ du type $f_4(x) \leq \ln(1+x) \leq g_3(x)$, f_4 et g_3 étant des polynômes respectivement de degrés 4 et 3, puis un encadrement du type $f_7(x) \leq \ln(1+x) \leq g_6(x)$, f_7 et g_6 étant des polynômes respectivement de degrés 7 et 6. Indiquez comment vous obtiendriez ces encadrements.

5.2 Calculs de valeurs approchées et étude de fonctions

1. Donnez une valeur approchée de $\ln(1,02)$ à 10^{-3} près.

2. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right)$ lorsque

$x \neq 0$, et $f(0) = 0$, est dérivable en zéro et précisez la valeur de $f'(0)$.

3. Étude de la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$.

a) L'ensemble de définition de f est la réunion des intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$. Justifiez cette affirmation.

b) Étudiez la limite de f à chaque borne de son ensemble de définition.

INDICATION : Pour la limite en 1, poser $X = x - 1$.

c) La fonction f est donc prolongeable par continuité en 1, en posant $f(1) = 1$. Selon l'usage, nous continuerons de noter f la fonction ainsi prolongée.

La question se pose de savoir si f est dérivable en 1. Pour cela, étudiez la limite en zéro de la fonction $t: h \mapsto \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

INDICATION : Utiliser un encadrement de $\ln(1+x)$ par des polynômes.

d) Étudiez les variations de f , puis représentez-la graphiquement.

DEUXIÈME PARTIE : Suites

1. SUITES MAJORÉES, MINORÉES, BORNÉES

DÉFINITION

- Dire que la suite (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un nombre b indépendant de n , tel que pour tout naturel n , $u_n \leq b$.
- Dire que la suite (u_n) est **minorée** signifie qu'il existe un nombre a indépendant de n , tel que pour tout naturel n , $a \leq u_n$.
- Dire que la suite (u_n) est **bornée** signifie que (u_n) est à la fois **majorée** et **minorée**.

EXEMPLES :

1. La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n+1}{n+2}$ est majorée : en effet, pour tout naturel n , $0 \leq n+1 \leq n+2$; et donc $v_n \leq 1$. On dit que 1 est un **majorant** de la suite (v_n) . Cette suite (v_n) est minorée : en effet, pour tout n , $0 \leq v_n$. On dit que 0 est un **minorant** de la suite (v_n) . La suite (v_n) est bornée car elle est majorée et minorée.
2. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est minorée : en effet, pour tout naturel n , $0 \leq u_n$. Mais la suite (u_n) n'est pas majorée car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; donc tous ses termes ne peuvent pas rester dans un intervalle du type $]-\infty ; b]$, (b réel), ce qui serait le cas si elle était majorée.

2. THÉORÈME DE LA CONVERGENCE MONOTONE

Nous admettrons le théorème suivant :

THÉORÈME

Toute suite **croissante** et **majorée** a une **limite réelle**.

Toute suite **décroissante** et **minorée** a une **limite réelle**.

REMARQUE : Le théorème affirme seulement l'existence de la limite, il ne donne pas la valeur de cette limite. En particulier, notez que si la suite croissante (u_n) est majorée par un nombre M , ce nombre M n'est pas nécessairement la limite de (u_n) .

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante, et pour tout naturel n , $u_n \leq 2$. Cependant la limite de (u_n) est 1, et non 2.

Conséquences du théorème

- Toute suite **croissante** et **non majorée** a pour limite $+\infty$.
- Toute suite **décroissante** et **non minorée** a pour limite $-\infty$.

Nous admettrons ces deux résultats.

A. Études de suites non récurrentes

Des exemples d'études de telles suites ont déjà été proposés dans le chapitre 10 du tome *Obligatoire*.

TP 6

u_n EST FONCTION EXPLICITE DE n

6.1 Suites du type $u_n = f(n)$, f « fonction usuelle »

1. Préliminaire

Une suite (u_n) étant donnée, il arrive qu'on puisse trouver une fonction « usuelle » f telle que $u_n = f(n)$ pour tout n . Par exemple, si $(u_n) = (2n^2 + 1)$, alors en notant f la fonction $x \mapsto 2x^2 + 1$, on obtient $u_n = f(n)$.

Lorsque $u_n = f(n)$, l'étude de la suite (u_n) peut se déduire directement de l'étude de la fonction f , car :

- lorsque f est croissante (resp. décroissante) sur $]0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante (resp. décroissante) ;
- lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- lorsque f est majorée (resp. minorée, bornée), alors la suite (u_n) l'est aussi.

2. Étudiez le sens de variation et la limite de chacune des suites définies ci-dessous :

a) $u_n = \frac{n}{n^2 + n}$ b) $u_n = \frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1}$ c) $u_n = n - \ln n$

d) $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ e) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

6.2 D'autres cas

Parfois, on ne peut pas trouver de fonction usuelle f telle que pour tout naturel n , $u_n = f(n)$. C'est le cas, par exemple, pour la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Pour étudier une telle suite, il faut alors utiliser d'autres méthodes, d'autres outils : par exemple, les théorèmes d'encadrement, de comparaison...

1. (u_n) est la suite définie par $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

a) La suite (u_n) peut-elle être monotone à partir d'un certain rang ?

b) Vérifiez que $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et déduisez-en la limite de (u_n) .

2. (u_n) est la suite définie par $u_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2}$.

Trouvez une suite (v_n) de limite nulle, telle que pour tout n , $|u_n| \leq v_n$, puis déduisez-en la limite de (u_n) .

u_n EST UNE SOMME DONT LE NOMBRE DE TERMES DÉPEND DE n

Exemples de telles suites, les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}; \quad v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Note

Nous verrons, par exemple au TP 16, une autre méthode, utilisant l'intégrale, pour étudier de telles suites.

7.1 u_n s'exprime simplement en fonction de n

1. (u_n) est la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$.

Calculez u_n pour tout naturel n , et déduisez-en la limite de (u_n) .

2. (u_n) est la suite définie par $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, ($n \geq 1$).

Calculez u_n pour tout naturel n , et déduisez-en la limite de (u_n) .

INDICATION : Remarquer que pour tout $p \neq 0$, $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$. Commencer par voir comment on calcule $u_1, u_2, u_3, \dots$.

3. θ étant un réel donné de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, on pose, pour tout naturel $n \geq 1$,

$$S_n(\theta) = \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{3} - 1 \right) + \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{3^2} - 1 \right) + \dots + \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{3^n} - 1 \right).$$

a) Vérifiez que pour tout $n \geq 1$, $2 \cos \frac{\theta}{3^n} - 1 > 0$. (La suite (S_n) est donc bien définie.)

b) Montrez que pour tout réel x , $\cos 3x = (2 \cos 2x - 1) \cos x$.

c) Déduisez-en que $S_n(\theta) = \ln \cos \frac{\theta}{2} - \ln \cos \left(\frac{\theta}{2 \times 3^n} \right)$.

d) Déterminez la limite, notée $S(\theta)$, de la suite $(S_n(\theta))$.

7.2 D'autres cas

1. (u_n) est la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$.

L'écriture $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ signifie $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

a) Calculez u_1, u_2, u_3 .

b) Montrez, en utilisant par exemple le théorème des accroissements finis, que pour

tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \leq \frac{1}{x}$.

c) Déduez-en, par addition membre à membre de n inégalités bien choisies, que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.

d) Montrez que la suite (u_n) est convergente et précisez sa limite.

2. Étude des suites définies par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}.$$

a) On peut « voir » la suite (u_n) comme une suite du type $u_n = f(n+1) - f(n)$, ce qui suggère l'utilisation des accroissements finis pour trouver, si possible, des encadrements de (u_n) . Montrez que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ [1], et déduisez-en la limite de (u_n) .

b) La suite (v_n) définie pour $n \geq 1$, a été vue au § 1.1, TP1, p. 133.

Montrez que pour tout $n \geq 1$, $v_n \geq \sqrt{n}$, et déduisez-en la limite de (v_n) .

c) Si on applique la règle 1.1 (TP1) pour majorer (v_n) , on obtient $w_n \geq 1$, ce qui ne permet aucune conclusion sur la limite. Mais on peut remarquer que d'après [1],

$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geq 1$, et qu'en sommant les n égalités écrites pour $n, n-1, \dots, 1$, on obtiendra v_n .

Montrez que pour tout $n \geq 1$, $v_n - 1 \leq 2(u_1 + \dots + u_n) \leq v_n$.

• Déduez-en que $\frac{2(u_1 + \dots + u_n)}{\sqrt{n}} \leq w_n \leq \frac{2(u_1 + \dots + u_n) + 1}{\sqrt{n}}$.

• Calculez $u_1 + \dots + u_n$ et déduisez-en la limite de (w_n) .

TP 8

COMPARAISON AVEC UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Preliminaire

Lorsque (u_n) est une suite géométrique à termes strictement positifs et de raison q , alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, et l'on sait que la connaissance de q renseigne sur le comportement à l'infini de la suite (u_n) (chapitre 10, p. 201). D'où l'idée, pour une suite quelconque (u_n) dont il n'est pas facile d'étudier la limite par les théorèmes usuels, d'étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et de voir ce que l'on peut en déduire pour la suite (u_n) .

Cela suppose bien entendu que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ existe, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang, u_n soit non nul.

Pour simplifier, nous considérerons ici une suite (u_n) dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ et dont les termes sont tous strictement positifs.

8.1 Cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, avec $0 < k < 1$

1. Montrez par récurrence que dans ce cas, pour tout naturel $n \geq 1$, $0 < u_n \leq k^n u_0$.

2. Montrez que la suite (u_n) a pour limite zéro. Énoncez le théorème obtenu.

3. Applications

a) Montrez que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{10^n}{n!}$ converge vers zéro. (Observez aussi le calcul des premiers termes à la calculatrice.)

Plus généralement, montrez que lorsque $a > 1$, la suite $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ converge vers zéro.

b) Montrez que la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 3}$ converge vers zéro.

Commentaire

La suite étudiée à la question b) est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ qui sera examiné plus loin (TP 9) ; comme vous le verrez, on dispose d'autres moyens pour prouver sa convergence, mais le moyen employé ici est très efficace.

8.2 Cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k$, avec $k > 1$

1. Démontrez que dans ce cas, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq k^n u_0$.

Déduisez-en la limite de la suite.

2. Application

Étudiez la limite de la suite définie par $u_0 = 1,1$ et $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout naturel n .

INDICATION : Montrer d'abord que pour tout n , $u_n \geq 1,1$.

B. Études de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

TP 9

DES RÉSULTATS UTILES

9.1 Problème d'existence

Nous avons déjà vu au chapitre 1, p. 19, que la donnée d'un réel u_0 et de la condition $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n , ne définit pas nécessairement une suite.

1. Montrez que la donnée de $u_0 = 3$ et de la condition $u_{n+1} = \ln u_n$ pour tout n ne permettent pas de définir une suite. Néanmoins :

Lorsque f est une fonction définie au moins sur un intervalle I dont l'image $f(I)$ est incluse dans I (pour tout x de I , $f(x)$ est aussi dans I), **et lorsque** le nombre u_0 appartient à I , **alors** on peut définir une suite dont le premier terme est u_0 et qui est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n .

En effet, dans ces conditions, $f(u_0) = u_1$ appartient à I ; donc u_1 a une image par f ; posons $u_2 = f(u_1)$, u_2 est donc dans I , et à son tour u_2 a une image par f , notée u_3 , et ainsi par récurrence on définit bien une suite (u_n) telle que pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. f est la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2+x}{1+x}$.

Montrez que les conditions $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n , définissent bien une suite. Pour cela, trouvez un intervalle I qui contient 2 et tel que $f(I)$ soit inclus dans I .

REMARQUE : Conformément au programme, lorsque nous demanderons l'étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, nous supposerons toujours implicitement que la suite existe, et il sera inutile de le prouver.

9.2 Problème du sens de variation

Contrairement au cas des suites du type $u_n = f(n)$, dans le cas des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$, la monotonie de f n'implique pas nécessairement celle de la suite (u_n) . Mais il est des cas où la connaissance du sens de variation de f permet de conclure. Par exemple, supposons f croissante sur l'intervalle I , u_0 dans I et, cas usuel, $f(I)$ inclus dans I ; supposons en outre $u_1 \geq u_0$; alors on peut dire que la suite est croissante. En effet ces hypothèses impliquent $f(u_1) \geq f(u_0)$, soit $u_2 \geq u_1$, puis $f(u_2) \geq f(u_1)$, soit $u_3 \geq u_2$, ... et un raisonnement par récurrence permet de conclure.

1. Examinez les cas suivants :

- a) f est croissante sur I et $u_1 < u_0$. b) f est décroissante sur I et $u_1 \geq u_0$.
c) f est décroissante sur I et $u_1 \leq u_0$.

En conclusion, il est inutile de mémoriser tous les cas, mais vous pouvez retenir que la connaissance du sens de variation de f et de la place de u_1 par rapport à u_0 permettent parfois de conclure rapidement l'étude du sens de variation de la suite.

2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ pour tout naturel n . Étudiez le sens de variation de cette suite.

9.3 Les limites réelles possibles

1. Supposons qu'une suite (u_n) du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ait une limite réelle ℓ . Supposons de plus que la fonction f définie sur D est continue en ℓ (ℓ appartient à D et $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$).

Alors, d'après le théorème 2 du chapitre 10, p. 202, tome *Obligatoire*, la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

Par ailleurs, la suite (u_{n+1}) converge vers ℓ de façon évidente ; en effet, cette suite est la suite $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n+1}, \dots$; excepté u_0 , elle prend les mêmes valeurs que la suite (u_n) . Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n , les suites (u_{n+1}) et $(f(u_n))$ sont égales, donc leurs limites le sont aussi ; donc $\ell = f(\ell)$.

THÉORÈME

(u_n) est une suite et f une fonction telles que :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout naturel } n.$$

Si la suite a pour limite le nombre ℓ **et si** la fonction f est continue en ℓ , **alors** $\ell = f(\ell)$. Donc ℓ est une solution de l'équation $x = f(x)$, donc ℓ est un **point fixe** de f .

REMARQUE : Parfois, la résolution de l'équation $x = f(x)$ est facile, et on sait alors a priori que si la suite a une limite, ce qui n'est pas sûr, cette limite sera nécessairement l'une des solutions. Mais avant de conclure, il faudra nécessairement prouver que la suite a une limite.

Commentaire

En conséquence du théorème, si l'équation $x = f(x)$ n'a pas de solution, et si f est continue, alors la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ n'a pas de limite.

2. Étude de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ pour tout naturel n .

- Montrez que cette suite est croissante (revoir § 9.2) et majorée par 2.
- Déduisez-en que la suite a une limite (voir § 2, p. 139) et calculez-la.

9.4 L'intérêt d'une représentation graphique

Il peut être intéressant pour l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ de représenter graphiquement, chaque fois que possible, la suite (u_n) à partir de la courbe $\mathcal{C}$ représentant f et de la droite Δ d'équation $y = x$ (voir chapitre 1, p. 19, tome *Obligatoire*). En effet, le graphique permet de prévoir si la suite est monotone ou non, si la suite a une limite. Cette limite, si elle existe, est nécessairement l'abscisse d'un des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ .

UTILISATION DES ACCROISSEMENTS FINIS

Nous avons déjà utilisé le théorème des accroissements finis dans la recherche d'approximations d'un point fixe d'une fonction f (le nombre α est un point fixe de f si $f(\alpha) = \alpha$). Nous avons introduit alors une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, et nous avons montré que cette suite (u_n) converge vers α lorsque, hypothèse essentielle, $|f'| < 1$ sur un intervalle contenant α (chapitre 10 du tome *Obligatoire*, TP4, p. 211). La méthode que nous allons suivre maintenant pour montrer qu'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un nombre ℓ est exactement la même. En effet, nous avons vu au TP précédent que ℓ est nécessairement un point fixe de f . Pour traiter les trois exercices qui suivent, vous pouvez donc, en cas de difficultés, vous reporter au TP 4 du chapitre 10 déjà cité.

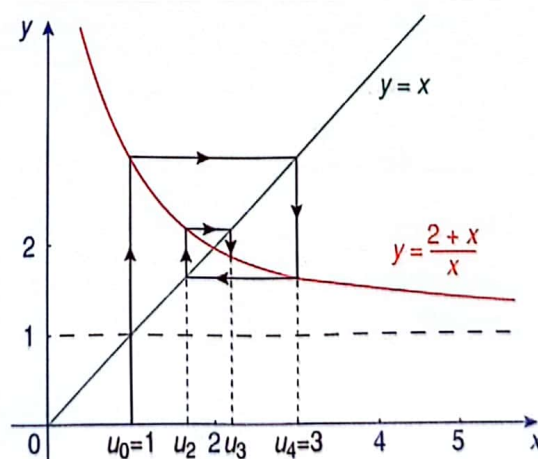
10 = 1 (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2 + u_n}{u_n}$

La suite à étudier est du type $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction $x \mapsto \frac{2+x}{x}$.

L'équation $f(x) = x$ a exactement deux solutions, 2 et -1.

Graphiquement, -1 et 2 sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ représentant f avec la droite d'équation $y = x$. D'après le théorème énoncé au TP 9, si la suite a une limite, alors cette limite est 2 ou -1.

Ci-dessous, nous avons représenté graphiquement les premiers termes de (u_n) .



La représentation graphique laisse prévoir que la suite a pour limite 2 ; mais visiblement, la suite n'est pas monotone et nous ne pouvons donc pas espérer conclure en disant que la suite est croissante, majorée, qu'elle a donc une limite ℓ telle que $\ell = f(\ell)$ (voir les théorèmes p. 139 et 145).

Mais nous allons pouvoir conclure en utilisant le fait qu'autour de 2, la pente des tangentes reste, en valeur absolue, inférieure à k , avec $k < 1$; de façon précise, f' est majorée en valeur absolue par un nombre k strictement inférieur à 1.

1. On note I l'intervalle $[1,5 ; 3]$.

Montrez que l'image $f(I)$ de I par f est contenue dans I , que u_1 appartient à I , et déduisez-en, par récurrence, que u_n appartient à I pour tout $n \geq 1$.

INDICATION : Étudier la fonction f pour trouver $f(I)$.

Commentaire

L'importance du résultat « $u_n \in I$ pour tout $n \geq 1$ » apparaîtra lors de la question 3. Il importe aussi de remarquer que 2 est dans I et que $f(2) = 2$.

2. Montrez que pour tout x de I , $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$.

3. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $|f(u_n) - 2| \leq \frac{8}{9} |u_n - 2|$.

Commentaire

On utilise ici le théorème des accroissements finis avec valeur absolue, mais pour pouvoir l'appliquer, il est nécessaire de savoir que u_n est dans I , ce qui a été prouvé lors de la question 1. On utilise aussi l'égalité $f(2) = 2$.

4. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $|u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n |u_1 - 2|$.

INDICATION : Utiliser un raisonnement par récurrence.

5. Déduisez-en que la suite (u_n) a pour limite 2.

Commentaire

Notez l'importance d'avoir obtenu $|f'(x)| \leq k < 1$ sur tout un intervalle contenant 2. (Ici $k = \frac{8}{9}$.) C'est parce que $\frac{8}{9} < 1$ que la suite $\left(\left(\frac{8}{9}\right)^n\right)$ converge vers zéro, et donc que (u_n) converge vers 2.

6. À partir de quel rang m obtient-on $|u_m - 2| \leq 10^{-4}$?

10.2 (u_n) est définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = 2,5 u_n (1 - u_n)$

1. Représentez graphiquement le polynôme f défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5}{2} x(1 - x).$$

2. I est l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{5}{8}\right]$. Montrez que $f(I)$ est inclus dans I .

3. Montrez que pour tout x de I , $|f'(x)| \leq \frac{5}{8}$.

4. En procédant comme au paragraphe 10.1, montrez que la suite (u_n) est convergente et donnez sa limite.

10 ■ 3 (u_n) est définie par la donnée de u_0 et $u_{n+1} = u_n^2$

Étudiez cette suite dans chacun des cas suivants :

a) $0 < u_0 < 1$; b) $u_0 = 1$; c) $u_0 > 1$.

INDICATION : Faire un graphique.

TP 11

SUITES $u_{n+1} = au_n + b$; $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$

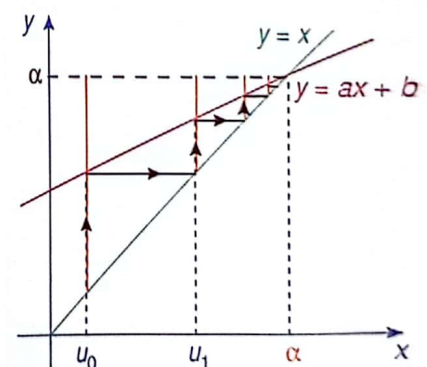
Pour étudier de telles suites, qui sont aussi du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut procéder comme dans le TP 10, mais nous avons vu que cela n'est possible que sous certaines hypothèses portant sur la fonction f' .

Cependant, pour les suites $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$, il existe des méthodes spécifiques, toujours possibles à mettre en œuvre. Ces méthodes ont, en outre, l'énorme avantage de donner un moyen d'exprimer **directement** u_n en fonction de n .

11 ■ 1 Suites $u_{n+1} = au_n + b$, $a \neq 1$

Pour l'étude d'une telle suite, on introduit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, α désignant l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = ax + b$ et $y = x$. (On peut démontrer géométriquement que les longueurs des segments verticaux de couleur rouge sont en progression géométrique ; or ces longueurs sont les termes de la suite $|u_n - \alpha|$.)

La suite (v_n) étant géométrique, on pourra exprimer v_n , donc aussi u_n , en fonction de n .



1. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 4$ pour tout n .

Trouvez le nombre α tel que $\alpha = \frac{\alpha}{2} + 4$.

2. Montrez que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique.

3. Exprimez explicitement v_n et u_n en fonction de n .

4. Déduisez-en la limite ℓ de la suite (u_n) .

À partir de quel rang m obtient-on $|u_m - \ell| \leq 10^{-5}$?

11.2 Suites $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$, $ad - bc \neq 0$

Une telle suite est du type $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie par $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

On sait que lorsque $ad - bc = 0$, f est constante, donc (u_n) l'est aussi.

Lorsque $ad - bc \neq 0$, on dit que f est une fonction homographique, sa représentation graphique est une hyperbole.

1. Premier cas : l'équation $f(x) = x$ a deux solutions α et β .

• Reprenons l'exemple 1 du TP 10, $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2 + u_n}{u_n}$.

Nous avons vu que $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Posez $v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ pour tout n .

a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$, puis exprimez v_n explicitement en fonction de n .

b) Exprimez u_n explicitement en fonction de n .

c) Déduisez-en la limite de u_n .

REMARQUE : Nous aurions pu obtenir les résultats de b) et c) en posant $w_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$.

• Étudiez de manière analogue la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$ pour tout naturel n .

2. Deuxième cas : l'équation $f(x) = x$ a une seule solution α .

C'est le cas par exemple de la suite (u_n) définie :

$$\text{par } u_0 = 3, \text{ et } u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \text{ pour tout naturel } n.$$

a) Posez $v_n = u_n - \alpha$; montrez que pour tout n , $v_n \neq 0$, et que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite arithmétique.

b) Exprimez $\frac{1}{v_n}$, puis u_n , explicitement en fonction de n .

c) Déduisez-en que la suite (u_n) a pour limite 1. À partir de quel rang m obtient-on $|u_m - 1| \leq 10^{-4}$?

3. Troisième cas : l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.

Que pouvez-vous en conclure pour la suite (u_n) ?

C. Emploi de suites pour l'approximation d'un nombre

Nous avons déjà, en classe de Première, utilisé des suites pour calculer des valeurs approchées d'un nombre. Nous avons donné d'autres exemples d'utilisation dans le chapitre 10 du tome *Obligatoire*. En voici un autre, des exemples faisant appel au calcul intégral étant traités dans la troisième partie de ce chapitre.

TP 12

APPROXIMATION DE $\sqrt{ab}$

a et b sont deux réels donnés tels que $0 < a < b$. On pose $A = \sqrt{ab}$.

1. a) Montrez que A appartient à l'intervalle $[a; b]$, puis que $a < A < \frac{a+b}{2} < b$.

b) Montrez que $a < \frac{2ab}{a+b} < A$.

L'encadrement $\frac{2ab}{a+b} < A < \frac{a+b}{2}$ est donc meilleur que l'encadrement $a < A < b$.

D'où l'idée de continuer en définissant deux suites (a_n) et (b_n) , de la manière suivante :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad \text{et pour tout naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

2. a) Vérifiez que la suite $(a_n b_n)$ est constante.

b) Démontrez par récurrence que pour tout n , $a_n < b_n$.

c) Déduisez-en que la suite (b_n) est décroissante, puis que la suite (a_n) est croissante.

Nous avons donc la disposition suivante :



3. a) Vérifiez que la suite (a_n) est majorée et que la suite (b_n) est minorée.

b) Ces deux suites sont convergentes. Pourquoi ?

Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell'$.

4. a) Vérifiez que $b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - a_n$, et que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$.

Déduisez-en que pour tout naturel n , $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b_0 - a_0)$.

b) Qu'en concluez-vous alors pour ℓ et ℓ' ?

5. Application

Calculez des valeurs approchées de $\sqrt{6}$ par cette méthode, avec $a = 2$ et $b = 3$.

Combien de termes faut-il au plus calculer pour obtenir un encadrement de $\sqrt{6}$ dont l'amplitude soit inférieure à 10^{-3} ?

TROISIÈME PARTIE : Calcul intégral.

TP 13

ENCADREMENT DE $\ln 3 = \int_1^3 \frac{dx}{x}$

En « encadrant » la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par des fonctions affines

non constantes, nous allons en déduire des encadrements de $\int_1^3 \frac{dx}{x}$, donc de $\ln 3$.

1. Représentez la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ restreinte à l'intervalle $[1 ; 3]$ dans un repère orthonormal.

On note $\mathcal{C}$ la courbe obtenue, A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et 3.

2. a) Donnez une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$.

b) Montrez que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \geq \frac{4-x}{4}$.

Interprétez graphiquement le résultat.

3. a) Donnez une équation de la droite (AB).

b) Montrez que pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{4-x}{3}$.

Interprétez graphiquement ce résultat.

4. Déduisez des questions précédentes que $1 \leq \ln 3 \leq \frac{4}{3}$.

5. Généralisation

B' est le point de coordonnées $\left(b ; \frac{1}{b}\right)$ avec $b > 1$.

a) Trouvez une équation de la tangente T' à $\mathcal{C}$ au point $M'\left(\frac{1+b}{2} ; \frac{2}{1+b}\right)$.

b) Trouvez une équation de la droite (AB').

c) Comparez les positions relatives de $\mathcal{C}$, T' , et (AB').

d) Déduisez-en que pour tout $b \geq 1$, $\frac{2(b-1)}{b+1} \leq \ln b \leq \frac{(b-1)(b+1)}{2b}$ [1].

e) En écrivant les inégalités [1] lorsque $b = 2$, puis $b = \frac{3}{2}$, donnez un encadrement de $\ln 2 + \ln \frac{3}{2}$.

Déduisez-en un encadrement de $\ln 3$ et comparez ce résultat à celui obtenu à la question 4.

TP 14

ÉTUDE DE LA FONCTION $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$

14 ■ 1 Étude de la fonction $h : t \mapsto e^{-t^2}$

Bien que cette étude ne soit pas indispensable pour l'étude de la fonction f elle-même, il peut être utile de donner une interprétation graphique de $f(x)$, afin de contrôler des résultats ou d'émettre des conjectures.

1. Étudiez la fonction h et construisez sa courbe représentative. En particulier, précisez les tangentes aux points d'abscisses 0, 1, 2.

Remarquez que la courbe représentant h « s'écrase » très vite sur l'axe des abscisses : comparez par exemple $h(2)$ et $h(3)$.

2. À l'aide de ce graphique, pouvez-vous prévoir quelques propriétés de la fonction f elle-même ?

3. Étudiez les variations de la fonction h'' sur $[0 ; 2]$ et montrez que pour tout t de cet intervalle, $|h''(t)| \leq 2$.

4. En utilisant la méthode du point médian, donnez une valeur approchée de $f(2)$ à 10^{-1} près.

Note

La méthode du point médian est exposée dans le TP 4, p. 236, tome Obligatoire.

14 ■ 2 Variations de f . Parité

1. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$; déduisez-en son sens de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Montrez que f est impaire.

INDICATION : Justifier l'égalité $\int_{-x}^x h(t) dt = 2 \int_0^x h(t) dt$, puis utiliser la relation de Chasles.

14 ■ 3 Étude de la limite en $+\infty$

1. a) Montrez que pour tout t de $[1 ; +\infty[$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b) Déduisez-en que pour tout $x \geq 2$, $\int_2^x e^{-t^2} dt \leq e^{-2}$.

2. a) Montrez que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \leq \int_0^2 e^{-t^2} dt + e^{-2}$.

b) Déduisez-en que f a une limite réelle ℓ en $+\infty$.

INDICATION : Admettre ici le résultat suivant, analogue à celui énoncé dans le cas des suites : une fonction croissante et majorée a une limite réelle en $+\infty$.

3. a) Montrez que pour tout $x \geq 2$, $f(2) \leq f(x) \leq f(2) + e^{-2}$.

b) Déduisez-en que $f(2) \leq \ell \leq f(2) + 4 \times 10^{-1}$.

c) Déduisez-en un encadrement de ℓ .

14 ■ 4 Représentation graphique de la fonction f

1. Trouvez, en utilisant la méthode du point médian, une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-1} près.
2. Dans un repère orthonormal, tracez la courbe représentative de f . En particulier, précisez les tangentes aux points d'abscisses 0, 1 et 2.

TP 15

UTILISATION DE L'INTÉGRALE POUR L'ÉTUDE DE CERTAINES SUITES

Nous allons utiliser le calcul intégral pour étudier des suites dont le terme général est une somme dont le nombre de termes dépend de n .

Nous avons déjà donné des exemples d'étude de telles suites au TP 7. En voici d'autres qui utilisent la théorie de l'intégration.

15 ■ 1 (u_n) est définie par $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

1. Préliminaire

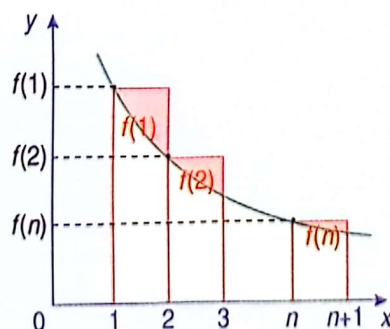
On remarque que la suite est évidemment croissante. Justifiez cette affirmation. On pense alors à voir si la suite est majorée ou non ; si elle est majorée, elle est convergente, et si elle est non majorée, elle a pour limite $+\infty$.

On introduit alors la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$, car on obtient ainsi :

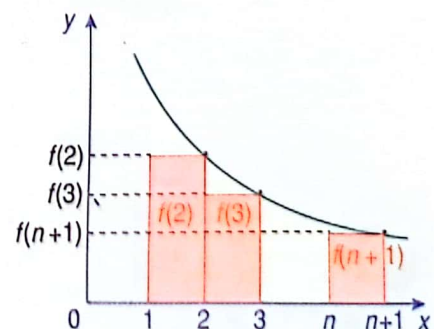
$u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$. Et on sait d'expérience qu'une somme $f(1) + \dots + f(n)$, pour de « bonnes » fonctions f , peut se comparer à l'intégrale $\int_1^{n+1} f(x) dx$.

En effet, $f(1)$ est par exemple l'aire d'un rectangle de côtés le segment $[1; 2]$ et le segment $[0; f(1)]$ (lorsque $f \geq 0$), de même $f(2)$, ..., $f(n)$. Donc u_n peut se voir comme l'aire d'une réunion de rectangles, aire que l'on peut parfois comparer à $\int_1^{n+1} f(x) dx$.

Par exemple, lorsque la fonction f est décroissante, nous obtenons :



$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq u_n.$$



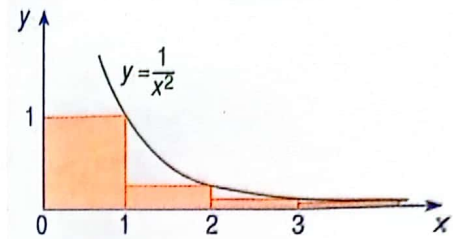
$$u_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

2. Revenons à la suite (u_n) et à $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Montrez que sur chaque intervalle $[p; p+1]$,

$$p \geq 1, \int_p^{p+1} \frac{dx}{x^2} > \frac{1}{(p+1)^2}.$$

(Remarquez la nécessité de l'hypothèse $p \geq 1$.)



3. Déduisez-en que $u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}$, donc que $u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$, puis enfin

que la suite est convergente et que sa limite ℓ est comprise entre 1 et 2.

4. Approximation du nombre ℓ

Pour trouver des approximations du nombre ℓ , fixons un entier n et majorons $u_p - u_n$ lorsque $p > n$

a) Montrez que pour tout $p > n$, $0 < u_p - u_n < \int_n^p \frac{dx}{x^2}$.

b) Déduisez-en que pour tout $p > n$, $0 < u_p - u_n < \frac{1}{n}$.

c) En faisant tendre p vers $+\infty$, justifiez que $0 < \ell - u_n < \frac{1}{n}$.

Déduisez-en une approximation de ℓ à 10^{-1} près.

Note

On sait démontrer que la limite ℓ de (u_n) est égale à $\frac{\pi^2}{6}$; on peut être étonné par la présence du nombre π dans ce résultat, mais ce genre d'étonnement participe au charme des mathématiques !

15 = 2 (S_p) est définie par $S_p = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \dots + \frac{\ln p}{p^2}$

1. La suite (S_p) est strictement croissante. Prouvez cette affirmation.

2. On cherche alors à voir s'il est possible de la majorer, et pour cela, on introduit la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$.

a) Montrez que pour tout entier $k \geq 2$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq f(k)$.

b) Déduisez-en que $S_p - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^p \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_p - \frac{\ln p}{p^2}$, puis que :

$$\frac{\ln p}{p^2} + \int_2^p \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_p \leq \frac{\ln 2}{4} + \int_2^p \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

3. Montrez que $\int_2^p \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{p} \ln p + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$.

4. Déduisez-en que (S_p) est majorée, convergente, et que sa limite ℓ est comprise entre $\frac{1 + \ln 2}{2}$ et $\frac{2 + 3 \ln 2}{4}$.

INDICATION : Faire « tendre » p vers $+\infty$.

TP 16

DES APPROXIMATIONS DE $\sqrt{e}$

Pour tout naturel $n \geq 1$, on pose $I_n = \frac{1}{(2^{n+1})(n!)} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$.

1. Calculez I_1 .

2. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(2^{n+1})(n+1)!}$.

3. Déduisez-en par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} + I_n.$$

4. a) Montrez que l'on peut trouver une constante A telle que pour tout n ,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{(2^n)(n!)} A.$$

INDICATION : Majorer la fonction $t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

- b) Déduisez-en la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!}.$$

- c) Montrez que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \sqrt{e} - u_n \leq \frac{1}{(2^n)(n!)}$, puis donnez une approximation de $\sqrt{e}$ à 10^{-2} près.

POUR S'ENTRAÎNER

Encadrements

1 f est la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$.

1. Trouvez un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) \geq x$.
Déduez-en la limite de f en $+\infty$.

2. Trouvez un réel $B < 0$ tel que pour tout $x \leq B$, $f(x) \leq \frac{3}{4}x$.
Déduez-en la limite de f en $-\infty$.

2 f est la fonction définie par $f(x) = \frac{2x + \cos x}{2x - 1}$.

1. Montrez que pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$, $|f(x) - 1| \leq \frac{2}{|2x - 1|}$.

2. Déduez-en la limite de f en $+\infty$, et en $-\infty$.

3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - \cos x}{2 + \cos x}$.

1. Montrez que sur l'intervalle $[1; +\infty[$, on peut encadrer f par deux fonctions polynômes du second degré.

2. Déduez-en la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$.
 F est la primitive de f qui s'annule en 0.

1. Montrez que pour tout réel x , $0 \leq F'(x) \leq 1$.

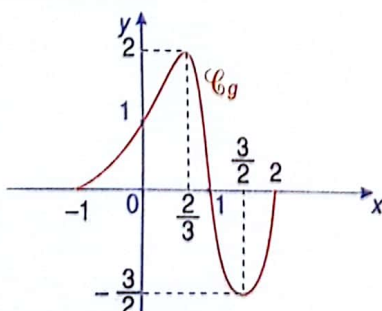
2. Montrez que pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq F(x) \leq x$.

3. Montrez que pour tout réel $x \leq 0$, $x \leq F(x) \leq 0$.

5 f est une fonction dérivable sur l'intervalle $I = [1; 2]$. Pour tout x de I , $-1 \leq f'(x) \leq 0$. En outre, $f(1) = 3$ et $f(2) = 0$.
Trouvez deux fonctions affines qui encadrent f sur $[1; 2]$.

INDICATION : Appliquer le théorème des accroissements finis.

6 On donne la représentation graphique d'une fonction g sur l'intervalle $[-1; 2]$. On sait en outre, qu'une primitive f de g sur $[-1; 2]$ est telle que $f(-1) = f(2) = 0$, $f(1) = 1$. On souhaite étudier la fonction f .



1. Expliquez pourquoi f est continue sur $[-1; 2]$.

2. Quel est le sens de variation de f sur $[-1; 2]$?

3. Montrez que pour tout x de l'intervalle $[-1; \frac{2}{3}]$:
$$0 \leq f(x) \leq 2(x+1).$$

4. Trouvez des encadrements de f par des fonctions affines sur chacun des intervalles $[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}]$ et $[\frac{3}{2}; 2]$.

5. Dans quelle partie du plan se situe la courbe représentative de f ?

Pour les exercices 7 à 10, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$. Démontrez de deux façons les inégalités proposées, d'abord en utilisant les accroissements finis, ensuite sans utiliser les accroissements finis.

7 $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \frac{b-a}{2\sqrt{a}}$.

8 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq \frac{b-a}{b^2}$.

9 $b^3 - a^3 \leq 3b^2(b-a)$.

10 $\sin b - \sin a \leq (b-a) \cos a$ (on suppose de plus $b \leq \frac{\pi}{2}$).

Convergence de suites

11 On considère la suite (u_n) définie, pour tout naturel $n \geq 2$, par $u_n = \frac{n^2}{n!}$.

1. Montrez que cette suite est décroissante et bornée. Que pouvez-vous en conclure quant à l'existence d'une limite de cette suite ?

2. Montrez que la suite (u_n) converge vers 0.

12 La suite (u_n) est définie par $0 < u_0 \leq 3$, et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$ pour tout naturel n .

1. Montrez par récurrence que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$.

2. Étudiez le signe de $u_{n+1} - u_n$.

3. Montrez que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

13 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$, et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ pour tout naturel n .

1. Montrez par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 2$.

2. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) .
 3. Montrez que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

14 Prouvez que pour tout naturel $n \geq 2$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Déduisez-en que la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ est convergente.}$$

(La valeur de la limite n'est pas demandée.)

15 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$, et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$ pour tout naturel n .

1. Représentez graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) . Quelles conjectures en tirez-vous ?
2. Montrez que pour tout naturel n , $1 < u_n < 4$.
3. Montrez que (u_n) est croissante. Déduisez-en que (u_n) est convergente, puis précisez sa limite.

16 **BAC** (u_n) est la suite définie par :

$$u_0 = 5, \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \text{ pour tout naturel } n.$$

1. Montrez que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 4$.
2. On se propose d'étudier de deux manières différentes la convergence de cette suite.

a. Première méthode

- Montrez que la suite est décroissante.
- Déduisez-en que la suite est convergente et calculez sa limite.

b. Deuxième méthode

- Montrez que pour tout n , $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{|u_n - 4|}{4}$.
- Montrez que pour tout n , $0 \leq |u_n - 4| \leq \frac{1}{4^n}$.
- Déduisez-en que la suite converge et trouvez sa limite.

17 **BAC** La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0, \text{ et } u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_n} \text{ pour tout naturel } n.$$

- 1.a. Montrez que pour tout naturel n strictement positif :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1.$$

b. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) et déduisez-en qu'elle converge.

c. Déterminez la limite ℓ de la suite.

- 2.a. Montrez que pour tout x de l'intervalle $[0; \pi]$:

$$\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

b. Montrez alors que pour tout naturel n , $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

c. Retrouvez ainsi la limite ℓ de la suite (u_n) .

18 **BAC** f est la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. Soit (u_n) la suite définie par :
 $u_0 = 2$, et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour tout naturel n .

1. Donnez un tableau de valeurs approchées à 10^{-2} près des termes de la suite d'indices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 10.

2. Représentez graphiquement les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 en laissant apparents les traits nécessaires à l'obtention de cette représentation.

3. Quelles conjectures en tirez-vous ?

4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrez que pour tout naturel n , u_n est positif.

5. Montrez que pour tout réel x strictement positif :

$$0 < \ln(1+x) < x.$$

Déduisez-en que la suite (u_n) est décroissante.

6. Déduisez de ce qui précède que la suite (u_n) converge et que sa limite est zéro.

Encadrement d'intégrales

19 **BAC** Le but de l'exercice est d'encadrer l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx.$$

1. Prouvez que pour tout x de $[0; 1]$:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

2. Déduisez de 1. un encadrement de e^{-x^2} pour x dans $[0; 1]$, puis montrez que pour tout x de $[0; 1]$:

$$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)} \quad [1].$$

3.a. Montrez que pour tout x de $[0; 1]$:

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

b. Déduisez alors de [1] que $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$.

Donnez une valeur approchée de K à 3×10^{-2} près.

20 Le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de l'intégrale :

$$J = \int_3^{100} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Pour cela on considère les intégrales :

$$I = \int_3^{100} \frac{dx}{x^6} \text{ et } K = \int_3^{100} \frac{dx}{x^{12}}.$$

1. Montrez que $J \leq I$.

2. Montrez que $I - J \leq K$. Déduisez-en un encadrement de J .

3. On prend pour J la valeur 64×10^{-6} ; donnez un majorant de l'erreur commise.

21 **BAC** 1. Démontrez que pour tout réel t :

$$(1+t)^2 \geq 4t.$$

Déduisez-en que pour tout réel $t \geq 0$, $1+t \geq \frac{4t}{1+t}$.

2. On considère les intégrales :

$$I = \int_1^{1.1} (1+t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_1^{1.1} \frac{4t}{1+t} dt.$$

a. Prouvez que $I \geq J$.

b. Calculez la valeur exacte de I .

c. Calculez la valeur exacte de J en remarquant que pour tout réel $t \neq -1$, $\frac{4t}{1+t} = 4 - 4 \frac{1}{1+t}$.

3. Sans utiliser la touche **ln** de la calculatrice, déduisez de la question 2. que $\ln 1,05 > 0,048\,75$.

22 Pour tout naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

Encadrez I_n puis déduisez-en que la suite (I_n) converge vers zéro.

23 Pour tout naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx$.

1. Sans calculer I_n , montrez que la suite (I_n) est monotone.

2. Comparez I_n et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$.

Déduisez-en que la suite (I_n) converge, précisez sa limite.

24 Pour tout naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$.

1.a. Calculez I_1 et $I_0 + I_1$. Déduisez-en la valeur de I_0 .

b. Calculez $I_{n+1} + I_n$.

2.a. Montrez, sans calculs, que la suite (I_n) est croissante.

b. Prouvez que pour tout x de $[0; 1]$,

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2} e^{nx}.$$

Déduisez-en un encadrement de I_n .

3. Prouvez que la suite (I_n) a pour limite $+\infty$.

Étudiez la limite de la suite $\left(\frac{I_n}{e^n}\right)$.

25 Montrez que :

$$a. \quad 0,15 \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{3 - \cos^2 t})^{-1} dt \leq 0,18.$$

$$b. \quad 1,4 \leq \int_1^4 (t^2 - 4t + 9)^{-\frac{1}{3}} dt \leq 1,8.$$

26 La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln(n+k) \right) - \ln n$.

1.a. Calculez u_1, u_2, u_3 .

b. Montrez que pour tout n non nul, $u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)$.

2.a. Montrez que pour tout k entier compris entre 0 et $n-1$,

$$\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k+1}{n} \right).$$

b. Déduisez-en que $u_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x dx \leq u_n$, puis que la suite (u_n) est convergente ; précisez la limite de (u_n) .

EXERCICE COMMENTÉ

27 ÉNONCÉ :

Étudiez la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right), n \geq 1.$$

VERS UNE SOLUTION :

u_n est un produit de facteurs, mais le nombre de ces facteurs n'est pas fixe, il varie avec n (leur nombre est exactement n). (Chacun de ces facteurs a pour limite 1 lorsque n tend vers $+\infty$, mais puisque leur nombre tend aussi vers $+\infty$, on ne peut pas en conclure que $\lim(u_n) = 1$.) Nous n'avons jamais étudié des suites de ce type, mais nous avons étudié des suites dont le terme général est une somme de n termes ; or nous connaissons un moyen de « transformer des produits en sommes », c'est « de prendre le logarithme ». On pose donc $v_n = \ln u_n$.

1. Assurez-vous que $\ln u_n$ est défini pour tout $n \geq 1$.

2. La suite (v_n) est visiblement croissante ; justifiez cette affirmation.

On pourrait tenter de voir si elle est majorée. En fait, on peut même encadrer v_n puisque nous avons vu que l'on peut encadrer $\ln x$ par des polynômes (TP 5, p. 138).

a. Montrez que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

(On peut utiliser ce TP 5, ou obtenir ce résultat par des études de fonctions.)

b. Déduisez-en que pour tout n ,

$$\frac{(n^2-1)(3n+1)}{6n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

INDICATION : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démontrer ce résultat par récurrence.

3. Déduisez-en la limite de (v_n) , puis celle de (u_n) .

PROBLÈMES

28 Accélération de la convergence

1. Trouvez la solution positive de l'équation $\frac{1}{x} = 1 + x$.

On notera ℓ cette solution. Remarquez que $\ell = \frac{1}{\ell + 1}$.

2. Pour trouver des valeurs approchées de ℓ , on peut considérer la suite définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n , où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

ℓ est alors un point fixe de f .

Nous savons que dans ce genre de problèmes, le but est d'arriver, en utilisant le théorème des accroissements finis, à une majoration du type $|u_{n+1} - \ell| \leq (k^n) |u_0 - \ell|$ où k est un majorant de $|f'|$ sur un intervalle bien choisi. Il y a donc intérêt, pour obtenir rapidement des approximations, à ce que k soit « petit ».

a. Vérifiez que $|f'(\ell)|$ est voisin de 0,4.

Une valeur de k possible pourrait donc être 0,5, mais nous ne le vérifierons pas. Nous allons procéder autrement.

b. Montrez que ℓ est aussi un point fixe de $h = f \circ f$, de $h_1 = h \circ h$, de $g = h_1 \circ h_1$.

c. Montrez que pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{13x + 21}{21x + 34}$.

d. Vérifiez que $g'(\ell)$ est voisin de $\frac{1}{2500}$.

Avec une valeur de k voisine de $(2500)^{-1}$, la convergence va être rapide.

3. Considérez donc la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$, et $v_{n+1} = g(v_n)$ pour tout naturel n .

a. En utilisant la méthode du TP 10, montrez qu'il existe un nombre k , $0 < k < 10^{-3}$, tel que $|v_{n+1} - \ell| \leq k^{n+1} |v_0 - \ell|$.

b. Donnez une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près. Combien faut-il d'itérations pour obtenir ce résultat ?

29 THÈME : Suite récurrente

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = \ln(6 - x).$$

1. Étude de f

a. Étudiez les variations de f .

b. Déterminez un réel positif m tel que pour tout $x \in [0 ; 4]$, $|f'(x)| \leq m$.

c. Montrez que pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f(x) \in [0 ; 4]$.

d. Tracez la courbe $\mathcal{C}_f$ associée à f dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur graphique : 2 cm).

2. Étude de la fonction g définie sur $[0 ; 4]$ par :

$$g(x) = \ln(6 - x) - x.$$

a. Étudiez les variations de g .

b. Démontrez que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[0 ; 4]$.

c. Donnez un encadrement de β à 10^{-2} près.

3. Déduez des deux premières questions que pour tout $x \in [0 ; 4]$, $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{2} |x - \beta|$.

4. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln 2$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n .

a. Montrez que pour tout naturel n , $u_n \in [0 ; 4]$.

b. Montrez que pour tout naturel n , $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{2^n}$.

c. Déduez-en la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

D'après Concours École Nationale de la Météorologie (1992).

30 BAC THÈME : Suite récurrente

Partie I

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

a. Étudiez les variations de g sur $\mathbb{R}$. On ne demande pas de construire sa représentation graphique.

b. Prouvez que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c. Étudiez la fonction g' sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Déduez-en que pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$:

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

2. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}\right).$$

a. Étudiez les variations de f .

Tracez avec précision la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

b. Prouvez que pour tout réel x positif, $1 \leq f(x) \leq 1 + \ln 2 < 2$.

c. En utilisant le 1., prouvez que pour tout x de l'intervalle $[1 ; 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

d. Soit m un réel quelconque.

Déterminez graphiquement, en discutant selon les valeurs de m , le nombre de solutions positives de l'équation $f(x) = m$. Pour $m = 1,5$, déterminez graphiquement les valeurs approchées des solutions à 10^{-1} près.

Partie II

On définit une suite (U_n) de la façon suivante :

$$U_0 = \frac{1}{5} \text{ et pour tout entier naturel } n, U_{n+1} = f(U_n).$$

f est la fonction définie dans la partie I.

1. Placez U_0 sur l'axe des abscisses du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, puis représentez sur ce même axe U_1 , U_2 et U_3 .

2. Prouvez que quel que soit l'entier naturel non nul n , $1 < U_n < 2$.

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

Montrez que h est une fonction décroissante. Déduisez-en que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution λ comprise entre 1 et 2. Donnez une valeur approchée de λ à 10^{-2} près.

31 «BAC» THÈME : Suite d'intégrales

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $] -1; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n .

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

I. Étude des fonctions f_n

1. Soit h_n la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Étudiez le sens de variation de h_n . En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminez le signe de $h_n(x)$ sur $] -1; +\infty[$.

2.a. Vérifiez que $f'_1(x) = h_1(x)$ pour tout $x > -1$, et que pour tout $n > 1$, $f'_n(x) = x^{n-1} h_n(x)$.

b. On suppose n impair. Justifiez que $f'_n(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe pour tout $x > -1$.

Dressez alors le tableau de variation de la fonction f_n lorsque n est impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

c. Dressez de même le tableau de variation de f_n lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3.a. Étudiez la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

b. Tracez ces deux courbes.

II. Étude d'une suite

Dans cette partie, (u_n) est la suite définie par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx, \quad n \geq 1.$$

1. Étude de la convergence

a. Démontrez que $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

b. Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et donnez sa limite.

c. À l'aide de l'encadrement obtenu au a., déterminez un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{100}$.

2. Calcul de u_1

a. En remarquant que pour tout x appartenant à $[0; 1]$,

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}, \text{ calculez } \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx.$$

b. Calculez u_1 au moyen d'une intégration par parties.

3. Calcul de u_n

Pour tout x de $[0; 1]$ et pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n \quad [1].$$

a. Démontrez que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \quad [2].$

b. En utilisant successivement les expressions [1] et [2] de $S_n(x)$, montrez que :

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

c. En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrez que :

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \right].$$

4. Application

Soit E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $0 \leq x \leq 1$ et $f_2(x) \leq y \leq f_1(x)$.

Calculez u_2 et déduisez-en l'aire de E en cm^2 .



Fonctions croissantes majorées. Intégrales généralisées

Nous avons admis que toute suite croissante et majorée a une limite réelle. Il existe un résultat analogue pour les fonctions. Ce résultat, que nous admettrons, dit que : « toute fonction croissante et majorée sur un intervalle $[a; +\infty[$, a une limite réelle en $+\infty$ » [R].

1. Intégrales généralisées de fonctions continues positives
 f est une fonction continue, positive, sur l'intervalle $I = [a; +\infty[$. Pour tout x de I , on pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

a. Montrez que F est croissante sur I .

b. Prouvez le résultat suivant : « si f et g sont deux fonctions continues positives sur I telles que $g \leq f$ sur I , et si la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$ a une limite réelle en $+\infty$, alors

il en est de même de la fonction $x \mapsto G(x) = \int_a^x g(t) dt$. ».

INDICATION : Utiliser le résultat préliminaire [R].

NOTE : Si F a une limite réelle ℓ en $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente. (On pose alors $\ell = \int_a^{+\infty} f(t) dt$).

2. Applications

a. Montrez que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} \quad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^3} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2t^2+3} dt.$$

b. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t-\sqrt{t}}$ est-elle convergente ?

INDICATION : Minorer la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-\sqrt{t}}$ sur $[2; +\infty[$.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

1 Fonctions $x^n \sin \frac{1}{x}$. Continuité. Dérivation

A. f_1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ lorsque } x \neq 0, \text{ et } f_1(0) = 0.$$

$\mathcal{C}_1$ est sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Vérifiez que f_1 est paire.
- Montrez que f_1 est continue en zéro.
- Montrez que f_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ mais que f_1 n'est pas dérivable en zéro.

INDICATION : La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en zéro.

4. Trouvez les points de $\mathcal{C}_1$ situés sur les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$. Déterminez les tangentes en ces points.

5. Trouvez graphiquement les solutions de l'équation $\tan u = u$. Déduisez-en les points en lesquels f_1 admet un extremum local.

6. Donnez l'allure de $\mathcal{C}_1$.

B. f_2 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_2(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ lorsque } x \neq 0, \text{ et } f_2(0) = 0.$$

$\mathcal{C}_2$ est sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Vérifiez que f_2 est impaire.
- Montrez que f_2 est dérivable en tout point $x \neq 0$, calculez alors $f_2'(x)$, puis montrez que f_2 est dérivable en zéro.
- Trouvez les points de $\mathcal{C}_2$ situés sur les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = -x^2$, et déterminez les tangentes à $\mathcal{C}_2$ en ces points.

C. Le but de cette question est d'exhiber une fonction f dont le nombre dérivé en zéro est strictement positif, et telle qu'il n'existe pas d'intervalle contenant zéro sur lequel elle est croissante.

1. f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ lorsque } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

Calculez $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$, et montrez que f est dérivable en zéro ; calculez $f'(0)$.

2. Calculez $f' \left(\frac{1}{n\pi} \right)$ pour tout naturel $n \geq 1$.

Déduisez-en qu'il n'existe pas d'intervalle contenant zéro sur lequel f est croissante.

2 Continuité (prolongement par). Accroissements finis. Logarithmes. Exponentielles

h est la fonction définie par $h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

- Montrez que h est définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrez que h est impaire.

INDICATION : Calculer $h(x) + h(-x)$.

2. Montrez, en utilisant le théorème de la dérivée d'une fonction composée, que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculez $h'(x)$ pour tout réel x .

3. Montrez, en utilisant une inégalité des accroissements finis, que pour tout $x \geq 1$, $h(x) - h(1) \leq \frac{(x-1)}{\sqrt{2}}$, puis que pour

$$\text{tout } x \text{ de } [0; 1], \quad h(x) \geq \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

4.a. On suppose que k et ℓ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $k'(x) \leq \ell'(x)$ pour tout réel x . Montrez que $k(x) - k(0) \leq \ell(x) - \ell(0)$ pour tout réel x .

b. Montrez que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ pour tout réel $x \geq 0$.

c. En utilisant a., montrez que :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq h(x) \leq x, \text{ pour tout réel } x \geq 0.$$

5. On étudie maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp\left(\frac{h(x)}{x}\right) \text{ lorsque } x \neq 0, \text{ et } f(0) = e.$$

a. Montrez que f est continue en 0.

INDICATION : Utiliser $h'(0)$.

b. Montrez que f est paire.

c. Prouvez que pour tout réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} f(x) \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right).$$

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Quel est le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$?

d. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrez que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

INDICATION : Étudier la limite de f en $+\infty$, et pour cela, écrire que

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{\ln\left(x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)\right)}{x} \text{ pour tout } x > 0.$$

e. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

3 Fonctions puissances et exponentielles. Intégrales. Suites

On note f_0 la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_0(x) = e^{-x}$, et pour tout réel $\alpha > 0$, on note f_α la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$ lorsque $x > 0$, et $f_\alpha(0) = 0$. On note $\mathcal{C}_\alpha$ ($\alpha \geq 0$) la courbe représentant f_α dans un repère orthonormal choisi (unité graphique de longueur : 5 cm).

A.1. Étudiez les fonctions f_0 et f_1 , puis tracez $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ après avoir précisé la position de $\mathcal{C}_0$ par rapport à $\mathcal{C}_1$.

2.a. On suppose $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$. Montrez que f_α est continue en zéro, que f_α est dérivable en zéro lorsque $\alpha > 1$, et que f_α n'est pas dérivable en zéro lorsque $\alpha < 1$.

Dans ce dernier cas, vérifiez que l'axe des ordonnées est tangent à $\mathcal{C}_\alpha$ à l'origine du repère.

b. Étudiez les variations de f_α .

3.a. On suppose $\alpha > 0$. Précisez les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_\alpha$ restreintes à $]0; +\infty[$.

b. α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$.

Précisez les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\beta$ restreintes à $]0; +\infty[$. Prouvez que toutes les courbes $\mathcal{C}_\alpha$ passent par un même point et donnez une équation de la tangente à $\mathcal{C}_\alpha$ en ce point.

4. Représentez les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_e$.

B. Dans cette partie, on suppose que α est un entier naturel, on pose alors $\alpha = n$.

On note F_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

1. Quelle est la fonction dérivée de F_n ?

2. Calculez $F_0(x)$ et $F_1(x)$, puis étudiez la limite en $+\infty$ des fonctions F_0 et F_1 .

3. Montrez que :

$$F_n(x) = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ tout } x \geq 0.$$

4.a. Montrez que chaque fonction F_n a une limite réelle en $+\infty$. On notera u_n cette limite.

INDICATION : Récurrence.

b. Quelle relation existe-t-il entre u_n et u_{n-1} ? Déduisez-en la valeur de u_n pour tout n .

5.a. Étudiez les variations de F_n lorsque $n \neq 0$.

b. Donnez l'allure de la courbe représentant F_3 .

6.a. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $\frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$.

b. Déduisez-en que pour tout n , $\frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right)$.

INDICATION : $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ désigne la somme $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

c. En utilisant une majoration de $f_n(t)$ sur l'intervalle $[0; 1]$, montrez que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq F_n(1) \leq e^{-1}$.

d. Déduisez de b. et c. la limite de la suite (s_n) définie par

$$s_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}.$$

4 Logarithmes. Intégrales. Suites

f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

A.1.a. Prouvez que l'ensemble de définition de f est l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. Étudiez la limite de f en 0.

INDICATION : Poser $X = \frac{1}{x}$.

c. Étudiez la limite de f en $+\infty$.

2. Étudiez le sens de variation de f , puis tracez sa courbe dans un repère orthonormal (unité graphique : 3 cm).

3. k est un réel strictement positif.

Calculez $\int_1^k \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$, puis $\int_1^k f(x) dx$.

B. Dans cette partie, m est un réel strictement positif.

1. Montrez que $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$.

2. Montrez que $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} - f(m)$,

et déduisez-en que $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$.

C.1. Montrez qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout

réel x , $x \neq 0$, $x \neq -1$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

2. Pour tout naturel $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. En utilisant la question 1., simplifiez l'expression de S_n .

b. Montrez que la suite (S_n) est convergente et précisez sa limite.

3.a. Montrez que $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$.

b. Trouvez la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n).$$

4. (v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.

a. Vérifiez que :

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = v_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

b. Déduisez-en que (v_n) est convergente et précisez sa limite.

5 Équations fonctionnelles. Continuité. Dérivation. Suites $u_n = f(v_n)$

A. Le but de cette partie est de trouver toutes les fonctions f satisfaisant aux conditions (C_1) suivantes :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue en zéro ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$);
- pour tout réel x , $f(2x) = f(x)$.

1. Vérifiez que les fonctions constantes satisfont bien aux conditions (C_1) .

2. Nous allons montrer que seules les fonctions constantes vérifient les conditions (C_1) .

On suppose que f satisfait aux conditions (C_1) .

a. Montrez que pour tout réel x , tout naturel n , $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

b. En supposant x fixé, justifiez que la suite (u_n) définie par

$$u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \text{ a pour limite } f(0).$$

c. Déduisez-en que f est constante sur $\mathbb{R}$.

B. Le but de cette partie est de trouver toutes les fonctions g qui satisfont aux conditions (C_2) suivantes :

- g est définie sur $\mathbb{R}$ et g est dérivable en zéro ;
- $g(2x) = 2g(x)$ pour tout réel x .

1. Trouvez des fonctions simples qui satisfont aux conditions (C_2) .

2. On suppose que g satisfait aux conditions (C_2) .

a. Montrez que $g(0) = 0$.

b. Nous allons ramener le problème à celui posé lors de la question A. On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ lorsque $x \neq 0$, et $f(0) = g'(0)$. Montrez que f est continue en zéro.

c. Montrez que pour tout réel x , $f(2x) = f(x)$.

INDICATION : Distinguer les cas $x = 0$, $x \neq 0$.

d. Déduisez-en, en utilisant A., que pour tout réel x , $g(x) = g'(0)x$ (donc g est une fonction linéaire).

e. Déterminez l'ensemble de toutes les fonctions qui satisfont aux conditions (C_2) .

6 Logarithme. Fonction définie par une intégrale

A. f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x - \ln x} \text{ lorsque } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Montrez que f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et que f est continue en zéro.

2. Étudiez la fonction f , tracez la courbe représentant f dans un repère orthonormal. Précisez la tangente à la courbe au point O, origine du repère.

B. Le but de cette partie est d'étudier la primitive de f sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 1. On note F cette primitive.

1. Écrivez $F(x)$ sous forme d'une intégrale.

2. Déterminez le signe de $F(x)$ selon les valeurs de x .

3. Étudiez le sens de variation de F .

4. Étude de la limite de F en zéro

a. Justifiez que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$.

b. Justifiez le résultat suivant : pour tout t de $]0; 1]$, $f(t) \leq t$.

c. Déduisez-en un encadrement de F sur $]0; 1]$.

d. Montrez alors que $F(0)$ est compris entre $-\frac{1}{2}$ et 0.

5. Étude de la limite de F en $+\infty$

Montrez que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \geq x$, et déduisez-en la limite de F en $+\infty$.

6. Le but de cette question est d'encadrer la fonction F par deux fonctions usuelles sur $[1; +\infty[$.

a. Calculez $\int_1^x (\ln t + 1) dt$ lorsque $x > 0$.

Montrez que pour tout $t > 1$, $\frac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln t$.

Déduisez-en que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq x \ln x$.

b. Calculez $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ lorsque $x > 0$.

Montrez que pour tout $x \geq 1$, $x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 1 \leq F(x)$.

c. On note $a(x)$ l'amplitude de cet encadrement de $F(x)$. Étudiez les variations de $a(x)$ et commentez.

7 Logarithmes et exponentielles. Suites. Intégrales

A. f est la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

1. Étudiez la fonction f .

2. Déduisez-en que pour tout réel $t > 1$,

$$\int_1^t x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \geq \int_1^t \frac{x}{x+1} dx \quad [1].$$

3. g est la fonction définie sur I par :

$$g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

a. Calculez $g'(x)$ et déduisez-en une primitive de f sur I .

b. Calculez l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe représentant f , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \alpha$, $x = \beta$, $0 < \alpha < \beta$.

4. Pour tout naturel $n \geq 1$, on pose :

$$s_n = 1 \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + 2 \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Montrez que pour tout $n \geq 1$,

$$s_n \geq \int_1^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \quad [2].$$

B.1. Montrez que pour tout $a > 0$, $\ln a \leq a - 1$.

2. On donne n réels strictement positifs $x_1, x_2, \dots, x_n$. Montrez que :

$$\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \quad [3].$$

INDICATION : Utiliser 1. avec $a_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)}$, i entier de 1 à n .

3. Montrez que l'inégalité [3] est équivalente à :

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n.$$

C. (u_n) et (v_n) sont les suites respectivement définies par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}, \quad n \geq 1.$$

1. Montrez que les suites $(\ln u_n)$ et (u_n) sont croissantes, convergentes, et que leurs limites respectives sont 1 et e. Déduisez-en que pour tout naturel $n \geq 1$, $v_n \leq e$.

2. En utilisant les inégalités [1], [2] et [3], montrez que :

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad \ln(v_n) \geq \frac{1}{n} \int_1^n \frac{x}{1+x} dx.$$

3. Calculez l'intégrale $w_n = \int_1^n \frac{x}{1+x} dx$.

INDICATION : $\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x}$.

4. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} w_n \leq \ln v_n \leq 1$, puis déduisez-en que (v_n) est convergente et donnez sa limite.

S Intégrales. Bijections

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Le but du problème est l'étude de la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro. On notera F cette primitive.

A.1. Étudiez la fonction f et représentez-la graphiquement dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Écrivez $F(x)$ sous forme d'une intégrale. Quel est le sens de variation de F ? F est-elle paire ? impaire ? Justifiez vos réponses.

3.a. Vérifiez que pour tout réel t de l'intervalle $[1; +\infty[$, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, et déduisez-en que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\int_1^x f(t) dt \leq 1 - \frac{1}{x}.$$

b. Montrez que :

$$\int_0^1 f(t) dt \leq 1 \quad \text{et que} \quad F(x) \leq x, \quad \text{pour tout réel } x \geq 0.$$

c. Montrez que pour tout réel $x \geq 0$, $F(x) \leq 2$.

d. On admet le théorème suivant : toute fonction croissante et majorée sur un intervalle I , a une limite finie ou infinie aux extrémités de I . En utilisant ce théorème, vérifiez que F a une limite en $+\infty$. Que pouvez-vous dire de cette limite ?

B.1.a. Montrez que la fonction *tangente* restreinte à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

est une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0; +\infty[$. On note v cette

restriction et v^{-1} la bijection réciproque.

b. On pose $w = F \circ v$.

Prouvez que w est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et calculez $w'(x)$.

Déduisez-en qu'il existe un nombre k tel que :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad w(x) = x + k.$$

c. Calculez $w(0)$ et déduisez-en la valeur de k .

d. Déduisez de cette étude que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$F(v(x)) = x$, puis que pour tout x de $[0; +\infty[$, $v^{-1}(x) = F(x)$. Précisez alors la limite de F en $+\infty$.

2. Tracez la représentation graphique de F et celle de v dans le même repère orthonormal.

9 Logarithmes. Suites. Intégrales

A. La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + \dots + x^{2n-2} - x^{2n-1}.$$

1. Montrez que $\int_0^1 f(x) dx = u_n$.

2. Vérifiez que lorsque $x \neq -1$, $f(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.

3. Déduisez-en que $u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = \ln 2$.

4. Montrez que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \frac{1}{2n+1}$,

et déduisez-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$.

5. Calculez la limite de (u_n) .

B. F, G, H , sont les fonctions définies sur $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \ln(1+x), \quad G(x) = x - F(x), \quad H(x) = F(x) - x + x^2.$$

1. Montrez que pour tout x de $[0; 1]$, $x - x^2 \leq F(x) \leq x$.

2. Montrez que pour tout entier $k \geq 0$, tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n+k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k}.$$

3. (v_n) et (a_n) sont les suites définies par :

$$v_n = F\left(\frac{1}{n}\right) + F\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + F\left(\frac{1}{2n}\right) \quad \text{pour tout entier } n \geq 1$$

$$\text{et } a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n \leq v_n \leq a_n$.

4. (b_n) est la suite définie pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$b_n = a_n - \frac{1}{n}.$$

Calculez $b_n - b_{n-1}$ lorsque $n \geq 2$, puis comparez b_n et u_n lorsque $n \geq 1$ (u_n a été défini en A.).

5. Calculez la limite de la suite (v_n) .

C. (w_n) est la suite définie pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$w_n = \sin \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n+1} + \dots + \sin \frac{1}{2n}.$$

En utilisant un encadrement de la fonction sinus par des fonctions polynômes, calculez la limite de la suite (w_n) .

INDICATION : Voir TP4, p. 137.

10 Logarithmes. Exponentielles. Fonctions u^x

1. On note c et s les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$c(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{et} \quad s(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

a. Démontrez que c est paire, que s est impaire, puis que :

$$c^2(x) - s^2(x) = 1.$$

b. Étudiez chacune de ces fonctions et tracez leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

De cette étude, déduisez que :

- pour tout $x > 0$, $c(x) > 1$ et $c(0) = 1$;
- pour tout $x > 0$, $s(x) > 0$ et $s(0) = 0$;
- pour tout réel x , $c'(x) = s(x)$ et $s'(x) = c(x)$.

Précisez les tangentes aux points d'abscisse zéro.

c. On note t la fonction définie par :

$$t(x) = \frac{s(x)}{c(x)}.$$

Étudiez cette fonction et tracez sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Déduisez de cette étude que :

- pour tout réel x , $-1 < t(x) < 1$;
- pour tout $x > 0$, $t(x) > 0$ et $t(0) = 0$.

2. On note u la fonction définie par :

$$u(x) = \frac{\ln c(x)}{x}.$$

a. Quel est l'ensemble de définition de u ? Démontrez que u est impaire.

b. Démontrez que pour tout $x > 0$, $u(x) > 0$; déduisez-en que pour tout $x < 0$, $u(x) < 0$.

c. On étudie la limite en zéro de la fonction u ; observez que pour tout x non nul, on peut écrire $u(x) = \frac{v(x) - v(0)}{x - 0}$, v étant une fonction à préciser. Expliquez alors pourquoi u a une limite en zéro. Quelle est-elle ?

On prolonge la fonction u par continuité en zéro, en posant $u(0) = 0$. Dans toute la suite, u désignera ce prolongement défini sur $\mathbb{R}$ tout entier.

d. x est un réel strictement positif.

Appliquez les inégalités des accroissements finis à la fonction v avec les réels 0 et x . (La fonction v a été définie en c.) Démontrez que pour tout réel $x > 0$, $0 < u(x) < 1$.

Déduisez-en que pour tout réel $x < 0$, $-1 < u(x) < 0$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x[c(x)]^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

a. Vérifiez que pour tout réel x , on a $f(x) = xe^{u(x)}$.

Démontrez que :

- pour tout réel $x > 0$, $f(x) > 0$ et $f(x) > x$;
- pour tout réel $x < 0$, $f(x) < 0$.

Calculez $f(1)$ et $f(-1)$, et démontrez que la fonction f n'est ni paire, ni impaire.

b. Démontrez que la fonction f est continue en zéro.

c. Démontrez que :

- pour tout réel $x > 0$, $x < f(x) < ex$;
- pour tout réel $x < 0$, $x < f(x) < \frac{1}{e}x$.

INDICATION : Utiliser 2.d.

d. Déduisez de ces inégalités que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty.$$

4. En utilisant la définition d'un nombre dérivé, montrez que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = 1$.

Montrez que pour x non nul, $f'(x) = e^{u(x)}(1 + t(x) - u(x))$.

(La fonction t a été définie en 1.c.)

11 Logarithmes. Exponentielles. Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

A. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 3$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudiez la fonction f . Précisez, s'il en existe, les asymptotes à $\mathcal{C}$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à ses asymptotes.

2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On désigne par ℓ cette solution. Encadrez ℓ par deux entiers.

B. g est la fonction définie par $g(x) = \ln(x + 3)$.

1. Étudiez la fonction g et tracez sa courbe représentative Γ .

2.a. Montrez que l'équation $g(x) = x$ admet deux solutions, l'une α dans $]-3 ; -2[$, l'autre β dans $]0 ; +\infty[$.

b. Comparez β et ℓ .

c. Comparez $g(x)$ et x ; discutez.

3. x_1 et x_2 sont deux réels tels que $\alpha < x_1 < \beta < x_2$.

Démontrez que $\alpha < g(x_1) < \beta < g(x_2)$.

4.a. Vérifiez qu'il existe bien une suite (u_n) telle que :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(u_n + 3) \quad \text{pour tout naturel } n.$$

Étudiez le sens de variation de cette suite.

b. Vérifiez qu'il existe bien une suite (v_n) telle que :

$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \ln(v_n + 3) \quad \text{pour tout naturel } n.$$

Étudiez le sens de variation de cette suite.

c. Démontrez que pour tout naturel n , $1 \leq u_n < \beta < v_n \leq 2$.

d. Démontrez que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 2]$,

$$\frac{1}{5} \leq g'(x) \leq \frac{1}{4}.$$

Déduisez-en que pour tout naturel n ,

$$0 < g(v_n) - g(u_n) \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n),$$

puis que $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e. Trouvez un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près. Calculez alors u_n et une valeur approchée de ℓ .

12 Exponentielles. Encadrements d'une intégrale

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{xe^{2x}}.$$

A. Le but de cette partie est d'étudier le sens de variation de g et de prouver que g est prolongeable par continuité en zéro.

1. Résultat préliminaire

Démontrez que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

2. Trouvez la fonction dérivée g' de la fonction g , et démontrez que pour tout réel $x > 0$, $g'(x) \leq -e^{-2x}$.

3. Dressez le tableau de variation de g .

4. Démontrez que la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ a pour limite 1 en zéro, et déduisez-en que la fonction g est prolongeable par continuité en zéro.

B. On note f la fonction qui prolonge g par continuité en zéro. La fonction f est donc définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de calculer l'aire d'un domaine dont une frontière est une partie de la courbe représentant f .

1. On choisit 5 cm pour unité de longueur dans le plan.

Tracez la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On notera $\mathcal{C}$ cette courbe.

INDICATION : On admet que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $-\frac{3}{2}$.

2. On considère le domaine délimité par $\mathcal{C}$, les axes du repère, et la droite d'équation $x = 1$. On propose de déterminer des encadrements de l'aire $\mathcal{A}$ de ce domaine, exprimée en centimètres carrés.

a. Partagez l'intervalle $[0; 1]$ en cinq intervalles de même longueur, et par la méthode des rectangles, donnez un encadrement de $\mathcal{A}$.

b. En utilisant la même subdivision et la méthode du point médian, donnez un encadrement de $\mathcal{A}$.

INDICATION : a. et b. Pour ces méthodes, voir p. 236, tome Obligatoire.

c. Démontrez que pour tout réel $x > 0$,

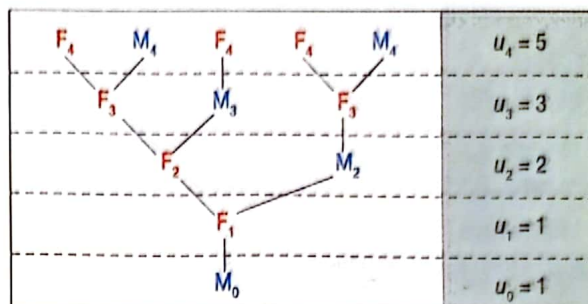
$$e^{-\frac{3}{2}x} \leq g(x) \leq \frac{e^{-x} + e^{-2x}}{2}.$$

Déduisez-en un autre encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.

13 Suites $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

L'abeille femelle a un père et une mère tandis que l'abeille mâle a une mère mais pas de père. On souhaite connaître le nombre u_n d'ancêtres d'une abeille mâle M_0 , présents à la $n^{\text{ième}}$ génération la précédant.

Le tableau montre le calcul de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 .



1. Vérifiez les résultats donnés par le tableau.

2. Notons f_n le nombre d'ancêtres femelles et m_n le nombre d'ancêtres mâles à la $n^{\text{ième}}$ génération qui nous intéresse. Vérifiez que pour tout naturel n , $f_{n+1} = f_n + m_n$ et $m_{n+1} = f_n$.

3. Déduisez-en que pour tout naturel n ,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n; \quad m_{n+2} = m_{n+1} + m_n; \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

La suite (u_n) est donc déterminée par :

$$u_0 = u_1 = 1, \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout naturel } n.$$

4. On note (E) l'ensemble des suites définies par la donnée de u_0 , de u_1 ,

et de la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout naturel n .

a. On cherche s'il existe des suites géométriques (r^n) appartenant à (E).

Vérifiez que les propositions (P_1) et (P_2) sont équivalentes :

- (P_1) : (r^n) appartient à (E) ;
- (P_2) : r est une solution de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$.

b. Déduisez-en qu'il existe deux suites géométriques, et deux seulement, qui appartiennent à (E). On notera (r_1^n) et (r_2^n) ces deux suites. Précisez la valeur de r_1 et celle de r_2 .

c. La suite (u_n) qui nous intéresse, et qui a été définie en 2., appartient à (E). On cherche à écrire, pour tout naturel n ,

$$u_n = ar_1^n + br_2^n,$$

a et b étant deux nombres fixes indépendants de n .

Montrez qu'il existe deux nombres a et b , et seulement deux, tels que $u_0 = a + b$, $u_1 = ar_1 + br_2$.

Déduisez-en que pour tout naturel n , $u_n = ar_1^n + br_2^n$.

INDICATION : Inutile d'utiliser les valeurs numériques de r_1, r_2 .

d. Montrez que pour tout naturel n ,

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

e. Montrez que pour tout naturel n , $u_n = \frac{1}{2^n} \sum_k C_{n+1}^k 5^{\frac{k-1}{2}}$,

l'entier k prenant toutes les valeurs impaires comprises entre 1 et $n+1$ (k impair, $1 \leq k \leq n+1$).

5. Calculez f_n et m_n .

14 Suites. Barycentre. Produit scalaire dans le plan

A. (u_n) est la suite définie par :

$u_0 = 0$, et $u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n+1}$ pour tout naturel n non nul.

On définit alors les suites (v_n) et (w_n) respectivement par :

$$v_n = u_{2n} \text{ et } w_n = u_{2n+1} \text{ pour tout naturel } n.$$

1. Prouvez que (v_n) et (w_n) sont des suites arithmétiques, et que (u_n) n'est pas arithmétique. Exprimez v_n et w_n en fonction de n .

2. Exprimez u_{2n-1} en fonction de u_{2n} .

3. On note (E) l'ensemble des points A_n dont les coordonnées dans un repère orthonormal choisi sont $(n; u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrez que (E) est inclus dans la réunion de deux droites d et d' . Donnez des équations de d et d' .

b. Déterminez l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que : $(\vec{MA}_0 + \vec{MA}_1 + \vec{MA}_2) \cdot (\vec{MA}_3 + \vec{MA}_4 + \vec{MA}_5) = 0$.

B. f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4} (1 - (2x+1) \cos \pi x)$

et $\mathcal{C}'$ est sa courbe représentative dans le repère orthonormal choisi en A.3.

1. Montrez que l'ensemble (E) est inclus dans $\mathcal{C}'$.

Quelle est, en tout point A_n de (E), la tangente à $\mathcal{C}'$?

2. Montrez que pour tout réel $x \geq 0$, $-\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Interprétez graphiquement ce résultat.

D'après Concours ESSCA. 1992.

15 Complexes. Fonctions $\sqrt{u}$. Bijections. Intégrales

On choisit pour unité de longueur 4 cm, et on munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Vous représenterez dans ce repère les courbes demandées.

A.1. On note E l'ensemble des complexes z tels que $z - i\bar{z} \neq 0$ et on considère la fonction f qui, à chaque élément de E, associe le complexe $f(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$.

Déterminez l'ensemble E et représentez-le graphiquement. Par la suite, si un complexe z de E est représenté par un point M, on notera M' le point représentant $f(z)$.

2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = i$.

3. z est un complexe appartenant à E ; le point M qui le représente a pour coordonnées $(x; y)$. Exprimez en fonction de x et de y les coordonnées du point M'.

4. Déterminez et représentez graphiquement l'ensemble des complexes z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

5. $z = x + iy$ est un complexe de E.

Montrez que le module de $f(z)$ est égal à $\sqrt{2}$ si et seulement si x et y sont liés par la relation $4y^2 - 8xy - 1 = 0$.

B. Le but de cette partie est de représenter l'ensemble E' des complexes $z = x + iy$ tels que $f(z)$ ait pour module $\sqrt{2}$, c'est-à-dire aussi, d'après A.5., l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $4y^2 - 8xy - 1 = 0$ [1].

1. Montrez que pour tout réel x , il existe deux réels y_1 et y_2 à déterminer tels que $(x; y_1)$ et $(x; y_2)$ vérifient la relation [1].

2. a et b sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$a(x) = x + \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 1} \text{ et } b(x) = x - \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 1}.$$

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de a et $\mathcal{C}'$ celle de b .

a. Montrez que l'ensemble E' cherché est représenté par la réunion de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$.

b. Montrez que l'origine O est centre de symétrie de E'.

3. Étudiez la fonction a et tracez sa courbe représentative. Montrez que la droite d d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et précisez la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.

4. Tracez la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.

5. Représentez l'ensemble E'.

C. On se propose de calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, et l'axe des abscisses.

1. Exprimez cette aire sous forme d'une intégrale.

Le but des questions qui suivent est de calculer cette intégrale.

2. On note a_1 la restriction de a à l'intervalle $I = [0; 1]$.

a. Pourquoi a_1 est-elle une bijection de I sur l'intervalle $J = [1; 2 + \sqrt{5}]$?

b. Soit h la fonction définie sur J par :

$$h(x) = \frac{4x^2 - 1}{8x}.$$

Vérifiez que pour tout x de J, $a_1(h(x)) = x$,

et que pour tout x de I, $h(a_1(x)) = x$.

Comment qualifie-t-on h par rapport à a_1 , et a_1 par rapport à h ? Qu'en résulte-t-il pour les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

3. Tracez la courbe représentative de h .

4. Calculez l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x} dx$, et interprétez-la graphiquement.

5. Déduisez alors de ce qui précède l'aire $\mathcal{A}$ cherchée.

16 Intégrales. Exponentielles. Produit scalaire dans le plan

1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x(x + 2 - e)x^x$.

Montrez que $\int_0^1 g(x) dx = 0$.

2. Pour tout réel t , on considère la fonction f_t définie sur $\mathbb{R}$ par $f_t(x) = (x - t)e^{\frac{x}{t}}$.

E est l'ensemble des couples $(t_1; t_2)$ de réels tels que :

$$\int_0^1 f_{t_1}(x) f_{t_2}(x) dx = 0.$$

a. Prouvez que E n'est pas vide.

b. Démontrez qu'un couple $(t_1; t_2)$ appartient à E si et seulement si $(e-1)t_1t_2 - (t_1+t_2) + e-2 = 0$.
Écrivez cette condition sous la forme :

$$(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha) = -k^2 \quad [1]$$

α et k étant des réels que vous calculerez. (On rappelle que $2,7 < e < 2,8$.)

c. Par des considérations sur les aires, montrez que lorsque $(t_1; t_2)$ appartient à E, la fonction $x \mapsto f_{t_1}(x)f_{t_2}(x)$ ne garde pas un signe constant ; déduisez-en que l'un au moins des deux réels t_1 ou t_2 appartient à $[0; 1]$.

3. On considère un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par A_t le point de coordonnées $(t; 0)$. Il est conseillé de faire des figures pour traiter cette question 3.

a. Démontrez, en utilisant l'égalité [1], qu'il existe deux points du plan, I et J, tels que $(t_1; t_2)$ appartient à E si et seulement si $\vec{IA}_{t_1} \cdot \vec{IA}_{t_2} = \vec{JA}_{t_1} \cdot \vec{JA}_{t_2} = 0$.

b. Vérifiez que $(t_1; t_2)$ appartient à E si et seulement si le cercle de diamètre $[A_{t_1}A_{t_2}]$ passe par I et J.

c. Calculez, à l'aide d'une remarque géométrique simple, le minimum de $|t_2 - t_1|$ quand $(t_1; t_2)$ décrit E.

d. Déduisez de 3.b., par une interprétation géométrique de 2.c., que I et J appartiennent au disque de diamètre $[A_0A_1]$.

17 Exponentielles. Approximations. Intégrales.

Équations différentielles

A. Question préliminaire

h est une fonction continue sur $I = [0; +\infty[$ et positive.
 H est la primitive de h sur I telle que $H(0) = 0$.

1. Montrez que H est positive sur I .

2. En utilisant plusieurs fois 1., et sachant que pour tout réel $x \geq 0$, $e^x - 1 \geq 0$, montrez que :

$$\text{pour tout réel } x \geq 0, \quad e^x \geq \frac{x^4}{24}.$$

B. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$.

1. Étudiez la fonction f .

2. Déduisez de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule, notée α . Donnez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. L'unité de longueur choisie est 2 cm ; tracez la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormal. Précisez, s'il y a lieu, les tangentes horizontales.

4. λ est un réel strictement positif.

On note D le domaine limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équations $x = \lambda$, et $x = 0$. On note $A(\lambda)$ l'aire, en cm^2 , du domaine D.

a. Montrez que $\frac{A(\lambda)}{4} = \int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx$.

b. On veut savoir s'il est possible de choisir λ de façon à obtenir $A(\lambda) = 125$.

• Sans calculer l'intégrale, montrez que :

$$\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 1, \quad \text{lorsque } \lambda \leq 1$$

$$\int_1^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 24 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leq 24, \quad \text{lorsque } \lambda \geq 1.$$

• De ces inégalités, déduisez que $A(\lambda) = 125 \text{ cm}^2$ est impossible.

C.1. f' et f'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de f . Vérifiez que pour tout réel x ,

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1.$$

2. On note F la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule pour $x = 0$. Donnez la valeur explicite de $F(x)$ pour tout réel x .

3. Écrivez $F(x)$ sous forme d'intégrale. Retrouvez le résultat de la question 2. en calculant cette intégrale.

D. On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre, de fonction inconnue y :

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -2e^{-x} + 1 \quad (E_1).$$

Il a été vu en C.1. que la fonction f est solution de (E_1) .

1. Résolvez l'équation $y'' + 2y' + y = 0 \quad (E_2)$.

2. g est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_2) . Démontrez que $g + f$ est une solution de (E_1) .

Inversement, soit h une solution de (E_1) . Démontrez que $h - f$ est solution de (E_2) .

Déduisez-en l'ensemble des solutions de (E_1) .

3. Déterminez la solution φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

E. a est un réel donné.

g_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1.$$

1. Montrez que les courbes $\mathcal{C}_a$ représentatives des fonctions g_a passent toutes par un même point fixe I.

2. On suppose $a \neq -2$. Démontrez alors que la fonction g_a admet deux extremums, dont l'un est obtenu pour $x = 0$.

3. On note M_a le point d'abscisse $a + 2$ sur la courbe $\mathcal{C}_a$. Lorsque a varie, M_a décrit une courbe Γ . Donnez une équation cartésienne de Γ .

18 Exponentielles. Intégrales. Suites

On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = e^{-x^2}$, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A.1. Pour tout naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a. Montrez que la suite (I_n) est décroissante.

b. Montrez que la suite (I_n) est convergente. On notera ℓ sa limite (le calcul de ℓ n'est pas demandé dans cette question).

2. Trouvez une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} . Déduisez-en la valeur de ℓ .

B.1. Étudiez les variations de f_n selon les valeurs de n . Précisez, en particulier, les cas $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentant f_n dans ce repère.

a. En quels points la courbe $\mathcal{C}_n$ a-t-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

b. Déterminez, pour les valeurs 0, 1, 2, 3, de n , les abscisses des points en lesquels la dérivée seconde f_n'' s'annule et change de signe.

c. Montrez que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ($n \geq 0$) ont un point commun et un seul, que l'on notera A, que toutes les courbes $\mathcal{C}_{2p}$ ($p \geq 0$), ont exactement deux points communs, A et un autre que l'on notera B, et montrez que toutes les courbes $\mathcal{C}_{2p+1}$ ($p \geq 0$), ont exactement trois points communs A, O, et un autre que l'on notera C.

d. Précisez la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_m$ restreintes à $[0; +\infty[$.

e. Tracez sur un même dessin les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

19 Logarithmes. Calcul d'aire. Complexes

A.1. f est la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln|x|)$.

a. Calculez $f(e^k)$, k réel arbitraire strictement positif.

b. Étudiez la fonction f (ensemble de définition, parité, sens de variation, limites aux bornes de l'ensemble de définition).

c. Tracez la courbe $\mathcal{C}$ représentant f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité graphique de longueur est 2 cm. Précisez, s'ils existent, les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées, et les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.

2. g et h sont respectivement les fonctions définies par :

$$g(x) = \ln(\ln x), \quad h(x) = \ln(|\ln|x||).$$

Précisez leurs ensembles de définition, et tracez, sans autres calculs, leurs représentations graphiques dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

B. φ est la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{1}{x \ln|x|}$.

1. Calculez $\varphi(e^k)$, k réel arbitraire non nul.

2. Étudiez φ et tracez la courbe Γ qui représente cette fonction dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3.a. Calculez en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$, ($\alpha > 1$), $x = e$.

b. Étudiez la limite de $\alpha \mapsto A(\alpha)$ en 1 et en $+\infty$.

4.a. Déterminez graphiquement l'ensemble des points d'intersection de Γ avec la première bissectrice des axes de coordonnées (cette bissectrice est la droite d'équation $y = x$).

b. Montrez que Γ et la seconde bissectrice (droite d'équation $y = -x$) sont sans point commun.

C. On considère la fonction t définie sur une partie de $\mathbb{C}$ par $t(z) = \frac{1}{z \ln|z|}$ ($z \in \mathbb{C}$ et $|z|$ est le module de z).

1. Quel est l'ensemble de définition de t ?

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O'; \vec{u}, \vec{v})$.

a. Exprimez le module et un argument de $z' = t(z)$ en fonction de ceux de z . On notera $z = r e^{i\theta}$, $r > 0$.

b. On associe à t , l'application T du plan dans lui-même qui au point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(t(z))$.

3. Déterminez les points fixes de T , c'est-à-dire les points M tels que $T(M) = M$.

4. Déterminez les points M tels que O', M et $T(M)$ soient alignés. (O' est l'origine du repère.)

5. Quelle est l'image par T d'un cercle de centre O' et de rayon r , $r > 0$, $r \neq 1$?

20 Applications du plan dans le plan. Logarithmes. Complexes. Coniques. Suites

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

A.1. Pour tout réel h , on note f_h l'application du plan dans lui-même qui à chaque point M , distinct de O , de coordonnées $(x; y)$ associe le point M_1 de coordonnées $(x_1; y_1)$ telles que $x_1 = hx$, $y_1 = x + hy$.

On note alors $f_h(M) = M_1$. On convient que $f_h(O) = O$.

a. f_h a-t-elle d'autres points invariants que O ?

b. f_h est-elle bijective, c'est-à-dire tout point M_1 du plan est-il l'image d'un point M et d'un seul ?

2. Δ est la droite d'équation $y = x$. Montrez qu'il existe une application g du plan dans lui-même telle que $f_0 = g \circ s_\Delta$, s_Δ désignant la réflexion d'axe Δ . Identifiez g .

3. Dans toute la suite, on suppose $h \neq 0$. Identifiez $f_{-h} \circ f_h$, d_1 est la droite d'équation $y = -x$, et d_2 la droite d'équation $y = 0$, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; s_1 est la réflexion d'axe d_1 , et s_2 la réflexion d'axe d_2 . Déterminez géométriquement la nature de l'application $t = s_2 \circ s_1 \circ f_{-h} \circ f_h$ puis précisez ses éléments caractéristiques.

4. s est la réflexion dont l'axe est l'axe des ordonnées. On pose $u = f_h \circ s \circ f_h \circ s_\Delta$.

On appelle z l'abscisse de $M(x; y)$, et Z l'abscisse de $u(M)$.

Calculez Z en fonction de z . Déduisez-en la nature de u et ses éléments caractéristiques.

B. M est un point non situé sur l'axe des ordonnées, H est son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées, et $M_1 = f_1(M)$.

1. Déterminez les directions des droites (HM_1) et (MM_1) , et déduisez-en une construction simple de M_1 à partir de M .

2. $\mathcal{H}$ est la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 9$. Précisez la nature de $\mathcal{H}$, ses éléments caractéristiques. Tracez $\mathcal{H}$.

3. On note $\mathcal{H}_1$ l'image de $\mathcal{H}$ par f_1 .

a. Donnez une équation de $\mathcal{H}_1$, de la forme $x = F(y)$.

b. Déduisez-en les asymptotes de $\mathcal{H}_1$. Vérifiez qu'elles ont pour vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

c. Écrivez une équation de $\mathcal{H}_1$ dans $(O; \vec{i}, \vec{k})$. Déduisez-en la nature de $\mathcal{H}_1$.

C. M_0 est un point donné.

On pose $M_1 = f_h(M_0)$, $M_2 = f_h(M_1)$, ..., $M_n = f_h(M_{n-1})$ pour tout naturel n . On note $(x_0; y_0)$ les coordonnées de M_0 , $(x_1; y_1)$ celles de M_1 , ..., $(x_n; y_n)$ celles de M_n .

1. Montrez que pour tout naturel n non nul,

$$x_n = h^n x_0 \text{ et } y_n = n h^{n-1} x_0 + h^n y_0.$$

Montrez que lorsque $x_0 > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$, alors :

$$y_n = x_n \left(\alpha \ln \left(\frac{x_n}{x_0} \right) + \beta \right), \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ étant des constantes,}$$

indépendantes de n , que vous calculerez. Déduisez-en que les points M_n sont situés sur une courbe fixe.

2. On suppose $x_0 > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$. Quelle condition faut-il de plus imposer à h pour que la suite (x_n) converge ? Quelle est alors la limite de cette suite ? Montrez que, dans ces conditions, la suite (y_n) converge aussi, et trouvez sa limite.

21 Fonctions irrationnelles. Coniques. Similitudes

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan, l'unité graphique de longueur est 2 cm.

A. f_1 est la fonction définie par $f_1(x) = -2x + \sqrt{3(x^2 - 1)}$.

1.a. Étudiez la fonction f_1 .

b. On note $\mathcal{C}_1$ la courbe représentant f_1 dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrez que $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes qui passent l'une et l'autre par l'origine, et précisez la position de $\mathcal{C}_1$ par rapport à chacune de ses asymptotes.

c. Précisez les tangentes à $\mathcal{C}_1$ aux points d'abscisses -1 et 1 .

d. Tracez la courbe $\mathcal{C}_1$.

2. f_2 est la fonction définie par $f_2(x) = -2x - \sqrt{3(x^2 - 1)}$, $\mathcal{C}_2$ est sa courbe représentative dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrez que $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par la symétrie centrale de centre O .

b. On note $\mathcal{C}$ la courbe qui est la réunion des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Tracez cette courbe.

Montrez que $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$.

B.1. S est la transformation dont l'écriture complexe dans

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ est } z' = \frac{\sqrt{6}}{2} (1 + i) z.$$

a. Identifiez cette transformation.

b. On note $\mathcal{H}$ l'image de $\mathcal{C}$ par S . Précisez la nature de la courbe $\mathcal{H}$ ainsi obtenue.

2.a. Démontrez que l'image d'une hyperbole par une similitude est encore une hyperbole.

b. Déduisez-en que la courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

INDICATION : Utiliser S^{-1} .

c. Quelles sont les coordonnées des foyers de $\mathcal{C}$?

22 Logarithme. Fonctions u^v . Suites. Intégrales

Préliminaire

1. Justifiez le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2.a. Déduisez-en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 1$.

b. Étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$.

A. Pour tout naturel n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1.a. Étudiez le sens de variation de f_n .

b. Prouvez que selon la parité de n , l'équation $f_n(x) = 1$, ou bien a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$, ou bien n'a pas de solution.

2. Montrez que, sauf pour certaines valeurs particulières de n , les courbes représentatives des fonctions f_n ont deux points communs et ont même tangente en chacun de ces points.

B. On note g_n la restriction de f_n à l'intervalle $[0; 1]$. Ainsi, pour tout x de $[0; 1]$, $g_n(x) = x^n(1-x)$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de g_n relativement à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrez que, sauf pour une valeur de n , g_n possède un

$$\text{maximum } M_n \text{ et que } M_n = \left(\frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}.$$

2. Tracez $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Donnez l'allure de $\mathcal{C}_n$ pour $n > 2$. Placez $\mathcal{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathcal{C}_n$ (position relative des points de même abscisse et des deux points représentatifs du maximum).

3. Calculez successivement :

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n \quad \text{b. } I_n = \int_0^1 g_n(x) dx \quad \text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n.$$

Pouvait-on prévoir ce dernier résultat à partir d'un encadrement de g_n ?

4. Pour tout x de $[0; 1]$ et pour tout naturel n , on pose :

$$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_n(x) = \sum_{i=0}^n g_i(x)$$

$$\text{et } J_n = \int_0^1 S_n(x) dx.$$

a. Calculez $S_n(x)$, puis :

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \quad \bullet J_n \quad \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n.$$

b. Exprimez J_n en fonction de $I_0, I_1, \dots, I_n$.

Déduisez-en la valeur de la somme :

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

c. Comparez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$ et $\int_0^1 (\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)) dx$.

23 Coniques. Courbes paramétrées

Dans tout le problème, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthonormal, λ un réel quelconque et k un réel strictement positif quelconque. $\mathcal{C}_{\lambda, k}$ désigne la courbe dont une équation dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $(1+\lambda)x^2 + (1-\lambda)y^2 = k$.

A.1. Étudiez les courbes $\mathcal{C}_{0, k}, \mathcal{C}_{1, k}$ et $\mathcal{C}_{-1, k}$.

2.a. Montrez que les deux coniques d'équations

$$3x^2 + y^2 = 12 \text{ et } 3x^2 - y^2 = 6$$

sont des courbes $\mathcal{C}_{\lambda, k}$.

b. Identifiez ces deux coniques, précisez leurs éléments caractéristiques, leurs asymptotes éventuelles, et représentez-les sur deux figures distinctes.

3. On suppose λ différent de -1 , 0 et 1 . Le réel k étant fixé, montrez que $\mathcal{C}_{\lambda,k}$ est une conique. Précisez alors, selon les valeurs de λ , son axe focal et son excentricité.

4. λ étant fixé, à chaque point $M(x; y)$ on associe le point $M'(x'; y')$ tel que $x' = (1 + \lambda)x - \lambda y$, $y' = \lambda x + (1 - \lambda)y$. On définit ainsi une application f_λ du plan dans lui-même, $M \mapsto M' = f_\lambda(M)$.

- Montrez que l'image de $\mathcal{C}_{\lambda,k}$ par f_λ est la courbe $\mathcal{C}_{-\lambda,k}$.
- Représentez sur une même figure la courbe $\mathcal{C}_{\frac{1}{2},6}$ et son image par $f_{\frac{1}{2}}$.

B. Dans toute la suite, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe $\mathcal{C}_{\frac{1}{2},6}$ et par $\mathcal{C}'$ son image par $f_{\frac{1}{2}}$.

1. Un point mobile M est animé d'un mouvement défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin t \\ y(t) = 2\sqrt{3} \cos t, \quad t \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

$(x(t); y(t))$ sont les coordonnées du point M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, à la date t . Montrez que la trajectoire de M est la courbe $\mathcal{C}$.

2. Pour tout réel β , on note M' le point de coordonnées $(x'; y')$, $x' = 2\sqrt{3} \cos \beta$, $y' = 2 \sin \beta$.

Montrez qu'il existe un nombre β de l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$, et un seul, tel que $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$. Exprimez β en fonction de t .

3.a. Calculez les coordonnées du vecteur vitesse de M et du vecteur vitesse du point $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$ à la date t .

b. On note M_0 la position du mobile à l'instant de date $t_0 = 0$. Montrez que $M'_0 = f_{\frac{1}{2}}(M_0)$ est associé à $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Montrez que la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$ et la tangente en M'_0 à $\mathcal{C}'$ se coupent en un point de la droite Δ d'équation $x - y = 0$.

c. Cette propriété des tangentes en M et $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$ respectivement à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de se couper sur la droite Δ est-elle vraie à tout instant ?

24 Fonctions irrationnelles. Logarithmes. Intégrales. Isométries. Coniques. Similitudes

A. On note f_1 la fonction définie par $f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x(x-6)}$.

1. Étudiez la fonction f_1 (ensemble de définition, limites aux bornes, sens de variation).

2. On note $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de f_1 dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrez que $\mathcal{C}_1$ admet un axe de

symétrie, précisez les tangentes à $\mathcal{C}_1$ aux points d'abscisses 0 et 6 , tracez $\mathcal{C}_1$.

NOTE 1 : Une méthode : Pour prouver que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_1$, montrer que lorsque $a + h$ ($h > 0$) est dans $\mathcal{D}_{f_1}$, alors $a - h$ est aussi dans $\mathcal{D}_{f_1}$, et que $f_1(a + h) = f_1(a - h)$.

B. Pour tout réel $m > 0$, on note g_m la fonction définie par

$g_m(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{3}x(x-6m)}$, et on note Γ_m la courbe représentative de g_m dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. Montrez que la courbe Γ_1 admet un axe de symétrie. Étudiez la fonction g_1 , puis tracez Γ_1 .

NOTE 2 : $g_1 = \ln \circ f_1$, puis voir Note 1.

b. Calculez $\int_a^b g_1(x) dx$ lorsque $a > 6$, $b > a$.

Déduisez-en l'aire du domaine limité par la courbe Γ_1 , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = x_0$, $x = 9$, x_0 étant l'abscisse positive de l'un des points d'intersection de Γ_1 avec l'axe des abscisses.

2. À chaque point $M(x; y)$ du plan, on associe le point $M'(x'; y')$, $x' = mx$, $y' = y + \ln m$, et on pose $T_m(M) = M'$ (m réel strictement positif).

a. L'application T_m du plan dans lui-même ainsi définie est-elle bijective ?

NOTE 3 : Rappel : Dire que T_m est bijective signifie que tout point N est l'image d'un point M et d'un seul.

b. Montrez que $T_m(\Gamma_1) = \Gamma_m$.

C.1. On note f_2 la fonction définie par $f_2(x) = -f_1(x)$.

a. Tracez la courbe $\mathcal{C}_2$ représentant la fonction f_2 dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b. Montrez que la réunion $\mathcal{H}$ des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ a pour équation $x^2 - 6x - 3y^2 = 0$. Déduisez-en la nature, le centre, et les coordonnées des foyers de $\mathcal{H}$.

INDICATION : Écrire que $x^2 - 6x - 3y^2 = (x-3)^2 - 9 - 3y^2$, poser $X = x - 3$, $y = Y$, puis montrer que dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{H}$ a pour équation $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{3} = 1$, I étant le point de coordonnées $(3; 0)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. On suppose que le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est direct. On note s la similitude dont l'écriture complexe dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$

est : $z' = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}z$.

Donnez une équation cartésienne dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la courbe $\mathcal{H}'$ image de $\mathcal{H}$ par la similitude s .

25 Fonctions irrationnelles. Formule du binôme. Nombres complexes

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}.$$

a. Montrez que pour tout réel x , $\sqrt{1 + x^2} > |x|$, et déduisez-en le signe de $f(x)$.

b. Étudiez cette fonction et tracez sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

Vérifiez que pour tout réel x , $g(f(x)) = x$, et que pour tout réel $x > 0$, $f(g(x)) = x$.

3. On considère la fonction h définie par :

$$h(u) = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right).$$

Dressez le tableau de variation de h , précisez les limites aux bornes de son ensemble de définition.

4. n est un naturel. On considère la fonction P_n définie sur

$$\mathbb{R} \text{ par } P_n(x) = \frac{1}{2} \left((x + \sqrt{1+x^2})^n + (x - \sqrt{1+x^2})^n \right).$$

a. Montrez que P_n est un polynôme. Précisez son degré.

b. Comparez, pour tout réel x , $P_n(x)$ et $P_n(-x)$.

5. On note φ le polynôme $x \mapsto x^n$.

Montrez que suivant la parité de n ,

$$P_n = h \circ \varphi \circ f \text{ ou } P_n = g \circ \varphi \circ f.$$

Déduisez-en le tableau de variation de P_n .

6. On suppose dans cette question que n est un naturel pair non nul.

a. m est un réel donné. Discutez, suivant le choix de m , le nombre de racines réelles de l'équation $P_n(x) = m$.

b. λ est un réel donné strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \cos \lambda$.

Déduisez-en les solutions complexes de l'équation :

$$\frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = \cos \lambda \quad (\text{E}).$$

Pour chacune des racines z de l'équation (E), calculez

$$x = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right), \text{ puis calculez } P_n(x).$$

(On note encore P_n le prolongement à $\mathbb{C}$ du polynôme défini à la question 4.)

26 Polynômes. Logarithme. Intégrales. Suites

1. Pour tout naturel $n \geq 2$, on note Q_{n-2} la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2}.$$

a. Montrez que pour tout réel $t \neq -1$,

$$Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1} t^{n-1}}{1 + t}.$$

INDICATION : Utiliser la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

b. Déduisez-en que pour tout réel $t \neq -1$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t}.$$

c. Déduisez de b., par intégration, que pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\ln(1+x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \quad [\text{A}]$$

où l'on a posé $P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$.

2.a. On note f la fonction définie sur $]0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Vérifiez que l'on peut prolonger f par continuité en zéro en posant $f(0) = 1$. Par la suite, on notera f la fonction ainsi prolongée, donc définie et continue sur $[0; 1]$.

b. Montrez que pour tout réel $x > 0$, $x - \ln(1+x) > 0$, et déduisez-en que pour tout x dans $[0; 1]$, $f(x) \leq 1$.

c. Montrez que pour tout naturel n non nul,

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n}$$

et déduisez-en que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx \right) = 0$.

d. Montrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) dx$.

Retrouvez ce résultat en utilisant une primitive F de f . (Il est inutile de calculer F .)

3.a. Montrez que pour tout x dans $[0; 1]$,

$$\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n-1} dt, \quad (n \geq 2),$$

puis déduisez-en que $\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n}$.

b. En utilisant la relation [A] de la première question, montrez

$$\text{que pour tout } x \text{ dans }]0; 1], -\frac{1}{nx} \leq f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}.$$

c. Par intégration, montrez que :

$$\left(\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \right) + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + S_n \left(\frac{1}{n} \right) \leq S_n(1)$$

$$\leq \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \right) - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + S_n \left(\frac{1}{n} \right) \quad [\text{B}],$$

dans laquelle on a posé :

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)^2} \quad (n \geq 2).$$

d. Montrez que pour tout naturel p et tout x dans $[0; 1]$,

$$\frac{x^p}{p^2} \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

Déduisez-en que pour tout $n \geq 2$, tout x dans $[0; 1]$,

$$S_n(x) \geq 0.$$

INDICATION : $S_3(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2} \right)$, $S_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2} \right) + \frac{x^3}{3^2}$.

e. Montrez que $S_n(x) \leq x$, et donc que $0 \leq S_n(x) \leq x$.

INDICATION : $x - S_4(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right)$, $x - S_6(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) + \frac{x^4}{4^2}$.

f. Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right)$, puis déduisez-en que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = \int_0^1 f(x) dx.$$

4.a. En regroupant convenablement les termes de la somme

$$S_n(1) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{1}{(n-1)^2}, \text{ montrez que :}$$

$$\text{pour tout } n \geq 5, \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \leq S_n(1) \leq 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}.$$

b. Déduisez-en un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

27 Nombres complexes. Produit scalaire. Hyperbole. Courbe paramétrée

(O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est un repère orthonormal direct. z désigne un nombre complexe.

On pose : $f(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i$ et $g(z) = z^3 + 2 - 2i$.

A.1.a. Déterminez le module et un argument de chacune des solutions complexes de l'équation $g(z) = 0$.

b. Représentez les points d'affixes les nombres trouvés et montrez que ces points forment un triangle équilatéral.

2. Montrez qu'il existe un réel r , et un seul, tel que $f(r) = 0$. Déterminez alors les complexes a et b tels que :

$$\text{pour tout complexe } z, \quad f(z) = (z-r)(z^2 + az + b).$$

3.a. Mettez le trinôme $z^2 - 4iz - 4 + 2i$ sous forme canonique.

b. Résolvez l'équation $z^2 = -2i$.

c. Déduisez-en les solutions de l'équation $f(z) = 0$. Représentez les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrez que ces points forment un triangle rectangle.

4. A, B, C sont les points dont les affixes respectives sont $-1 + 3i$, $1 + i$ et -4 . Déterminez l'affixe du barycentre G de (A, 4), (B, 3), (C, 5).

5. Pour tout point M, on pose :

$$h(M) = \vec{MA} \cdot \vec{MB} + 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} + 3\vec{MC} \cdot \vec{MA}.$$

Calculez $h(C)$.

Exprimez $h(M)$ en fonction de MG^2 et $h(G)$. Déterminez alors l'ensemble des points M tels que $h(M) = 18$.

B. À tout point M du plan d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = f(z) - g(z)$.

1. Exprimez les coordonnées (x' ; y') de M' en fonction des coordonnées (x ; y) de M.

2. Les points A, B, C sont ceux définis à la question A.4. Donnez une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{H}_1$ des

points M tels que O, B et M' soient alignés. Vérifiez que $\mathcal{H}_1$ est une hyperbole ; précisez son centre et ses asymptotes.

3. Donnez une équation de l'ensemble $\mathcal{H}_2$ des points M tels que O, I et M' soient alignés, où I est le centre de gravité du triangle ABC. Vérifiez que $\mathcal{H}_2$ est une hyperbole ; précisez son centre et ses asymptotes.

4. Construisez $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

C. Un mobile M a une affixe $z(t)$ qui s'exprime en fonction de t par $z(t) = f(t) + 10 - 6i$, $t \in [0 ; 2\pi]$.

On notera M(t) la position de M à l'instant de date t .

1. Déterminez les coordonnées ($x(t)$; $y(t)$) de M(t) et les coordonnées de son vecteur vitesse à l'instant de date t .

2. Construisez la trajectoire du mobile lorsque t décrit $[0 ; 2]$, en indiquant le sens de parcours.

28 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Pentagone régulier

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.

2.a. Soit θ un élément de l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.

Exprimez en fonction de θ la solution de l'équation :

$$\frac{1-iz}{1+iz} = e^{i\theta}.$$

b. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^5 = 1$.

c. Développez et ordonnez l'expression $(1-iz)^5 - (1+iz)^5$ puis résolvez l'équation $(1-iz)^5 - (1+iz)^5 = 0$.

Déduisez-en alors la valeur de $\tan \frac{\pi}{5}$.

3. On pose $z_0 = e^{2i/\sqrt{5}}$, $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a. Démontrez que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.

Déduisez-en que α et β sont les solutions de l'équation :

$$X^2 + X - 1 = 0 \quad (1).$$

Déterminez α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Résolvez l'équation (1) et donnez la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

b. A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 sont les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$ dans le repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$),

H est le point d'intersection de la droite $(A_1 A_4)$ avec l'axe des abscisses. Démontrez que $\vec{OH} = \cos \frac{2\pi}{5} \vec{u}$.

On note I le point d'affixe $-\frac{1}{2}$ et B le point d'affixe i . Le

cercle de centre I qui passe par B coupe l'axe des abscisses en M et N, M étant le point d'abscisse positive. Démontrez que $\vec{OM} = \alpha \vec{u}$, $\vec{ON} = \beta \vec{u}$, et que M est le milieu du segment [OH].

c. Déduisez-en une construction géométrique simple d'un pentagone régulier convexe dont on connaît le centre et un sommet.

RÉPONSES AUX EXERCICES

1. DÉPLACEMENTS. ISOMÉTRIES, p. 26

Q1 b. **Q2 c.** $r_1 \circ r_2$ est une translation car la somme des angles de r_1 et r_2 est nulle. Pour trouver le vecteur de cette translation, il suffit de trouver l'image d'un point par $r_1 \circ r_2$. Or $r_1 \circ r_2(C) = r_1(C)$. Et il est immédiat de voir que $r_1(C) = C'$. Donc $r_1 \circ r_2$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

Q3 b. $r \circ s$ est une isométrie distincte de l'identité (par exemple $r \circ s(A) \neq A$). $r \circ s$ a deux points fixes C et B ; en effet, $r \circ s(C) = r(C) = C$ et $r \circ s(B) = r(A) = B$. Donc $r \circ s$ est la réflexion d'axe (CB).

Q4 b. $r_1 \circ r_2$ est soit une rotation (si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ (modulo 2π)), soit une translation (si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$). Puisque $r_1 \circ r_2$ n'a pas de point fixe, $r_1 \circ r_2$ est une translation, donc $\alpha_2 = -\alpha_1$ (modulo 2π).

Q5 b. $s \circ r$ « transforme un angle orienté en son opposé ».

1. [BM] et [CN] ont même longueur et ne sont pas parallèles. Donc il existe une rotation r telle que $r(B) = C$ et $r(M) = N$. L'angle de cette rotation est $(\widehat{BM}, \widehat{CN})$; or cet angle est fixe car égal à $(\widehat{BA}, \widehat{AC})$. Le centre de cette rotation est le point O de la médiatrice de [BC] tel que $(\widehat{OB}, \widehat{OC}) = (\widehat{BA}, \widehat{AC})$; O est donc fixe, et puisque $OM = ON$, la médiatrice de [MN] passe par ce point fixe.

2. $t \circ r$ est une rotation d'angle égal à celui de r , c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$.

Pour trouver son centre O, cherchons les images de deux points. $t \circ r(A) = t(A) = B$. $t \circ r(B) = t(C) = D$, D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Donc par $t \circ r$, $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow D$.

O est donc à l'intersection des médiatrices de [AB] et de [BD], c'est donc le milieu de [BC]. (ACDB est un carré.)

2. COURBES PARAMÉTRÉES, p. 44

Q1 b. $x'(t) = 2t - 2$, $y'(t) = 1 + 3t^2$. Donc $x'(1) = 0$, $y'(1) = 4$.

Q2 b. $x'(\frac{\pi}{2}) = -1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 3$. La tangente en $M(\frac{\pi}{2})$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1; 3)$, son coefficient directeur est donc -3 .

Q3 a. **Q4 b.** Car il y a une tangente horizontale en M(2) et une tangente non verticale en M(4). **Q5 c.**

5. LES CONIQUES, p. 105

Q1 b. Si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est le repère orthonormal dans lequel $\mathcal{P}$ a pour équation $y = -2x^2$, alors dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$, $\mathcal{P}$ a pour équation $X = -2Y^2$, c'est-à-dire $Y^2 = -\frac{X}{2}$. Alors le foyer de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées

$(-\frac{1}{8}; 0)$ dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$, donc $(0; -\frac{1}{8})$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Q2 c. Ici $b > a$, donc l'axe focal est l'axe des ordonnées et l'un des foyers a pour coordonnées $(0; c)$, avec :

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Q3 c. Ici « le signe moins est devant x^2 », l'axe focal est l'axe des ordonnées, donc l'un des foyers a pour coordonnées $(0; c)$, avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Q4 c. $\mathcal{C}$ est définie par $y = \sqrt{4x^2 - 1}$, $y \geq 0$, donc aussi par $y^2 = 4x^2 - 1$, c'est-à-dire $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$, $y \geq 0$.

1. a. Le foyer a pour coordonnées $(-\frac{3}{4}; 0)$, la directrice a pour équation $x = \frac{3}{4}$ (théorème 2, p. 90).

b. $y^2 = \frac{5}{2}x$. $F(\frac{5}{8}; 0)$ et $d(x = -\frac{5}{8})$.

2. a. L'équation est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donc $\mathcal{C}$ est une ellipse. Ici $a < b$, donc l'axe focal est l'axe des ordonnées, l'un des foyers a pour coordonnées $(0; c)$ avec $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$ (cours § 5, p. 95). La directrice associée a pour équation $y = \frac{b^2}{c} = \frac{5}{\sqrt{3}}$. L'excentricité est $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

b. $\mathcal{C}$ est une ellipse. L'axe focal est l'axe des ordonnées ($a < b$). $F(0; \sqrt{2})$ et $d(y = \frac{3}{\sqrt{2}})$; $e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

3. a. L'équation est $-\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{4} = 1$. $\mathcal{C}$ est donc une hyperbole. « Le signe moins est devant x^2 », l'axe focal est l'axe des ordonnées. Un foyer a pour coordonnées $(0; c)$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6}$. La directrice associée a pour équation $y = \frac{b^2}{c} = \frac{3}{\sqrt{6}}$. L'excentricité est $e = \frac{c}{b} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ (cours § 5, p. 96).

b. $\mathcal{C}$ est une hyperbole. L'axe focal est l'axe des ordonnées. $F(0; \sqrt{6})$ et $d(y = \frac{5}{\sqrt{6}})$; $e = \sqrt{\frac{6}{5}}$.

6. SIMILITUDES DIRECTES, p. 124

Q1 b. **Q2 c.** **Q3 c.** **Q4 c.** Le centre est tel que $z' = z$, d'où $(1+i)z + 3 = z$, $iz + 3 = 0$, $z = \frac{-3}{i} = 3i$.

1. Le rapport de s est $|1+i\sqrt{3}|$, c'est-à-dire 2.

L'angle de s est un argument de $1+i\sqrt{3}$. On trouve $\frac{\pi}{3}$.

Le centre de s a pour affixe le nombre ω tel que :

$$\omega = (1+i\sqrt{3})\omega + 1, \text{ d'où } \omega = \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

2. Le rapport est $\sqrt{5}$. L'angle θ est un nombre tel que

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \omega = \frac{3-4i}{2-2i}.$$

3. Le rapport est 2. L'angle θ est $-\frac{\pi}{2}$. $\omega = \frac{-1}{1+2i}$.

INDEX

A	
Affinité orthogonale	97
Axe focal d'une conique	95
Axes d'une ellipse (grand, petit)	93

B	
Bijective (transformation)	7

C	
Cercle principal d'une ellipse	97
Cocycliques (points)	76
Composée	
de réflexions d'axes parallèles	6
de réflexions d'axes sécants	6
de rotations	11
d'une rotation	
et d'une translation	11
de transformations	8
Coniques	86
Courbes paramétrées	34

D	
Déplacement	9
(écriture complexe d'un)	58
Directrice(s) d'une conique	89

E	
Écriture complexe	
d'un déplacement	58
d'une homothétie	57

d'une rotation	57
d'une similitude	116
d'une transformation	57
d'une translation	57
Ellipse	92, 95
Équation	
$a \cos x + b \sin x = c$	51
d'une ellipse	92
d'une hyperbole	92
d'une parabole	88-89
Excentricité d'une conique	87

F	
Foyer(s) d'une conique	87

H	
Homothétie	5
Hyperbole	92, 96

I	
Identité du plan	7
Isométrie	13

L	
Lieux géométriques	69
Lignes de niveau	71

P	
Parabole	88
Paramètre d'une parabole	88

Points cocycliques	76
--------------------	----

R	
Racines $n^{\text{ièmes}}$	
de l'unité	54
d'un complexe	54
Réciproque	
d'une transformation	7
Réflexions (composée de)	6
Représentation paramétrique	35
d'une ellipse	97
Rotation(s)	5
(composée de)	11

S	
Similitude directe	114
Suite	
bornée	139
majorée	199
minorée	139
du type $u_n = f(n)$	140
du type $u_{n+1} = f(u_n)$	144

T	
Tangente	
à une courbe paramétrée	36
Transformations du plan	7
Translation	5

V	
Vecteur dérivé	36

ÉDITION : Fabienne Loup-Brunswick
 CONCEPTION DE LA MAQUETTE : Élisabeth Maréchal
 MISE EN PAGE : Jean-Pierre Jauneau, Élisabeth Maréchal
 COUVERTURE : Ernesto Aparicio/Denis Hoch
 GRAPHIQUES ET SCHÉMAS : Calliope

Dans la collection « **NOUVEAU TRANSMATH** »
pour les élèves de Terminale S, deux ouvrages
totalement conformes au programme 1994 :

- . **Mathématiques Terminale S**
enseignement obligatoire
- . **Mathématiques Terminale S**
enseignement de spécialité



9 782091 721781



NATHAN

Couverture: Apollonia & Hoch