GROUPE SCOLAIRE LA LÉGENDE
مجموعة مدارس لاليجوند

COURS DETAILLES

SERIES D'EXERCICES

Matière : MATHEMATIQUES

Conforme au programme du ministère de l'éducation nationale, du préscolaire et des sports

2ème Année baccalauréat

Sciences économiques

Année scolaire : 2024 - 2025

Prof BENABICHA ANAS

Table des matières

CADRE DE REFERENCE

2ème BACCALAUREAT SCIENCES EQUONOMIQUES

A. Analyse

I. Continuité, dérivabilité et étude des fonctions

1- Etude de la continuité d'une fonction en un point.
2- Etude de la continuité d'une fonction sur un intervalle.
3- Image d'un intervalle par une fonction continue.
4- Théorème des valeurs intermédiaires et ses applications.
5- Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.
6- Etude de la dérivabilité d'une fonction en un point.
7- Etude de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.
8- Détermination de la fonction dérivée.
9- Etude des variations d'une fonction.
10- Détermination de dérivée de la composée de deux fonctions.
11- Détermination de dérivée de la fonction réciproque.
12- Utilisation de la dérivée première et de la dérivée seconde dans différents problème (détermination de valeurs maximales ou minimales, convexité, inégalités …)
13- Etude de fonctions (domaine de définition, éléments de symétrie, périodicité, tangentes, branches infinies, variations, convexité, points d'inflexion, courbes …)

II. Suites numériques

1- Utilisation des suites arithmétiques et des suites géométriques pour l'étude des suites de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$.
2- Utilisation des limites des suites de référence et des critères de convergence pour déterminer la limite d'une suite convergente.
3- Détermination de la limite de la composée d'une fonction continue et d'une suite convergente (suites de type $v_n = f(u_n)$).
4- Etude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$.
5- Utilisation des suites dans la résolution de problèmes divers.

III. Fonctions primitives

1- Fonctions primitives des fonctions usuelles.
2- Utilisation des formules de dérivation pour déterminer les fonctions primitives d'une fonction sur un intervalle.

IV. Calcul d'intégrale

1- Utilisation des fonctions primitives pour le calcul de l'intégrale d'une fonction continue.
2- Calcul d'intégrales à l'aide d'intégration par parties.
3- Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
4- Calcul de certaines aires.

V. Fonctions logarithmes et fonctions exponentielles

1- Propriétés algébriques des fonctions logarithmes et des fonctions exponentielles.

2- Résolutions d'équations et d'inéquations contenant des logarithmes ou des exponentielles
3- Limites usuelles des fonctions logarithmes et des fonctions exponentielles
4- Etude des fonctions logarithmes et des fonctions exponentielles

B. Dénombrement et calcul de probabilités

I. Dénombrement

1- Principe fondamentale de dénombrement.
2- Arrangements (avec ou sans répétition), permutations, combinaisons.

II. Probabilités

1- Langage probabiliste.
2- Probabilité d'un événement élémentaire et probabilité d'un événement.
3- Cas d'équiprobabilité des événements élémentaires
4- Probabilité conditionnelle et applications (théorème des probabilités totales, événements indépendants, épreuve répétée …)
5- Variables aléatoires :
   - Loi de probabilité d'une variable aléatoire.
   - Espérance mathématique, variance et écart-type d'une variable aléatoire.
   - Loi binomiale.

Rappels 1

I. Signe du binôme : $ax + b$, avec $a \neq 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	L'opposé du signe de a	0	Le signe de a

II. Signe et factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$:

Soit $P(x)$ un trinôme tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b *et* c sont des réels tel que : $a \neq 0$

<table>
<tr><th colspan="2">Discriminant</th><th>Solution de l'équation :
P$(x) = 0$ dans IR</th><th>Tableau du signe de $P(x)$</th><th>Factorisation de $P(x)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>$\Delta < 0$</td><td>L'équation n'a pas de solutions dans IR</td><td>x : $-\infty$ $+\infty$
$P(x)$: Signe de a</td><td>Impossible</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>L'équation admet une seule solution :
$x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>x : $-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$
$P(x)$: Signe de a 0   Signe de a</td><td>$P(x) = a(x - x_0)^2$</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>L'équation admet deux solutions réels distincts :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>$x$: $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$P(x)$: Signe de a 0   Opposé du signe de a 0   Signe de a
Avec : $x_1 < x_2$</td><td>$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
</table>

Remarque :

Si x_1 *et* x_2 sont des solutions de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ dans IR tel que $a \neq 0$, alors on a :

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

III. Identités remarquables :

Pour tout réels a et b on a :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\quad$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $\quad$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

IV. Domaine de définition d'une fonction numérique :

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes :

f est fonction de variable x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = P(x)$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) > 0\}$
$f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$

Rappels 2

I. Opérations sur les limites :

Soient f et g deux fonctions.

Lorsque $x \to x_0$, ou $x \to x_0^+$, ou $x \to x_0^-$, ou $x \to +\infty$, ou $x \to -\infty$. On a les résultats suivants :

1- Limite d'une somme :

$lim\, f$	$lim\ g$	$lim(f+g)$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	***Forme indéterminée***

2- Limite d'un produit :

$lim\|f\|$	$lim\ \|g\|$	$lim(\|f\|\times\|g\|)$
l	l'	$l\times l'$
$l\ (l>0)$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	***Forme indéterminée***

3- Limite d'un quotient :

$lim\|f\|$	$lim\ \|g\|$	$lim\left(\frac{\|f\|}{\|g\|}\right)$
l	$l'\ (l' \neq 0)$	$\frac{l}{l'}$
$l\ (l>0)$	0^+	$+\infty$
0	0	***Forme indéterminée***
l	$+\infty$	0
$+\infty$	$l\ (l \neq 0)$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	***Forme indéterminée***

II. Propriétés :

1- Fonction polynôme :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty\ si\ n\ est\ pair \\ -\infty\ si\ n\ est\ impair \end{cases} \end{cases}$
- La limite d'une fonction polynôme au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré.

2- Fonction rationnelle :

- La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du quotient de ces monômes de plus haut degré.

3- Valeur absolue et racine carré d'une fonction :

- Si : $\lim f = \pm\infty \Rightarrow \lim|f| = +\infty$
- Si : $\lim f = l \geq 0 \Rightarrow \lim\sqrt{f} = \sqrt{l}$
- Si : $\lim f = +\infty \Rightarrow \lim\sqrt{f} = +\infty$

Continuité d'une fonction numérique

I. Continuité en un point x_0, continuité à gauche et continuité à droite en un point x_0.

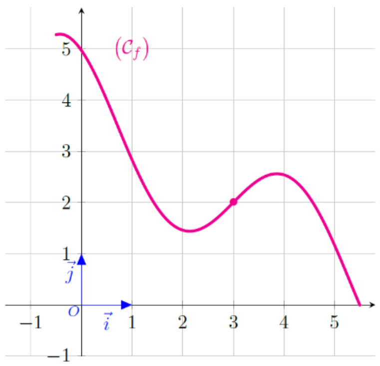
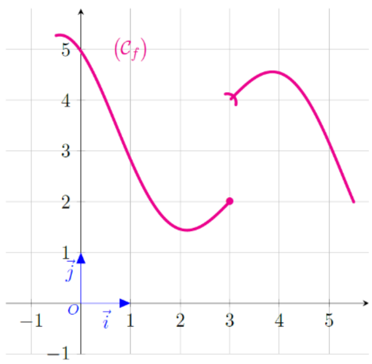
1. Continuité en un point x_0.

Définition :

f est une fonction définie sur D_f, I est un intervalle ouvert contenant x_0 et inclus dans D_f.

f est continue au point x_0 *si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Interprétation graphique :

	
• f est définie en 3 et $f(3) = 2$. • f admet une limite en 3 et $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 2$. • f est continue en 3.	• $f(3) = 2$. • $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq f(3) = 2$ • f n'est pas continue en 3.

3. Continuité à gauche et continuité à droite en un point x_0.

a. Définitions :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r;\ x_0]$ (où $r > 0$)

  f est **continue à gauche en x_0** si : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0;\ x_0 + r[$ (où $r > 0$)

  f est **continue à droite en x_0** si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

b. Propriété :

Une fonction est continue en un point x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

c. Exemple :

Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3-x-14}{x^2-x-2} \ si \ x > 2 \\ f(x) = \frac{x-2}{2x^2+x-10} \ si \ x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{cases}$; Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

4. Exercices d'applications :

Exercice 1 :

Etudier la continuité de la fonction : $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-x-2}{|4x-3|-1} \ si \ x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} \end{cases}$ en a=1.

Exercice 2 :

Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+12}-4} \ si \ x > 2 \\ g(x) = \frac{x^2+\propto x-\propto+1}{x-2} \ si \ x < 2 \\ g(2) = l \end{cases}$.

Existe-il $\propto$ et l pour que g soit continue en 2 ?

II. Opérations sur les fonctions continues.

1. Propriétés :

- Si f et g sont deux fonctions continues en a et $k \in IR$ alors :
  - $f + g$
  - $f \times g$
  - kf
  - $|f|$

  Sont des fonctions continues en a .
- Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors :
  - $\frac{1}{g}$
  - $\frac{f}{g}$

  Sont des fonctions continues en a.

- Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors :

- $\sqrt{f}$ est continue en a.

Remarque : Les propriétés précédentes restent vraies à droite en a aussi bien qu'à gauche en a.

2. Continuité sur un intervalle.

a. Définitions :

- f est continue sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ si pour tout x de I ; f est continue en x.
- f est continue sur un intervalle $[a, b[$ si f est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite en a.
- f est continue sur un intervalle $]a, b]$ si f est continue sur $]a, b[$ et f est continue à gauche en b.
- f est continue sur un intervalle $[a, b]$ si f est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b.

3. Continuité des fonctions usuelles :

Propriétés :

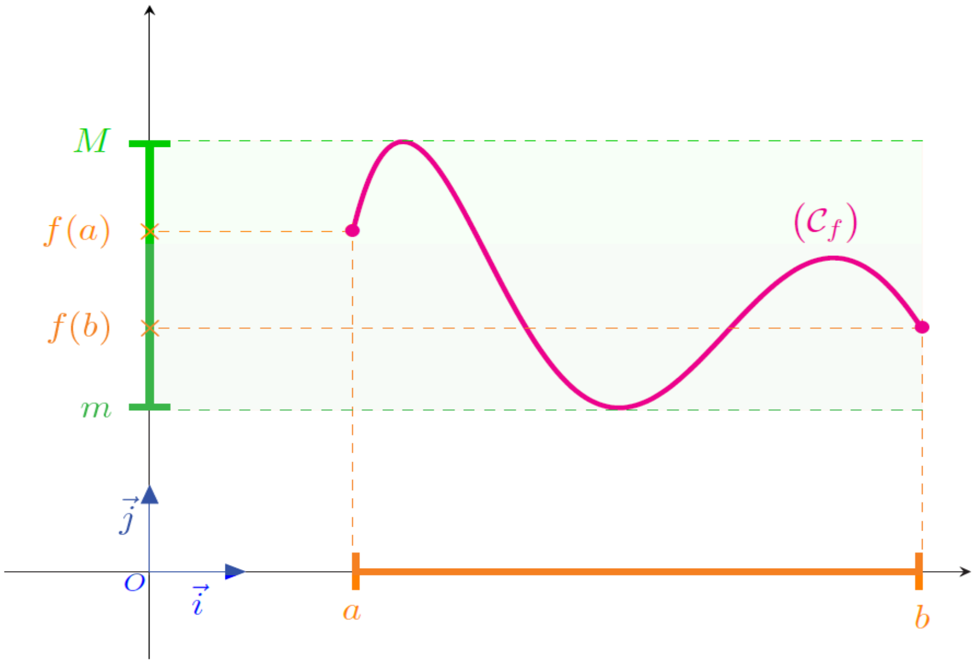
- Toute fonction polynôme est continue sur IR.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle de son domaine de définition.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

4. Image d'un intervalle par une fonction continue.

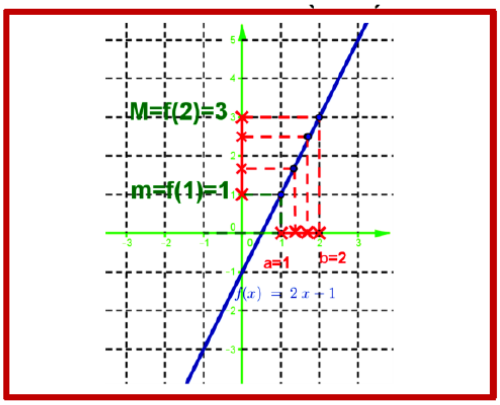
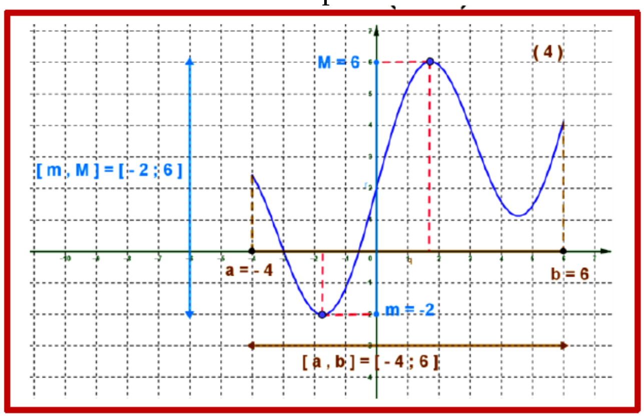
a. Propriétés :

- L'image du segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment $[m, M]$ tel que m est la plus petite image et M est la plus grande image par f des éléments de $[a, b]$. On note $f([a, b]) = [m, M]$.
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J.

  On note $f(I) = J$.



b. Exemples :

Exemple 1 :	Exemple 2 :
	
$f([1,2]) =$ ………………………	$f([-4,6]) =$ ………………………

c. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone.

Propriétés :

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'intervalle I. on a :

L'intervalle I	$f(I)$: f strictement croissante	$f(I)$: f strictement décroissante
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(a)]$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Exemple :

Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur IR par : $f(x)=2x^2-8x+1$, puis déterminer l'image de chacun des intervalles suivants : $]-\infty,2]$; $[3,4]$ et $[-1,0]$.

III. Continuité de la composée de deux fonctions continues :

1. Théorèmes :

- $si: \left.\begin{matrix} f\ est\ continue\ en\ x_0 \\ g\ est\ continue\ en\ f(x_0) \end{matrix}\right\}, alors\ la\ fonction\ gof\ est\ continue\ en\ x_0.$
- $si: \left.\begin{matrix} f\ est\ continue\ sur\ I \\ g\ est\ continue\ sur\ f(I) \end{matrix}\right\}, alors\ la\ fonction\ gof\ est\ continue\ sur\ I.$

2. Application :

- $si\ f$ est positive et continue sur I alors $h(x)=\sqrt{f(x)}$ est continue sur I.
- $si\ f$ est non nul sur I alors $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ est continue sur I .

IV. Théorème des valeurs intermédiaires.

1. Théorème T.V.I (figure 1) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$
Autrement dit : Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=\lambda$ admet au moins une solution c dans $[a,b]$.

Interprétation géométrique :

La courbe représentative de la fonction f coupe la droite d'équation $y=\lambda$ en au moins un point d'abscisse c de $[a,b]$.

2. Théorème T.V.I (cas d'une fonction strictement monotone) (figure 2) :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$.
Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$
Autrement dit : Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique c dans $[a, b]$.

Interprétation géométrique :

La courbe représentative de la fonction f coupe la droite d'équation $y = \lambda$ en un point unique d'abscisse c de $[a, b]$

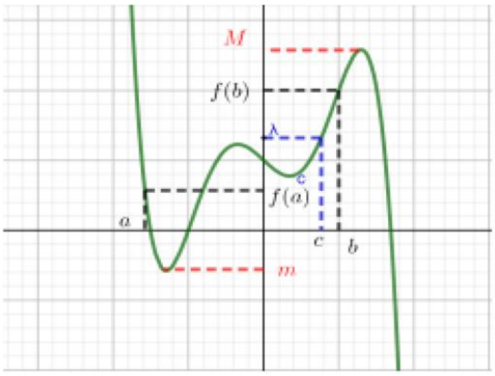


Figure 1 :

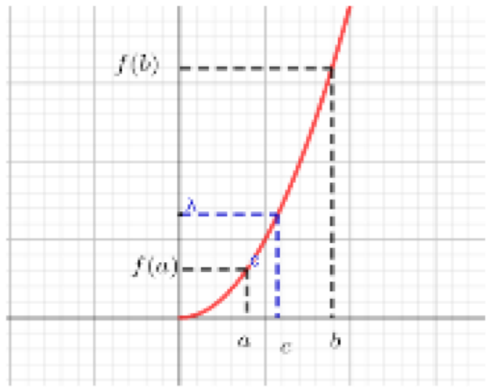


Figure 2 :

3. Corolaire 1 (TVI) :

Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle $[a, b]$.
Si $\boldsymbol{f(a) \times f(b) < 0}$ il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \mathbf{0}$.

4. Corolaire 2 (TVI) :

Soit f une fonction ***continue*** et ***strictement monotone*** sur un intervalle $[a, b]$.
Si $\boldsymbol{f(a) \times f(b) < 0}$ il existe un et un seul $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \mathbf{0}$.

5. Exercice d'application :

- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $[0, 1]$.
- Montrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une racine unique dans IR.

GROUPE SCOLAIRE LA LÉGENDE
مجموعة مدارس لاليجوند

Série 1 : Continuité d'une fonction numérique

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ ; \ x < 1 \\ f(x) = x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} \ ; x \geq 1 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I.

Etudier la continuité de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

a. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1 \ ; \ I = [-5; 2]$
b. $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+x+1} \ ; I =]-2; +\infty[$
c. $f(x) = \sqrt{x} \ ; \ I =]0; 7]$
d. $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} \ ; \ I =]0; +\infty[$

Exercice 3 :

1. Soit f une fonction numérique définie sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ par : $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$.
   Etudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
2. Soit f une fonction numérique définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$.
   Etudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 4 :

Déterminer l'image de l'intervalle $[-1; 2]$ par la fonction f définie par :

$f(x) = 2x - 1$

Déterminer l'image de l'intervalle $[-3; 1]$ par la même fonction.

Exercice 5 :

Soit f une fonction numérique définie sur $[-4; 4]$ par :
$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+4} \ ; \ x \in [-4; 0] \\ f(x) = x^2 + 2 \ ; \ x \in]0; 4] \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.
2. Déterminer l'image de l'intervalle $[-4; 4]$ par la fonction f.

Exercice 6 : (les trois questions sont indépendantes)

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle I dans les cas suivants :
   a. $f(x) = 7x^3 - x - 1$; $I = [0; 1]$
   b. $f(x) = \cos x - x$; $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
   c. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$; $I =]-1; 0[$
   d. $f(x) = x^4 + x^3 - 9$; $I = [-2; 2]$
2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9x^5 - x - 2}{x^2 + 1}$.
   Montrer que (C_f) la courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x - 3 = x^3$ avec x est un nombre réel.

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution x_0.
3. Vérifier que $x_0 \in]0; 1[$
4. En utilisant la méthode de la dichotomie, donner une valeur approchée du nombre x_0 à 10^{-2} prés.

Exercice 8 :

Soit f une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} & ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = \frac{9}{8} \end{cases}$

1. Déterminer D le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f est continue en 2.

Exercice 9 :

Soit f une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = -\sqrt{2} \end{cases}$

1. Déterminer D le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f est continue en 1.

Exercice 10 :

Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2ax^2 - 3b \;;\; -3 \leq x < 0 \\ f(x) = 2x - b + a \;;\; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 4x - a \;;\; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

, soit continue sur l'intervalle $[-3; 2]$.

Exercice 11 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ telle que : $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $g(x) = f(x) - x$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0; 1[$.

Dérivabilité et étude des fonctions

I. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 – dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0.

1. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0.

a. Définitions :

Soit une fonction f tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert I et $x_0 \in$ I.

- f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{IR}$. $l = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.
- f est dérivable à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{IR}$. $l = f'_d(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à droite de f en x_0.
- f est dérivable à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{IR}$. $l = f'_g(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0.

b. Propriété :

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite, à gauche au point x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

2. Interprétation géométrique des nombres dérivés $f'(x_0)$, $f'_d(x_0)$, $f'_g(x_0)$.

a. Interprétation géométrique du nombre dérivé $f'(x_0)$.

Soit f une fonction dérivable au point x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

- Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(x_0; f(x_0))$
- Equation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(x_0; f(x_0))$ est :

$$\boldsymbol{(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

- Si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

b. Interprétation géométrique des nombres dérivés $f'_d(x_0)$ *et* $f'_g(x_0)$:

- Si f est dérivable à droite en x_0 on a une demi-tangente à droite en x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$.
- Equation du demi tangent à droite en x_0 est :

$$\begin{cases} \boldsymbol{(T_d): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} \\ \boldsymbol{x \geq x_0} \end{cases}.$$

- Si f est dérivable à gauche en x_0 on a une demi-tangente à gauche en x_0 de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.
- Equation du demi tangent à gauche en x_0 est :
$\begin{cases} (\boldsymbol{T_g}): \boldsymbol{y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} \\ \boldsymbol{x \le x_0} \end{cases}$.
- Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ donc f n'est pas dérivable en x_0 et le point $A\big(x_0; f(x_0)\big)$ est appelé point anguleux.

3. Cas de $\boldsymbol{f}$ n'est pas dérivable.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable à droite en x_0, dans ce cas la courbe représentative de la fonction f admet une demi-tangente à droite en x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, ,alors f n'est pas dérivable à gauche en x_0, dans ce cas la courbe représentative de la fonction f admet une demi-tangente à gauche en x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.

II. Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée.

1. Dérivabilité sur un intervalle.

a. Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée ***fonction dérivée*** de f et se note f'.
- f est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.
- f est dérivable sur $]a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à gauche en b.
- f est dérivable sur $[a, b[$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a.

b. Propriétés :

- Toute fonction $\boldsymbol{polyn}$ô$\boldsymbol{me}$ est dérivable sur IR.
- Toute fonction $\boldsymbol{rationnelle}$ est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.
- La fonction $\boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\boldsymbol{x}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

2. Fonction dérivée.

a. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. on a :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	I
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in IN^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

b. Opérations sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u \pm v$ est dérivable sur I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
$u \times v$ est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n est dérivable sur I, où $n \in IN^* - \{1\}$	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$ est dérivable sur I, où u est strictement positive sur I	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

III. Application de la fonction dérivée première.

1. La monotonie d'une fonction.

Propriétés :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est (strictement) positive sur I alors la fonction f est (strictement) croissante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est (strictement) négative sur I alors la fonction f est (strictement) décroissante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

2. Extrémum d'une fonction :

Propriétés :

- f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in$I.

Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a) = 0$.

- f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in$I.

Si f' s'annule au point a et f' change du signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

Remarque :

Si $f'(a) = 0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

IV. Application de la fonction dérivée seconde.

1. Concavité.

Propriétés :

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

- Si $(\forall x \in I); f''(x) > 0$ alors : la courbe (C_f) est situé au-dessus de ses tangentes.
  Dans ce cas, la courbe (C_f) est dite convexe (concavité dirigée vers les ordonnées positives).
- Si $(\forall x \in I); f''(x) < 0$ alors : la courbe (C_f) est situé au-dessous de ses tangentes.
  Dans ce cas, la courbe (C_f) est dite concave (concavité dirigée vers les ordonnées négatives).

2. Points d'inflexions

Propriétés :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

Exemple :

Le tableau suivant représente le signe de la fonction dérivée seconde d'une fonction f et la concavité de la courbe (C_f).

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	
Concavité de (C_f)		∩		∪	‖	∩		∩	

V. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I :

1. Définition :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I :

La fonction qui a tout y de $f(I)$ fait associer x de I telle que $f(x) = y$ est dite : la fonction réciproque de f définie sur $f(I)$. On la note f^{-1}.

Ainsi : $\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases}$

2. Conséquence :

$\forall x \in I; f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ et $\forall y \in f(I); f\big(f^{-1}(y)\big) = y$

3. Théorème :

Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J tel que : $J = f(I)$

Exercice d'application :

- Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1$.
  1- Déterminer $J = f([0,1])$.
  2- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J.

4. Détermination de l'expression $f^{-1}(x)$.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I tel que : $f^{-1}(x) = y$.
On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, puis en résolvant l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y et on déduit l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$.

3. Continuité de la fonction réciproque.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Donc sa fonction réciproque est continue sur l'intervalle $f(I)$.

4. Dérivabilité de la fonction réciproque .

Propriétés :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0 et on a :

$$(\boldsymbol{f^{-1}})'(\boldsymbol{y_0}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f'(x_0)}}$$

- Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$(\forall x \in f(I));\ (\boldsymbol{f^{-1}})'(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

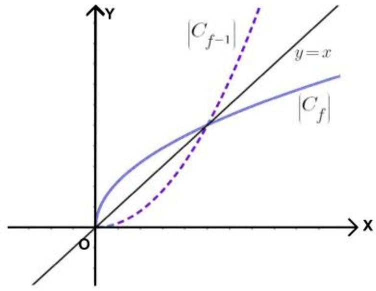
5. Monotonie de la fonction réciproque.

Propriétés :

Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors sa fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$.
Le sens de variations de f^{-1} sur $f(I)$ est le même que celui de f sur I

6. La courbe représentative de la fonction réciproque :

Dans un repère orthonormé $(C_{f^{-1}})$ est le symétrique de (C_f) par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation $y = x$)



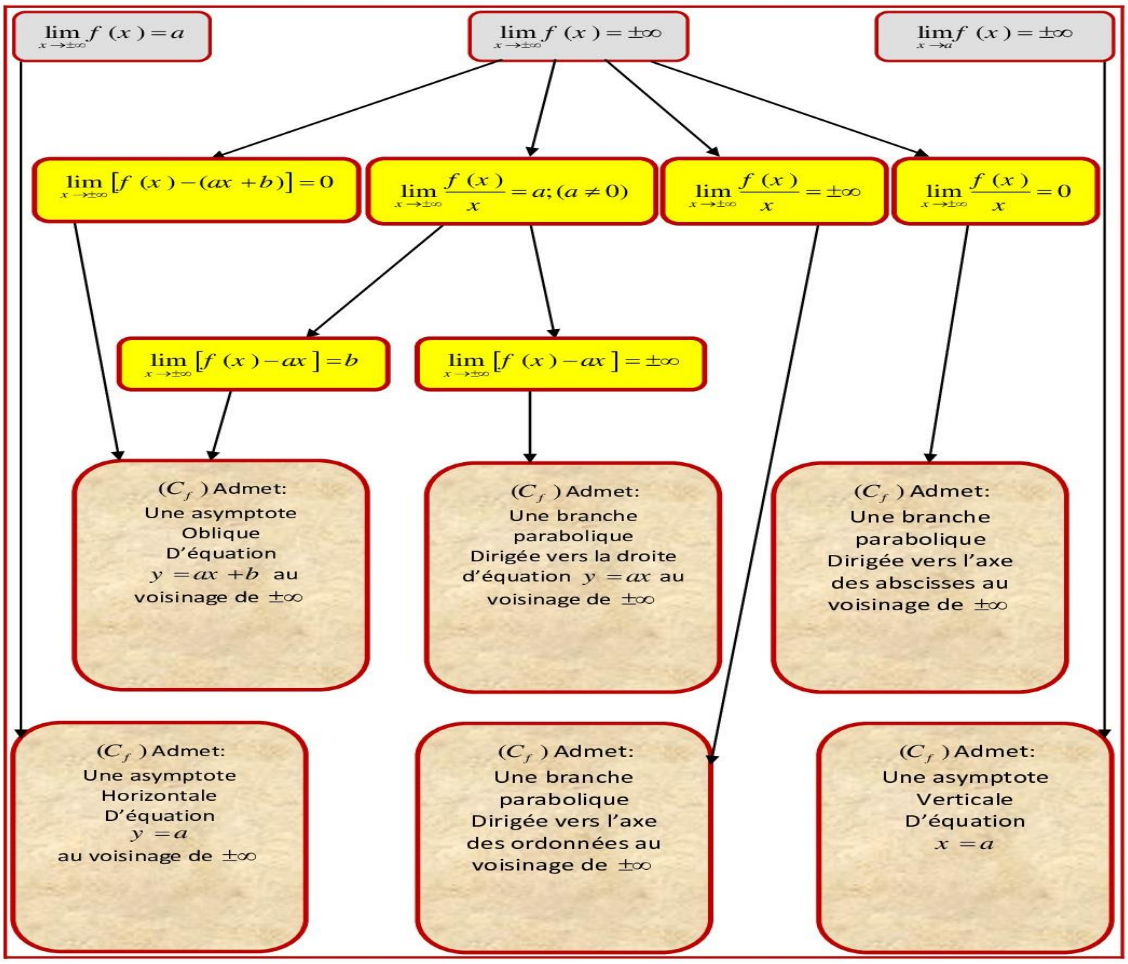
VI. Branches infinies

1. Définition :

Une branche infinie d'une courbe représentative (C_f) d'une fonction f apparaît dès lors que l'une au moins des coordonnées x ou y tend vers l'infini. L'étude des branches infinies est indispensable à l'étude du comportement global de la courbe représentative de la fonction.

2. Diagramme des branches infinies :

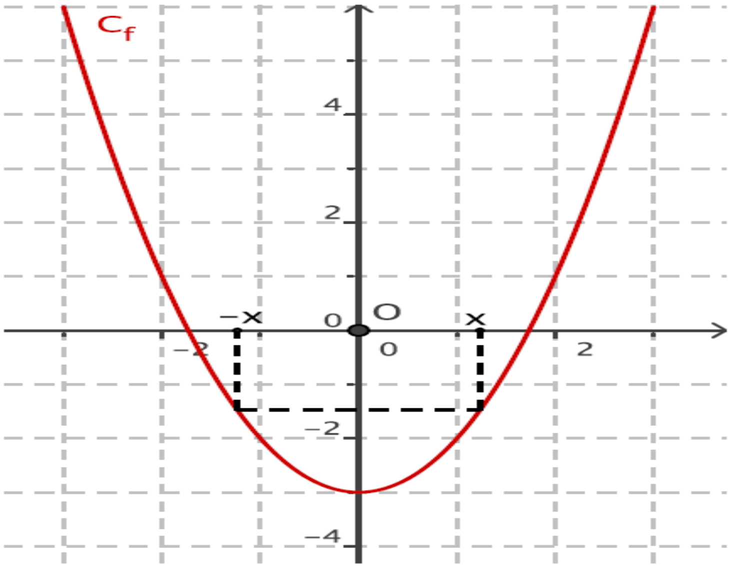
Soit f une fonction numérique, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



Parité d'une fonction numérique :

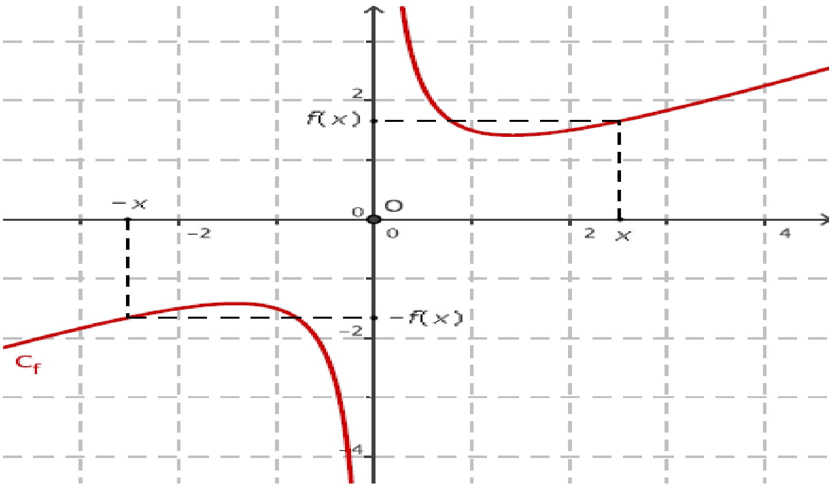
1. Fonction paire :

Soit f une fonction définie sur D_f.
La fonction f est paire si l'ensemble D_f est centré en 0, (c'est-à-dire que si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$) et si pour tout x de D_f : $f(-x) = f(x)$.
Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f admet **l'axe des ordonnées** comme axe de symétrie.
La courbe ci-dessous est sa représentation graphique et admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.



2. Fonction impaire :

Soit f une fonction définie sur D_f.
La fonction f est impaire si l'ensemble D_f est centré en 0 (c'est-à-dire que si $x \in Df$,alors : $-x \in D_f$) et si pour tout $x\ de\ Df$: $f(-x) = -f(x)$.
Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f admet **l'origine du repère** comme centre de symétrie.
La courbe ci-dessous est sa représentation graphique et admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

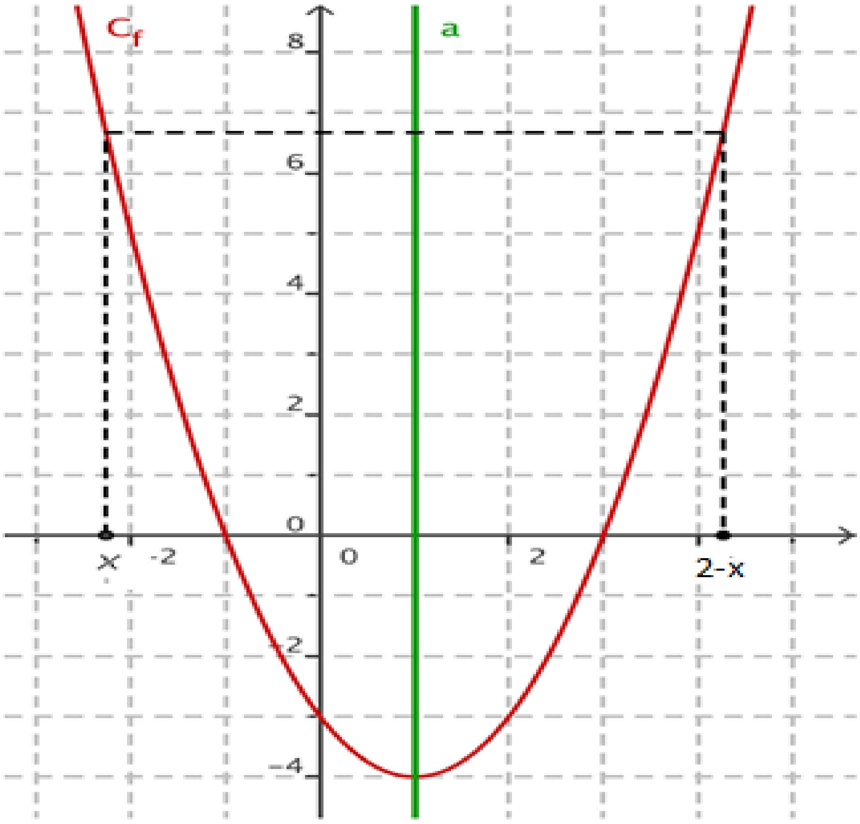


IX. Axe de symétrie et centre de symétrie :

Soit la fonction f définie sur D_f, et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

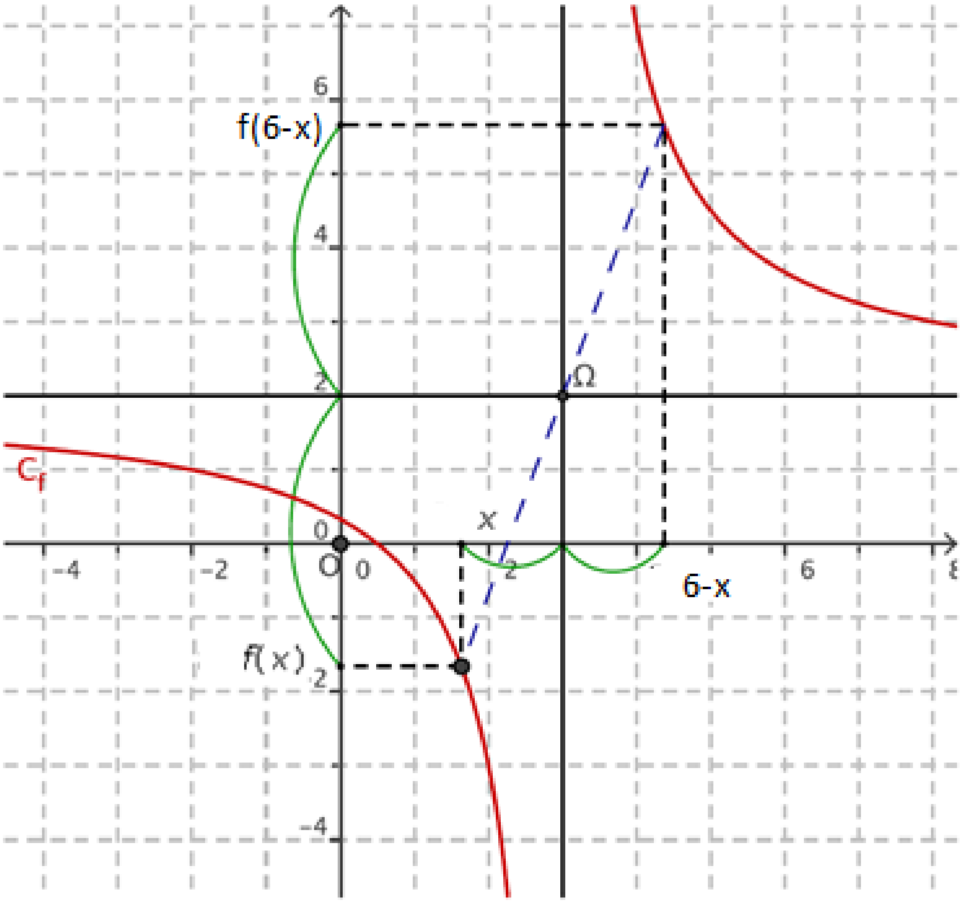
1. **Axe de symétrie :**

Si la fonction f vérifie :$(\forall x \in D_f)$ $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$, alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\left(C_f\right)$.
La courbe ci-contre est sa représentation graphique et admet la droite d'équation x = 1 comme axe de symétrie.



2. **Centre de symétrie :**

Si la fonction f vérifie : $(\forall x \in D_f)$ $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$, alors le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.
La courbe ci-contre est sa représentation graphique.


f(6-x)
6
4
2
Ω
C_f
0
x
O
0
-4
-2
2
6
6-x
f(x)
-2
-4

Série 2 : Dérivabilité et étude des fonctions numériques

Exercice 1 :

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en x_0 dans les cas suivants :

a. $f(x) = x^2 + x \ ; \ x_0 = 1$
b. $f(x) = \sqrt{x-1} \ ; \ x_0 = 2$

Exercice 2 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 dans les cas suivants :

a. $f(x) = |x-1| \ ; \ x_0 = 1$
b. $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1; x \geq 0 \\ f(x) = 4x + 1; \ x < 0 \end{cases} \ ; \ x_0 = 0$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & si \ \ x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + \sqrt{-x} & si \ \ x < 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. La fonction f est-il dérivable en 0 ?

Exercice 4 :

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1. Etudier la dérivabilité de f en 2
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_f) de la fonction f au point d'abscisse 2.

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 3x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier la dérivabilité à droite en 3, puis interpréter le résultat géométriquement.

Exercice 6 :

Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

a. $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - \frac{x}{2}$
b. $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} + 3x$
c. $f(x) = \frac{1}{3x^2+5}$
d. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$
e. $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$
f. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$
g. $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

Exercice 7 :

Etudier la concavité de la courbe de la fonction f dans les cas suivants :

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
b. $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+2}$
c. $f(x) = \sqrt{2x-2} + x$
e. $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$
f. $f(x) = 16\sqrt{x-1} + x^2$
g. $f(x) = \frac{x}{3x^2+3}$

Exercice 8 :

Déterminer la parité de la fonction f et interpréter le résultat géométriquement :

a. $f(x) = 4x^3 - 5x$
b. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+7}-1}{x^3+x}$

Exercice 9 :

Vérifier que le point I est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants :

a. $f(x) = x^3 - 3x + 2$; $I(0;2)$
b. $f(x) = \frac{5x+1}{1-2x}$; $I\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$
c. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; $I(-1;-2)$

Exercice 10 :

Soit f une fonction numérique. Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants :

a. $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$
b. $f(x) = \sqrt{x+1}$
c. $f(x) = x + \sqrt{x^2+x+1}$
d. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
e. $\begin{cases} f(x) = x^2 + x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}} & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercice 11 :

Etudier la fonction numérique f et représenter sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ dans les cas suivants :

a. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$
b. $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$
c. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

Exercice 12 :

Soit f une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$.
3. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement.

Exercice 13 :

Soit f une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
3. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$, puis interpréter le résultat géométriquement.

Exercice 14 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2-4}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier la dérivabilité de f à droite en 2, puis interpréter le résultat géométriquement.
3. Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2, puis interpréter le résultat géométriquement.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

Exercice 15 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty;3]$ par : $f(x) = (x-3)^2 - 1$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

2. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 16 :

Soif f une fonction définie par :$f(x) = x + \sqrt{x+3}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que f est continue et strictement monotone sur D_f.
3. Déduire que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
4. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.
5. Montrer que l'équation : $f^{-1}(x) = f(x)$ admet une seule solution sur l'intervalle $[-3; +\infty[$.

Exercice 17 :

Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer dans chaque cas suivant :

a. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; $I =]1; +\infty]$
b. $f(x) = x|x|$; $I = \mathbb{R}$
c. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$; $I = \mathbb{R}^+$

Exercice 18 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle à déterminer.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α telle que : $2 < \alpha < 3$.
   c. Montrer que :$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

Exercice 19 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1, puis interpréter le résultat géométriquement.
4. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1[$.

5. Construire (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 20 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Calculer les limites aux bornes de D_f.
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 2, puis interpréter le résultat géométriquement.
   b. Calculer et étudier de $f'(x)$.
3. Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D), puis étudier la position relative de (C_f) et la droite (D).
4. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle à déterminer.
   b. Construire dans le même repère la courbe de la fonction g^{-1}.

Exercice 21 :

Soit f la fonction numérique définie sur $[-2; -1[\cup]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2} - 1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter le résultat géométriquement.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en -2.
   b. Montrer que pour tout x de $]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$ $f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2+1}{2\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2}$

   c. dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-1; 2]$.
   Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle à déterminer.
5. Construire dans le même repère la courbe (C_f) et la courbe (C_g).

Exercice 22 :

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x - \sqrt{2x - 1}$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f, et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en $\frac{1}{2}$.

   b. Montrer que le signe de $f'(x)$ sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ est celui de $x-1$

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   d. Donner l'équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 5.

4. Construire la courbe (C_f).
5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=[1;+\infty]$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle à déterminer
   b. Vérifier que : $\forall x \in [1;+\infty]; g(x) = \frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{2}$
   c. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[0;+\infty]$.

Exercice 23 :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 1 - \frac{x}{4}\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que f est dérivable à droite en 0.
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$; puis dresser le tableau de variations de f.
3. a. Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

   b. Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion, puis déterminer les coordonnées de ce
   point.

4. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=[4;+\infty]$
   a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $\left]\frac{64}{9};\frac{121}{16}\right[$
   b. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   c. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J, puis déduire que : $\alpha = 4+2\sqrt{3}$.
   d. Construire dans le même repère la courbe (C_f) et la courbe (C_g).

Exercice 24 :

I. Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$
Soit $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$
1. Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g
2. Calculer les limites aux bornes de D_g, puis déduire les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$
3. Montrer que $\Omega(0;1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$
4. Calculer $\lim_{x\to 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenue
5. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]2;+\infty[$

II. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = g(x)\ ;x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[\\ f(x) = \sqrt{4-x^2}+1\ ;x \in]-2;2[\end{cases}$$
Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$
1. Montrer que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]-2;2[$ est une fonction paire
2. Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 2$
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en $x_0 = 2$
4. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-2;2[$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
6. Construire $(\mathcal{C}_f)$ *(unité 1cm)*

III. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$
1. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
2. Construire $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère avec une autre couleur
3. Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout x de J

Suites numériques

I. Définitions :

1. Définition d'une suite numérique :

Une suite numérique u est une fonction d'une partie I de ℕ vers ℝ : $u: n \mapsto u(n)$.
Son ensemble de définition est donc ℕ ou un sous-ensemble de ℕ.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on appelle $n^{ème}$ terme ou terme général de la suite.

2. Notations - Vocabulaire :

 La variable n étant un nombre entier naturel, cet entier n permet de numéroter les images : en plus de l'écriture fonctionnelle classique $u(n)$ utilisée pour désigner l'image de l'entier naturel n par la fonction u, on peut aussi utiliser la ***notation indexée (ou indicée)*** : u_n. Avec cette notation l'image de 0 s'écrit : u_0.

 Avec cette notation, on dit que :
$u(n) = u_n$ est le ***terme d'indice n ou de rang n*** de la suite u.
u est la suite de terme général $u_n$et l'on écrit : $u = (u_n)_{n\in I}$.
Si I= ℕ, la suite est notée simplement (u_n). Et dans ce cas :

- $u(0) = u_0$ qui est l'image de 0 par u est aussi appelé le premier terme de la suite u.
- $u(1) = u_1$ qui est l'image de 1 par u est aussi appelé le deuxième terme u.

Il arrive parfois que le premier terme d'une suite u ne soit pas u_0.
Par exemple :
$u_n = \frac{1}{n}$ n'existe pas pour $n = 0$. La suite commence au rang 1. On écrira alors : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
$t_n = \frac{1}{n(n-1)}$ n'existe pas pour $n = 0$, ni pour $n = 1$. La suite commence au rang 2.
Dans tous les cas de ce type-là, on précisera le sous-ensemble de ℕ où la suite est définie : Ici, on a : $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$.

3. Suite minorée, majorée, bornée :

Définitions :

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ **est majorée par un réel M si et seulement si** $\forall n \geq n_0;\ u_n \leq M$ $(ou\ \forall n \geq n_0;\ u_n < M\ )$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ **est minorée par un réel m si et seulement si** $\forall n \geq n_0;\ u_n \geq m$ $(ou\ \forall n \geq n_0;\ u_n > m\ )$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ **est bornée** si et seulement si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée et bornée.

Propriété :

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ **est bornée** si et seulement si $\exists a \in \mathbb{R}^+;\ |u_n| \leq a$ $(ou\ \exists a \in \mathbb{R}^+;\ |u_n| < a\ )$.

4. La monotonie d'une suite numérique :

Propriétés :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, on a :

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \geq u_n$.

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} < u_n$.

Définitions :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, on a :

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

II. Suite arithmétique :

1. Définition :

Lorsque l'on passe de n'importe quel terme d'une suite au terme suivant, en **ajoutant toujours le même nombre**, on dit que la suite est **arithmétique**.
C'est à dire que, s'il existe $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :
$u_{n+1} = u_n + r$, on dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique de raison *r***.

2. Terme général :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a :
$\forall n \geq n_0;\ u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$
Cas particulier : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors son terme général

s'écrit $u_n = u_0 + nr$; $n \in \mathbb{N}$.

3. Somme de termes consécutifs :

$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique on a :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n - p + 1)\left(\frac{u_n + u_p}{2}\right)$$

Autrement dit : $S_n = (le\ nombre\ des\ termes\ de\ la\ somme) \times \frac{(Le\ premier\ terme)+(le\ dernier\ terme)}{2}$

III. Suite géométrique :

1. Définition :

Lorsque l'on passe de n'importe quel terme d'une suite au terme suivant, en **multipliant toujours le même nombre**, on dit que la suite est **géométrique**.
C'est à dire que, s'il existe $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :
$u_{n+1} = q \times u_n$, on dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique de raison *q***.

2. Terme général :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a :
$\forall n \geq n_0;\ u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$
Cas particulier : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors son terme général s'écrit $u_n = u_0 \times q^n$; $n \in \mathbb{N}$.

3. Somme de termes consécutifs :

$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite géométrique on a :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}\right)$$

IV. Limite d'une suite numérique :

1. Définitions :

a- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si : les valeurs prises par la suite pour tout entier naturel $n > N$ depassent tout réel strictement positif donné A.
C'est-à-dire : $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N);\ u_n > A$.
On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si : $\lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$

c- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ si : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{l}{|u_n - l|} = +\infty$

d- On dit qu'une suite est convergente si sa limite est finie.

e- On dit qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

2. Limites usuelles :

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\propto} = +\infty$; avec $\propto \in \mathbb{Q}^{*+}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\propto}} = 0$; avec $\propto \in \mathbb{Q}^{*+}$

3. Critères de convergence d'une suite numériques :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques, et soit N un entier donnée.

a- $Si: \begin{cases} (\forall n \geq N);\ |u_n - l| \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$;

b- $Si: \begin{cases} (\forall n \geq N);\ u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$;

c- $Si: \begin{cases} (\forall n \geq N);\ u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$;

d- $Si: \begin{cases} (\forall n \geq N);\ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

4. Limite de la suite q^n :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \ \ si \ \ q > 1 \\ 1 \ \ si \ \ q = 1 \\ 0 \ \ si \ \ -1 < q < 1 \\ \nexists \ \ si \ \ q \leq -1 \end{cases}$$

5. Propriétés :

a- La limite d'une suite convergente et positive est un nombre réel positif ;

b- $Si: \begin{cases} (\forall n \geq N);\ u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l\ ,\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l' \end{cases}$ alors : $l \geq l'$;

c- Toute suite croissante et majorée est convergente ;
d- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

GROUPE SCOLAIRE LA LÉGENDE
مجموعة مدارس لاليجوند

Série 3 : Suites numériques

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}({u_n}^2 + 1) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

Exercice 2 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

a. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = -\frac{1}{3^n}$

b. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = 7 \times 2^n$

c. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = -3\left(\frac{4}{3}\right)^n$

d. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n}$

e. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

e. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{3}{4}}$

f. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{-\frac{1}{3}}$

g. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}$

h. $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{\sqrt{(0,3)^n + 5}}{\sqrt{(0,3)^n + 4}}$

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 \leq u_n \leq 3$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)
3. En utilisant la fonction $f : x \to \sqrt{x} + 1$ sur l'intervalle $[2; 3]$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} > 2u_n$. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 3 \times 2^n$.
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+10} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$.
2. Montrer que (u_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{10}$, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - \frac{1}{4}}{u_n+2} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > -\frac{1}{2}$
2. Soit (v_n) une suite numérique définie par : $v_n = \frac{2}{2u_n+1}$
   a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$
   b. Ecrire u_n en fonction n, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2n - 1$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$
2. Calculer u_n en fonction n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
3. On pose : $T_0 = u_0$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   Calculer T_n en fonction de n, et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

Exercice 8 :

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

1. Calculer u_2 et u_3
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n < 3$
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n), et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \geq 2$
4. On considère la suite $(v_n)_{n\geq1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = u_n - 3$
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et calculer v_n en fonction de n
   b. Déterminer u_n en fonction de n, et calculer sa limite
   c. Calculer $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n puis calculer sa limite

Exercice 9 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n), et déduire qu'elle est convergente
3. a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

   b. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

   c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme
   b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n
   c. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
5. On pose pour tout $n \geq 1$: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$
   Calculer S_n en fonction de n et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 10 :

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[\,); g(x) \geq 3$
2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
   a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 3$
   b. Montrer que (u_n) est monotone, puis déduire qu'elle est convergente
   c. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 11 :

I. Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3 + x^2}$
   1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$
   2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$
   3. Montrer que $(\forall x \in [0; 1[); f(x) > x$

II. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
   1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n < 1$
   2. Etudier la monotonie de la suite (u_n), et déterminer sa limite

III. Soit (v_n) la suite numérique telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n^2 - 1$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme
2. Déterminer v_n, puis u_n en fonction de n
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 12 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. a. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f
   b. Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0
   c. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); \ f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f
   d. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite d'équation $(\Delta) : y = x$
2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
   a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 4$
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante
   c. Déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Fonctions primitives

I. Définition et propriétés :

1. Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que la fonction F, définie sur I, est « une primitive de la fonction f sur l'intervalle I »

si on a : $\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in \mathrm{I}, F'(x) = f(x) \end{cases}$

2. Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. on a :

- **Si** f est continue sur I **alors** f admet une primitive sur I.
- **Si** f admet une primitive F sur I **alors** f admet une infinité de primitives sur I et elles sont de la **forme** : $F + k$. Où k est une constante réelle quelconque.
  En d'autres termes, toute primitive G de la fonction f sur l'intervalle I est définie par : $\forall x \in \mathrm{I}, G(x) = F(x) + k$
- **Si** F est une primitive de f sur I **alors** αF est une primitive de αf sur I ; avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- **Si** F et G sont des primitives respectivement de f et g sur I **alors** $F + G$ est une primitive
  de $f + g$ sur I.
- Soit x_0 un élément de I et y_0 un réel.
  Si f admet des primitives sur I **alors** il en existe une seule, F, telle que : $F(x_0) = y_0$.

II. Tableau des fonctions primitives usuelles :

Fonction	Primitives
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^r; avec\ r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$

III. Primitives des fonctions composées :

Fonction	**Primitives**
$u'u^r;\ avec\ r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k;\ avec\ k \in \mathbb{R}$

Série 4 : Fonctions primitives

Exercice 1 :

Déterminer dans chacun des cas suivants la primitive F de f qui vérifie la condition donnée :

a. $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ et $F(1) = 0$
b. $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $F(1) = 0$

Exercice 2 :

Déterminer une primitive sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$; $I =]-\infty; -\sqrt{3}[$
b. $f(x) = x^2(x^3+2)^3$; $I = \mathbb{R}$
c. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2; 0[$

Exercice 3 :

Donner une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$
b. $f(x) = -2x - 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $IR\backslash\{-2\}$ par : $f(x) = \frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$

1. Déterminer deux réels a et b pour que, $\forall x \in IR\backslash\{-2\}$, $f(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2}$
2. Déterminer F la primitive de f sur $]-\infty; -2[$ qui vérifie $F(0) = \frac{13}{2}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $IR\backslash\{-2,2\}$ par : $f(x) = \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

1. Déterminer deux réels a et b pour que, $\forall x \in IR\backslash\{-2,2\}$,
   $f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$
2. En déduire F la primitive de f sur $]-2; 2[$ qui s'annule en 0

Exercice 6 :

1. Montrer que $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x+3)(x^2+2x+1) + 1$

2. En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}$ sur l'intervalle $]-\infty;-1[$

Exercice 8 :

1. Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{5-2x^2}}$
   Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule pour $x=0$
2. a. Donner une primitive de chacune des fonctions $x\longmapsto\frac{1}{(x-1)^3}$ et $x\longmapsto\frac{1}{(x-1)^4}$ définies
   sur $I=]1;+\infty[$
   b. f est la fonction définie sur I par : $f(x)=\frac{x}{(x-1)^4}$
   Trouver les deux réels a et b tels que $\forall x\in I; f(x)=\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x-1)^4}$
   En déduire une primitive de f sur I.

Fonctions logarithmiques

I. Fonction logarithme népérien :

La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc elle admet une fonction primitive sur $]0; +\infty[$.

1. Définition :

La fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui s'annule en 1 est dite la fonction logarithme népérienne. On la note ln .

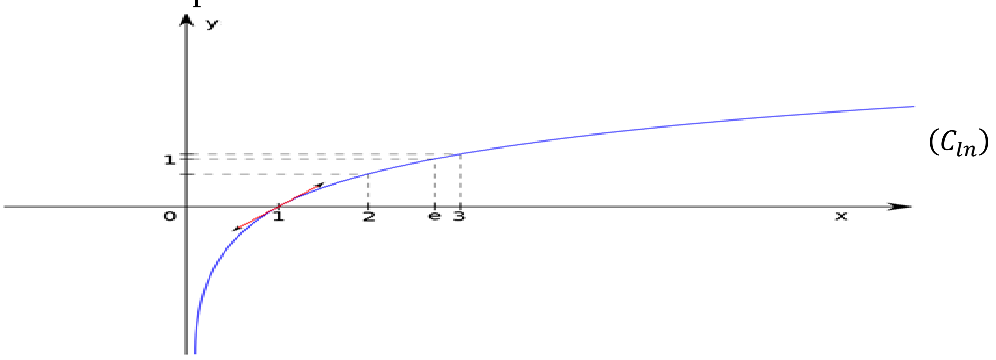
Ainsi : $\begin{cases} f(x) = \ln x \\ x \in \,]0; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$

2. Conséquences :

- La fonction ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0\,;\, +\infty[$;
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$;
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$;
- $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
- $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y\,, \quad \forall x, y \in]0; +\infty[$;
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y\,, \quad \forall x, y \in]0; +\infty[$;
- Il existe un, et un seul, nombre $e \in \,]2{,}72\,;\, 2{,}73[$ tel que $\ln(e) = 1$;
- Tableau de variations de la fonction ln :

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	||	+		
$\ln x$	||	0 ↗	1 ↗	

- La courbe représentative de la fonction ln :



3. Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b strictement positifs et $n \in \mathbb{Z}$ on a :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ 🛇 Attention : $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ 🛇 Attention : $\ln(a-b) \neq \ln a - \ln b$.
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ car : $\ln(1) = 0$.
- $\ln(a^n) = n \ln a$ cas particulier : $\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{n}$ car : $\ln e = 1$.
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$ car : $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

4. Limites usuelles :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

II. Logarithme décimal :

1. Définition :

La fonction logarithme décimale notée log, est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

2. Remarque :

La fonction log a les mêmes propriétés algébriques de la fonction ln.

III. Logarithme de base a :

La fonction logarithme de base a notée log_a, avec $a \in \,]0\,,1[\cup]1\,,+\infty[$, est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier : la fonction ln est aussi notée log_e, car $\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \frac{\ln x}{1} = \ln x \;\; (\forall x > 0)$

Dérivée : $(\forall x \in \,]0\,;\,+\infty[)$; $(log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

Variations :

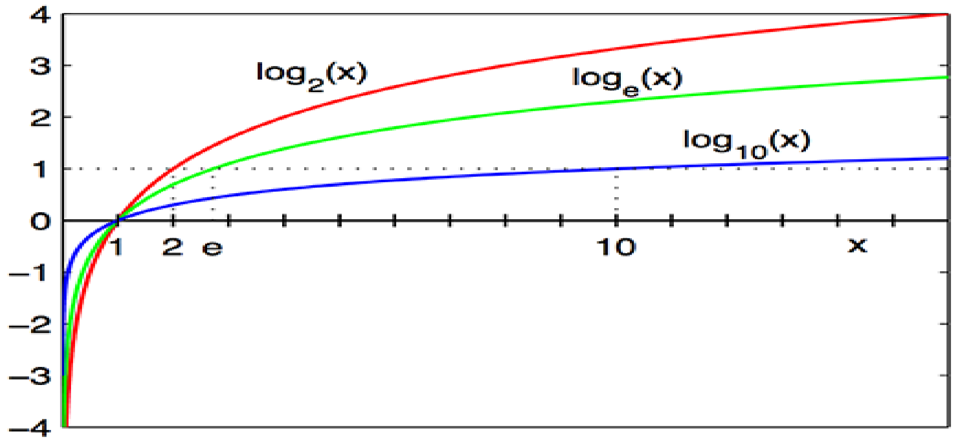
Si $0 < a < 1$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\log_a$	$+\infty \searrow -\infty$

Si $a > 1$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\log_a$	$+\infty \searrow -\infty$

Courbe représentative :



IV. La fonction : $x \overset{f}{\longmapsto} \ln\left(u(x)\right)$

1. Domaine de définition :

Le domaine de définition : $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \; et \; U(x) > 0\}$

2. Dérivée :

Soit I un intervalle de D, on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in I$;
Si u est dérivable sur I, alors f est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = \left(ln\left(u(x)\right)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

3. Limites :

Propriétés :

- Si $\lim u(x) = l \quad (l > 0) \quad \Rightarrow \quad \lim\left(\ln\left(u(x)\right)\right) = \ln l$
- Si $\lim u(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\left(\ln\left(u(x)\right)\right) = +\infty$
- Si $\lim u(x) = 0^+ \quad \Rightarrow \quad \lim\left(\ln\left(u(x)\right)\right) = -\infty$
- $\ln u(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < u(x) < 1$;
- $\ln u(x) > 0 \Leftrightarrow u(x) > 1$;
- $\ln u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 1$.

Série 5 : Fonctions logarithmiques

Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\ln\sqrt{3}+\ln 6-\ln 9$ **b.** $\ln 8+\ln\sqrt[3]{2}-\ln 16$ **c.** $\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{5}{7}+\ln\frac{7}{9}$ **d.** $\ln\frac{35}{12}+\ln\frac{6}{7}+\ln\frac{4}{5}$	**e.** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2007}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2007}$ **f.** $\ln^2\left(2-\sqrt{3}\right)-\ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)$ **g.** $\ln\sqrt{e}-3\ln(e^2)+\ln(2e)+\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ **h.** $2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)-\ln\left(\frac{e}{2}\right)+\ln\sqrt[3]{e}$

Exercice 2 :

Ecrire en fonction de $\ln 3$ les nombres suivants :

a. $\frac{1}{4}\ln 81+\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{27}$ **b.** $\ln 6+\ln 18-\ln\frac{2}{3}$	**c.** $\ln 12+\ln 8-\ln 4^{\frac{5}{2}}$ **d.** $\ln\left(9\sqrt{3}\right)+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)-\ln\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

Exercice 3 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a. $x\longmapsto\ln(-x)$ **b.** $x\longmapsto\ln(1+x)$ **c.** $x\longmapsto\ln(1-\lvert x\rvert)$ **d.** $x\longmapsto\ln(\lvert x\rvert-3)$ **e.** $x\longmapsto\frac{1}{\ln x}$	**f.** $x\longmapsto\frac{1}{x}\ln(x+2)$ **g.** $x\longmapsto\frac{1}{1-\ln x}$ **h.** $x\longmapsto\ln(x^2-4)$ **i.** $x\longmapsto ln\big((1+3x)(x+2)\big)$	**j.** $x\longmapsto\ln(1+3x)+\ln(x+2)$ **k.** $x\longmapsto\frac{\ln(2x-1)}{\ln(x+1)}$ **l.** $x\longmapsto\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln x=1$ b. $\ln\left(\frac{x}{2}\right)=\ln 5$ c. $\ln x=-2$ d. $x\ln x=0$	e. $\ln(3x)=\ln\,(x-1)$ f. $\ln(x-2)=2\ln 3+\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ g. $\ln(x^2+x-2)=\ln 4$ h. $\ln(2x-1)-\ln(x+1)=0$	i. $2\ln(x-3)-\ln(x+3)=0$ j. $\ln\lvert -x+1\rvert-\ln\lvert 8x-1\rvert=0$ k. $4\ln(x-3)^2-\ln(x+3)=0$ l. $\ln\sqrt[3]{2x-1}-\frac{1}{3}\ln(x+5)=0$

Exercice 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivant : $2x^2-3x+1=0$
2. Déduire l'ensemble de solutions des équations suivantes :
   - $2\ln^2(\mathrm{x})-3\ln\mathrm{x}+1=0$
   - $2\ln(x+1)-3=-\frac{1}{\ln(x+1)}$
   - $\ln(x^2)+\frac{1}{\ln\lvert x\rvert}=3$
   - $2\ln^3(\mathrm{x})=3\ln^2(\mathrm{x})-\ln(x)$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

• $3\ln^2 x - 5\ln x - 2 = 0$ • $\ln^2 x + 2\sqrt{2}\ln x + 2 = 0$	• $-2\ln^2 x + 3\ln x + 5 = 0$ • $\ln^2(x^2-1) - \ln(x^2-1) - 2 = 0$ • $\ln^4 x - \ln^2 x - 2 = 0$

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$	$\begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\ln x < 2\ln 3$ b. $1 - \ln x \geq 0$ c. $5 + 3\ln x \leq 0$ d. $3 + 5\ln(2x) > 0$	e. $\ln(x+2) - \ln(-3x+1) < 0$ f. $\ln(3x-2) \geq -3\ln 2$ g. $\ln(x-1) + \ln(x+1) \leq 2 - \ln 3$ h. $\ln(x-1) + \ln(x-4) > \ln(x+4)$	i. $\ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) < 1$ j. $\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \geq 0$ k. $\ln^2 x - \ln x - 2 \geq 0$

Exercice 9 :

Démontrer les égalités suivantes :

a. $(\forall x \in]0;+\infty[);\ \ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

b. $(\forall x \in]0;+\infty[);\ \ln(x^2+1) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

c. $(\forall x \in]2;+\infty[);\ \ln\left(x - 2\sqrt{x-1}\right) = 2\ln\left(\sqrt{x-1} - 1\right)$

d. $(\forall x \in]0;+\infty[);\ \ln^2(x+1) - \ln^2 x = \ln(x^2+x) \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 10 :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln x$	**11.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-x}$	**20.** $\lim\limits_{x\to0^+}(x^3-x)\ln x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+1}{x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$	**21.** $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{x+1}+\ln(1+x)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+2\ln(-x)$	**13.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}$	**22.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{3+2x^2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+5}{x^2}$	**14.** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$	**23.** $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to0^+}(2x+\ln x)$	**15.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\frac{\ln x}{x}$	**24.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x+1-\ln x)$
6. $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x^2+3x\ln x)$	**16.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$	**25.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$
7. $\lim\limits_{x\to0^+}(2x-x^3\ln x)$	**17.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2x+\ln x}{x}$	**26.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\ln(x^2-x+2)}{x-1}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)$	**18.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3+\ln(x+1)}{x+1}$	**27.** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3\ln x+2}{x+\ln x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-\ln x)$	**19.** $\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-1)\ln(x-1)$	**28.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{\ln x-\ln^3(x)}$
10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x^3}$		

Exercice 11 :

Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle I dans les cas suivants :

a. $f(x)=x^2-\ln x$; $I=]0;+\infty[$	**c.** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; $I=]0;+\infty[$
b. $f(x)=x\ln x$; $I=]0;+\infty[$	**d.** $f(x)=\frac{x-2}{\ln x}$; $I=]1;+\infty[$

Exercice 12 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de I dans les cas suivants :

a. $f(x)=\mathbf{3x^4}+\mathbf{2}\ln(-x)$; $I=]-\infty;0[$	**d.** $f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$; $I=]-\infty;-3[$
b. $f(x)=\ln(1+3x)$; $I=]\frac{-1}{3};+\infty[$	**e.** $f(x)=\ln\lvert\ln x\rvert$; $I=]0;1[$
c. $f(x)=\ln(1-x^2)$; $I=]-1;1[$	

Exercice 13 :

Etudier les variations de la fonction f sur son domaine de définition dans les cas suivants :

a. $f(x)=x(1+\ln x)$	**c.** $f(x)=2+\frac{x}{\ln x}$	**e.** $f(x)=\sqrt{1-\ln^2 x}$
b. $f(x)=\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)$	**d.** $f(x)=\ln^2 x-\ln x$	**f.** $f(x)=\frac{2\ln x}{1-\ln x}$

Exercice 14 :

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\log_2 8 - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2 9 - \log_2 3$ b. $\log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_2\left(\frac{1}{27}\right) + \log_3\left(\frac{4}{5}\right)$	c. $\log 100 - \log(10^{2007}) + \log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$ d. $\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{99}{100}\right)$

Exercice 15 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

• $\log(x+2) + \log x = 1$ • $\log_{\sqrt{2}}(x-1) - \log_{\sqrt{2}}(2x+1) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)$ • $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$ • $(\log x)^2 + \log x - 3 = 0$	• $\log_5(x+3) < \log_3(2x)$ • $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ • $\log(-x+3) < 1$ • $\log(x+2) - 3 \geq 0$

Exercice 16 :

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. Calculer les u_2, u_3, u_4 et u_5, donner les résultats sous forme 2^r avec $r \in \mathbb{Q}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$
   a. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme
   b. Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante
   c. Calculer $\lim\ v_n$ et déduire $\lim\ u_n$

Exercice 17 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $x \neq 0$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. a. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$, puis déduire que la fonction f est continue à droite en 0
   b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat géométriquement
3. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f
4. Déterminer la branche infinie de la courbe (C_f)
5. Construire la courbe (C_f) (on prend : $e \approx 2{,}7$ et $\frac{1}{e} \approx 0{,}4$)

Exercice 18 :

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$
  1. Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, et montrer que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$
  2. a. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$
     b. Dresser le tableau de variations de la fonction f
     c. Déduire que pour tout x de $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$

II. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $2x - 2 + \frac{\ln x}{x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

  1. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
  2. Déterminer les branches infinies de la courbe (C_f)
  3. Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[\,)$; $f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x)$
  4. Dresser le tableau de variations de la fonction f
  5. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$
  6. Déterminer le point d'inflexion de la courbe (C_f)
  7. Construire la courbe (C_f)

$$\left(On\ prend\ \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm\ , e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}5\ et\ f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \approx 7{,}3\right)$$

Exercice 19 :

I. On considère la fonction g définie par : $g(x) = x - \ln x$
  1. Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g
  2. Calculer les limites de g aux bornes de D_g
  3. Calculer $g'(x)$ pour tout x de D_g, puis dresser le tableau de variations de g
  4. Déduire que : $x > \ln x$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$

II. Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+\ln x}{x-\ln x} \\ f(0) = -1 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

  1. Montrer que le domaine de définition est $D = [0; +\infty[$
  2. a. Montrer que f est continue à droite en 0
     b. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
  3. a. Montrer que f est dérivable à droite en 0
     b. Montrer que $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$ pour tout x de $D - \{0\}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f
  4. a. Déterminer l'intersection de (C) et la droite (Δ) d'équation $y = 1$
     b. Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

c. Construire la courbe (C)

Exercice 20 :

I) On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$

1) a) Vérifier que : $(\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[)\ 3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$

b) Montrer que : $(\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[)\ g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

2) a) Montrer que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0\,;\,+\infty[$

b) Montrer que g est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$

c) En déduire que $(\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[)$: $g(x) > 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$; soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ $(\textit{on prend}: \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm)$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[)\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) (au voisinage de $+\infty$)

3) Montrer que $y = 3x - 3$ est une équation de la tangente à la courbe (C) au point $I(1;0)$

4) Tracer (Δ) et (C)

Exercice 21 :

<u>1ère partie</u>:

Soit la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2\ln x$$

1. Montrer que :(x^2-1) et $2x^2\ln x$ ont le même signe dans l'intervalle $]0;1[$.
   Puis déduire que $(\forall x \in\,]0;1]);\ g(x) \leq 0$.
2. Montrer que :(x^2-1) et $2x^2\ln x$ ont le même signe dans l'intervalle $]1;+\infty[$.
   Puis déduire que $(\forall x \in [1;+\infty[);\ g(x) \geq 0$.

<u>2ème partie</u>:

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2-1)\ln x$$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $3cm^2$)

1. a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter le résultat graphiquement.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ pois montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$.

2. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ puis vérifier que $f'(1) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement.
   b. Déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur
   l'intervalle $[1;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f(x) \geq 0$.
3. Construire la courbe (C) .

Exercice 22 :

Partie I :

Soit g la fonction définie sur $]\mathbf{0};+\infty[$ par : $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 1 + \ln x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \boldsymbol{g(x)}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \boldsymbol{g(x)}$.
2. Montrer que $(\forall \boldsymbol{x > 0}); \boldsymbol{g'(x) = \frac{1+2x^2}{x}}$, puis dresser le tableau de variations de g
3. Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $]\mathbf{0};+\infty[$ par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x}}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère othonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.
2. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$
   b. Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique $(\Delta): y = x$ au voisinage de $+\infty$
   c. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ).
3. a. Montrer que : $(\forall \boldsymbol{x > 0}); \boldsymbol{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$ puis calculer $f(1)$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. a. Montrer que : $(\forall \boldsymbol{x > 0}); \boldsymbol{f''(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^3}}$
   b. Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées
5. Tracer (Δ) et (C_f). (On prendra : $e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}5$ et $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \approx 4$)
6. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Calculer $(f^{-1})'(4)$.
c. Tracer la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère avec une couleur différente.

7. a. Montrer que la fonction $u: x \longmapsto \frac{1}{2}(ln\, x)^2$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{ln\, x}{2}$ sur $]0;+\infty[$.
b. En déduire la primitive F de la fonction f qui vérifie : $F(1) = 2$

<u>Partie III :</u>

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\boldsymbol{u_0 = e}$ et $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}); \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N});\ \boldsymbol{1 \leq u_n \leq e.}$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. *(On pourra utiliser le résultat de la question II-3-c).*
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Déterminer $\boldsymbol{lim\ u_n}$.

Exercice 23 :

I. Soit g la fonction définie sur $I =]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x + 1 - ln\, x$

1. a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
b. Montrer que : $(\forall x \in I); g'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x}$
2. a. Dresser le tableau de variations de g sur I
b. Déduire que : $(\forall x \in I);\ g(x) > 0$

II. Soit f la fonction définie sur $I =]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{ln\, x}{x} - ln\, x$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère othonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.
b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)}$
c. Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$
2. a. Dresser le tableau du signes de $(1 - x)\, ln\, x$
b. Déduire que : $(\forall x \in I);\ f(x) \leq x$, interpréter le résultat géométriquement.
3. a. Montrer que : $(\forall \boldsymbol{x} > \boldsymbol{I}); \boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{g(x)}}{\boldsymbol{x}^2}$, puis déduire que f est strictement croissante sur I.
b. Montrer que la droite (Δ) est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$
d. Construire la droite (Δ) et la courbe (C_f) .

4. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR.
   b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$.
   c. Construire la courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le même repère avec une couleur différente.
5. On considère (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{20}{19} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad ; \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

   a. Montrer que $u_n > 1$ pour tout n de IN .
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

Fonctions exponentielles

I. Fonction exponentielle népérienne :

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque définie de $\ln(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$.

1. Définition :

La fonction réciproque de la fonction ln est dite : la fonction exponentielle népérienne notée exp ou $x \longmapsto e^x$. Donc : $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

2. Propriétés :

- $\begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$
- $\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

3. Conséquences :

- La fonction exp est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x on a : $(e^x)' = e^x > 0$
- Si u est définie sur un intervalle I, alors la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est définie sur I
- Si u est continue sur un intervalle I, alors la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est continue sur I
- Si u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

4. Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $(e^a)^n = e^{na}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

5. Limites usuelles :

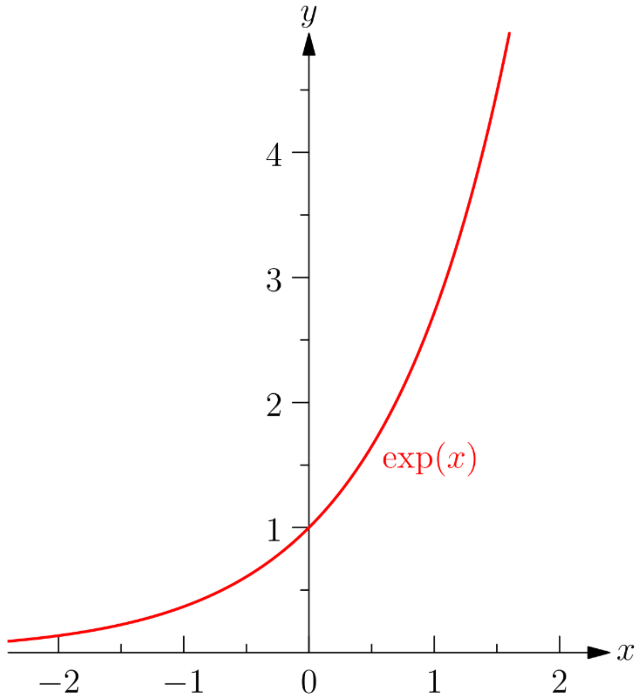
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ \; si\ n\ est\ pair \\ 0^- \; si\ n\ est\ impair \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

6. Tableau de variations de la fonction exp :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

7. La courbe représentative de la fonction exp :



II. Fonctions exponentielles de base a :

1. Définition :

Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

La fonction logarithme de base a définie par : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$: $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, est continue et strictement monotone sur $]0\,;\,+\infty[$, donc elle admet une fonction réciproque appelée fonction exponentielle de base a définie sur par $\mathbb{R}$ et notée exp_a ou $x \longmapsto a^x$

$$\begin{cases} \log_a(x) = y \\ x \in]0\,;\,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Conséquences et propriétés :

$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ a^x = e^{x\ln a}$ $log_a(a^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ • $a^x \times a^y = a^{x+y}$ • $(a^x)^r = a^{rx}$ • $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ • $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[\,;\ a^{log_a x} = x$	
$a^x = a^y \ \Leftrightarrow\ x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \left]0\,;\,+\infty\right[\,;$ $a^x = y \ \Leftrightarrow x = log_a(y)$	

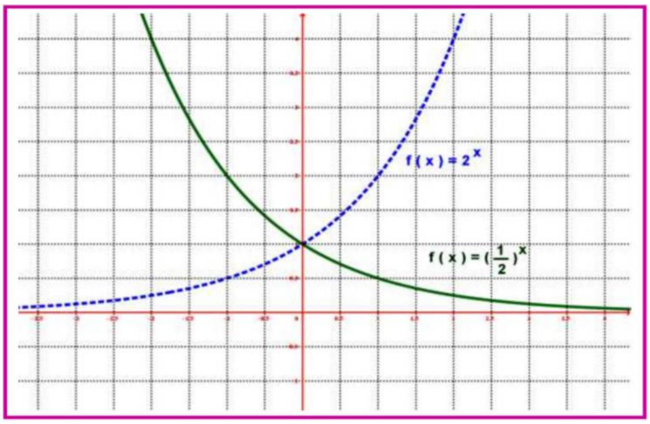
Soit $a \in]0;1[\, \cup\,]1;+\infty[$, et la fonction f définie par : $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$.

- La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$;
- $\boldsymbol{f'(x)} = (a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \ln(a)\, e^{x\ln a} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{a^x}$;
- D'où le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln a$:
  Si $0 < a < 1$: alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où :
  $$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$
  Si $a > 1$: alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'où :
  $$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$$
- Si $a > 1$ alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
- Si $0 < a < 1$ alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

3. La courbe représentative de la fonction $x \to a^x$:

Soit $a \in]0;1[\, \cup\,]1;+\infty[$.

- Cas $0 < a < 1$, on prend par exemple $a = \frac{1}{2}$, donc $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- Cas $a > 1$, on prend par exemple $a = 2$, donc $f(x) = 2^x$



Série 6 : Fonctions exponentielles

Exercice1 :

Simplifier les expressions suivantes :

$A = e^{-x} \times e^{2x}$
$B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$
$C = \sqrt{e^{2x}} \times e^{-x}$
$D = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$

$E = \frac{e^{-x}(1+e^x)}{e^x(e^{-2x}+e^{-x})}$
$F = \frac{e^{-2x}+2e^{-x}}{(e^{2x})^{-1}}$
$G = (e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} + e^{-x})$
$H = e^{2x}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2)$

Exercice 2 :

Soit x un nombre réel. Montrer que :

1. $e^x - e^{-x} = e^x(1 - e^{-2x}) = e^{-x}(e^{2x} - 1)$
2. $\left(\frac{e^{x+1}}{e^{1-x}}\right)^2 = e^{4x} = \frac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}}$
3. $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^x+1}$
4. $\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x} = 1 + e^{-x}$
5. $\frac{(e^x+1)^2-(e^x-1)^2}{4e^x} = 1$
6. $\frac{e^x}{e^x-x} = \frac{1}{1-xe^{-x}}$
7. $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Exercice 3 :

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

$e^{2x} = 1$
$e^{3x} = e^{x+5}$
$e^{x^2} = e^{2x-1}$
$e^x = 2$

$e^{x^2+2x-3} = 1$
$e^{x^2+3} - e = 0$
$e^{2x+1} = \frac{1}{e^x}$
$e^{x+1} = 4$

$\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$
$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}$
$\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$

$\frac{e^{2x+3}}{e^{x-2}} = \frac{1}{e}$
$e^{\frac{2x+3}{x-2}} = \frac{1}{e}$

$2e^x - 3e^{1-x} = 2e - 3$
$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$

Exercice 4 :

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

$e^{2x-3} > e^x$
$e^{1-x} \leq e^{3x}$
$e^{-2x} < e^{1+x^2}$

$e^{1-x} - e^{2+x} \geq 0$
$e^x - 1 \geq 0$
$e^{2x} \geq \frac{1}{2}$

$e^{1-x} - 1 < 0$

$e^x - \frac{1}{e^{3x}} < 0$

$e^x \leq e^{\frac{1}{x}}$

$e^{2x} - \frac{3}{2} > 0$

$(2e^x - 1)(e^x - 2) < 0$

$\frac{2e^x - 1}{e^x - 2} \leq 0$

$\frac{e^x + 1}{e^{-x} - e} \leq 0$

$1 - \frac{1}{e^{-x} + 1} < \frac{2e^x}{e^x + 1}$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

$(S_1)\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$ $\quad (S_2)\begin{cases} e^{4x} \times e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$ $\quad (S_3)\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = -2 \end{cases}$

Exercice 6 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x+1}$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x+1}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} (x-1)\,e^x$

$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - x)\,e^x$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x+1} - e}{2x}$

$\lim_{x \to -\infty} e^x + e^{-x}$

$\lim_{x \to +\infty} e^x + e^{-x}$

$\lim_{x \to +\infty} 3e^{2x} + e^x - 1$

$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 2$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$

$\lim_{x \to -\infty} (e^x - 1)^3$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{e^x + \frac{1}{e^x}}$

$\lim_{x \to +\infty} 3x^2 - e^x$

$\lim_{x \to +\infty} 2x - e^x$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{e^x}$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x)\,e^{2x}$

Exercice 7 :

1. Posez $t = \frac{1}{x}$ puis calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ $\quad \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

2. Posez $t = 2x$ puis calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{2x}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

3. Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty}(2x^2-x+1)e^x$ | $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}$

Exercice 8 :

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivantes :

$f(x)=2x-e^{-x}$	$f(x)=\frac{x+1}{e^x}$	$f(x)=(2x-1)(e^{-x}+1)$
$f(x)=e^{3x}+e^x$	$f(x)=(e^x-e^{-x})^2$	$f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$
$f(x)=x^2e^{-x}$	$f(x)=\frac{e^x-1}{x}$	$f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$
$f(x)=(x+2)e^x$		

Exercice 9 :

Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I

1. $f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$; $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$; $I=]0;+\infty[$
3. $f(x)=e^x(e^x-1)^3$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 10 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   $2^x=3$; $4^x=8^x$; $16^x-5\times4^x+6=0$; $9^x+3^{x+1}=4$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   $9^x>3^{-x+1}$; $5^x>10$; $10^x>50$

Exercice 11 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}ln(e^{2x}+e^x+2)$; $\lim_{x\to-\infty}ln\left(\frac{2e^x+4}{e^x+1}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}xln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}x-ln(e^x+1)$; $\lim_{x\to0}\frac{e^{xlnx}-1}{x}$

Exercice 12 :

I. Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=x+2-e^x$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty}g(x)$,puis étudier les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$

2. a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $[0;+\infty[$

b. Vérifier que $1,14<\alpha<1,15$

c. Etudier le signe de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$

II. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. a. Montrer que pour tout x de $[0;+\infty[$: $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

   b. Déduire la limite de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$

2. a. Montrer que pour tout x de $[0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

   b. Etudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations

   c. Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ puis déduire un encadrement de $f(\alpha)$

3. Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point $\mathcal{O}$

4. a. Montrer que pour tout x de $[0;+\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ tel que : $u(x) = e^x - xe^x - 1$

   b. Etudier les variations de la fonction u sur $[0;+\infty[$, puis déduire le signe de $u(x)$ sur $[0;+\infty[$

   c. Déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (T)

5. Construire la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$

<u>Exercice 13 :</u>

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, puis interpréter les résultats géométriquement

2. a. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

3. a. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes obliques (D) et (D') d'équations respectivement sont $y = x$ et $y = x + 1$

   b. Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les deux droites (D) et (D')

4. Prouver que le point $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

5. a. Montrer que $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que :

$ln2 < \alpha < 1$ et $-1{,}4 < \beta < -1{,}3$

b. Construire les droites (D) et (D') et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le même repère

<u>Exercice 14 :</u>

I. Soit la fonction g définie sur ℝ par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

Le tableau ci-contre représente les variations de la fonction g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Vérifier que $g(0) = 0$

2. Etudier le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$

II. Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ (unité 1cm)

1. a. Vérifier que $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ pour tout x de ℝ, puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$

c. Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de ℝ, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2. a. Vérifier que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de ℝ

b. Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite (D) sur les deux les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$, et au-dessous de (D) sur $[0; 1]$

3. a. Montrer que pour tout x de ℝ :$f'(x) = g(x)e^{-x}$

b. Déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty]$

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur ℝ

4. a. Vérifier que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de ℝ

b. Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion des abscisses 1 et 4

5. Construire la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le même repère

 (on prend f(4) ≈ 4,2)

Exercice 15 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2. a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$

 b. Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$, puis montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2 + ln4]$ et au-dessous de (Δ) sur $[2 + ln4; +\infty[$

3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

4. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$

 b. Dresser le tableau de variations de la fonction f

5. Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$ $f''(x)$, puis montrer que $A(2\,;2)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$

6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seul solution α tel que $2 + ln3 < \alpha < 2 + ln4$

7. Construire (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

 (on prend ln2 ≈ 0,7 et ln3 ≈ 1,1)

8. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

 b. Construire $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquez que (Δ) est perpendiculaire sur la première bissectrice du repère)

 c. Calculer $(f^{-1})'(2 - ln3)$. « Remarquez que $f^{-1}(2 - ln3) = 2 + ln3$ »

Exercice 16 :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = e^x - ex - 1}$

Soit $(\mathcal{C})$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1. a. *Calculer* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

   b. *Calculer et étudier le signe* $f'(x)$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$

   c. *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}$

2. a. *Montrer que la droite* $(\mathfrak{D})$ *d'équation* $y = -ex - 1$ *est une asymptote oblique à la courbe* $(\mathcal{C})$ *au voisinage de* $-\infty$

   b. *Ecrire l'équation de la tangente* (T) *à la courbe* $(\mathcal{C})$ *au point d'abscisse 0*

   c. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet sur l'intervalle* $]1{,}75; 1{,}76[$ *une seule solution* α

   d. *Construire la droite* (T) *et la courbe* $(\mathcal{C})$ *dans le même repère sur l'intervalle* $]-\infty; 2]$

3. a. *Calculer en fonction de α, l'aire A(α) de la partie compris entre la courbe* $(\mathcal{C})$, *l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x= α.*

   b. *Prouver que : A(α)=* $\left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)ua$

CALCUL D'INTEGRALES

I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a;b]$:

1. Définition :

f étant une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$, étant deux réels de cet intervalle I, l'intégrale de a à b de la fonction f est le nombre $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

2. Notation :

F(b) – F(a) = $\int_a^b f(t)dt$, qui se lit: "Intégrale de f entre a et b"

Dans l'écriture: $\int_a^b f(t)dt$, la lettre t est appelée: "variable muette".
En effet, on peut aussi écrire: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$, car la lettre "variable muette" indique le nom de la "variable d'intégration" (toute autre lettre dans l'expression de la fonction f à intégrer est alors considérée comme constante. L'intérêt de ceci apparaît lorsqu'il y a plusieurs variables.

$\int_a^b f(t)dt$ s'écrit aussi sous la forme condensée utilisant F:

$\int_a^b f(t)dt=[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple :

La fonction $f: x \longmapsto x^2$ est continue sur IR . Elle est donc admet une primitives sur IR. Par exemple: $F : \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur IR. On a donc :

$$\int_1^2 x^2 dt = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

3. Conséquences de la définition:

- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
- Si f est continue sur I, si $a \in I$ et $b \in I$, on a: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$

On déduit de cette propriété une importante synthèse qui relie une fonction dérivable, sa fonction dérivée et la notion d'intégrale.

II. Propriétés :

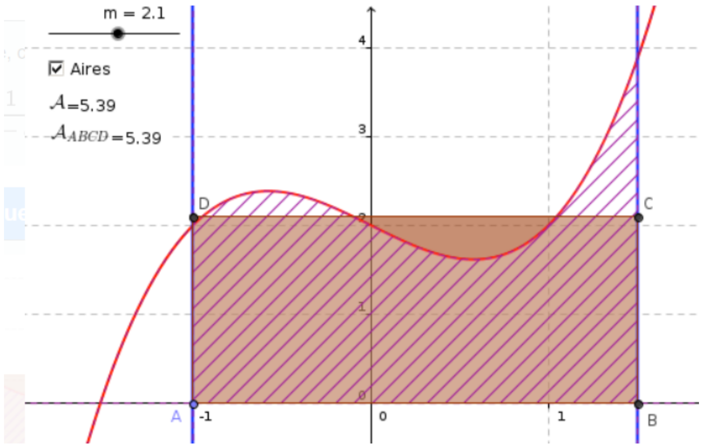
1. **Relation de Chasles**: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ avec $a \le c \le b$
2. **Linéarité :** $\begin{cases} \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad avec\ \alpha \in IR \end{cases}$

III. La valeur moyenne :

1. Propriétés :

Soit f une fonction définie, continue sur un intervalle $[a; b]$.
Alors le nombre $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$

2. Illustration graphique :



Dans le cas où f **est positive sur [a ;b]**, la valeur moyenne m de la fonction f est la hauteur du rectangle ABCD de base $(b - a)$ ayant la même aire que l'aire sous la courbe représentative de f entre a et b.

IV. Intégration par parties :

1. Propriétés :

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$, alors :

$$\int_a^b (u'v)(x)dx = [(uv)(x))]_a^b - \int_a^b (uv')(x)dx$$

2. Démonstration :

Par opération de fonctions dérivables, $\boldsymbol{u \times v}$ est dérivable sur $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$ et $(\boldsymbol{u \times v})' = \boldsymbol{u'v + uv'}$. Donc, pour tout réel $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$, on a $(\boldsymbol{u \times v})'(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u'v + uv'})(\boldsymbol{x})$**.**
$\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont des fonctions dérivables sur $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$ et sont donc continues.
Par opérations sur les fonctions continues, $(\boldsymbol{uv})'$, $\boldsymbol{u'v}$, $\boldsymbol{uv'}$ *et* $\boldsymbol{u'v + uv'}$ sont continues sur $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$. Elles admettent donc des primitives.

On obtient : $\int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b [(u'v)(x) + (uv')(x)]dx$

Soit : $[(uv)(x)]_a^b = \int_a^b (u'v)(x)dx + \int_a^b (uv')(x)dx$, par linéarité de l'intégrale.

D'après l'égalité précédente, on déduit que :

$\int_a^b (u'v)(x)dx = [(uv)(x)]_a^b + \int_a^b (uv')(x)dx$

3. Remarque importante :

Il est parfois utile de remarquer que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1 \times f(x)dx$ pour effectuer une intégration par parties en utilisant $u'(x) = 1$.

V. Applications sur les intégrales :

Supposons que le plan est muni à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

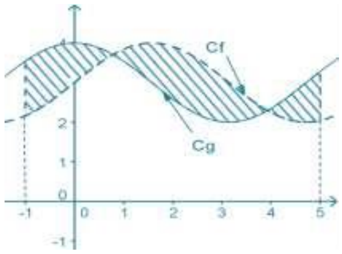
1. Notion d'une aire :

L'unité d'aire noté "$u.a$" est l'aire du rectangle OIKJ, et par conséquent

$$\boldsymbol{ua} = \|\vec{\boldsymbol{\imath}}\| \times \|\vec{\boldsymbol{\jmath}}\|$$

2. Calcul des aires des surfaces planes :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$



- L'aire de la surface délimité par $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$ et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \times ua$
- L'aire de la surface délimité par $\left(C_f\right)$, la droite (D) d'équation $y = ax + b$ et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x) - y|dx \times ua$
- L'aire de la surface délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)|dx \times ua$

Série 7 : Calcul d'intégrale

Exercice 1 :
Calculer les intégrales suivantes :
1. $\int_0^1 (2x-1)\,dx$
2. $\int_0^1 (3x-4)^2\,dx$
3. $\int_1^{\sqrt{2}} \left(x^2-\sqrt{2}x\right)dx$
4. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx$
5. $\int_1^2 \frac{3x^2+x-1}{x^4}\,dx$
6. $\int_0^1 \frac{(x-1)(2x+1)}{3\sqrt{x}}\,dx$
7. $\int_0^1 \frac{3}{2x+1}\,dx$
8. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$
9. $\int_0^1 (e^{2x}-e^x)\,dx$
10. $\int_0^{\ln 2} e^{\frac{x}{2}}\,dx$
11. $\int_0^1 e^{-x}(e^{3x}+1)\,dx$

Exercice 2 :
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on pose :
$\int_6^3 f(x)\,dx = -2$ et $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ et $\int_6^{10} f(x)\,dx = 7$
Calculer $\int_1^{10} f(x)\,dx$

Exercice 3 :
Calculer les intégrales suivantes :
$I = \int_1^3 |x-2|\,dx$
$J = \int_{-1}^3 |3x^2-6x|\,dx$
$K = \int_{-1}^1 |e^x-1|\,dx$

Exercice 4 :
On pose : $I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2+x^3}\,dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^5}{2+x^3}\,dx$
1. Déterminer la valeur de l'intégrale $I+J$, puis calculer l'intégrale I.
2. Déduire la valeur de J.

Exercice 5 :
Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur le segment I dans les cas suivants :
a. $f(x) = e^{-x}$; $I = [-\ln 2\,;0]$
b. $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $I = [-1; e-2]$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

$J = \int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4} dx$

$K = \int_1^0 \frac{x^2-1}{(x^3-3x+5)^3} dx$

Exercice 7 :

Soit x un nombre réel

1. Vérifier que : $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$
2. Déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

Exercice 8 :

Soit $x \in]0; 1[$

1. Déterminer les deux réels a et b tel que : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$
2. Déduire la valeur de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$

Exercice 9 :

1. a. Déterminer les deux réels a et b tel que :
   $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}); \frac{2x-1}{x+2} = a + \frac{b}{x+2}$
   b. Déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{2x-1}{x+2} dx$
2. De la même manière, calculer les intégrales suivantes :
   $I = \int_0^1 \frac{x-3}{2x+1} dx$
   $J = \int_0^1 \frac{-x+3}{x-2} dx$
   $K = \int_{-1}^1 \frac{3x+2}{x-1} dx$

Exercice 10 :

En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^e (2x-1) lnx\, dx$

$K = \int_1^2 ln(2+x)\, dx$

$L = \int_{-ln2}^0 (x+1)e^{-x}\, dx$

$M = \int_0^{-1} xe^{2x+1}\, dx$

$N = \int_0^{ln2} (x^2+1)e^{2x}\, dx$

Calcul des probabilités

I. Dénombrement

1. Vocabulaire :

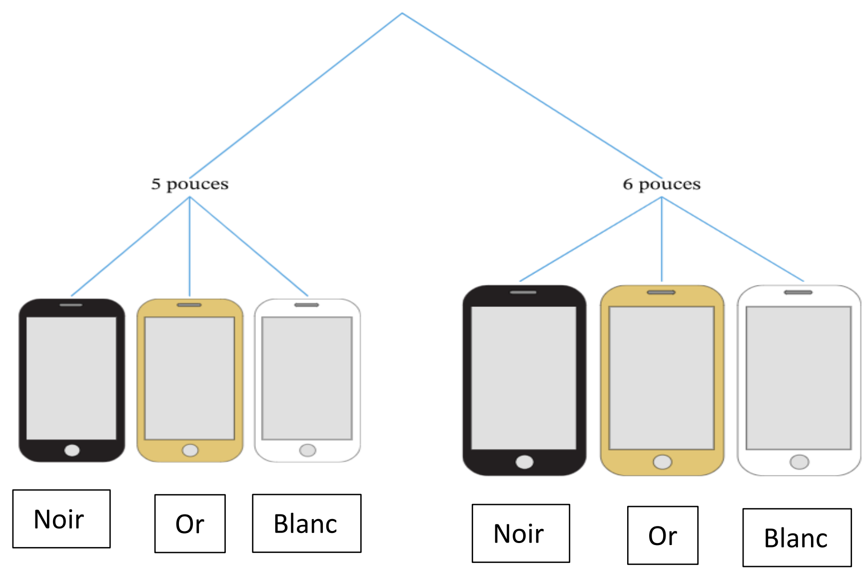
- Un ensemble est dit fini, s'il contient un nombre fini d'éléments.
- Dénombrer un ensemble fini, c'est trouver le nombre d'éléments qu'il contient.
- Le nombre d'élément dans un ensemble fini E est appelé cardinal de E et est noté card(E).
- L'ensemble vide est l'ensemble qui ne contient aucun élément, et on écrit $card\ \emptyset = 0$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle factorielle n, notée $n!$, l'entier défini par :
  $0! = 1$, et pour tout $n > 0, n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

2. Principe fondamental de dénombrement :

Dans cette fiche explicative, nous allons apprendre comment déterminer le nombre de toutes les issues possibles dans un univers en utilisant le principe fondamental du dénombrement.

Commençons par apprendre à utiliser un arbre de dénombrement pour déterminer le nombre d'issues possibles dans un univers contenant plusieurs événements.

Imaginons que vous souhaitiez acheter un nouveau téléphone ; vous avez deux options pour la taille : le modèle de 5 pouces et le modèle de 6 pouces ; vous avez, de plus, trois options pour la couleur : noir, or ou blanc. Vous souhaitez savoir combien de modèles il existe au total. L'une des façons les plus simples de représenter une situation comme celle-ci consiste à utiliser un arbre de dénombrement. L'arbre de dénombrement ci-dessous illustre les deux options pour la taille du téléphone puis, en dessous de chacune d'elles, les trois options pour la couleur.



Finalement, il y a 6 issues différentes au total au bas d'arbre, ce qui signifie qu'il existe 6 combinaisons différentes de ces deux événements qui sont le choix de la taille et de la couleur du téléphone.

Théorème : Principe fondamental du dénombrement pour deux événements

Pour deux événements indépendants A et B tels que le nombre d'issues possibles de l'événement A est x et le nombre d'issues possibles de l'événement B est y, le nombre total d'issues distinctes possibles de ces deux événements réunis est le produit $x \times y$.
Deux événements sont dits indépendants quand l'issue d'un événement ne change pas le nombre d'issues possibles de l'autre événement.

Théorème : Principe fondamental du dénombrement pour plus de deux événements

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements indépendants deux à deux tels que le nombre d'issues possibles de l'événement A_i est x_i pour tout $i = 1; 2, \dots, n$. Le nombre total d'issues possibles distinctes de ces événements réunis est alors égal au produit $x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n$.

Ici, un ensemble d'événements est dit indépendant lorsque tous les événements sont deux à deux indépendants.

Théorème : Dénombrement avec remise

Le nombre de façons différentes de sélectionner un objet avec remise n fois dans un ensemble de x objets différents est x^n.

Dans l'exemple suivant, nous allons résoudre un problème de dénombrement avec remise.
De combien de façons peut-on former un code à 5 chiffres en utilisant les chiffres de 1 à 9 ?
Notez que le code peut avoir des chiffres identiques.
Dans cet exemple, nous devons trouver le nombre de codes différents à 5 chiffres dans un ensemble de 9 chiffres distincts, où la répétition des chiffres est autorisée. On peut penser à ce problème comme choisir 5 fois un chiffre dans un ensemble de 9 chiffres différents, où chaque chiffre sélectionné est remis avant la sélection suivante.
On rappelle que le nombre de façons différentes de sélectionner un objet avec remise n fois dans un ensemble de x objets est x^n. On peut substituer $x = 9$ et $n = 5$ pour obtenir
$9^5 = 59\,049$
Par conséquent, il y a 59 049 façons différentes de former un code à 5 chiffres à partir des chiffres 1 à 9, sachant que des chiffres peuvent être identiques.

Dans l'exemple suivant, nous allons déterminer le nombre d'issues différentes dans un univers composé de deux événements distincts avec remise.
Utilisez le principe fondamental du dénombrement pour déterminer le nombre total d'issues possibles pour le choix d'un mot de passe qui commence par trois lettres suivies de trois chiffres de 1 à 7 (avec la possibilité de répéter les caractères). Supposez que le mot de passe ne peut contenir que des lettres minuscules.

Dans cet exemple, nous devons déterminer le nombre de mots de passe différents commençant par trois lettres minuscules suivies de trois chiffres de 1 à 7. On peut considérer la sélection des trois premières lettres et des trois derniers chiffres comme deux événements distincts. On recherche alors le nombre d'issues possibles dans un univers contenant deux événements. On rappelle que le principe fondamental du dénombrement stipule que le nombre d'issues possibles de deux événements indépendants est égal au produit des nombres d'issues de chaque événement.
Deux événements sont indépendants lorsque l'issue d'un événement ne change pas le nombre d'issues possibles de l'autre événement. Nous pouvons voir qu'aucun choix spécifique des trois premières lettres n'influence la sélection des trois derniers chiffres du mot de passe. Par conséquent, les deux événements sont indépendants, ce qui signifie que nous pouvons déterminer le nombre total d'issues possibles en utilisant le principe fondamental du dénombrement.
Déterminons donc le nombre d'issues possibles de chacun des événements, en commençant par la sélection des trois premières lettres. Pour choisir les trois premières lettres, on sélectionne trois fois une lettre dans un ensemble de 26 lettres. C'est un problème de dénombrement avec remise, c'est-à-dire que l'objet sélectionné est remis à chaque fois avant la sélection de l'objet suivant. On rappelle que le nombre de façons différentes de sélectionner un objet avec remise n fois dans un ensemble de x objets différents est x^n.
Substituer $x = 26$ et $n = 3$ nous donne $26^3 = 17\,576$.
Il y a donc 17 576 façons différentes de choisir les trois premières lettres.
Déterminons ensuite le nombre de façons de sélectionner les trois derniers chiffres de 1 à 7. On peut substituer $x = 7$ et $n = 3$ dans la formule d'un problème de dénombrement avec remise pour obtenir $7^3 = 343$.
Donc, il y a 343 façons différentes de sélectionner les trois derniers chiffres.
On peut enfin appliquer le principe fondamental du dénombrement pour calculer le nombre total de mots de passe : $17576 \times 343 = 6\,028\,568$.
Par conséquent, il existe 6 028 568 mots de passe différents commençant par trois lettres minuscules suivies de trois chiffres de 1 à 7.

II. Arrangement d'un ensemble fini

Soit E un ensemble à n éléments, et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.
On appelle arrangement d'ordre k, toute liste ordonnée de k éléments, il est dit sans répétition si les éléments figurant dans la liste sont deux à deux distincts. Le cas où les éléments peuvent être non distincts, il est dit avec répétition.

- Déterminer un arrangement d'ordre k avec répétition, c'est remplir les cases $(\boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{k})$ par k éléments non nécessairement distincts. Donc pour chaque case on dispose de n choix.
  Alors, le nombre d'arrangement d'ordre k avec répétition est n^k.
- Déterminer un arrangement d'ordre k sans répétition, c'est remplir les cases $(\boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{k})$ par k éléments distincts. Donc pour la case $\boxed{1}$ on a n choix, et pour chacune de ces choix il reste $n-1$ choix pour la case $\boxed{2}$, puis $n-2$ choix pour la case $\boxed{3}$, …, et enfin $n-k+1$ choix pour la case $\boxed{k}$.
  Alors, le nombre d'arrangement d'ordre k sans répétition, noté A_n^k, est donné par :
  $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$, et donc $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

III. Combinaison

Soit E un ensemble à n éléments, et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.
On appelle combinaison d'ordre k, toute partie de E à k éléments.

Le nombre de combinaison d'ordre k, noté C_n^k , est donné par $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

En effet, toute partie à k éléments donne exactement $k!$ permutation de cette partie

Formules usuelles :

$C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (Formule de Pascal)

IV. Expérience aléatoire, univers, événements

1. Définition

On appelle une expérience aléatoire, toute expérience dont on connait tous les résultats possibles et si elle est répétée dans les mêmes conditions elle peut donner lieu à des résultats différents.

2. Vocabulaire

Etant donné une expérience aléatoire.

- L'ensemble de tous les résultats possible de cette expérience s'appelle univers et se note Ω ;
- Les éléments de Ω s'appelle aussi possibilités, éventualités ou issues ;
- Toute partie de Ω s'appelle un événement ;
- Tout événement réduit à une seule possibilité s'appelle un événement élémentaire ;
- Si A et B sont deux événements alors :
  - $\rightarrow$ $A \cap B$ est un événement appelé intersection de A et B et est réalisé si et seulement si les événements A et B sont réalisés simultanément ;
  - $\rightarrow$ $A \cup B$ est un événement appelé réunion de A et B et est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B est réalisé ;

→ $\bar{A}$ est un événement appelé événement contraire de A et est réalisé, si et seulement , A n'est pas réalisé.

- L'événement Ω est toujours réalisé, c'est pourquoi on l'appelle l'événement certain ;
- L'événement $\emptyset$ ne se réalise jamais et s'appelle l'événement impossible ;
- Deux événement A et B sont dit incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

3. Types de tirages

La plupart des expériences aléatoires peuvent être interpréter comme des tirage de p boules d'une urne qui en contient n.

Il y a deux critères pour distinguer ces tirages :

→ L'ordre : Si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un tirage avec ordre, sinon c'est un tirage sans ordre.

→ La répétition : Si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule, on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise.

Ω étant un ensemble à n éléments, on tire p éléments parmi n éléments, donc :

Type de tirage	Ordre	Répétition	Nombre de tirages possible
Simultanément	Pas important	Impossible	C_n^p
Successif sans remise	Important	Impossible	A_n^p
Successif avec remise	Important	Possible	n^p

V. Probabilité d'un événement

1. Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini.

- Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est attribuer à chaque possibilité ω_i un réel
  $p_i \in [0,1]$ de sorte que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. On dit alors que la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est p_i et on écrit $P(\{\omega_i\}) = p_i$
- Etant donné un événement $A \subset \Omega$ on définit la probabilité de A et on note $P(A)$ comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.

Exemple 1 :

Lors de lancement d'un dé non truqué, on a $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Puisque toutes les faces ont la même chance d'être observées alors on peut définir une probabilité sur Ω comme suit : $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

On a $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = \frac{6}{6} = 1$
Soit A l'événement : « Obtenir un nombre pair »
Alors $A = \{2,4,6\}$
Donc $P(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Propriétés :

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω.
Soient A et B deux événements de Ω.

- $\rightarrow P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ et $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\rightarrow$ Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $\rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$
- $\rightarrow$ Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \cup \bar{A}) = P(B) - P(A)$
- $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. Exemple corrigé :

Dans une population on remarque que, durant un mois, :

- 40% des individus sont allés au cinéma ;
- 25% sont allés au théâtre ;
- 12,5% sont allés au cinéma et au théâtre.

Calculons les probabilités que durant un mois, un individu :
A: "*aille au cinéma ou au théâtre*"
B: "*n'aille pas au cinéma*"
D: "*n'aille ni au cinéma ni au théâtre*"
E: "*aille au cinéma mais pas au théâtre*"

Soit C l'événement aller au cinéma et T l'événement aller au théâtre.
D'après l'énoncé, on a $P(C) = 0,4$ et $P(T) = 0,25$ et $P(C \cap T) = 0,125$

- L'événement A est l'événement $C \cup T$
  Or $P(A) = P(C \cup T)$
  $= P(C) + P(T) - P(C \cap T)$
  $= 0,4 + 0,25 - 0,125$
  $= 0,525$
- L'événement B est l'événement $\bar{C}$
  Or $P(\bar{C}) = 1 - P(C)$
  $= 1 - 0,4$
  $= 0,6$
- L'événement C est l'événement $\bar{C} \cap \bar{T}$
  Or $P(C) = P(\bar{C} \cap \bar{T})$
  $= P(\overline{C \cup T})$
  $= 1 - P(C \cup T)$

$$= 1 - 0{,}525$$
$$= 0{,}475$$

- L'événement D est l'événement $C \cap \bar{T}$
  Or $P(D) = P(C \cap \bar{T})$
  $= P(C) - P(C \cap T)$
  $= 0{,}4 - 0{,}125$
  $= 0{,}275$

VI. Hypothèse d'équiprobabilité

1. Définition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω, on dit qu'il y a équiprobabilité, lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales, on dit aussi que P est la probabilité uniforme sur Ω.

2. Propriété :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω dans le cas d'équiprobabilité, on a la formule suivante :

Pour tout événement A de l'univers Ω : $P(A) = \frac{card\ A}{Card\ \Omega}$

3. Remarques :

- Si l'énoncé du problème contient des phrases comme :
  → Dé non pipé ;
  → Pièce non truquée ;
  → Manière équiprobable ;
  → Tirage au hasard ;
  → Boules indiscernable au toucher ;
  → …

  Cela signifie qu'il s'agit bien d'une équiprobabilité.
- Pour calculer la probabilité d'un événement A, on peut envisager les stratégies suivantes :
  → Exprimer A en fonction d'événement de probabilités connues dans le langage des événements ;
  → Modéliser A par une expression ensembliste, cette traduction se fait en remplaçant les « et » par « $\cap$ », et « ou » par « $\cup$ », et les négations par des complémentaires ;
  → Simplifier ou transformer l'expression obtenue grâce au calcul ensembliste de façon à pouvoir appliquer les formules des calculs des probabilités, on pourra utiliser dans les simplifications les diagrammes ensemblistes.

4. Exemples corrigés :

Exemple 1 :

On jette trois dés identiques numérotés de 1 à 6. Calculer :

1- La probabilité d'observer trois fois le même chiffre.

2- La probabilité d'observer deux fois le même chiffre et un autre différent.

Puisque les dés sont identiques, alors il y a équiprobabilité des événements élémentaires et la probabilité d'un événement quelconque de calcule par la formule $P(A) = \frac{card\ A}{Card\ \Omega}$

On a $card\ \Omega = 6^3$

1- La probabilité d'observer trois fois le même chiffre.

Soit A l'événement : Observer trois fois le même chiffre.

Donc $A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)\}$

Alors $card\ A = 6$

Et par suite la probabilité d'observer trois fois le même chiffre est : $P(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

2- La probabilité d'observer deux fois le même chiffre et un autre différent.

Soit B l'évènement : Observer deux fois le même chiffre et un autre différent.

Donc $B = \{(a, a, b)\}$ avec 6 chiffre pour a et 5 choix pour b et trois permutations de b

Alors $card\ B = 6 \times 5 \times 3$

Et par suite la probabilité d'observer deux fois le même chiffre et un autre différent est :

$P(B) = \frac{3\times5\times6}{6^3} = \frac{5}{12}$

Exemple 2 :

Une urne contient deux boules blanches, trois rouges et cinq boules noires.

On suppose que ces boules sont indiscernables au toucher.

I- Tirage avec remise :

On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

A: "$\mathit{Obtenir\ une\ boule\ de\ chaque\ couleur}$"

B: "$\mathit{Obtenir\ au\ moins\ deux\ boules\ noires}$"

C: "$\mathit{Obtenir\ des\ boules\ de\ meme\ couleur}$"

II- Tirage sans remise :

On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

A: "$\mathit{Obtenir\ une\ boule\ de\ chaque\ couleur}$"

B: "$\mathit{Obtenir\ au\ moins\ deux\ boules\ noires}$"

Correction :

Puisque les boules sont indiscernables au toucher, alors il y a équiprobabilité des événements élémentaires et la probabilité d'un événement quelconque de calcule par la formule

$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}$

I- Le tirage avec remise.

L'univers Ω est l'ensemble des arrangements avec répétition de 3 boules par les 10 boules.

Donc $card\ \Omega = 10^3 = 1000$

1- La probabilité de l'évènement A: "$Obtenir\ une\ boule\ de\ chaque\ couleur$"

Donc $A = \{BNR\}$

Alors $card\ A = 3!\,(C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1) = 2 \times 3 \times 5 \times 6$

D'où $P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{2\times3\times5\times6}{1000} = \frac{9}{50}$

2- La probabilité de l'évènement B: "$Obtenir\ au\ moins\ deux\ boules\ noires$"

Donc $B = \{NN\overline{N}, NNN\}$

Alors $card\ B = 5^2 \times 5^1 \times 3 + 5^3 = 500$

D'où $P(B) = \frac{card\ B}{card\ \Omega} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

3- La probabilité de l'évènement C: "$Obtenir\ des\ boules\ de\ meme\ couleur$"

Donc $C = \{NNN, RRR\}$

Alors $card\ C = 3^3 \times 5^3 = 152$

D'où $P(C) = \frac{card\ C}{card\ \Omega} = \frac{152}{1000} = \frac{19}{125}$

II- On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

L'univers Ω est l'ensemble des arrangements sans répétition de 3 boules par les 10 boules.

Donc $card\ \Omega = A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

1- La probabilité de l'évènement A: "$Obtenir\ une\ boule\ de\ chaque\ couleur$"

Donc $A = \{BNR\}$

Alors $card\ A = 3!\,(A_5^1 \times A_3^1 \times A_2^1) = 180$

D'où $P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{180}{720} = \frac{1}{4}$

2- La probabilité de l'évènement B: "$Obtenir\ au\ moins\ deux\ boules\ noires$"

Donc $B = \{NN\overline{N}, NNN\}$

Alors $card\ B = A_5^2 \times A_5^1 \times C_3^1 + A_5^3 = 360$

D'où $P(B) = \frac{card\ B}{card\ \Omega} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$

VII. Probabilité conditionnelle

1. Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B on pose $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

P_A est une probabilité définie sur Ω, appelée probabilité conditionnelle relative à l'évènement A ou probabilité sachant A.

$P_A(B)$ s'appelle la probabilité de B sachant que A est réalisé ou la probabilité de B sachant A ou encore la probabilité de B conditionnellement A.

2. Remarques

- Dans le calcul de la probabilité $P_A(B)$ on suppose que A est réalisé ;
- Formules de Bayes : $P_A(B) = P_B(A) \times \frac{P(B)}{P(A)}$

3. Formules des probabilités composées

Propriétés :

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω pour tous événements A et B de Ω on a la formule suivante dite « Formule des probabilités composées ».

- $P(A \cap B) = P_A(B).P(A)$ si $P(A) \neq 0$
- $P(A \cap B) = P_B(A).P(B)$ si $P(B) \neq 0$

Exemple 1 :

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires.

On tire une boule on la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur, on procède à un deuxième tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

Correction :

On note N_i tel que $i \in \{1,2\}$ l'événement.

On tire une boule noire le $i^{ème}$ tirage.

Alors $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1).P_{N_1}(N_2)$

La probabilité de tirer une boule noire dans le $1^{ér}$ tirage est : $P(N_1) = \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Et on a $P_{N_1}(N_2) = \frac{C_3^1}{C_7^1} = \frac{3}{7}$

D'où $P(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

Exemple 2 :

Une maladie affecte 3% d'une population, un test sanguin détecte cette maladie avec une probabilité de 0,98 chez un malade à tort à 4% des personnes saines qu'elles sont malades.

On prend une personne au hasard ayant subi le test.

On pose : • M : la personne est malade

- $\overline{\mathrm{M}}$: la personne est non malade
- T : le test est positif
- $\overline{\mathrm{T}}$: le test est négatif

1- Quelle est la probabilité que la personne soit malade et que le test soit positif.

2- Quelle est la probabilité que la personne soit malade et que le test soit négatif.

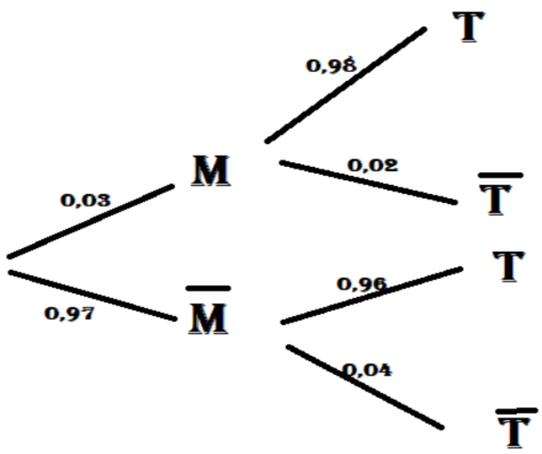
3- Quelle est la probabilité que la personne soit non malade et que le test soit négatif.

4- Quelle est la probabilité que la personne soit non malade et que le test soit positif.

5- Quelle est la probabilité que le test soit positif.

6- Quelle est la probabilité que la personne soit malade sachant que le test soit positif.

Correction :



1- La probabilité que la personne soit malade et que le test soit positif est :
$P(T \cap M) = P(M).P_M(T) = 0{,}03 \times 0{,}98 = 0{,}02$
2- La probabilité que la personne soit malade et que le test soit négatif est :
$P(\bar{T} \cap M) = P(M).P_M(\bar{T}) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$
3- La probabilité que la personne soit non malade et que le test soit négatif est :

$P(\bar{T} \cap \bar{M}) = P(\bar{M}).P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0{,}97 \times 0{,}04 = 0{,}9312$

4- La probabilité que la personne soit non malade et que le test soit positif est :

$P(\bar{M} \cap T) = P(\bar{M}).P_{\bar{M}}(T) = 0{,}04 \times 0{,}97 = 0{,}03$

5- La probabilité que le test soit positif est :

$P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) = 0{,}06$

6- La probabilité que la personne soit malade sachant que le test soit positif est :

$$P_T(M) = \frac{P(M)}{P(T)} . P_M(T) = \frac{0,03}{0,06} \times 0,98 = 0,49$$

4. Formule des probabilités totales

Propriété :

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, pour tous événements A et B de Ω on a la formule suivante dite « Formule des probabilités totales »

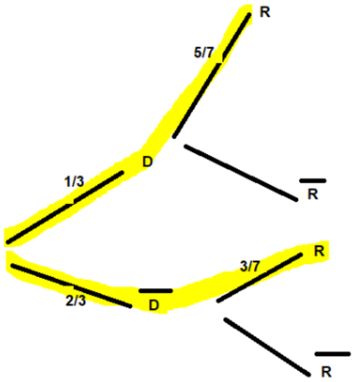
- $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$
- Si $0 < P(A) < 1$ on obtient $P(B) = P_A(B).P(A) + P_{\bar{A}}(B).P(\bar{A})$

Exemple 1 :

On dispose de deux urnes A et B
A contient 5 boules rouges et 2 boules blanches ;
B contient 3 boules rouges et 4 boules blanches ;
On lance un dé équilibré :
Si on obtient 1 ou 2 on tire une boule de l'urne A, et si on obtient 3, 4, 5, 6 on tire une boule de l'urne B .
Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge.

Correction :

Considérons les événements : $\begin{cases} D: \text{"obtenir 1 ou 2 "} \\ R: \text{"la boule tirée es} \end{cases}$



On a $P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(\bar{D}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P_D(R) = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$ et $P_{\bar{D}}(R) = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$

Donc
$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap D) + P(R \cap \bar{D}) \\ &= P(D).P_D(R) + P(\bar{D}).P_{\bar{D}}(R) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{11}{21} \end{aligned}$$

Exemple 2 :

À un carrefour, une étude statistique sur un feu tricolore montre que :

→ Si le feu est vert : 99% de chances que l'automobiliste passe ;
→ Si le feu est orange : 30% de chances que l'automobiliste passe ;
→ Si le feu est rouge : 1% de chances que l'automobiliste passe.

Le cycle du feu tricolore dure une minute répartie comme suit :

→ Feu vert 25 seconde ;
→ Feu orange 5 seconde ;

→ Feu rouge 30 seconde.

Calculer la probabilité qu'un automobiliste passe sans arrêter à ce feu tricolore.

Correction :

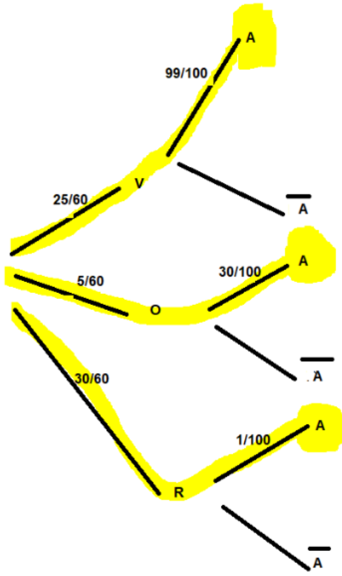
On considère les événements suivants :

A: "$automobiliste\ passe$"

O: "$feu\ est\ orange$"

V: "$feu\ est\ vert$"

R: "$feu\ est\ rouge$"



On a : $P_V(A) = \frac{99}{100}$, $P_R(A) = \frac{1}{100}$, $P_O(A) =$

Et $P(V) = \frac{25}{60}$, $P(O) = \frac{5}{60}$, $P(R) =$

On a O, V et A forme un système complet d'événemer

la formule des probabilités totale donne :

$$P(A) = P(V).P_V(A) + P(O).P_O(A) + P(R).P_R(A)$$
$$= \frac{25}{60} \times \frac{99}{100} + \frac{5}{60} \times \frac{30}{100} + \frac{30}{60} \times \frac{1}{100}$$
$$= \frac{177}{400}$$

VIII. L'indépendance

1. L'indépendance des événements

Définition :

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

On dit que deux événements A et B de Ω sont indépendants si on a :

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$

2. Epreuves indépendantes – Répétition d'une épreuve :

Définition :

Il y a répétition d'expériences identiques, lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite. Ces expériences aléatoires successives sont indépendantes.

Propriété :

Soit A un événement de probabilité p lors d'une épreuve aléatoire, et soit n un entier naturel non nul.

Lorsqu'on répète cette épreuve n fois de manières identiques et indépendantes, alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois exactement est : $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; 0 \leq k \leq n$

Exemple :

On lance 10 fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de fois de 6 obtenus.

Correction :

Puisque le dé est équilibré alors $P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ et $1 - p = \frac{5}{6}$

→ La probabilité de n'obtenir jamais le nombre 6 est : $C_{10}^{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-0}$

→ La probabilité d'obtenir le nombre 6 une (1) fois exactement est :
$C_{10}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-1}$

→ La probabilité d'obtenir le nombre 6 trois (3) fois exactement est :
$C_{10}^{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-3}$

IX. Les variables aléatoires

1. Définition :

Une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire.

Une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω est une fonction X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X s'appelle le support de la variable aléatoire X.

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini, et $X(\Omega)$ son support .

On appelle loi de probabilité de X (ou loi de X ou distribution de X) l'ensemble des couples (x_i, p_i) ou $x_i \in X(\Omega)$ et $p_i = P(X = x_i)$

Remarque :

Si X une variable aléatoire et p sa loi de probabilité, et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$

Exemple 1 :

Un dé cubique non truqué et non standard, porte sur ces faces les nombres :
$-2, -2, 1, 1, 1, 4$

Soit X la variable aléatoire égale au numéro que ce dé affiche après un lancer.
Donc $X(\Omega) = \{-2; 1; 4\}$

Calculer $P(X = -2)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 4)$, puis donner la loi de probabilité de X.

Correction :

On a $P(X = -2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{6}$

La loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Exemple 2 :
Une urne contient 4 boules rouges et six boules blanches. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction :
Soit $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

→ Calculons $p(X = 0)$:
On a $(X = 0) = \{\bar{R}\bar{R}\}$
Donc $P(X = 0) = \frac{card\ (X=0)}{card\ \Omega} = \frac{6^2}{10^2} = \frac{9}{25}$

→ Calculons $p(X = 1)$:
On a $(X = 1) = \{R\bar{R}\}$
Donc $P(X = 1) = \frac{card\ (X=1)}{card\ \Omega} = \frac{4^1 \times 6^1 \times 2}{10^2} = \frac{12}{25}$

→ Calculons $p(X = 2)$:
On a $(X = 2) = \{RR\}$
Donc $P(X = 2) = \frac{card\ (X=2)}{card\ \Omega} = \frac{4^2}{10^2} = \frac{4}{25}$

D'où la loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

3. Espérance mathématique – Variance – Ecart type

Définitions :

→ On appelle l'espérance mathématique de X le nombre réel donné par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$$

→ On appelle variance de X le nombre réel positif donné par :

$$V(x) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

→ La racine carré de la variance est appelé écart type de X et on note $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$$

X. Loi binomiale

1. Définition

La loi binomiale permet de modéliser la fréquence du nombre de succès obtenus lors de la répétition de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes qui comportent deux issues**.**
on réalise n fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire.

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès de probabilité p et échec de probabilité $(1-p)$
On note $X \sim B(n,p)$ pour dire que X suit la loi binomiale de paramètres n et p
Donc $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$

2. Propriétés :

Si $X \sim B(n,p)$, alors on a :

- $E(x) = n \times p$
- $V(x) = n \times p \times (1-p)$
- $\sigma(x) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$

Série 8 : Calcul des probabilités

Exercice 1 :

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher, trois boules blanches, trois boules jaunes et quatre boules rouges.

On tire simultanément au hasard 3 boules du sac.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : " *tirer* 3 *boules rouges*"

B : " *tirer* 3 *boules blanches*"

C : " *tirer* 2 *boules jaunes exactement*"

D : " *tirer une seule boule blanche*"

E : " *tirer* 2 *boules jaunes et une boule rouge*"

F : " *les boules tirées sont de même couleur*"

G : " *les boules tirées sont de couleurs différentes deux* à *deux*"

H : " *les boules tirées sont de couleurs différentes* "

I : " *parmis les boules tirées aucune boule blanche*"

J : " *tirer une boule de chaque couleur*"

K : " *tirer au moins une boule rouge*"

L : " *tirer au plus deux boules jaunes*"

Exercice 2 :

Un sac contient 9 boules indiscernables au toucher, deux boules bleues portant le numéro deux, une boule bleue porte le numéro zéro, deux boules rouges portant le numéro un, deux boules grises portant le numéro zéro, et deux boules grises portant le numéro un.

On tire successivement sans remise trois boules du sac.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : " *tirer trois boules bleues*"

B : " *tirer trois boules grises*"

C : "*tirer trois boules portant le numéro un*"

D : "*tirer trois boules portant le numéro zéro*"

E: "*tirer trois boules portant le même numéro*"

F: "*les boules tirées portant des nombres différentes*"

G: "*tirer une seule boule qui porte le numéro zéro*"

H: "*les boules tirées sont de même couleur et portant le même numéro*"

Exercice 3 :

Un cartable contient six livres indiscernables au toucher, quatre livres de » la langue anglaise dont deux livres sont bleus et les autres sont grises, et deux livres de la langue française de couleur bleus.

On tire successivement au hasard avec remise trois livres du cartable.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A: "*tirer trois livres bleus*"

B: "*tirer trois livres gris*"

C: "*tirer trois livres de la langue française*"

D: "*tirer trois livres de la langue anglaise*"

E: "*tirer trois livres de même matière*"

F: " *parmis les livres tirés un seul livre est gris*"

G: "*tirer un livre d'anglais au premier tirage*"

H: "*les livres tirés sont de matières différentes*"

Exercice 4 :

Une urne A contient six boules indiscernables au toucher, deux boules bleues, trois boules roses et une boule blanche.

Une urne B contient sept boules indiscernables au toucher, deux boules bleues, trois boules blanches et deux boules roses.

I- On tire simultanément deux boules de l'urne A et une boule de l'urne B.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A: "*tirer trois boules bleues*"

B: "*tirer trois boules roses*"

C: "*tirer trois boules de même couleur*"

D: "*tirer une seule boule blanche*"

E: "*tirer deux boules roses exactement*"

F: "*tirer une boule de chaque couleur*"

II- On tire successivement sans remise deux boules de l'urne A puis deux boules de l'urne B.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A: " *tirer quatre boules de même couleur*"

B: "*parmi les boules tirées, il y a une boule blanche exactement*"

Exercice 5 :

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher.

Trois boules blanches portant les nombres : quatre, quatre et deux ;

Deux boules jaunes partant les nombres : un et deux ;

Trois boules bleues portant les nombres : un, quatre et deux.

On tire au hasard, simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A: "*tirer trois boules de même couleurs*"

B: "*tirer trois boules portant des nombres distincts deux* à *deux*"

C: "*tirer une boule de chaque couleur*"

D: "*tirer au moins une boule bleue*"

E: "*les boules tirées sont de couleurs différentes*"

F: "*parmi les trois tirées, il y a exactement deux boules portant le nombre* 4"

G: "*tirer au plus deux boules blanches*"

1. Calculer $p(B \cap C)$. Les événements B et C sont-ils indépendants ?
2. Calculer $p(A \cap B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Calculer $p(A \cap D)$. Les événements A et D sont-ils indépendants ?
4. Calculer $p(A \cup D)$.
5. Sachant que les boules tirées sont de couleurs distincts deux à deux, quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de chaque nombre ?
6. Calculer $p_A(F)$.
7. Calculer $p_A(D)$.
8. Déterminer l'événement contraire de G, puis déduire $p(G)$.
9. Déterminer l'événement contraire de E, puis déduire $p(E)$.

Exercice 6 :

Une urne contient neuf boules indiscernable au toucher.

Trois boules bleues portant les nombres : 1 ; 1 ;0

Deux boules rouges partant les nombres : 1 ;1

Quatre boules blanches portant les nombres : 0 ;1 ;2 ;3.

I- On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire simultanément trois boules de l'urne.

A- Soit X la variable aléatoire associé le nombre des boules rouges tirées à chaque tirage.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

B- Soit X la variable aléatoire associé le nombre des boules blanches tirées à chaque tirage.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

C- Soit X la variable aléatoire associé le nombre des boules bleues restante dans l'urne après chaque tirage.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

D- Soit X la variable aléatoire associé le nombre des boules tirées portant le nombre 3 à chaque tirage.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0; 1\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

II- On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

A- Soit X la variable aléatoire associé la somme des nombres portés par les trois boules tirées.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

B- Soit X la variable aléatoire associé le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 6\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

C- Soit X la variable aléatoire associé le nombre des boules portant un nombre impair par les trois boules tirées.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

III- On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

A- Soit X la variable aléatoire associé le nombre des couleurs tirées après le tirage de deux boules.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) l'espérance mathématique, V(X) la variance et l'écart type $\sigma(X)$.

Exercice 7 :

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher.

Deux boules blanches portant les nombres : 4 ; 2

Deux boules jaunes portant les nombres : 1 ; 2

Trois boules bleues portant les nombres : 1 ; 4 ; 2

On considère l'expérience suivantes :

On tire au hasard, simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A: "$tirer\ trois\ boules\ de\ même\ couleur$"

B: "$parmi\ les\ boules\ tirées\ aucune\ boule\ jaune$"

C: "$tirer\ une\ boule\ de\ chaque\ couleur$"

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{35}$
2. Montrer que $p(B) = \frac{2}{7}$
3. Montrer que $p(C) = \frac{12}{35}$
4. On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.
   a. Montrer que $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$
   b. Déterminer la loi de probabilité de X
   c. Calculer E(X)
5. On répète l'expérience précédente deux fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui égale au nombre de fois de réalisation de l'événement B.
   a. Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X
   b. Déterminer les valeurs de X
   c. Déterminer la loi de probabilité de X
   d. Calculer E(X), V(X) et σ(X)

Problèmes ln et expo

Problème 1 :

Partie I :

Soit g une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$\boldsymbol{g(x) = x^2 - x - lnx}$

1. a. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

   b. *Calculer* $g'(x)$ *pour tout* x *de* $]0;+\infty[$, *et dresser le tableau de variations de* g

2. *Calculer* $g(1)$ *et déduire que* $g(x) \geq 0$ *pour tout* x *de* $]0;+\infty[$.

Parie II :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) lnx}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ $(unité\ 2cm)$

1. a. *Montrer que :* $(\forall x \in]0;+\infty[);\ \boldsymbol{f(x) = x\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{lnx}{x}\right]}$, *puis calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   b. *Montrer que* $(\mathcal{C}_f)$ *admet une branche parabolique de direction la droite* $(D): y = x$ *au voisinage de* $+\infty$.

2. a. *Montrer que :* $(\forall x \in]0;+\infty[);\ \boldsymbol{f(x) = x - 1 + \frac{1 + lnx - x\, lnx}{x}}$

   b. *Déduire que :* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, *puis interpréter le résultat géométriquement.*

3. a. *Montrer que :* $(\forall x \in]0;+\infty[);\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

   b. *Calculer* $f'(1)$ *puis interpréter le résultat géométriquement.*

   c. *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur son domaine de définition.*

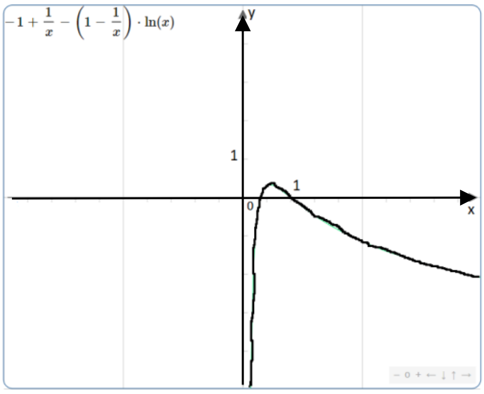
4. a. *Montrer que :* $(\forall x \in]0;1[);\ x - 1 + 2lnx \leq 0$
   et que : $(\forall x \in]1;+\infty[);\ x - 1 + 2lnx \geq 0$.

   b. *Montrer que :* $(\forall x \in]0;+\infty[);\ f''(x) = \frac{x-1+2lnx}{x^3}$, *puis déduire que* $(\mathcal{C}_f)$ *admet un point d'inflexion de coordonnées à déterminer.*

5. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *tel que* $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{e}$

6. *Soit* h *une fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $h(x) = f(x) - x$

La courbe représentative de la fonction h



a. Calculer $h(1)$ *et* $h\left(\frac{1}{e}\right)$.

b. Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ *et* (D).

7. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$

Problème 2

I. Soit $\boldsymbol{g}$ ***une fonction numérique définie sur*** $\boldsymbol{]0;+\infty[}$ ***par :*** $\boldsymbol{g(x)=1+x\,lnx}$

1. Montrer que g *est croissante sur* $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$ *et décroissante sur* $\left]0;\frac{1}{e}\right]$

2. Déduire que $g(x)>0$ *pour tout* x *de* $]0;+\infty[$

II. Soit $\boldsymbol{f}$ ***une fonction numérique définie sur*** $\boldsymbol{]0;+\infty[}$ ***par :***

$$\boldsymbol{f(x)=(lnx)^2+\frac{lnx}{x}+1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(lnx)^2}{x}=0$

c. Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction à déterminer.*

2. a. Vérifier que $(\forall x\in]0;+\infty[);\ \boldsymbol{f(x)=\frac{lnx\times g(x)}{x}+1}$*, puis déduire que* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

b. Interpréter le résultat géométriquement.

3. a. Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[);\ (x-1)lnx\geq0$

b. Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[);\ f'(x)=\frac{g(x)+(x-1)lnx}{x^2}$

c. Etudier les variations de la fonction f *puis dresser son tableau de variations.*

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet une seule solution* α *sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *, et que* $\frac{1}{e}<\alpha<1$.

5. Montrer que la droite $(\Delta): y=x$ *est une tangente à la courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *au point* $A(1\,;1)$

6. a. Montrer que f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur IR.*

b. Montrer que f^{-1} *est dérivable en* $x_0=1$ *puis calculer* $(f^{-1})'(1)$.

7. Construire $(C\ )$, (Δ) *et* $(C_{f^{-1}}\ )$ *dans le même repère.* $(unité\ 2cm)$

8. Montrer que la fonction $H: x\longmapsto xlnx-x$ *est la primitive de la fonction* $h: x\longmapsto lnx$ *sur* $]0;+\infty[$

Problème 3 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{(lnx)^2+3x-3}{x}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1. *Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.*
2. *Vérifier que $(\forall x \in]0;+\infty[); f(x) = \left(\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3 - \frac{3}{x}$, puis montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.*
3. *Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) d'équation y=3*
4. *Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{(1-lnx)(3+lnx)}{x^2}$*
5. *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
6. *Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.*
7. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis vérifier que l'une des solutions est 1 et l'autre est α telle que $0{,}21 < \alpha < 0{,}22$*
8. *Construire la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$*

Problème 4 :

I. Soit g une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = -2x^2 + 2 - lnx$$

1. *Etudier les variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.*
2. *Calculer $g(1)$, puis étudier le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.*

II. Soit f une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-1+lnx}{x} - 2x + 2e$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1. *a. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.*
   b. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = -2x + 2e$ au voisinage de $+\infty$.
   c. Déterminer la position relative de la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$
2. *a. Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$*
   b. Déduire les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

3.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution x_0 sur *l'intervalle* $]0{,}4; 0{,}5[$

b. Construire la droite (Δ) *et la courbe* $(\mathcal{C}_f)$

Problème 5 :

Partie 1 :

Soit h une fonction numérique définie sur $]-1; +\infty[$ ***par :***

$$\boldsymbol{h(x) = x^2 + 2x + ln(x+1)}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

2. Montrer que pour tout x *de* $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$, *puis dresser le tableau de variations de la fonction h.*

3. Calculer $h(0)$, *puis déduire le signe de* $h(x)$ *sur* $]-1; +\infty[$.

Partie 2 :

Soit f ***une fonction numérique définie sur*** $]-1; +\infty[$ ***par :***

$$\boldsymbol{f(x) = x - 1 - \frac{ln(x+1)}{x+1}}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *et interpréter le résultat géométriquement.*

2.a. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (x-1)]$, *puis déduire que la courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *admet une asymptote oblique* (D) *d'équation* $y = x - 1$ *au voisinage de* $+\infty$.

c. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ *et la droite* (D).

2. Montrer que $\forall x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$, *puis dresser son tableau de variations*

3. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ *coupe la droite d'équation* $y = 2$ *au point d'abscisse compris entre 3,3 et 3,4.*

4. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Problème 6 :

Soit f ***une fonction numérique définie sur IR par :*** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x + ln(1 + e^{-x})}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout x *de IR :* $f(x) = -\frac{1}{2}x + ln(1 + e^x)$

2. Déduire que f *est une fonction paire.*

3. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

4. *Montrer que la courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *admet deux asymptotes obliques* (Δ) *et* (Δ') *des équations à déterminer.*
5. *Calculer* $f'(x)$ *et dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur IR.*
6. *Construire les droites* (Δ) *et* (Δ') *et la courbe* $(\mathcal{C}_f)$

Problème 7 :

Partie 1 :

Soit φ la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 + 2x + ln(x+1)$$

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to -1^+} \varphi(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x)$.
2. *Montrer que* φ *est strictement croissante sur* $]-1;+\infty[$.
3. *Calculer* $\varphi(0)$, *puis déduire le signe de* $\varphi(x)$ *sur* $]-1;0[$ *et sur* $]0;+\infty[$.

Partie 2 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{ln(x+1)}{x+1}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *et interpréter le résultat géométriquement.*
2. a. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0$, *puis en déduire que le courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *admet au voisinage de* $+\infty$ *une asymptote oblique (D) d'équation que l'on précisera*
3. a. *Résoudre dans l'intervalle* $]-1;+\infty[$ *l'équation* $f(x) = x$

   b. *Montrer que* $(\forall x \in]-1;0[); f(x) > x$ *et* $(\forall x \in]0;+\infty[); f(x) < x$

   c. *Déduire la position relative de* $(\mathcal{C}_f)$ *et (D) sur les intervalle* $]-1;0[$ *et* $]0;+\infty[$
4. a. *Montrer que pour tout* x *de* $]-1;+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

   b. *Dresser le tableau de variations de la fonction* f
5. a. *Montrer que pour tout* x *de* $]-1;+\infty[$; $f''(x) = \frac{3-2\ ln(x+1)}{(x+1)^3}$

   b. *Etudier la concavité de la courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *et déterminer son point d'inflexion*
6. *Construire la droite (D) et la courbe* $(\mathcal{C}_f)$

Partie 3 :

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $\forall n \in IN$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN);\ u_n > 0$

2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in IN}$ *, puis en déduire qu'elle est convergente*

3. Déterminer $\lim u_n$

Problème 8 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *et interpréter le résultat géométriquement.*

b. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *et interpréter le résultat géométriquement.*

2. a. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f

3. a. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ *l'équation* $f(x) = 0$, *puis interpréter le résultat géométriquement*

b. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ *au point d'abscisse* $\dfrac{1}{e}$

4. a. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$; $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$

b. Etudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ *et déterminer son point d'inflexion*

5. Construire la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$

6. **Soit φ la restriction de f à l'intervalle $I =]0;1]$**

a. Montrer que φ *admet une fonction* φ^{-1} *définie sur* $J =]-\infty;1]$

b. Construire la courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ *dans le même repère précédent*

c. Montrer que φ^{-1} *est dérivable en 0 et calculer* $(\varphi^{-1})'(0)$

Problème 9 :

Partie I : On considère la fonction g définie par : $g(x) = x - \ln(1-x)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g puis calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$
2. Calculer g'(x) et montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$
3. Dresser le tableau de variations de g et déduire le signe de $g(x)$. (Remarquer que $g(0) = 0$)

<u>Partie II :</u> On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[$ par :

$$f(x) = x + ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(ln(1-x)\right)^2$$

Soit $(\mathcal{C}_\mathrm{f})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. a. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^2}{t} = 0$, puis en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   b. Montrer que la droite d'équation $(\Delta): y = x$ est une asymptote oblique à $\left(C_f\right)$ au
   voisinage de $-\infty$.
2. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement
3. Montrer que $(\forall x \in]-\infty;-1[\,);\, f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$ puis dresser le tableau de variations de f
4. Etudier la position relative de $\left(C_f\right)$ et la droite (Δ)
5. Construire la droite (Δ) et la courbe $\left(C_f\right)$ ($1-e^2 \approx -6{,}4$)

<u>Partie III :</u> On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in IN)$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN); 1-e^2 < u_n < 0$
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)
3. Déduire que la suite (u_n) est convergente
4. Calculer $lim\ u_n$

<u>Problème 10 :</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + ln\,2 - ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

Soit $(\mathcal{C}_\mathrm{f})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + ln\,2$ est une asymptote oblique à $\left(C_f\right)$
   au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement
3. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x(x^2+1)}$
   b. Calculer $f'(-1)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f

4. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{-2\,(3x^2+1)}{x^2\,(x^2+1)^2}$
   b. Etudier la concavité de la courbe (C_f)
5. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle
   $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
   b. Montrer que α vérifie $e^{\alpha} = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}$
6. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) > 0$
   b. Déduire que la courbe (C_f) est au-dessous de (D)
7. Construire la courbe (C_f)
8. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[-1; 0[$
   a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction h
   c. Construire dans le même repère la courbe (C_h)

Problème 11 :

Partie I : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x^3) & ; si\ x < 0 \\ 4x\sqrt{x} - 3x^2 & ; si\ x \geq 0 \end{cases}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Montrer que f est dérivable en 0 $\left(rappel : \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1\right)$
3. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b. Vérifier que :$(\forall x \in]-\infty; 0[); \frac{f(x)}{x} = \frac{3\ln(-x)}{x} + \frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$
   c. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$
4. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $[1; +\infty[$ et croissante sur $[0; 1]$
5. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$
6. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; 0[$
   a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b. Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x de J

Partie II : On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{4}{9} \\ u_{n+1} = 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 \end{cases} ;\ (\forall n \in IN)$$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN); \frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante
3. Déduire que la suite (u_n) est convergente
4. Calculer $lim\, u_n$

Problème 12 :

Partie I : On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right) + ln\, x\right]$$

1. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$
2. Calculer $g(1)$, puis déduire le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$

Partie II : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \frac{ln\, x}{\sqrt{x}}$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Montrer que : $(\forall x \in\,]0;+\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{2\,x\,\sqrt{x}}$, puis dresser le tableau de variations de f
3. a. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ)
   d'équation $y = -x + 1$
   b. Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ)
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$

Partie II : On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} \end{cases};\ (\forall n \in IN)$$

1. Montrer que : $(\forall n \in\,]1;2[); 0 < \frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 1$
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n < 2$
3. En remarquant que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = u_n + f(u_n)$, déterminer la monotonie de (u_n)
4. Déduire que la suite (u_n) est convergente
5. Calculer $lim\, u_n$

Problème 13 :

Partie I : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
2. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) = xe^x$, puis dresser le tableau de variations de g
   b. Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); g(x) > 0$
3. Montrer que : $(\forall x \in]0;1[); g(x) < x$
4. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
   a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 1$
   b. Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis déduire qu'elle est convergente
   c. Calculer $\lim u_n$

Partie II : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)(e^x + 1)$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f
3. a. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ)
   d'équation $y = x - 2$
   b. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ)
4. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis déterminer la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$
5. Etudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ puis déterminer son point d'inflexion
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$
7. Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$
   a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b. Construire $(\mathcal{C}_h)$, la courbe représentative de la fonction h
   c. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0, et que $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{1+e^2}$

Problème 14 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{ln^2(x) - ln\,(x)}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f
2. Calculer les limites aux bornes de D_f
3. Etudier la dérivabilité de f à gauche en point 1 et à droite en point e
4. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$
5. Etudier la monotonie de la fonction f sur D_f
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$
7. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]0;1]$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
   b. Montrer que g^{-1} est dérivable sur J. Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

Problème 15 :

I. Soit la fonction numérique f de variable x tel que :

$$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Vérifier que : $(\forall x \in IR);\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$
   Puis déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est IR, et que : $(\forall x \in IR); 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$, puis interpréter graphiquement le résultat .
3. a. Montrer que : $(\forall x \in IR); f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ et vérifier que $f'(0) = 0$.
   b. Etudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur IR , et déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$.
4. a. Vérifier que : $(\forall x \in IR); f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ asymptote de (C) au voisinage de $+\infty$.
5. a. Vérifier que : $(\forall x \in IR); e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$.
   b. Etudier le signe de $\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ et $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur IR.
   c. Déduire que : $(\forall x \in [0;\ln 4]);\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$.
   d. Montrer que : $(\forall x \in [0;\ln 4]); 0 \leq f(x) \leq x$.

6. Construire la courbe (C).

II. Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}; \forall n \in IN$

1. Montrer que : $(\forall n \in IN); 0 \leq u_n \leq \ln 4$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante.
3. Déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente, puis déterminer sa limite.

Problème 16 :

On considère la fonction numérique f définie par :$f(x) = ln\,(x^2 - 2x + 2)$

1. a. Vérifier que : $(\forall x \in IR);\ \ x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$
   b. Déduire que f est définie sur IR, puis calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. Montrer que : $(\forall x \in IR);\ \ f(2-x) = f(x)$, puis déduire que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C)
3. a. Vérifier que : $(\forall x \in [1;+\infty[); f(x) = 2\ln x + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$
   b. Déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et interpréter le résultat géométriquement
4. Montrer que : $(\forall x \in IR); f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$; puis dresser le tableau de signe de f sur IR
5. Montrer que : $(\forall x \in IR); f''(x) = \frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$; puis étudier la concavité de la courbe (C)
6. Construire la courbe (C)

Problème 17 :

I. On considère les fonctions h et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x + (x-2)lnx \\ g(x) = x - 1 - lnx \end{cases}$$

1. a. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty]$, puis étudier les
   variations de la fonction g
   b. Déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty]$
2. a. Montrer que : $(\forall x \in\ ]0;+\infty[);\ \ h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$
   b. Montrer que : $(\forall x \in\ ]0;+\infty[); (x-1)\ln x \geq 0$
3. Déduire que : $(\forall x \in\ ]0;+\infty[);\ \ h(x) > 0$

II- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.
   b. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, puis déterminer les branches infinies de (C) au voisinage de $+\infty$.
   $\left(\text{Remarque} : f(x) = 1 + x\ln x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\right)$
2. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$
   b. Déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
3. Soit (Δ) la tangente de la courbe (C) en A(1 ;1)
   a. Montrer que $y = x$ est l'équation cartésienne de (Δ)
   b. Vérifier que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f(x) - x = (\ln x - 1)\, g(x)$
   c. Etudier le signe de $f(x) - x$ puis déduire la position relative de la courbe (C) et (Δ)
4. Construire la droite (Δ) et la courbe (C).

(On admet que (C) admet un point d'inflexion unique dont l'abscisse est compris entre 1 et 1,5)

III- On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \sqrt{e} \end{cases}$; $\forall n \in IN$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN); 1 \leq u_n \leq e$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante (utiliser le résultat de la question II-3-c)
3. Déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente puis calculer sa limite.

Problème 18 :

Partie A :

Soient g et h deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = x - 1 - \ln x \\ h(x) = x + (x-2)\ln x \end{cases}$

1. a. Calculer $g'(x)$ puis dresser son tableau de variations
   b. Déduire que : $(\forall x \in]0;+\infty[); g(x) \geq 0$
2. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$
   b. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); (x-1)\ln x \geq 0$
   c. Déduire que : $(\forall x \in]0;+\infty[); h(x) > 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x - \ln^2 x$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$
2. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$

   b. Déduire la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
3. Soit (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(1; f(1))$

   a. Déterminer l'équation de la droite (T)

   b. Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

   c. Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (T)
4. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$

$(on\ admet\ que\ la\ courbe\ (\mathcal{C}_f)\ admet\ un\ point\ d'inflexion\ d'abscisse\ compris\ entre\ 1$

Partie C :

On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \sqrt{e} \end{cases}$; $\forall n \in IN$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN); 1 < u_n < e$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante
3. Déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente puis calculer sa limite.

<u>Problème 19 :</u>

Partie I :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2x - ln\,(e^{2x} - 2e^x + 2)$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2. Montrer que f est continue sur D_f
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat obtenu
4. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - ln\,2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$
5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f

   b. En déduire les variations de la fonction f

   c. Dresser la tableau de variations de f
6. Résoudre dans D_f l'équation suivante : $f(x) = x$
7. Etudier la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$
8. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$

Partie 2 :

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $\forall n \in IN$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN); 0 \leq u_n \leq ln\,2$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente puis calculer sa limite.

<u>Problème 20 :</u>

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{ln(x)}{ln\,(x+1)} + 1$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis déterminer les branches infinies de (C) au voisinage de $+\infty$.
3. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{x[ln(x+1) - ln\,(x)] + ln\,(x+1)}{x(x+1)ln^2(x+1)}$
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f
4. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation : $f(x) = 0$
5. Tracer la courbe (C)
6. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
7. Tracer dans le même repère $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}

<u>Problème 21 :</u>

<u>Partie A :</u>

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = (x^2 - 1)\,ln\,x + 1$

1. Soit $0 < x < 1$ montrer que $g(x) > 0$
2. Soit $x \geq 1$ montrer que $g(x) > 0$
3. Déduire que $g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$

<u>Partie B :</u> Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right) \ln x - x + 2$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$
$(unité\ 1cm)$

1. a. Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f(x) = xlnx + \frac{ln\,x}{x} - x + 2$

   b. Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

   c. Déduire les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

2. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

   b. Déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

   c. Calculer $f(1)$ puis dresser la tableau de variations de f

   d. Montrer que l'équation cartésienne de la droite (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1 est $y = x$

3. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$

   « *on admet que* $(\mathcal{C}_f)$ *admet un point d'inflexion de coordonées* (1,6 ; 1,4), *et coupe la droite* (T) *en deux points de coordonnées* (1 ; 1) *et* (4,2 ; 4,2)"

4. Déduire à partir de la représentation graphique que $f(x) \leq x$ sur l'intervalle $[1\,;e\,]$

5. Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;1]$

   a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur un intervalle J à déterminer

   b. Construire $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1}

6. a. Montrer que $\int_1^e \frac{ln\,x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$

   b. Par intégration par partie, montrer que $\int_1^e x\,ln\,x\;dx = \frac{e^2+1}{4}$

   c. Déduire que l'aire du domaine compris entre $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $(D): x = 1$ et $(D'): x = e$ est $\frac{-e^2+8e-3}{4}$

<u>Partie C :</u> Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $\forall n \in IN$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN); 1 \leq u_n \leq e$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente puis calculer sa limite.

<u>Problème 22 :</u>

<u>Partie I :</u> On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $\boldsymbol{g(x) = x^2 - ln\,x}$

1. Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ et montrer que $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1+ln\,2}{2}$

2. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); g'(x) = \frac{2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x}$, puis dresser le tableau de variations de g
3. Déduire que $(\forall x \in]0;+\infty[); g(x) > 0$

<u>Partie II :</u> On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ $(unité\ 2\ cm)$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
2. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   b. Déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations
3. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$
   b. Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D)
4. a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$
   b. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion de coordonnées à déterminer
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seul solution α tel que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$
6. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 1 - x + \ln x$
   a. Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction h
   b. Déduire que $(\forall x \in]0;+\infty[); h(x) \leq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$
   c. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $]0;+\infty[$ puis interpréter le résultat géométriquement
7. Ecrire l'équation cartésienne de (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1
8. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation : $f^{-1}\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = x$
9. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}

Représentations des courbes

Construire la courbe (C_f) dans les cas suivants :

I. <u>$1^{èr}$ Cas :</u>

- f est une fonction impaire ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$;
- A(1 ;-1) et B(4 ;0) sont deux points d'inflexions de la courbe (C_f)
- Son tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

II. <u>$2^{ème}$ Cas :</u>

- f est une fonction paire
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)+3}{x} = -\infty$;
- (C_f) admet un point d'inflexion A(-3 ;0)
- L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions -5, -3 et -1 sur $]-\infty; 0]$
- Son tableau de variations :

x	$-\infty$		-4		-2		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3

III. $3^{ème}$ Cas :

- $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x - 1 = 0$
- (C_f) admet à gauche au point A$(-1\ ;1)$ une demi-tangente horizontale
- $A(-2; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f)
- La courbe (C_f) est au-dessus de $(D): y = x + 1$ sur $]-\infty; -1]$
- Son tableau de variations :

x	$-\infty$	-1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	1

- Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère avec une autre couleur.

IV. $4^{ème}$ Cas :

- A$(1\ ;1)$ est un centre de symétrie de de la courbe (C_f) ;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = +\infty$;
- (C_f) admet au point A une tangente de coefficient directeur 2 ;

x	1		2		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

- Son tableau de variations :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	1		$\nearrow$		$+\infty$

- Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère avec une autre couleur.

V. $5^{ème}$ Cas :

- f est décroissante sur IR et $f'(-1) = 0$
- (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + 1$
- (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur IR est 1
- (C_f) admet deux points d'inflexions sont A(-1 ;1) et B(3 ;2)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

VI. $6^{ème}$ Cas :

- L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty; 0]$ et que $-1,5 < \alpha < -1$;
- $f(1)f(1,5) < 0$;
- $A(5; 0) \in (C_f)$;
- $I(\alpha; 0)$ est point d'inflexion de (C_f) ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{f(x)-3}{x-4} = -1$;
- $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{f(x)-3}{x-4} = -\infty$;
- Son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	-2 ↗		2	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	3	↘	$-\infty$