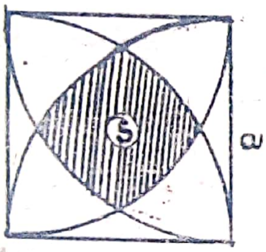
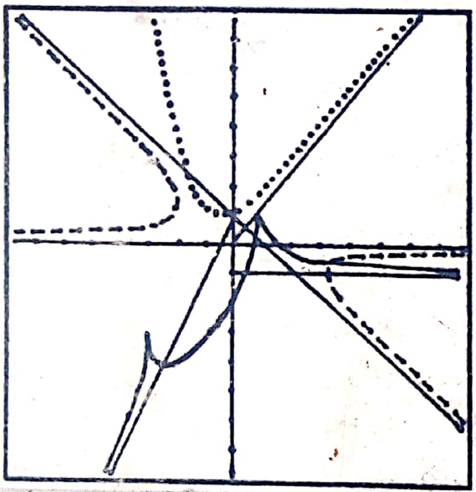
MATHEMATIQUES
COLLECTION K²

RECUEIL D'EXERCICES ET PROBLEMES DE SYNTHESE AVEC LEURS CORRIGES DETAILLES

Première partie	Deuxième partie	Troisième partie
CALCUL INTEGRAL 30 EXERCICES	PROBLEME DE SYNTHESE 40 EXERCICES	EQUATION DIFFERENTIELLES 14 EXERCICES



$S = a^2\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right)$



Premier ordre
$ay' + by = g(x)$

Second ordre
$y'' + ay' + by = f(x)$

K² AU SERVICE DES ELEVES

Tome 2

Classes : Terminales : C-D-E-F-Ti /1

Rédigé par :

KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé
Professeur de MATHEMATIQUES
Tél : (+228) 90 16 93 00 / 99 54 56 40
(+228) 91 82 84 61 / 99 09 43 63
(+228) 92 74 97 70 / 22 34 63 10
E-mail: koehyppo@yahoo.fr

PREMIERE EDITION : Janvier 2006

PROBLEME N°1

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x.$$

1/ Etudier le sens de variation de g

2/ Calculer $g(1)$ et $g(2)$; en déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$

3/ En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$$ On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unités : 2cm sur (Ox), 4cm sur (Oy)).

1/ Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$

2/ Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \cdot g(x)$$

En déduire le signe de $f'(x)$.

3/ Dresser le tableau de variations de f et montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4/ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormal (préciser la tangente au point d'abscisse 1)

PARTIE C

1/ a/ Déterminer une primitive sur l'intervalle $]1;+\infty[$ de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$$

b/ Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a :

$$f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

2/ Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. Sans calculer F, montrer que, pour tout $x \geq 1$ on a :

$$F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

PROBLEME N°2

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} - 4\ln x$

1/ Etudier les variations de g.

Préciser $g(1)$.

2/ En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$

PARTIE B : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1/ Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

2/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ (On pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression $f(x)$).

Déterminer la limite de f en 0

3/ Montrer que pour tout réel $x>0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot g(x).$$

En utilisant la partie A, étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4/ On nomme (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal (unité graphique 5cm). Tracer (C)

PARTIE C : Résolutions approchées d'équat-

1/ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution sur $]0;1]$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0;1]$ par :

$h(x) = f(x) - x$) On nomme α cette solut-

2/ Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $]1;+\infty[$. On nomme β cette solution. Montrer que $\alpha . \beta = 1$

3/ Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. En déduire un encadrement de α.

PROBLEME N°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Soit f_a la fonction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ et $(\mathscr{C}_a)$ sa courbe représentative.

1/ a/ Calculer $f_a(1)$, $f_a(a)$, $f_a(a^n)$ où n est un entier relatif.

b/ Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs x, y et tout entier relatif n on a :

- $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.
- $f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)$
- $f_a(x^n) = n f_a(x)$.
- $f_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f_a(x)$.

c/ Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs a, b et x on a :

- $f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)}$
- $f_a(x) = f_a(b) \cdot f_b(x)$.

2/ a/ Etudier la fonction f_a et dresser son tableau de variation pour $0<a<1$ et $a>1$

b/ Démontrer que f_a est une bijection

c/ Démontrer que $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$ et en déduire la position relative de $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{a}})$

3/ Tracer les courbes $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$

PROBLEME N° 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$. Pour tout nombre réel m, on définit la fonction f_m par :

$$f_m(x) = \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|.$$ On désigne par $(\mathscr{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1·/ Etudier f_m et tracer $(\mathscr{C}_m)$ dans les cas suivants : $m=0$, $m=-1$ et $m=1$

Dans la suite, on suppose que

$$m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$$

2·/ a·/ Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f_m.

On désigne par D_m l'ensemble de définition de f_m.

b·/ Démontrer que les courbes (C_m) passent par deux points fixes.

3·/ a·/ Démontrer que $D_m = D_{\frac{1}{m}}$ et que pour tout élément x de D_m on a :

$$f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x).$$

En déduire la position relative de (C_m) et $(C_{\frac{1}{m}})$.

b·/ Démontrer que

* $(x \in D_{-m}) \Longleftrightarrow (-x \in D_m)$;

* $\forall x \in D_{-m}$, $f_{-m}(x) = f_m(-x)$

En déduire la position relative de (C_m) et $(\mathscr{C}_{-m})$

c·/ Déduire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer (C_m) pour $m>1$ pour obtenir toutes les courbes (C_m).

4·/ On suppose dans cette question que $m>1$.

a·/ Etudier f_m et dresser son tableau de variation.

b·/ En déduire le tracé de (C_2), $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_{-2}).

Soit Ω le point d'intersection de $(\mathscr{C}_2)$ et de son asymptote parallèle à (OI).

Démontrer que Ω est un centre de symétrie de (C_2)

c·/ Soit g la restriction de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$

Démontrer que g réalise une bijection de $]-2; -\frac{1}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ et construire sur un autre graphique les courbes représentative de g et de g^{-1}.

PROBLEME N° 5

1·/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

a·/ Etudier f et dresser son tableau de de variation :

b·/ Calculer $f(0)$; en déduire le signe de f

2·/ Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x\ln|x-1|$$

a/ Etudier g et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$.

b/ Soit A le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (OI) d'abscisse non nulle.
Démontrer que A est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$ et écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en A.

3/ On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de h et de h^{-1}

PROBLEME N° 6

PARTIE A

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x + \ln|x-1|$$

1/ a/ Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

b/ Montrer que f s'annule pour une valeur α différent de 0, que l'on comparera aux nombres réels $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$.

2/ Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) (unité graphique 2 cm).

a/ Etudier les branches infinies de (C)

b/ Tracer (C) ainsi que les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives $1/2$ et $1-e$.

3/ Soit t un nombre réel de $[0;1[$
Calculer l'aire de la partie du plan définie par : $0 \leq x \leq t$ et $f(x) \leq y \leq 0$.
Quelle est la limite de cette aire lorsque t tend vers 1 ?

4/ Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$

a/ Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} ; préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

b/ La fonction réciproque g^{-1} est-elle dérivable en 2 ? Si oui calculer $(g^{-1})'(2)$

PARTIE B

1/ On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 6 + 8i = 0 \quad (E)$$

a/ Montrer que (E) admet une solution imaginaire pur notée z_0 que l'on déterminera.

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
Soit z_0, z_1 et z_2 les solutions de (E) z_1 est celle dont la partie réelle est positive

2/ Soit dans le repère (O, I, J) A,

B, C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a/ Montrer qu'il existe une similitude directe S que l'on déterminera qui transforme A en B et I en C.

b/ Donner les éléments géométriques de la similitude directe S.

3/ A tout point $M(x;y)$ on associe le point $M'(x';y')$ par S.

Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

4/ Soit (Γ) la représentation graphique dans le plan P de la restriction h de la fonction f à l'intervalle $]-\infty;1[$.

Vérifier que l'image (Γ') de (Γ) par S est une partie de la représentation graphique dans le plan P de la fonction h_1 définie par :

$$h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2e^{x+1} - x - 3$$

5/ Etudier les variations de la fonction h_1 et tracer sa courbe représentative.

PROBLEME N°7

On considère la fonction numérique, de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

PARTIE A

Soit l'expression $A(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x}$.

1/ Vérifier que $A(1) = 0$ et étudier le signe de cette expression suivant les valeurs de x.

2/ a/ Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?

b/ Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$; vers $+\infty$

c/ Etudier les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$, vers $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d/ Montrer que la courbe (C), représentative de f, admet trois asymptotes dont on déterminera les équations respectives.

3/ a/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b/ Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé (unité 2cm).

On construira la tangente à (C) au point d'abscisse -1.

PARTIE B

Soit l'expression $B(x) = \frac{2}{2x^2-1}$

1/ a/ Déterminer le couple de réels $(a;b)$ tel que, pour toute valeur de x élément du domaine de définition de B on ait : $B(x) = \frac{a}{x\sqrt{2}-1} + \frac{b}{x\sqrt{2}+1}$

b/ En déduire les primitives de $B(x)$.

2/ a/ Soit α un réel de l'intervalle $]\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}]$. Calculer l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right) dx$$

à l'aide d'une intégration par parties.

b/ Déterminer, en fonction de $I(\alpha)$, l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$y = x + 1 - \ln\sqrt{2}$; $x = \alpha$; $x = \sqrt{2}$.

c/ Soit $\beta = \alpha\sqrt{2} - 1$

Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de β.

En déduire $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha)$.

d/ Calculer l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$y = x + 1 - \ln\sqrt{2}$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \sqrt{2}$.

Exprimer ce résultat en cm^2, à 10^{-2} près et le hachurer sur le dessin.

PROBLEME N°8

Pour tout nombre réel α non nul on désigne par f_α la fonction numérique définie par :

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(\alpha x)}{x} \text{ et } (C\alpha)$$

sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

PARTIE A

1/ Etudier les variations de f_1 et construire (C_1).

2/ Etudier f_α pour $\alpha \neq 0$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(C\alpha)$ avec l'axe des abscisses.

3/ Dans cette question, on suppose $\alpha > 0$

a/ Déterminer une primitive $F\alpha$ de f_α sur $]0; +\infty[$

b/ Pour $a \in]0, \frac{e}{\alpha}[$ on pose

$$A\alpha(a) = F\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F\alpha(a).$$

Etudier la limite en 0 de $A\alpha(a)$, puis celle de $a\,A\alpha(a)$.

PARTIE B

1/ Soit a un réel strictement positif. Déterminer, suivant les valeurs de a le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x réel : $a^x = x$

(On pourra utiliser les variations de f_1)

2/ Démontrer, en utilisant les variations de f_1, qu'il existe un couple (b, c) unique d'entier naturels que l'on déterminera tel que :

$$0 < b < c \text{ et } b^c = c^b.$$

PARTIE C

1/ Soit t un réel strictement positif

a/ Ecrire une équation de la tangente $(T\alpha)$ à la courbe $(C\alpha)$ au point d'abscisse t.

b/ Démontrer que lorsque α varie, t restant fixe, les droites $(T\alpha)$ passent par un point fixe I_t que l'on déterminera.

Déterminer l'ensemble décrit par les points I_t lorsque t parcourt $]0;+\infty[$

2-/ Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ on note M et M' les points de (C_2) et (C_3) ayant pour abscisse x et l'on désigne par G le barycentre du système $\{(M,1),(M',-2)\}$

Démontrer que lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$, le point G décrit une des courbes $(C\alpha)$ que l'on déterminera.

3-/ Soient α et α' deux réels strictement positifs et λ un réel différent de 1. Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ on note M et M' les points de $(C\alpha)$ et $(C\alpha')$ ayant pour abscisse x et l'on désigne par G le barycentre du système $\{(M,1),(M',-\lambda)\}$

Démontrer que lorsque x parcourt $\mathbb{R}_+^*$, le point G décrit une des courbes $(C\alpha)$ que l'on précisera.

PROBLEME N°9

PARTIE I.

Pour tout entier relatif non nul n, on considère la fonction f_n d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ \text{et} \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

1-/ a-/ Préciser l'ensemble de définition de f_n.

b-/ Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?

2-/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on appelle (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n.

a-/ Etudier les éléments de symétrie de (C_n) suivant la parité de n.

b-/ Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par des points fixes O, A et B où O est l'origine du repère, A est le point d'abscisse positive et B le symétrique de A par rapport à O.

c-/ Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle dérivable pour $x=0$?

d-/ Calculer la dérivée de f_n pour $x \neq 0$. Montrer que toutes les courbes

(C_n) admettant la même tangente en A.

3/ Etudier les variations des fonctions f_{-3}, f_1 et f_2, puis tracer avec soin les courbes (C_{-3}), (C_1) et (C_2) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

4/ Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonctions f_n à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit M_n le point de la courbe (C_n) de coordonnées (X_n, Y_n) où X_n est la valeur strictement positive, pour laquelle f_n présente un extremum.

Montrer que tous les points M_n sont sur une courbe (Γ) dont on précisera l'équation.

PARTIE II

1/ Soit α un nombre réel strictement positif. Calculer $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha f_n(x)\,dx$

2/ Dans cette question $n = 2$

a/ Calculer $I_2(\alpha) = \int_1^\alpha f_2(x)\,dx$

Quelle est la limite de $I_2(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro?

Interpréter géométriquement la valeur limite trouvée.

b/ Déterminer un nombre réel β $(\beta > 0)$ tel que la valeur moyenne de f_2 sur l'intervalle $[0, \beta]$ soit nulle.

Quel point particulier de la courbe (C_{-3}) a pour abscisse β?

PROBLEME N°10

Soit la fonction numérique f_a de la variable réelle x définie par:

$$f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right),\ a \neq 0$$

On désigne par (C_a) la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

PARTIE A

1/ Etudier la parité de f_a.

2/ Démontrer que la courbe (C_a) possède deux asymptotes dont on donnera les équations.

3/ Etudier, selon les valeurs du réel non nul a, le sens de variation de la fonction f_a.

4/ a/ Démontrer que f_a est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble que l'on précisera

b/ Expliciter $f_a^{-1}(x)$. On désigne par (Γ_a) la courbe représentative de f_a^{-1} relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5/ a/ Démontrer que l'affinité orthogonale d'axe $(O, \vec{j})$ et de rapport a transforme (C_1) en (C_a).

b/ Soit a et a' deux réels non

nuls et distincts. Déterminer une application affine transformant (C_a) en (C_a').

6./ Soit R la rotation de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, S la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$.

a./ Déterminer une expression analytique de RoS puis donner une équation cartésienne de la transformée, $RoS(\Gamma_a)$, de (Γ_a) par RoS

b./ Comparer les équations cartésiennes de (C_a) et de $RoS(\Gamma_a)$.
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Dans la suite du problème, on suppose $a = 1$.

7./ Tracer la tangente à la courbe (C_1) au point d'abscisse 0 ainsi que (C_1) et (Γ_1).

PARTIE B

1./ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi/2[$ par: $g(x) = f_1(\sin x)$
Démontrer que $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

2./ Déterminer le réel c tel que

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln c$$

3./ On considère l'intégrale:

$$I_n = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$ où n est un entier naturel non nul.

On définit ainsi une suite numérique (I_n).

a./ Démontrer que la suite (I_n) est à termes positifs.

b./ Etudier le sens de variation de la suite (I_n).

c./ Démontrer que $I_n \leq \frac{\ln c}{4^n}$

d./ En déduire la limite de la suite (I_n)

PARTIE C

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $[0; \pi/2[$ par:

$$h_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$$

1./ Donner une expression simplifiée de somme $S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$ en remarquant que $S_n(x)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique (x est un réel).

2./ Démontrer que: $h_n'(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$

3./ Montrer que $h_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\sqrt{3} - I_n$.

4./ En déduire que la suite (U_n) définie par:

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1) \times 2^{2p-1}}$$

a une limite que l'on déterminera.

PROBLEME II

PARTIE A

1/ Vérifier que :

$3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$.

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-x+1-2\ln x$

2/ a/ Etudier le sens de variation de la fonction g.

b/ Déduire de la question précédente le signe de g(x) suivant les valeurs de x

3/ On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}.$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan (unité graphique 2cm)

a/ Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b/ Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives : $x=0$ et $y=x+1$ sont asymptotes à la courbe (C)

4/ a/ Montrer que la fonction h telle que : $h(x)=x+\ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.

b/ En déduire que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha+\ln\alpha=0$.

Montrer que $0,56<\alpha<0,57$

c/ Déterminer la position relative de (C) par rapport à (Δ).

5/ Etudier le sens de variation de f.

6/ Déduire de la question 4/ l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta)=0$.

Montrer que $0,46<\beta<0,47$

7/ Construire (C) et (Δ).

PARTIE B

m étant un réel, on appelle f_m la fonction de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_m(x)=\frac{x^2-1}{4}-\frac{m}{2}\ln x$ et (Γ_m) sa courbe représentative dans repère orthonormé.

1/ Dresser suivant les valeurs de m le tableau de variation de f_m.

2/ a/ Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point du plan avec $x_0>0$ et $x_0\neq 1$

Montrer qu'il existe une seule courbe (Γ_m) qui passe par M_0

b/ Montrer qu'il existe un seul point A appartenant à toutes les courbes (Γ_m).

PROBLEME N° 12

PARTIE I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par (C) la courbe représentative de f relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a-/ Etudier la fonction (ensemble de définition D, parité, étude des variations, limites aux bornes de D) et résumer cette étude par un tableau de variation.

b-/ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

c-/ Etudier la position relative de (C) et (T). Tracer (C) et (T) sur un même dessin.

2°/ a-/ Démontrer que f est une bijection de D sur un ensemble que l'on déterminera.

b-/ Expliciter $f^{-1}(x)$; représenter f^{-1} sur le même dessin que celui de la question précédente.

3°/ a-/ Déterminer le réel a tel que $f(a) = 1$

b-/ Soit E l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f^{-1}(x) \leq y \leq \inf(1; f(x)) \end{cases}$$ où $\inf(u; v)$ désigne le plus petit des réels u et v.

Déterminer en fonction de a l'aire de E.

PARTIE II

Soit f_α la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right);\ \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Etudier la fonction f_α (ensemble de définition D_α, parité, étude des variations, limites aux bornes de D_α) et résumer cette étude par un tableau de variation. On discutera suivant les valeurs de α.

2°/ Démontrer que pour tout α non nul, f_α est une bijection de D_α sur un ensemble que l'on déterminera.

Expliciter $f_\alpha^{-1}(x)$. On désigne par (Γ_α) la courbe représentative de f_α^{-1} relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3-/ a-/ Déterminer une application affine du plan P dans lui-même, autre que l'identité et laissant (C_α) globalement invariante.

b-/ Déterminer une application affine transformant (C_1) en (C_α).

c-/ α et α' étant deux réels distincts non nuls, déterminer une application affine transformant (C_α) en $(C_{\alpha'})$

4-/ On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par s la symétrie axiale d'axe $(O, \vec{i})$.

a-/ Déterminer les expressions analytiques de r et de sor.

b-/ Déterminer une équation cartésienne de la transformée sor (C_α) de (C_α) par sor.

c-/ Comparer les équations cartésiennes de (Γ_α) et de $(sor)(C_\alpha)$. Pourrait-on prévoir le résultat

PARTIE III

Dans cette partie on considère les fonctions f_α définies au II avec $\alpha > 0$

1-/ Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'équation d'inconnue réelle x : $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une solution strictement positive que l'on notera $x(\alpha)$.

2-/ On prend dans cette question $\alpha = 3$ et on définit la suite (U_n) par:

$$\begin{cases} U_0 = 1/2 \\ U_{n+1} = f_3^{-1}(U_n) \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$$

a-/ Démontrer que $U_1 > U_0$

En déduire que la suite est croissante

b-/ Démontrer que pour tout n entier naturel on a : $U_n < x(3)$.

c-/ Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

Démontrer que $\ell > \sqrt{6}$.

PROBLEME N°13

PARTIE A

On se propose de déterminer les solutions sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

(E) : $xy' - 2y = \ln x$, où y est une fonction de variable x

1-/ Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la fonction P définie sur $]0;+\infty[$, par $P(x) = ax^2+bx+c$ vérifie $xP'(x) - 2P(x) = 0$

2-/ f étant une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on pose $g = \frac{f}{P}$, P étant la fonction déterminée dans la première question avec $a \neq 0$.

a-/ Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$.

b-/ Déterminer l'ensemble des primitives définies sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$. (On pourra faire une intégration par parties).

c-/ En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto -\frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2$, où α est un nombre réel.

3-/ a-/ Trouver la fonction φ, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, vérifiant (E) tel que $\varphi(1) = 0$.

b-/ Etudier les variations de φ, et construire la courbe (C) représentative de φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE B

1-/ Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer ; en fonction de λ l'intégrale : $I(\lambda) = \int_\lambda^1 \varphi(x)\, dx$.

2-/ Montrer que $\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = \frac{1}{3}$

3-/ Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

a-/ Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout x de $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a :

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

b-/ Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

En déduire que :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

4-/ Déduire des questions 2-/ et 3-/

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

5-/ a-/ Montrer que pour tout entier naturel non nul, n :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

b-/ Etablir les égalités :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

pour tout entier naturel non nul n.

c-/ Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites :

$n \mapsto V_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ et

$n \mapsto U_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ont des limites finies lorsque n tend vers $+\infty$ que l'on calculera.

PROBLEME N°14

PARTIE A.

Soit h la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$h(x) = \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x^2}$$

($\ln$ désigne le logarithme neperien).

1-/ a-/ Déterminer l'ensemble de définition D de h.

b-/ Montrer que h admet un prolongement par continuité au point 0 ; préciser ce prolongement.

2-/ Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

a-/ f est-elle dérivable en 0 ?

b/ Etudier les variations de f et établir son tableau de variation. On justifiera tout calcul de limite.

c-/ Tracer la courbe (C) de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

3-/ On désigne par $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $]-1/e ; +\infty[$

a-/ Montrer que $\tilde{f}$ admet une bijection réciproque notée $\tilde{f}^{-1}$.

b-/ Donner le tableau de variation de $\tilde{f}^{-1}$

c-/ Tracer la courbe (C_1) de $\tilde{f}$ et (C_2) de $\tilde{f}^{-1}$ dans un autre repère orthonormé que celui de (C).

d-/ Montrer que $\tilde{f}^{-1}$ est dérivable, puis calculer $(\tilde{f}^{-1})'(0)$

e-/ Montrer que l'équation : $\forall x \in]\frac{1}{e} ; +\infty[$, $\tilde{f}(x) = 2$ admet une solution unique notée x_0 dans l'intervalle $]\frac{1}{e} ; 1[$. Donner un encadrement de x_0 à 10^{-1} près.

PARTIE B

On considère la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1 - e^{|x|}}{1 + e^{|x|}}$$

1-/ a-/ Etudier les variations de g.

b-/ Tracer la courbe (S) de g dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

2-/ a-/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout x réel strictement positif, on a : $g(x) = \frac{a e^x}{1 + e^x} + b$

b/ Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda$, et (E_λ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant : $0 \le x \le \lambda$ et $-1 \le y \le g(x)$.

Calculer l'aire A de l'ensemble (E_λ) en fonction de λ puis calculer :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A.$$

PROBLEME N°15

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1-/ Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$

2-/ a-/ Dresser le tableau de variation de g

b-/ En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B

1-/ a-/ Démontrer que f est continue en 0

b-/ Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2-/ a-/ Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et montrer que $f'(x) = xg(x)$.

b-/ En déduire le sens de variation de la fonction f.

3-/ a-/ Calculer la limite en $+\infty$ de f.

b-/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4-/ On pose pour tout $x>0$,

$h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $I(x) = \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$

a-/ Calculer $I(x)$ et vérifier que

$$h(x) = x^2 I(x).$$

b-/ Démontrer que pour $t \geq 0$,

$0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t \leq t^2$. On rappelle que

$$\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{1+t}.$$

c-/ En déduire que $0 \leq I(x) \leq \frac{1}{3x^3}$

d-/ Déterminer la limite en $+\infty$ de $h(x)$ et le signe de $h(x)$ pour tout $x>0$

e-/ Que représente la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ à la courbe (C) représentative de la fonction ?

f-/ Etudier la position relative de (C) par rapport à la droite (D).

PARTIE C

1-/ Construire la courbe (C) et la droite (D).

2-/ Pour $0 < \lambda \leq 1$ on pose $A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$

. Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ.

3/. a-/ Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda)$

b-/ En déduire en cm^2 l'aire de la partie (Δ) du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$

PROBLEME N°16

On considère la fonction f_n à variable réelle définie par: $f_n = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ où n est un entier naturel non nul. Soit (C_n) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\|\vec{i}\| = 2cm$, $\|\vec{j}\| = 10cm$.

PARTIE A

1-/ Etude de la fonction f_1 pour $n = 1$

a-/ Calculer les limites de la fonction f_1 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_1)?

b-/ Etudier le sens de variation de f_1 et dresser son tableau de variation.

2-/ Etude de la fonction f_2 pour $n = 2$

a-/ Calculer les limites de la fonction f_2 en 0 et en $+\infty$. Que peut on en déduire pour la courbe (C_2)?

b-/ Etudier le sens de variation de f_2 et dresser son tableau de variation

PARTIE B: Cas général

1-/ Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées.

2-/ Etudier suivant la parité de n, les variations de f_n

3-/ Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

PARTIE C

On considère la suite (I_n) pour tout entier naturel n non nul, definie par $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1-/ a-/ Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $I_n \geq 0$.

b-/ Etudier le sens de variation de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) est convergente.

2-/ a-/ Calculer I_1

b/ En utilisant la méthode d'intégration par parties montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

En déduire la valeur de I_2

3-/ Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par les courbes (C_1), (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

4-/ En utilisant les resultats de la question C-2-b, montrer par récurrence que: $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$

5-/ En encadrant la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $[1;e]$, montrer $0 \leq I_n \leq 1$.

b-/ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$ et en déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

PROBLEME N°17

On considère les fonctions f_a définies pour tout réel x non nul par : $f_a(x) = \frac{a}{x} + \ln x^2$ où a désigne un paramètre réel. On appelle (C_a) la courbe représentative de f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Etudier la fonction f_0

b/ Construire la courbe (C_0) représentative de la fonction f_0.

2/ Dans cette question a est différent de 0

a/ Comparer $f_{-a}(-x)$ et $f_a(x)$.

b/ En déduire une transformation géométrique entre les courbes (C_a) et (C_{-a})

3/ a/ Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b/ Calculer la limite en 0 de f_a

c/ Etudier les variations de f_a et dressons son tableau de variation suivant les valeurs de a.

d/ Préciser les points d'inflexion des courbes (C_1) et (C_2).

Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à (C_1) et celle de la tangente (T_2) à (C_2) aux points d'inflexion.

Construire les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que les tangentes (T_1) et (T_2).

4/ Soit S_a le point de (C_a) où la tangente est parallèle à l'axe (ox).

a/ Déterminer l'ensemble (Γ) des points S_a lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$.

b/ Montrer que (Γ) se déduit simplement de (C_0).

c/ Déterminer l'ensemble (Γ') des points d'inflexion de (C_a).

5/ a/ Ecrire l'équation de la tangente à la courbe (C_1) en son point d'abscisse x_1.

b/ Soit U un point donné de l'axe (oy), d'ordonnée u.

Former l'équation déterminant les abscisses des points de contact des tangentes à (C_1) passant par U.

c/ Etudier, selon la position du point U le nombre de tangentes à (C_1) passant par U

PROBLEME N°18

On considère la fonction f définie sur $[-e; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2 \text{ si } x \neq -e \\ f(-e) = -e \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A.

1-/ a-/ Démontrer que $\lim_{x \to 0} [x(\ln x)^2] = 0$

b-/ Calculer la limite de f en $-e$. f est-elle continue en $-e$?

c-/ Etudier la dérivabilité de f au point $-e$.

2-/ Déterminer le sens de variations de f puis dresser son tableau de variat-

3-/ Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

4-/ Tracer T et (C).

5-/ a-/ Démontrer que f est une bijection sur un intervalle J à préciser.

Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe.

b-/ Tracer (C') dans le même repère que (C)

c-/ Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

PARTIE B.

Soit α un nombre réel tel que: $-e < \alpha < 0$. On pose $J(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)\,dx$

1-/ Pour tout entier naturel n, on désigne par $I_n(\alpha)$ l'intégrale définie par: $I_n(\alpha) = \int_\alpha^0 (x+e)[\ln(x+e)]^n dx$.

a-/ A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$.

b-/ Calculer $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

2-/ a-/ Vérifier que pour tout $x \in]-e; +\infty[$

$$f(x) = (x+e)[-1+\ln(x+e)]^2 + x.$$

b-/ Exprimer $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$, puis en fonction de α seul.

3-/ Calculer $\lim_{\alpha \to -e} (-J(\alpha))$. Donner une interprétation géométrique du résultat.

4-/ Soient P, Q et R les points du plan de coordonnées respectives: $(0; -e)$, $(-e; -e)$ et $(-e; 0)$. Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$. Les courbes (C), (C') et (Δ) partagent le carré OPQR en quatre régions notées respectivement:

S_1: partie du carré au dessus de (C)

S_2: partie du carré comprise entre (C) et (Δ).

S_3: partie du carré comprise entre Δ et (C').

S_4: partie du carré en dessous de (C')

Comparer les aires de ces quatre parties

PROBLEME N°19

On considère pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n, \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A.

1-/ Soit p un entier naturel. En utilisant la limite de $t^p e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, montrer que :

$$\lim_{x \to 0} x(\ln x)^p = 0.$$

2-/ En déduire pour tout entier $k \geq 1$, la limite de $x^k(\ln x)^p$ en 0.

3-/ Montrer que f_n est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0

PARTIE B.

1-/ Etudier le sens de variation de f_1 sur $[0;1]$

2-/ a-/ Montrer que $\forall n \geq 1$, $0 < e^{-\frac{n}{2}} < 1$

b-/ L'entier n étant fixe $(n \geq 1)$, résoudre dans $]0;1]$ l'inéquation

$$\ln x + \frac{n}{2} \leq 0$$

c-/ Montrer que si $n \geq 2$ alors f_n est dérivable sur $[0;1]$ et $f'_n(x)$ admet le même signe que :

$$\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1} \text{ pour tout } x \in]0;1]$$

d-/ Etudier le sens de variation de f_n sur $[0;1]$ pour $n \geq 2$ suivant les valeurs de n. Dresser le tableau de variation de f_n.

3-/ L'unité graphique étant 10 cm, construire les courbes (C_1) et (C_2). Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.

4-/ Montrer que les courbes (C_n) passent par deux points indépendants de n.

PARTIE C

Dans cette partie t désigne un réel appartenant à $[0;1]$ et n un entier naturel non nul.

1-/ On pose $In(t) = \int_t^1 f_n(x)\,dx$ et $Ln = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a-/ Justifier l'existence de $In(t)$

b-/ Montrer que la fonction : $t \longmapsto Ln - In(t)$ est la primitive sur $[0;1]$ de la fonction f_n qui s'annule en $t = 0$.

2-/ En déduire que $In(t)$ admet pour limite Ln lorsque t tend vers 0

3-/ On considère la fonction numérique

F définie sur $[0;1]$ par :

$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$ pour $0 < x \leq 1$

et $F(0) = 0$

a/ Prouver que F est dérivable sur $]0;1]$ et calculer $F'(x)$ pour $0<x\leq 1$

b/ Prouver que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

c/ En déduire que F est une primitive de f_1 sur $[0;1]$. Calculer L_1.

4-/ Soit φ_n la fonction définie sur $]0;1]$ par $\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$.

a/ Déterminer $\lim_{t\to 0} \varphi_n(t)$

b/ Prouver que pour $t \in [0;1]$

$I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t)$.

c/ En déduire que $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

d/ Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$

e/ Calculer en fonction de n l'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C_n) et l'axe des abscisses.

PROBLEME N°20

PARTIE A

1-/ Justifier le resultat suivant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2-/ a-/ En déduire que : $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

b-/ Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

3-/ Pour tout naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n(1-x)$

a-/ Etudier le sens de variation de f_n.

b-/ Prouver que selon la parité de n, l'équation $f_n(x) = 1$ admet soit 0 soit 1 solution dans $\mathbb{R}$.

4-/ Montrer que les courbes de f_n passent par deux points fixes et admettent les mêmes tangentes en ces points sauf pour certaines valeurs de n que l'on précisera.

PARTIE B :

On note g_n la restrict° de f_n sur $[0;1]$

Soit (C_n) la courbe représentative de g_n

1-/ Montrer que sauf pour une valeur de n g_n possède un maximum $M_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

2-/ Tracer (C_0), (C_1) et (C_2). Donner l'allure de (C_n) pour $n > 2$.

3-/ Calculer : $\lim_{n\to+\infty} M_n$; $I_n = \int_0^1 g_n(x)$

$\lim_{n\to+\infty} I_n$. Pouvait-on prevoir ce dernier resultat à partir d'un encadrement de g_n ?

4-/ Pour tout $x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose

$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$

a-/ Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ puis $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$

b-/ Exprimer $\int_0^1 S_n(x)dx$ en fonction de $I_0, I_1, \dots I_n$

En deduire la valeur de $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = P_n$

c-/ Comparer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

PROBLEME N° 21

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=x+2-e^{x}$.

1/ Etudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2/ a/ Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$. On note α cette solution.

b/ Prouver que $1,14<\alpha<1,15$

3/ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

1/ a/ Montrons que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^{x}g(x)}{(xe^{x}+1)^2}$

b/ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$

2/ a/ Montrer que pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

b/ En déduire la limite de f en $+\infty$

Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3/ a/ Etablir que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

b/ En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A-2, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4/ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5/ a/ Etablir que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$

$$f(x)-x=\frac{(x+1)U(x)}{xe^{x}+1} \text{ avec } U(x)=e^{x}-xe^{x}-1$$

b/ Etudier le sens de variation de la fonction U sur l'intervalle $[0;+\infty[$

En déduire le signe de $U(x)$.

c/ Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Tracer (C) et (T).

PARTIE C

1/ Déterminer une primitive F de f sur $[0;+\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans B.2

2/ On note D le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$

Calculer en cm^2 l'aire A du domaine D.

3-/ Pour tout entier naturel n, on pose :

$$V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

a-/ Calculer V_0, V_1 et V_2

b-/ Montrer que pour tout naturel $n \geq 2$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

En déduire la monotonie de la suite (V_n) à partir de $n = 1$

c-/ Déterminer la limite de la suite (V_n)

d-/ Déterminer la somme :

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ pour tout entier naturel n.

PROBLEME N°22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1-/ Etudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2-/ Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3-/ Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation

4-/ Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.

5-/ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

1-/ Etudier les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2-/ Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel et montrer que $f'(x) = g(x)$.

3-/ En déduire à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.

4-/ a-/ Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

b-/ A l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.

5-/ Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Préciser la position relative de la courbe (C) par rapport à Δ.

6-/ Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

7-/ Tracer Δ, T puis (C)

8-/ a-/ Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$

par : $P(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2+2)e^{-x}$.

b/ Calculer en fonction de α l'aire A en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x=-\alpha$ et $x=0$.

c/ Justifier que $A = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

PARTIE C

1/ Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1;2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$.

2/ Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1;2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

3/ En utilisant le sens de variation de la fonction h définie sur $[1;2]$ par $h(x) = f(x) - x$, démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $[1;2]$.

4/ Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq U_n \leq 2$. (On utilisera une démonstration par récurrence)

b/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_n - \beta|$

c/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

d/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

e/ Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 on ait :

$$|U_n - \beta| \leq 10^{-2}.$$

PROBLEME N°23

On considère la fonction de la variable réelle x définie par : $f_a(x) = x + ae^{-|x|}$. où a est un réel non nul, e la base des logarithmes népériens et $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

PARTIE A

1/ a/ Donner l'ensemble de définition de f ainsi que la partie de cet ensemble où f_a est dérivable.

b/ Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0.

c/ Montrer que pour tout a, la courbe représentative (C_a) de f_a admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

2·/ a·/ Trouver la valeur de x pour laquelle la dérivée s'annule.

En déduire l'ensemble I des réels a pour lesquels la fonction f_a a un extrémum relatif; cet extrémum est-il un maximum ou un minimum?

b·/ Soit x_a le point où f_a possède un extrémum relatif.

Déterminer l'ensemble D des pts $M(x_a; f_a(x_a))$ lorsque a décrit I.

3·/ a·/ Etablir le tableau de variation de f_e pour $a = e$.

b·/ Tracer la courbe (C_e) ainsi que ses demi-tangentes en son point d'abscisse 0, son asymptote et l'ensemble D (Unité 2cm).

4·/ a·/ Le réel a étant fixé, déterminer les points d'intersection P et Q de (C_a) avec la droite (S) d'équat°: $y = x + m$, m étant un paramètre réel.

b·/ Calculer les coordonnées du milieu J du segment [PQ] et en déduire l'ensemble des points J lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

PARTIE B.

Dans cette partie on prend $a = 1$

1·/ a·/ Dresser le tableau de variation de la fonction f_1.

b·/ Tracer (C_1), ses demi-tangentes au point d'abscisse 0 et son asymptote sur un autre dessin (unité 2cm)

2·/ Soit l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ sont telles que: $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ x \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

a·/ Calculer l'aire S de cet ensemble.

b·/ Trouver la limite de cette aire lorsque λ tend vers l'infinie.

PROBLEME N°24

PARTIE A

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définies par: $f_m(x) = e^{x} - m(x+1)$ $m \in \mathbb{R}$. On désigne par (C_m) leurs courbes. (Unité graphique 2cm)

1·/ Etudier les variations de la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe (C_1). On précisera l'assymptote de la courbe (C_1)

2·/ Soit la droite (Δ_1) d'équation $y = -x - 1$. Calculer en cm^2, l'aire

$A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (C_1), (Δ_1) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$ (où α est un réel négatif).

Etudier la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

3·/ Pour tout entier naturel n on désigne par (D_n) le domaine limité par (Δ_1), (C_1) et les droites d'équation $x=-n-1$ et $x=-n$.

a·/ Calculer en cm^2 l'aire A_n du domaine (D_n).

b·/ Montrer que la suite des réels A_n est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme A_0 et la raison.

c·/ Calculer $S_n = A_0+A_1+\cdots+A_n$. En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4·/ Etudier suivant les valeurs de m les variations de f_m. On précisera les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.

5·/ Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe B.

6·/ Montrer que la droite (Δ_m) : $y=-mx-m$ est asymptote à (C_m) et déterminer la position de (C_m) par rapport à (Δ_m).

PARTIE B

A tout point M du plan d'affixe $z=x+iy$, on associe par une transformation T, le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$:

$$T : P \longrightarrow P$$

$$M \longmapsto M' \text{ et } z' = (1-i)z+1+i$$

1·/ Quelle est la nature de la transformation T ?

2·/ Définir analytiquement la transformation T.

3·/ M étant un point de (C_1), déterminer en fonction de x, abscisse de M, les coordonnées de M' transformé de M par T.

4·/ Déterminer l'ensemble (γ), image par T de la courbe (C_1).

PARTIE C

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = x - \ln(x^2)$

1·/ Etudier les variations de g et tracer sa courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$. Préciser les branches infinies de (Γ).

2·/ Démontrer que l'équation $g(x)=0$

admet une seule solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

3/ Tracer (γ) dans le même repère que (Γ). On pourra utiliser une autre couleur.

PROBLEME N° 25

Soit la fonction numérique f définie par: $f(x) = 2x + \frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm).

PARTIE A

1/ Déterminer l'ensemble de définition D de f et étudier la parité de f.

2/ Montrer que pour tout x de D on a:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

3/ Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

4/ a/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$.

b/ Etudier la position de (C) par rapport à (Δ).

c/ Déterminer les autres asymptotes à la courbe (C).

PARTIE B

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation:

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0.$$

2/ Déterminer la fonction dérivée de f et dresser le tableau de variation de la fonction f.

3/ Tracer (C) ainsi que ses asymptotes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4/ Déterminer l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x + m$ où m est un paramètre réel

PARTIE C

Soit n un entier naturel supérieur à 1. On définit: $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$

1/ a/ A l'aide de la courbe (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre I_n.

b/ Prouver que $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ pour tout n supérieur à 1.

c/ Calculer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$

2/ On considère $S_n = I_2 + I_3 \dots + I_n$. A l'aide de la courbe (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre S_n. Calculer S_n.

3/ Calculer en cm^2 l'aire $A(n)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ et les

droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln(n+1)$.
Déterminer la limite de $A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLEME N°26

1-/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)\,e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a-/ Etudier les variations de g.

b-/ Construire la courbe (C) avec soin

2-/ Soit les fonctions f_a de variable réelle x définies par : $f_a(x) = e^{-x} + ax$.
où a est un paramètre réel. On désignera par (C_a) la courbe représentative de la fonction f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a-/ Etudier et représenter les fonctions f_a correspondant à :
$a = 0$, $a = 1$ et $a = -1$. On construira les courbes (C_0), (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.

b-/ – Construire le tableau de variation de la fonction f_a suivant les valeurs de a.

– Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle un extrémum ?

– Soit I le point de (C_a) correspondant à cet extrémum. Indiquer en fonction de a les coordonnées de I.
Quel est l'ensemble des points I ?

– Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

c-/ Utiliser les résultats précédents pour discuter, selon les valeurs de a l'équation d'inconnue réelle :

$$e^{-x} + ax = 0.$$

3-/ a-/ Montrer que, quel que soit a, les fonctions f_a vérifient l'équation différentielle : $y - xy' = (x+1)e^{-x}$

b-/ Ecrire l'équation de la tangente à (C_a) au point d'abscisse x_0.

Montrer que cette tangente coupe l'axe (oy) en un point indépendant de a.

c-/ Soit P un point de (oy), d'ordonnée m. Etudier, selon les valeurs de m, le nombre de tangente à (C_a) issues de P.

4-/ Déterminer les courbes $(C_{a'})$ et (C_a) ayant les deux propriétés suivantes :

* ces courbes sont orthogonales
* les asymptotes de ces courbes sont perpendiculaires.

– Une droite parallèle à (oy) coupe ces courbes en M' et M'' respectivement.

Déterminer et construire l'ensemble J des milieux de $[M'M'']$

PROBLEME N°27

Dans ce problème, k est un nombre réel et on considère la famille de fonctions f_k définies sur $[-1;+\infty[$ par $f_k(x) = (x+1)(e^{-1-x} + k)$. Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 4cm) et on designe par (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k.

PARTIE A.

1-/ Etudier suivant les valeurs de k, la limite de f_k en $+\infty$.

2-/ a-/ Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = kx+k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$.

b-/ Etudier la position relative de (C_k) et (D_k).

3-/ a-/ Calculer la dérivée première f'_k et la dérivée seconde f''_k de f_k.

b-/ Etudier le sens de variation de f'_k

4-/ a-/ Dresser le tableau de variation de f_0 puis de f_1.

b-/ Déterminer les tangentes (T_0) et (T_1) respectives aux courbes (C_0) et (C_1) au point d'abscisse -1.

c-/ Tracer (D_0), (D_1), (T_0), (T_1), (C_0), (C_1)

PARTIE B

1-/ Montrer que l'équation $f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$ admet une unique solution α et que $-1 \leq \alpha \leq -0{,}5$.

2-/ Soit h l'application de $I = [-1;-\frac{1}{2}]$ sur $\mathbb{R}$, définie par: $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$.
Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

3-/ Etudier les variations de h et montrer que pour tout x de I, $h(x)$ appartient à I.

4-/ On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = -1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a-/ Démontrer que tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à I.
On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}83\,|U_n - \alpha|$$

b-/ Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$|U_n - \alpha| \leq (0{,}83)^n \cdot \frac{1}{2}.$$
En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite

c-/ Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \alpha| < 10^{-2}$

Dresser le tableau de variation de

de la fonction $f_{-1/2}$

Démontrer que $f_{-1/2}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

b/ On donne $U_{18} \simeq -0,6854$

Donner la valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Tracer $(C_{-\frac{1}{2}})$

PROBLEME N°28

Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = x+\lambda(x+1)e^{-x}$. On désigne par (C_λ) la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

N.B les parties B et C de ce problème sont indépendantes

PARTIE A

1/ Déterminer f'_λ et f''_λ les fonctions dérivées première et seconde de f_λ

2/ Etudier les variations de f'_λ.

3/ Discuter, suivant le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $f'_\lambda(x)=0$

Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et à 1. (On distinguera les 4 cas : $\lambda<0$; $0<\lambda<e$; $\lambda=e$ et $\lambda>e$)

4/ Déduire de ce qui précède le sens de variation de f_λ suivant les valeurs du réel λ.

5/ Etudier les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser les branches infinies de la courbe (C_λ)

6/ Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes (C_λ).

7/ Soit I_λ le point de (C_λ) dont l'abscisse est 1. Ecrire une équation de la tangente D_λ en I_λ à (C_λ).

Montrer que les droites D_λ ont un point commun B.

8/ On se propose de tracer avec précision les courbes (C_{-1}), (C_e), (C_4). Les courbes seront tracées sur une même figure en prenant 2cm comme unité graphique.

a/ On prend $\lambda=-1$. Montrer que l'équation $f'_{-1}(x)=0$ n'a qu'une solution notée x_1 comprise entre $-0,57$ et $-0,56$.

Construire la courbe (C_{-1})

b/ Tracer (C_e)

c/ Montrer que l'équation d'inconnue x, $f'_4(x)=0$ a deux solutions : x_1 comprise entre 0,35 et 0,36 et x_2 comprise entre 2,15 et 2,16.

Tracer (C_4)

PARTIE B

1/ Montrer que la fonction f_λ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'ensemble de ces primitives.

2/ Pour tout λ réel non nul, on définit une suite de fonctions continues $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi_1(x)=\int_0^x f_\lambda(t)\,dt-2\lambda$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi_{n+1}(x)=\int_0^x \varphi_n(t)\,dt+(-1)^{n+1}(n+2)\lambda.$$

a/ Calculer φ_1

b/ Montrer par récurrence, que pour tout naturel n non nul et tout réel x :

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+(-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}.$$

PARTIE C

On suppose dans cette partie $-\frac{1}{e}<\lambda<0$.

1/ Montrer que le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1)=0$ est strictement inférieur à -1. En déduire que si $-1<x<0$ alors $-1<f_\lambda(x)<0$.

2/ On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=f_\lambda(U_n)\end{cases}$

Montrer que :

a/ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<U_n<0$

b/ la suite (U_n) est décroissante.

c/ $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<U_{n+1}+1<(1+\lambda)(U_n+1)$.

En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.

PROBLEME N° 29

Soit la fonction f_m à variable réelle définie par : $f_m(x)=e^{x-1}(mx-m+1)-1$.

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

PARTIE A.

On suppose dans cette partie que m est un paramètre réel non nul.

1/ a/ Montrer que toutes (C_m) passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

b/ Soit M un point du plan. Etudier suivant la position du point M dans le plan, le nombre de courbe (C_m) qui passent par M.

2/ a/ Calculer suivant les valeurs de m, les limites de f_m en $+\infty$ puis en $-\infty$

b/ Etudier les branches infinies de (C_m)

3/ a/ Calculer la dérivée f'_m de la

fonction f_m et étudier son signe suivant les valeurs de m.

c-/ Dresser les tableaux de variations de f_m selon les valeurs de m.

4-/ Déterminer l'ensemble des extrémums de (C_m) lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

5-/ Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'_m(x) = f_m(x) + m e^{x-1} + 1$. En déduire sans calculer $f''_m(x)$ la relation :

$f''_m(x) - 2f'_m(x) + f_m(x) = -1$

6-/ Etudier la position relative des courbes (C_{-m}) et (C_m)

PARTIE B

On pose $m = 1$ puis $m = -1$.

1-/ Dresser les tableaux de variations des fonctions f_1 et f_{-1}.

2-/ Construire dans le même repère, les courbes (C_{-1}) et (C_1)

3-/ Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.

a-/ Calculer l'aire $a(\lambda)$ de la portion du plan limitée par les courbes (C_{-1}), (C_1) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

b-/ Déterminer $\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$

PROBLEME N°30

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ on donne les points $A(1,0)$ $B(-1;0)$ et $K(0;-1)$.
A tout point M de P de coordonnées $(x;y)$ on associe le nombre complexe $z = x+iy$, affixe de M

PARTIE A

1-/ Démontrer qu'il existe une rotation T qui laisse le point K invariant et qui transforme A en B.

Préciser l'angle de T et la transformation complexe associée à T.

2-/ Soit M_1, M_2 et M_3 trois points du plan tels que $M_1 = T(M)$, $M_2 = T(M_1)$ et $M_3 = T(M_2)$

a/ Quelle est la position relative des droites (MM_1) et (M_2M_3) lorsque M est distinct du point K.

b-/ Déterminer l'ensemble des points M_1 de P lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$

PARTIE B

Le nombre α étant fixé mais quelconque on considère l'application T_α de P dans P qui à tout point M associe le point M' barycentre des points pondérés (M, α), $(M_1, -\alpha)$ et $(A, 1)$, M_1 étant le point défini dans A- 2/, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1/ Exprimer l'affixe z' du point M' en fonction de α et de l'affixe z du point M.

2/ Déterminer suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de T_α.

3/ Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

4/ Soit $E(-e^{\alpha}, e^{\alpha})$ et E' l'image de E par T_α.

a/ Exprimer les coordonnées de E' en fonction de α.

b/ Démontrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points E' est la courbe (C) d'équation $y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$

PARTIE C

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{x} + x$.

1/ Etudier le sens de variation de la fonction dérivée première f' de f.

2/ Dresser le tableau de variation de f.

3/ a/ Représenter graphiquement la fonction f.

b/ Trouver la transformation affine simple par laquelle l'ensemble (C) des points E' du B-4b est l'image de la courbe représentative de f.

c/ Tracer (C) dans le repère précédent.

d/ Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

4/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2(x-1)e^{x-1}$. On note $g', g'', g^{(3)}, \dots g^{(n)}$ les dérivées successives de g.

a/ Démontrer que pour tout entier n non nul $g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$ où x est un nombre réel.

b/ Calculer $\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x)$.

PROBLEME N°31

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(0;2)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$; $D(1;2)$ et $E(2,1)$. Soit f l'application affine du plan telle que $f(O) = A$ et dont l'application linéaire associée est notée φ.

PARTIE A.

On suppose que pour tout point M de (BC), on a $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{j}$.

1/ a/ Déterminer $f(B)$ et $f(C)$.

b/ Déterminer $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2/ Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j}$.

3/ Démontrer que $f \circ f = f$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

PARTIE B

On suppose que pour tout point M de (BC), on a : $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{i}$

1/ a/ Déterminer $f(B)$ et $f(C)$.

b/ Déterminer $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

2/ Démontrer que l'expression analytique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -y+2 \end{cases}$

3/ a/ Quel est l'ensemble des points invariants par f.

b/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ f$

4/ Soit t la translation de vecteur $-\vec{i}$

Démontrer que $t \circ f$ est une symétrie axiale dont on précisera les éléments caractéristiques.

5/ On considère la suite des points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$M_0 = O$ et $M_{n+1} = f(M_n)$.

a/ Montrer que $\overrightarrow{M_n M_{n+2}} = 2\vec{u}$.

b/ En déduire que les points M_n appartiennent à la réunion de deux droites que l'on précisera.

c/ Soit $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de M_n. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

On pose $z_n = y_n - 1$. Montrer que (z_n) est géométrique.

En déduire y_n en fonction de n

Démontrer que $x_n = n - \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE C

Soit k un réel non nul et soit (Γ_k) la courbe d'équation : $x(y-1) = k$

1/ Montrer que (Γ_k) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

2-/ On considère l'application affine f définie dans la partie B et on désigne par (Γ'_k) l'image de (Γ_k) par f.

a-/ Ecrire les équations de (Γ'_k) respectivement dans les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(C, \vec{i}, \vec{i}-\vec{j})$.

b-/ En déduire que (Γ'_k) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3-/ Construire (Γ_2) et (Γ'_2).

PROBLEME N°32

Soit m un nombre réel et f_m la fonction à variable réelle définie par $f_m(x) = e^{-2x} - (3+m)e^{-x} + 3m$.

Soit (C_m) sa courbe représentative.

PARTIE A

1-/ a-/ Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées

b-/ Soit M un point du plan. Etudier suivant la position du point M dans le plan le nombre de courbes (C_m) passant par M.

2-/ Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (C_m) avec l'axe des abscisses. On donnera les coordonnées des points d'intersection.

3-/ a-/ Calculer $f'_m(x)$.

b-/ Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m admet un extrémum I_m

c-/ Déterminer les coordonnées du point I_m en fonction de m.

d-/ Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie.

4-/ Dans cette question m est un réel fixe.

a-/ Montrer que (C_m) admet une asymptote horizontale (D_m) dont on précisera l'équation

b-/ On suppose à présent que $m > -3$. Calculer en fonction de m les coordonnées du point J intersection de (C_m) et (D_m).

PARTIE B

1-/ Etudier les variations de f_1. On justifiera tout calcul de limite.

2-/ Etudier les branches infinies de la courbe (C_1)

3-/ Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de (C_1) et l'équation de la tangente à (C_1) en ce point.

Construire soigneusement la courbe (C).

3/ Soit g l'application de $[-\ln 2; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f_1(x)$.

a/ Montrer que g admet une bijection

b/ Quel est l'ensemble de définition de la réciproque g^{-1} de g?

4/ Soit α un nombre réel positif. Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan défini par $\begin{cases} -2\ln 2 \leq x \leq \alpha \\ f_1(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$.

5/ Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_1).

PROBLEME N°33

Dans le plan P muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$, la symétrie S d'axe (D) et de direction celle de l'axe (oy).

PARTIE A

Soit g l'application affine de P dans P qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1/ Montrer que g est bijective et vérifier que $g \circ S = S \circ g$.

2/ Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par g.

3/ Montrer que, si M n'est pas invariant par g, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.

4/ Calculer les coordonnées du point M_1, intersection de (MM') et de (Δ).

5/ Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

PARTIE B

On note Ψ l'application linéaire associée à S et F l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que $f(O)$ appartient à (D) et dont l'application linéaire associée φ vérifie :

$\varphi(2\vec{i} + \vec{j}) = a(2\vec{i} + \vec{j})$ et $\varphi(\vec{j}) = b\vec{j}$ où a et b sont deux nombres réels non nuls.

1/ a/ Préciser le couple $(a; b)$ pour lequel f est une homothétie.

b/ Préciser le couple (a, b) pour que f soit une translation.

2/ Soit A un point de P tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ soit colinéaire à $\vec{j}$ et B un point de (D) distinct de O.

Déterminer $\Psi(\overrightarrow{OA})$ et $\Psi(\overrightarrow{OB})$.

En déduire $\Psi(\vec{j})$ et $\Psi(2\vec{i}+\vec{j})$

3-/ Démontrer que S et g appartiennent à $\mathcal{F}$.

4-/ On appelle $\mathcal{F}_1$ le sous ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ dont l'application linéaire associée φ vérifie $\Psi(\vec{j})=\vec{j}$.

a-/ Soit f_1 un élément de $\mathcal{F}_1$. Démontrer que le point $M(x;y)$ a pour image par f_1 le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \text{ avec } \begin{pmatrix} a \in \mathbb{R}^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

b-/ Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ?

c-/ Dans cette question on prend $\alpha = 0$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan P. On pose $M_1 = f_1(M_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_{n+1} = f_1(M_n)$. Soit $M_n(x_n; y_n)$. Calculer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et a. Etudier la convergence des suites (x_n) et (y_n).

PARTIE C

1-/ Soit F la fonction numérique définie par : $F(x) = \frac{1}{2}x + \ln x$.

Etudier les variations de F et représenter graphiquement F dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par (C) la courbe de F.

2-/ a-/ Soit f_1 un élément quelconque de $\mathcal{F}_1$. Déterminer une équation cartésienne de l'image de (C) par f_1.

b-/ Soient $(p;q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(C_{p,q})$ la courbe d'équation $y = \ln(px+q) + \frac{1}{2}x$ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

Démontrer que $(C_{p,q})$ est l'image de (C) par une application appartenant à $\mathcal{F}_1$.

3-/ Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2-2x) + \frac{1}{2}x$. Reconnaître l'application élément de $\mathcal{F}_1$ qui transforme (C) en (Γ).

4-/ Construire l'image (C') de (C) par $g \circ S$.

PROBLEME N° 34

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 2cm. Pour tout nombre réel non nul α, on considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_\alpha(x) = -x\ln(\alpha^2) - 2|x|\ln(|x|).$$

On note C_α, C_α^+, C_α^- les courbes représentatives de f_α et des restrictions de f_α à $]0;+\infty[$ et à $]-\infty;0[$ respectivement.

Soit g_α la restriction de f_α à $]0;+\infty[$

PARTIE A

Soit E l'ensemble des fonctions numériques dérivables sur $]0;+\infty[$ et telles que: $\forall x_1 \in]0;+\infty[$, $\forall x_2 \in]0;+\infty[$,

$$f(x_1x_2) = x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1).$$

1/ Démontrer que la fonction kg où k est un nombre réel fixé, appartient à E

2/ a/ Démontrer que si f appartient à E alors $f(1) = 0$

b/ Démontrer que si f appartient à E alors $\forall x \in]0;+\infty[$, $xf'(x) - f(x) = xf'(1)$ (1)

c/ En remarquant que la propriété (1) est équivalente à : $\forall x \in]0;+\infty[$ $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{f'(1)}{x}$, calculer $\frac{f(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

d/ En déduire l'ensemble des fonctions appartenant à E.

PARTIE B

1/ Pour quelles valeurs de α, g_α appartient à E?

2/ a/ Etudier le sens de variation de g_1

b/ Etablir le tableau de variation de f_1 (on pourra utiliser la parité de f_1)

c/ Tracer C_1.

d/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$

Dans la suite du problème, on suppose α strictement supérieur à zéro.

3/ a/ Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$

$$g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} g_1(x).$$

b/ En déduire que C_α^+ est l'image de C_1^+ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c/ En déduire le maximum de g_α.

4/ Soit S_α l'application du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe:

$$z' = -\alpha^2 \bar{z}.$$

a/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S_α

b/ Montrer que C_α^- est l'image de C_α^+ par S_α.

5/ Construire point par point C_2 à partir de C_1.

PARTIE C

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2U_{n+1} = g_\alpha(U_n)$

1/ Résoudre l'inéquation $g_\alpha(x) > 0$ et l'inéquation $g_\alpha(x) - 2x > 0$.

2/ Déterminer U_0 pour que la suite (U_n) soit constante.

3/ On choisit $U_0 \in]0; \frac{1}{\alpha}[$ et $U_0 \neq \frac{1}{\alpha e}$

a./ Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < U_n < \frac{1}{\alpha e}.$$

b./ Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

c./ En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

PROBLEME N°35

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1./ a./ Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

b./ Tracer la courbe (C) représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2./ Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, f vérifie la relation : $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$.

3./ On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 2y' + y = 0$$

a./ On pose pour tout x réel $U(x) = e^{x}h(x)$ où h est une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que h est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x réel

$$U''(x) = 0.$$

b./ Résoudre l'équation différentielle $z'' = 0$ où z est une fonction réelle quelconque et déterminer les solutions de (E)

c./ Démontrer que les conditions initiales $h(0) = \alpha$ et $h'(0) = \beta$ où α et β sont des réels, déterminent une solution unique de (E).

PARTIE B

Pour λ nombre réel donné, on considère les fonctions g_λ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_\lambda(x) = \left[(\lambda+1)x+1\right]e^{-x}$$

1./ Démontrer qu'il existe des valeurs de α et β définies dans A./ 3-c./ pour lesquelles g_λ est solution de (E).

2./ On suppose dans la suite que $\lambda \neq -1$.

a./ Discuter suivant les valeurs de λ les limites de g_λ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b./ Etudier suivant les valeurs de λ, le sens de variation de g_λ et faire dans chaque cas le tableau de variations.

c./ On appelle (Γ_λ) la courbe représentative de g_λ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Tracer sur la figure précédente la courbe $(\Gamma_{-1/2})$.

d./ Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (γ) des points M du plan par lesquels il passe au moins une courbe

(Γ_λ) tel que la tangente en M à (Γ_λ) soit parallèle à l'axe des abscisses.

3°/ Montrer que pour tout λ de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ l'équation $g_\lambda(x)=1$ a deux solutions et que la solution non nulle a même signe que λ.

PROBLEME N° 36

PARTIE A

Cette première partie a trait à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants.

On appelle E l'ensemble des fonctions numériques f admettant des dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$(x-1)y''-xy'+y=0.$$

1°/ Montrer que si f appartient à E, alors $f^{(3)}=f''$, puis que f'' est solution d'équation différentielle de la forme $y'-my=0$ $(m\in\mathbb{R})$.

2°/ A l'aide de deux intégrations montrer que les éléments de E sont de la forme $f(x)=ax+be^x$, $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

PARTIE B

Pour tout couple $(a;b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$, on appelle $f_{a,b}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f_{a,b}(x)=ax+be^x$. On désigne par $(C_{a,b})$ la courbe représentative de $f_{a,b}$.

1°/ Etudier la fonction $f_{1,1}$ et construire la courbe $(C_{1,1})$ que l'on notera (C). (on prendra comme unité 2cm sur chaque axe).

2°/ Etudier, suivant les valeurs de a et b, les variations de $f_{a,b}$. On sera amené à distinguer quatre cas. Donner le tableau de variations pour chaque cas.

3°/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Pour $(\alpha;\beta)$ donné dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on considère l'application $\varphi_{\alpha,\beta}$ de P dans P dont l'expression analytique relativement à $(O,\vec{i},\vec{j})$ est :

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=\alpha x+\beta y. \end{cases}$$

Montrer que toute courbe $(C_{a,b})$ est l'image de (C) par une transformation $\varphi_{\alpha,\beta}$ que l'on précisera. En déduire le résultat suivant : $(C_{a,b})$ et $C_{a',b'}$ étant données, il existe une transformation $\varphi_{\alpha,\beta}$ telle que :

$$\varphi_{\alpha,\beta}(C_{a,b})=(C_{a',b'})$$

4°/ Dans cette question, on fixe la va_

leur de a.

a/ Montrer que toutes les courbes $(C_{a,b})$ ont la même asymptote (D_a). Déterminer l'application $\varphi_{\alpha,\beta}$ qui transforme $(C_{a,a})$ en $(C_{a,b})$

b/ On appelle M_b le point de $(C_{a,b})$ d'abscisse 0. Déterminer l'équation de la tangente (T_b) à $(C_{a,b})$ au point M_b. Montrer que lorsque b décrit $\mathbb{R}^*$, toutes les droites (T_b) sont concourantes. Préciser leur point de concours et vérifier qu'il appartient à (D_a).

c/ Pour x_0 fixé, soit N_b le point d'abscisse x_0 de $(C_{a,b})$. Montrer que toutes les tangentes aux courbes $(C_{a,b})$ en N_b sont concourantes en un point situé sur (D_a).

d/ Tracer sur le même dessin les courbes C; $C_{1;2}$; $C_{1,3}$, $C_{1,-1}$ et $C_{1,-2}$. On précisera les tangentes aux points d'abscisse 0.

PROBLEME N° 37

PARTIE A

On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions f numériques d'une variable réelle définies sur $]-1;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle et vérifiant

$\forall x \in]-1;+\infty[, (1+x)f'(x)+f(x) = 1+\ln(1+x)$

1/ Soit $f \in F$ et soit g définie par : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $g(x) = (1+x)f(x)$.

Démontrer que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par :

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $h(x) = 1+\ln(1+x)$

Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h.

Démontrer que la fonction f_1 définie par : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f_1(x) = \dfrac{g_1(x)}{1+x}$ est un élément de F.

2/ a/ Déterminer des réels a et b tels que : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$

b/ A l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de la fonction h.

3/ En déduire l'ensemble F.

PARTIE B

On considère l'ensemble des fonctions f_k de $]-1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $f_k(x) = \ln(1+x) + \dfrac{k}{1+x}$

k étant un paramètre réel.

1/ Discuter suivant les valeurs de k le sens de variations des fonctions f_k.

2/ Tracer avec soins, dans un même repère les représentations graphiques des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

PARTIE C

1/ Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout x de $]-1;+\infty[$

$$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

2/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1]$ $\frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$. En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la double inégalité

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

3/ On considère la suite (W_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; f_0(1) = W_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$

En déduire que la suite (W_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera.

Trouver un entier n_0 tel que

$\ln 2 - W_{n_0} < 0,1$.

PROBLEME N°38

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité 1cm.

1/ Etudier suivant les valeurs de x, le signe du polynôme $x^2 - 6x + 5$ et l'expression de $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

2/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en particulier aux points d'abscisse 1 et 5 ; la courbe admet-elle des tangentes en ces points ?

3/ Etudier les variations de f.

4/ Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de (C).

5/ Démontrer que (C) admet deux asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées ; l'une à $+\infty$ et l'autre à $-\infty$

6/ Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de (C) avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.

7/ Soit I le point de coordonnées $(3;0)$. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;5]$, le point $M(x; f(x))$

est à une distance constante de I.

En déduire la nature géométrique de (C) lorsque $1 \leq x \leq 5$.

8/ Tracer (C) et ses asymptotes.

Faire figurer A et B.

9/ Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan défini par : $1 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq f(x)$

En déduire $\int_1^5 f(x)\,dx$

PROBLEME N° 39

PARTIE A

Démontrer que pour tout réel x on a :

$$\sqrt{x^2+3} > |x|$$

En déduire le signe de $\sqrt{x^2+3} + x$ et celui de $\sqrt{x^2+3} - x$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ a/ Montrer que f est continue en $x_0 = 1$

b/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

c/ Etudier le sens de variations de f sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

d/ Compléter l'étude des variations de f.

e/ Préciser le comportement de la courbe (C) en $x_0 = 1$ et construire (C).

2/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$

a/ Montrer que g admet une application réciproque notée g^{-1}

b/ Définir explicitement g^{-1}

c/ Construire la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même plan que (C).

d/ Déterminer la fonction G primitive de g^{-1} telle que $G(0) = 0$

e/ Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les équations : $x = -1$ et $x = 1$

Calculer A en utilisant la courbe (Γ)

PARTIE C

On désigne par I l'intervalle $[1 ; 2]$

On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

1/ a/ Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I

b/ Démontrer que pour tout x de I on a $f(x)$ dans I.

c/ Démontrer que pour tout x de I on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d/ En déduire que pour tout x de I on a : $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

2/ a/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

b/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$$

c/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d/ Déduire de 2.c que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

PROBLEME N°40

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x-\sqrt{|x^2+2x-3|}$$

(C) sa courbe représentative.

1/ f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

2/ a/ Etudier la dérivabilité de f au point -3.

b/ Etudier la dérivabilité de f au point 1.

3/ Calculer le nombre dérivé de f en un point x tel que :

a/ $x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

b/ $x \in]-3;1[$

4/ a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\sqrt{x^2+2x-3}-x-1<0$$

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{-x^2-2x+3}+x+1<0$$

c/ En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.

5/ a/ Calculer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$ et donner le tableau de variations de f.

b/ Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations

c/ Tracer la courbe (C).

6/ Soit h la restriction de f à $]-\infty;-3]$.

a/ Montrer que h est une bijection de $]-\infty;-3]$ sur un intervalle J à préciser

b/ Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Calculer $h^{-1}(-5)$ puis trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point de coordonnées $(-5; h^{-1}(-5))$

c/ Construire (Γ) sur le même graphique que (C).

7/ Soit (C') la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) de la fonction :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x+\sqrt{x^2+2x-3}$$

et (C_1) celle de la restriction de f à $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

a/ Montrer que $(C') = S_H(C_1)$ où H est le milieu du segment $[AB]$ $A(-3;-3)$, $B(1;1)$

b/ Caractériser analytiquement $(C_1) \cup (C')$.

c/ Construire $(C_1) \cup (C')$ sur une autre figure.

CORRIGES DES PROBLEMES DE SYNTHESE

CORRIGES DES PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLEME N°1

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1/ Etudions le sens de variation de g

$D_g =]0;+\infty[$

$x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

g est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x>0,\ g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}$

$\forall x>0,\ g'(x) < 0$; g est décroissante sur $]0;+\infty[$

2/ Calculons g(1) et g(2).

$g(1) = \frac{2}{3} - \ln 1 = \frac{2}{3}$

$g(2) = \frac{3}{5} - \ln 2$

$g(1) = \frac{2}{3}$	$g(2) = \frac{3}{5} - \ln 2$

Déduisons-en que l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans $]0;+\infty[$

g est continue, monotone, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ avec:

$\lim\limits_{x \to 0^>} g(x) = +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^>} \frac{x+1}{2x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^>} \ln x = -\infty \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right.$

g définit donc une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$; il existe donc un unique réel α de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$

Conclusion

$\boxed{\text{L'équation } g(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ de l'intervalle }]0;+\infty[}$

Donnons un encadrement de α d'amplitude 0,1

$g(1) = \frac{2}{3} > 0$ $g(2) = \frac{3}{5} - \ln 2 \simeq -0{,}09 < 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq \alpha \leq 2$ d'après le théorème des valeurs intermédiaire.

$g(\frac{3}{2}) = 0{,}219 > 0 \Leftrightarrow 1{,}5 < \alpha < 2$

$g(1{,}75) = 0{,}514 > 0 \Leftrightarrow 1{,}75 < \alpha < 2$

$g(1{,}875) = -0{,}023 < 0 \Leftrightarrow 1{,}75 < \alpha < 1{,}875$

Conclusion: De proche en proche on a:

$\boxed{1{,}8 < \alpha < 1{,}9}$

3/ Déduisons-en le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On sait que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$0 < x < \alpha \Rightarrow g(x) > 0$; $g(\alpha) = 0$ et $x > \alpha \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	−	

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm sur (Ox), 4cm sur (Oy))

1-/ <u>Etudions les limites de f en 0 et en $+\infty$</u>

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2\ln x}{x^2+x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\ln x$$

$$= -\infty \text{ car } \left|\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x^2+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1}\cdot\frac{\ln x}{x}$$

$$= 0 \text{ car } \left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2-/ <u>Montrons que pour tout $x>0$,</u>

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x).$$

$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, $x \mapsto x^2+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0, x^2+x \neq 0$

La fonction f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$:

$$f'(x) = 2\,\frac{\frac{1}{x}(x^2+x)-(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$= 2\,\frac{x+1-(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$= 2(2x+1)\,\frac{\frac{x+1}{2x+1}-\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x)$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x)}$$

<u>Déduisons-en le signe de $f'(x)$</u>

$\forall x>0$, $\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}>0$; $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$.

Signe de $f'(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

3-/ <u>Dressons le tableau de variations de f et montrons que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$</u>

<u>Tableau de variations de f</u>

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Montrons que $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

On sait que: $g(\alpha)=0 \iff \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1} - \ln\alpha = 0$

$\iff \ln\alpha = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

$f(\alpha) = \dfrac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$

$= \dfrac{2}{\alpha(\alpha+1)}\ln\alpha = \dfrac{2}{\alpha(\alpha+1)} \cdot \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}}$$

4/ Traçons la courbe $(\mathscr{C})$.

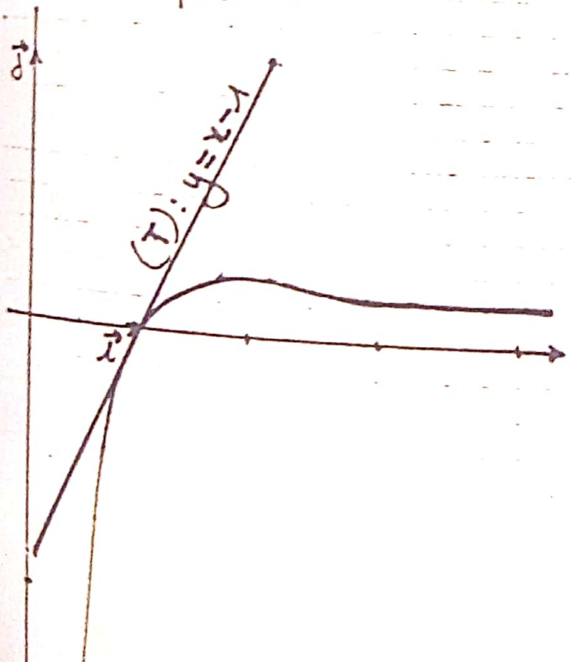
Tangente (T) au point d'abscisse 1

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = \dfrac{2\times 3}{2^2} \cdot \dfrac{2}{3} = 1$; $f(1) = 0$

$$\boxed{(T): y = x-1}$$

$\alpha \simeq 1{,}85 \quad f(\alpha) \simeq 0{,}23$



PARTIE C

1-/ a- Déterminons une primitive sur l'intervalle $]1;+\infty[$ de la fonction: $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

Posons $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$= \dfrac{1}{x}\ln x$

$= u'(x)\cdot u(x)$ avec $u(x) = \ln x$

Soit H une primitive de h on a:

$$\boxed{H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2}$$

b/ Montrons que pour tout $x \geq 1$ on a: $f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$

$\forall x \geq 1$, $x+1 \geq 2 \iff x(x+1) \geq 2x$ car $x \geq 1$

$\iff \dfrac{1}{x^2+x} \leq \dfrac{1}{2x}$ car

$t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \dfrac{2}{x^2+x} \leq \dfrac{1}{x}$

$\iff \dfrac{2\ln x}{x^2+x} \leq \dfrac{\ln x}{x}$ car $\forall x \geq 1$, $\ln x \geq 0$

Conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geq 1 \text{ on a: } f(x) \leq \frac{\ln x}{x}}$$

2-/ Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule pour $x=1$

Sans calculer F, montrons que pour tout $x \geq 1$ on a: $F(x) \leq \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

On sait que:

$\forall t \geq 1$, $f(t) \leq \dfrac{\ln t}{t}$

$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$

$\Leftrightarrow \left[F(t)\right]_1^x \leq \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x$

$\Leftrightarrow F(x) - F(1) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

or $F(1) = 0$ et $\ln 1 = 0$

On a donc : $F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Conclusion

$\boxed{\text{Pour tout } x \geq 1 \text{ on a: } F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2}$

PROBLEME N°2

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

1/ Etudions les variations de g.

$D_g =]0;+\infty[$

Limites de g aux bornes de D_g

$\lim\limits_{x \to 0^>} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^>} x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$

$= \lim\limits_{x \to 0^>} x^2 - \frac{1 + 4x \cdot x\ln x}{x^2}$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^>} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^>} x\ln x = 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2} + x\left(x - 4\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^>} g(x) = -\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

Dérivée

$x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto -4\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction g étant la somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$\forall x > 0,\ g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$

$g'(x) = \frac{2(x^4 - 2x^2 + 1)}{x^3}$

$g'(x) = 2\frac{(x^2-1)^2}{x^3}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x > 0, \begin{cases} (x^2-1)^2 \geq 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) \geq 0$

Sens de variation de g

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Tableau de variation de g:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Précisons $g(1)$: $\boxed{g(1)=0}$

2/ Déduisons-en le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$

$\forall x \in]0;1[,\ g(x)<0$

$\forall x \in]1;+\infty[,\ g(x)>0.$

PARTIE B: Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$$

1/ Montrons que, pour tout $x>0$, $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x>0,\ \frac{1}{x}>0\ ;\ \ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

$$\forall x>0,\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\left[(-\ln x)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4}x^2-(\ln x)^2$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2=f(x)$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2/ Déterminons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}+x^2\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$$

$=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

Déterminons la limite de f en 0

1ère méthode

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$$

$$=\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{4}-(x\ln x)^2\right]$$

$=+\infty$ car $\lim_{x\underset{>}{\to}0} x^2=0$, $\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\underset{>}{\to}0} x\ln x=0$

$$\boxed{\lim_{x\underset{>}{\to}0} f(x)=+\infty}$$

2e méthode

Posons $X=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{X}$

si $x\underset{>}{\to}0$ alors $X\to+\infty$

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{X\to+\infty} f\left(\frac{1}{X}\right) \text{ or } f\left(\frac{1}{X}\right)=f(X)$$

$$=\lim_{X\to+\infty} f(X)=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\underset{>}{\to}0} f(x)=+\infty}$$

3/ Montrons que pour tout réel $x>0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$$

$x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$; donc f est dérivable car elle est la combinaison linéaire de fonctions dérivables, sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{x}\ln x$$

$$= \frac{1}{2x}\left(x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x\right) = \frac{1}{2x}g(x)$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)}$$

En utilisant la partie A, étudions le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

$\forall x>0$, $\frac{1}{2x}>0$; $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

D'après A-2 on a :

$\forall x \in]0;1[$, $f'(x)<0$; f est donc décroissante sur $]0;1[$

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x)>0$; f est donc croissante sur $]1;+\infty[$; $f(1)=0$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$+\infty$

4/ Construction de la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 5cm)

Etude des branches infinies

$\lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = +\infty$; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe (C)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4x^3} - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^3} + x\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]$$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

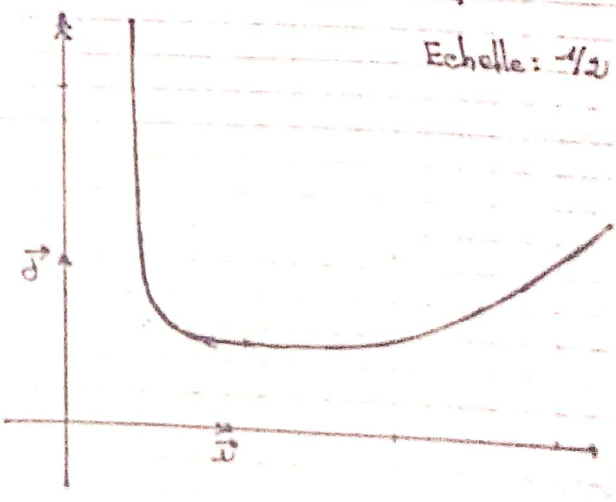
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

La courbe (C) admet une branche infinie de direction (oy).

Traçons (C)

Tableau de valeurs :

x	$1/2$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{17}{16} - (\ln 2)^2$	$1/2$	$\frac{17}{16} - (\ln 2)^2$	



PARTIE C : Résolutions approchées d'équations

1/ Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur $]0;1]$

Posons $h(x) = f(x) - x$, $x \in]0;1]$

Etude du sens de variation de h

$Dh =]0;1]$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc dérivable sur $]0;1]$; h est donc dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $h'(x) = f'(x) - 1$

$\forall x \in]0;1]$, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 \leq -1 < 0$

$\forall x \in]0;1]$, $h'(x) < 0$; h est décroissante sur $]0;1]$

h est monotone, strictement décroissante sur $]0;1]$ avec :

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} h(x) = +\infty$ et $h(1) = f(1) - 1 = -\frac{1}{2} < 0$

h définit une bijection de $]0;1]$ vers $[-\frac{1}{2};+\infty[$. De plus $0 \in [-\frac{1}{2};+\infty[$; il existe donc un unique réel α de $]0;1]$ tel que $h(\alpha) = 0$

or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Conclusion

$\boxed{\text{L'équation } f(x)=x \text{ admet une seule solution sur }]0;1], \text{ notée } \alpha.}$

2/ Montrons que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

On sait que pour tout $x>0$, $f(x) = f(\frac{1}{x})$

$f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$ (1)

Posons $X = \frac{1}{x}$

(1) $\Leftrightarrow f(X) = X$; X existe, est unique et appartient à $]0;1]$

$X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$. $0 < X < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{X} > 1$

L'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet donc une solution sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Soit β cette solution.

Montrons que $\alpha.\beta = 1$.

L'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour solution β.

$\Leftrightarrow f(\beta) = \frac{1}{\beta}$ ... $f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta}$ est solution de l'équation $f(x) = x$

or l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$

$$\boxed{\alpha\beta = 1}$$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. Déduction d'un encadrement de ...

$f(2) - \frac{1}{2} = -0,08$ $\quad f(3) - \frac{1}{3} = 0,73$

$f(2,5) - \frac{1}{2,5} = 0,36$ $\quad f(2,25) - \frac{1}{2,25} = 0,14$

De proche en proche on a :

$f(2,015625) - \frac{1}{2,015625} = 0,029$

On en déduit que : $\boxed{2 < \beta < 2,01}$

d'où : $\boxed{0,49 < \alpha < 0,5}$

PROBLEME N°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.
Soit f_a la fonction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ et $(\mathcal{C}_a)$ sa courbe représentative.

1-/ a- Calculons $f_a(1)$, $f_a(a)$, $f_a(a^n)$ où n est un entier relatif.

$f_a(1) = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0$; $f_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$

$f_a(a^n) = \frac{\ln a^n}{\ln a} = \frac{n \ln a}{\ln a} = n.$

$f_a(1) = 0$	$f_a(a) = 1$	$f_a(a^n) = n$

b-/ Démontrons que pour tous nombres réels strictement positifs x, y et tout entier relatif n on a :

* $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.

$f_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a}$

$= \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = f_a(x) + f_a(y)$

$$\boxed{f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)}$$

* $f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)$

$f_a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln(x/y)}{\ln a} = \frac{\ln x - \ln y}{\ln a}$

$= \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln y}{\ln a}$

$$\boxed{f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)}$$

* $f_a(x^n) = n f_a(x)$

$f_a(x^n) = \frac{\ln x^n}{\ln a} = n \frac{\ln x}{\ln a} = n f_a(x)$

$$\boxed{f_a(x^n) = n f_a(x)}$$

* $f_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f_a(x)$

$f_a(\sqrt{x}) = \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln a} = \frac{1}{2} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{2} f_a(x)$

$$\boxed{f_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f_a(x)}$$

c-/ Démontrons que pour tous nombres réels strictement positifs a, b et x on a :

* $f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)}$ * $f_a(x) = f_a(b) \cdot f_b(x)$

$f_a(b) = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{1}{\frac{\ln a}{\ln b}} = \frac{1}{f_b(a)}$

$f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b}$

$= f_a(b) \cdot f_b(x)$

$$\boxed{f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)}} \quad \boxed{f_a(x) = f_a(b) \cdot f_b(x)}$$

2-/ a-/ Etudions la fonction f_a et dressons son tableau de variation pour $0 < a < 1$ et $a > 1$

$f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

1er cas $0 < a < 1$: $\ln a < 0$

$D_{f_a} =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln a} =$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \ln a < 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$= -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \text{et} \\ \ln a < 0 \end{array} \right.$

Dérivée

$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

donc f_a est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$

$\forall x > 0$, $f_a'(x) < 0$ car $\ln a < 0$

f_a est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_a

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	||	$-$
$f_a(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

2e cas $a > 1$ $\ln a > 0$

$D_{f_a} =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$= -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \ln a > 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \text{et} \\ \ln a > 0 \end{array} \right.$

$f_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

$\forall x > 0$, $f_a'(x) > 0$ car $\ln a > 0$.

f_a est donc croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_a

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	||	$+$
$f_a(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

b/ Démontrons que f_a est une bijection

Pour tout a strictement positif et différent de 1, f_a est continue, monotone, sur $]0;+\infty[$ avec :

$f_a(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$. f_a est donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

c/ Démontrons que $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$

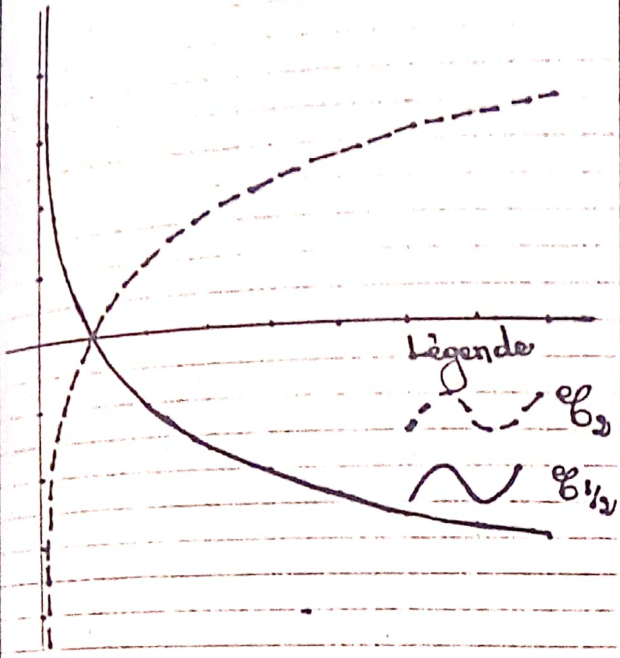
$f_{\frac{1}{a}}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} = \dfrac{\ln x}{-\ln a} = -\dfrac{\ln x}{\ln a}$

$\boxed{f_{\frac{1}{a}}(x) = -f_a(x)}$ $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$.

Déduisons-en la position relative de $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{a}})$

$(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{a}})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

3°/ Traçons les courbes $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$



PROBLEME N° 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout nombre réel m, on définit la fonction f_m par :

$$f_m(x) = \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|.$$

On désigne par $(\mathscr{C}m)$ la courbe représentative de f_m.

1°/ Etudions f_m et traçons $(\mathscr{C}m)$ dans les cas suivants : $m=0$, $m=-1$ et $m=1$

1er cas $m=0$

$f_0(x) = -\ln|x|$

$Df_0 = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -\ln|x|$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$; $X=|x|$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to0} f_0(x) = \lim\limits_{x\to0} -\ln|x|$

$= \lim\limits_{\substack{X\to0\\ >}} -\ln X = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}} f_0(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f_0(x) = +\infty}$

Dérivée

$\forall x\neq0$, $|x|>0$; f_0 est continue et dérivable sur Df_0 et $\forall x\neq0$:

$f_0'(x) = -\frac{1}{x}$.

Signe de $f_0'(x)$

$\forall x<0$, $f_0'(x)>0$; $\forall x>0$, $f_0'(x)<0$

Sens de variation de f_0

f_0 est croissante sur $]-\infty;0[$ et croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		+	‖	−	
$f_0(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Branches infinies de f_0.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln|x|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln(-x)}{x}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_0(x)}{x} = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln|x|}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$

$(\mathscr{C}_0)$ admet une branche infinie de direction (ox) à $-\infty$ comme à $+\infty$.

- $\lim_{x \to 0} f_0(x) = +\infty$; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_0)$.

2e cas $m = -1$

$f_{-1}(x) = \ln\left|\frac{-x+1}{x-1}\right| = \ln 1 = 0, \ x \neq 1$

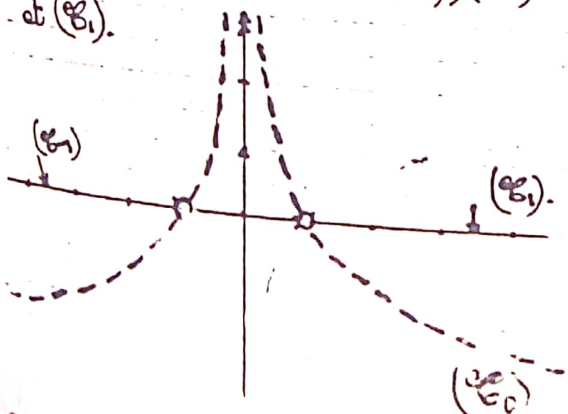
$(\mathscr{C}_{-1})$ est l'axe des abscisses privé du point d'abscisse 1

3e cas $m = 1$

$f_1(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x+1}\right| = \ln 1 = 0, \ x \neq -1$

$(\mathscr{C}_1)$ est l'axe des abscisses privé du point d'abscisse -1

Construction des courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_{-1})$ et $(\mathscr{C}_1)$.



Dans la suite, on suppose que $m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$

2-/ a-/ Déterminons les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f_m

Soit D_m le domaine de définition de f_m

$D_m = \{x \in \mathbb{R} / x+m \neq 0 \text{ et } mx+1 \neq 0\}$

Posons $x+m = 0 \Leftrightarrow x = -m$

$mx+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$

$$\boxed{D_m = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{m}; -m\right\}}$$

$\forall x \in D_m$, $x \mapsto \left|\frac{mx+1}{x+m}\right|$ est continue et dérivable. De plus $\forall x \in D_m$, $\left|\frac{mx+1}{x+m}\right| > 0$ or $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$;

Les ensembles de continuité et de dérivabilité sont donc confondus à D_m

b-/ Démontrons que les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent par deux points fixes

$f_m(1) = \ln\left|\frac{m+1}{m+1}\right| = 0$ pour $m \neq -1$

$f_m(-1) = \ln\left|\frac{-m+1}{m-1}\right| = \ln|-1| = \ln 1 = 0$ pour $m \neq 1$

$$\boxed{\text{Toutes les courbes } (\mathscr{C}_m) \text{ à l'exception de } (\mathscr{C}_{-1}) \text{ et } (\mathscr{C}_1) \text{ passent par deux points fixes } A(-1;0) \text{ et } B(1;0)}$$

3-/ a-/ Démontrons que $D_m = D_{\frac{1}{m}}$

$D_{\frac{1}{m}} = \left\{x \in \mathbb{R} / x + \frac{1}{m} \neq 0 \text{ et } \frac{1}{m}x + 1 \neq 0\right\}$

$x + \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$

$\frac{1}{m}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -m.$

$\mathcal{D}_{\frac{1}{m}} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{m}; -m\right\} = \mathcal{D}_m$.

$$\boxed{\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{\frac{1}{m}}}$$

- Démontrons que pour tout élément x de $\mathcal{D}_m$ on a : $f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$

$f_{\frac{1}{m}}(x) = \ln\left|\dfrac{\frac{1}{m}x+1}{x+\frac{1}{m}}\right|$

$= \ln\left|\dfrac{x+m}{mx+1}\right| = -\ln\left|\dfrac{mx+1}{x+m}\right| = -f_m(x)$

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_m,\ f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)}$$

Déduisons-en la position relative de (C_m) et $(C_{\frac{1}{m}})$.

$\forall x \in \mathcal{D}_m,\ f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$.

On en déduit que les courbes (C_m) et $(C_{\frac{1}{m}})$ sont symétriques par rapport à l'axe (Ox)

b/ Démontrons que :

* $(x \in \mathcal{D}_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in \mathcal{D}_m)$

$x \in \mathcal{D}_{-m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{m} \\ \text{et} \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \neq -\frac{1}{m} \\ \text{et} \\ -x \neq -m \end{cases}$

$\Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}_m$

$$\boxed{(x \in \mathcal{D}_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in \mathcal{D}_m)}$$

* $\forall x \in \mathcal{D}_{-m},\ f_{-m}(x) = f_m(-x)$

$\forall x \in \mathcal{D}_{-m},\ f_{-m}(x) = \ln\left|\dfrac{-mx+1}{x-m}\right|$

$= \ln\left|\dfrac{m(-x)+1}{-(-x+m)}\right|$

$\forall x \in \mathcal{D}_{-m},\ f_{-m}(x) = \ln\left|\dfrac{m(-x)+1}{-x+m}\right|$

$= f_m(-x)$

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_{-m},\ f_{-m}(x) = f_m(-x)}$$

Déduisons-en la position relative des courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{-m})$

$\forall x \in \mathcal{D}_{-m},\ f_{-m}(x) = f_m(-x)$

On en déduit que :

Les courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{-m})$ sont symétriques par rapport à l'axe (Oy)

c/ Déduisons des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer $(\mathcal{C}_m)$ pour $m > 1$ pour obtenir toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$

$m > 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \in]0;1[\\ -\frac{1}{m} \in]-1;0[\\ -m \in]-\infty;-1[\end{cases}$ et $\begin{cases} \mathcal{C}_{\frac{1}{m}} = S_{Ox}(\mathcal{C}_m) \\ (\mathcal{C}_{-m}) = S_{Oy}(\mathcal{C}_m) \end{cases}$

Il suffit donc d'étudier f_m et tracer $(\mathcal{C}_m)$ pour $m > 1$ pour obtenir toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$

4-/ On suppose dans cette question que $m > 1$

a-/ Etudions f_m et dressons son tableau de variation

$\mathcal{D}_m = \mathbb{R} - \left\{-m; -\frac{1}{m}\right\}$

<u>Limites de f_m aux bornes de D_m</u>

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left|\dfrac{mx+1}{x+m}\right| = \ln|m|$

$= \ln m$ car $m>1$

$\lim\limits_{x\to -m} f_m(x) = \lim\limits_{x\to -m} \ln\left|\dfrac{mx+1}{x+m}\right|$

Posons $U(x) = \left|\dfrac{mx+1}{x+m}\right|$

$\lim\limits_{x\to -m} U(x) = +\infty$ car $\begin{cases} mx+1 \to -m^2+1 \neq 0 \\ x+m \to 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -m} \ln\left|\dfrac{mx+1}{x+m}\right| = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{m}} f_m(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{m}} \ln\left|\dfrac{mx+1}{x+m}\right|$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{m}} U(x) = 0^+$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = \ln m$

$\lim\limits_{x\to -m} f_m(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{m}} f_m(x) = -\infty$

<u>Dérivée</u>

$\forall x \in D_m$, $f'_m(x) = \dfrac{m^2-1}{(x+m)(mx+1)}$

$\forall x \in D_m$ et $m>1$, $m^2-1>0$

$f'_m(x)$ a donc le signe de $(x+m)(mx+1)$

Signe de $f'_m(x)$

x	$-\infty$		$-m$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

<u>Sens de variation de f_m</u>

$\forall x \in]-\infty ; -m[\cup]-1/m , +\infty[$, $f'_m(x) > 0$

f_m est donc croissante sur $]-\infty, -m[$ et sur $]-1/m, +\infty[$.

$\forall x \in]-m ; -1/m[$, $f'_m(x) < 0$; f_m est décroissante sur $]-m ; -1/m[$

<u>Tableau de variation de f_m</u>

x	$-\infty$		$-m$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f_m(x)$	$\ln m$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\ln m$

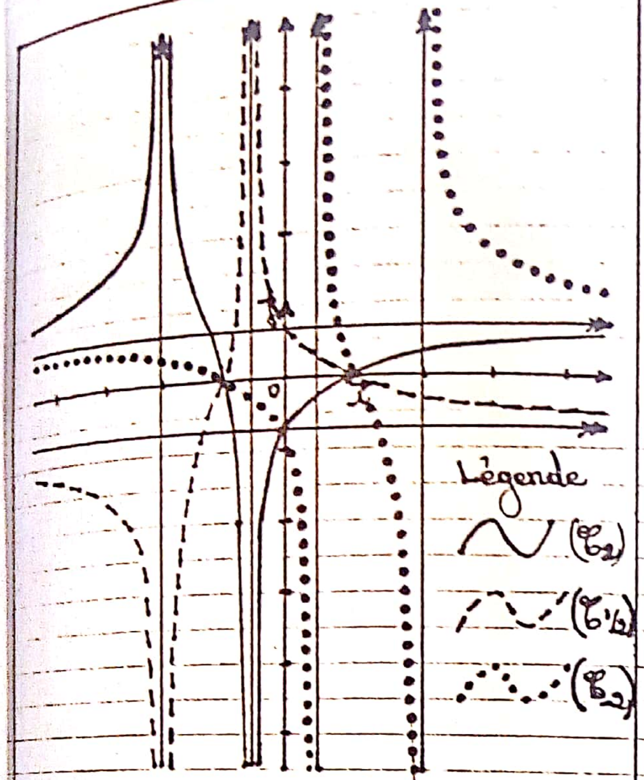
b-/ <u>Déduisons-en le tracé de $(\mathscr{C}_2)$</u>, $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$ et $(\mathscr{C}_{-2})$.

<u>Tableau de variation de f_2</u>

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		$+\infty$
$f'_2(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f_2(x)$	$\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\ln 2$

La courbe $(\mathscr{C}_2)$ admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = -2$ et une horizontale d'équation $y = \ln 2$

$(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}) = S_{Ox}(\mathscr{C}_2)$; $(\mathscr{C}_{-2}) = S_{Oy}(\mathscr{C}_2)$!



Soit Ω le point d'intersection de $(\mathscr{C}_2)$ et de son asymptote horizontale.

Démontrons que Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_2)$

Coordonnées de Ω

$$\begin{cases} y = f_2(x) \\ y = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow f_2(x) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x+2}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} = 2 \quad (a) \\ \text{ou} \\ \frac{2x+1}{x+2} = -2 \quad (b) \end{cases}$$

(a) $\Leftrightarrow 2x+1 = 2x+4$ impossible.

(b) $\Leftrightarrow 2x+1 = -2x-4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$

$\Omega\left(-\frac{5}{4}; \ln 2\right)$

On sait que $A(a;b)$ est centre de symétrie de (C_f) ssi: $f(2a-x)+f(x) = 2b$

$$f_2\left[2\left(-\frac{5}{4}\right)-x\right] = f_2\left(-\frac{5}{2}-x\right)$$

$$= \ln\left|\frac{-5-2x+1}{-\frac{5}{2}-x+2}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{4(x+2)}{2x+1}\right|$$

$$= \ln 4 + \ln\left|\frac{x+2}{2x+1}\right|$$

$$f_2\left(-\frac{5}{2}-x\right) = 2\ln 2 - f_2(x)$$

$$f_2\left(-\frac{5}{2}-x\right) + f_2(x) = 2\ln 2$$

$\boxed{\Omega\left(-\frac{5}{4}; \ln 2\right) \text{ est un centre de symétrie de la courbe } (\mathscr{C}_2)}$

c-/ Soit g la restriction de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$

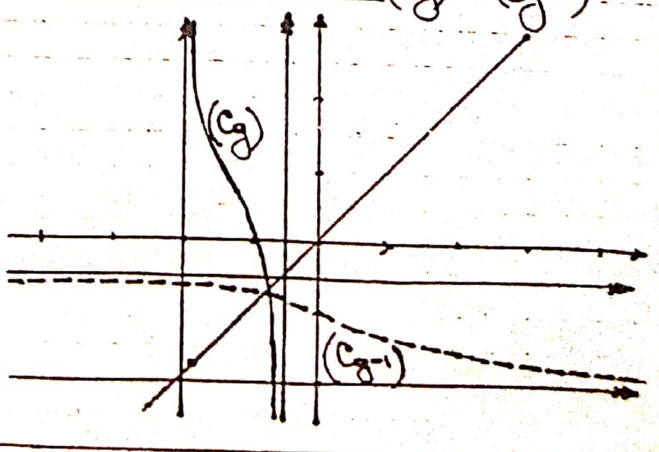
Démontrons que g réalise une bijection de $]-2; -\frac{1}{2}[$ vers $\mathbb{R}$

La restriction g de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$ est continue, monotone, strictement décroissante sur $]-2; -\frac{1}{2}[$ avec :

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ <}} g(x) = -\infty$$

$\boxed{g \text{ définit donc une bijection }]-2; -\tfrac{1}{2}[\text{ vers } \mathbb{R} = g\left(]-2; -\tfrac{1}{2}[\right)}$

Construction des courbes (C_g) et $(C_{g^{-1}})$



PROBLEME N°5

1/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

a/ Etudions f et dressons son tableau de variation

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[}$$

Limites de f aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pm\infty} |x-1| = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

$= \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln(1-x)$

$= \lim\limits_{X \underset{>}{\to} 0} \frac{-1+X}{X} + \ln X$, $X = 1-x$

$= \lim\limits_{X \underset{>}{\to} 0} \frac{X-1+X\ln X}{X}$

$= -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{X \underset{>}{\to} 0} X\ln X = 0 \\ X-1 \to -1 < 0 \\ X \to 0 \\ X > 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

$= \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{Y \underset{>}{\to} 0} \frac{Y+1}{Y} + \ln Y$, $Y = x-1$

$= \lim\limits_{Y \underset{>}{\to} 0} \frac{Y+1+Y\ln Y}{Y}$,

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{Y \underset{>}{\to} 0} Y\ln Y = 0 \\ Y+1 \to 1 > 0 \\ Y \to 0 \\ Y > 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$.

Dérivée

$\forall x \in D_f$, $|x-1| > 0$

$x \mapsto \ln|x-1|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $|x-1| > 0$ et $t \mapsto \ln t$ dérivable sur $]0; +\infty[$

De plus $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$; f est donc continue et dérivable sur D_f car elle est la somme de deux fonctions continues et dérivables sur D_f

et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$\forall x \in D_f$, $(x-1)^2 > 0$

$f'(x)$ a donc le signe de $x-2$

$f'(x) = 0 \iff x = 2$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Sens de variation de f

$\forall x \in]-\infty;1[\cup]1;2[$, $f'(x) < 0$; f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;2[$

$\forall x \in]2;+\infty[$, $f'(x) > 0$; f est donc strictement croissante sur $]2;+\infty[$

f admet un extrémum local au point d'abscisse 2. $f(2) = 2$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

b/- **Calculons $f(0)$**

$$f(0) = \frac{0}{0-1} + \ln|0-1| = 0$$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Déduisons-en le signe de $f(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

2/ Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x\ln|x-1|$$

a/ **Etudions g.**

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\boxed{D_g = \mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$$

limites de g aux bornes de D_g.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x\ln|x-1|$$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} |x-1| = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln|x-1|$$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} |x-1| = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} x\ln|x-1|$$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1} |x-1| = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} g(x) = -\infty$

Dérivée :

$x \mapsto \ln|x-1|$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$x \mapsto x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$

g est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ car elle est le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$:

$$g'(x) = \ln|x-1| + \frac{x}{x-1} = f(x)$$

$g'(x)$ est du même signe que $f(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Sens de variation de g.

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[,\ g'(x) > 0$

g est croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

$\forall x\ ]0;1[,\ g'(x) < 0$; g est décroissante sur $]0;1[$

g admet un maximum local en 0

$g(0) = 0$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Construction de la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de g.

Etude des branches infinies

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

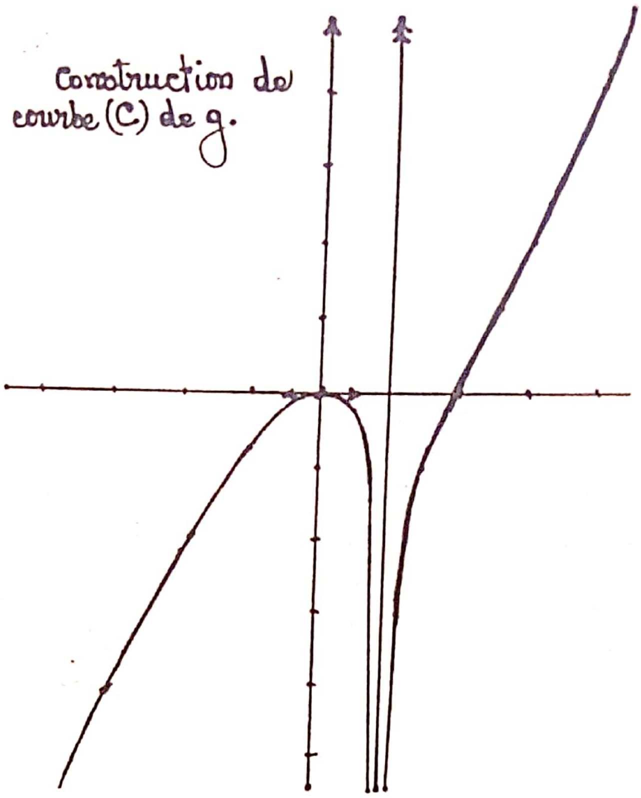
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln|x-1|$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} |x-1| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right.$

la courbe $(\mathscr{C})$ de g possède une direction asymptotique de direct° (oy)

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty$; la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.

Construction de courbe (C) de g.



b/ Soit A le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (OI) d'abscisse non nulle.

$g(x) = 0 \iff x\ln|x-1| = 0$

$\iff x = 0 \ \ \ln|x-1| = 0 \iff |x-1| = 1$

$\iff x = 0$ ou $x = 2$

$A(2;0)$.

Démontrons que A est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$.

$g''(x) = f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

$g''(x) = 0 \iff x = 2 \qquad g(2) = 0$

L'abscisse du point A annule la dérivée de g; A est donc un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$.

Equation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en A.

$(T): y = g'(2)(x-2) + g(2)$

$g'(2) = 2 \qquad g(2) = 0$

$$\boxed{(T) : y = 2(x-2)}$$

3/ On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1;+\infty[$

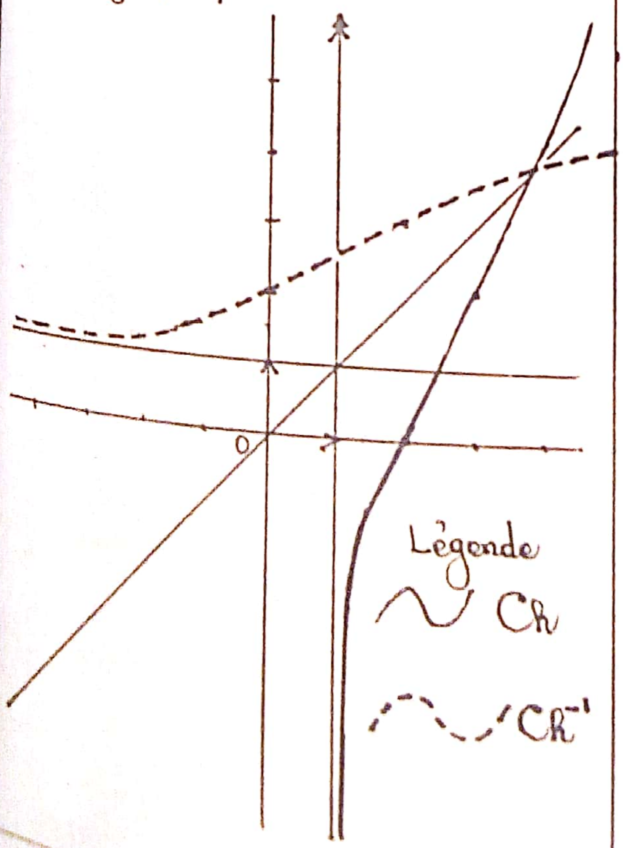
Démontrons que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

h est continue, monotone, strictement croissante sur $]1;+\infty[$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$$h(]1;+\infty[) = \mathbb{R}$$

h est donc une bijection de $]1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Construction des courbes représentatives de h et h^{-1} sur un autre graphique



PROBLEME N°6

PARTIE A

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + \ln|x-1|$

1/ Etude du sens de variation de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$

Posons $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$$

Dérivée

$x \mapsto$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et $\forall x \neq 1$, $|x-1| > 0$. De plus $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$. La fonct° $x \mapsto \ln|x-1|$ est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ d'où f continue et dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x}{x-1}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Sens de variation de f

$\forall x\ ]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$

$\forall x \in]0;1[$, $f'(x) < 0$; f est strictement décroissante sur $]0;1[$

f admet un maximum local au point 0

$f(0) = 0$.

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln|x-1|$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln(1-x)$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -X + \ln(1+X)$, $X = -x$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -X + \ln X + \ln\left(1+\frac{1}{X}\right)$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -X\left(1 - \frac{\ln X}{X}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{X}\right)$

$= -\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{X}\right) = \ln 1 = 0 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln|x-1|$

$= +\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} |x-1| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} x + \ln|x-1|$

$= -\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1} |x-1| = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty \end{array}\right.$

b-/ Montrons que f s'annule pour une valeur α différent de 0, que nous comparerons aux nombres réels $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$

D'après les variations de f on a :

$f(0)=0$; $\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;1[$, $f(x)<0$

De plus la restriction de f à $]1;+\infty[$ est continue, monotone, strictement croissante sur $]1;+\infty[$ avec :

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cette restriction definit donc une bijection de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Il existe donc un unique réel $\alpha > 1$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - 2\ln 2 < 0$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ln 2 > 0$

$f\left(\frac{5}{4}\right) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{5}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

2/ Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J)

a-/ Etudions les branches infinies de (C)

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$; (C) possède une asymptote verticale : $x = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{\ln|x-1|}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{\ln(1-x)}{x}$$
$$=\lim_{X\to+\infty}1-\frac{\ln(1+X)}{X}$$
$$=\lim_{X\to+\infty}1-\frac{\ln X}{X}-\frac{1}{X}\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\ln(x-1)}{x}$
$$=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-x=\lim_{x\to\pm\infty}\ln|x-1|$$
$=+\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim_{x\to\pm\infty}|x-1|=+\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{array}\right.$

La courbe (C) admet une branche parabolique dirigée par la droite d'équat: $y=x$ (la 1ère bissectrice)

b/ <u>Traçons (C) ainsi que les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives</u> $\frac{1}{2}$ et $1-e$

<u>Equations des tangentes</u>

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et (T') la tangente à (C) au point d'abscisse $1-e$ on a:

$(T): y=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})$

$f'(\frac{1}{2})=-1;\ f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\ln 2$

$(T): -(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}-\ln 2=-x+1-\ln 2$

$(T'): y=f'(1-e)(x-1+e)+f(1-e)$

$f'(1-e)=\frac{e-1}{e};\ f(1-e)=2-e$

$(T'): y=\frac{e-1}{e}(x-1+e)+2-e$
$$=\frac{e-1}{e}x+\frac{1}{e}$$

Finalement on a:

$(T): y=-x+1-\ln 2$	$(T'): y=\frac{e-1}{e}x+\frac{1}{e}$

<u>Pour la construction voir page suivante</u>

<u>3/ Soit t un nombre réel de $[0;1[$</u>

<u>Calculons l'aire de la partie du plan définie par: $0\le x\le t$ et $f(x)\le y\le 0$</u>

Soit $A(t)$ cette aire on a:

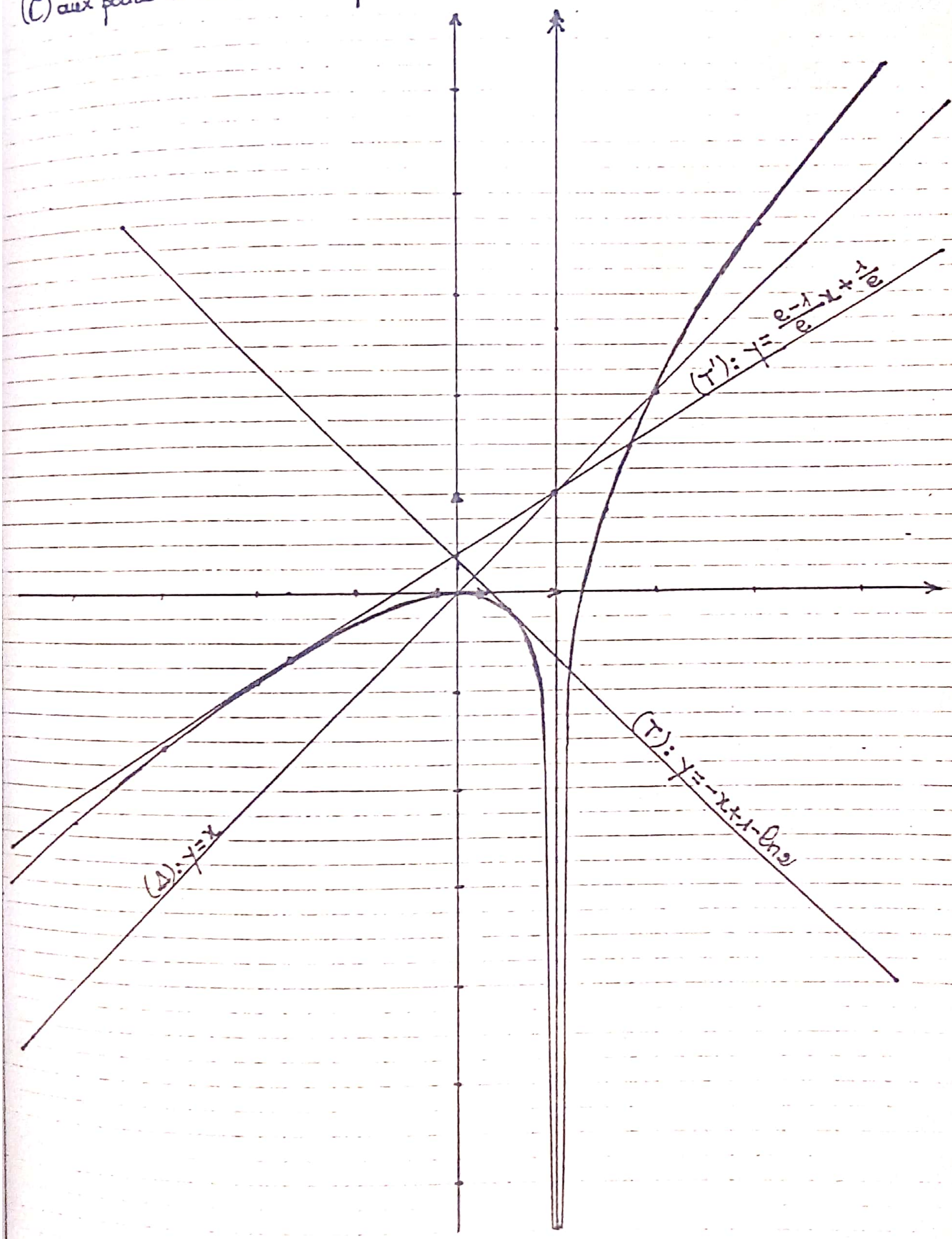
$$A(t)=\int_0^t(-x-\ln|x-1|)\,dx$$
$$=\int_0^t(-x-\ln(1-x))\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^t-\int_0^t\ln(1-x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}t^2-\int_0^t\ln(1-x)\,dx$$

Posons $U(x)=\ln(1-x)\Rightarrow U'(x)=\frac{1}{x-1}$

$V'(x)=1 \Leftrightarrow V(x)=x.$

$$\int_0^t\ln(1-x)\,dx=\left[x\ln(1-x)\right]_0^t-\int_0^t\frac{x}{x-1}\,dx$$
$$=t\ln(1-t)-\int_0^t\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=t\ln(1-t)-\left[x+\ln(|x-1|)\right]_0^t$$

Construction de la courbe (C) representative de f ainsi des tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives $-1/2$ et $1-e$



$$\int_0^t \ln(1-x)dx = t\ln(1-t) - t - \ln|t-1|$$
$$= t\ln(1-t) - t - \ln(1-t)$$

$$\int_0^t \ln(1-x)dx = (t-1)\ln(1-t) - t$$

$$\boxed{A(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + (1-t)\ln(1-t) \text{ unité d'aire}}$$

Calculons la limite de cette aire lorsque t tend vers 1

$\lim\limits_{t \to 1} -\frac{1}{2}t^2 + t = \frac{1}{2}$ (1)

$\lim\limits_{t \to 1} (1-t)\ln(1-t) = \lim\limits_{X \to 0} X\ln X$, $X = 1-t$

$\lim\limits_{t \to 1} (1-t)\ln(1-t) = 0$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 1} A(t) = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\lim_{t \to 1} A(t) = \frac{1}{2} \text{ unité d'aire } = 2cm^2}$$

4/ Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$

a/ Montrons que g admet une bijection réciproque g^{-1}

D'après les variations de f, sa restriction g à $]1;+\infty[$ est continue, monotone strictement croissante sur $]1;+\infty[$ avec : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

g définit donc une bijection de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Conclusion : g admet une bijection réciproque g^{-1}

Ensemble de définition de g^{-1}

$$\boxed{D_{g^{-1}} = \mathbb{R}}$$

b/ Dérivabilité de g^{-1} en 2

On sait que $g(2) = 2 \Leftrightarrow g^{-1}(2) = 2$.

De plus g est dérivable en 2 et $g'(2) \neq 0$

g^{-1} est donc dérivable en 2.

Calculons $(g^{-1})'(2)$

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'[g^{-1}(2)]} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{(g^{-1})'(2) = \frac{1}{2}}$$

PARTIE B

1/ On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 6 + 8i = 0$ (E).

a/ Montrons que (E) admet une solut° imaginaire pure notée z_0 que nous déterminerons.

Posons $z_0 = ai$, $a \in \mathbb{R}^*$

z_0 solution de (E)

$\Leftrightarrow (ai)^3 + (1+i)(ai)^2 + (2+i)ai + 6 + 8i = 0$

$\Leftrightarrow -a^3i - (1+i)a^2 + (-1+2i)a + 6 + 8i = 0$

$\Leftrightarrow (-a^2 - a + 6) + i(-a^3 - a^2 + 2a + 8) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 - a + 6 = 0 & (1) \\ -a^3 - a^2 + 2a + 8 = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a+3)(a-2) = 0$

$\Leftrightarrow a = -3$ ou $a = 2$

$-(-3)^3-(-3)^2+2(-3)+8 = 20 \neq 0$

$-(2)^3-2^2+2\times2+8 = 0$

$\Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow z_0 = 2i$

$\boxed{\text{(E) admet une solution imaginaire pure } z_0 = 2i}$

b/ Résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

Posons $P(z) = z^3+(1+i)z^2+(2+i)z+6+8i$

z_0 solution $\Leftrightarrow$ $P(z)$ peut se mettre sous la forme: $P(z) = (z-2i)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré. Par division euclidienne on a:

$P(z) = (z-2i)\left[z^2+(1+3i)z-4+3i\right]$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ \text{ou} \\ z^2+(1+3i)z-4+3i = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$(3) \Leftrightarrow z^2+(1+3i)z-4+3i = 0$

$\Delta = (1+3i)^2-4(-4+3i)$

$= 8-6i = (3-i)^2$

$z_1 = \dfrac{-1-3i+3-i}{2} = 1-2i$

$z_2 = \dfrac{-1-3i-3+i}{2} = -2-i$

$$\boxed{S = \{2i\,;\,1-2i\,;\,-2-i\}}$$

2/ Soit dans le repère (O, I, J) les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2

a/ Montrons qu'il existe une similitude directe S que nous déterminerons qui transforme A en B et I en C

Posons $z' = az+b$, l'écriture complexe de S.

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(I) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = az_0+b \\ z_2 = az_I+b, \; z_I = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ia+b = 1-2i \\ a+b = -2-i \end{cases} \quad (4)$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i-1 \neq 0$

Il existe donc une similitude S et une seule qui transforme A en B et I en C

$(4) \Leftrightarrow (2i-1)a = 3-i$

$a = \dfrac{-3+i}{1-2i} = \dfrac{(-3+i)(1+2i)}{5}$

$= -1-i$

$b = -2-i+1+i = -1$

$\boxed{\text{L'écriture complexe de S est: } z' = (-1-i)z-1}$

b/ Donnons les éléments géométriques de la similitude directe S.

$a = -1-i \quad b = -1$

$|a| = \sqrt{2} \quad Arg(a) = \dfrac{5\pi}{4}$

Soit Ω le centre de S.

$z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-1}{2+i} = \dfrac{-2+i}{5}$

$\boxed{\text{S est la similitude directe de centre } \Omega \text{ d'affixe } z_\Omega = -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i \text{, de rapport } k = \sqrt{2} \text{ et d'angle } \theta = \frac{5\pi}{4}}$

3-/ A tout point $M(x;y)$ on associe le point $M'(x';y')$ par S.

Déterminons x' et y' en fonction de x et y

$z' = (-1-i)z - 1$

$\Leftrightarrow x'+iy' = (-1-i)(x+iy) - 1$

$x'+iy' = -x+y-1+i(-x-y)$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x' = -x+y-1 \\ y' = -x-y \end{cases}}$

4-/ Soit (Γ) la représentation graphique dans le plan P de la restriction h de la fonction f à l'intervalle $]-\infty;1[$

Vérifions que l'image (Γ') de (Γ) par S est une partie de la représentation graphique dans le plan P de la fonction h_1 définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$h_1(x) = 2e^{x+1} - x - 3$$

$$\begin{cases} x' = -x+y-1 \\ y' = -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{x'+y'+1}{2} \\ y = \dfrac{x'-y'+1}{2} \end{cases}$$

$$M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \ln(1-x) \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x'-y'+1}{2} = -\dfrac{x'+y'+1}{2} + \ln\left(1+\dfrac{x'+y'+1}{2}\right) \\ \dfrac{x'+y'+1}{2} > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+1 = \ln\left(\dfrac{x'+y'+3}{2}\right) \\ x'+y'+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+3 = 2e^{x'+1} \\ x'+y'+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 2e^{x'+1} - x' - 3 \\ x'+y'+3 > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ M' appartient à une partie de la courbe représentative de h_1.

Conclusion :

$(\Gamma') = S(\Gamma)$ est une partie de la courbe représentative de la fonction h_1 définie par : $h_1(x) = 2e^{x+1} - x - 3$

5-/ Etudions les variations de la fonction h_1

$D_{h_1} = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

Limites de h_1 aux bornes de D_{h_1}

$$\lim_{x\to-\infty} h_1(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^{x+1} - x - 3$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2e\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to-\infty} h_1(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^{x+1} - x - 3$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2ee^x - x - 3$$

$$= +\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} -x-3 = +\infty \end{array}\right.$$

$\lim_{x\to-\infty} h_1(x) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} h_1(x) = +\infty$

Dérivée

$x \mapsto 2e^{x+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto -x-3$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; h_1 est donc continue et dérivable sur $D_{h_1}=\mathbb{R}$ car elle est la somme de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in D_{h_1}$:

$h_1'(x) = 2e^{x+1} - 1$

$h_1'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x+1 = -\ln 2 \Leftrightarrow x = -1-\ln 2$

$h_1(-1-\ln 2) = 2\times\frac{1}{2} + 1 + \ln 2 - 3$

$= -1+\ln 2$

Signe de $h_1'(x)$

x	$-\infty$		$-1-\ln 2$		$+\infty$
$h_1'(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation

D'après le tableau ci-dessus, h_1 est décroissante sur $]-\infty;-1-\ln 2[$, croissante sur $]-1-\ln 2;+\infty[$ et admet un minimum au point $-1-\ln 2$

Tableau de variation de h_1

x	$-\infty$		$-1-\ln 2$		$+\infty$
$h_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$h_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Branches infinies

$\lim_{x\to-\infty} h_1(x)+x+3 = \lim_{x\to-\infty} 2e^{x+1} = 0$

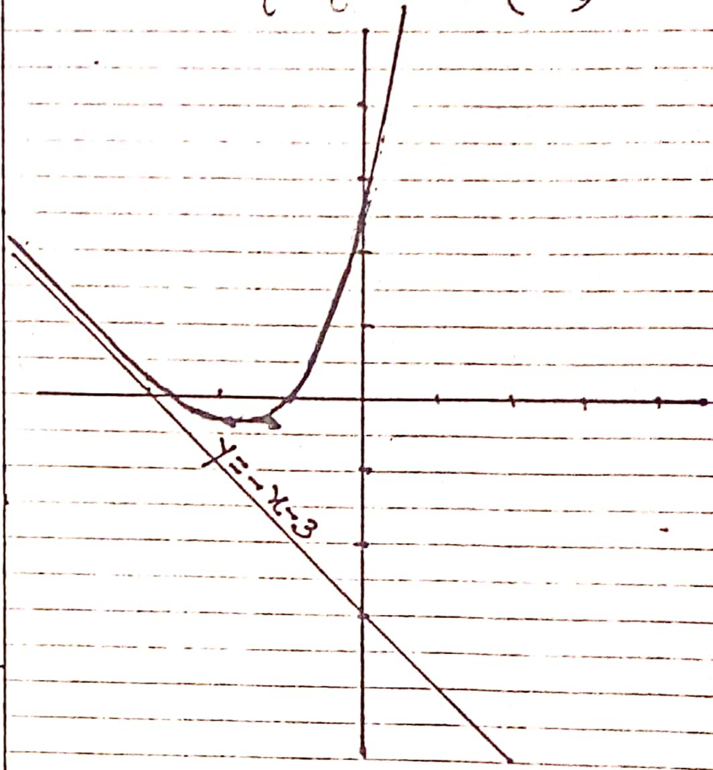
La droite d'équation $y=-x-3$ est asymptote oblique à la courbe (C_{h_1}) à $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{h_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2e\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x}$

$= +\infty$

(C_{h_1}) possède une branche infinie de direction (Oy) à $+\infty$

Construction de la courbe (C_{h_1})



PROBLEME N°7

On considère la fonction numérique de variable réelle x définie par:

$$f(x) = x+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

PARTIE A

Soit l'expression $A(x) = \frac{2x^3-x-1}{x}$

1-/ Vérifions que $A(1)=0$

$A(1) = \frac{2(1)^3-1-1}{1} = 0$

$\boxed{A(1)=0}$

- Etudions le signe de $A(x)$

$2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2+2x+1)$

Posons $2x^2+2x+1 = 0$

$\Delta' = 1-2 = -1 < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2+2x+1 > 0$

$A(x) = \frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{x}$; $A(x)$ a le signe de $\frac{x-1}{x}$; $D_A = \mathbb{R}^*$

Tableau de signe de $A(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$A(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

2/ a/ Calculons $f(1)$ et $f(-1)$.

$f(1) = 1+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2-1}\right) = 2$

$f(-1) = -1+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2-1}\right) = 0$

$f(-1) = 0$	$f(1) = 2$

- Ensemble de définition de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 2x^2-1 > 0\}$

Posons $2x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{D_f = \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[}$$

b/ Déterminons les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$; vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = -\ln 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = x+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = -\ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c/ Etude des limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ puis vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2x^2-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2}} x+1 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2x^2-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$

d./ Montrons que la courbe (C) représentative de f admet trois asymptotes dont nous donnerons les équations

$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\sqrt{2}}{2} \\ >}} f(x) = +\infty$

Les droites d'équations $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont asymptotes verticales à (C).

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$= 1$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = -\ln 2 \end{array}\right.$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{2}\ln 2$$

La droite $(\Delta): y = x + 1 - \frac{1}{2}\ln 2$ est asymptote oblique à la courbe (C)

Conclusion

(C) admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et une oblique d'équation : $y = x + 1 - \frac{1}{2}\ln 2$

3./ a./ Etude des variations de f.

f est continue et dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{2x(2x^2-1) - 4x\,x^2}{(2x^2-1)^2} \cdot \frac{2x^2-1}{x^2}$

$$= 1 - \frac{1}{x(2x^2-1)}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x(2x^2-1)} = \frac{A(x)}{(2x^2-1)}$$

$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} A(x) = 0 \\ \text{et} \\ x \in D_f \end{cases} \iff x = 1$

$\forall x \in D_f$, $2x^2 - 1 > 0$; $f'(x)$ a donc le signe de $A(x)$.

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		//////		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f.

Posons $I_1 = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]1; +\infty\right[$.

$\forall x \in I_1$, $f'(x) > 0$; f est donc croissante sur $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et sur $\left]1; +\infty\right[$

$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$, $f'(x) < 0$; f est donc décroissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$

f admet un minimum local au point 1

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		//////		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$	//////	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

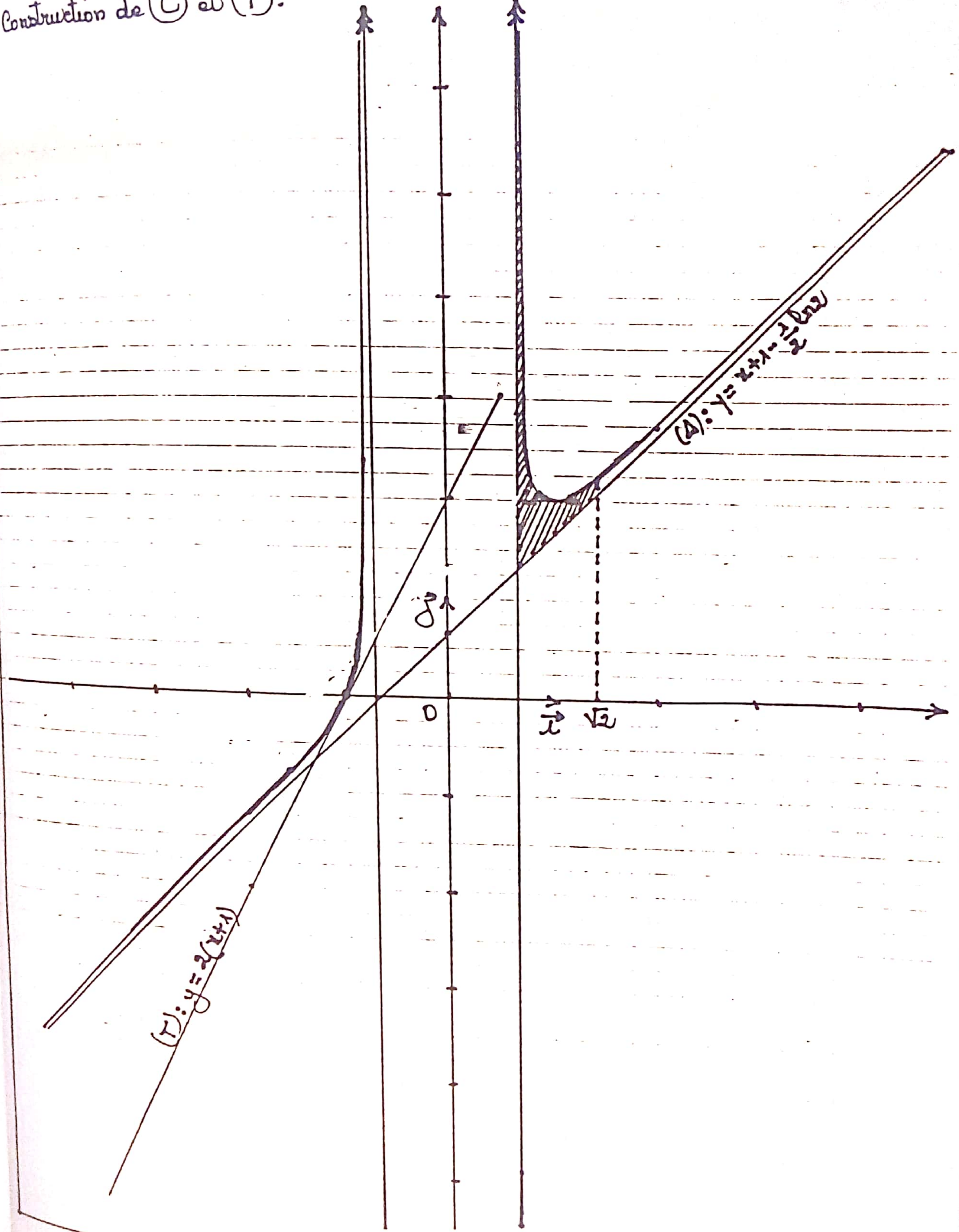
b./ Construction de la courbe (C)
(Voir page suivante)

Equation de la tangente au point d'abscisse -1.

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$\boxed{(T) : y = 2(x+1)}$

Construction de (C) et (T).



PARTIE B

Soit l'expression $B(x) = \dfrac{2}{2x^2-1}$

1./ a./ Déterminons le couple des réels $(a;b)$ tel que pour toute valeur de x qui définit $B(x)$ on ait:

$$B(x) = \frac{a}{x\sqrt{2}-1} + \frac{b}{x\sqrt{2}+1}$$

$D_B = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$\forall x \in D_B,\ B(x) = \dfrac{(a+b)x\sqrt{2}+a-b}{2x^2-1}$

Par identification on a:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$\boxed{a=1 \quad b=-1}$

b./ Déduisons-en les primitives de $B(x)$

$$B(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2}+1}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+1}\right)$$

Soit $H(x)$ une primitive de $B(x)$ on a:

$$H(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln|x\sqrt{2}-1| - \ln|x\sqrt{2}+1|\right]$$

$$\boxed{H(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1}\right| + k,\ k \in \mathbb{R}}$$

2./ a./ Soit α un réel de l'intervalle $\left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{2}\right]$

Calcul d'intégrale

$$I(\alpha) = \int_\alpha^{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right) dx$$

Posons $U(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2}{2x^2-1}\right) \Rightarrow U'(x) = \dfrac{-2}{x(2x^2-1)}$

$V'(x) = 1 \Rightarrow V(x) = x$

$$I(\alpha) = \left[x\ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right)\right]_\alpha^{\sqrt{2}} + \int_\alpha^{\sqrt{2}} \frac{2}{2x^2-1}\, dx$$

$$I(\alpha) = \sqrt{2}\ln\frac{4}{3} - \alpha\ln\left(\frac{2\alpha^2}{2\alpha^2-1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1}\right|\right]_\alpha^{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{I(\alpha) = \sqrt{2}\ln\frac{4}{3} - \alpha\ln\left(\frac{2\alpha^2}{2\alpha^2-1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{\alpha\sqrt{2}-1}{\alpha\sqrt{2}+1}\right)}$$

b./ Déterminons en fonction de $I(\alpha)$ l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x+1-\ln\sqrt{2}$, $x=\alpha$ et $x=\sqrt{2}$

Soit $A(\alpha)$ cette aire on a:

$$A(\alpha) = \int_\alpha^{\sqrt{2}} \left[f(x) - (x+1-\ln\sqrt{2})\right] dx$$
$$= \int_\alpha^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) + \ln\sqrt{2}\right] dx$$
$$= \int_\alpha^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right) dx$$

$$\boxed{A(\alpha) = \frac{1}{2} I(\alpha)}$$

c./ Soit $\beta = \alpha\sqrt{2}-1$

Exprimons $I(\alpha)$ en fonction de β

$\beta = \alpha\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \beta+2 = \alpha\sqrt{2}+1$

$2\alpha^2-1 = (\alpha\sqrt{2}-1)(\alpha\sqrt{2}+1) = \beta(\beta+2)$

$\alpha = \dfrac{\beta+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\alpha^2 = (\beta+1)^2$

d'où:

$$I(\alpha) = \sqrt{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{\beta+1}{\sqrt{2}}\ln\frac{(\beta+1)^2}{\beta(\beta+2)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3\beta}{\beta+2}$$

$$\boxed{I(\alpha)=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2(\beta+1)\ln(\beta+1)-\beta\ln\beta-(\beta+2)\ln(\beta+2)+\ln 3\right]}$$

Déduisons-en $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow{>} \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha)$

$\alpha \xrightarrow{>} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta \xrightarrow{>} 0$

$$\lim_{\alpha \xrightarrow{>} \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha) = \lim_{\beta \xrightarrow{>} 0} \sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2(\beta+1)\ln(\beta+1)-\beta\ln\beta-(\beta+2)\ln(\beta+2)+\ln 3\right]$$

$$=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}(2\ln 2-\ln 3)$$

$$=3\sqrt{2}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\lim_{\alpha \xrightarrow{>} \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha) = 3\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$$

d/ Calculons l'aire A du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations : $y=x+1-\ln\sqrt{2}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\sqrt{2}$

$$A=\lim_{\alpha \xrightarrow{>} \frac{\sqrt{2}}{2}} A(\alpha) = \frac{1}{2}\lim_{\alpha \xrightarrow{>} \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ unités d'aire}$$

En cm^2 on a :

$$A=4\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=6\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

La valeur approchée de A est : $1{,}22\,cm^2$

$$\boxed{A \simeq 1{,}22\,cm^2}$$

PROBLEME N°8

Pour tout nombre réel α non nul, on désigne par f_α la fonction numérique définie par : $f_\alpha(x)=\frac{\ln(\alpha x)}{x}$ et (C_α) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

PARTIE A

1°/ – Etudions les variations de f_1

$f_1(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\quad D_{f_1}=]0;+\infty[$

limites de f_1 aux bornes de D_{f_1}

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f_1(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x}\ln x$$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_1(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

f_1 est donc continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ car elle le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$

et $\forall x>0$, $f_1'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}$

$$\forall x>0,\ f_1'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$\forall x>0,\ x^2>0$; $f_1'(x)$ a donc le signe de $1-\ln x$.

$f_1'(x)=0 \iff 1-\ln x=0 \iff x=e$

Signe de $f_1'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_1

D'après le tableau de signe de $f_1'(x)$, f_1 est strictement croissante sur $]0;e[$, décroissante sur $]e;+\infty[$ et admet un maximum local au point e.

$f_1(e)=\frac{1}{e}$

Tableau de variation de f_1

x	0		e		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

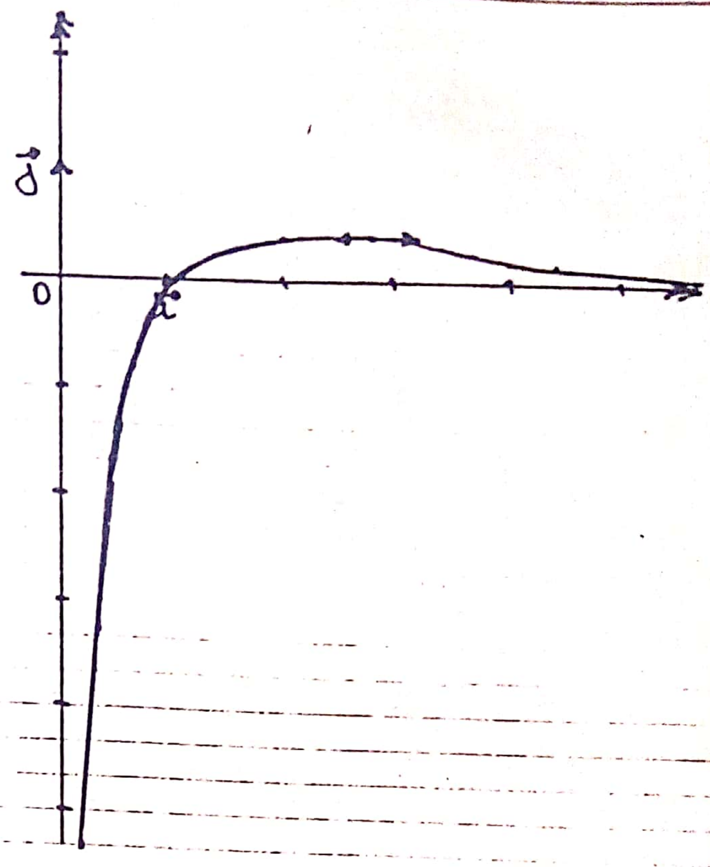
Branches infinies

$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$

(C_1) possède deux asymptotes dont une verticale d'équation $x=0$ et une horizontale d'équation $y=0$

Construction de la courbe (C_1)

(Voir figure ci-contre)



2/ Etudions f_α pour $\alpha\neq 0$

1er cas $\alpha<0$

$Df_\alpha=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 0 \text{ et } \alpha x>0\}$

$\alpha x>0 \iff x<0$ car $\alpha<0$

$$\boxed{Df_\alpha=\,]-\infty;0[}$$

limites de f_α aux bornes Df_α.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(\alpha x)}{x}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\alpha\frac{\ln X}{X}$, $X=\alpha x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f_\alpha(x)=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}}\frac{\alpha}{X}\ln X$, $X=\alpha x$

$=+\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\alpha<0\\ \lim\limits_{\substack{X\to 0\\>}}\frac{1}{X}=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{X\to 0\\>}}\ln X=-\infty\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0^-} f_\alpha(x) = +\infty$

Dérivée

$x\mapsto \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc continue et dérivable sur $]-\infty;0[$

$x\mapsto \alpha x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue et dérivable sur $]-\infty;0[$ et $\forall x\in]-\infty;0[$, $\alpha x>0$

$x\mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$; $x\mapsto \ln(\alpha x)$ est donc continue et dérivable sur $]-\infty;0[$

f étant le produit deux fonctions dérivables sur $]-\infty;0[$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $\forall x<0$,

$$f'_\alpha(x) = \frac{\frac{\alpha}{\alpha x}x - \ln(\alpha x)}{x^2} = \frac{1-\ln(\alpha x)}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x\in]-\infty;0[,\ f'_\alpha(x) = \frac{1-\ln(\alpha x)}{x^2}}$$

Signe de $f'_\alpha(x)$

$\forall x<0$, $x^2>0$; $f'_\alpha(x)$ a le signe de : $1-\ln(\alpha x)$.

$f'_\alpha(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln(\alpha x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{e}{\alpha}$

x	$-\infty$		$\frac{e}{\alpha}$		0
$f'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	‖

$\frac{e}{\alpha}<x<0 \Rightarrow 0<\alpha x<e \Rightarrow \ln(\alpha x)<1$

$\Rightarrow 1-\ln(\alpha x)>0$.

Sens de variation de f_α

f_α est décroissante sur $]-\infty;\frac{e}{\alpha}[$, croissante sur $]\frac{e}{\alpha};0[$ et admet un minimum en $\frac{e}{\alpha}$; $f_\alpha(\frac{e}{\alpha}) = \frac{\alpha}{e}$.

Tableau de variation de f_α

x	$-\infty$		$\frac{e}{\alpha}$		0
$f'_\alpha(x)$			0		‖
$f_\alpha(x)$	0	↘	$\frac{\alpha}{e}$	↗	$+\infty$ ‖

2^e cas $\alpha>0$

$$D_{f_\alpha} = \{x\in\mathbb{R} / x\neq 0 \text{ et } \alpha x>0\}$$

$$\boxed{D_{f_\alpha} =]0;+\infty[}$$

Limites de f aux bornes de D_{f_α}

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\alpha x)}{x} = \lim_{X\to 0^+}\frac{\alpha}{X}\ln X,\quad X=\alpha x$$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\alpha}{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln X = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{X\to+\infty}\alpha\frac{\ln X}{X},\quad X=\alpha x$$

$= 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$

Dérivée

On démontre comme dans le 1^{er} cas que f_α est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x>0$, $f'_\alpha(x) = \frac{1-\ln(\alpha x)}{x^2}$

$f'_\alpha(x) = 0 \iff 1 - \ln(\alpha x) = 0$

$\iff \alpha = e \iff x = \dfrac{e}{\alpha}$

$\forall x > 0,\ x^2 > 0$; $f'_\alpha(x)$ a donc le signe de $1 - \ln(\alpha x)$.

Signe de $f'_\alpha(x)$

x	0		$\frac{e}{\alpha}$		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$+$	0	$-$	

D'après le tableau qui précède, f_α est strictement croissante sur $]0;\frac{e}{\alpha}[$, strictement décroissante sur $]\frac{e}{\alpha};+\infty[$ et admet un minimum au point $\frac{e}{\alpha}$

$f_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{e}$

Tableau de variation de f_α

x	0		$\frac{e}{\alpha}$		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_\alpha(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\alpha}{e}$	$\searrow$	0

- Déterminons les coordonnées du point d'intersection de (C_α) avec l'axe (ox)

Soit $M(x;y)$. $M \in (C_\alpha) \cap (ox)$

$$\iff \begin{cases} y = f_\alpha(x) \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_\alpha(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$f_\alpha(x) = 0 \iff \ln(\alpha x) = 0 \iff \alpha x = 1 \iff x = \frac{1}{\alpha}$

Le point d'intersection de (C_α) avec (ox) est $I\left(\frac{1}{\alpha}; 0\right)$

3-/ Dans cette question on suppose $\alpha > 0$

a-/ Déterminons une primitive F_α de f_α sur $]0;+\infty[$

$f_\alpha(x) = \frac{1}{x}\ln(\alpha x) = U'(x).U(x)$ avec $U(x) = \ln(\alpha x)$

d'où $\boxed{F_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(\alpha x)\right]^2}$

b-/ Pour $a \in]0;\frac{e}{\alpha}[$ on pose :

$$A_\alpha(a) = F_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_\alpha(a).$$

Etudions la limite en 0 de $A_\alpha(a)$ puis celle de $aA_\alpha(a)$

$A_\alpha(a) = F_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_\alpha(a)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - (\ln \alpha a)^2\right]$

$\lim\limits_{a \to 0^>} A_\alpha(a) = \lim\limits_{a \to 0^>} \frac{1}{2}\left[1 - (\ln \alpha a)^2\right]$

$= \lim\limits_{X \to 0^>} \frac{1}{2}\left[1 - (\ln X)^2\right],\ X = \alpha a$

$= -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^>} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty \end{array}\right.$

$$\boxed{\lim_{a \to 0^>} A_\alpha(a) = -\infty}$$

$\lim\limits_{a \to 0^>} a A_\alpha(a) = \lim\limits_{a \to 0^>} \frac{1}{2} a\left[1 - (\ln \alpha a)^2\right]$

$= \lim\limits_{X \to 0^>} \frac{1}{2\alpha} X\left[1 - (\ln X)^2\right],\ X = \alpha a$

$= \lim\limits_{Y \to -\infty} \frac{1}{2\alpha}(1 - Y^2)\, e^Y,\ Y = \ln X$

$= \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{2\alpha}(1 - 4t^2)\, e^{2t},\ t = \frac{Y}{2}$

$= \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2t} - 4(te^t)^2\right]$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2t}-4(te^{t})^2\right)=0 \text{ car } \left|\begin{array}{l}\lim_{t\to-\infty} e^{2t}=0 \\ \text{et} \\ \lim_{t\to-\infty} te^{t}=0\end{array}\right.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} A\alpha(a)=0}$$

PARTIE B

1./ Soit a un réel strictement positif.

Déterminons suivant les valeurs de a, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x réel : $a^x = x$ (E).

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ln a = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln x}{x} = \ln a \\ x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = \ln a \\ x>0 \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_1) avec la droite d'équati $y=\ln a$

Graphiquement, on obtient les resultats présentés dans le tableau ci-dessous.

a	0		1		$e^{1/e}$	
nbre de solutions de (E).		1		2		0
			1		1	

2/ Démontrons, en utilisant les variations de f_1, qu'il existe un couple (b,c) d'entiers naturels que nous déterminerons tel que: $0<b<c$ et $b^c = c^b$

$$b^c = c^b \Leftrightarrow c\ln b = b\ln c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln b}{b} = \frac{\ln c}{c} \Leftrightarrow f_1(b) = f_1(c)$$

or : $f_1(2) = \frac{\ln 2}{2}$ et $f_1(4) = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$

$f_1(2) = f_1(4)$. $\Leftrightarrow$ $b=2$ $c=4$

$$\boxed{b=2 \quad c=4}$$

PARTIE C

1./ Soit t un réel strictement positif

a./ Equation de la tangente $(T\alpha)$ à la courbe $(C\alpha)$ au point d'abscisse t

$$(T\alpha) : y = f'_\alpha(t)(x-t) + f_\alpha(t)$$

$$= \frac{1-\ln(\alpha t)}{t^2}(x-t) + \frac{\ln \alpha t}{t}$$

$$\boxed{(T\alpha) : y = \frac{1-\ln(\alpha t)}{t^2}x - \frac{1-2\ln(\alpha t)}{t}}$$

b/ Démontrons que lorsque α varie, t restant fixe, les droites $(T\alpha)$ passent par un point fixe I_t que nous déterminerons.

$$y = \frac{1-\ln(\alpha t)}{t^2}x - \frac{1-2\ln(\alpha t)}{t}$$

$$\Leftrightarrow t^2y = x - t + (2t-x)\ln(\alpha t)$$

$$\Leftrightarrow t^2y - x + t = (2t-x)\ln(\alpha t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - x = 0 \\ t^2y - x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}.$$

Lorsque α varie, t restant fixe, toutes les droites $(T\alpha)$ passent le point fixe

$$I_t\left(2t, \frac{1}{t}\right)$$

Déterminons l'ensemble décrit par les points I_t lorsque t parcourt $]0;+\infty[$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{t} \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

Lorsque t parcourt $]0;+\infty[$, I_t décrit l'hyperbole d'équation $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$

2-/ Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ on note M et M' les points de (C_2) et (C_3) ayant pour abscisse x et l'on désigne par G le barycentre du système $\{(M,1);(M',-2)\}$

Démontrons que lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$, le point G décrit une des courbes (C_α) que nous déterminerons

G bary $\{(M,1);(M',-2)\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x-2x}{-1} = x \\ y_G = \frac{f_2(x)-2f_3(x)}{-1} \end{cases}$$

$y_G = 2f_3(x) - f_2(x)$

$= 2\frac{\ln 3x}{x} - \frac{\ln 2x}{x} = \frac{\ln(3x)^2 - \ln 2x}{x}$

$= \frac{1}{x}(\ln 9x^2 - \ln 2x) = \frac{\ln \frac{9}{2}x}{x}$

$y_G = f_{9/2}(x_G) \Leftrightarrow G \in (C_{9/2})$

Lorsque x décrit $]0;+\infty[$, G décrit la courbe $(C_{9/2})$

3-/ Soient α et α' deux réels strictement positifs et λ un réel différent de 1

Pour tout $x > 0$ on note :

$M(x; f_\alpha(x))$ $M'(x; f_{\alpha'}(x))$

G bary $\{(M,1);(M',-\lambda)\}$

Démontrons que lorsque x parcourt $\mathbb{R}_+^*$, le point G décrit une des courbes (C_α) que nous préciserons

G bary $\{(M,1);(M',-\lambda)\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x-\lambda x}{1-\lambda} = x \\ y_G = \frac{f_\alpha(x) - \lambda f_{\alpha'}(x)}{1-\lambda} \end{cases}$$

$y_G = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{\ln \alpha x}{x} - \lambda \frac{\ln \alpha' x}{x}\right)$

$= \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\alpha x}{\alpha'^\lambda x^\lambda}\right)\right]$

$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\lambda}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda} \cdot x^{1-\lambda}\right)$

$y_G = \frac{1}{x}\ln\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} x\right]$

$\Leftrightarrow G \in C_\beta$ avec $\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$

Lorsque x parcourt $]0;+\infty[$, le point G décrit la courbe (C_β) avec :

$\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$

PROBLEME N°9

Pour tout entier relatif non nul n, on considère la fonction f_n d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1-/ a-/ Précisons l'ensemble de définition de la fonction f_n

$Df_n = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$

$\boxed{Df_n = \mathbb{R}}$

b-/ Valeurs de n pour lesquelles f_n est continue en tout point de $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, de même que $x \mapsto \ln|x|$; f_n est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

Continuité en 0

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \begin{cases} \infty \text{ si } n \leq 0 \\ 0 \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

Conclusion

$\boxed{f_n \text{ est continue en tout point de } \mathbb{R} \text{ ssi } n \in \mathbb{N}^*}$

2-/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$, on appelle (C_n) la courbe représentative de la fonct° f_n

a-/ Etudions les éléments de symétrie de (C_n) suivant la parité de n

$Df_n = \mathbb{R}$; $\forall x \in Df_n$, $-x \in Df_n$

$$\begin{aligned} f_n(-x) &= (-x)^n \ln|-x| \\ &= (-1)^n x^n \ln|x| \\ &= \begin{cases} x^n \ln|x| \text{ si } n \text{ pair} \\ -x^n \ln|x| \text{ si } n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Pour n pair, $f_n(-x) = f_n(x)$; f_n est paire et la courbe (C_n) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Pour n impair, $f_n(-x) = -f_n(x)$; f_n est impaire et la courbe (C_n) admet le point O comme centre de symétrie.

b-/ Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par des points fixes O, A et B avec $B = S_O(A)$

$f_n(0) = 0$; $f_n(1) = 0$; $f_n(-1) = 0$

$\boxed{(C_n) \text{ passent par : } O(0;0),\ A(1;0),\ B(-1;0)}$

c-/ Valeurs de n pour lesquelles f_n est dérivable en $x = 0$

On sait que f_n n'est pas continue en 0 pour $n \leq 0$; f_n n'est donc pas dérivable en 0 pour $n \leq 0$

Pour $n > 0$, f_n est continue en 0 et $f_n(0) = 0$

Dérivabilité de f_n en 0 pour $n > 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} \ln|x|$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ pour } n = 1 \\ 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Conclusion

$\boxed{f_n \text{ est dérivable en } 0 \text{ pour } n \geq 2}$

d./- Calculons la dérivée de f_n pour $x \neq 0$

$\forall x \neq 0,\ f_n'(x) = nx^{n-1}\ln|x| + \frac{1}{x}x^n$
$= x^{n-1}(1 + n\ln|x|)$

$$\boxed{\forall x \neq 0,\ f_n'(x) = (1 + n\ln|x|)x^{n-1}}$$

- Montrons que toutes les courbes (C_n) admettent la même tangente en A

$f_n'(1) = 1 \quad f_n(1) = 0$

Toutes les courbes (C_n) admettents au point A la même tangente d'équat$^{\circ}$ $y = x - 1$

3./ Etudions les variations des fonctions f_{-3}, f_1 et f_2.

* Etude des variations de f_{-3}

$f_{-3}(x) = \frac{\ln|x|}{x^3}$ pour $x \neq 0$; $f_{-3}(0) = 0$

$D_{f_{-3}} = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^3}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{1}{X^2} \cdot \frac{\ln X}{X}$, $X = -x$

$= -0 \quad 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_{-3}(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln|x|}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-3}(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3}\ln|x|$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} -\frac{1}{X^3}\ln X$, $X = -x$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{1}{X^3} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f_{-3}(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3}\ln|x|$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3}\ln x$

$= -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_{-3}(x) = -\infty$

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de même que $x \mapsto \ln|x|$; f_{-3} est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0,\ f_{-3}'(x) = \frac{1 - 3\ln|x|}{x^4}$

$f_{-3}'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow |x| = e^{1/3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -e^{1/3} \\ \text{ou} \\ x = e^{1/3} \end{array} \right.$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^4 > 0$.

$f_{-3}'(x)$ a donc le signe de $1 - 3\ln|x|$

Signe de $f_{-3}'(x)$

x	$-\infty$		$-e^{1/3}$		0		$e^{1/3}$		$+\infty$
$f_{-3}'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_{-3}

$\forall x \in]-\infty ; -e^{1/3}[\cup]e^{1/3} ; +\infty[,\ f_{-3}'(x) < 0$

f_{-3} est donc strictement décroissante sur

chacun des intervalles $]-\infty;-e^{1/3}[$ et
$]e^{1/3};+\infty[$.

• $\forall x \in]-e^{1/3}; e^{1/3}[-\{0\}$, $f'_{-3}(x) > 0$.

f_{-3} est donc strictement croissante sur $]-e^{1/3};0[$ et sur $]0;e^{1/3}[$

• f_{-3} admet minimum local en $-e^{1/3}$ et un maximum en $e^{1/3}$.

$$f_{-3}(-e^{1/3}) = -\frac{1}{3e} \; ; \; f_{-3}(e^{1/3}) = \frac{1}{3e}.$$

Tableau de variation de f_{-3}

x	$-\infty$		$-e^{1/3}$		0		$e^{1/3}$		$+\infty$
$f'_{-3}(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f_{-3}(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3e}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3e}$	$\searrow$	0

Remarque : f_{-3} est impaire. On aurait pu étudier f_{-3} sur $]0;+\infty[$ et compléter dans la symétrie par rapport à 0.

* Etude des variations de f_1

$f_1(x) = x\ln|x|$. pour $x \neq 0$; $f_1(0) = 0$
$Df_1 = \mathbb{R}$.

Limites de f_1 aux bornes de Df_1

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} x\ln|x|$$
$$= \lim_{X\to+\infty} -X\ln X, \quad X = -x$$
$$= -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln|x|$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln x$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f_1(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \underset{>}{\to} 0} f_1(x) = 0$$

Dérivée

On sait pour $n = 1$, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'_1(x) = 1 + \ln|x|$

$$f'_1(x) = 0 \iff \ln|x| = -1$$
$$\iff |x| = e^{-1} = \frac{1}{e}$$
$$\iff x = -\frac{1}{e} \text{ ou } x = \frac{1}{e}.$$

Signe de $f'_1(x)$.

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_1

• $\forall x \in]-\infty;-1/e[\cup]1/e;+\infty[$, $f'_1(x) > 0$

f_1 est donc strictement croissante sur $]-\infty;-1/e[$ et sur $]1/e;+\infty[$

• $\forall x \in]-1/e;1/e[-\{0\}$, $f'_1(x) < 0$; f_1 est donc strictement décroissante sur $]-1/e;0[$ et sur $]0;1/e[$

• f_1 admet un maximum local en $-\frac{1}{e}$ et un minimum local en $\frac{1}{e}$

$$f_1(-1/e) = \frac{1}{e} \; ; \quad f_1\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque: Comme dans le cas de f_{-3} on pourrait remarquer que f_1 est impaire, l'étudier sur $]0;+\infty[$ et completter dans la symétrie par rapport à O.

* Etude des variations de f_2

$f_2(x) = x^2\ln|x|$ pour $x \neq 0$; $f_2(0) = 0$

$Df_2 = \mathbb{R}$

Limites de f_2 aux bornes de Df_2

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim_{X\to+\infty} X^2 \ln X \quad , \quad X = |x|$$

$$= +\infty \times +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{\substack{X\to 0\\ >}} X . X\ln X$$

$$= 0 \times 0 = 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f_2(x) = 0 \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_2(x) = 0$

Dérivée.

D'après 2-c/ f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_2'(x) = x(1 + 2\ln|x|)$$

$f_2'(x) = 0 \iff x = -(\sqrt{e})^{-1}, x = 0$ ou $x = (\sqrt{e})^{-1}$

$x = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Signe de $f_2'(x)$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{e}$		0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_2

D'après le tableau ci-dessus, f_2 est strictement décroissante sur $]-\infty, -1/\sqrt{e}[$ et sur $]0; 1/\sqrt{e}[$; strictement croissante sur $]-1/\sqrt{e}, 0[$ et sur $]1/\sqrt{e}; +\infty[$;

f_2 admet un minimum local en $-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et un maximum local en 0

$f_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$; $f_2(0) = 0$; $f_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{e}$		0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque: Ici, on pourrait remarquer que f_2 est paire, l'étudier sur $[0;+\infty[$ et completter dans la symétrie d'axe (Oy)

Construction des courbes C_{-3}, C_1 et C_2

Etude des branches infinies

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f_{-3}(x) = +\infty \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_{-3}(x) = -\infty$

La courbe (C_{-3}) possède deux asymptotes : une verticale d'équation $x=0$ et une horizontale d'équation $y=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln|x|$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} |x| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right.$

(C_1) possède une branche infinie de direction (oy).

On démontre comme précédemment que (C_2) possède une branche infinie de direction (oy)

Construction des courbes C_{-3}, C_1 et C_2

(Voir page 148)

7/ Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonct: f_n à l'intervalle $[0;+\infty[$

Soit M_n le point de la courbe (C_n) de cordonnées (X_n, Y_n) où X_n est la valeur strictement positive, pour laquelle f_n présente un extrémum.

Montrons que tous les points M_n sont sur une courbe (Γ) dont nous préciserons l'équation

X_n est la solution de l'équation $f'_n(x) = 0$.

$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + n\ln|x|)\, x^{n-1} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -e^{-1/n}$ ou $x = e^{-1/n}$

$X_n > 0 \Leftrightarrow X_n = e^{-1/n}$

$Y_n = f_n(X_n) = X_n^n \ln|X_n|$

$= e^{-1} \cdot \left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{-1}{ne}$

$$\boxed{M_n\left(e^{-1/n} ; -\frac{1}{ne}\right)}$$

Equation de la courbe (Γ)

$\left\{ \begin{array}{l} x = e^{-1/n} \\ y = -\frac{1}{ne} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = -\frac{1}{\ln x},\ x>0 \\ y = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{\ln x}\right)e} = \frac{\ln x}{e} \end{array} \right.$

(Γ) a pour équation : $\left\{ \begin{array}{l} x>0 \\ y = \frac{\ln x}{e} \end{array} \right.$

$$\boxed{\text{Tous les points } M_n \text{ sont sur une courbe } (\Gamma) \text{ d'équation } \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\ln x}{e} \\ x>0 \end{array} \right.}$$

PARTIE II

1/ Soit α un nombre réel strictement positif.

Calculons $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha f_n(x)\,dx$

$I_n(\alpha) = \int_1^\alpha f_n(x)\,dx = \int_1^\alpha x^n \ln|x|\,dx$

Posons $U(x) = \ln|x| \Rightarrow U'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = x^n \Rightarrow V(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln|x|\right]_1^\alpha - \frac{1}{n+1}\int_1^\alpha x^n\,dx$

$= \frac{1}{n+1}\alpha^{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\left[x^{n+1}\right]_1^\alpha$

$$\boxed{I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\left(\ln\alpha - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

2/ Dans cette question $n = 2$

a/ calculons $I_2(\alpha) = \int_1^{\alpha} f_2(x)\,dx$.

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3\left(\ln\alpha - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}$$

$$\boxed{I_2(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3\ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)}$$

Limite de $I_2(\alpha)$ lorsque α tend vers 0

$$\lim_{\alpha\to 0} I_2(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{3}\alpha^2 \cdot \alpha\ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)$$

$$= \frac{1}{9} \text{ car } \lim_{\alpha\to 0} \alpha\ln\alpha = 0$$

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0} I_2(\alpha) = \frac{1}{9}}$$

Interprétation géométrique de la limite trouvée

La limite trouvée est l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$, la courbe (C_2) et l'axe des abscisses

b/ Déterminons un nombre réel β ($\beta > 0$) tel que la valeur moyenne de f_2 sur l'intervalle $[0; \beta]$ soit nulle

La valeur moyenne de f_2 sur $[0; \beta]$ est : $\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta} f_2(x)\,dx = \frac{1}{3}\beta^2\left(\ln\beta - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9\beta} - \frac{1}{9\beta}$

$$= \frac{1}{3}\beta^2\left(\ln\beta - \frac{1}{3}\right)$$

La valeur moyenne de f_2 sur $[0; \beta]$ est nulle soit $\ln\beta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta = e^{1/3}$

$$\boxed{\beta = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}}$$

Point de (C_{-3}) qui a pour abscisse β.

$$f_{-3}(\beta) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{3e}$$

Le point de (C_{-3}) qui a pour abscisse β est : $H\left(e^{1/3}; \frac{1}{3e}\right)$

PROBLEME N°10

Soit la fonction numérique f_a de la variable réelle x définie par :

$f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$. On désigne par (C_a) la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm

PARTIE A

1/ Etude de la parité de f_a

$$D_{f_a} = \left\{x \in \mathbb{R} / a - x \neq 0 \text{ et } \frac{a+x}{a-x} > 0\right\}$$

$$= \begin{cases}]-a; a[\text{ si } a > 0 \\ ]a; -a[\text{ si } a < 0 \end{cases}$$

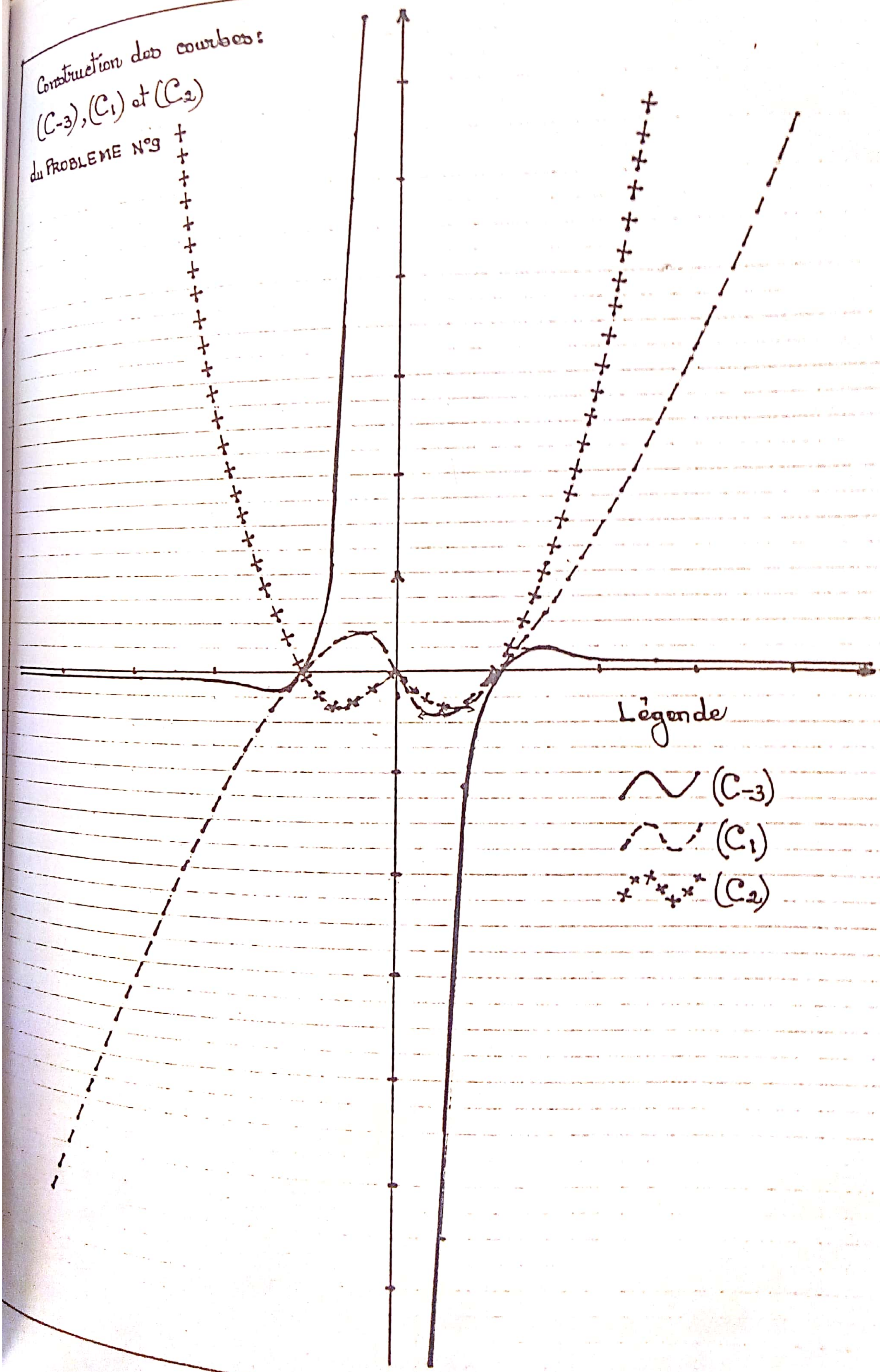
$D_{f_a} =]-|a|; |a|[$ si $a \neq 0$

$\forall x \in D_{f_a}$, $-x \in D_{f_a}$

$$f_a(-x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) = -\ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$$

$\forall x \in D_{f_a}$, $f_a(-x) = -f_a(x)$

Construction des courbes:
(C_{-3}), (C_1) et (C_2)
du PROBLEME N°9



La fonction f_a est impaire.

2-/ Démontrons que la courbe (C_a) possède deux asymptotes dont on donnera les équations :

1er cas $a<0$: $D_{f_a} =]a;-a[$

$\lim_{x \to a^>} f_a(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to a^>} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to -a^<} f_a(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to -a^<} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = 0^+$ et $\lim_{x\to 0^>} \ln x = -\infty$

2e cas $a>0$: $D_{f_a} =]-a;a[$

$\lim_{x\to -a^>} f_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to a^<} f_a(x) = +\infty$

La courbe (C_a) possède deux asymptotes verticales d'équations $x=-a$ et $x=a$

3/ Etudions selon les valeurs de a le sens de variation de f_a

On démontre aisément que f_a est dérivable sur D_{f_a} et $\forall x \in D_{f_a}$:

$f'_a(x) = \frac{a}{(a-x)(a+x)}$

$\forall x \in D_{f_a}$, $(a-x)(a+x) > 0$

1er cas $a<0$

$\forall x \in D_{f_a}$ $f'_a(x) < 0$; f_a est donc strictement décroissante sur D_{f_a}

2e cas $a>0$

$\forall x \in D_{f_a}$ $f'_a(x) > 0$; f_a est donc strictement croissante sur D_{f_a}

4/ a-/ Démontrons que f_a est une bijection de D_{f_a} sur un ensemble que nous préciserons

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, f_a est continue, monotone sur D_{f_a} avec $f_a[D_{f_a}] = \mathbb{R}$.

f_a est donc une bijection de D_{f_a} sur $\mathbb{R}$

b/ Explicitons $f_a^{-1}(x)$

Posons $y = f_a(x)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{a+x}{a-x} \Leftrightarrow x = a\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

On a donc :

$$\boxed{f_a^{-1}(x) = a\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

On désigne par (Γ_a) la courbe représentative de f_a^{-1} relativement au repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$

5-/ a/ Démontrons que l'affinité orthogonale d'axe $(O, \vec{J})$ et de rapport a transforme (C_1) en C_a.

$f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x/a}{1-x/a}}\right) = f_1\left(\frac{x}{a}\right)$

$f_a(x) = f_1\left(\frac{x}{a}\right)$

On en déduit que l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport a transforme (C_1) en (C_a).

b/ Soit a et a' deux réels non nuls et distincts.

Déterminons une application affine transformant (C_a) en $(C_{a'})$

Soit g l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport a ; g' l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport a'

g^{-1} est l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport $\frac{1}{a}$.

$C_a = g(C_1) \Leftrightarrow C_1 = g^{-1}(C_a)$

$C_{a'} = g'(C_1) \Leftrightarrow C_{a'} = g'[g^{-1}(C_a)]$

$= g' \circ g^{-1}(C_a)$

or $g' \circ g^{-1}$ est l'affinité d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport $a' \times \frac{1}{a} = \frac{a'}{a}$.

L'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ de rapport $\frac{a'}{a}$ transforme (C_a) en $(C_{a'})$.

6/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, S la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{i})$

a/ Déterminons une expression analytique de RoS.

On sait que l'écriture complexe de R est : $z' = -iz$; celle de S est :

$z' = \bar{z}$ d'où l'écriture complexe de RoS est $z' = -i\bar{z}$

Posons $z = x+iy$ $\quad z' = x'+iy'$

$\Leftrightarrow x'+iy' = -i(x-iy)$

$= -y-ix$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

L'expression analytique de RoS est :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Donnons une équation cartésienne de la transformation $RoS(\Gamma_a)$ de Γ_a par RoS.

$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = -y' \end{cases}$

$M(x;y) \in (\Gamma_a) \Leftrightarrow y = f_a^{-1}(x)$

$\Leftrightarrow -x' = f_a^{-1}(-y')$

$\Leftrightarrow -y' = f_a(-x')$

$\Leftrightarrow -y' = -f_a(x')$

$\Leftrightarrow y' = f_a(x')$

L'équation cartésienne de $RoS(\Gamma_a)$ est $y = f_a(x)$.

b/ Comparaison des équations cartésiennes de (C_a) et $RoS(\Gamma_a)$

(C_a) et $RoS(\Gamma_a)$ ont la même équation cartésienne. $RoS(\Gamma_a) = C_a$

On remarque $R \circ S = S_0 \circ S_{(T_1)}$.

or f_a est impaire et $\Gamma_a = S_{(T_1)}(C_a)$

$R \circ S(\Gamma_a) = S_0 \circ S_{(T_1)}(\Gamma_a) = S_0(C_a)$

$R \circ S(\Gamma_a) = C_a$. On pouvait donc prévoir le résultat !

Dans la suite du problème on suppose $a = 1$

7-/ Traçons (C_1), (Γ_1) ainsi que la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0

(Voir page suivante)

PARTIE B

1-/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f_1(\sin x)$

Démontrons que $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$

$\forall x \in [0; \pi/2[$, $0 \le \sin x \le 1$

or $[0;1[\subset]-1;1[= D_{f_1}$.

g est donc continue et dérivable sur $[0; \pi/2[$ et $\forall x \in [0; \pi/2[$,

$g'(x) = f_1'(\sin x) \cdot \cos x$

$= \frac{1}{1-\sin^2 x} \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{\cos x}}$$

2-/ Déterminons le réel c tel que :

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln c$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \left[g(x)\right]_0^{\pi/6}$$

$$= f_1\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) - f_1(\sin 0)$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right)$$

$$= \ln\sqrt{3}$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln\sqrt{3} \quad \text{d'où :}$$

$$\boxed{c = \sqrt{3}}$$

3-/ On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$ où n est un entier naturel non nul.

On définit ainsi une suite numérique (I_n).

a-/ Démontrons que la suite (I_n) est à termes positifs

$\forall x \in [0; \pi/6]$, $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} \geq 0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx \geq 0 \Leftrightarrow I_n \geq 0$

$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est donc à termes positifs}}$

b-/ Etudions le sens de variation de la suite (I_n)

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n+2}}{\cos x} - \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin^2 x - 1)(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

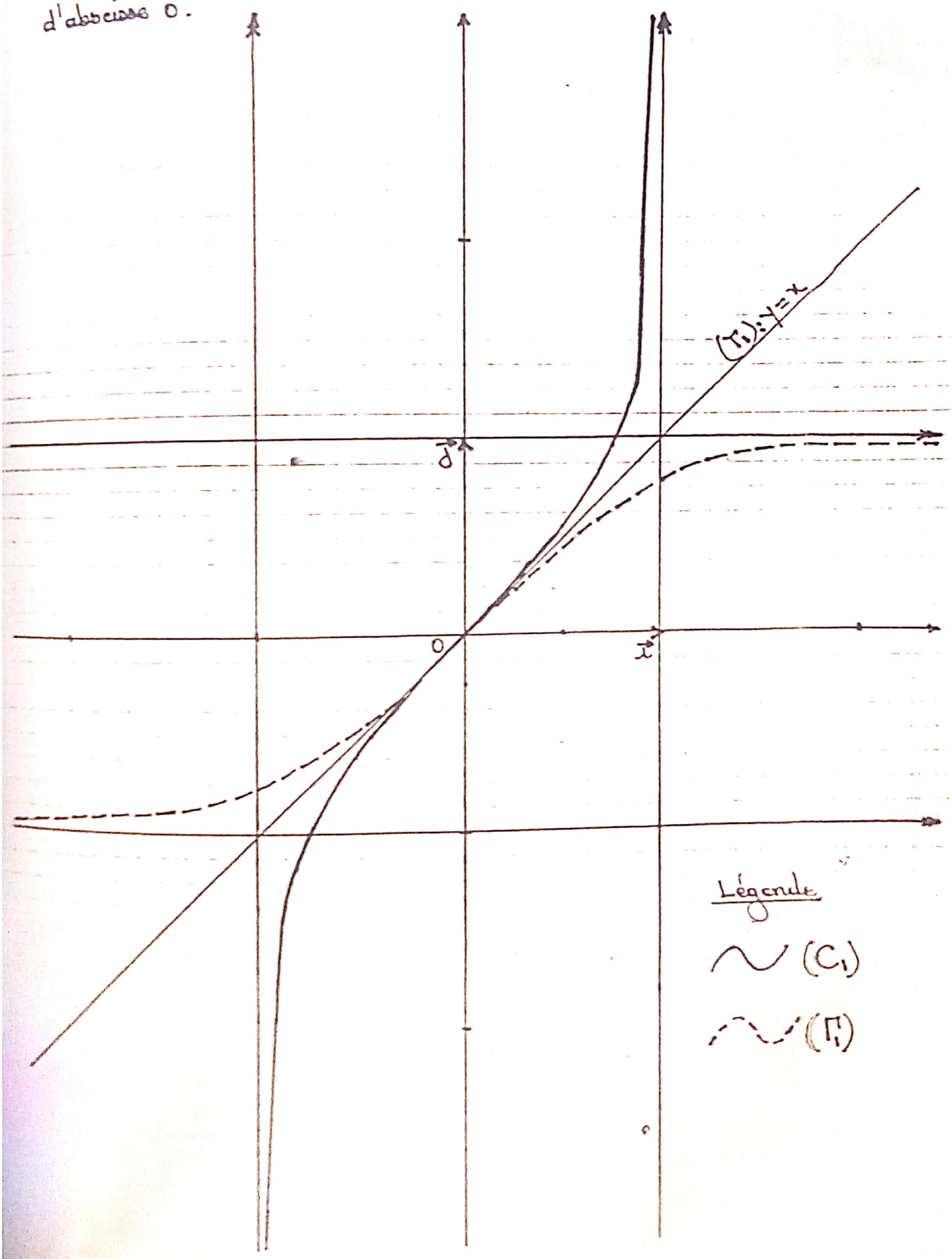
$$I_{n+1} - I_n = -\int_0^{\pi/6} \cos x (\sin x)^{2n} dx$$

$\forall x \in [0; \pi/6]$, $\cos x (\sin x)^{2n} \geq 0$

$\Leftrightarrow -\int_0^{\pi/6} \cos x (\sin x)^{2n} dx \le 0$

$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \le 0$

Construction des courbes (C_1), (Γ_1) et la tangente (T_1) à (C_1) au point d'abscisse 0.



$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est donc décroissante}}$

c/ Démontrons que $I_n \leq \frac{\ln c}{4^n}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ car $x \mapsto \sin x$ est croissante sur $[0; \frac{\pi}{6}]$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\sin x)^{2n} \leq \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} \leq \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{\cos x}$

car $\cos x > 0$ sur $[0; \pi/6]$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx \leq \frac{1}{4^n} \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\ln\sqrt{3}}{4^n}$

Conclusion:

$$\boxed{I_n \leq \frac{\ln c}{4^n} \text{ avec } c = \sqrt{3}.}$$

d/ Déduisons-en la limite de (I_n)

$\begin{cases} 0 \leq I_n \leq \frac{\ln c}{4^n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln c}{4^n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

d'après le théorème des Gendarmes.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

PARTIE C

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $[0; \pi/2[$ par :

$$h_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$$

1-/ Donnons une expression simplifiée de la somme $S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$.

$$S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$$

$$= 1 + \sin^2 x \frac{1 - (\sin x)^{2n-2}}{1 - \sin^2 x}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 x - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x}$$

$$S_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x}}$$

2-/ Démontrons que : $h'_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$

$$h'_n(x) = \sum_{p=1}^{n} (\sin x)^{2p-2} \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \sum_{p=1}^{n} (\sin x)^{2p}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \left(\sin^2 x \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x}\right)$$

$$= \cos x \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x} = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$$

$$\boxed{h'_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}}$$

3-/ Montrons que $h_n(\frac{\pi}{6}) = \ln\sqrt{3} - I_n$

$$\int_0^{\pi/6} h'(x)\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow \left[h(x)\right]_0^{\pi/6} = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} - \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$\Leftrightarrow h(\frac{\pi}{6}) - h(0) = \ln\sqrt{3} - I_n$ or $h(0) = 0$

d'où $\boxed{h(\frac{\pi}{6}) = \ln\sqrt{3} - I_n}$

4/ Déduisons-en que la suite (U_n) définie par : $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1).2^{2p-1}}$ a une limite que l'on déterminera

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2p-1}}{2p-1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2p-1}}{2p-1}$$

$$= h_n\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$U_n = \ln\sqrt{3} - I_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\sqrt{3} - I_n = \ln\sqrt{3} - 0 = \ln\sqrt{3}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln\sqrt{3}}$$

PROBLEME N°II

PARTIE A

1/ Vérifions que :

$3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$

$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2$

$= 3x^3 - x - 2$

Conclusion :

$$\boxed{3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)}$$

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$

2/ a-/ Etudions le sens de variation de la fonction g

$D_g =]0;+\infty[$

$x \mapsto x^3 - x + 1$ et $x \mapsto 2\ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$,

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

Posons $3x^2+3x+2 = 0$

$$\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$$

$\forall x > 0$, $3x^2+3x+2 > 0$

$g'(x)$ a donc le signe de $x-1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Signe de $g'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b-/ Déduisons de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

$g(1) = 1 > 0$

D'après ce qui précède, g admet un minimum au point 1 ; ce minimum est $g(1) = 1 > 0$

Conclusion

$$\boxed{\forall x > 0,\ g(x) > 0}$$

3-/ On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan (unité graphique 2cm) a/ Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x+1+\frac{1}{x^2}(x+\ln x)$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} x+\ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x+1+\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x\to +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b/ Justifions que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives : $x=0$ et $y=x+1$ sont asymptotes à la courbe (C)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ la droite (D) d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$$

$\lim_{x\to +\infty} [f(x)-(x+1)] = 0 \Rightarrow$ la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

Conclusion

Les droites (D) : $x=0$ et (Δ) : $y=x+1$ sont respectivement asymptote verticale et oblique à la courbe (C)

4-/ a-/ Montrons que la fonction h telle que : $h(x) = x+\ln x$ est strictement croissante et prend des valeurs positives et négatives

$D_h =]0;+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty \quad \lim_{x\to +\infty} x+\ln x = +\infty$

$\forall x>0,\ h'(x) = 1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$\forall x>0,\ h'(x)>0$. h est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D'après ce qui précède, h définit une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$; $h(x)$ prend donc des valeurs positives et négatives

b-/ Déduisons que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha+\ln\alpha=0$

D'après ce qui précède l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique

Soit $M(x;y)$ un point du plan

$$M \in (C)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1+\frac{x+\ln x}{x^2} \\ y = x+1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x+\ln x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$

Conclusion :

(Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln\alpha = 0$

- Montrons que $0,56 < \alpha < 0,57$

$h(0,56) = -0,0198$; $h(0,57) = 0,0078$

$h(0,56) \times h(0,57) < 0 \Leftrightarrow 0,56 < \alpha < 0,57$ d'après le théor des valeurs intermédiaires

$$\boxed{0,56 < \alpha < 0,57}$$

c/ Déterminons la position relative de (C) par rapport à (Δ)

Posons $d(x) = f(x) - (x+1)$

$$= \frac{x + \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

$\forall x > 0,\ x^2 > 0$.

$d(x)$ a donc le même signe que $h(x)$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessus

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Position relative de (C) par rapport à (Δ)	‖	(C) est en dessous de (Δ)	(C) coupe (Δ)	(C) est au dessus de (Δ)	

5-/ Etudions le sens de variation de f

$D_f =]0;+\infty[$

f est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = 1 + \frac{(1+\frac{1}{x})x^2 - 2x(x+\ln x)}{x^4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x+1-2x-2\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

$\forall x > 0,\ x^3 > 0$; $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ or $\forall x > 0,\ g(x) > 0$. On a donc : $\forall x > 0,\ f'(x) > 0$; f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

5-/ Déduisons de la question 4-/ l'existence d'une valeur unique β telle $f(\beta) = 0$

La fonction f est continue, monotone strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f définit donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi il existe un unique réel $\beta > 0$ tel que $f(\beta) = 0$.

Montrons que $0,46 < \beta < 0,47$

$f(0,46) = -0,036$; $f(0,47) = 0,18$.

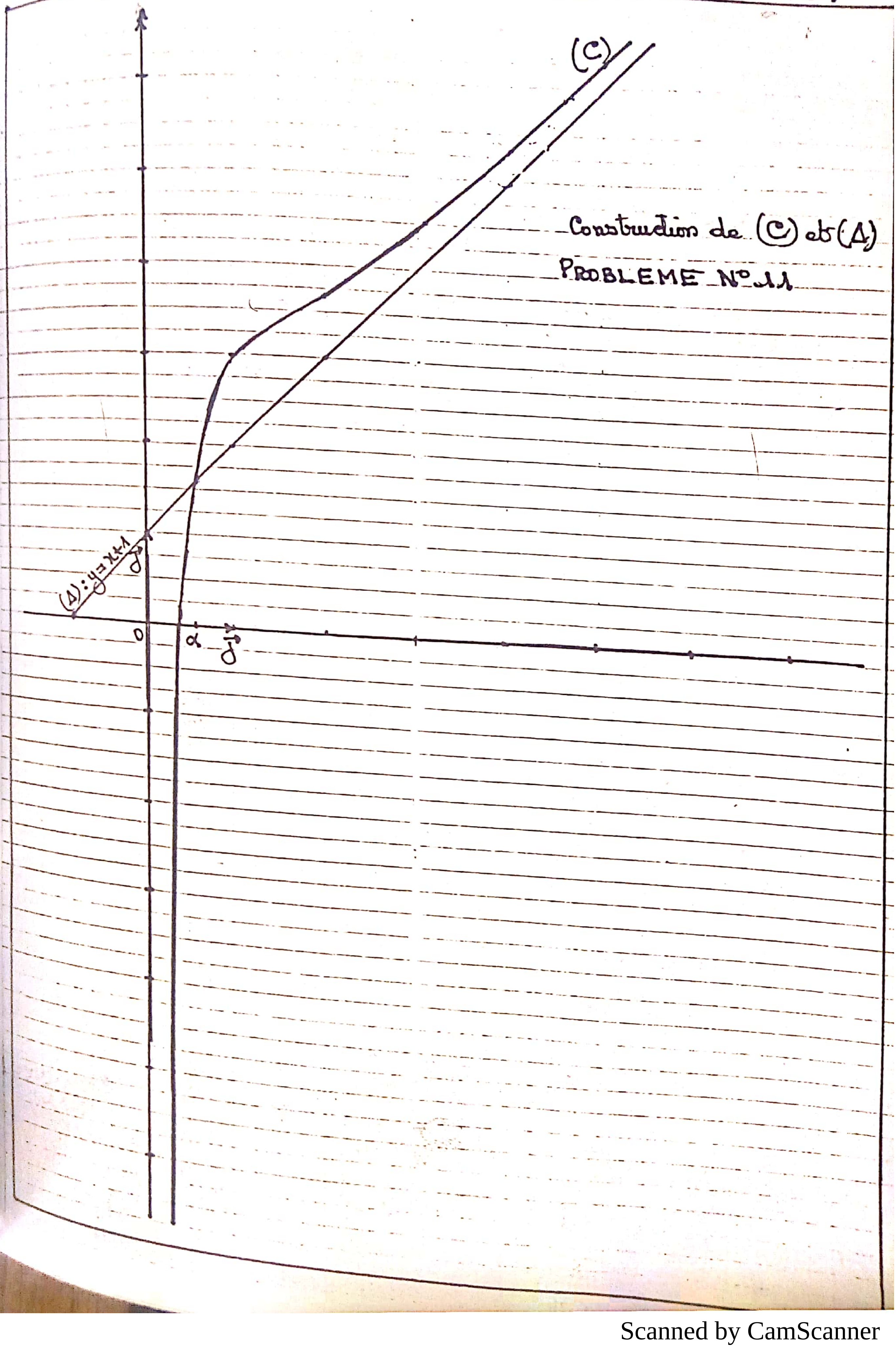
$f(0,46) \cdot f(0,47) < 0 \Leftrightarrow 0,46 < \beta < 0,47$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

7-/ Construction de (C) et (Δ)

(Voir page suivante)

PARTIE B

m étant un réel, on appelle f_m la fonction de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :


(C)
(Δ) : y = x+1
0
α
Construction de (C) et (Δ)
PROBLEME N° 11

$f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$ et (Γ_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1-/ Dressons suivant les valeurs de m le tableau de variation de f_m

1er cas $m<0$

$Df_m =]0;+\infty[$

Limites de f_m aux bornes de Df_m.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$

$= -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{4} = -\frac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } -\frac{m}{2} > 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4} + x\left(\frac{x}{4} - \frac{m}{2}\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$

Dérivée

f_m est dérivable sur Df_m et $\forall x \in Df_m$:

$f'_m(x) = \frac{x}{2} - \frac{m}{2x} = \frac{x^2-m}{2x}$

$\forall x>0$, $2x>0$; $f'_m(x)$ a donc le signe de x^2-m.

Pour $m<0$ on a : $x^2-m>0$ donc $\forall x>0$, $f'_m(x)>0$; f_m est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_m $m<0$

x	0	$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$+$
$f_m(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2e cas $m=0$

$f_0(x) = \frac{x^2-1}{4}$ $Df_0 =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x) = -\frac{1}{4}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$

$f'_0(x) = \frac{x}{2} > 0$

f_0 est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_0

x	0	$+\infty$
$f'_0(x)$	‖	$+$
$f_0(x)$	‖ $-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$

3e cas $m>0$

$Df_m =]0;+\infty[$

Limites de f_m aux bornes de Df_m.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{4} = -\frac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } -\frac{m}{2} < 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4} + x\left(\frac{x}{4} - \frac{m}{2}\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} f_m(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$

<u>Dérivée:</u>

f_m est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$.

$$f'_m(x) = \frac{x^2-m}{2x}$$

$f'_m(x)$ a le signe de x^2-m car $2x>0$

$$f'_m(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-m=0 \\ \text{et} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{m}$$

<u>Signe de $f'_m(x)$</u>

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$-$	0	$+$	

<u>Sens de variation de f_m</u>

f_m est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{m}[$, strictement croissante sur $]\sqrt{m};+\infty[$ et admet un minimum local au point $\sqrt{m}$.

$$f_m(\sqrt{m}) = \frac{m-1-m\ln m}{4}$$

<u>Tableau de variation de f_m</u> $(m>0)$

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f_m(\sqrt{m})$	$\nearrow$	$+\infty$

2-/ a-/ Soit $M_0(x_0;y_0)$ un point du plan avec $x_0>0$ et $x_0 \neq 1$

<u>Montrons qu'il existe une seule courbe (Γ_m) qui passe par M_0</u>

$M_0(x_0;y_0) \in (\Gamma_m) \Leftrightarrow y_0 = f_m(x_0)$

$$\Leftrightarrow y_0 = \frac{x_0^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x_0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2m\ln x_0 = -4y_0 + x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{x_0^2-4y_0-1}{2\ln x_0}$$

Cette equation (1) d'inconnue m admet une seule solution pour $x_0>0$ et $x_0 \neq 1$

$\boxed{\text{Il existe donc une seule courbe } (\Gamma_m) \text{ qui passe par } M_0(x_0;y_0),\ x_0>0 \text{ et } x_0\neq 1}$

b-/ <u>Montrons qu'il existe un seul point A appartenant à toutes courbes (Γ_m)</u>

Posons $y = f_m(x)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2}\ln x = \frac{x^2-1}{4} - y$$

$$\begin{cases} \ln x = 0 \\ \dfrac{x^2-1}{4} - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Le point } A(1;0) \text{ appartient à toutes courbes } (\Gamma_m)}$

PROBLEME N°12

PARTIE I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$ où ln désigne la fonction logarithme neperien

On désigne par (C) la courbe représsentative de f relativement au repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$

1/ Etude de la fonction f

Ensemble de définition D.

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1-x \neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0\right\}$$

$$D =]-1;1[$$

Parité

$\forall x \in D, -x \in D$

$$f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$f(-x) = -f(x)$

Conclusion

La fonction f est impaire

Dérivée

f est continue et dérivable sur D et

$$\forall x \in D,\ f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$\forall x \in D,\ 1-x^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

f est donc strictement croissante sur D

Limites de f aux bornes de D

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} -1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} \frac{1+x}{1-x} = 0 \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ \text{et } \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array}\right.$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{1+x}{1-x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right.$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = +\infty$$

Tableau de variation de f

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b/ Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = 1 \qquad f(0) = 0$

$$\boxed{(T) : y = x}$$

c/ Etudions la position relative de (C) et (T).

Posons $h(x) = f(x) - x$.

Etudions h sur $]-1;1[$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x \underset{<}{\to} 1} h(x) = +\infty$$

$$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$\forall x \in]-1;1[,\ h'(x) \geq 0$ avec $h'(0) = 0$

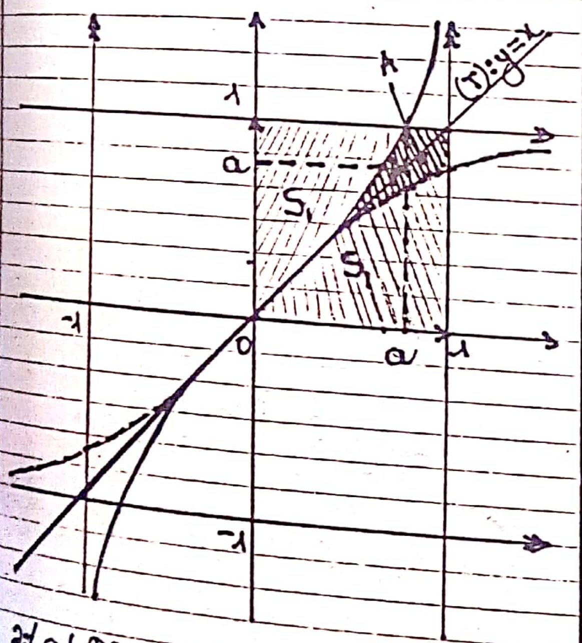
Tableau de variation de h

x	-1		0		1
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A partir du tableau de variation de h on déduit les resultats suivants consignés dans le tableau ci-dessous

x	-1		0		1
$h(x)$		$-$	0	$+$	
Position relative de (C) et (T)		(C) est en dessous de (T)	(C) coupe (T)	(C) est au dessus de (T)	

Construction de (C) et (T) sur un même dessin



2/ a/ Démontrons que f est une bijection de D sur un ensemble que nous déterminerons

D'après l'étude de f, elle est continue monotone, strictement croissante sur $]-1;1[$ avec $\lim\limits_{x \to -1^>} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^<} f(x) = +\infty$

f est donc une bijection de $]-1;1[$ sur

$f(]-1;1[) = \mathbb{R}$

b/ Explicitons $f^{-1}(x)$.

Posons $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

Représentation de f^{-1} sur le même dessin que celui de la question précédente.

Voir figure ci-contre.

3./ Déterminons le réel a tel que $f(a) = 1$

$f(a) = 1 \Leftrightarrow a = f^{-1}(1) = \frac{e^2-1}{e^2+1}$

$$\boxed{a = \frac{e^2-1}{e^2+1}}$$

b/ Soit E l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f^{-1}(x) \leq y \leq \inf(1; f(x)) \end{cases}$

où $\inf(u;v)$ désigne le plus petit des réels u et v.

Déterminons en fonction de a l'aire de E.

Soit A cette aire.

$\inf(1; f(x)) = \begin{cases} f(x) \text{ si } 0 \leq x \leq a \\ 1 \quad \text{ si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$

$A = \int_0^a \left(f(x) - f^{-1}(x)\right)dx + \int_a^1 \left(1 - f^{-1}(x)\right)dx$

Sur la figure on peut constater que :

$A = 1 - 2\int_0^a (1-f(x))\,dx = 1-2S_1$

$= 1 - 2a + 2\int_0^a f(x)\,dx$

$= 1 - 2a + \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$; $I = \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

Posons $U(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow U'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

$V'(x) = 1 \Leftrightarrow V(x) = x$

$I = \left[x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^a + \int_0^a \frac{2x}{x^2-1}dx$

$= 2a + \left[\ln|x^2-1|\right]_0^a$

$= 2a + \ln(1-a^2)$

$A = 1 - 2a + 2a + \ln(1-a^2)$

$\boxed{A = 1 + \ln(1-a^2)}$

PARTIE II

Soit f_α la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right)$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On désigne par $(C\alpha)$ la courbe représentative de f_α dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour toute la partie II, voir Problème N°10, PARTIE A, questions 3 à 7. en remplaçant a par α.

PARTIE III

Dans cette partie on considère les fonctions f_α définies au II avec $\alpha > 0$.

1-/ Déterminons les valeurs de α pour lesquelles l'équation d'inconnue réelle x : $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une solution strictement positive que l'on notera $x(\alpha)$

Posons $h_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x$

$Dh_\alpha =]-\alpha; \alpha[$

$\lim\limits_{x \to -\alpha^+} h_\alpha(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to \alpha^-} h_\alpha(x) = +\infty$

h_α est continue et dérivable sur Dh_α

et $\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2-x^2} - 1$

$= \frac{x^2-\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-x^2}$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) = \frac{x^2-(\alpha^2-\alpha)}{\alpha^2-x^2}$

α	0		1		$+\infty$
$\alpha^2-\alpha$	‖	$-$	0	$+$	

1er cas $0 < \alpha \leq 1$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) \geq 0$, h_α est monotone strictement croissante avec

$\lim\limits_{x \to -\alpha^+} h_\alpha(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \alpha^-} h_\alpha(x) = +\infty$

h définit donc une bijection de Dh_α vers $\mathbb{R}$. Or $h_\alpha(0) = 0$.

L'équation $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une seule solution $x = 0$

2e cas $\alpha > 1$

$h'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{\alpha^2-\alpha}$, $x_2 = \sqrt{\alpha^2-\alpha}$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $\alpha^2 - x^2 > 0$; $h'_\alpha(x)$ a donc le signe de $x^2-(\alpha^2-\alpha)$

Tableau de variation de h_α

x	$-\alpha$		x_1		0		x_2		α
$h'_\alpha(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h_\alpha(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h_\alpha(x_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h_\alpha(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation ci-dessus, la restriction de h_α à $]0;\alpha[$ s'annule pour une seule valeur $x(\alpha)$

Conclusion

Pour $\alpha > 1$, l'équation d'inconnue réelle x : $f_\alpha(x)-x=0$ admet une solution strictement positive notée $x(\alpha) > x_2 = \sqrt{6}$

2/ On prend dans cette question $\alpha = 3$ et on définit la suite (U_n) par :

$$\begin{cases} U_0 = -1/2 \\ U_{n+1} = f_3^{-1}(U_n) \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$$

a/ Démontrons que $U_1 > U_0$

Pour $\alpha = 3$, $x_2 = \sqrt{6}$, $h_3(\sqrt{6}) < 0$

$\forall x \in]0;\sqrt{6}[$, $h_3(x) < 0$.

$U_0 \in]0;\sqrt{6}[\Leftrightarrow h_3(U_0) < 0$

$\Leftrightarrow f_3(U_0) - U_0 < 0$

$\Leftrightarrow U_0 > f_3(U_0)$

or f_3 est monotone et strictement croissante sur

De plus f_3 définit une bijection de $]-3;3[$ vers $\mathbb{R}$; on en déduit que f_3^{-1} est monotone, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-3;3[$.

$$U_0 > f_3(U_0) \Leftrightarrow f_3^{-1}(U_0) > (f_3^{-1} \circ f_3)(U_0)$$

or $f_3^{-1}(U_0) = U_1$ et $(f_3^{-1} \circ f_3)(U_0) = U_0$

d'où $\boxed{U_1 > U_0.}$

Déduisons-en que la suite (U_n) est croissante

$U_1 > U_0$

Or f^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow f_3^{-1}(U_1) > f_3^{-1}(U_0) \Leftrightarrow U_2 > U_1$

Supposons $U_{n+1} > U_n$

$\Leftrightarrow f_3^{-1}(U_{n+1}) > f_3^{-1}(U_n)$

$\Leftrightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$

Conclusion :

$\forall n \geq 0$, $U_{n+1} > U_n$, la suite (U_n) est donc croissante.

b/ Démontrons que pour tout n entier naturel on a : $U_n < x(3)$

$U_0 = \frac{1}{2} < \sqrt{6}$ or $x(3) > \sqrt{6}$

$U_0 < x(3)$

Supposons $U_n < x(3)$ et démontrons que $U_{n+1} < x(3)$

$U_n < x(3) \Leftrightarrow f_3^{-1}(U_n) < f_3^{-1}(x(3))$

$\Leftrightarrow U_{n+1} < f_3^{-1}(\alpha(3))$

or $f_3(\alpha(3)) = \alpha(3) \Leftrightarrow f_3^{-1}(\alpha(3)) = \alpha(3)$

$\Leftrightarrow U_{n+1} < \alpha(3)$

Conclusion

$\boxed{\forall n \geq 0,\ U_n < \alpha(3)}$

c./- Démontrons que la suite (U_n) est convergente.

$U_n < \alpha(3) \Rightarrow (U_n)$ majorée

De plus (U_n) est croissante.

Conclusion

(U_n) est croissante et majorée donc (U_n) est convergente

Soit l la limite de la suite (U_n).

Démontrons que $l > \sqrt{6}$.

Si l est la limite de la suite (U_n) alors l est solution de l'équation

$l = f_3^{-1}(l) \Leftrightarrow f_3(l) = l \Leftrightarrow l = \alpha(3)$

or $\alpha(3) > \sqrt{6} \Rightarrow l > \sqrt{6}$.

$\boxed{l > \sqrt{6}}$

PROBLEME N°13

PARTIE A

On se propose de déterminer les solutions sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

(E) : $xy' - 2y = \ln x$, où y est une fonction de variable x.

1./ Déterminons les nombres réels a, b et c pour que la fonction P définie sur $]0;+\infty[$, par $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie : $xP'(x) - 2P(x) = 0$ (1)

$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$

P vérifie (1) ssi :

$x(2ax+b) - 2(ax^2 + bx + c) = 0$

$\Leftrightarrow -bx - 2c = 0 \Rightarrow b = c = 0$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $b = 0$, $c = 0$; $P(x) = ax^2$ vérifie $xP'(x) - 2P(x) = 0$ (1)

2./ f étant une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on pose $g = \frac{f}{P}$ où P est la fonction déterminer dans la question 1./ avec $a \neq 0$.

a./ Démontrons que la fonction f est solution de (E) ssi g est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$

$g = \frac{f}{P} \Leftrightarrow f = gP \Leftrightarrow f' = g'P + gP'$

f solution de (E) ssi :

$xf'(x) - 2f(x) = \ln x$

$\Leftrightarrow x[g'(x)P(x) + g(x)P'(x)] - 2g(x)P(x) = \ln x$

$\Leftrightarrow ax^3 g'(x) + 2ax^2 g(x) - 2ax^2 g(x) = \ln x$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{\ln x}{ax^3} \Leftrightarrow g$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$

Conclusion :

f est solution de (E) ssi g est une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$

b./ Déterminons l'ensemble des primitives definies sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$

Posons $h(x) = \frac{\ln x}{x^3}$. Soit H une primitive de h on a :

$$H(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt \quad e>0$$

$$= \int_e^x \left(\frac{1}{t^3}\ln t\right) dt$$

Posons $U(t) = \ln t \Rightarrow U'(t) = \frac{1}{t}$

$V'(t) = \frac{1}{t^3} \Rightarrow V(t) = -\frac{1}{2t^2}$

$$H(x) = \left[-\frac{1}{2t^2}\ln t\right]_e^x + \frac{1}{2}\int_e^x \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} + c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{4x^2}(1+2\ln x) + c,\ c\in\mathbb{R}$$

l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$ est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto -\frac{1}{4x^2}(1+2\ln x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

c./ Déduisons-en que l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{1}{a}\frac{\ln x}{x^3} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{4ax^2}(1+\ln x^2) + c$$

f solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)\cdot p(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + acx^2$; posons $ac = \alpha$

$$f(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Conclusion

l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto -\frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

3./ a/ Trouvons la fonction φ, definie et derivable sur $]0;+\infty[$, vérifiant (E) tel que $\varphi(1) = 0$:

$\varphi(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2$, $\varphi(1) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$ d'où :

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \frac{1}{4}x^2}$$

b./ Etudions les variations de φ.

$$\varphi(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \frac{1}{4}x^2$$

$D\varphi =]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1+\ln x^2}{4} + \frac{1}{4}x^2$$

$$= \lim_{X\to 0^+} -\frac{1+\ln X}{4} + \frac{1}{4}X,\quad X = x^2$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1+\ln X}{4} + \frac{1}{4}X,\ X = x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}-1\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

Dérivée

φ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

et $\forall x>0$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

$$\varphi'(x) = \frac{x^2-1}{2x}$$

$$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \text{et} \\ x\in D\varphi \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

$\forall x>0$, $2x>0$; $\varphi'(x)$ a donc le signe de x^2-1

Signe de $\varphi'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

φ est décroissante sur $]0;1[$, croissante sur $]1;+\infty[$ et admet un minimum local au point 1 ; $\varphi(1)=0$

Tableau de variation de φ

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Construction de la courbe (C) représentative de φ.

Branches infinies

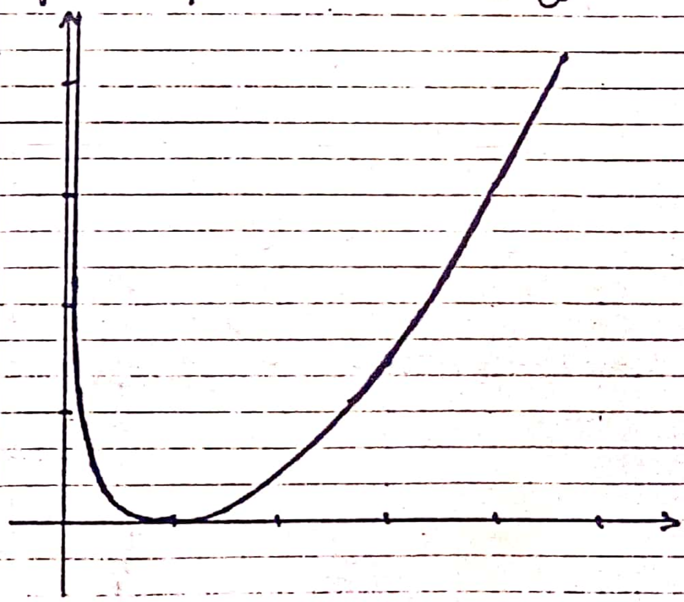
$\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$; la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équat° $x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{4x} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{4}x$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x = +\infty \end{cases}$$

La courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy)



PARTIE B

1/ Soit λ un nombre réel strictement positif.

Calculons en fonction de λ l'intégrale : $I(\lambda) = \int_\lambda^1 \varphi(x)\,dx$

$$I(\lambda)=\int_\lambda^1 \varphi(x)\,dx$$

$$=\int_\lambda^1\left(-\frac{1+\ln x^2}{4}+\frac{1}{4}x^2\right)dx$$

$$=\int_\lambda^1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}(x\ln x-x)\right]_\lambda^1$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{2}\lambda\ln\lambda$$

$$\boxed{I(\lambda)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{2}\lambda\ln\lambda}$$

2/ Montrons que $\lim\limits_{\lambda \to 0^>} I(\lambda)=\frac{1}{3}$

On sait que $\lim\limits_{\lambda \to 0^>} -\frac{1}{12}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda=0$

et $\lim\limits_{\lambda \to 0^>} \lambda\ln\lambda=0.$

d'où $\boxed{\lim\limits_{\lambda \to 0^>} I(\lambda)=\frac{1}{3}}$

3/ Soit $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$

a/ Montrons que pour tout entier naturel k tel que $1\le k\le n-1$ et pour tout x de $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ on a : $\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

$1\le k\le n-1 \Rightarrow 0<\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n}\le 1$

or φ est décroissante sur $]0;1]$

$\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n} \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

Conclusion :

$1\le k\le n-1$ et $x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ on a :

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

b/ Montrons que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

On sait que $\forall x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$,

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)dx\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

or $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)=\sum\limits_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\varphi(x)dx+\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}}\varphi(x)dx+\dots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}\varphi(x)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\varphi(x)dx=I\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a donc

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Déduisons-en que :

$$I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right)$$

On sait que $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

De plus

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{or}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

d'où $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ (2)

(1) et (2) nous permettent d'écrire

$$\boxed{I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right)}$$

4·/ Déduisons des questions 2·/ et 3·/

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\lambda\to 0} I(\lambda)$ avec $\lambda=\frac{1}{n}$

$= \frac{1}{3}$ d'après la question 2·/

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0^{>}} x\varphi(x)$, $x=\frac{1}{n}$

$$= \lim_{x\to 0^{>}} -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{4}x^3$$

$$= 0$$

On a donc

$$\begin{cases} I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right) \\ \lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3} \\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right) = 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{3}}$$

5·/ a·/ Montrons que pour tout entier naturel non nul, n :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\times\frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)-\frac{1}{n}\times\frac{n}{4}$$

$$=\frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)-\frac{1}{4}$$

Conclusion : Pour tout entier n non nul :

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)-\frac{1}{4}}$$

b·/ Etablissons les égalités

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ;\ \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)=\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 \quad (a)$$

Remplaçons dans (a), x par $1, 2, \dots n$

$$2^3 = 1^3+3\times1^2+3\times1+1$$

$$3^3 = 2^3+3\times2^2+3\times2+1$$

$$4^3 = 3^3+3\times3^2+3\times3+1$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^3 = n^3+3\times n^2+3\times n+1$$

En additionnant membres à membres les n égalités obtenues et après simplification on a :

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n + 1$$

$$(n+1)^3 = (n+1) + \frac{3n(n+1)}{2} + 3\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n+1}{3}\left(n^2 + 2n - \frac{3n}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{3}\cdot\frac{2n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n}{1}\right) + \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n}{3}\times\cdots\frac{n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)}$$

c./ Soient les deux suites :

$V_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ et $U_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n\in\mathbb{N}^*$

<u>Utilisons les résultats précédents pour calculer la limite des deux suites</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\times 4n^3} = \frac{1}{12}$$

On en déduit donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum \ln\left(\frac{n}{k}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = 1 \text{ Soit } \lim_{n\to+\infty} V_n = 1$$

De plus :

$$\ln U_n = \ln n - \frac{1}{n}\ln n! = \frac{1}{n}(n\ln n - \ln n!)$$

$$\ln U_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = V_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln U_n = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = e.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 1} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = e.}$$

PROBLEME N°14

PARTIE

Soit h la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $h(x) = \frac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}$

1./ a./ <u>Ensemble de définition D de h</u>

$$D = \{x\in\mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 2+\ln x^2 \neq 0\}$$

Posons $2+\ln x^2 = 0 \Leftrightarrow 2+2\ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow \ln|x| = -1 \Leftrightarrow |x| = e^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$ ou $x = \frac{1}{e}$

$$\boxed{D = \left\{-\frac{1}{e}; 0; \frac{1}{e}\right\}}$$

b-/ Montrons que h admet un prolongement par continuité au point 0

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}$$

$$= \lim_{X\to -\infty} \frac{-X+2}{X+2} \text{ avec } X = \ln x^2$$

$$= -1$$

$\lim_{x\to 0} h(x) = -1 \in \mathbb{R}$; h admet donc un prolongement par continuité en 0

Précisons ce prolongement

Soit p ce prolongement on a :

$$\begin{cases} p(x) = h(x) \text{ si } x \neq 0 \\ p(0) = -1 \end{cases}$$

2-/ Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

a-/ Dérivabilité de f en 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = -1 = f(0)$; f est continue en 0 et $f(0) = -1$.

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{1}{x}\left(\frac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}+1\right)$$

$$= \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{2}{x(1+\ln(-x))}$$

$$= \lim_{X \underset{>}{\to} 0} -\frac{2}{X+X\ln X}, \quad X = -x$$

$$= -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{X \underset{>}{\to} 0} X\ln X = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{X \underset{>}{\to} 0} \frac{2}{X} = +\infty. \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{2}{x+x\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty ; \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

f n'est donc pas dérivable en 0.

b-/ Etudions les variations de f.

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{e} ; \frac{1}{e}\right\}$.

$\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

la fonction f est paire.

Etudions f sur $[0 ; \frac{1}{e}[\cup]1/e ; +\infty[$ et complettons dans la symétrie par rapport à (oy).

Posons $I = [0 ; 1/e[\cup]1/e ; +\infty[$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} \frac{1}{e}} f(x) = \lim_{X \underset{<}{\to} -2} \frac{2-X}{2+X}, \quad X = \ln x^2$$

$$= -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} 2-X \to 4 \\ 2+X \to 0 \\ 2+X < 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} \frac{1}{e}} f(x) = \lim_{X \underset{>}{\to} -2} \frac{2-X}{2+X}, \quad X = \ln x^2$$

$$= +\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} 2-X \to 4 \\ 2+X \to 0 \\ 2+X > 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} \frac{1}{e}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \underset{>}{\to} \frac{1}{e}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{X\to +\infty} \frac{2-X}{2+X}, \quad X = \ln x^2$$

$$= -1 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$$

Dérivée

f est continue et dérivable sur I^*.

et $\forall x \in I^*$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{x}(2+\ln x^2) - \frac{2}{x}(2-\ln x^2)}{(2+\ln x^2)^2}$$

$$= -\frac{8}{x(2+\ln x^2)^2}$$

$\forall x \in D_f$, $(2+\ln x^2)^2 > 0$; $f'(x)$ a donc le signe de $-x$.

Tableau de variation de f.

f étant paire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{e}\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{e}\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ <}} f(x)$

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

c-/ Tracer de (C), courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Voir page suivante)

La courbe (C) admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations : $x = -\frac{1}{e}$ et $x = \frac{1}{e}$ et une horizontale d'équation $y = -1$.

La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

3-/ On désigne par $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $]1/e ; +\infty[$

a-/ Montrons que $\tilde{f}$ admet une bijection réciproque notée $\tilde{f}^{-1}$

D'après le tableau de variation de f, $\tilde{f}$ est continue, monotone, strictement décroissante sur $]1/e ; +\infty[$ avec :

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ >}} \tilde{f}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = -1$

$\tilde{f}$ réalise une bijection de $]1/e ; +\infty[$ vers $]-1 ; +\infty[$.

$\tilde{f}$ admet donc une bijection réciproque notée $\tilde{f}^{-1}$.

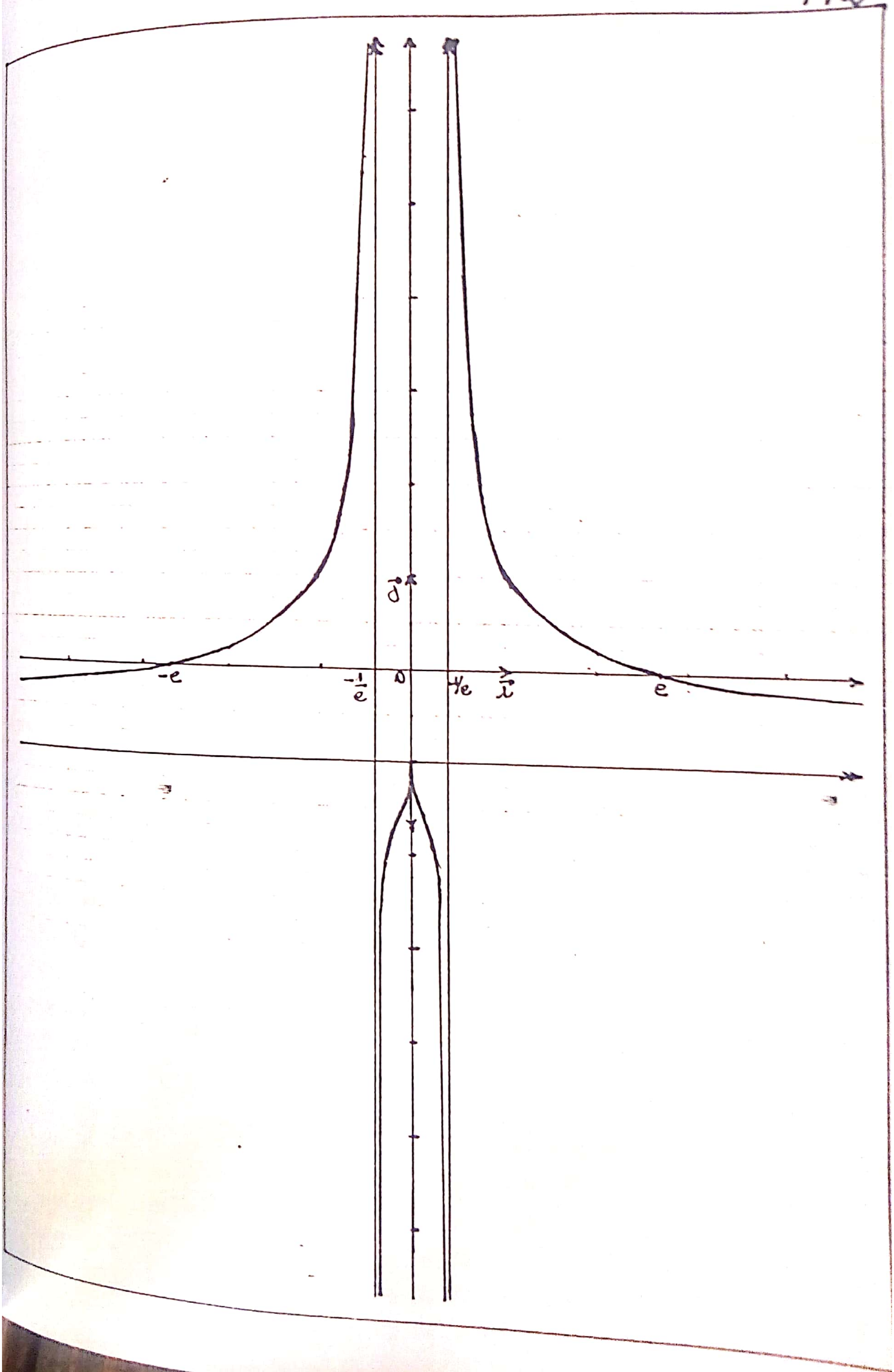
b-/ Tableau de variation de $\tilde{f}^{-1}$

x	-1		$+\infty$
$(\tilde{f}^{-1})'(x)$	‖	$-$	
$\tilde{f}^{-1}(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

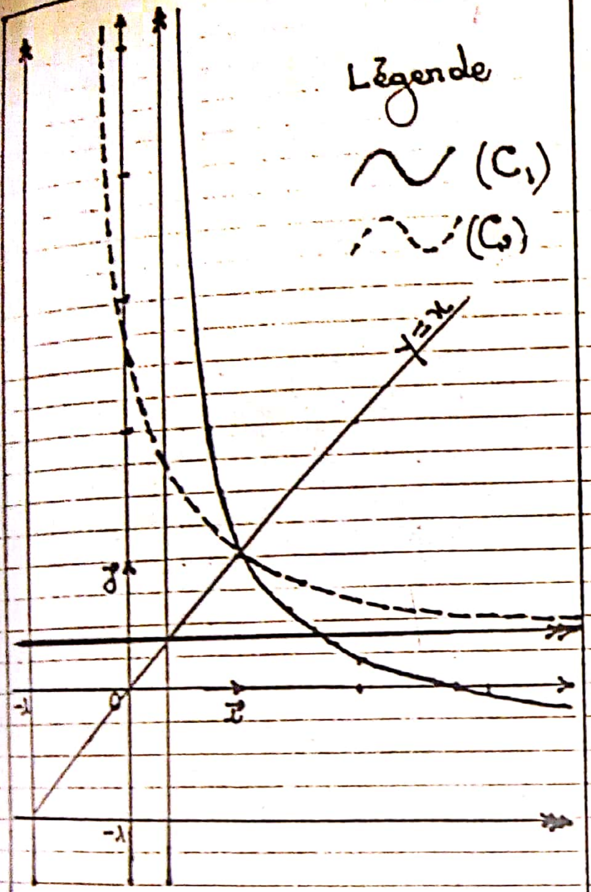
c-/ Traçons la courbe (C_1) de $\tilde{f}$ et (C_2) de $\tilde{f}^{-1}$ dans un autre repère orthonormé que celui de (C)

(Voir page 173)

Rappelons (C_2) est l'image de (C_1) dans la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice



$\vec{j}$
$-e$
$-\frac{1}{e}$
O
$1/e$
$\vec{i}$
e



d-/ Montrons que $\tilde{f}^{-1}$ est dérivable, puis calculons $(\tilde{f}^{-1})'(0)$

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $\tilde{f}^{-1}(x) \in]1/e;+\infty[$

De plus $\tilde{f}$ est dérivable sur $]1/e;+\infty[$ et $\forall x \in]1/e;+\infty[$, $\tilde{f}'(x) \neq 0$

$\tilde{f}^{-1}$ est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$

Calculons $(\tilde{f}^{-1})'(0)$.

$$(\tilde{f}^{-1})'(0) = \frac{1}{\tilde{f}'[\tilde{f}^{-1}(0)]} \qquad \tilde{f}^{-1}(0) = e$$

$$= \frac{1}{\tilde{f}'(e)} \qquad \tilde{f}'(e) = -\frac{8}{16e}$$

$$= \frac{-16e}{8} = -2e$$

$$\boxed{(\tilde{f}^{-1})'(0) = -2e}$$

e-/ Montrons que l'équation : $x \in]1/e;+\infty[$, $\tilde{f}(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans $]1/e;1[$.

$\tilde{f}$ réalise une bijection de $]1/e;+\infty[$ vers $]-1;+\infty[$ or $2 \in]-1;+\infty[$; il existe donc un unique réel x_0 de $]1/e;+\infty[$ tel que $\tilde{f}(x_0) = 2$.

De plus : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} \tilde{f}(x) = +\infty$ et $\tilde{f}(1) = 1$

$2 \in]1;+\infty[\Leftrightarrow x_0 \in]1/e;1[$

Conclusion

$$\boxed{\text{L'équation : } x \in]1/e;+\infty[,\ \tilde{f}(x) = 2 \text{ admet une solution unique } x_0 \text{ dans l'intervalle.}}$$

Donnons un encadrement de x_0 à 10^{-1} près

$\tilde{f}(0,7) = 2,108 \qquad \tilde{f}(0,8) = 1,57$

$\Leftrightarrow \boxed{0,7 < x_0 < 0,8}$

PARTIE B

On considère la fonction g définie par : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1 - e^{|x|}}{1 + e^{|x|}}$$

1-/ a-/ Etudions les variations de g

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 1 + e^{|x|} \neq 0\}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + e^{|x|} \neq 0$

$$\boxed{D_g = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[}$$

$\forall x \in D_g,\ -x \in D_g$ et $g(-x) = g(x)$

La fonction g est donc paire.

$g(0) = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{|x|}}{1 + e^{|x|}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{x}}{1 + e^{x}}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{1 - X}{1 + X},\ X = e^{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -1$$

g étant paire, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$\forall x \geq 0,\ g(x) = \dfrac{1 - e^{x}}{1 + e^{x}}$

$$g'(x) = \frac{-2e^{x}}{(1 + e^{x})^2}$$

$\forall x \geq 0,\ g'(x) < 0.$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$ ‖ $-\frac{1}{2}$	$-$	
$g(x)$	-1	↗	0	↘	-1

On montre aisément que :

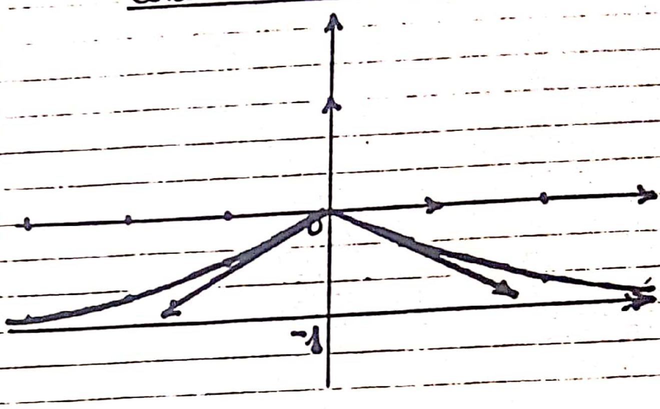
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$

g n'est donc pas dérivable en 0.

b-/ Traçons la courbe (S) de g dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La courbe (S) possède une asymptote horizontale d'équation $y = -1$; De plus (S) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Construction de la courbe (S)



2-/ a-/ Montrons qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout x réel strictement positif on a :

$$g(x) = \frac{ae^{x}}{1 + e^{x}} + b$$

$\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{1 - e^{x}}{1 + e^{x}} = \dfrac{1 + e^{x} - 2e^{x}}{1 + e^{x}}$

$$g(x) = \frac{-2e^{x}}{1 + e^{x}} + 1$$

Par identification on a :

$a = -2$	$b = 1$

b-/ Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda$ et (E_λ) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant $0 \leq x \leq \lambda$ et $-1 \leq y \leq g(x)$

Calculons l'aire A de l'ensemble (E_λ)

$$A = \int_0^{\lambda} (g(x) + 1)\,dx = \int_0^{\lambda} \left(\frac{-2e^{x}}{1 + e^{x}} + 2\right) dx$$

$$= \left[-2\ln(1 + e^{x}) + 2x\right]_0^{\lambda}$$

$$= -2\ln(1 + e^{\lambda}) + 2\lambda + 2\ln 2$$

$$\boxed{A = 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln(1+e^{\lambda})}$$

Calculons $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A$

$A = 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln(1+e^{\lambda})$

$= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln[e^{\lambda}(1+e^{-\lambda})]$

$= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln e^{\lambda} - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$A = 2\ln 2 - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 2\ln 2 - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$= 2\ln 2$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \ln(1+e^{-\lambda}) = \ln 1 = 0$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} A = 2\ln 2}$$

PROBLEME N°15

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1/ Déterminons les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^{>}} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to 0^{>}} 2\ln(x+1) - 2\ln x - \frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^{>}} \ln(x+1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^{>}} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^{>}} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$= 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln 1 = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

2-/ a-/ Dressons le tableau de variation de g.

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$.

$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ car $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0;+\infty[$.

g est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{-2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-2(x+1)+x}{x(x+1)^2}$

$$\boxed{\forall x > 0,\ g'(x) = -\frac{x+2}{x(x+1)^2}}$$

Sens de variation

$\forall x > 0, \begin{cases} x+2 > 0 \\ x(x+1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$

g est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de g

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0

b/ Déduisons-en le signe de $g(x)$

D'après le tableau de variation de g on a :

$\boxed{\forall x>0,\ g(x)>0}$

PARTIE B

1/ a/ Démontrons que f est continue en 0

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2\ln(x+1) - x^2\ln x$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2\ln(x+1) - x \cdot x\ln x$$

$$= 0 \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 = f(0).$$

$\boxed{\text{La fonction est donc continue en } 0}$

b/ Démontrons que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(x+1) - x\ln x$$

$$= 0\times\ln 1 - 0 = 0$$

or $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

$\boxed{\text{La fonction f est dérivable en 0 et } f'(0)=0}$

Précisons la tangente à (C) à l'origine du repère

$f(0)=0$ et $f'(0)=0$;

$\boxed{\text{La courbe (C) admet à l'origine du repère une tangente horizontale.}}$

2/ a/ Calculons $f'(x)$ pour $x>0$

$$f'(x) = 2x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x(x+1)} \cdot x^2$$

$$= 2x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}$$

$$= x\left[2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right].$$

$\boxed{f'(x) = x\,g(x) \text{ pour } x>0}$

b/ Déduisons-en le sens de variation de la fonction f.

D'après A/ 1.b on a : $\forall x>0,\ g(x)>0$

$\Leftrightarrow x g(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$ pour tout $x>0$

$\boxed{\text{La fonction f est donc strictement croissante sur } [0;+\infty[.}$

3/ a/ Calculons la limite en $+\infty$ de f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{t^2}\ln(1+t),\ t=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ >}} \frac{1}{t}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$= +\infty \text{ car } \left|\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} \frac{1}{t} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

b/ Dressons le tableau de variat° de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4/ On pose $h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$ pour $x>0$ et $I(x) = \int_0^{1/x}\left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right)dt$

a/ Calculons $I(x)$

$$I(x) = \int_0^{1/x}\left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right)dt$$

$$= \left[\ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^{1/x}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{I(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

Vérifions que $h(x) = x^2 I(x)$

$$h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{h(x) = x^2 I(x)}$$

b/ Démontrons que pour $t>0$,

$$0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2$$

On sait que : $\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{t+1}$

$$0 < t \Rightarrow 1 + t > 1$$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+t} < 1$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{t^2}{1+t} \le t^2 \text{ car } t^2 \ge 0.$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } t>0,\ 0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2}$$

c/ Déduisons-en que : $0 \le I(x) \le \frac{1}{3x^3}$

$$0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \int_0^{1/x}\left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right)dt \le \int_0^{1/x} t^2\,dt$$

or $\int_0^{1/x}\left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right)dt = I(x)$

et $\int_0^{1/x} t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{1/x} = \frac{1}{3x^3}$

d'où $\boxed{0 \le I(x) \le \frac{1}{3x^3}}$

d/ Déterminons la limite en $+\infty$ de $h(x)$

$$0 \le I(x) \le \frac{1}{3x^3} \Leftrightarrow 0 \le x^2 I(x) \le \frac{1}{3x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le h(x) \le \frac{1}{3x} \text{ or } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x} = 0$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ d'après le théorème des Gendarmes.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0}$$

Déterminons le signe de $h(x)$

$\forall x>0,\ h(x) \geq 0$

e/ Soit (D) la droite d'équation

$$y = x - \frac{1}{2}$$

Déterminons ce que représente (D) pour (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\boxed{\text{La droite (D) d'équation } y = x - \frac{1}{2} \text{ est asymptote oblique à la courbe (C) en } +\infty}$

f/ Position relative de (C) par rapport à la droite (D)

On sait que pour tout $x>0$, $h(x)>0$

$\Leftrightarrow f(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right) > 0$

$\boxed{\text{La courbe (C) est au dessus de la droite (D).}}$

PARTIE C

1/ Construction de (C) et (D).

(Voir page suivante)

2/ Pour $0<\lambda\leq 1$, on pose $A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$

a/ Calculons $A(\lambda)$ en fonction de λ

$$A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx = \int_\lambda^1 x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$$

Posons $U(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Rightarrow U'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$

$V'(x) = x^2 \Rightarrow V(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$A(\lambda) = \left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_\lambda^1 + \frac{1}{3}\int_\lambda^1 \frac{x^2}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3}\int_\lambda^1\left(\frac{1}{x+1} - 1 + x\right)dx$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3}\left[\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2\right]_\lambda^1$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\ln(1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\right)$$

$$\boxed{A(\lambda) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left[\lambda^3\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \ln(1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\right]}$$

3/ Calculons $\lim\limits_{\lambda\to 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to0} \lambda^3\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to0} \lambda^3\ln(\lambda+1) - \lambda^2\cdot\lambda\ln\lambda$$

$$= 0$$

$\lim\limits_{\lambda\to0} \ln(1+\lambda) = 0$ et $\lim\limits_{\lambda\to0} -\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 = 0$

$$\boxed{\lim_{\lambda\to0} A(\lambda) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}}$$

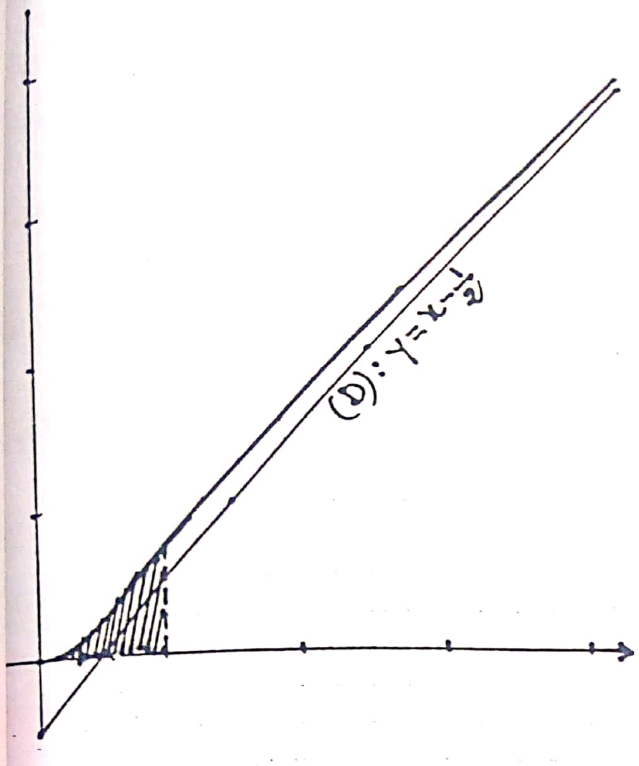
b/ Déduisons-en l'aire en cm^2 de la partie Δ du plan limitée par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équat°

$x = 0$ et $x = 1$

Soit S cette aire on a :

$$S = \left(\lim_{\lambda\to0} A(\lambda)\right) \times 4cm^2$$

$$\boxed{S = \left(\frac{8}{3}\ln 2 - 2\right)cm^2 \simeq 1{,}84\,cm^2}$$



PROBLEME N°16

On considère la fonction $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$ et (C_n) sa courbe représentative.

PARTIE A

1/ Etude de la fonction f_1

a/ Calculons les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$

$f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ $\quad D f_1 =]0;+\infty[$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f_1(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$= -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0 \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right.$$

$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f_1(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$

Déduction pour la courbe (C_1)

La courbe (C_1) possède deux asymptotes dont une verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équat° $y = 0$

b/ Etudions le sens de variation de f_1 et dressons son tableau de variation

f_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$,

$$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

$\forall x > 0$, $x^3 > 0$; $f_1'(x)$ a donc le signe de $1 - 2\ln x$.

Signe de $f_1'(x)$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	−	

Sens de variation de f_1

$\forall x \in]0;\sqrt{e}[$, $f_1'(x) > 0$; f_1 est donc croissante sur $]0;\sqrt{e}[$

$\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[$, $f_1'(x) < 0$; f_1 est donc décroissante sur $]\sqrt{e};+\infty[$.

f_1 admet un maximum local au point $\sqrt{e}$

$f_1(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

Tableau de variation de f_1

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

2./ Etude de la fonction f_2 pour $n=2$

$f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$ $\quad \mathcal{D}f_2 =]0;+\infty[$

a./ Calculons les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\ln x\right)^2$$

$$= +\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_2(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$

Déduction pour la courbe (C_2)

La courbe (C_2) possède deux asymptotes dont une verticale d'équation $x=0$ et une horizontale d'équation $y=0$

b./ Etudions le sens de variation de f_2 et dressons son tableau de variation

f_2 est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$,

$$f_2'(x) = \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{x}\ln x\right)x^2 - 2x(\ln x)^2}{x^4}$$

$$f_2'(x) = \frac{2(1-\ln x)\ln x}{x^3}$$

$\forall x > 0$, $x^3 > 0$; $f_2'(x)$ a donc le signe de $(1-\ln x)\ln x$.

$f_2'(x) = 0 \iff 1-\ln x = 0$ ou $\ln x = 0$

$\iff x = e$ ou $x = 1$

$f_2(e) = \frac{1}{e^2}$; $f_2(1) = 0$

Signe de $f_2'(x)$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_2'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_2

$\forall x \in]0;1[\cup]e;+\infty[$, $f_2'(x) < 0$

f_2 est donc décroissante sur $]0;1[$ et sur $]e;+\infty[$

$\forall x \in]1;e[$, $f_2'(x) > 0$; f_2 est donc croissante sur $]1;e[$

f_2 admet un minimum local au point 1 et un maximum local au point e

Tableau de variation de f_2

x	0		1		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖		0		0		
$f_2(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	0

3/ a/ Position relative des courbes (C_1) et (C_2)

Posons $d(x) = f_2(x) - f_1(x)$

$$= \frac{(\ln x)^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$d(x) = \frac{(\ln x - 1)\ln x}{x^2}$$

$\forall x > 0$, $x^2 > 0$; $d(x)$ a donc le signe de $(\ln x - 1)\ln x$.

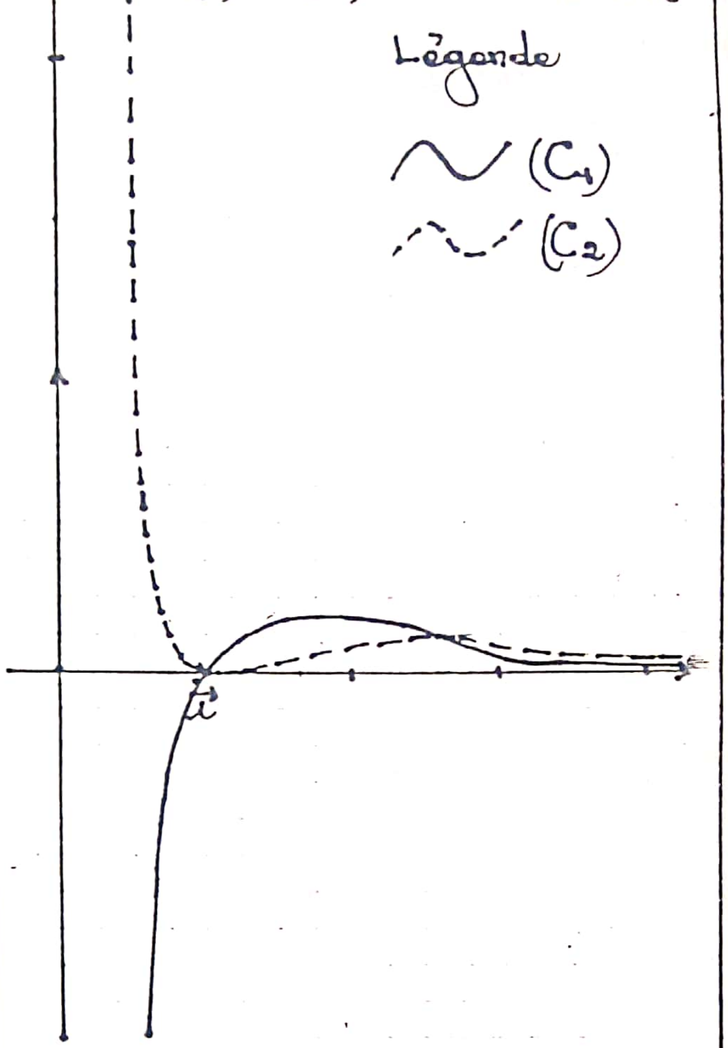
Remarque : $d(x)$ a le signe de $-f_2'(x)$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

x	0		1		e		$+\infty$
$d(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Posit. relative de (C_1) et (C_2)	‖	(C_2) est au dessus de (C_1)	(C_2) coupe (C_1)	(C_2) est en dessous de (C_1)	(C_2) coupe (C_1).	(C_2) est au dessus de (C_1)	

b/ Construction des courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère (Voir figure ci-contre)

CONSTRUCTION DES COURBES (C_1) et (C_2) PROBLEME N°16



PARTIE B : Cas général

1/ Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes A et B dont nous préciserons les coordonnées

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(1) = \frac{(\ln 1)^n}{1^2} = \frac{0^n}{1} = 0$$

$$f_n(e) = \frac{(\ln e)^n}{e^2} = \frac{1^n}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Conclusion

$\boxed{\text{Toutes les courbes } (C_n) \text{ passent par deux points fixes } A(1;0) \text{ et } B\left(e;\frac{1}{e^2}\right)}$

2/ Etudions suivant la parité de n, les variations de f_n

$\forall n \geq 1$, $\mathcal{D}f_n =]0;+\infty[$

Limites de f_n aux bornes de $\mathcal{D}f_n$

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}(\ln x)^n$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$ on a:

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{X^n}{e^{2X}} \quad \text{avec } X = \ln x$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{(nt)^n}{e^{2nt}} \quad \text{avec } t = \frac{X}{n}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} n^n \left(\frac{t}{e^t}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{e^t}\right)^n$$

$$= n^n \times 0^n \times 0^n = 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 1,\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$$

Dérivée

Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$, on a:

$$f_n'(x) = \frac{n \cdot \frac{1}{x}(\ln x)^{n-1} \cdot x^2 - 2x(\ln x)^n}{x^4}$$

$$f_n'(x) = \frac{(n - 2\ln x)(\ln x)^{n-1}}{x^3}$$

1er cas n impair

n impair $\Rightarrow$ $n-1$ pair

$\forall x > 0$, $x^3 > 0$ et $(\ln x)^{n-1} \geq 0$

$f_n'(x)$ a donc le signe de $n - 2\ln x$.

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{n/2}$ ou $x = 1$

Signe de $f_n'(x)$

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau précédent, f_n est croissante sur $]0; e^{n/2}[$ et décroissante sur $]e^{n/2};+\infty[$

f_n admet un maximum local en $e^{n/2}$

$f_n(1) = 0$; $f_n(e^{n/2}) = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

Tableau de variation de la fonction f_n pour n impair

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖		0		0		
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^n$	$\searrow$	0

Deuxième cas: n pair

$\forall x > 0$, $x^3 > 0$.

n pair $\Leftrightarrow$ $n-1$ impair.

$f_n'(x)$ a le signe de $(n - 2\ln x)(\ln x)^{n-1}$

Signe de $f_n'(x)$

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$(\ln x)^{n-1}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$n - 2\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_n

- $\forall x \in]0;1[\cup]e^{n/2};+\infty[$, $f'_n(x) < 0$

f_n est décroissante sur $]0;1[$ et sur $]e^{n/2};+\infty[$

- $\forall x \in]1;e^{n/2}[$, $f'_n(x) > 0$; f_n est croissante sur $]1;e^{n/2}[$

- f_n admet un minimum local au point 1 et un maximum local au point $e^{n/2}$.

Tableau de variation de f_n pour n pair

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^n$	$\searrow$	0

3/ Position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

Posons $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$d_n(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2}$$

$d_n(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = e$.

1er cas n impair

x	0		1		e		$+\infty$
$d_n(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Posit° relative de (C_n) et (C_{n+1})	‖	(C_{n+1}) est au dessus de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n)	(C_{n+1}) est en dessous de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n)	(C_{n+1}) est au dessus de (C_n)	

2e cas n pair

x	0		1		e		$+\infty$
$d_n(x)$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	
Posit° relative de (C_{n+1}) et (C_n)	‖	(C_{n+1}) est en dessous de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n)	(C_{n+1}) est en dessous de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n).	(C_{n+1}) est au dessus de (C_n)	

PARTIE C

On considère la suite (I_n) pour tout entier naturel n non nul définie par :

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$$

a/ Montrons que pour tout n entier naturel non nul, $I_n \geq 0$

$1 \leq x \leq e \iff 0 \leq \ln x \leq 1$ car $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$ car $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\iff 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ car $x^2 > 0$

$\iff 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$ soit $I_n \geq 0$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ I_n \geq 0}$$

b/ Sens de variation de (I_n).

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\,dx - \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$$

$$= \int_1^e \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2}\,dx$$

$\forall x \in [1;e]$, $\begin{cases} \ln x - 1 \leq 0 \\ (\ln x)^n \geq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{(\ln x-1)(\ln x)^n}{x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{(\ln x-1)(\ln x)^n}{x^2}\,dx \leq 0$$

$\Leftrightarrow$ $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$

<u>Convergence de (I_n)</u>

$\begin{cases} I_n \geq 0 \Rightarrow (I_n) \text{ minorée} \\ (I_n) \text{ décroissante} \end{cases}$

(I_n) est minorée et décroissante donc (I_n) est convergente

2/ a/ <u>Calculons I_1</u>

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}\ln x\,dx$$

Posons $U(x) = \ln x \Rightarrow U'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{x}$

$$I_1 = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$$

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

b/ <u>Montrons, en utilisant la méthode d'intégration par parties, que pour</u> tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

$$I_{n+1} = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}(\ln x)^{n+1}\,dx$$

Posons $U(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow U'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$

$V'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{x}$

$$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e + (n+1)\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n}$$

<u>Déduisons-en la valeur de I_2</u>

$$I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

$$\boxed{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

3/ <u>Calculons en cm^2 l'aire A du domaine plan délimité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$</u>

$$A(cm^2) = 20\left[\int_1^e \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx\right]$$

$$= 20(I_1 - I_2)$$

$$= 20\left(1 - \frac{2}{e} - 2 + \frac{5}{e}\right)$$

$$\boxed{A(cm^2) = 20\left(\frac{3}{e} - 1\right)}$$

4/ <u>En utilisant les résultats de la question C-2-b, montrons par récurrence que :</u>

$$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$I_1 = 1 - \frac{2}{e} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1!}I_1 = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!}\right)$$

Supposons que pour tout $n \geq 1$,

$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$ et

montrons que:

$\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(n+1)!}\right)$

$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$

$\Rightarrow I_n = n!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)\right]$

$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$

$= -\frac{1}{e} + (n+1)\, n!\left[1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)\right]$

$= -\frac{1}{e} + (n+1)!\left[1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!}\left(I_{n+1}+\frac{1}{e}\right) = 1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = 1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(n+1)!}\right)$

Conclusion

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n!} I_n = 1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)}$$

5./ a./ Montrons que $0 \leq I_n \leq 1$

$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^2}dx$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1-\frac{1}{e} < 1$

Conclusion:

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq I_n \leq 1}$$

b./ Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$

$0 \leq I_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} I_n \leq \frac{1}{n!}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ d'où

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0}$ d'après le théorème des Gendarmes.

Déduisons-en la valeur de:

$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} = e$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} = e}$$

PROBLEME N°17

On considère les fonctions f_a définies pour tout réel x non nul par:

$f_a(x) = \frac{a}{x} + \ln x^2$ où a désigne un paramètre réel. On appelle (C_a) la courbe représentative de f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1./ a./ Etudions la fonction f_0

$f_0(x) = \ln x^2 = 2\ln|x|$

$Df_0 = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_0(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\ln|x|$$

$$= \lim_{X\to+\infty} 2\ln X \ , \quad X=|x|$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0} 2\ln|x|$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\ln X \ , \quad X=|x|$$

$$= -\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} f_0(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} f_0(x) = -\infty$

Dérivée

$x \mapsto |x|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\neq 0$, $|x|>0$.

De plus $x\mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction f_0 est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\neq 0$, $f_0'(x)=\frac{2}{x}$

Sens de variation de f_0

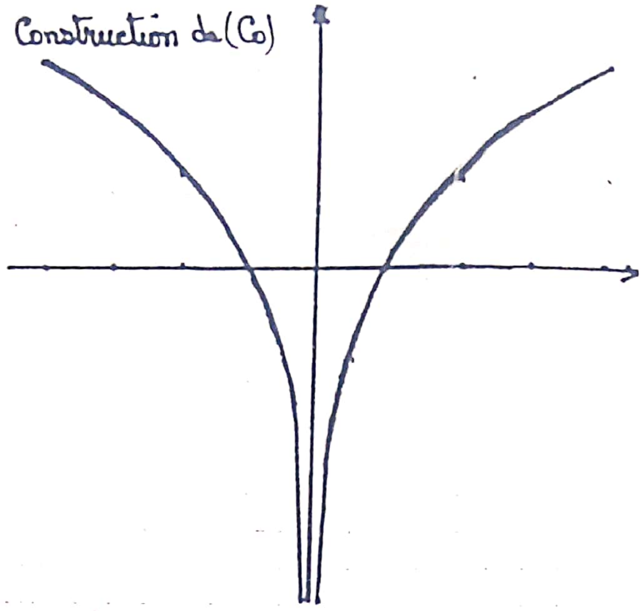
$\forall x<0$, $f_0'(x)<0$; f_0 est donc décroissante sur $]-\infty;0[$

$\forall x>0$, $f_0'(x)>0$; f_0 est donc croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	||	$+$	
$f_0(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Construction de (C_0)



2-/ a est différent de 0

a-/ Comparaison $f_{-a}(-x)$ et $f_a(x)$

$$f_{-a}(-x) = \frac{-a}{-x} + \ln x^2 = \frac{a}{x} + \ln x^2 = f_a(x)$$

$$\boxed{f_{-a}(-x) = f_a(x)}$$

b-/ Déduisons-en une transformation géométrique entre les courbes (C_a) et (C_{-a})

$f_{-a}(-x) = f_a(x)$ nous permet de dire que les courbes (C_a) et (C_{-a}) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. $(C_{-a})\ S_{Oy}\ (C_a)$

3-/ a-/ Calculons les dérivées première et seconde de f_a

$$\forall x\neq 0,\ f_a'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$\boxed{\forall x\neq 0,\ f_a'(x) = \frac{2x-a}{x^2}}$$

$$\forall x\neq 0,\ f_a''(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x-a)}{x^4}$$

$$\boxed{\forall x\neq 0,\ f_a''(x) = \frac{2(a-x)}{x^3}}$$

b-/ Calculons la limite en 0 de f_a

$$\lim_{x \to 0^-} f_a(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{a}{x} + \ln x^2$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{a}{x} + 2\ln|x|$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{a}{x} + 2\ln(-x)$$
$$= \lim_{X \to 0^+} -\frac{a}{X} + 2\ln X, \quad X = -x$$
$$= \lim_{X \to 0^+} \frac{-a + 2X\ln X}{X}$$
$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } a<0 \\ -\infty \text{ si } a>0 \end{cases} \quad \text{car } \lim_{X \to 0^+} X\ln X = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f_a(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } a<0 \\ -\infty \text{ si } a>0 \end{cases}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_a(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a + 2x\ln x}{x}$$
$$= \begin{cases} -\infty \text{ si } a<0 \\ +\infty \text{ si } a>0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f_a(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } a<0 \\ +\infty \text{ si } a>0 \end{cases}}$$

c-/ Etude des variations de f_a

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_a(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x} + \ln x^2$$
$$= +\infty \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0 \\ \lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right.$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty}$$

Signe de $f'_a(x)$.

$\forall x \neq 0$, $x^2 > 0$; $f'_a(x)$ a le signe de $2x - a$

$f'_a(x) = 0 \iff 2x - a = 0 \iff x = \frac{a}{2}$

Tableau de variation de f_a

$$f_a\left(\frac{a}{2}\right) = 2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

1er cas $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{a}{2}$		0		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

2e cas $a > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$	↗	$+\infty$

d-/ Précisons les points d'inflexion des courbes (C_1) et (C_2)

$f_1(x) = \frac{1}{x} + \ln x^2$; $f''_1(x) = \frac{2(1-x)}{x^2}$

$f''_1(x) = 0 \iff x = 1$; $f_1(1) = 1$

$f_2(x) = \frac{2}{x} + \ln x^2$; $f''_2(x) = \frac{2(2-x)}{x^2}$

$f''_2(x) = 0 \iff x = 2$; $f_2(2) = 1 + 2\ln 2$

Soit I_1 le point d'inflexion de (C_1) et I_2 celui de (C_2) on a :

$I_1(1;1)$	$I_2(2; 1+2\ln 2)$

Déterminons l'équation de la tangente (T_1) à (C_1) en I_1 et celle de la tangente (T_2) à (C_2) en I_2

$f_1'(x) = \frac{2x-1}{x^2}$ $\quad f_2'(x) = \frac{2x-2}{x^2}$

$f_1'(1) = 1 \quad f_2'(2) = \frac{1}{2}$

$(T_1): y = x$	$(T_2): y = \frac{1}{2}x + 2\ln 2$

Construction des courbes (C_1) et (C_2)

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{a}{X^2} - \frac{2\ln X}{X}$, $X=-x$

$= 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{x^2} + \frac{2\ln x}{x}$

$= 0$

Les courbes (C_1) et (C_2) admettent une branche infinie de direction (ox) et une asymptote verticale d'équation $x = 0$

Pour la construction des courbes (C_1) et (C_2) voir figure à page suivante

4/ Soit S_a le point de (C_a) où la tangente est parallèle à l'axe (ox)

a/ Déterminons l'ensemble des points S_a lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$

$S_a\left(\frac{a}{2} ; 2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)\right)$

$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = 2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad a = 2x, \ x \neq 0$

$y = 2 + \ln x^2, \ x \neq 0$

$\boxed{\text{Lorsque } a \text{ décrit } \mathbb{R}^*, S_a \text{ décrit la courbe } (\Gamma) \text{ d'équation } y = 2+\ln x^2, x\neq 0}$

b/ Montrons que (Γ) se déduit simplement de (C_0).

$y = 2 + \ln x^2 = f_0(x) + 2$

$\boxed{(\Gamma) \text{ est l'image de } (C_0) \text{ dans la translation de vecteur } 2\vec{j}}$

c/ Déterminons l'ensemble (Γ') des points d'inflexion de (C_a)

Soit I_a le point d'inflexion de (C_a)

On a : $I_a(a ; 1+\ln a^2)$

$\begin{cases} x = a \\ y = 1+\ln a^2 \end{cases} \Rightarrow y = 1+\ln x^2, \ x\neq 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des points d'inflexion de } (C_a) \text{ est la courbe } (\Gamma') \text{ d'équat}^{\circ}\ y = 1+\ln x^2, x \neq 0}$

$\boxed{(\Gamma') = t_{\vec{j}}(C_0) = t_{-\vec{j}}(\Gamma)}$

Soit I_1 le point d'inflexion de (C_1) et I_2 celui de (C_2) on a :

$I_1(1;1)$	$I_2(2;1+2\ln 2)$

Déterminons l'équation de la tangente (T_1) à (C_1) en I_1 et celle de la tangente (T_2) à (C_2) en I_2

$f'_1(x)=\frac{2x-1}{x^2}$ $\quad f'_2(x)=\frac{2x-2}{x^2}$

$f'_1(1)=1$ $\quad f'_2(2)=\frac{1}{2}$

$(T_1): y=x$	$(T_2): y=\frac{1}{2}x+2\ln 2$

Construction des courbes (C_1) et (C_2)

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_a(x)}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{a}{X^2}-\frac{2\ln X}{X}, X=-x$

$=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_a(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}$

$=0$

Les courbes (C_1) et (C_2) admettent une branche infinie de direction (ox) et une asymptote verticale d'équation $x=0$

Pour la construction des courbes (C_1) et (C_2) voir figure à page suivante

4./ Soit S_a le point de (C_a) où la tangente est parallèle à l'axe (ox)

a/ Déterminons l'ensemble des points S_a lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$

$S_a\left(\frac{a}{2}; 2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)\right)$

$\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)\end{cases} \Rightarrow \quad a=2x, x\neq 0$

$y=2+\ln x^2, x\neq 0$

$\boxed{\text{Lorsque } a \text{ décrit } \mathbb{R}^*, S_a \text{ décrit la courbe } (\Gamma) \text{ d'équation } y=2+\ln x^2, x\neq 0}$

b/ Montrons que (Γ) se déduit simplement de (C_0).

$y=2+\ln x^2=f_0(x)+2$

$\boxed{(\Gamma) \text{ est l'image de } (C_0) \text{ dans la translation de vecteur } 2\vec{j}}$

c./ Déterminons l'ensemble (Γ') des points d'inflexion de (C_a)

Soit I_a le point d'inflexion de (C_a)

On a : $I_a(a; 1+\ln a^2)$

$\begin{cases} x=a \\ y=1+\ln a^2\end{cases} \Rightarrow y=1+\ln x^2, x\neq 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des points d'inflexion de } (C_a) \text{ est la courbe } (\Gamma') \text{ d'équat}^{\circ}\ y=1+\ln x^2, x\neq 0}$

$\boxed{(\Gamma')=t_{\vec{j}}(C_0)=t_{\vec{j}}(\Gamma)}$

5/ a/ <u>Equation de la Tangente (T) à la courbe (C_1) en son point d'abscisse x_1</u>

$$(T) : y = f_1'(x_1)(x - x_1) + f_1(x_1)$$

$$= \frac{2x_1 - 1}{x_1^2}(x - x_1) + \frac{1}{x_1} + \ln x_1^2$$

$$= \left(\frac{2x_1 - 1}{x_1^2}\right)x - 2 + \frac{2}{x_1} + \ln x_1^2$$

$$\boxed{= \left(\frac{2x_1 - 1}{x_1^2}\right)x + 2 + f_2(x_1)}$$

b/ Soi[illegible], u). <u>Equation déterminant les abscisses des points de contact des tangentes à (C_1) passant U</u>

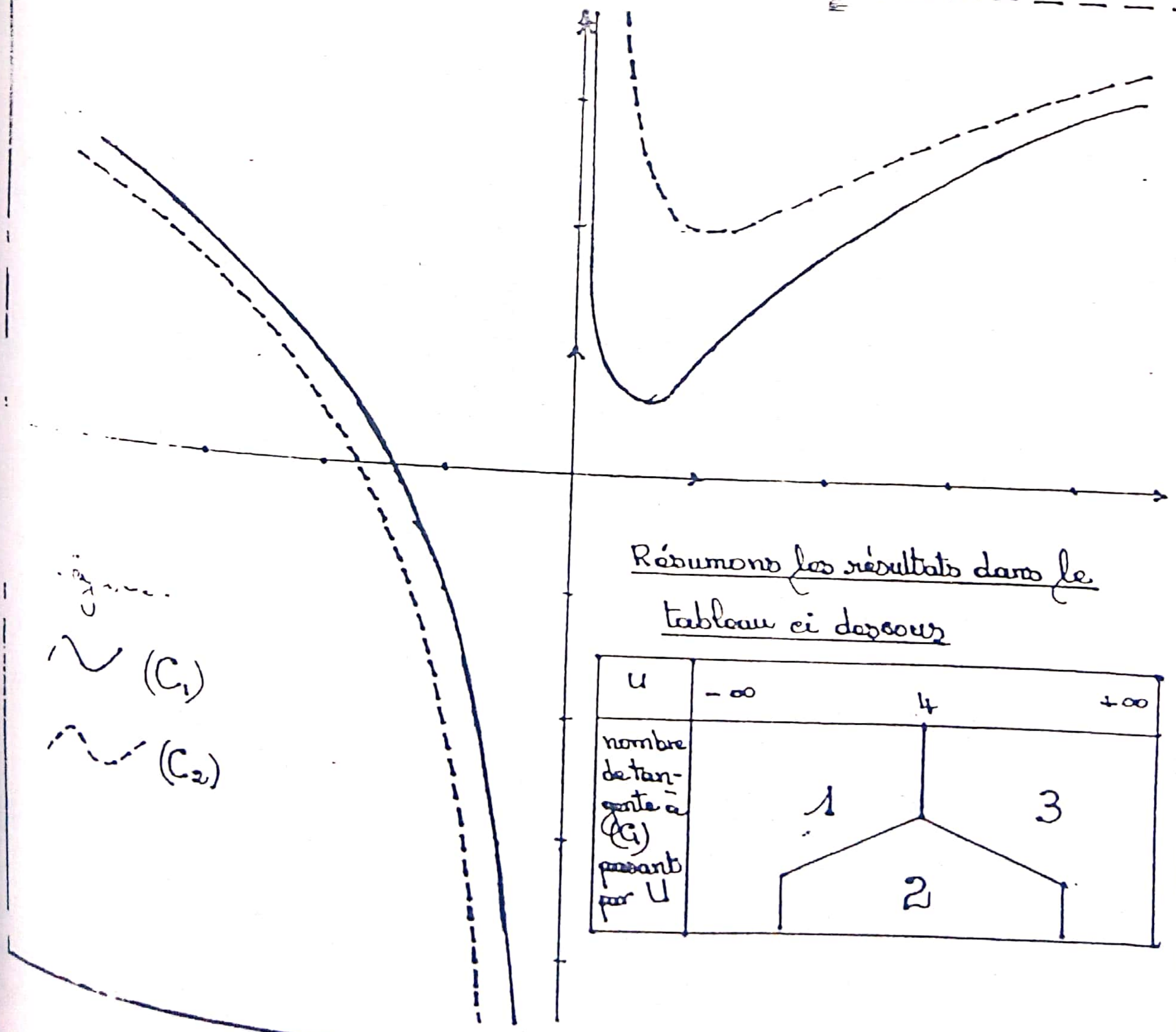
$$U \in (T) \iff u = \frac{2x_1 - 1}{x_1^2} \times 0 + 2 + f_2(x_1)$$

$$\iff \boxed{f_2(x_1) = u - 2}$$

c/ <u>Etudions suivant la position du point U le nombre de tangente à (C_1) passant par U</u>

Le nombre de tangente à (C_1) passant par U est le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x_1 : $f_2(x_1) = u - 2$

c'est donc le nombre de point d'$\cap$ de la courbe (C_2) avec la droite d'équation $y = u - 2$



<u>Résumons les résultats dans le tableau ci dessous</u>

u	$-\infty$	4	$+\infty$
nombre de tangente à (C_1) passant par U	1	2	3

PROBLEME N°18

On considère la fonction f définie sur $[-e;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x+(x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2, x\neq -e \\ f(-e) = -e. \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE A

1/ a/ Démontrons que $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

Posons $X = \ln x$.

Si $x \to 0^+$ alors $X \to -\infty$; $x = e^X$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{X\to-\infty} X^2 e^X$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 4t^2 e^{-2t}, \quad t = -\frac{X}{2}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{t}{e^t}\right)^2 = 4\times 0^2 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0}$$

b/ Calcul de la limite de f en $-e$.

$$\lim_{x\to -e^+} f(x) = \lim_{x\to -e^+} x+(x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]$$

or $\lim\limits_{x\to -e^+} (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$$= \lim_{X\to 0^+} X\left(\ln\left(\frac{X}{e}\right)\right)^2 \text{ avec } X = x+e$$

$$= \lim_{t \to 0^+} et(\ln t)^2 = e\times 0 = 0 ; \quad t = \frac{X}{e}$$

d'où $\lim\limits_{x\to -e^+} (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2 = 0$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to -e^+} f(x) = -e}$$

Continuité de f en $-e$

$$\lim_{x\to -e^+} f(x) = -e = f(-e)$$

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est continue en } -e}$$

c/ Etude de la dérivabilité de f au point $-e$

$$\lim_{x\to -e^+} \frac{f(x)-f(-e)}{x+e}$$

$$= \lim_{x\to -e^+} \frac{1}{x+e}\left(x+e+(x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2\right)$$

$$= \lim_{x\to -e^+} 1+\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$$

$$= \lim_{X\to 0^+} 1+(\ln X - 1)^2$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X\to -\infty} (X-1)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -e^+} \frac{f(x)-f(-e)}{x+e} = +\infty}$$

Conclusion

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable au point } -e.}$$

2/ • Sens de variation de f

f est dérivable sur $]-e;+\infty[$ et $\forall x > -e$,

$$f'(x) = 1+\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2 + 2(x+e)\cdot\frac{\frac{1}{e}}{\frac{x+e}{e}}\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)$$

$\forall x > -e,\ f'(x) = 1 + 2\ln\left(\frac{x+e}{e}\right) + \left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$$\boxed{\forall x > -e,\ f'(x) = \left[1 + \ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2}$$

$f'(x) = 0 \iff \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) = -1$

$\iff \frac{x+e}{e} = \frac{1}{e}$

$\iff x+e = 1 \iff x = 1-e.$

$\forall x > -e,\ f'(x) \geqslant 0$

$\boxed{f \text{ est donc croissante sur }]-e; +\infty[}$

Dressons le tableau de variation de f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -e + X + X(\ln X - 1)^2$

$= +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

$f(1-e) = 1-e + (\ln\frac{1}{e})^2 = 2-e.$

Tableau de variation de f.

x	$-e$		$1-e$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-e$	↗	$2-e$	↗	$+\infty$

3-/ Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

$(T): y = f'(0).x + f(0)$

$f'(0) = 1 \qquad f(0) = 0$

$$\boxed{(T): y = x}$$

4-/ Construction de (T) et (C)

Branches infinies

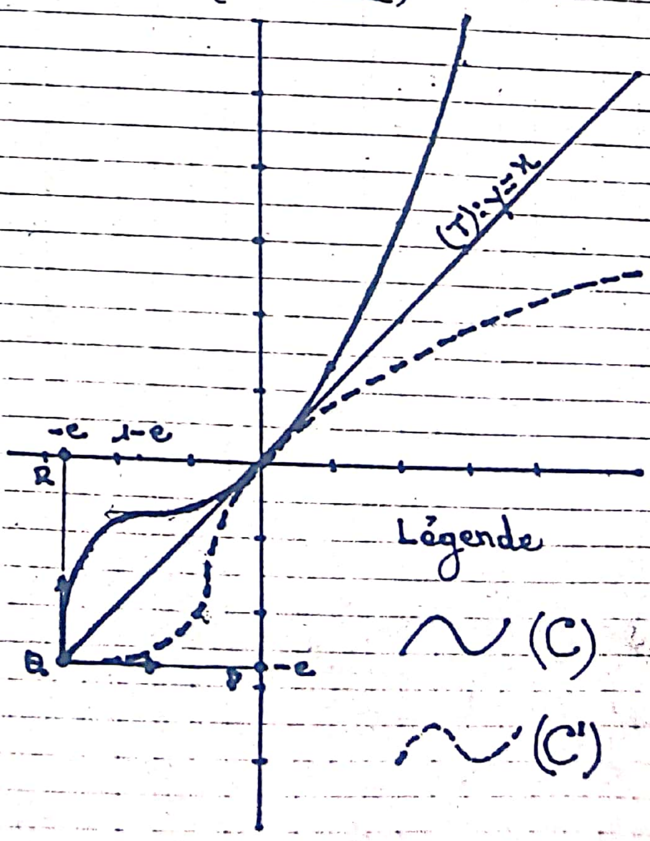
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{x+e}{x}\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+e}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+e}{e} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = (+\infty)^2 = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

- La courbe (C) possède une branche asymptotique de direction (oy).
- Rappelons que la courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $-e$.

Traçer de T et (C).



5/ a/ Démontrons que f est une bijection sur un intervalle J que nous préciserons

D'après le tableau précédent, f est continue, monotone strictement croissante sur $[-e;+\infty[$ avec :

$\lim_{x\to -e} f(x) = -e$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f définit donc une bijection de $[-e;+\infty[$ sur $[-e;+\infty[$

Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe.

b/ Traçons (C') dans le même repère que (C) (Voir figure)

Rappelons que (C') est l'image de (C) dans la symétrie orthogonale d'axe la 1ère bissectrice (la droite d'équat° $y=x$)

c/ Déterminons l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

$\forall x \in]-e;2-e[\cup]2-e;+\infty[$,

$f^{-1}(x) \in]-e;1-e[\cup]1-e;+\infty[$

or $\forall x \in]-e;+\infty[-\{1-e\}$, $f'(x) > 0$

f^{-1} est donc dérivable sur $]-e;+\infty[-\{2-e\}$

- (C) admet une démi-tangente verticale au point d'abscisse $-e$; on en déduit que (C') admet une démi-tangente horizontale au point d'abscisse $-e$

f^{-1} est donc dérivable en $-e$

- D'une manière analogue, on montre que f^{-1} n'est pas dérivable en $2-e$.

Conclusion

$\boxed{\text{L'ensemble sur lequel } f^{-1} \text{ est dérivable est } [-e;2-e[\cup]2-e;+\infty[}$

PARTIE B

Soit α un nombre réel tel que : $-e<\alpha<0$. On pose $J(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)\,dx$.

1/ Pour tout entier naturel n, on désigne par $I_n(\alpha)$ l'intégrale définie par : $I_n(\alpha) = \int_\alpha^0 (x+e)[\ln(x+e)]^n\,dx$.

a/ A l'aide d'une intégration par parties exprimons $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$

Posons $U(x) = [\ln(x+e)]^n$

$\Rightarrow U'(x) = \frac{n}{x+e}[\ln(x+e)]^{n-1}$

$V'(x) = x+e \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}(x+e)^2$

$$I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(x+e)^2[\ln(x+e)]^n\right]_\alpha^0 - \frac{n}{2}\int_\alpha^0 (x+e)[\ln(x+e)]^{n-1}dx$$

$$\boxed{I_n(\alpha) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(\alpha+e)^2[\ln(\alpha+e)]^n - \frac{n}{2}I_{n-1}(\alpha)}$$

b/ Calculons $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

$$I_0(\alpha) = \int_\alpha^0 (x+e)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+ex\right]_\alpha^0$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2 - e\alpha = -\frac{1}{2}\alpha(\alpha+2e)$$

$$\boxed{I_0(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha(\alpha+2e)}$$

$$I_1(\alpha)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e)-\frac{1}{2}I_0(\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e)+\frac{1}{4}\alpha(\alpha+2e)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha^2+2e\alpha+2e^2-2(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[e^2+(\alpha+e)^2-2(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e)\right]$$

$$\boxed{I_1(\alpha)=\frac{1}{4}\left[e^2+(\alpha+e)^2\left(1-2\ln(\alpha+e)\right)\right]}$$

$$I_2(\alpha)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}(\alpha+e)^2\left[\ln(\alpha+e)\right]^2-I_1(\alpha)$$

Après calcul et en posant $\ln(\alpha+e)=\beta$

on a:

$$\boxed{I_2(\alpha)=\frac{1}{4}\left[e^2-(\alpha+e)^2(2\beta^2-2\beta+1)\right]}$$

2/ a/ Vérifions que pour tout $x\in]-e;+\infty[$

$$f(x)=(x+e)\left[-1+\ln(x+e)\right]^2+x$$

$$\forall x>-e,\ f(x)=x+(x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$$

$$f(x)=x+(x+e)\left[\ln(x+e)-\ln e\right]^2;\ \ln e=1$$

$$=x+(x+e)\left[-1+\ln(x+e)\right]^2$$

$$\boxed{\forall x\in]-e;+\infty[,\ f(x)=(x+e)\left[-1+\ln(x+e)\right]^2+x}$$

b/ Exprimons $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$ $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$

$$J(\alpha)=\int_\alpha^0 f(x)\,dx$$

$$=\int_\alpha^0\left((x+e)\left[-1+\ln(x+e)\right]^2+x\right)dx$$

$$J(\alpha)=\int_\alpha^0\left((x+e)\left(1-2\ln(x+e)+(\ln(x+e))^2\right)+x\right)dx$$

$$=\int_\alpha^0(x+e)\,dx-2\int_\alpha^0(x+e)\ln(x+e)\,dx$$

$$+\int_\alpha^0(x+e)\left(\ln(x+e)\right)^2dx+\int_\alpha^0 x\,dx$$

$$=I_0(\alpha)-2I_1(\alpha)+I_2(\alpha)+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^0$$

$$\boxed{J(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha^2+I_0(\alpha)-2I_1(\alpha)+I_2(\alpha)}$$

Exprimons $J(\alpha)$ en fonction de α

En remplaçant $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$ par leur valeur on obtient

$$\boxed{J(\alpha)=-\frac{7}{4}\alpha^2-e^2-\frac{5}{2}e\alpha+\frac{(\alpha+e)^2}{2}(3\beta-\beta^2) \qquad \beta=\ln(\alpha+e)}$$

3/ Calculons $\lim\limits_{\alpha\to -e^{>}} J(\alpha)$

$$\lim_{\alpha\to -e^{>}}\frac{1}{2}(\alpha+e)^2(3\beta-\beta^2)$$

$$=\lim_{X\to 0^{>}}\frac{1}{2}X^2\left(3\ln X-(\ln X)^2\right),\ X=x+e$$

$$=\lim_{X\to 0^{>}}-\frac{1}{2}(X\ln X)^2+\frac{3}{2}X(X\ln X)$$

$$=0 \text{ car } \lim_{X\to 0^{>}} X\ln X=0$$

$$\lim_{x\to -e^{>}}-\frac{7}{4}\alpha^2-e-\frac{5}{2}e\alpha=-\frac{1}{4}e^2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -e^{>}} J(\alpha)=-\frac{1}{4}e^2 \text{ d'où}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -e^{>}} -J(\alpha)=\frac{e^2}{4}}$$

Interprétation géométrique du résultat.

La valeur de cette limite est l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -e$ et $x = 0$.

4/ Soient P, Q et R les points du plan de coordonnées respectives : $(0;-e)$, $(-e;-e)$ et $(-e;0)$. Les courbes (C) et (C') et la droite (Δ) d'équation $y = x$ partagent le carré OPQR en quatre régions comme stipulé dans l'énoncé.

Comparons les aires de ces quatre parties

$A(S_2) = A(S_3)$ car les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à (Δ).

De plus (Δ) est la diagonale du carré OPQR donc $A(S_1) = A(S_4)$ car $A(S_2) = A(S_3)$

$$A(S_1) = A(S_4) = \frac{e^2}{4}$$

$$A(S_2) = A(S_3) = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{2e^2}{4}\right) = \frac{e^2}{4}$$

Finalement on a :

$$\boxed{A(S_1) = A(S_2) = A(S_3) = A(S_4)}$$

PROBLEME N°19

On considère pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_n) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

1/ Soit p un entier naturel. En utilisant la limite de $t^p e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, montrer que :

$$\lim_{x \to 0^>} x(\ln x)^p = 0$$

On sait que $\lim_{t \to +\infty} t e^{-t} = 0$

Posons $u = \frac{t}{p} \Leftrightarrow t = pu$

$$\lim_{t \to +\infty} t^p e^{-t} = \lim_{u \to +\infty} (pu)^p e^{-pu}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} p^p (u e^{-u})^p = p^p . 0^p = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} t^p e^{-t} = 0$$

Posons $X = -\ln x$

$$\lim_{x \to 0^>} x(\ln x)^p = \lim_{X \to +\infty} (-X)^p e^{-X}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} (-1)^p X^p e^{-X} = (-1)^p \times 0 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^>} x(\ln x)^p = 0}$$

2-/ Déduisons-en que pour tout entier $k \geq 1$, la limite de $x^k(\ln x)^p$ ...

– Pour $k = 1$

$\lim_{x \to 0^>} x(\ln x)^p = 0$ (Voir question précédente)

– Pour $k > 1$

$$\lim_{x \to 0^>} x^k(\ln x)^p = \lim_{x \to 0^>} x^{k-1} x(\ln x)^p = 0 \times 0 = 0$$

Conclusion

$\boxed{\text{Pour tout entier } k \geqslant 1,\ \lim_{x \to 0^{>}} x^k(\ln x)^p = 0}$

3/ Montrons que f_n est dérivable en 0 et calculons son nombre dérivé en 0

$\lim_{x \to 0^{>}} f_n(x) = \lim_{x \to 0^{>}} x^2(\ln x)^n = 0$ d'après la question précédente.

La fonction f_n est continue en 0 car

$$\lim_{x \to 0^{>}} f_n(x) = f_n(0)$$

$$\lim_{x \to 0^{>}} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^{>}} x(\ln x)^n = 0$$

Conclusion

$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est dérivable en 0 et } f_n'(0) = 0}$

PARTIE B

1/ Etudions le sens de variation de f_1 sur $[0;1]$

$f_1(x) = x^2(\ln x)$

$f_1(0) = 0$; $f_1(1) = 0$

Dérivée

f_1 est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,

$f_1'(x) = 2x\ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 = x(1 + 2\ln x)$

$f_1'(x) = x(1 + 2\ln x)$

$\forall x \in [0;1]$, $x \geqslant 0$, $f_1'(x)$ a donc le signe de $1 + 2\ln x$.

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $1 + 2\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$.

Signe de $f_1'(x)$

x	0		$e^{-1/2}$		1
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau ci-dessus, f_1 est décroissante sur $[0; e^{-1/2}[$, croissante sur $]e^{-1/2}; 1]$ et admet un minimum local au point $e^{-1/2}$.

2-/ Montrons que $\forall n \geqslant 1$, $0 < e^{-n/2} < 1$

$\forall n \geqslant 1$, $-\frac{n}{2} < 0$

$\Leftrightarrow e^{-n/2} < e^0$ car $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{-n/2} < 1$ or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

$\Leftrightarrow 0 < e^{-n/2} < 1$

Conclusion

$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ 0 < e^{-n/2} < 1}$

b/ L'entier n étant fixe ($n \geqslant 1$), résolvons dans $]0;1]$ l'inéquation $\ln x + \frac{n}{2} \leqslant 0$

$\ln x + \frac{n}{2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant -\frac{n}{2} \Leftrightarrow x \leqslant e^{-n/2}$

$\boxed{S =]0; e^{-n/2}]}$

c/ Montrons que si $n \geqslant 2$ alors f_n est dérivable sur $[0;1]$ et $f_n'(x)$ admet le même signe que $(\ln x + \frac{n}{2})(\ln x)^{n-1}$ pour tout $x \in]0;1]$

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (\ln x)^n$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc dérivables sur $]0;1]$

On en déduit que f_n est dérivable sur $]0;1]$.

De plus f_n est dérivable en 0 pour tout n non nul; donc si $n \geq 2$ alors f_n est dérivable en 0

Conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2,\ f_n \text{ est dérivable sur } [0;1]}$$

$\forall x \in]0;1]$,

$$f_n'(x) = 2x(\ln x)^n + \frac{n}{x}x^2(\ln x)^{n-1}$$
$$= 2x(\ln x)^n + nx(\ln x)^{n-1}$$
$$= x(n + 2\ln x)(\ln x)^{n-1}$$

$$\boxed{f_n'(x) = 2x\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1}}$$

$\forall x \in]0;1]$, $2x > 0$. d'où $f_n'(x)$ a le même signe que $\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1}$ sur $]0;1]$.

d./ Etudions le sens de variation de f_n sur $[0;1]$ pour $n \geq 2$ suivant les valeurs de n.

$f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\ln x + \frac{n}{2} = 0$ ou $\ln x = 0$

$\ln x + \frac{n}{2} = 0 \iff x = e^{-n/2}$

$\ln x = 0 \iff x = 1$

1er cas n pair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$\ln x + \frac{n}{2}$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)^{n-1}$		$-$		$-$	0
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

Sens de variation

f_n est croissante sur $[0; e^{-n/2}[$, décroissante sur $]e^{-n/2}; 1[$ et admet un maximum local au point $e^{-n/2}$.

2e cas n impair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$\ln x + \frac{n}{2}$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)^{n-1}$		$+$		$+$	0
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

Sens de variation

f_n est décroissante sur $]0; e^{-n/2}[$, croissante sur $]e^{-n/2}; 1[$ et admet un minimum local au point $e^{-n/2}$

$$f_n(e^{-n/2}) = e^{-n} \times \left(-\frac{n}{2}\right)^n = \left(\frac{-n}{2e}\right)^n$$

Remarque : (C_n) admet aux points d'abscisses 0 et 1 une tangente horizontale.

Dressons le tableau de variation de f_n

1er cas n pair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{-n}{2e}\right)^n$	$\searrow$	0

2e cas n impair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$\left(\frac{-n}{2e}\right)^n$	$\nearrow$	0

3/ Tableau de variation de la fonct- f_1

x	0		$e^{-1/2}$		1
$f'_1(x)$			0		
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	0

Tableau de variation de la fonct- f_2

x	0		e^{-1}		1
$f'_2(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

Coordonnées des points d'intersection des courbes (C_1) et (C_2).

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$$M \in (C_1)\cap(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases} \quad x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x^2 \ln x = x^2(\ln x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \ln x(1-\ln x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \\ \text{ou} \\ x = e \end{cases} \quad \text{avec } x \in [0;1]$$

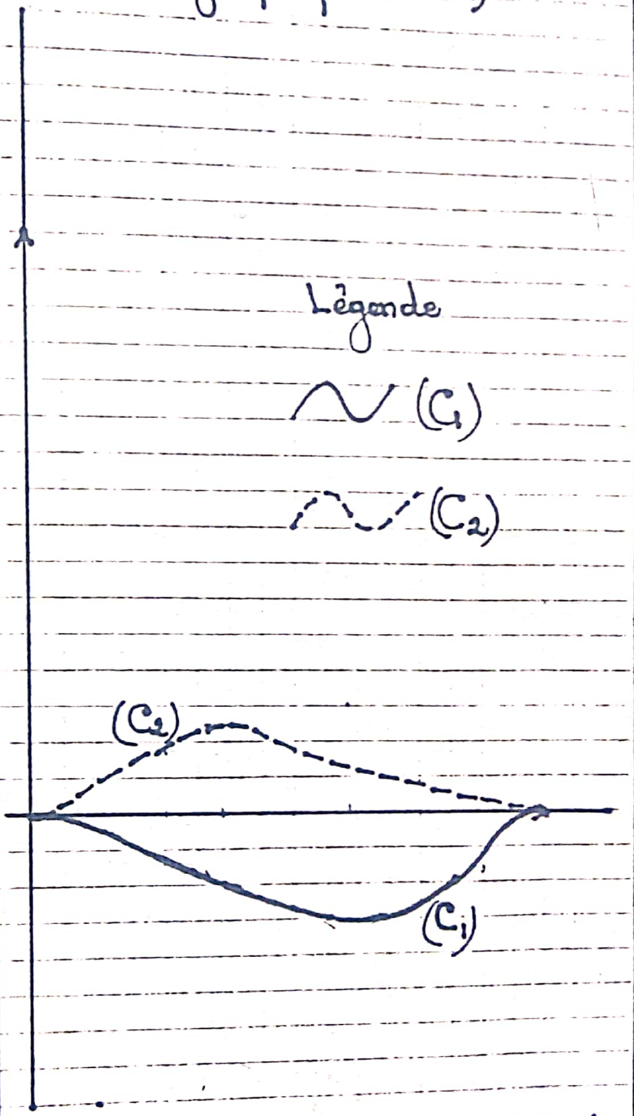
On en déduit $x=0$ ou $x=1$

$f_1(0)=0 \quad f_1(1)=0.$

Les courbes (C_1) et (C_2) se coupent en deux points : $O(0;0)$ et $A(1;0)$

Construction des courbes (C_1) et (C_2)

(Unité graphique 10cm)



4/ Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes

Pour tout $n \neq 0$, $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=0$

Toutes les courbes (C_n) passent par deux points $O(0;0)$ et $A(1;0)$

PARTIE C

Dans cette partie t désigne un réel de l'intervalle $[0;1]$ et n un entier naturel non nul

1/ On pose $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)\,dx$ et

$$L_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

a/ Justifions l'existence de $I_n(t)$

La fonction f_n est continue sur $[0;1]$ donc continue sur $[t;1]$ car $[t;1]$ est inclus dans $[0;1]$, ce qui justifie l'existence de $I_n(t)$.

b/ Montrons que la fonction : $t \mapsto L_n - I_n(t)$ est la primitive sur $[0;1]$ de la fonction f_n qui s'annule en $t=0$

Posons $F(t) = L_n - I_n(t)$.

$$F(0) = L_n - I_n(0)$$
$$= L_n - L_n = 0$$

De plus $F(t) = \int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_t^1 f_n(x)\,dx$

$$= \int_0^1 f_n(x)\,dx + \int_1^t f_n(x)\,dx$$

$$F(t) = \int_0^t f_n(x)\,dx$$

$$F'(t) = f_n(t)$$

Conclusion : $\boxed{t \mapsto L_n - I_n(t) \text{ est la primitive de } f_n \text{ sur } [0;1] \text{ qui s'annule en } t=0}$

2/ Déduisons-en que $I_n(t)$ admet pour limite L_n lorsque t tend vers 0.

$$\lim_{t \to 0} L_n - I_n(t) = L_n - L_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{t \to 0} I_n(t) = L_n}$$

3/ On considère la fonction numérique F définie sur $[0;1]$ par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} \text{ pour } 0 < x \leq 1$$

et $F(0) = 0$.

a/ Prouvons que F est dérivable sur $]0;1]$ et calculons $F'(x)$ pour $0 < x \leq 1$

$x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{9}$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;1]$

$x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ donc sur $]0;1]$. On en déduit que $x \mapsto \frac{x^3}{3}\ln x$ est dérivable sur $]0;1]$ et que par conséquent F est dérivable sur $]0;1]$.

$$\forall x \in]0;1],\ F'(x) = x^2\ln x + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x^2}{3}$$
$$= x^2\ln x$$

$$\boxed{\forall x \in]0;1],\ F'(x) = x^2\ln x}$$

b/ Prouvons que F est dérivable en 0 et précisons $F'(0)$

$$\lim_{x \to 0^>} F(x) = \lim_{x \to 0^>} \frac{x^2}{3}\left(x\ln x - \frac{x}{3}\right)$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{x \to 0^>} x\ln x = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} F(x) = F(0) = 0$

F est continue en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^{>}} \dfrac{x}{3}\left(x\ln x - \dfrac{x}{3}\right)$

$= 0$

Conclusion

$\boxed{F \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } F'(0) = 0}$

c/ Déduisons que F est une primitive de f_1 sur $[0;1]$

On sait d'après 3·a/ de cette partie que $F'(x) = x^2\ln x = f_1(x)$.

On en déduit que F est une primitive de f_1 sur $[0;1]$.

Calculons L_1.

$L_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^1$

$= F(1) - F(0)$

$= -\dfrac{1}{9}$.

$\boxed{L_1 = -\dfrac{1}{9}}$

4/ Soit φ_n la fonction définie sur $]0;1]$ par $\varphi_n(t) = -\dfrac{1}{3}t^3(\ln t)^n$

a/ Déterminons $\lim\limits_{t \to 0} \varphi_n(t)$

D'après A·2/, $\lim\limits_{t \to 0} t^k(\ln t)^p = 0$ $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $\lim\limits_{t \to 0} t^3(\ln t)^n = 0$

d'où $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \varphi_n(t) = 0}$

b/ Prouvons que pour $t \in [0;1]$

$I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \dfrac{n+1}{3}I_n(t)$

$I_{n+1}(t) = \int_t^1 f_{n+1}(x)\,dx$

$= \int_t^1 x^2(\ln x)^{n+1}dx$

Posons $u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = \dfrac{n+1}{x}(\ln x)^n$

$v'(x) = x^2 \Leftrightarrow v(x) = \dfrac{1}{3}x^3$

$I_{n+1}(t) = \left[\dfrac{1}{3}x^3(\ln x)^{n+1}\right]_t^1 - \dfrac{n+1}{3}\int_t^1 x^2(\ln x)^n dx$

$= -\dfrac{1}{3}t^3(\ln t)^{n+1} - \dfrac{n+1}{3}I_n(t)$

$\boxed{I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \dfrac{n+1}{3}I_n(t)}$

c/ Déduisons-en que $L_{n+1} = -\dfrac{n+1}{3}L_n$

$I_{n+1}(0) = \varphi_{n+1}(0) - \dfrac{n+1}{3}I_n(0)$

or $I_{n+1}(0) = L_{n+1}$; $\varphi_{n+1}(0) = 0$ et $I_n(0) = L_n$

d'où $\boxed{L_{n+1} = -\dfrac{n+1}{3}L_n}$

d/ Prouvons par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $L_n = (-1)^n \dfrac{n!}{3^{n+1}}$

$L_1 = -\dfrac{1}{9} = (-1)^1\dfrac{1!}{3^{1+1}}$ Vrai

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $L_n = (-1)^n\dfrac{n!}{3^{n+1}}$ et montrons que $L_{n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{3^{n+2}}$

$L_{n+1} = -\dfrac{n+1}{3}L_n$

$= -(-1)^n\dfrac{n!}{3^{n+1}} \times \dfrac{n+1}{3}$

$= (-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{3^{n+2}}$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = (-1)^n\dfrac{n!}{3^{n+1}}}$

e-/ Calculons en fonction de n l'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (Cn) et l'axe (ox)

Soit An cette aire on a:

$$A_n = \left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| = |L_n| = \frac{n!}{3^{n+1}}$$

car $|(-1)^n| = |-1|^n = 1^n = 1$

$$\boxed{A_n = \frac{n!}{3^{n+1}} \text{ u.a}}$$

PROBLEME N° 20

PARTIE A.

1-/ Justifions le résultat suivant:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Posons $h(x) = \ln(1+x)$ on a: $h(0) = \ln 1 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0)$$

or $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $h'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

d'où:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

2-/ a-/ Déduisons-en que $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X}, \quad X = \frac{1}{x}$$

$$= 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1}$$

b-/ Etudions la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

On sait que $a^x = e^{x\ln a}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$= e$ car $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

3-/ Pour tout naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

a-/ Etudions le sens de variation de f_n

$x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto 1-x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

f_n étant le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n$$

$$= nx^{n-1} - nx^n - x^n$$

$$\boxed{f'_n(x) = x^{n-1}[n-(n+1)x]}$$

$f'_n(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{n}{n+1}$

Signe de de $f'_n(x)$

1^{er} cas n pair

x	$-\infty$		0		$n/n+1$		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$		$+$	
$n-(n+1)x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]n/n+1; +\infty[$, $f'_n(x) < 0$

f_n est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\frac{n}{n+1}; +\infty[$

$\forall x \in]0; \frac{n}{n+1}[$, $f'_n(x) > 0$

f_n est strictement croissante sur $]0;\frac{n}{n+1}[$

2^e cas n impair

x	$-\infty$		0		$\frac{n}{n+1}$		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$		$+$	
$n-(n+1)x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'_n(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty;\frac{n}{n+1}[$ $f'_n(x) \geq 0$; f_n est croissante sur $]-\infty;\frac{n}{n+1}[$

$\forall x \in]\frac{n}{n+1};+\infty[$ $f'_n(x) < 0$; f_n est décroissante sur $]\frac{n}{n+1};+\infty[$

b/ Prouvons que selon la parité de n l'équation $f_n(x) = 1$ admet soit 0 soit 1 solution dans $\mathbb{R}$.

La fonction f_n admet un maximum local au point $\frac{n}{n+1}$; $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq 1$.

1er cas n impair

D'après le sens de variation a :

$\forall x \geq 0$, $f_n(x) < 1$

- la restriction de f_n à $]-\infty;0]$ est monotone strictement décroissante avec $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f_n(0) = 0$

Cette restriction définit donc une bijection de $]-\infty;0]$ vers $[0;+\infty[$.

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une seule solution sur $]-\infty;0]$

Conclusion :

Pour n impair l'équation $f_n(x) = 1$ admet une seule solution.

2^e cas n pair et $\neq 0$

D'après le sens de variation de f_n on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) < 1$

L'équation $f_n(x) = 1$ n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$ pour n pair.

Finalement :

L'équation $f_n(x) = 1$ admet 0 solutions pour n pair et 1 solution pour n impair.

4/ Soit (Γ_n) les courbes de f_n.

Montrons que toutes passent par deux points fixes sauf pour certaines valeurs de n à préciser.

$f_n(0) = 0^n(1-0) = 0$ pour $n \neq 0$

$f_n(1) = 1^n(1-1) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Toutes les courbes } (\Gamma_n) \text{ sauf } (\Gamma_0) \text{ passent par deux points fixes } O(0;0) \text{ et } A(1;0)}$

$f'_n(0) = 0^{n-1} \times n = 0$ pour $n > 1$

$f'_n(1) = 1^{n-1}(n-n-1) = -1$

Conclusion

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ toutes les courbes de f_n passant par deux points fixes $O(0;0)$ et $A(1;0)$ et admettent en ces points la même tangente.

En $O(0;0)$ la tangente est horizontale et en A la tangente a pour équation $y = -x + 1$

PARTIE B

On note g_n la restriction de f_n sur l'intervalle $[0;1]$. Soit (C_n) la courbe représentative de g_n.

1/ Montrons que sauf pour une valeur de n, g_n possède un maximum

$$M_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

- Pour $n = 0$ on a : $g_0(x) = 1 - x$.

g_0 est une fonction affine et par conséquent n'admet pas de maximum.

- Pour $n \neq 0$, $g_n'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{n}{n+1} \end{cases}$

D'après l'étude du sens de variation de f_n dans A·3·/a·/, g_n admet un maximum au point $\frac{n}{n+1}$. Ce maximum est $M_n = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Conclusion

Pour $n \neq 0$, g_n possède un maximum $M_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Ce maximum est atteint pour $x = \frac{n}{n+1}$

2/ Traçons (C_0), (C_1) et (C_2).

(C_0) est la droite d'équation $y = 1 - x$

$g_1(x) = -x^2 + x$; $g_1'(x) = -2x + 1$

$g_1'(x) = 0 \iff x = 1/2$; $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Tableau de variation de g_1

x	$-\infty$		$1/2$		1
$g_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_1(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

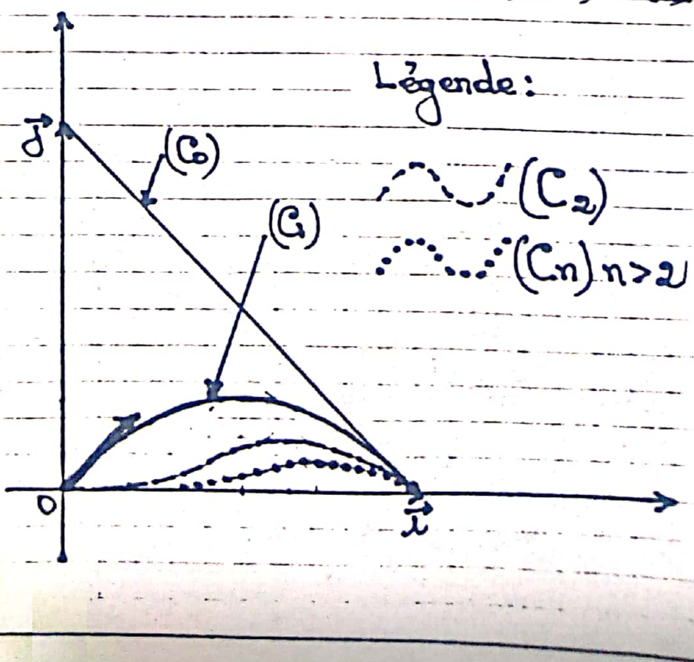
$g_2(x) = x^2(1-x)$; $g_2'(x) = x(-3x+2)$

$g_2'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$; $g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$

Tableau de variation de g_2

x	0		$2/3$		1
$g_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_2(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

Construction des courbes (C_0), (C_1) et (C_2)



3/- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$= 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0}$

- Calculons $I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx$

$I_n(x) = \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)\,dx$

$= \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx$

$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$\boxed{I_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$

- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0.$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

Déterminons le résultat précédent en encadrant $g_n(x)$

$0 \le x \le 1 \iff 0 \le 1-x \le 1$

$\iff 0 \le x^n(1-x) \le x^n$

$\iff 0 \le g_n(x) \le x^n$

$\iff 0 \le \int_0^1 g_n(x)\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$

$\iff 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

d'après le théorème des Gendarmes.

4-/ Pour tout $x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

on pose : $S_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} g_i(x)$

a-/ Calculons $S_n(x)$

$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_n(x)$

$S_n(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de 1^{er} terme $g_0(x) = 1-x$ et de raison x

$S_n(x) = g_0(x)\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 - x^{n+1}$

$\boxed{S_n(x) = 1 - x^{n+1}}$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

Pour $x = 0$, $S_n(0) = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} S(x) = 1$

Pour $x = 1$ $S_n(1) = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = 0$

Pour $0 < x < 1$ on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$

∴ Posons $J_n = \int_0^1 S_n(x)\,dx$

Calculons J_n

$$J_n = \int_0^1 (1 - x^{n+1})\,dx = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\boxed{J_n = \frac{n+1}{n+2}}$$

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = 1}$$

b-/ Exprimons $J_n = \int_0^1 S_n(x)\,dx$ en fonction de $I_0, I_1, \dots, I_n$

$$J_n = \int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} g_i(x)\right)dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 g_i(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} I_i$$

$$\boxed{\int_0^1 S_n(x)\,dx = I_0 + I_1 + \dots + I_n}$$

Déduisons-en la valeur de :

$$R_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=0}^{n} I_i = \int_0^1 S_n(x)\,dx$$
$$= J_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{n+1}{n+2}}$$

c-/ Comparons $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$$\int_0^1 \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \int_0^1 dx = 1$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} S_n(x)\right)dx}$$

PROBLEME N°21

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1-/ Etudions le sens de variation de g

$D_g = [0;+\infty[$

$x \mapsto x+2$ et $x \mapsto e^x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ d'où g continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \geq 0$:

$g'(x) = 1 - e^x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \geq 0$, $e^x \geq 1 \Leftrightarrow 1 - e^x \leq 0$

g est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Déterminons la limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x+2-e^{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)$$

$$= -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \frac{2}{x}\to 0 \\ \frac{e^{x}}{x}\to+\infty \end{array}\right.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

2/ a/ **Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$ que l'on note α**

D'après 1/, g est continue, monotone strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ avec $g(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

g définit donc une bijection de $[0;+\infty[$ vers $]-\infty;1]$, un intervalle qui contient 0. Il existe donc un unique réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$.

Conclusion

> L'équation: $x\in[0;+\infty[$, $g(x)=0$ admet une unique solution α.

b/ **Prouvons que $1,14<\alpha<1,15$**

$g(1,14) = \quad >0$; $g(1,15) = \quad <0$

$g(1,14)\times g(1,15)<0$. On a donc $1,14<\alpha<1,15$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\boxed{1,14<\alpha<1,15}$$

3/ **Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x**

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

1/ a/ **Montrons que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^{x}g(x)}{(xe^{x}+1)^2}$**

f est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$

et $\forall x\geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^{x}(xe^{x}+1)-(e^{x}+xe^{x})(e^{x}-1)}{(xe^{x}+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{xe^{2x}+e^{x}-e^{2x}+e^{x}-xe^{2x}+xe^{x}}{(xe^{x}+1)^2}$$

$$= \frac{xe^{x}+2e^{x}-e^{2x}}{(xe^{x}+1)^2} = \frac{e^{x}(x+2-e^{x})}{(xe^{x}+1)^2}$$

$$\boxed{\forall x\geq 0 \quad f'(x) = \frac{e^{x}g(x)}{(xe^{x}+1)^2}}$$

b/ **Déduisons-en le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$**

$\forall x\geq 0$, $\left\{\begin{array}{l} e^{x}>0 \\ \text{et} \\ (xe^{x}+1)^2>0 \end{array}\right.$

$f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$\forall x\in[0;\alpha[$, $f'(x)>0$; f est donc croissante sur $[0;\alpha[$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[$, $f'(x)<0$; f est donc décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

f possède un maximum local au point α.

2/ a/ Montrons que pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$\forall x \geq 0$, $f(x) = \frac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$

$= \frac{e^{x}(1-e^{-x})}{e^{x}(x+e^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}}$$

b/ Déduisons-en la limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$= 0$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+e^{-x} = +\infty \end{array} \right.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Interprétation graphique du résultat

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit que la courbe (C) représentative de f possède une asymptote horizontale d'équat° $y=0$

3/ a/ Etablissons que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha+2-e^{\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow e^{\alpha} = \alpha+2$

$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1} = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}$

$= \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}$

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}}$$

b/ Utilisons l'encadrement de α établi dans la question A.2, donnons un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}

$1,14 < \alpha < 1,15 \Leftrightarrow 2,14 < \alpha+1 < 2,15$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2,14}$

$\Leftrightarrow 0,46 < f(\alpha) < 0,47$

$$\boxed{0,46 < f(\alpha) < 0,47}$$

4/ Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

$(T): y = f'(0)x + f(0)$

$f'(0) = 1$; $f(0) = 0$.

$$\boxed{(T): y = x}$$

5/ a/ Etablissons que pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$

$f(x) - x = \frac{(x+1)U(x)}{xe^{x}+1}$ avec $U(x) = e^{x} - xe^{x} - 1$

$f(x) - x = \frac{e^{x}-1}{xe^{x}+1} - x = \frac{e^{x}-1-x^2e^{x}-x}{xe^{x}+1}$

$= \frac{(1-x^2)e^{x}-(x+1)}{xe^{x}+1}$

$= \frac{(x+1)[(1-x)e^{x}-1]}{xe^{x}+1}$

$= \frac{(x+1)(e^{x}-xe^{x}-1)}{xe^{x}+1}$

$$\boxed{f(x) - x = \frac{(x+1)U(x)}{xe^{x}+1} \text{ avec } U(x) = e^{x}-xe^{x}-1}$$

b/ Etude du sens de de U sur $[0;+\infty[$

$D_U = [0;+\infty[$

U est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$

et $\forall x \geq 0,\ U'(x) = e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x} = -xe^{-x}$

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ U'(x) = -xe^{-x}}$$

$\forall x \geq 0,\ U'(x) \leq 0$; la fonction U est donc strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

Déduisons-en le signe de $U(x)$

$U(0)=0$ et U décroissante sur $[0;+\infty[$

On en déduit que:

$$\forall x \geq 0,\ U(x) \leq U(0) = 0$$

$$\boxed{\text{Conclusion: } \forall x \geq 0,\ U(x) \leq 0}$$

c/ Déduisons des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T)

$$\forall x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ U(x) \leq 0 \\ xe^{x}+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x+1)U(x)}{xe^{x}+1} \leq 0$$

$\Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La courbe (C) est en dessous de la droite (T)}}$$

Traçons la courbe (C) et la droite (T)

Pour la construction de (C) et (T) voir figure ci-contre.

PARTIE C

1/ Déterminons une primitive F de f sur $[0;+\infty[$

D'après B.2/ on a:

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} = \frac{V'(x)}{V(x)} \text{ avec } V(x) = x+e^{-x}$$

$$F(x) = \ln|x+e^{-x}| = \ln(x+e^{-x})$$

$$\boxed{F(x) = \ln(x+e^{-x})}$$

2-/ On note D le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$

Calculons en cm² l'aire A de D.

$$A = \int_0^1 (x - f(x))\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln(x+e^{-x})\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(1+e^{-1})$$

$$= \frac{3}{2} - \ln(1+e) \text{ ua}$$

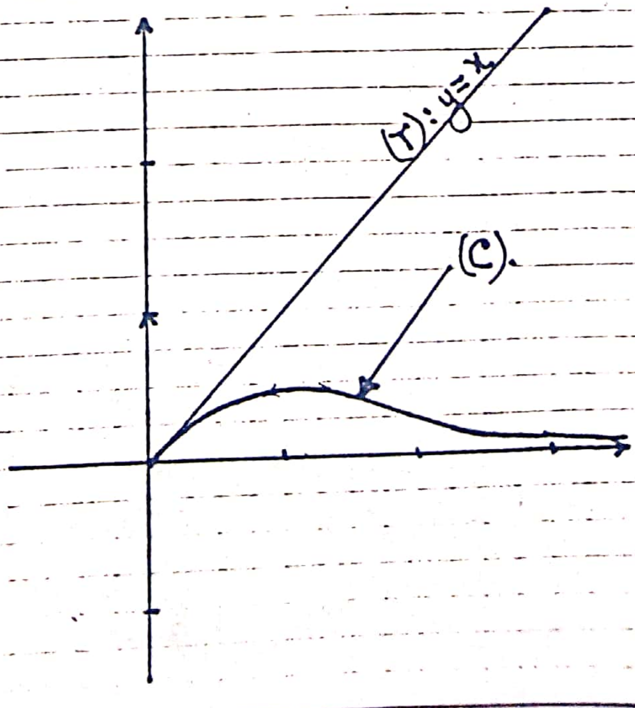
En cm², $A = 4\times\left(\frac{3}{2} - \ln(1+e)\right)$

$$= \frac{12}{2} - 4\ln(1+e)$$

$$= 6 - 4\ln(1+e)$$

$$\boxed{A = 6 - 4\ln(1+e) \text{ cm}^2}$$

Construction de (C) et (T).



3/ Pour tout entier naturel n, on pose

$$V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

a/ Calculons V_0, V_1, V_2

$$V_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln(x+e^{-x})\right]_0^1$$

$$= \ln(1+e^{-1}) - \ln 1$$

$$\boxed{V_0 = \ln(1+e^{-1})}$$

$$V_1 = \int_1^2 f(x)\,dx = \left[\ln(x+e^{-x})\right]_1^2$$

$$= \ln(2+e^{-2}) - \ln(1+e^{-1})$$

$$= \ln\left(\frac{2+e^{-2}}{1+e^{-1}}\right)$$

$$\boxed{V_1 = \ln\left(\frac{2e^2+1}{e^2+e}\right)}$$

$$V_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \left[\ln(x+e^{-x})\right]_2^3$$

$$= \ln(3+e^{-3}) - \ln(2+e^{-2})$$

$$= \ln\left(\frac{3+e^{-3}}{2+e^{-2}}\right)$$

$$\boxed{V_2 = \ln\left(\frac{3e^3+1}{2e^3+e}\right)}$$

b/ Montrons que pour naturel $n \geq 2$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

D'après B-1-b/ la fonction f est décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$ avec $\alpha < 1,15$

$\Leftrightarrow$ f décroissante sur $[n ; n+1]$, $n \geq 2$.

$$n \leq x \leq n+1 \Leftrightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\Leftrightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\Leftrightarrow f(n+1)(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)(n+1-n)$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

Conclusion

Pour tout naturel $n \geq 2$ on a :

$$\boxed{f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)}$$

Déduisons-en la monotonie de la suite (V_n) à partir de $n = 1$

$$f(n+1) \leq V_n \leq f(n) \quad \forall n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow f(n+2) \leq V_{n+1} \leq f(n+1)$$

or $f(n+1) \leq V_n \Leftrightarrow V_{n+1} \leq f(n+1) \leq V_n$

$$\Rightarrow V_{n+1} \leq V_n$$

Conclusion

$\boxed{\text{La suite } (V_n) \text{ est décroissante}}$

c/ Déterminons la limite de (V_n)

$$\begin{cases} f(n+1) \leq V_n \leq f(n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ d'après le théorème des Gendarmes.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 0}$$

d/ Déterminons la somme

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$S_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{n+1} f(x)\,dx = \ln(n+1+e^{-n-1})$$

$$\boxed{S_n = \int_0^{n+1} f(x)\,dx}$$

PROBLEME N°22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x-1+(x^2+2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1-(x^2-2x+2)e^{-x}$.

1/ Etudions les limites de la fonct. g en $-\infty$ et en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{X\to+\infty} (nX)^n e^{-nX},\quad X = \frac{x}{n}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} n^n (Xe^{-X})^n$$

$$= n^n \times 0^n = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

$= -\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right.$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-x}$$

$$= 1-0+2\times0-2\times0 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$$

2/ Calculons la dérivée de g et déterminons son signe.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\left[(2x-2)e^{-x}-(x^2-2x+2)e^{-x}\right]$$

$$= (x^2-4x+4)e^{-x}$$

$$\boxed{g'(x) = (x-2)^2 e^{-x}}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ et $(x-2)^2 \geq 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geq 0}$$

3/ Etudions le sens de variation de g.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0$; g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car : $g'(2) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$, $g'(x) > 0$.

Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-2e^{-2}$	$\nearrow$	1

$g(2) = 1-2e^{-2}$

4/ Démontrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

La fonction g est continue, monotone strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

g définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty;1[$. Or $0 \in]-\infty;1[$.

Il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.

Conclusion

L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x)=0$ admet une solution unique α.

Justifions que $0,35 < \alpha < 0,36$

$g(0,35) = -0,0024$ et $g(0,36) = 0,0166$

On a donc : $g(0,35) < 0 < g(0,36)$

$\Leftrightarrow g(0,35) < g(\alpha) < g(0,36)$

$\Leftrightarrow 0,35 < \alpha < 0,36$ car g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{0,35 < \alpha < 0,36}$

5/ Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

g étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha)=0$, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

1/ Etudions les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x-1+(x^2+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (xe^{x}-e^{x}+x^2+2)e^{-x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}-e^{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2 = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-1+(x^2+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x-1+x^2e^{-x}+2e^{-x}$$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}+2e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2/ Déterminons $f'(x)$ pour tout x réel et montrons que $f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} - (x^2+2)e^{-x}$

$= 1 - (x^2-2x+2)e^{-x}$

$f'(x) = g(x)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)}$$

3/ Déduisons-en à l'aide de la partie A, les variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$; $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$. D'après A-5/ on déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4/ a/ Démontrons que $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$

On sait que $g(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow 1-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=0$

$\Leftrightarrow 1-(\alpha^2+2)e^{-\alpha}+2\alpha e^{-\alpha}=0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+2)e^{-\alpha}=1+2\alpha e^{-\alpha}$

$f(\alpha)=\alpha-1+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$

$=\alpha-1+1+2\alpha e^{-\alpha}=\alpha+2\alpha e^{-\alpha}$

$=\alpha(1+2e^{-\alpha})$

$$\boxed{f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})}$$

b/ A l'aide de l'encadrement α, déterminons un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4.10^{-2}

$0,35<\alpha<0,36 \Leftrightarrow e^{-0,36}<e^{-\alpha}<e^{-0,35}$ car $x\mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 2e^{-0,36}<2e^{-\alpha}<2e^{-0,35}$ car $2>0$

$\Leftrightarrow 1+2e^{-0,36}<1+2e^{-\alpha}<1+2e^{-0,35}$

$\Rightarrow 0,35(1+2e^{-0,36})<\alpha(1+2e^{-\alpha})<0,36(1+2e^{-0,35})$

$\Leftrightarrow 0,83<f(\alpha)<0,87.$

$$\boxed{0,83<f(\alpha)<0,87}$$

5/ Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}$

$=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$. On en déduit que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Position relative de (C) et (Δ)

Posons $d(x)=f(x)-(x-1)$

$=(x^2+2)e^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+2>0$ et $e^{-x}>0$

$\Rightarrow (x^2+2)e^{-x}>0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-(x-1)>0 \Leftrightarrow (C)$ est au dessus de (Δ).

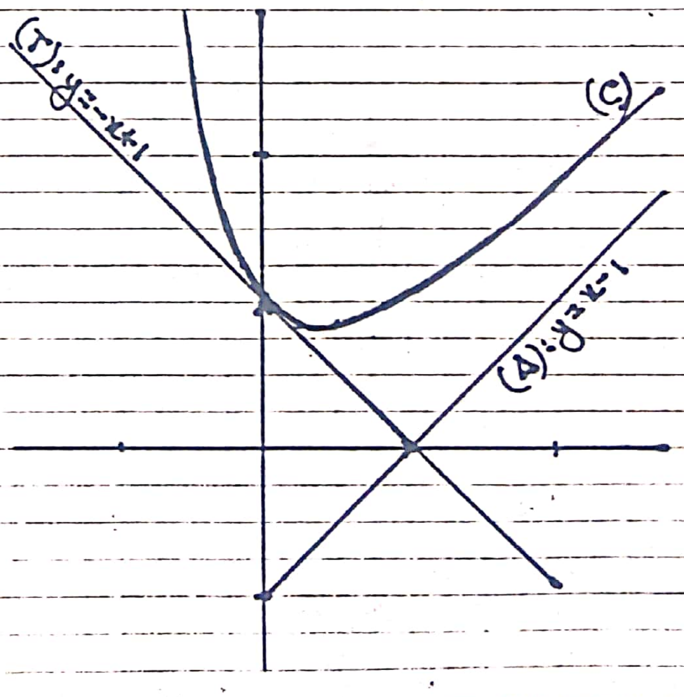
6/ Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

$(T): y=f'(0)x+f(0)$

$f'(0)=-1 \quad f(0)=1$

$$\boxed{(T): y=-x+1}$$

7/ Traçons (Δ), (T) puis (C).



8/ a/ Déterminons les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par: $P(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de: $x\mapsto(x^2+2)e^{-x}$

$P(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$

$P'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x}$

$= \left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

P est une primitive de $x \longmapsto (x^2+2)e^{-x}$

soi $P'(x) = (x^2+2)e^{-x}$

$\Leftrightarrow \left(-ax^2+(2a-b)x+b-c\right)e^{-x} = (x^2+2)e^{-x}$

Par identification on a:

$\begin{cases} -a=1 \\ 2a-b=0 \\ b-c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}$

$\boxed{a=-1 \quad b=-2 \quad c=-4 \text{ soit } P(x) = -(x^2+2x+4)e^{-x}}$

b/ Calculons en fonction de α l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et les droites d'équations: $x=-\alpha$ et $x=0$

$\mathcal{A} = 4\int_{-\alpha}^{0}\left(f(x)-(x-1)\right)dx$

$= 4\int_{-\alpha}^{0}(x^2+2)e^{-x}dx$

$= -4\left[(x^2+2x+4)e^{-x}\right]_{-\alpha}^{0}$

$= -4\left(4-(\alpha^2-2\alpha+4)e^{\alpha}\right)$

$\boxed{\mathcal{A} = 4(\alpha^2-2\alpha+4)e^{\alpha}-16}$

c/ Justifions que $\mathcal{A} = 4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$

$A = 4(\alpha^2-2\alpha+4)e^{\alpha}-16 = 4\left[(\alpha^2+2)-2\alpha+2\right]e^{\alpha}-16$

or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha} = 1$

$\Leftrightarrow \alpha^2+2-2\alpha = e^{\alpha}$

$\Leftrightarrow \alpha^2+2 = e^{\alpha}+2\alpha$

$\mathcal{A} = 4\left(e^{\alpha}+2\alpha-2\alpha+2\right)e^{\alpha}-16$

$= 4(e^{\alpha}+2)e^{\alpha}-16 = 4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$

$\boxed{\mathcal{A} = 4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16 \text{ cm}^2}$

PARTIE C

1/ Démontrons que pour tout x de l'intervalle $[1;2]$ on a: $1 \leq f(x) \leq 2$

On sait que f est croissante sur ℝ donc croissante sur $[1;2]$

$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

or $f(1) \simeq 1,1$ et $f(2) \simeq 1,8$

$\Rightarrow 1 < 1,1 \leq f(x) \leq f(2) < 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 2$

$\boxed{\forall x \in [1;2],\ 1 \leq f(x) \leq 2}$

2/ Démontrons que pour tout x de l'intervalle $[1;2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

On sait que: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)$ et que g est strictement croissante sur ℝ

donc: $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$

or $f'(1) \simeq 0,63 > 0$ et $f'(2) \simeq 0,73 < \frac{3}{4}$

donc: $\forall x \in [1;2],\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

$\boxed{\forall x \in [1;2],\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}}$

3/ Soit h la fonction définie sur $[1;2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

Etudions le sens de variation de h.

$\forall x \in [1;2]$, $h'(x) = f'(x) - 1$

or $\forall x \in [1;2]$, $f'(x) < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow f'(x) - 1 < -\frac{1}{4} < 0$

$\forall x \in [1;2]$, $h'(x) < 0$.

h est donc décroissante sur $[1;2]$

De plus : $h(1) = f(1) - 1 \simeq 1,1 - 1 \simeq 0,1$

$h(2) = f(2) - 2 \simeq 1,8 - 2 \simeq -0,2$

h est monotone sur $[1;2]$ et $h(1) \times h(2) < 0$ donc l'équat° $h(x) = 0$ admet une solution unique β sur $[1;2]$. De plus $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

Conclusion :

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une solut° unique } \beta \text{ sur } [1;2]}$

4/ Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

a/ Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$

* $U_0 = 1 \Rightarrow 1 \leq U_0 \leq 2$

* Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$ et montrons qu'alors $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

On sait que $\forall x \in [1;2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$

$1 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq f(U_n) \leq 2$ soit

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq 2}$

b/ Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_n - \beta|$$

La fonction f est dérivable sur $[1;2]$ et $\forall x \in [1;2]$, $0 < f'(x) \leq \frac{3}{4}$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n et β appartiennent à $[1;2]$

En appliquant l'inégalité des accroissement finis à f entre β et U_n on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(U_n) - f(\beta)| \leq \frac{3}{4}|U_n - \beta|$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\beta) = \beta$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_n - \beta|}$$

c/ Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\forall p \in \mathbb{N}$, $|U_{p+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_p - \beta|$ (1)

Remplaçons dans (1), p par $0, 1, 2 \ldots n-1$;

On a : $|U_1 - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_0 - \beta|$

$|U_2 - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_1 - \beta|$

$|U_3 - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_2 - \beta|$

$\vdots$

$|U_n - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_{n-1} - \beta|$

Multiplions membres à membres les n égalités obtenues et simplifions. On a :

$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \beta|$

$1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\beta \leq -1$

$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \beta \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0 - \beta| \leq 1$

$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

d./ Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente et donnons sa limite.

On sait que $\frac{3}{4} \in]-1;1[$ donc:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

La suite (U_n) est donc convergente et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \beta.}$$

e/ Déterminons n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ on ait : $|U_n - \beta| \leq 10^{-2}$

$|U_n-\beta| \leq 10^{-2}$ si $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10^{-2}}{\ln 3 - \ln 4} \simeq 16{,}008$$

On a donc: $\boxed{n_0 = 17}$

PROBLEME N°23

On considère la fonction de la variable réelle x définie par: $f_a(x) = x + ae^{-|x|}$ où a est un réel non nul, e la base des logarithmes népériens et $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

PARTIE A

1/ a/ Ensemble de définition de f_a

$\boxed{Df_a = \mathbb{R}}$

Partie de Df_a où f_a est dérivable

f_a est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b/ Etudions la dérivabilité de f_a à gauche et à droite en 0

On sait que: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$f_a(0) = a.$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f_a(x)-f_a(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x+ae^x-a}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} 1 + a\frac{e^x-1}{x}$$

$$= 1+a$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f_a(x)-f_a(0)}{x} = 1+a.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f_a(x)-f_a(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x+ae^{-x}-a}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} 1 + a\frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$= \lim_{\substack{X\to 0 \\ <}} 1 - a\frac{e^X-1}{X}, \quad X = -x$$

$$= 1-a$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f_a(x)-f_a(0)}{x} = 1-a$$

f_a est dérivable à gauche en 0 avec $f'_{ag}(0) = 1+a$; est dérivable à droite en 0 avec $f'_{ad}(0) = 1-a$.

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, $1+a \neq 1-a$; f_a n'est donc pas dérivable en 0.

c/ Montrons que pour tout a, la courbe (C_a) représentative de f_a admet une asymptotique oblique.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} ae^{-|x|}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} ae^{-X}, \quad X = |x|$$

$$= a \times 0 = 0$$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \to \pm\infty} f_a(x) - x = 0.$

Conclusion :

Pour tout a non nul, la courbe (Ca) admet la droite (Δ) d'équation $y = x$ comme asymptote oblique.

2·/ a-/ Valeur de x pour laquelle la dérivée s'annule.

$$f_a(x) = \begin{cases} x + ae^{-x}, & x \geq 0 \\ x + ae^{x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'_a(x) = \begin{cases} 1 - ae^{-x}, & x \geq 0 \\ 1 + ae^{x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'_a(x) = \begin{cases} 1 - ae^{-x} = 0, & x \geq 0 \quad ① \\ \text{ou} \\ 1 + ae^{x} = 0, & x \leq 0 \quad ② \end{cases}$$

$① \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow x = \ln a$

$② \Leftrightarrow e^{x} = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow x = -\ln(-a).$

$\ln a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$

$-\ln(-a) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(-a) \geq 0 \Leftrightarrow -a \geq 1$

$\Leftrightarrow a \leq -1$

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln a & a \geq 1 \\ \text{ou} \\ x = -\ln(-a), & a \leq -1 \end{cases}$$

Déduisons-en l'ensemble I des réels a pour lesquels f_a a un extrémum relatif :

$I =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

Nature de l'extrémum :

Tableau de signe de $f'_a(x)$

1er cas $a \leq -1$

x	$-\infty$		$-\ln(-a)$		0		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	0	$-$	$1+a \| 1-a$	$+$	

Pour $a \leq -1$, l'extrémum est un maximum relatif.

2e cas $a \geq 1$

x	$-\infty$		0		$\ln a$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	$1+a \| 1-a$	$-$	0	$+$	

Pour $a \geq 1$, l'extrémum est un minimum relatif.

b·/ Soit x_a le point où f_a possède un extrémum relatif.

Déterminons l'ensemble des points $M(x_a, f_a(x_a))$ lorsque a décrit I

Pour $a \leq -1$, $x_a = -\ln(-a)$

$f_a(x_a) = \ln(-a) - 1$

Pour $a \geq 1$, $x_a = \ln a$

$f_a(x_a) = \ln a + 1$

$$\begin{cases} x = -\ln(-a) \\ y = \ln(-a) - 1 \\ a \leq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \ln a \\ y = \ln a + 1 \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

L'ensemble D décrit par le point $M(x_a, f_a(x_a))$ lorsque a décrit I est la réunion des demi-droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équations respectives :

$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} y = -x-1 \\ x \leq 0 \end{cases}$ $\quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} y = x+1 \\ x \geq 0 . \end{cases}$

3·/ a·/ Tableau de variation de f_e

Pour $a = e$ $\quad x_a = 1$ et $f_e(-1) = 2$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'_e(x)$		$+1+e$	‖ $1-e$	$-$	0	$+$	
$f_e(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_e(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f_e(x) = +\infty$

b·/ Traçons (C_e), ses demi-tangentes au son point d'abscisse 0, son asymptote et l'ensemble D. (Voir page suivante)

4·/ a·/ Le réel a étant fixé, déterminons les points d'intersection P et Q de (C_a) avec la droite $(S) : y = x+m, m \in \mathbb{R}$

$f_a(x) = y \Leftrightarrow f_a(x) = x+m$

$\Leftrightarrow x + a e^{-|x|} = x+m$

$\Leftrightarrow e^{-|x|} = \frac{m}{a} \quad (1)$

1er cas : $\frac{m}{a} \leq 0$.

(1) n'a pas de sens et $(C_a) \cap (S) = \emptyset$

2e cas $\frac{m}{a} > 0$

$(1) \Leftrightarrow -|x| = \ln\left(\frac{m}{a}\right) \Leftrightarrow |x| = \ln\left(\frac{a}{m}\right)$

$\Leftrightarrow x_1 = \ln\left(\frac{a}{m}\right)$ ou $x_2 = -\ln\left(\frac{a}{m}\right) = \ln\left(\frac{m}{a}\right)$

$f_a(x_1) = m + \ln\left(\frac{a}{m}\right)$; $f_a(x_2) = m + \ln\left(\frac{m}{a}\right)$

$$\boxed{P\left(\ln\left(\frac{a}{m}\right) ; m + \ln\left(\frac{a}{m}\right)\right)}$$

$$\boxed{Q\left(\ln\left(\frac{m}{a}\right) ; m + \ln\left(\frac{m}{a}\right)\right)}$$

b·/ – Coordonnées du points J milieu du segments [PQ]

$x_J = \frac{1}{2}(x_P + x_Q) = 0$

$y_J = \frac{1}{2}(y_P + y_Q) = m$

$$\boxed{J(0 ; m)}$$

– Ensemble des points J lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

J existe ssi $m \cdot a > 0$

L'ensemble des points J lorsque m varie est l'axe (Oy) privé du point O.

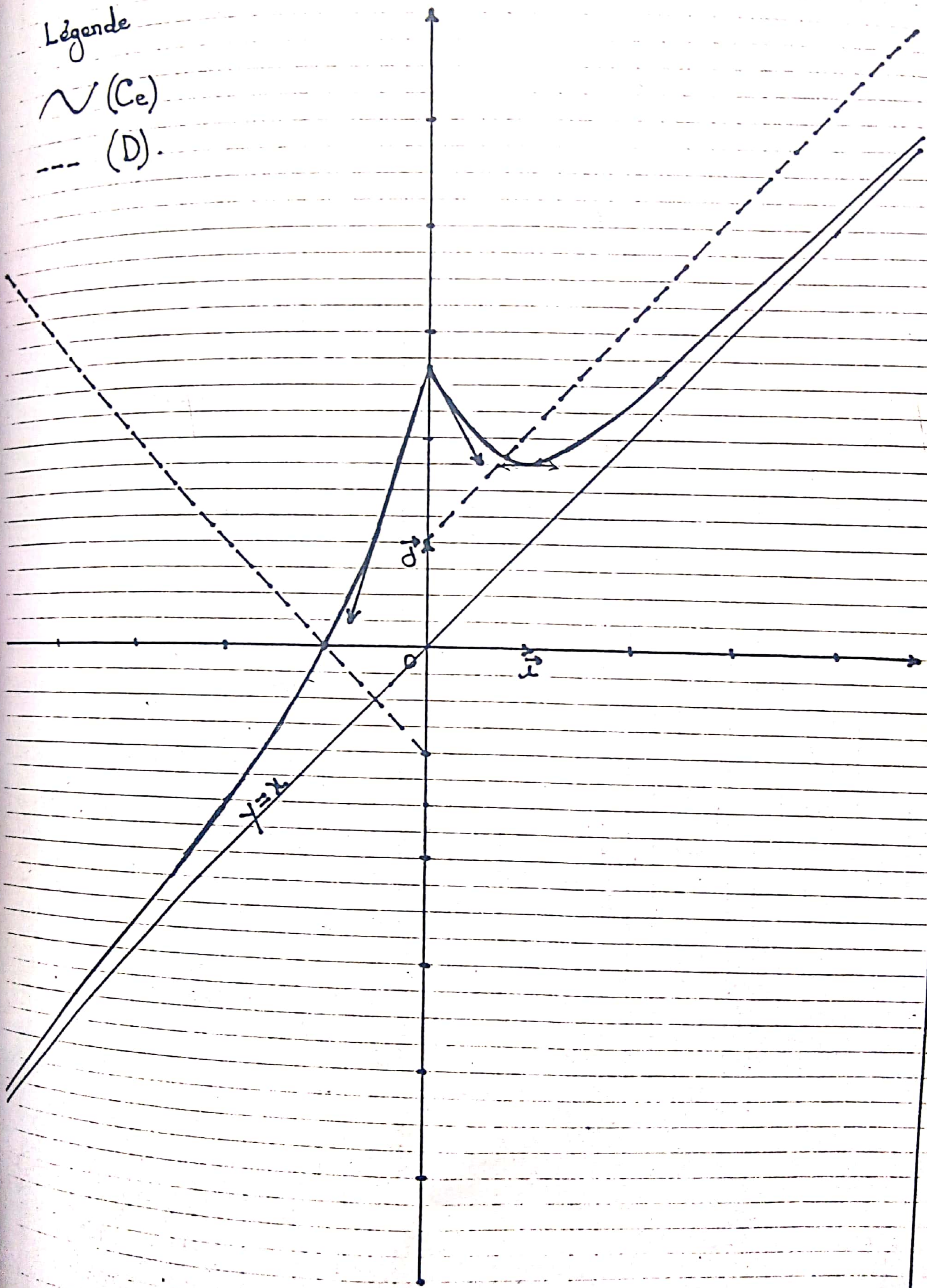
PARTIE B

Dans cette partie on prend $a = 1$

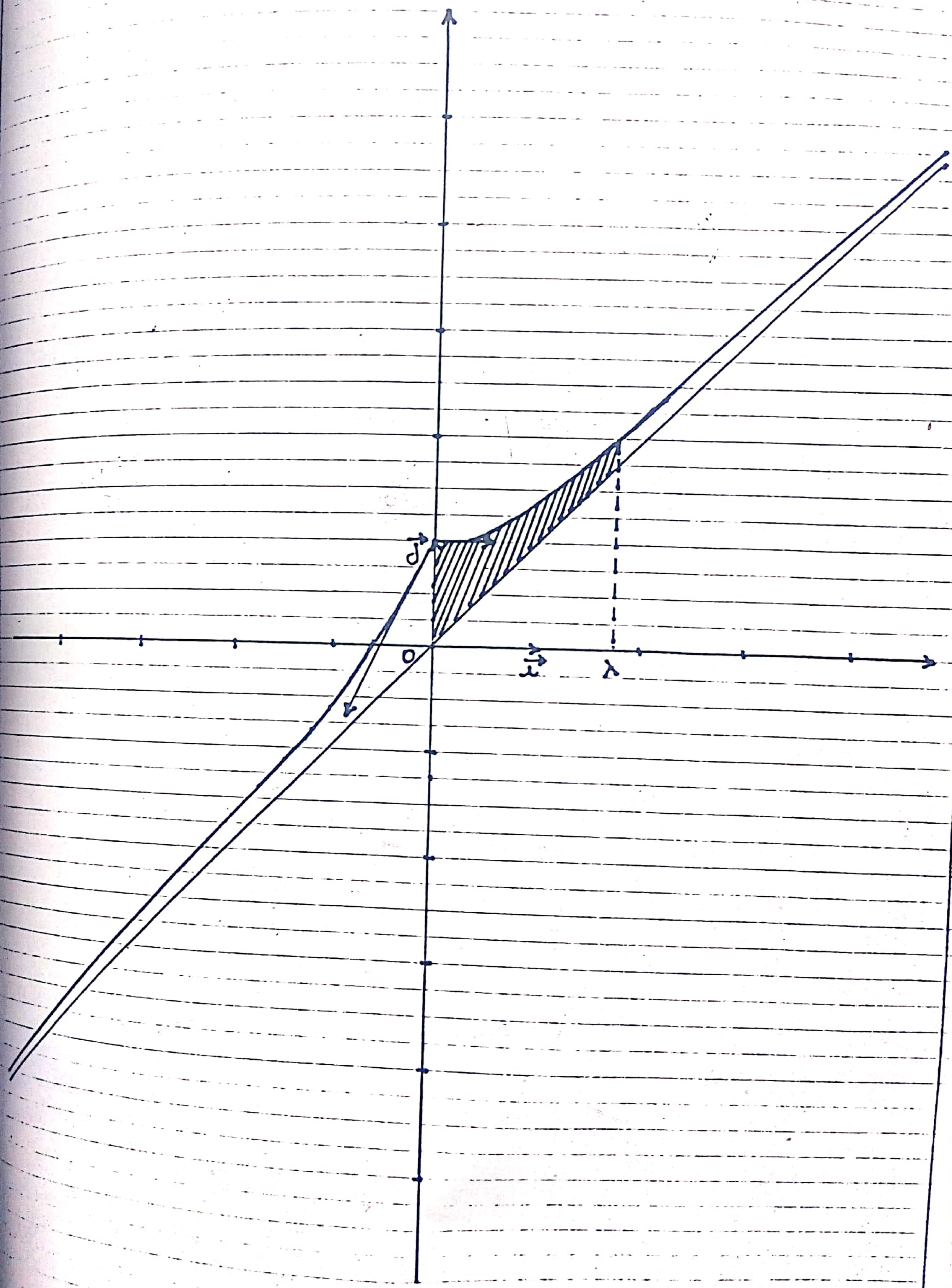
1·/ a·/ Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	2 ‖ 0	$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

b·/ Construction de (C_1), ses demi-tangentes au point d'abscisse 0 et son asymptote (Voir figure à la page


Légende
(Ce)
(D).
y=x
O

Construction de la courbe (C_1).



2/ Soit l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ x \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

a/ Calculer l'aire S' de cet ensemble

$$S' = \int_0^{\lambda} (f_1(x) - x)\,dx = \int_0^{\lambda} e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda} = (1 - e^{-\lambda})\text{ u.a.}$$

$$\boxed{S' = 4(1 - e^{-\lambda})\text{cm}^2}$$

b/ Limite de S' lorsque λ tend vers l'infinie

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S' = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 4(1 - e^{-\lambda}) = 4$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} S' = 4\text{cm}^2}$$

PROBLEME N° 24

PARTIE A.

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définies par : $f_m(x) = e^{x} - m(x+1)$ $m \in \mathbb{R}$. On désigne par (C_m) leurs courbes dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

1/ Etude des variations de f_1

$$f_1(x) = e^{x} - (x+1)$$

$Df_1 = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} - (x+1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x+1 = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - (x+1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}\left(1 - \dfrac{x}{e^{x}} - \dfrac{1}{e^{x}}\right)$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

Dérivée

f_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = e^{x} - 1$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Signe de $f_1'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau ci-dessus :

f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$, strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et admet un minimum au point 0. $f_1(0) = 0$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Construction de la courbe (C_1)

Branches infinies

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) + (x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

La courbe (C_1) admet en $-\infty$ la droite d'équation $y = -x-1$ comme asymptote oblique.

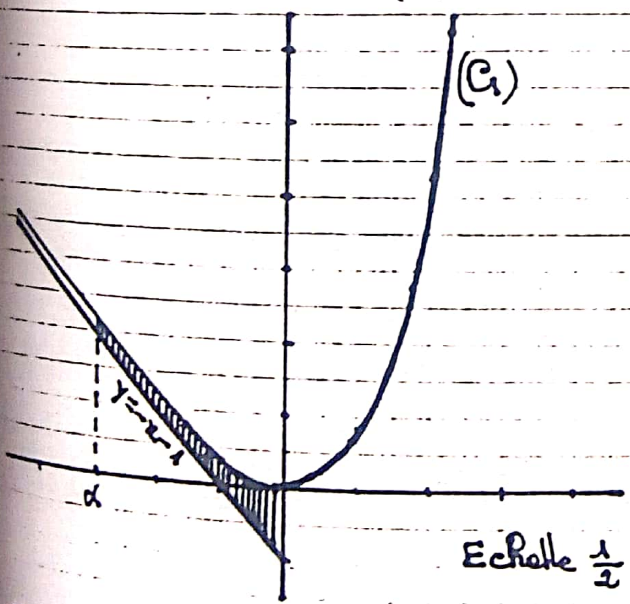
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$

La courbe (C_1) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

Construction de (C_1)



Echelle $\frac{1}{2}$

2/ Soit (Δ_1) la droite d'équation $y = -x-1$ et $\alpha \in \mathbb{R}^-$

Calculons l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (C_1), (Δ_1) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$

$A(\alpha) = \int_\alpha^0 \left(f_1(x) - (-x-1)\right) dx$

$= \int_\alpha^0 e^x dx = \left[e^x\right]_\alpha^0 = (1-e^\alpha)$ u.a

$A(\alpha) = (1-e^\alpha)$ u.a $= 4(1-e^\alpha)$ cm^2

$$\boxed{A(\alpha) = 4(1-e^\alpha) \text{ cm}^2}$$

Calculons la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$

$\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} 4(1-e^\alpha)$

$= 4$ car $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} e^\alpha = 0$

$$\boxed{\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha) = 4 \text{ cm}^2}$$

3/ Pour tout entier naturel n, on définit par (D_n) le domaine limité par (Δ_1), (C_1) et les droites d'équations $x = -n-1$ et $x = -n$

a/ Calculons en cm^2 l'aire A_n du domaine (D_n).

$A_n = 4\int_{-n-1}^{-n} \left(f_1(x) - (-x-1)\right) dx$

$= 4\int_{-n-1}^{-n} e^x dx = 4\left[e^x\right]_{-n-1}^{-n}$

$= 4(e^{-n} - e^{-n-1})$

$= 4e^{-n}(1 - e^{-1})$

$$\boxed{A_n = \frac{4}{e}(e-1)e^{-n}}$$

b/ Montrons que la suite (A_n) est une suite géométrique dont nous préciserons le 1^{er} terme A_0 et la raison

$A_n = \frac{4}{e}(e-1)e^{-n}$ $\quad A_0 = \frac{4}{e}(e-1)$

$A_{n+1} = \frac{4}{e}(e-1)e^{-n-1}$

$= \frac{4}{e}(e-1)e^{-n}\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}A_n$

$A_{n+1} = \frac{1}{e}A_n.$

$$\boxed{\text{la suite } (A_n) \text{ est donc une suite géométrique de } 1^{er} \text{ terme } A_0 = \frac{4}{e}(e-1) \text{ et de raison } q = \frac{1}{e} = e^{-1}}$$

c/ Calculons $S_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n$

$S_n = A_0 \frac{1-(e^{-1})^{n+1}}{1-e^{-1}}$

$= 4(1-e^{-1})\frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}$

$$\boxed{S_n = 4(1-e^{-n-1})}$$

Déduisons-en la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4(1-e^{-n-1})$

$= 4$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n-1} = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 4}$$

4/ Etudions suivant les valeurs de m, les variations de f_m :

$f_m(x) = e^{x} - m(x+1)$

$Df_m = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} - m(x+1)$

$= \begin{cases} -\infty \text{ si } m<0 \\ +\infty \text{ si } m>0 \\ 0 \text{ si } m=0. \end{cases}$

$\forall m \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$

Dérivée

f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = e^{x} - m$

$\forall m \leq 0$, $f'_m(x) > 0$; f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1^{er} cas $m<0$

Tableau de variation de f_m

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2^{e} cas $m=0$

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3^{e} cas $m>0$

$f'_m(x) = 0 \iff e^{x} = m \iff x = \ln m.$

$f_m(\ln m) = m - m(\ln m + 1) = -m\ln m.$

Signe de $f'_m(x)$

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_m

$\forall x \in]-\infty; \ln m[$ $f'_m(x) < 0$; f_m est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln m[$

$\forall x \in]\ln m; +\infty[$ $f'_m(x) > 0$; f_m est strictement croissante sur $]\ln m; +\infty[$

- f_m admet un minimum au point $\ln m$

Tableau de variation de f_m

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-m\ln m$	$\nearrow$	$+\infty$

5/ **Montrons que toutes courbes (C_m) passent par un point fixe B**

Posons $y = f_m(x) \Leftrightarrow y = e^{x} - m(x+1)$

$$\Leftrightarrow y - e^{x} = -m(x+1)$$

$$\begin{cases} x+1 = 0 \\ y - e^{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Toutes les courbes } (C_m) \text{ passant par le point } B\left(-1; \tfrac{1}{e}\right)}$

6/ **Montrons que la droite (Δm) : $y = -mx - m$ est asymptote à (C_m)**

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) + mx + m = \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

$\boxed{\text{La droite } (\Delta m) : y = -mx - m \text{ est asymptote oblique à } (C_m) \text{ à } -\infty.}$

Position relative de (C_m) et (Δm)

$$f_m(x) - (-mx - m) = e^{x} > 0$$

$\boxed{\text{La courbe } (C_m) \text{ est au dessus de } (\Delta m)}$

PARTIE B

A tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$, on associe par une transformation T, le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$

$$T : P \longrightarrow P$$

$$M \longmapsto M' \text{ et } z' = (1-i)z + 1 + i$$

1/ **Nature de T.**

L'écriture complexe de (T) est sous la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$\boxed{\text{T est donc une similitude plane directe}}$

2/ **Définition analytique de T.**

$$z' = (1-i)z + 1 + i$$

$$= (1-i)(x+iy) + 1 + i$$

$z' = x + y + 1 + i(-x + y + 1)$, En posant $z' = x' + iy'$

on a : $\boxed{\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}}$

3/ **M étant un point de (C_1), déterminons en fonction de x, abscisse de M les coordonnées de $M' = T(M)$**

$M(x;y) \in (C_1) \Leftrightarrow y = e^{x} - x - 1$

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 = x + e^{x} - x - 1 + 1 = e^{x} \\ y' = -x + y + 1 = -x + e^{x} - x - 1 + 1 = e^{x} - 2x \end{cases}$$

$$\boxed{M'(e^{x}; e^{x} - 2x)}$$

4/ **Déterminons l'ensemble (γ), image par T de la courbe (C_1)**

$$\begin{cases} M(x;y) \in (C_1) \\ M'(x';y') = T(M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = e^{x} \\ y' = e^{x} - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln x', \ x' > 0 \\ y' = x' - 2\ln x' \end{cases}$$

L'ensemble (γ) image par T de la courbe (C_1) est la courbe d'équation
$y = x - 2\ln x, \ x > 0$

PARTIE C

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :
$g(x) = x - \ln(x^2)$.

1/ **Etudions les variations de g.**

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

$$\boxed{D_g = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[}$$

Limites de g aux bornes de D_g

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x - \ln x^2$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \underset{<}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x^2)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2\ln x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$$

Dérivée :

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Signe de $g'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Sens de variation de g

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ $g'(x) > 0$;

g est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

et sur $]2; +\infty[$

$\forall x \in]0; 2[$, $g'(x) < 0$; g est strictement décroissante sur $]0; 2[$.

g admet un minimum local au point 2

$g(2) = 2 - \ln 4 = 2(1 - \ln 2)$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$2(1-\ln 2)$	$\nearrow +\infty$

Soit (Γ) la courbe de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$

Précisons les branches infinies de (Γ)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$

$$\boxed{\text{La droite d'équation } x = 0 \text{ est asymptote verticale à la courbe } (\Gamma).}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - 2\frac{\ln|x|}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - 2\frac{\ln(-x)}{x}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} 1 + 2\frac{\ln X}{X}$, $X = -x$

$= 1$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{2\ln x}{x}$

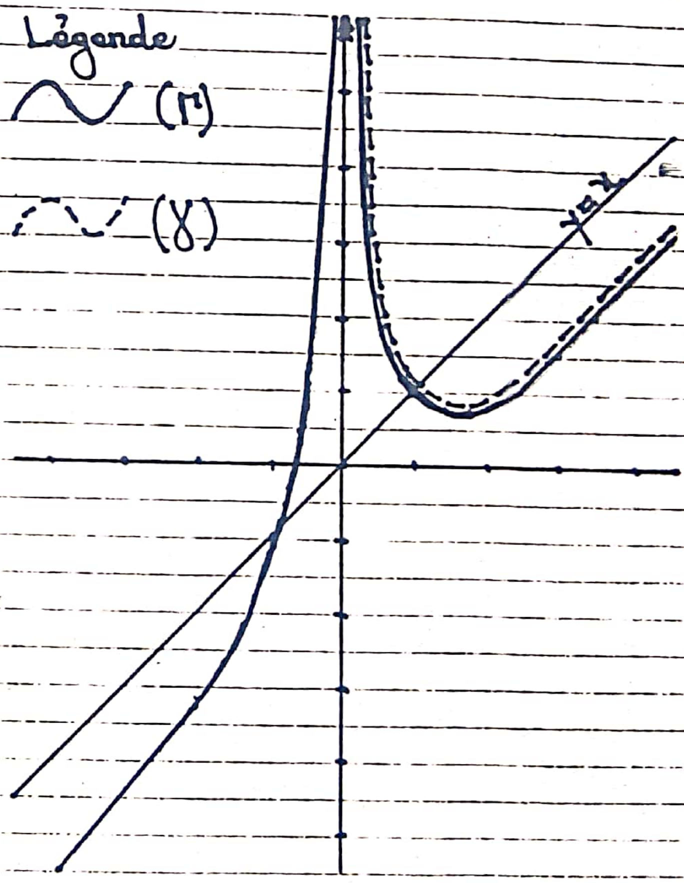
$= 1 + 2 \times 0 = 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) - x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} -\ln(x^2)$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X$, $X = x^2$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) - x = -\infty$

$$\boxed{\text{La courbe } (\Gamma) \text{ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation } y = x}$$



2/ Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution dont nous donnerons un encadrement d'amplitude 10^{-1}

D'après les variations de g on a:

− $\forall x > 0$, $g(x) \geq 2(1 - \ln 2) > 0$

− La restriction de g à $]-\infty; 0[$ définit une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une seule solution.

Notons α cette solution on a:

3-/ Traçons (γ) dans le même repère que (Γ). (Voir figure à la page précédente)

PROBLEME N° 25

Soit la fonction numérique f définie par: $f(x) = 2x + \frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm).

PARTIE A

1-/ Déterminons l'ensemble de définition D de f.

$D = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\}$

Posons $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

$$\boxed{D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[}$$

- Etude de la parité de f

$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = 2(-x) + \frac{e^{-x}+1}{2(e^{-x}-1)}$$

$$= -2x + \frac{e^{-x}(1+e^x)}{2e^{-x}(1-e^x)}$$

$$f(-x) = -2x - \frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$$

$$= -\left(2x + \frac{e^x+1}{2(e^x-1)}\right) = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x)$.

On en déduit que f est une fonction impaire

2-/ Montrons que pour tout x de D on a: $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}$

$$\forall x \in D, \ f(x) = 2x + \frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$$

$$= 2x + \frac{e^x-1+2}{2(e^x-1)}$$

$$= 2x + \frac{e^x-1}{2(e^x-1)} + \frac{2}{2(e^x-1)}$$

$$= 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}$$

$$\boxed{\forall x \in D, \ f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}}$$

3-/ Calcul des limites de f en 0 et en $+\infty$

- limites de f en 0

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}$$

Posons $D(x) = e^x - 1$

Signe de D(x)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$D(x)$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}$$

$$= -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} 2x + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ e^x - 1 \to 0 \\ e^x - 1 < 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} 2x + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ e^x - 1 \to 0 \\ e^x - 1 > 0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

- limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$= +\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \frac{1}{2} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{array} \right.$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

4/ a/ Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$= 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) \right] = 0.$$

On en déduit que la droite $(\Delta) : y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b/ Etude de la position de (C) par rapport à (Δ)

Posons $g(x) = f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

$g(x)$ est du signe de $e^x - 1$ sur D.
car $e^x > 0$ sur D.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$
Position de (C) par rapport à (Δ)	(C) est en dessous de (Δ)	(C) est au dessus de (Δ).

c/ Déterminons les autres asymptotes à la courbe (C)

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

Conclusion

La courbe (C) possède deux autres asymptotes dont une verticale d'équation $x = 0$ et une oblique d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ en $+\infty$

PARTIE B

1/ Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0$ (I).

Posons $P(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

$P(x) = 0 \iff 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ (2)

Posons $X = e^x$

(2) $\iff 2X^2 - 5X + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$X_1 = \frac{1}{2}$ $X_2 = 2$

$e^x = \frac{1}{2} \iff x = -\ln 2$

$e^x = 2 \iff x = \ln 2$

$P(x) = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)\left(e^x - 2\right)$

Signe de $P(x)$

x	$-\infty$	$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$e^x-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$(I) \iff P(x)>0$

$$\boxed{S=\left]-\infty;-\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[}$$

2./ Déterminons la fonction dérivée de f

f est dérivable sur D comme somme des fonctions :

$x\mapsto 2x+\frac{1}{2}$ et $x\mapsto\frac{1}{e^x-1}$ toutes dérivables sur D.

$\forall x\in D,\ f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

$$\boxed{\forall x\in D,\ f'(x)=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}}$$

$\forall x\in D,\ (e^x-1)^2>0$, $f'(x)$ est donc du signe de $2e^{2x}-5e^x+2$. Ainsi :

$\forall x\in\left]-\infty;-\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[,\ f'(x)>0$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty;-\ln 2\right[$ et sur $\left]\ln 2;+\infty\right[$

$\forall x\in\left]-\ln 2;0\right[\cup\left]0;\ln 2\right[,\ f'(x)<0$

f est donc strictement décroissante sur $\left]-\ln 2;0\right[$ et sur $\left]0;\ln 2\right[$.

$f'(-\ln 2)=0 \quad f'(\ln 2)=0$

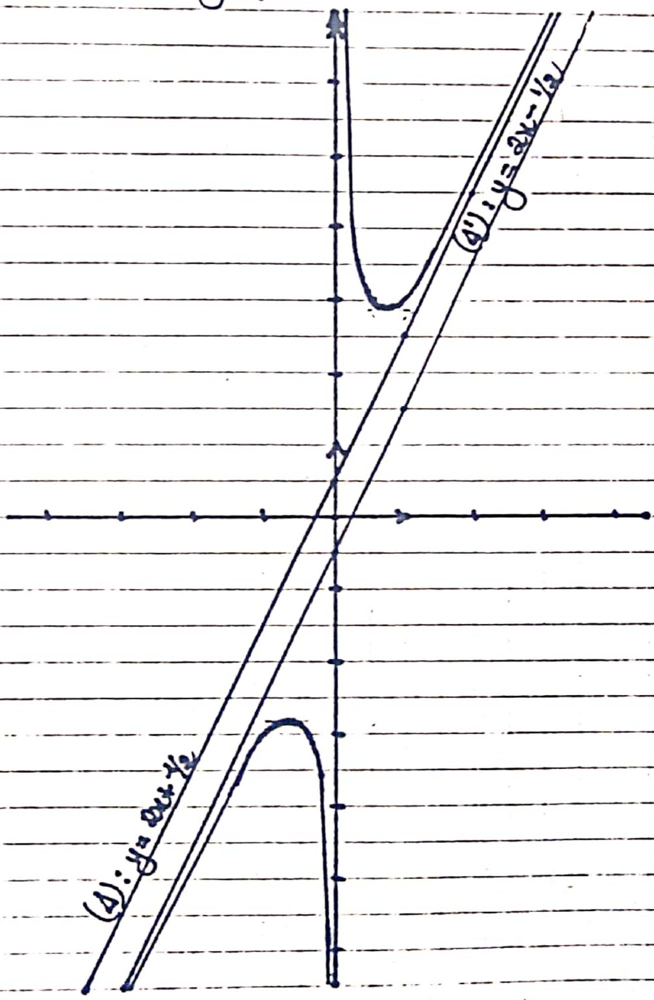
$f(-\ln 2)=-(2\ln 2+\frac{3}{2})$.

$f(\ln 2)=2\ln 2+\frac{3}{2}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-(2\ln 2+\frac{3}{2})$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2\ln 2+\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

3./ Construction de la courbe (C) et de ses asymptotes



4./ Déterminons l'intersection de (C) et de la droite (D_m) : $y=2x+m$ où m est un paramètre réel

Pour $m=-\frac{1}{2}$, $D_m=D_{-\frac{1}{2}}$ est confondue à Δ'

Pour $m=\frac{1}{2}$, $D_m=D_{\frac{1}{2}}$ est confondue à Δ

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous

m	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
Nombre de pts d'∩ de (C) et (D_m)		1	0	0	0	1	

PARTIE C

Soit n un entier naturel superieur à 1. On définit : $I_n = \displaystyle\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt$

1/ a/ Interpretation graphique de I_n

$$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \left(f(t) - \left(2t - \frac{1}{2}\right)\right)dt$$

I_n est l'aide du domaine plan délimite par la courbe (C), la droite (Δ') d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ et les droites d'équations $x = \ln n$ et $x = \ln(n+1)$

b/ Prouvons que $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt = \Big[\ln(e^t - 1)\Big]_{\ln n}^{\ln(n+1)}$$

$$= \ln(n+1-1) - \ln(n-1)$$

$$= \ln n - \ln(n-1)$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$\boxed{I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)}$$

c/ Calculons la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$= 0$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

2/ On considère $S_n = I_2 + I_3 + \dots + I_n$

A l'aide de la courbe (C) de f, donnons une interpretation graphique de S_n

$$S_n = I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt + \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt + \dots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt$$

$$S_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt.$$

S_n est l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (Δ') d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \ln(n+1)$.

Calculons S_n

$$S_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt = \Big[\ln(e^t - 1)\Big]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

$$= \ln(n+1-1) - \ln(2-1)$$

$$= \ln n$$

$$\boxed{S_n = \ln n}$$

3/ Calcul de A_n en cm^2.

$A_n = S_n$ $\quad\boxed{A_n = \ln n\ cm^2}$

Calculons la limite de A_n en $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty}$$

PROBLEME N°26

1/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ Etudions les variations de g

$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x}$

$= -\infty$ car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0+0 = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

Dérivée

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit des fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto e^{-x}$ toutes dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

$g'(x) = -xe^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$; $g'(x)$ a donc le signe de $-x$. $g'(x) = 0 \iff x = 0$.

Signe de $g'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de g.

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) > 0$; g est donc strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) < 0$; g est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

g admet un maximum en 0

$g(0) = 1$

Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b/ Construction de (C) avec soins

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}$

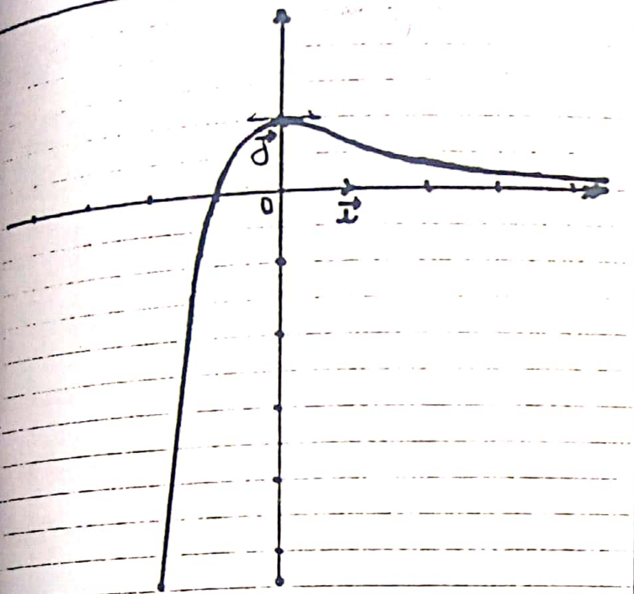
$= +\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. (C) possède en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	$-e^2$	0	1	$\frac{2}{e}$	$\frac{3}{e^2}$



2/ Soit les fonctions f_a, de variable réelle x définies par : $f_a(x) = e^{-x} + ax$. où a est un paramètre réel. On désignera par (C_a) la courbe représentative de la fonction f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a/ Etudions les fonctions f_a pour $a \in \{-1; 0; 1\}$

* Etude de f_{-1}

$f_{-1}(x) = e^{-x} - x$; $Df_{-1} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_{-1}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} - x$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} + X$, $X = -x$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-1}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - x$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_{-1}(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-1}(x) = -\infty$

Dérivée :

f_{-1} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ étant somme de fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x$ toutes continues et derivables sur $\mathbb{R}$; et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f'_{-1}(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{-1}(x) < 0$; f_{-1} est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_{-1}(x)$	$-$	
$f_{-1}(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

* Etude de f_0

$f_0(x) = e^{-x}$ $Df_0 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X}$, $X = -x$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 0$

Dérivée

f_0 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_0(x) = -e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_0(x) < 0$; f_0 est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	
$f_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

* Etude de f_1

$f_1(x) = e^{-x} + x$; $\mathcal{D}f_1 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1 + xe^{x})$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} + x$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

Dérivée :

f_1 est la somme de fonctions : $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto x$ toutes continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. f_1 est par conséquent continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -e^{-x} + 1$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\quad$ $f_1(0) = 1$

Signe de $f_1'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_1

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f_1'(x) < 0$; f_1 est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f_1'(x) > 0$; f_1 est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$

f_1 admet un minimum au point 0.

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Construction des courbes C_{-1}, C_0 et C_1

Branches infinies

$$\lim_{x\to+\infty} f_{-1}(x) + x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) - x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

En $+\infty$, (C_{-1}) admet une asymptote oblique d'équation $y = -x$, (C_0) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et (C_1) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_{-1}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} -1 - \frac{e^{X}}{X}, \quad X = -x$$

$$= -\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{e^X}{X}$, $X=-x$

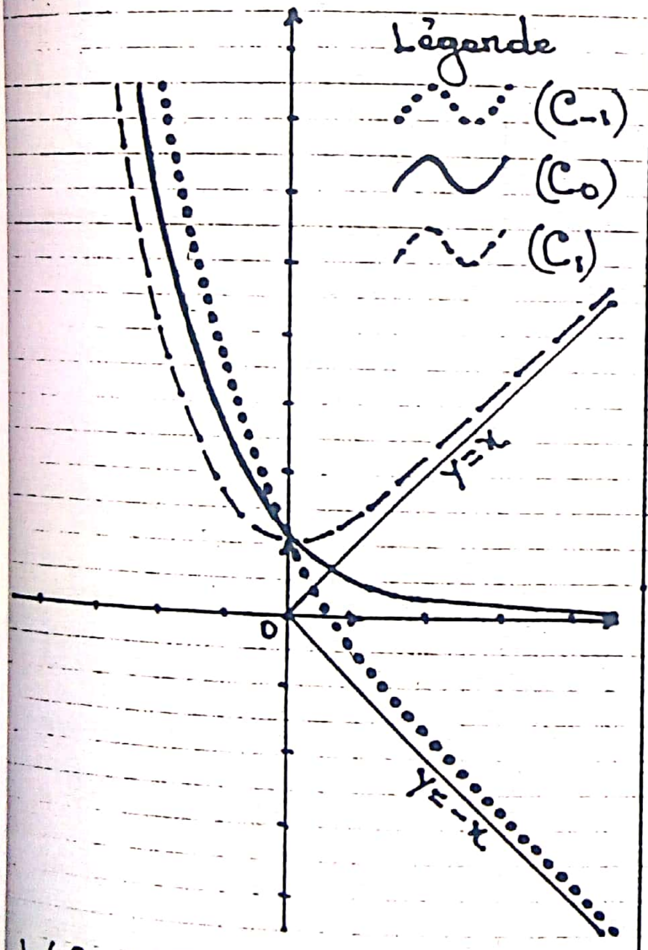
$= -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} 1-\frac{e^X}{X}$, $X=-x$

$= -\infty$

Pour $a\in\{-1;0;1\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_a(x)}{x} = -\infty$.

En $-\infty$, les courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1) possèdent une branche parabolique de direction (OY).



b/ Construisons le tableau de variation de f_a suivant les valeurs de a.

1er cas $a<0$

$Df_a = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}+ax = +\infty$ car $e^{-x}\to+\infty$ et $ax\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+ax$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Pour $a<0$ on a:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$

Dérivée

f_a est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'_a(x) = -e^{-x}+a$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'_a(x)<0$; f_a est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_a

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'_a(x)$	$-$
$f_a(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

2e cas $a=0$ Voir question précédente

3e cas $a>0$

$Df_a = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}+ax$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1+axe^{x})$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+ax$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $a>0$

Dérivée

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_a(x) = -e^{-x} + a$

$f'_a(x) = 0 \iff e^{-x} = a \iff x = -\ln a$

$f_a(-\ln a) = e^{\ln a} - a\ln a = a(1-\ln a)$

Tableau de variation de f_a

x	$-\infty$		$-\ln a$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$a(1-\ln a)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Valeurs de a pour lesquelles f_a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Soit E cet ensemble. On a d'après la question précédente :

$$\boxed{E =]-\infty; 0[}$$

- Valeurs de a pour lesquelles f_a admet un extrémum

D'après ce qui précède, f_a admet un extrémum pour $a > 0$.

- Soit I le point de (C_a) correspondant à cet extrémum

• Indiquons en fonction de a les coordonnées de I

$$\boxed{I\big(-\ln a;\ a(1-\ln a)\big)}$$

• Ensemble des points I lorsque a varie

$$\begin{cases} x = -\ln a \\ y = a(1-\ln a) \\ a > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = e^{-x} \\ y = e^{-x}(1+x) \end{cases}$$

L'ensemble des points I lorsque a varie est la courbe (C) représentative de la fonction g.

c-/ Utilisons les résultats précédents pour discuter suivant les valeurs de a, l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) : e^{-x} + ax = 0$$

$(E) \iff f_a(x) = 0$. Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points d'intersection de (C_a) avec l'axe (ox)

1^er^ cas $a < 0$

On sait que pour $a < 0$, f_a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

(E) admet donc une seule solution

2^e^ cas $a = 0$

Pour $a = 0$, f_0 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*_+$.

(E) n'admet donc pas de solution.

3^e^ cas $a > 0$

f_a possède un minimum en $-\ln a$ et ce minimum est $a(1-\ln a)$.

Le nombre de solutions de (E) dépend du signe de $a(1-\ln a)$

a	0		e		$+\infty$
$1-\ln a$		$+$	0	$-$	

• $0<a<e$

$a(1-\ln a)>0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}, f_a(x)>0$.

(E) n'admet donc pas de solution

• $a=e$

(E) admet une seule solution $x=-1$

• $a>e$

(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

3/ a/ <u>Montrons que quel que soit a, les fonctions f_a vérifient l'équation différentielle $y-xy'=(x+1)e^{-x}$</u>

$f_a(x)=e^{-x}+ax$; $f'_a(x)=-e^{-x}+a$.

$$\begin{aligned} y-xy' &= f_a(x)-xf'_a(x)\\ &= e^{-x}+ax-x(-e^{-x}+a)\\ &= e^{-x}+ax+xe^{-x}-ax\\ &= e^{-x}+xe^{-x}=(x+1)e^{-x}\end{aligned}$$

$$\boxed{f_a(x)-xf'_a(x)=(x+1)e^{-x}.}$$

$\forall a$, f_a vérifie l'équation différentielle : $y-xy'=(x+1)e^{-x}$.

b/ <u>Equation de la tangente à (C_a) au point d'abscisse x_0</u>

Soit (T) cette tangente on a:

(T) : $y=f'_a(x_0)(x-x_0)+f_a(x_0)$

- <u>Montrons que (T) coupe l'axe (oy) en un point indépendant de a.</u>

Pour $x=0$ on a : $y=f_a(x_0)-x_0f'_a(x_0)$

$y=(x_0+1)e^{-x_0}$.

$$\boxed{(T) \text{ coupe } (oy) \text{ en } B(0;(x_0+1)e^{-x_0})}$$

c/ Soit P un point de (oy), d'ordonnée m. <u>Etudions, selon les valeurs de m le nombre de tangente à (C_a) issues de P</u>

$P(0;m)\in(T) \iff (x_0+1)e^{-x_0}=m$

$\iff g(x_0)=m$

Le nombre des tangentes à (C_a) issues de P est le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x_0 : $g(x_0)=m$

En utilisant la courbe (C) de g dans la question on a:

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
nbre de tangentes issues de P		1		2		0	
			1		1		

4/ <u>Déterminons les courbes (C'_a) et (C_a) ayant les deux propriétés suivantes :</u>

* ces courbes sont orthogonales (P_1)
* les asymptotes de ces courbes sont perpendiculaires (P_2)

(P_1) signifie que les tangentes respectives à (C'_a) et à (C_a) en leur point d'intersection sont orthogonales

Or $(C_{a'})$ et (C_a) se coupent en $A(0;1)$ les tangentes à $(C_{a'})$ et à (C_a) en A ont respectivement pour coefficients directeurs $f'_{a'}(0)$ et $f'_a(0)$

$(P_1) \Leftrightarrow f'_{a'}(0)\cdot f'_a(0) = -1$

$\Leftrightarrow (a'-1)(a-1) = -1$

$(P_2) \Leftrightarrow aa' = -1$

(P_1) et $(P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} aa'-(a+a')+1 = -1 \\ aa' = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+a' = 1 \\ aa' = -1 \end{cases}$

a et a' sont solutions de l'équation

$t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1+4 = 5$

$t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

On a donc:

$\boxed{a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad a' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$
ou inversement.

- Une droite parallèle à (oy) coupe (C_a) et $(C_{a'})$ en M' et M'' respectivement.

Déterminons l'ensemble (Γ) des milieux J de [M'M'']

Posons $x = k$ on a:

$M'(k, f_{a'}(k)) \quad M''(k, f_a(k))$

$J\left(k; \frac{1}{2}(f_{a'}(k) + f_a(k)\right)$ soit $J\left(k, e^{-k} + \frac{k}{2}\right)$

car $a+a' = 1$

$\begin{cases} x = k \\ y = e^{-k} + k/2 \end{cases} \Leftrightarrow y = e^{-x} + x/2 = f_{1/2}(x)$

L'ensemble des points J est la courbe $(C_{1/2})$

Etudions la fonction $f_{1/2}$

$f_{1/2}(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x \quad D_{f_{1/2}} = \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} f_{1/2}(x) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f_{1/2}(x) = +\infty$

$f'_{1/2}(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

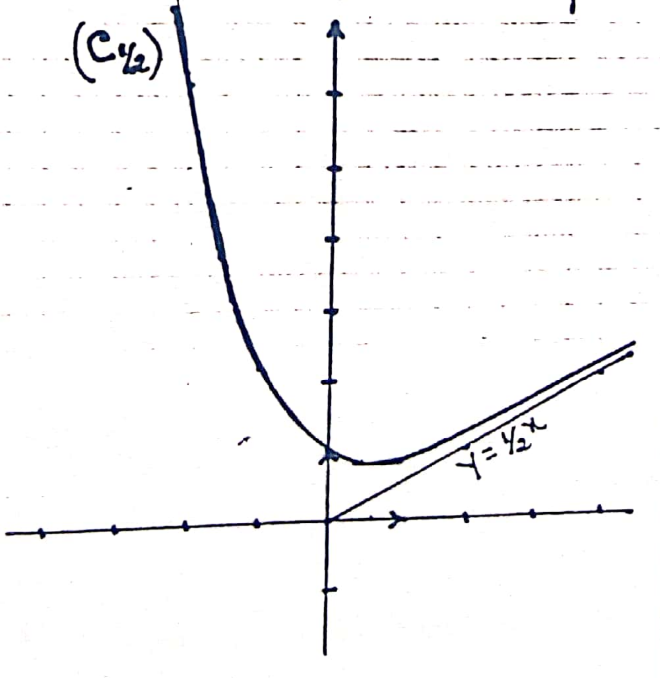
$f'_{1/2}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$f_{1/2}(\ln 2) = \frac{1}{2}(1+\ln 2)$

Tableau de variation de $f_{1/2}$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'_{1/2}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{1/2}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(1+\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Construction de $C_{1/2}$ ensemble des points J



PROBLEME N° 27

Dans ce problème, k est un nombre réel et on considère la famille de fonctions f_k définies sur $[-1;+\infty[$ par : $f_k(x) = (x+1)(e^{-1-x}+k)$. On désigne par (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4cm)

PARTIE A

1/ Etudions suivant les valeurs de k la limite de f_k en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)(e^{-1-x}+k)$$

$$= \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X}+kX, \quad X=x+1$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ si } k<0 \\ 0 \text{ si } k=0 \quad \text{car } \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X}=0 \\ +\infty \text{ si } k>0 \end{cases}$$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k<0 \\ 0 & \text{si } k=0 \\ +\infty & \text{si } k>0 \end{cases}}$$

2/ a/ Montrons que la droite (D_k) d'équation $y=kx+k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x)-(kx+k) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-1-x}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X}, \quad X=x+1$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) - (kx+k) = 0$ d'où la droite (D_k) : $y = kx+k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$.

b/ Etudions la position relative de (C_k) et (D_k)

Posons $d(x) = f_k(x) - (kx+k)$

$$= (x+1)e^{-1-x}.$$

$\forall x \geq -1,\ d(x) \geq 0$

Conclusion

$\boxed{\text{La courbe } (C_k) \text{ est au dessus de la droite } (D_k).}$

3/ a/ Calculons la dérivée première f'_k et la dérivée seconde f''_k de f_k

$$f'_k(x) = e^{-1-x}+k-(x+1)e^{-1-x}$$

$$= k - xe^{-1-x}$$

$$f''_k(x) = -e^{-1-x}+xe^{-1-x} = (x-1)e^{-1-x}$$

$f'_k(x) = k - xe^{-1-x}$	$f''_k(x) = (x-1)e^{-1-x}$

b/ Etudions le sens de variation de f'_k

$f''_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x \geq -1$, $e^{-1-x} > 0$; $f''_k(x)$ a donc le signe de $x-1$.

x	-1		1		$+\infty$
$f''_k(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau ci-dessus, f'_k est strictement décroissante sur $[-1; 1[$, strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et admet un minimum au point 1.

4./ a./ * **Dressons le tableau de variation de f_0**

$f_0(x) = (x+1)e^{-1-x}$. $\mathcal{D}f_0 = [-1; +\infty[$

$f_0(-1) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 0$.

$f_0'(x) = -xe^{-1-x}$; $f_0'(x) = 0 \iff x = 0$

$\forall x \in \mathcal{D}f_0$, $e^{-1-x} > 0$; $f_0'(x)$ a donc le signe de $-x$.

Signe de $f_0'(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_0

$\forall x \in [-1; 0[$, $f_0'(x) > 0$; f_0 est strictement croissante sur $[-1; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f_0'(x) < 0$; f_0 est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

f_0 admet un maximum au point 0.

$$f_0(0) = e^{-1}$$

Tableau de variation de f_0

x	-1		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

* **Dressons le tableau de variation de f_1**

$f_1(x) = (x+1)(e^{-1-x} + 1)$; $\mathcal{D}f_1 = [-1; +\infty[$

$f_1(-1) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

$f_1'(x) = 1 - xe^{-1-x}$

D'après la question 3./ a./ f_1' admet un minimum au point 1. On a donc :

$\forall x \in [-1; +\infty[$, $f_1'(x) \geq f_1'(1) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$

$\forall x \in [-1; +\infty[$, $f_1'(x) > 0$; f_1 est donc strictement croissante sur $[-1; +\infty[$

Tableau de variation de f_1

x	-1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b./ **Déterminons les tangentes (T_0) et (T_1) respectives aux courbes (C_0) et (C_1) au point d'abscisse -1**

(T_0) : $y = f_0'(-1)(x+1) + f_0(-1)$; $f_0'(-1) = 1$; $f_0(-1) = 0$

$y = x + 1$

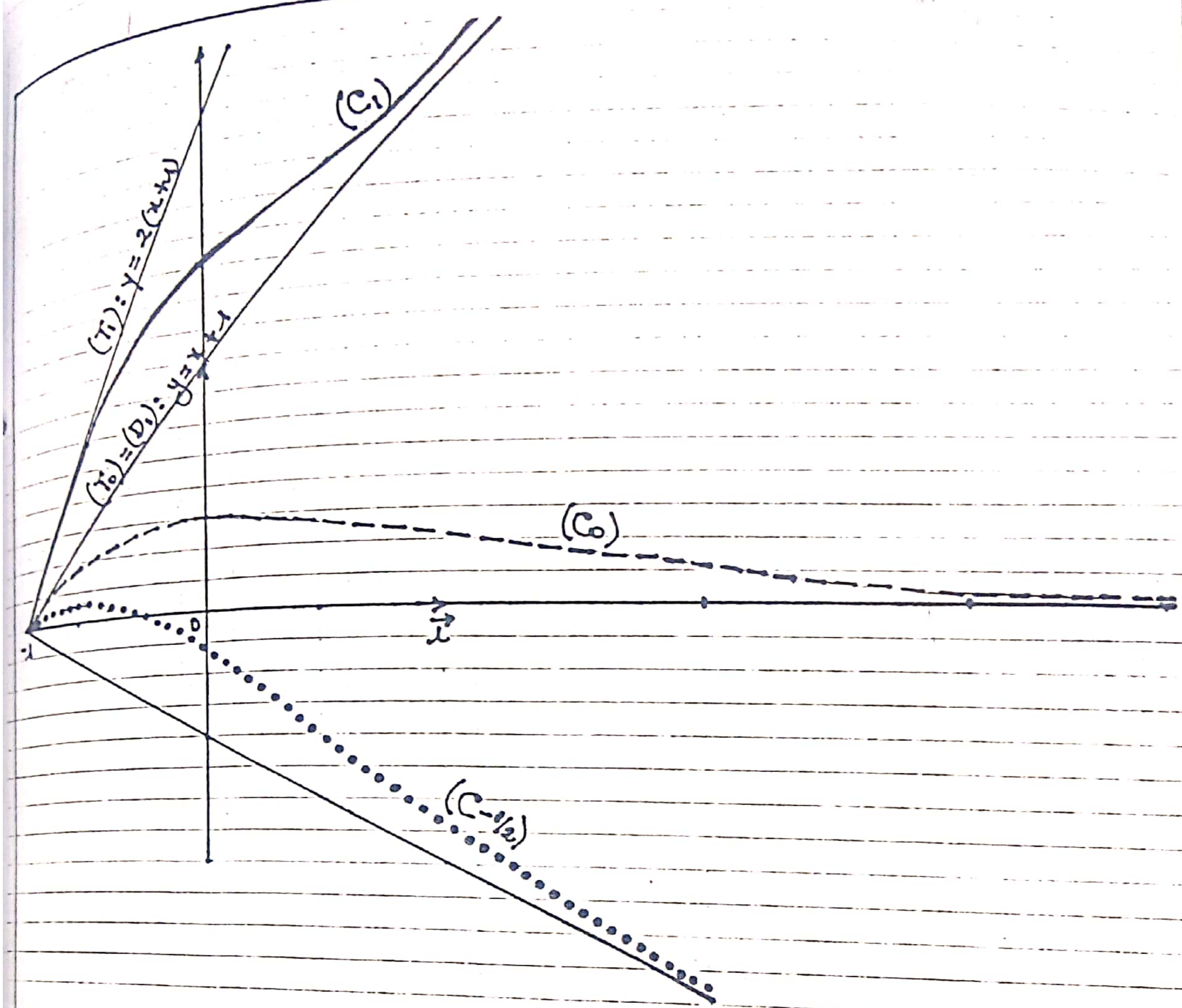
(T_1) : $y = f_1'(-1)(x+1) + f_1(-1)$; $f_1'(-1) = 2$; $f_1(-1) = 0$

$y = 2(x+1)$

$(T_0) : y = x+1$	$(T_1) : y = 2(x+1)$

c./ **Tracer de (D_0), (D_1), (T_0), (T_1), (C_0) et (C_1)**

(T_0) et (D_1) sont confondues



PARTIE B

1/ Montrons que l'équation $f'_{-\frac{1}{2}}(x)=0$ admet une unique solution α et que $-1\le\alpha\le-0,5$

Etudions la fonction $f'_{-\frac{1}{2}}$

$f'_{-1/2}(x) = -\frac{1}{2} - x e^{-1-x}$

$f'_{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_{-1/2}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} - x e^{-1-x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\cdot\frac{x}{e^{x}} = -\frac{1}{2}$

$f''_{-\frac{1}{2}}(x) = (x-1)e^{-1-x}$; $f''_{-\frac{1}{2}}(x) = 0 \iff x = 1$

$f'_{-\frac{1}{2}}(1) = -\frac{1}{2} - e^{-2} < 0$

Tableau de variation de $f'_{-1/2}$

x	-1		1		$+\infty$
$f''_{-1/2}(x)$		$-$	0	$+$	
$f'_{-1/2}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}-e^{-2}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

D'après le tableau de variation de $f'_{-1/2}$ on a :

* $\forall x \geq 1$, $f'_{-1/2}(x) < 0$.
* La restriction de $f'_{-1/2}$ sur $[-1;1]$ est définie une bijection de $[-1;1]$ vers $f'_{-1/2}([-1;1]) = [-\frac{1}{2}-e^{-2} ; \frac{1}{2}]$

or $0 \in [-\frac{1}{2}-e^{-2} ; \frac{1}{2}]$

Comme cette restriction définit une bijection de $[-1;1]$ sur $[-\frac{1}{2}-e^{-2}; \frac{1}{2}]$ qui contient 0.

$\boxed{\text{L'équation } f'_{-\frac{1}{2}}(x)=0 \text{ admet donc une unique solution } \alpha.}$

De plus : $f'_{-\frac{1}{2}}(-0,5) = -0,1967$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$$\boxed{-1 \leq \alpha \leq -0,5}$$

2-/ Soit h l'application de $I=[-1;-\frac{1}{2}]$ sur $\mathbb{R}$, définie par : $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$.

Démontrons que α est l'unique solution de l'équation $h(x)=x$

$h(x)=x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{1+x} = x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} = xe^{-1-x}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - xe^{-1-x} = 0$

$h(x) = x \Leftrightarrow f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$

or l'équation $f'_{-\frac{1}{2}}(x)=0$ a pour solution unique α et $-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$

Conclusion

$\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } h(x)=x}$

3-/ Etudions les variations de h

$h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$ $\quad D_h = [-1;-\frac{1}{2}]$

$h(-1) = -\frac{1}{2}$ $\quad h(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{e}$

$\forall x \in [-1;-\frac{1}{2}]$, $h'(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$

$\forall x \in [-1;-\frac{1}{2}]$, $h'(x) < 0$; h est donc strictement décroissante sur $[-1;-\frac{1}{2}]$.

Tableau de variation de h

x	-1	$-\frac{1}{2}$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

$\forall x \in [-1;-\frac{1}{2}]$, $-\frac{1}{2}\sqrt{e} < h(x) < -\frac{1}{2}$

or $-1 < -\frac{1}{2}\sqrt{e}$. On peut alors écrire :

$\forall x \in [-1;-\frac{1}{2}]$, $-1 < h(x) < -\frac{1}{2}$

Conclusion

$\boxed{\forall x \in I,\ h(x) \in I}$

4-/ On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = -1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a-/ Démontrons que tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à I

$U_0 = -1 \in I$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ et montrons $U_{n+1} \in I$

On sait que : $\forall x \in I$, $h(x) \in I$ donc

$U_n \in I \Rightarrow h(U_n) \in I \Rightarrow U_{n+1} \in I$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I}$

On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$|U_{n+1}-\alpha| \leq 0{,}83|U_n-\alpha|$$

b./ Démontrons que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$|U_n-\alpha| \leq (0{,}83)^n \cdot \frac{1}{2}$$

On sait que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$|U_{p+1}-\alpha| \leq 0{,}83|U_p-\alpha|$$

Remplaçons p par : $0; 1; 2; \dots n-1$.

$$|U_1-\alpha| \leq 0{,}83|U_0-\alpha|$$

$$|U_2-\alpha| \leq 0{,}83|U_1-\alpha|$$

$$\vdots$$

$$|U_n-\alpha| \leq 0{,}83|U_{n-1}-\alpha|$$

En multipliant membres à membres les n égalités obtenues et en simplifiant on a :

$$|U_n-\alpha| \leq 0{,}83^n|U_0-\alpha|$$

$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -\alpha \leq 1$

$\Leftrightarrow -1+\frac{1}{2} \leq -1-\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_0-\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0{,}83^n|U_0-\alpha| \leq 0{,}83^n \cdot \frac{1}{2}$

Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n-\alpha| \leq 0{,}83^n \cdot \frac{1}{2}}$$

Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente et donnons sa limite

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}83^n = 0$ car $-1 < 0{,}83 < 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n-\alpha| = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$$

c./ Trouvons le plus petit entier naturel p tel que $|U_p-\alpha| < 10^{-2}$

Cette condition est vérifiée si :

$0{,}83^p \cdot \frac{1}{2} < 10^{-2} \Leftrightarrow 0{,}83^p < 2 \cdot 10^{-2}$

$\Leftrightarrow p\ln(0{,}83) < \ln(0{,}02)$

$p > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}83)} \simeq 20{,}99$

On en déduit que :

$$\boxed{p = 21}$$

5./ Dressons le tableau de variation de la fonction $f_{-1/2}$

$f_{-\frac{1}{2}}(x) = (x+1)\left(e^{1-x} - \frac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\infty \qquad f_{-\frac{1}{2}}(-1) = 0$

A partir du tableau de variation de $f'_{-\frac{1}{2}}$ on déduit son tableau de signe

Signe de $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de $f_{-\frac{1}{2}}$

$\forall x \in [-1; \alpha[$ $f'_{-\frac{1}{2}}(x) > 0$; $f_{-\frac{1}{2}}$ est donc strictement croissante sur $[-1; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'_{-\frac{1}{2}}(x) < 0$; $f_{-\frac{1}{2}}$ est donc strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

$f_{-\frac{1}{2}}$ admet un maximum au point α.

Tableau de variation de $f_{-1/2}$

x	-1		α		$+\infty$
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{-\frac{1}{2}}(x)$	0	$\nearrow$	$f_{-\frac{1}{2}}(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Démontrons que $f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

On sait que $h(\alpha) = \alpha \iff -\frac{1}{2}e^{1+\alpha} = \alpha$

$$\iff e^{1+\alpha} = -2\alpha$$

$$\iff e^{-1-\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}$$

$$f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = (\alpha+1)\left(e^{-1-\alpha} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (\alpha+1)\left(-\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -(\alpha+1)\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$$

$$\boxed{f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2}$$

b/ On donne $U_{18} = -0,6854$.

Donnons la valeur approchée de α à 10^{-2} près

A l'aide de la calculatrice on a:

$U_{19} = -0,6848$; $U_{20} = -0,6852$

$U_{21} = -0,6849$.

On en déduit que: $\boxed{\alpha = -0,68}$

Construction de $(C_{-\frac{1}{2}})$

(Voir Figure précédente)

$f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = 0,07$. $(D_{-\frac{1}{2}}) : y = -\frac{1}{2}(x+1)$

PROBLEME N°28

Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par: $f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}$. On désigne par (C_λ) la courbe représentative de f_λ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

1-/ Déterminons f'_λ et f''_λ les fonctions dérivées première et seconde de f_λ

$$f'_\lambda(x) = 1 + \lambda(1-x-1)e^{-x} = 1 - \lambda x e^{-x}$$

$$f''_\lambda(x) = -\lambda(e^{-x} - xe^{-x}) = \lambda(x-1)e^{-x}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'_\lambda(x) = 1 - \lambda x e^{-x} \qquad f''_\lambda(x) = \lambda(x-1)e^{-x}}$$

2-/ Etudions les variations de f'_λ

$f'_\lambda(x) = 1 - \lambda x e^{-x}$ $\quad D_{f'_\lambda} = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f'_\lambda(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \lambda x e^{-x}$$

$$= 1 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f'_\lambda(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \lambda x e^{-x}$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

Dérivée

f'_λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''_\lambda(x) = \lambda(x-1)e^{-x}$

$f''_\lambda(x)=0 \iff x=1$; $f'_\lambda(1) = 1-\frac{\lambda}{e}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$; $f''_\lambda(x)$ a donc le signe de $\lambda(x-1)$.

1er cas $\lambda<0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de f'_λ.

f'_λ est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et admet un maximum au point 1

Tableau de variation de f'_λ pour $\lambda<0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	
$f'_\lambda(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\frac{\lambda}{e}$	$\searrow$	1

2e cas $\lambda>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f'_λ

f'_λ est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$, strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et admet un minimum en 1

Tableau de variation de f'_λ pour $\lambda>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
$f'_\lambda(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-\lambda/e$	$\nearrow$	1

3./ Discutons suivant le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $f'_\lambda(x)=0$ et précisons la position des solutions éventuelles à 0 et à 1.

1er cas $\lambda<0$

$1-\frac{\lambda}{e}>1$; la restriction de f'_λ sur $]-\infty;1]$ est monotone, strictement croissante avec $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} f'_\lambda(x) = -\infty$ et $f'_\lambda(1)=1-\frac{\lambda}{e}>1$

Cette restriction définit donc une bijection de $]-\infty;1]$ vers $]-\infty;1-\lambda/e]$ qui contient 0.

De plus $\forall x\geq 1$, $f'_\lambda(x)>1$

L'équation $f'_\lambda(x)=0$ admet donc une seule solution x_1

$f'_\lambda(x_1)=0$ $\quad f'_\lambda(0)=1$

On a : $f'_\lambda(x_1)<f'_\lambda(0) \iff x_1<0$ car f'_λ est croissante sur $]-\infty;1]$.

Conclusion

> Pour $\lambda<0$, l'équation $f'_\lambda(x)=0$ possède une seule solution $x_1<0$

* Cas de $\lambda>0$

D'après le tableau de variation de f'_λ le nombre de solutions de l'équation $f'_\lambda(x)=0$ dépend du signe de :

$$f'_\lambda(1) = 1-\frac{\lambda}{e}$$

$f'_\lambda(1) = 1 - \frac{\lambda}{e}$; $f'_\lambda(1) = 0 \iff \lambda = e$

Signe de $f'_\lambda(1)$ suivant les valeurs du réel λ

λ	0		e		$+\infty$
$f'_\lambda(1)$		$+$	0	$-$	

2^e cas $0<\lambda<e$.

D'après les variations de f'_λ, elle admet un minimum au point 1 qui est $f'_\lambda(1)>0$ pour $0<\lambda<e$.

L'équation $f'_\lambda(x)=0$ n'admet donc pas de solution

3^e cas $\lambda = e$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_e(x) \geq f'_e(1) = 0$

L'équation $f'_e(x)=0$ admet donc une seule solution qui est 1

4^e cas $\lambda > e$.

$f'_\lambda(1)<0$ l'équation $f'_\lambda(x)=0$ admet donc 2 solutions distinctes $x_1<1<x_2$.

$f'_\lambda(0)=1$ or f'_λ est décroissante sur $]-\infty;1]$ donc :

$f'_\lambda(x_1) < f'_\lambda(0) \iff 0 < x_1$.

On a donc deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$0 < x_1 < 1 < x_2$$

Résumons les résultats de la question dans le tableau ci-dessous.

	$-\infty$	0	e	
nombre et posit° des sol % 0 et 1	1 ; $x_1<0$	0	1 ; $x_1=1$	2 ; $0<x_1<1<x_2$

3-/ Déduisons de ce qui précède le sens de variation de f_λ suivant les valeurs du réel λ

1^{er} cas $\lambda<0$

Signe de $f'_\lambda(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_λ

f_λ est strictement décroissante sur $]-\infty;x_1[$, strictement croissante sur $]x_1;+\infty[$ et admet un minimum au point x_1.

2^e cas $0<\lambda<e$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x)>0$; f_λ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3^e cas $\lambda = e$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_e(x) \geq 0$; f_e est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

4^e cas $\lambda > e$

Signe de $f'_\lambda(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- f_λ est strictement croissante sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$
- f_λ est strictement décroissante sur $]x_1; x_2[$
- f_λ admet un maximum local au point x_1 et un minimum local au point x_2.

5-/ <u>Etude des limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$.</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} x+\lambda(x+1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x+\lambda\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{x}{e^x}\to 0 \\ \frac{1}{e^x}\to 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty} x+\lambda(x+1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[1+\lambda\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda<0 \\ -\infty \text{ si } \lambda>0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda<0 \\ -\infty \text{ si } \lambda>0 \end{cases}$

<u>Précisons les branches infinies de (C_λ)</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \lambda\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$= \lambda(0+0) = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)-x = 0$; la courbe (C_λ) admet la droite d'équation $y=x$ comme asymptote oblique à $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_\lambda(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1+\lambda\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda<0 \\ +\infty \text{ si } \lambda>0. \end{cases}$$

La courbe (C_λ) admet à $-\infty$ une branche asymptotique de direction (oy)

6-/ <u>Montrons qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes (C_λ)</u>

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f_\lambda(-1) = -1+\lambda(-1+1)e = -1$

Toutes les courbes (C_λ) passent par le point unique $A(-1;-1)$

7-/ Soit I_λ le point de (C_λ) d'abscisse 1. <u>Ecrivons l'équation de la tangente D_λ en I_λ à (C_λ)</u>

$(D_\lambda) : y = f'_\lambda(1)(x-1)+f_\lambda(1)$

$f'_\lambda(1) = 1-\frac{\lambda}{e}$; $f_\lambda(1) = 1+\frac{2\lambda}{e}$.

$(D_\lambda) : y = \left(1-\frac{\lambda}{e}\right)(x-1)+1+\frac{2\lambda}{e}$

$$\boxed{(D_\lambda) : y = \left(1-\frac{\lambda}{e}\right)x+\frac{3\lambda}{e}}$$

<u>Montrons que les droites D_λ ont un point commun B</u>

$y = \left(1-\frac{\lambda}{e}\right)x+\frac{3\lambda}{e}$

$\Leftrightarrow y-x = \frac{\lambda}{e}(3-x)$

$\begin{cases} 3-x=0 \\ y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

Toutes les droites (D_λ) passent par $B(3;3)$

3/ a-/ On prend $\lambda = -1$

<u>Montrons que l'équation $f'_{-1}(x) = 0$ n'a qu'une solution notée x_1 comprise entre $-0,57$ et $-0,56$</u>

D'après 3/, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ possède une unique solution x_1 ... $-1<0$. L'équation $f'_{-1}(x) = 0$ n'a donc qu'une solution notée x_1.

$$f'_{-1}(x) = 1 + xe^{-x}$$

$f'_{-1}(-0,57) = -0,079$; $f'_{-1}(-0,56) = 0,019$.

$f'_{-1}(-0,57) \cdot f'_{-1}(-0,56) < 0$

$\Leftrightarrow$ $-0,57 < x_1 < -0,56$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

Construction de la courbe (C_{-1})

Tableau de variation de f_{-1}

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{-1}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_{-1}(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour le tracer voir page suivante

b-/ <u>Traçons la courbe (C_e)</u>

Tableau de variations de f_e

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_e(x)$		$+$	0	$+$	
$f_e(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_e(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f_e(x) = x + (x+1)e^{1-x}$; $f_e(1) = 3$

Construction de Ce (Voir page suivante)

c-/ <u>Montrons que l'équation d'inconnue x, $f'_4(x) = 0$ a deux solutions x_1 comprise entre 0,35 et 0,36 et x_2 comprise entre 2,15 et 2,16</u>

D'après 3/, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ possède deux solutions pour $\lambda > e$.

Or $4 > e$, l'équation $f'_4(x) = 0$ possède donc deux solutions x_1 et x_2 telles que $0 < x_1 < 1 < x_2$

$$f'_4(x) = 1 - 4xe^{-x}$$

$f'_4(0,35) = 0,0134$; $f'_4(0,36) = -0,0046$

$f'_4(2,15) = -0,0017$; $f'_4(2,16) = 0,0036$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires on a:

$0,35 < x_1 < 0,36$	$2,15 < x_2 < 2,16$

<u>Tableau de variation de f_4</u>

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'_4(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_4(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_4(x_1)$	$\searrow$	$f_4(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

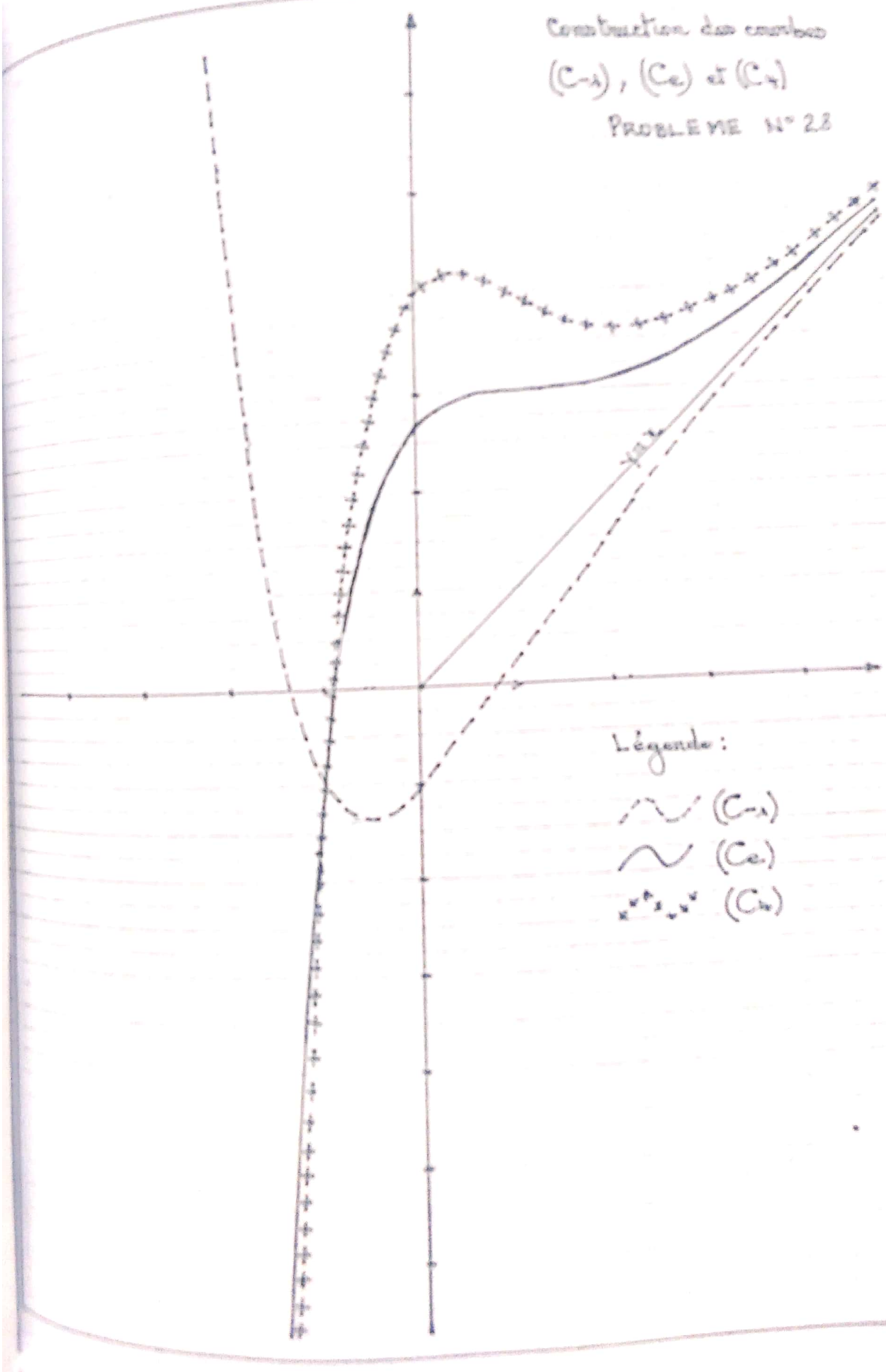
$f_4(x_1) = 4,15$; $f_4(x_2) = 3,61$

Construction de la courbe (C_4)

(Voir page suivante)

Construction des courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_4)

PROBLEME N° 28



PARTIE B

1/ Montrons que la fonction f_λ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminons l'ensemble de ces primitives

Pour tout réel λ non nul, f_λ est continue sur $\mathbb{R}$; la fonction f_λ admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit F_λ une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}$

$F_\lambda(x)$ est de la forme :

$F_\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda(ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des réels que nous allons déterminer

$F'_\lambda(x) = x + \lambda(-ax + a - b)e^{-x}$

Par identification on a: $\begin{cases} a = -1 \\ a-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

L'ensemble des primitives de f_λ est:
$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x} + k,\ k \in \mathbb{R}$

2/ Pour tout λ réel non nul, on définit une suite de fonctions continues $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par:

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t)\,dt - 2\lambda$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda.$

a/ Calcul de φ_1

$\varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t)\,dt - 2\lambda$

$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \lambda(t+2)e^{-t}\right]_0^x - 2\lambda$

$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x} + 2\lambda - 2\lambda$

$$\boxed{\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x}}$$

b/ Montrons par récurrence que pour tout naturel n non nul et tout réel x:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}$$

$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x}$

$= \frac{x^{1+1}}{(1+1)!} + (-1)^1\lambda(x+1+1)e^{-x}$ Vrai

Supposons que $\forall n \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}$ et montrons que: $\varphi_{n+1}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+n+2)e^{-x}$

$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(t+n+1)e^{-t}\right)dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(t+1)e^{-t} + (-1)^n\lambda n e^{-t}\right)dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \left[\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{t^{n+2}}{n+2} - (-1)^n\lambda(t+2)e^{-t} - (-1)^n\lambda n e^{-t}\right]_0^x + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+2)e^{-x} + (-1)^{n+1}\lambda n e^{-x} - (-1)^{n+1}2\lambda - (-1)^{n+1}\lambda n + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+n+2)e^{-x} - (-1)^{n+1}(n+2)\lambda + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+n+2)e^{-x}$

$$\boxed{\text{Conclusion: } \varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}}$$

PARTIE C

On suppose dans cette partie $-\frac{1}{e}<\lambda<0$

1/ Montrons que le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1)=0$ est strictement inférieur à -1

$f'_\lambda(x)=1-\lambda x e^{-x}$; $f'_\lambda(-1)=1+\lambda e$.

$-\frac{1}{e}<\lambda<0 \Rightarrow 1+\lambda e>0 \Rightarrow f'_\lambda(-1)>0$

De plus pour $\lambda<0$, f'_λ est croissante sur $]-\infty;1[$

$$f'_\lambda(x_1)<f'_\lambda(-1)$$

$\Leftrightarrow x_1<-1$ car f'_λ est strictement croissante sur $]-\infty;1[$.

Conclusion

$\boxed{\text{Le réel } x_1 \text{ tel que } f'_\lambda(x_1)=0 \text{ est strictement inferieur à } -1}$

Autre méthode

Dans A/8/a/ On a montré que:

$-0,57<x_1<-0,56$ d'où $x_1<-1$

Déduisons-en que si $-1<x<0$ alors $-1<f_\lambda(x)\leq 0$

D'après A/3/ on a :

Pour $\lambda<0$, f_λ est croissante sur $]-\infty;x_1[$ donc croissante sur $]-1;0[$

$-1<x<0 \Leftrightarrow f_\lambda(-1)\leq f_\lambda(x)<f_\lambda(0)$ (1)

$f_\lambda(-1)=-1$ $f_\lambda(0)=\lambda<0$

(1) $\Leftrightarrow -1<f_\lambda(x)<0$.

Conclusion

$\boxed{\text{si } -1<x<0 \text{ alors } -1<f_\lambda(x)<0}$

2/ On considère la suite (U_n) définie par: $\begin{cases} U_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=f_\lambda(U_n)\end{cases}$

Montrons que :

a/ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<U_n<0$.

$U_1=f_\lambda(U_0)=f(0)=\lambda\in]-1/e;0[$

or $-1<-\frac{1}{e}$ d'où $-1<U_1<0$ Vrai

Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}^*, -1<U_n<0$ et montrons que $-1<U_{n+1}<0$

D'après la question C/1/ on a:

si $-1<x<0$ alors $-1<f_\lambda(x)<0$

$-1<U_n<0 \Rightarrow -1<f_\lambda(U_n)<0$

$\Rightarrow -1<U_{n+1}<0$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ -1<U_n<0}$

b/ Montrons que la suite (U_n) est décroissante

$$f_\lambda(x)=x+\lambda(x+1)e^{-x}$$

$\begin{cases}-1<x<0 \\ \text{et} \\ \lambda<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+1)>0 \\ \lambda<0\end{cases}$

$\Rightarrow \lambda(x+1)e^{-x}<0$

$\Rightarrow x+\lambda(x+1)e^{-x}<x$

$\begin{cases}-1<x<0 \\ \text{et} \\ \lambda<0\end{cases} \Rightarrow f_\lambda(x)<x$

donc $\begin{cases}-1<U_n<0 \\ \lambda<0\end{cases}$

$\Rightarrow f_\lambda(U_n)<U_n \Rightarrow U_{n+1}<U_n$

d'où (U_n) est décroissante

c/ Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$0 < U_{n+1} + 1 < (1+\lambda)(U_n + 1)$

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_{n+1}$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1 \ (1)$.

De plus $-1 < U_n < 0 \Rightarrow \begin{cases} U_n + 1 > 0 \\ e^{-U_n} > e^0 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (U_n+1)e^{-U_n} > U_n + 1$

$\Rightarrow \lambda(U_n+1)e^{-U_n} < \lambda(U_n+1)$ car $\lambda < 0$

$\Rightarrow U_n + \lambda(U_n+1)e^{-U_n} < U_n + \lambda(U_n+1)$

$\Rightarrow f_\lambda(U_n) < U_n + \lambda(U_n+1)$

$\Rightarrow U_{n+1} < U_n + \lambda(U_n+1)$

$\Rightarrow U_{n+1} + 1 < U_n + 1 + \lambda(U_n+1) \ (2)$

(1) et (2) nous permettent d'écrire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_{n+1} + 1 < (1+\lambda)(U_n+1)}$$

Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente

$\begin{cases} -1 < U_n \Rightarrow (U_n) \text{ est minorée} \\ (U_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$

(U_n) est convergente car elle est minorée et décroissante.

Trouvons sa limite

Soit l la limite de (U_n) ; l est solution de l'équation $f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow x = -1$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = -1}$$

PROBLEME N° 29

Soit la fonction f_m à variable réelle définie par : $f_m(x) = e^{x-1}(mx - m + 1) - 1$

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

On suppose dans cette partie que m est un paramètre réel non nul.

1/ a/ Montrons que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe dont nous préciserons les coordonnées

Posons $y = f_m(x)$

$\Rightarrow y = e^{x-1}(mx - m) - 1 + e^{x-1}$

$\Rightarrow (y + 1 - e^{x-1}) = m(x-1)e^{x-1}$

$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 - e^{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Toutes les courbes (C_m) passent par le point $A(1; 0)$

b/ Soit M un point du plan

Etudions suivant la position du point M dans le plan, le nombre de courbes (C_m) qui passent par M

Soit $M(a; b)$

$M \in (C_m) \Leftrightarrow (b+1)e^{1-a} = m(a-1)$

Soit (Δ) la droite du plan d'équation $x = 1$

1er cas $M \in \Delta$ privée de A.

Aucune courbe (C_m) ne passe par M

2e cas M appartient au plan privé de Δ

Une seule courbe (C_m) passe par M.

3e cas M confondu à A

Une infinité de courbes passent par A

2/a/ Calculons suivant les valeurs de m, les limites de f_m en $+\infty$ puis en $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x-1}(mx-m+1)-1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x-1}[m(x-1)+1]-1$$

$$= \lim_{X\to+\infty} e^{X}(mX+1)-1$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } m>0 \\ -\infty \text{ si } m<0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } m<0 \\ +\infty \text{ si } m>0 \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x-1}(mx-m+1)-1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (mxe^{x}-me^{x}+e^{x})e^{-1}-1$$

$= -1$ car $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -1}$$

Pour tout $m \in \mathbb{R}^*$

b/ Etudions les branches infinies de la courbe (C_m)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}+\left(m-\frac{m}{x}+\frac{1}{x}\right)e^{x-1}$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ si } m<0 \\ +\infty \text{ si } m>0 \end{cases}$$

La courbe (C_m) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction oy

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -1$$

La courbe (C_m) admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'equation $y=-1$

3/ a/ Calculons la dérivée f'_m de la fonction f_m et étudions son signe suivant les valeurs de m

f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = e^{x-1}(mx-m+1+m)$$

$$= (1+mx)e^{x-1}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = (1+mx)e^{x-1}}$$

Signe de $f'_m(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1}>0$; $f'_m(x)$ a donc le signe de $1+mx$.

$$f'_m(x) = 0 \iff 1+mx=0 \iff x=-\frac{1}{m}$$

1er cas $m<0$

x	$-\infty$	$-1/m$	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	0	−

2e cas . $m>0$

x	$-\infty$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	

c/ Dressons les tableaux de variation de f_m selons les valeurs de m.

1er cas $m<0$

Sens de variation de f_m

$\forall x \in]-\infty; -1/m[$, $f'_m(x)>0$; f_m est donc strictement croissante sur $]-\infty; -1/m[$

$\forall x \in]-1/m; +\infty[$, $f'_m(x)<0$; f_m est donc strictement décroissante sur $]-1/m; +\infty[$

f_m admet un maximum en $-1/m$ et $f_m(-1/m) = -1-me^{-1/m-1}$

Tableau de variation de f_m pour $m<0$

x	$-\infty$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	-1	$\nearrow$	$-1-me^{-1/m-1}$	$\searrow$	$-\infty$

2e cas $m>0$

Sens de variation de f_m

$\forall x \in]-\infty; -1/m[$, $f'_m(x)<0$; f_m est décroissante sur $]-\infty; -1/m[$

$\forall x \in]-1/m; +\infty[$, $f'_m(x)>0$; f_m est donc croissante sur $]-1/m, +\infty[$

f_m admet un minimum en $-1/m$

Tableau de variation de f_m pour $m>0$

x	$-\infty$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	-1	$\searrow$	$-1-me^{-1/m-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

4-/ Déterminons l'ensemble des extrémums de (C_m) lorsque m decrit $\mathbb{R}-\{0\}$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{m} \\ y = -1-me^{-1/m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{x} \\ y = -1+\frac{1}{x}e^{x-1} \end{cases}$$

> L'ensemble des extrémums de (C_m) lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$ est la courbe Γ représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1+\frac{1}{x}e^{x-1}$

5-/ Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'_m(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = (1+mx)e^{x-1}$

$= (1+mx)e^{x-1} - me^{x-1} + me^{x-1}$

$= (mx-m+1)e^{x-1} + me^{x-1}$

$= (mx-m+1)e^{x-1} - 1 + me^{x-1} + 1$

$= f_m(x) + me^{x-1} + 1$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'_m(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1}$$

Déduisons-en sans calculer $f''_m(x)$ la relation : $f''_m(x) - 2f'_m(x) + f_m(x) = -1$

$f'_m(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1$

$\Leftrightarrow f''_m(x) = f'_m(x) + me^{x-1}$

$f''_m(x) - 2f'_m(x) + f_m(x) = f'_m(x) + me^{x-1} - 2\left(f_m(x) + me^{x-1} + 1\right) + f_m(x)$

$= f_m(x) + me^{x-1} + 1 + me^{x-1} - 2f_m(x) - 2me^{x-1} - 2 + f_m(x)$

$= -1$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''_m(x) - 2f'_m(x) + f_m(x) = -1}$$

6/ Etudions la position relative des courbes (C_{-m}) et (C_m)

Posons $d_m(x) = f_m(x) - f_{-m}(x)$

$= 2m(x-1)e^{x-1}$

$d_m(x) = 2m(x-1)e^{x-1}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x-1} > 0$; $d_m(x)$ est donc du signe de $m(x-1)$.

$d_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

1er cas $m < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$d_m(x)$	$+$	0	$-$
Position relative de (C_{-m}) et (C_m)	(C_m) est au dessus de (C_{-m})	(C_m) coupe (C_{-m})	(C_m) est en dessous de (C_{-m})

2e cas $m > 0$

Comme précédemment, résumons les résultats de notre étude dans le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$d_m(x)$	$-$	0	$+$
Position relative de (C_{-m}) et (C_m)	(C_m) est en dessous de (C_{-m})	(C_m) coupe (C_{-m})	(C_m) est au dessus de (C_{-m})

PARTIE B

On pose $m = 1$ puis $m = -1$

1/ Dressons les tableaux de variations des fonctions f_1 et f_{-1}

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

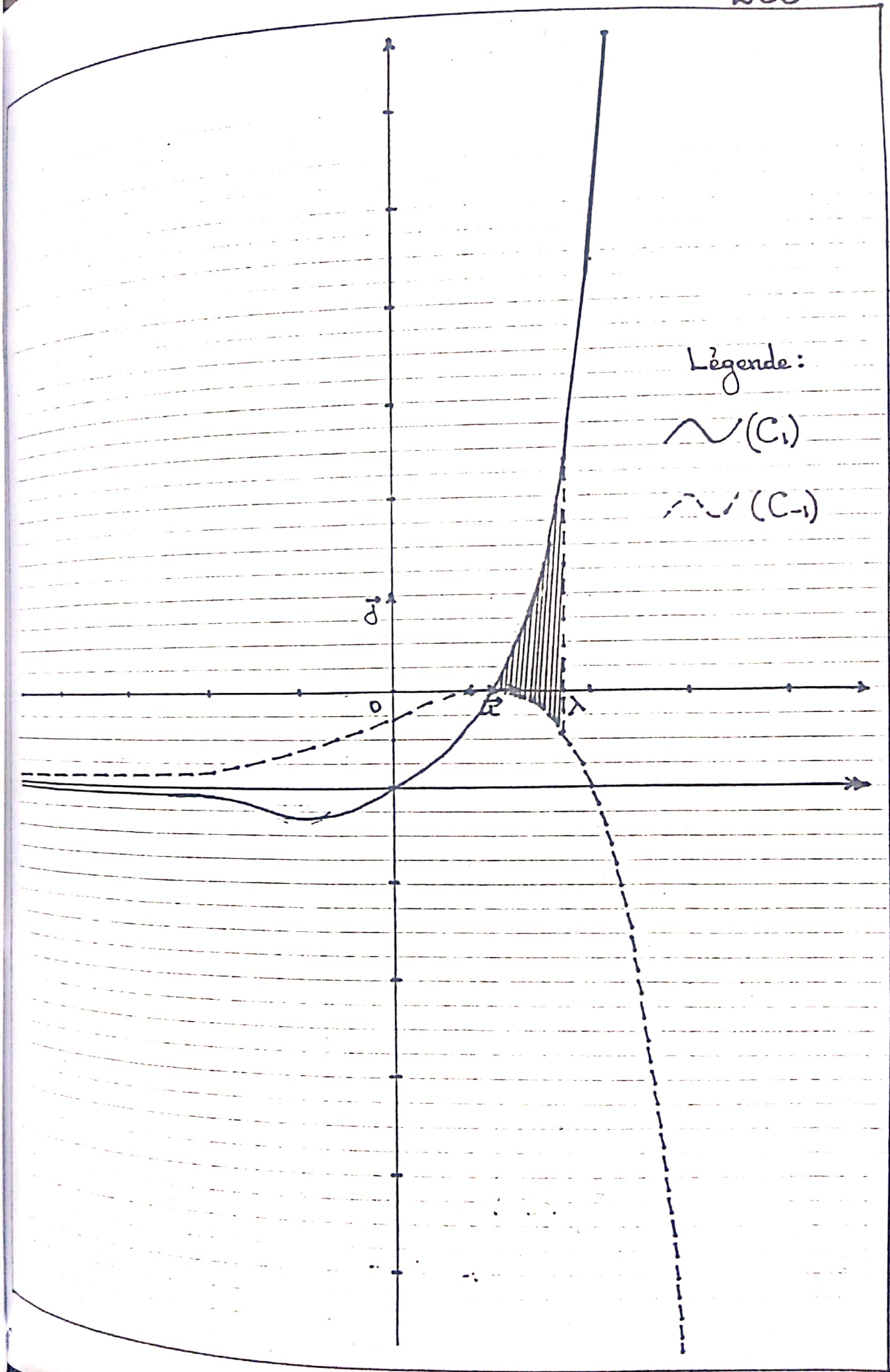
Tableau de variation de f_{-1}

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{-1}(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2/ Construction des courbes (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.

(Voir page suivante)

$f_1(x) = xe^{x-1} - 1$; $f_{-1}(x) = (2-x)e^{x-1} - 1$



Légende :
(C_1)
(C_{-1})

3°/ Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$

a°/ Calculons l'aire $a(\lambda)$ de la portion du plan limitée par les courbes (C_{-1}), (C_1) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$

$$a(\lambda) = \int_1^\lambda \left(f_1(x) - f_{-1}(x)\right) dx = \int_1^\lambda 2(x-1)e^{x-1} dx$$

$$= 2\left[(x-2)e^{x-1}\right]_1^\lambda = 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2$$

$$\boxed{a(\lambda) = 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2}$$

b°/ Déterminons $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} 2(\lambda-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{\lambda-1} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = +\infty}$$

PROBLEME N°30

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ on donne les points $A(1;0)$, $B(-1;0)$ et $K(0;-1)$.
A tout point M de P de coordonnées $(x;y)$ on associe le nombre complexe $z = x+iy$, affixe de M.

PARTIE A

1°/ * Démontrons qu'il existe une rotation T qui laisse le point K invariant et qui transforme A en B

Les points K, B et A sont deux à deux distincts. $KB = KA = \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Il existe donc une rotation T de centre K transformant A en B.}}$

* Précisons l'angle de T

L'angle de T est : $Mes(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}}) = Arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{KB}}}{z_{\overrightarrow{KA}}}\right)$

$= Arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{T est donc la rotation d'angle } \frac{\pi}{2}}$

* La transformation complexe associée à T est : $z \longmapsto iz - 1 - i$

2°/ Soit $M_1 = T(M)$; $M_2 = T(M_1)$; $M_3 = T(M_2)$

a°/ Position relative des droites (MM_1) et (M_2M_3) lorsque M est distinct de K

$T(MM_1) = (M_1M_2) \Rightarrow (MM_1) \perp (M_1M_2)$ ①

$T(M_1M_2) = (M_2M_3) \Rightarrow (M_1M_2) \perp (M_2M_3)$ ②

① et ② $\Rightarrow (MM_1) \parallel (M_2M_3)$

$\boxed{\text{Lorsque M est distinct du point K, les droites } (MM_1) \text{ et } (M_2M_3) \text{ sont parallèles}}$

b°/ Déterminons l'ensemble des points M_1 de P lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB]

On sait que la rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon.

$T(A) = B$; Posons $T(B) = B'$

On vérifie que $B' = S_K(A)$.

$\boxed{\text{L'ensemble des points } M_1 \text{ est donc le cercle de diamètre } [BB'] \text{ avec } B' = S_K(A)}$

PARTIE B

Soit α un réel fixé mais quelconque. On considère l'application $T\alpha$ de P dans P qui à tout point M, associe le point M' barycentre des points pondérés (M,α), $(M_1,-\alpha)$ et $(A,1)$, M_1 étant défini en A-2·/

1/ Exprimons l'affixe z' du point M' en fonction de α et de l'affixe z de M

On sait que :

$\vec{OM'} = \alpha\vec{OM} - \alpha\vec{OM_1} + \vec{DA}$ donc

$$\boxed{z' = \alpha(1-i)z + \alpha + 1 + i\alpha}$$

2/ Déterminons, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de $T\alpha$

- Si $\alpha = 0$ alors $T\alpha$ est une application constante. $T_0 : P \longrightarrow P$, $M_1 \longmapsto A$.

- si $|\alpha|\sqrt{2} = 1$ alors $T\alpha$ est une rotation. $|\alpha|\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

* $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z' = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $w = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$

* $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z' = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)z + \frac{\sqrt{2}+2}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$T_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $w = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)$

- Si $|\alpha| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $T\alpha$ est la similitude directe de rapport $|\alpha|\sqrt{2}$, de centre le point d'affixe $w_\alpha = \frac{1-2i\alpha^2}{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}$

* si $\alpha \in \mathbb{R}_-^* - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ alors $T\alpha$ a pour angle $\frac{3\pi}{4}$

* si $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ alors $T\alpha$ a pour angle $-\frac{\pi}{4}$.

3·/ Exprimons les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x,y) de M.

En posant $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$ on a : après calcul.

$$\boxed{\begin{cases} x' = \alpha x + \alpha y + \alpha + 1 \\ y' = -\alpha x + \alpha y + \alpha \end{cases}}$$

4·/ Soit $E(-e^\alpha ; e^\alpha)$ $E' = T\alpha(E)$

a·/ Exprimons les coordonnées de E' en fonction de α

Après calcul on obtient :

$$\boxed{E'(\alpha + 1 ; \alpha + 2\alpha e^\alpha)}$$

b·/ Démontrons que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points E' est la courbe (C) d'équation : $y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2\alpha e^{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ y = x - 1 + 2(x-1)e^{x-1} \end{cases}$$

L'ensemble des points E' lorsque α décrit IR est la courbe (C) d'équation :

$$y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$$

PARTIE C

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = 2xe^{x} + x.$$

1/ Etudions le sens de variation de la fonction dérivée première f' de f

f est deux fois dérivables sur IR car elle est produit et somme de deux fonct°s dérivables sur IR et :

$\forall x \in IR$, $f'(x) = (2x+2)e^{x} + 1$

$f''(x) = (2x+4)e^{x}$

$\forall x \in IR$, $e^{x} > 0$ donc $f''(x)$ a le signe de $2x+4$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$\forall x \in]-\infty;-2[$ $f''(x) < 0$ donc f' est strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$

$\forall x \in]-2;+\infty[$ $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$

2/ Dressons le tableau de variation de f

$D_f = IR$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = (2x+2)e^{x} + 1.$

Signe de $f'(x)$

Le sens de variation de f' montre que $f'(-2)$ est le minimum de f' sur IR.

Or $f'(-2) = 1 - \frac{2}{e^{2}} > 0$ donc

$\forall x \in IR$, $f'(x) > 0$ d'où f strictement croissante sur IR.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3/ a/ Représentation graphique de f

- Etude des branches infinies

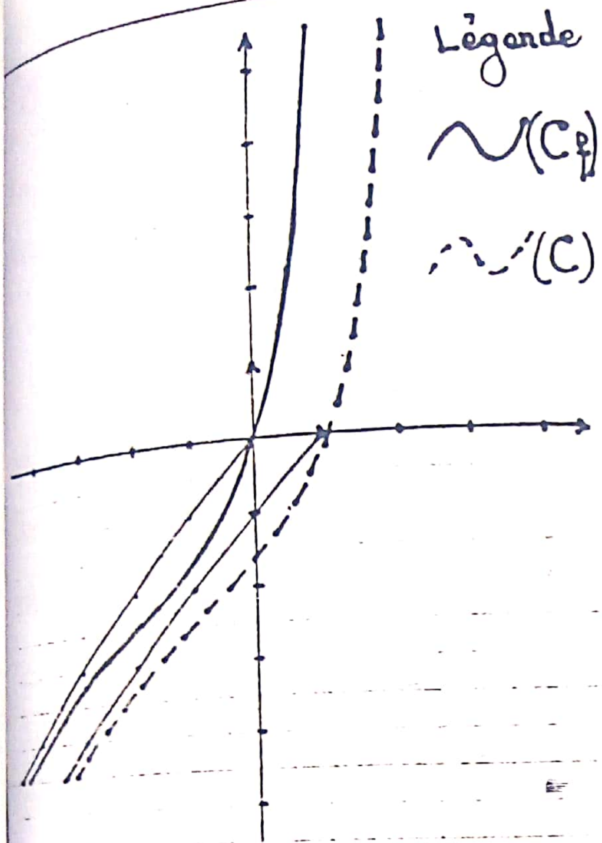
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{x} + 1 = +\infty$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction (oy) à $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{x} + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^{x} = 0$. donc la courbe de f admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique à $-\infty$

Construction de la courbe (C_f)

(Voir page suivante)



b/ Transformation affine simple laquelle l'ensemble (C) des points E' du B-4b/ est l'image de la courbe représentative de f :

Posons $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 2(x-1)e^{x-1}+x-1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x-1)$ donc la transformation demandée est la translation de vecteur $\vec{e_1}$.

c/ Traçons (C) dans le repère précédent

(Voir ci-dessus)

d/ Calcul d'aire

$$A = \left(-\int_0^1 h(x)\,dx\right) u.a.$$

$$\boxed{A = \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{e}\right) u.a.}$$

4/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 2(x-1)e^{x-1}$.

On note $g', g'', g^{(3)}, \dots g^{(n)}$ les dérivées successives de g.

a/ Démontrons que pour tout entier n non nul $g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$, où x est un nombre réel

– Pour $n=1$, $g'(x) = 2xe^{x-1}$; la proposition est vraie au rang 1.

– Supposons que la proposition est vraie au rang n c'est-à-dire

$$g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$$

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = 2(x+n)e^{x-1}$$

$$\text{donc } \left(g^{(n)}(x)\right)' = g^{(n+1)}(x).$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}}$

b/ Calculons $\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x)$.

Après calculs bien faits on a:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x) = \left(2nx + n(n-1)\right)e^{x-1}}$$