CMS

4ème

SECTION SC.EXPERIMENTALE

CORRIGEES
DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 1

ABROUG FETHI
Professeur principal

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principal

CHAMS EDITION

MATHEMATIQUES

SOMMAIRE

QCM

1) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
2) f(2)=3 et f(5)=1
3) admet au moins une solution dans $[-2,5]$

Vrai - Faux

1) (vrai)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{X\to-\infty} f(X) = -\infty$

2) (Faux) : contre exemple : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ croissante sur IR

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

3) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

f n'est pas bornée

($\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$)

4) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to0} f(x) = 1$

$\Delta : x = 0$ n'est pas une asymptote à (ζ_f)

5) (faux)

contre exemple : f(x)=4+sinx

$g(x)=3-\frac{1}{1+x^2}$; $h(x)=5+\frac{1}{1+x^2}$

on a : $g(x) \le f(x) \le h(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$; $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 5$

mais f n'a pas de limite en $+\infty$

EXERCICE№1

a) $f(x) = |x^2 - x - 3|$; $D_f = IR$

la fonction : $x \longmapsto x^2 - x - 3$ est continue sur IR (fonction polynôme)

d'où f est continue sur IR

b) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2+1}$; $D_f = IR$

la fonction : $x \longmapsto x^2 + 1$ est continue et positive sur IR d'où

la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur IR et par suite f est continue sur IR comme étant somme de deux fonction continues

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	-	‖	+

$D_f =]-\infty , -1] \cup]1 , +\infty[$

la fonction : $x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$ est continue et positive sur chacun des intervalles :

$]-\infty , -1]$ et $]1 , +\infty[$, par suite f est continue sur D_f

d) $f(x) = (|x+1| - 2)^5$ est définie et continue sur tout IR

e) $f(x) = \frac{3x^2 - |x|}{x^2+4}$ est définie et continue sur tout IR

f) $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$ est définie et continue sur tout IR

$(1 + \cos^2 x \neq 0$ pour tout $x \in IR)$

g) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x - 1}$; $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

f est définie et continue sur tout $IR \setminus \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \}$

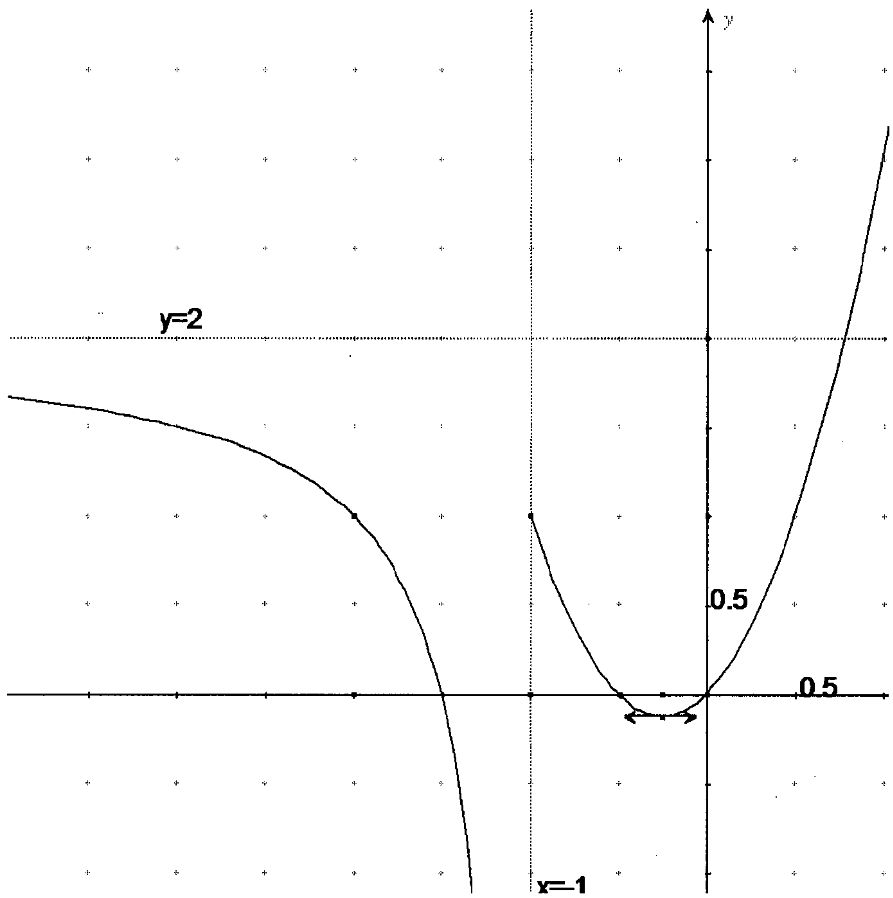
EXERCICE№2

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x+1} & si \quad x < -1 \\ 2x^2 + x & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

1)

sur $]-\infty , -1[$ $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \Rightarrow$ f est décroissante sur $]-\infty , -1[$.

sur $]-1 , +\infty[$ $f'(x) = 4x+1$



2) la fonction : $x \longmapsto 2+\frac{1}{x+1}$ est continue sur IR\{ -1 }

En particulier sur]-∞ , -1[d'où f est continue sur]-∞ , -1[

De même f est continue sur]-1 , +∞ [

3) f(-1) = 1

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2 + \frac{1}{x+1} = -\infty$ d'où f n'est pas continue en -1

4) * chacune des équations $f(x)$ = -3 et $f(x)$ = -1 admet une unique solution

* chacune des équations $f(x)$ = 0,5 et $f(x)$ = 1 admet trois solutions

* l'équations $f(x)$ = 4 admet une unique solution.

EXERCICE№3

1) f(-2) = 0

$\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \sqrt{x+2} = 0$ = f(-2) ; f est continue à droite en (-2)

$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} \frac{2x^2+x^3}{x+2} = \lim\limits_{x \to (-2)^-} (x^2) = 4 \neq$ f(-2)

Conclusion : f n'est pas continue en (-2)

2) f est continue sur chacun des intervalles :]-∞ , -2[et]-2 , +∞[

3) f n'est pas continue sur IR car elle n'est pas continue en (-2)

EXERCICE№4

1) f(-1) = 0

* $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \sqrt{x^2-1} = 0$ = f(-1)

f est continue à gauche en (-1)

* $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x)} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{(1+x+x^2)}{(1+x)} = +\infty$

f n'est pas continue à droite en (-1)

2) * la fonction: $x \longmapsto x^2$ -1 est continue et positive sur chacun des intervalles]-∞ , -1] et [1 , +∞[

d'où f est continue sur chacun des intervalles :]-∞ , -1] et [1 , +∞[

* la fonction: $x \longmapsto \frac{1-x^3}{1-x^2}$ est continue sur IR\{ -1 , 1 } :

en particulier sur]-1,1[d'où f est continue sur]-1,1[

EXERCICE№5

f(x) = $\frac{x^3+3x^2-6x-8}{x-2}$

1) D_f = IR\{2}

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

On a : $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ = (x -2)($x^2 + 5x + 4$) d'où pour $x \neq 2$

f(x) = $x^2 + 5x + 4$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 18$

3) f admet une limite fini en 2 d'où f est prolongeable par continuité en 2

EXERCICE№6

1) * pour $x \in$]0 , 1[, f(x) = $\frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x-1}$ = -1

* pour $x \in$]-1 , 0[, f(x) = $\frac{x^2-x}{x^2+x} = \frac{x-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x+1}$ = -1

D'où : $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$, alors f admet un prolongement par continuité en 0

2) pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$: $f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(x^2-x+1)}{(1-x)}$,

D'où : $\lim_{x \to (-1)} f(x) = \frac{3}{2}$, f admet un prolongement par continuité en(-1)

3) pour $x \neq 0$; , $f(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 3 + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} = 4$

alors f admet un prolongement par continuité en 0

EXERCICE№7

1) f(0) = 2

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x^2-x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}$

$= \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \neq f(0)$ d'où f n'est pas continue en 0

2) f(2) = 3

pour $x \in]0, +\infty[\setminus\{2\}$; $f(x) = x + 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x+1) = 3 = f(2)$ d'où f est continue en 2.

EXERCICE№8

1) $x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 2$

$D_f = IR^*\setminus\{-1\}$ ✓

2)

x	$-\infty$	-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+	

$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} -\frac{|x-2|}{x^2-x-2} = +\infty$ (de la forme $-\frac{3}{0^-}$)

$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$ Donc f n'admet pas de limite en (-1) car la limite à gauche est différent de la limite à droite

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-2)}{x^2-x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

3) pour $x \in]0, 2[$

$f(x) = \frac{-x(x-2)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x+1} = -1$

pour $x \in]-1, 0[$

$f(x) = \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$

f n'admet pas de limite en 0 car la limite à gauche est différent de la limite à droite d'où f n'admet pas un prolongement par continuité en 0.

EXERCICE№9

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{-2}{x-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-2}{x-1} = +\infty$

2)

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
x^2-1	+ 0 - 0 +

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\frac{-2x^3}{x^2-1}\right) = -\infty$ (de la forme $\frac{2}{0^-}$) ; $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \left(\frac{-2x^3}{x^2-1}\right) = +\infty$

3)

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
x^2-3x+2	+ 0 - 0 +

$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{-3}{x^2-3x+2}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{-3}{x^2-3x+2}\right) = +\infty$

4) pour $x > 0$; $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

Pour $x < 0$; $\sqrt{1+x^2} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$

EXERCICE№10

1) Pour $x \neq -1$: $f(x) = \frac{(x+1)(x^2+2x-4)}{(x+1)} = x^2+2x-4$

$\lim\limits_{x \to (-1)} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)} (x^2+2x-4) = -5$

$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ -5 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en (-1)

2) $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$; on pose $X = x - \frac{\pi}{4}$ alors $\begin{matrix} x \to \frac{\pi}{4} \\ X \to 0 \end{matrix}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1-\sqrt{2}\cos(X+\frac{\pi}{4})}{4X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1-\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}.\cos X - \sin\frac{\pi}{4}.\sin X)}{4X}$

$= \lim\limits_{X \to 0} \frac{1-\cos X+\sin X}{4X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1}{4}\left[\underbrace{\frac{1-\cos X}{X}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin X}{X}}_{\to 1}\right] = \frac{1}{4}$

$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{16(\cos(4x)-1)}{(4x)^2}$; on pose $X = 4x$

$\lim\limits_{X \to 0} 16\left[\frac{\cos X - 1}{X^2}\right] = \lim\limits_{X \to 0} \left[-16\left(\frac{1-\cos X}{X^2}\right)\right] = -8$ d'où : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -8 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

EXERCICE№11

1) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x}\right)$; f = v o u avec $\begin{cases} u(x) = \frac{\pi x+1}{x} \\ v(x) = \cos x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \pi$ et $\lim\limits_{x \to \pi} v(x) = -1$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x}$; on pose $X = x^2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{\sin X}{\sqrt{X}} = \lim\limits_{X \to 0^+} \underbrace{\sqrt{X}}_{0} . \underbrace{\frac{\sin X}{X}}_{1} = 0$

EXERCICE№12 $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(1- \cos x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} (1- \cos x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

EXERCICE№13

1) pour $x \neq 0$; $0 \leq |\sin(\frac{2}{x})| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x|.|\sin(\frac{2}{x})| \leq |x| \Rightarrow |f(x)| \leq |x|$

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2) pour $x \neq 0$; $-1 \leq \sin(\frac{2}{x}) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 . \sin(\frac{2}{x}) \leq x^2$

$\Rightarrow 1- x^2 \leq 1+ x^2 . \sin(\frac{2}{x}) \leq 1+ x^2$

$\lim\limits_{x \to 0}(1- x^2) = \lim\limits_{x \to 0}(1+ x^2) = 1$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} 1+ x^2 \sin(\frac{2}{x}) = 1$

3) pour $x > 0$; $\sin(\frac{2}{x}) \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \sin(\frac{2}{x}) \geq \frac{1}{x} -1 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{x} -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+}(\frac{1}{x} -1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

pour $x < 0$; $\sin(\frac{2}{x}) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x} +1$

$\lim\limits_{x \to 0^-}(\frac{1}{x} +1) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; par suite f n'admet pas de limite en 0

EXERCICE№14

1) * pour $x > 0$; $0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1+\cos x}{x} \leq \frac{2}{x} \Rightarrow 0 \leq \mathrm{f}(x) \leq \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{f}(x) = 0$

* pour $x < 0$; $0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \Rightarrow 0 \geq \mathrm{f}(x) \geq \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{f}(x) = 0$

2) * pour $x \neq 0$; $0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \mathrm{f}(x) \leq \frac{2}{\sqrt{|x|}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{|x|}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{\sqrt{|x|}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{f}(x) = 0$

3) * pour $x \in \mathrm{IR}$; $0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq |x|\,(1 + \cos x) \leq 2|x|$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{|x|\,(1+\cos x)}{x^4+x^2+3} \leq \frac{2|x|}{x^4+x^2+3} \Rightarrow 0 \leq |\mathrm{f}(x)| \leq \frac{2|x|}{x^4+x^2+3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2|x|}{x^4+x^2+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2|x|}{x^4+x^2+3} = 0$ d'où

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} |\mathrm{f}(x)| = 0$ $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \mathrm{f}(x) = 0$

EXERCICE№15

1) * pour $x \in \mathrm{IR}$; $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sin x \leq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\sin x} \leq 1$

2) * pour $x > 0$; $\frac{1}{2-\sin x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{2-\sin x} \geq \frac{x}{3}$

$-\frac{\sin x - 2}{\sin x - 2} = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{3}\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2-\sin x} = +\infty$

* Soit $\mathrm{f}(x) = \frac{x+\sin x}{2-\sin x} = \frac{(x+2)+(\sin x-2)}{2-\sin x} = \frac{(x+2)}{2-\sin x} - 1$

* pour $x > 0$; $\frac{1}{2-\sin x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{2-\sin x} \geq \frac{1}{3}(x+2) \Rightarrow \mathrm{f}(x) \geq \frac{1}{3}(x-1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3}(x-1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$

EXERCICE№16

$\mathrm{f}(x) = \frac{x\cos x}{x^2+1}$

1) $|xf(x)| = \frac{x^2}{x^2+1}|\cos x| = \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)|\cos x|$

$|\cos x| \leq 1$ et $1 - \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ d'où $|xf(x)| \leq 1$

2) $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ pour $x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

EXERCICE№17

$$f(x)=\frac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^*$$

1) a) pour x>0 $\sin(\frac{1}{x})\le 1 \Rightarrow -\sin(\frac{1}{x})\ge -1 \Rightarrow 2-\sin(\frac{1}{x})\ge 1$

$$\Rightarrow \frac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}\ge\frac{1}{x} \quad (\text{car } x>0) \Rightarrow f(x)\ge\frac{1}{x}$$

b) $f(x)\ge\frac{1}{x}$ pour x>0 et $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$

2) a) pour x<0 $2\text{-}\sin(\frac{1}{x})\ge 1 \Rightarrow \frac{2\text{-}\sin(\frac{1}{x})}{x}\le\frac{1}{x}$ (car x<0) $\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{x}$

b) $f(x)\le\frac{1}{x}$ pour x<0 et $\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{x})=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$

Rq : f n'admet pas de limite en 0

EXERCICE№18

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; $I=]2,+\infty[$ $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$

f est continue et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$

d'où $f(]2,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f,\lim\limits_{x\to 2^+}f\right[=]1,+\infty[$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$;$I=]-\infty,0]$ $f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}<0 \quad \forall x\in I$

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0] \Rightarrow f(]-\infty,0])=\left[f(0),\lim\limits_{-\infty}f\right[=[0,+\infty[$

3) $f(]0,\frac{\pi}{2}])=[f(\frac{\pi}{2}),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)[=[1,+\infty[$

4) $f(x)=tg(\pi x)$; $I=\left]-\frac{1}{2},0\right]$ $f'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x))>0$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2},0\right]$

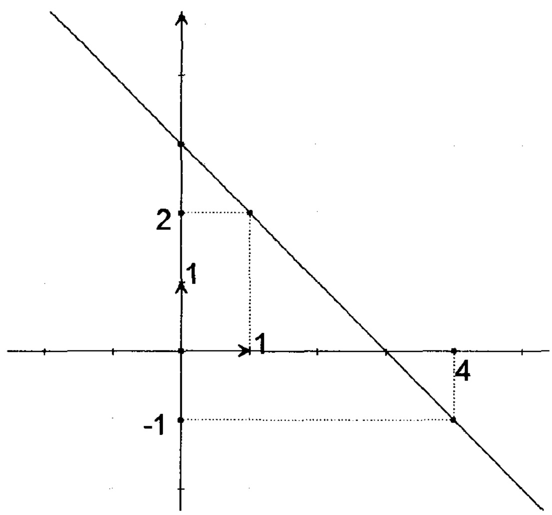
d'où $f(\left]-\frac{1}{2},0\right])=\left]\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^+}f,f(0)\right]=]-\infty,0]$ (car $\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^+}tg(\pi x)=-\infty$)

EXERCICE№19

1) f(I) = [-2,3]
2) f(I) = [-1,4]
3) f(I) = [1,2[∪ {3}
4) f(I) =] 1,4]

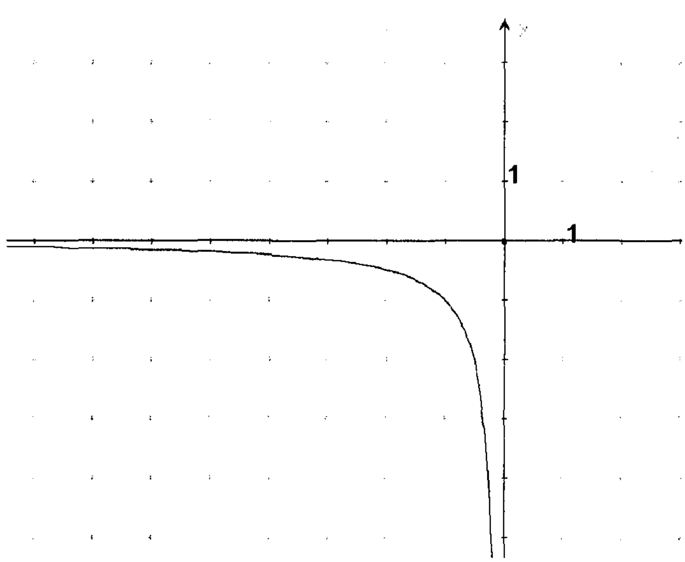
EXERCICE№20

1) $f(x) = -x + 3$ fonction affine ⇒sa courbe est une droite,



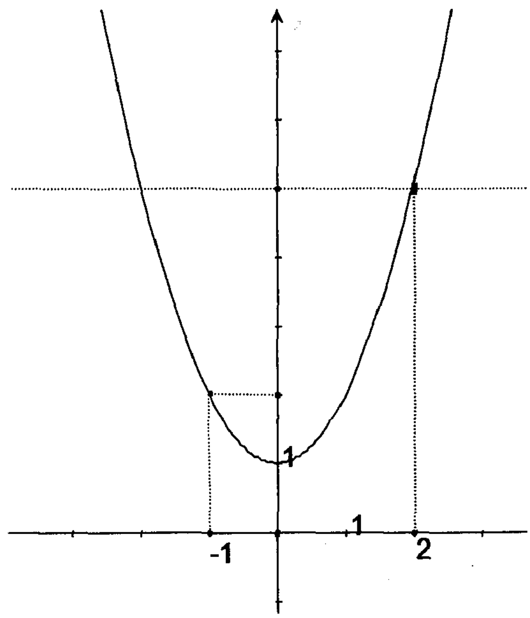
I = [1,4] f(I) = [-1,2]

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ⇒sa courbe est une hyperbole ,



I =]-∞ ,0[f(I) =]-∞ ,0[

3) $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow$ sa courbe est une parabole



$I =]-1,2]$ $f(I) = [1,5]$

EXERCICE№21

$f(x) = x^3 + 10x - 1$

1) – a) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3x^2 + 10 > 0$ d'où f est strictement croissante sur IR

b) f est continue sur $[0,1]$, $f(0) \times f(1) = -10 < 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $a \in]0,1[$

* comme f est strictement croissante sur IR alors a est unique

2) $f(0) \times f(0,1) = -(0,1)^3 < 0$ d'où $0 < a < 0,1$; $a \approx 0,1$

EXERCICE№22

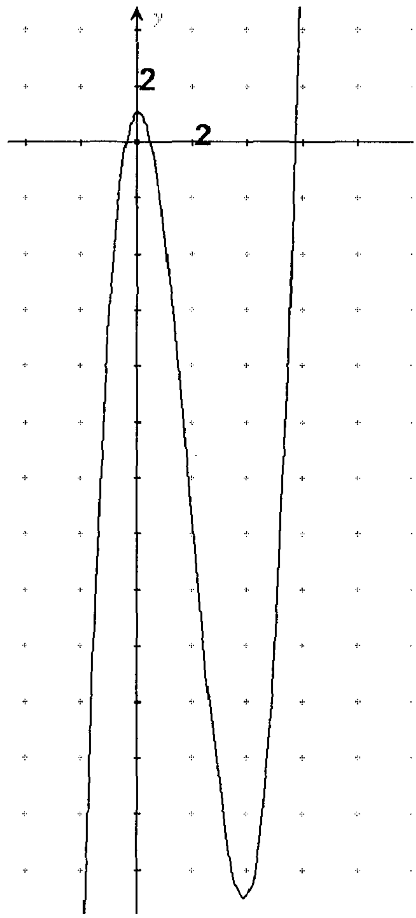
$f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 1$

1) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{6-\sqrt{33}}{3}$		$\frac{6+\sqrt{33}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\frac{6-\sqrt{33}}{3})$	↘	$f(\frac{6+\sqrt{33}}{3})$	↗	$+\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet deux branches paraboliques de direction celle de $(o,\vec{j})$ au voisinage de $\pm\infty$



2) f est continue sur [0,1] et $f(0) \times f(1) = -3 < 0$ d'où il existe un réel a de [0,1] telle que $f(a) = 0$

3) f(0,5)= …. ; f(0 ,6)=…..

$\Rightarrow$ $f(0,5) \times f(0,6) < 0 \Rightarrow 0,5 < a < 0,6$; $a = 0,5$

EXERCICE№23

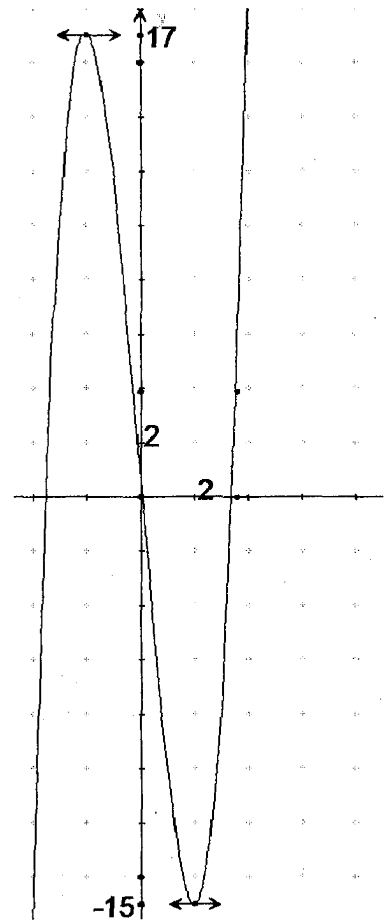
$f(x) = x^3 - 12x + 1$

1) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3(x^2 - 4)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	17	↘	-15	↗	$+\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet deux branches paraboliques de direction celle de $(o,\vec{j})$ au voisinage de $\pm\infty$



2) – a) $(\mathcal{C}_f) \cap (o,\vec{i}) = \{M_1 , M_2 , M_3\}$

b) f est continue sur [-4,-3] et $f(-4) \times f(-3) < 0 \Rightarrow -4 < x_1 < -3$

3) $0 < x_2 < 1$; $3 < x_3 < 4$

4) * pour k ∈]-∞ , -15[∪]17 , +∞[, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution

* pour k ∈ {-15 ;17 } l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions

* pour k ∈]-15 ;17 [l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions

5) l'équation $|f(x)| = 1$ admet six solutions (graphiquement)

EXERCICE№24

1) $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$

a) h est dérivable sur]0,+∞[et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} > 0$

d'où h est strictement croissante sur]0,+∞[

b) h est continue et strictement croissante sur]0,+∞[d'où :

$h(]0,+\infty[) =]\lim_{0^+} h, \lim_{+\infty} h[=]-\infty, +\infty[$

c) h est continue sur [2, 3] et $h(2) \times h(3) = (\sqrt{2} - \frac{3}{2})(\sqrt{3} - \frac{4}{3}) < 0$

d'où l'équation $h(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]2, 3[$

comme h est strictement croissante alors α est unique

d) (calculatrice :f(2,1)=-0,02 ;f(2,2)=0,02) $\Rightarrow \alpha \sim 2{,}1$

2) pour $x \in]0 ;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

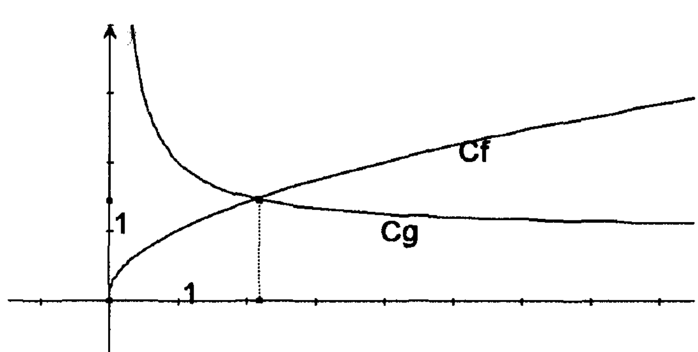
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

branche parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	1



EXERCICE№25

1) $f(x) = cos x - x$

$f'(x) = -(1 + sin x) < 0$

pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

d'où f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

2) f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(0) \times f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ d'où il existe un réel $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(a) = 0$

comme f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ alors a est unique

3) (calculatrice) $0,7 < a < 0,8 \Rightarrow \quad a \approx 0,7$

EXERCICE№26

$G(x) = f(x) - x$

1) $g(0) \times g(1) = f(0) \times (f(1) - 1) \leq 0$ car $f(0) et (f(1) \in [0, 1]$

2) g est continue sur $[0, 1]$ et $g(0) \times g(1) \leq 0$

d'où l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [0, 1]$

par suite α est une solution de l'équation $f(x) = x$

application

soit $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 0$

pour $x \in [0, 1]$

f est décroissante sur $[0, 1]$

$f([0, 1]) = [f(1), f(10)] = [0, 1]$

d'après 2) l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution $\alpha \in [0, 1]$.

QCM

1. Un = $\frac{n^2+2}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq n$
2. Un = $\frac{n+\cos(n)}{n+1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$
3. Un = n.sin($\frac{1}{n}$) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

VRAI-FAUX

1. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$
2. a) Vrai (th du cours)

   b)FAUX contre exemple : Un = -n et Vn =n+$\frac{1}{n}$

   Un+Vn converge vers 0 mais Un et Vn ne sont pas convergentes

3. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$ → $(Un)^2=1$

   $(Un)^2$ converge vers 1 mais Un ne converge pas

4. FAUX voir définition

5. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$

   U2n converge vers 1 ; U2n+1 converge vers -1 mais Un n'est pas

   Convergente

EXERCICE№1

1) $U_n = \frac{3n-1}{n+2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{3n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2-n+2} = 0$

4) $\lim_{n\to+\infty} (n^3 - 2n^2 + 1) = \lim_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

5) $U_n = \frac{3n-1}{|-n+2|}$

Pour n > 2 $U_n = \frac{3n-1}{n-2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

6) $U_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

8) $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

EXERCICE№2

$a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{n^2+1}$

1) $a_{2n} = \frac{2n[1+(-1)^{2n}]}{4n^2+1} = \frac{4n}{4n^2+1}$; $a_{2n+1} = 0$

2) $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{4n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{4n+\frac{1}{n}} = 0$ d'où

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et par suite a_n est convergente.

EXERCICE№3

$a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{n+1}$

1) $a_{2n} = \frac{2n[1+(-1)^{2n}]}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1}$; $a_{2n+1} = 0$

2) $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 2 \neq \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1}$ d'où (a_n) est divergente

EXERCICE№4

1) $\lim_{n\to+\infty} \left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 2$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $(-1 < \frac{1}{3} < 1)$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3+2^n} = 0$

3) $U_n = \frac{2^n}{1+2^n} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$; $(-1 < \frac{1}{2} < 1) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Par suite $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

EXERCICE№5

$U_n = \frac{2^n}{(-5)^{n+1}} = \frac{-1}{5}.\left(\frac{-2}{5}\right)^n$; $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$, car $(-1 < \frac{-2}{5} < 1)$

EXERCICE№6

1) $U_n = n + \sin n$

$\sin n \geq -1 \Rightarrow n + \sin n \geq n - 1 \Rightarrow U_n \geq n - 1$ et $\lim_{n \to +\infty} (n - 1) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

2) $U_n = \frac{1}{n}[\sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n]$; $(-1 \leq \sin n \leq 1)$

$\Rightarrow -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq U_n \leq \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left[-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

3) $U_n = -1 + \frac{1}{n^2}(\cos n + n)$; $(-1 \leq \cos n \leq 1)$

$\Rightarrow n - 1 \leq \cos n + n \leq n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}(\cos n + n) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - 1 \leq U_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right) = -1$ d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = -1$

EXERCICE№7

1) $U_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \ldots\ldots\ldots \times \frac{n-1}{n}$ en simplifiant on aura :

$U_n = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) $\mathcal{V}_n = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \ldots\ldots\ldots \times \frac{n+1}{n}$ en simplifiant on aura :

$\mathcal{V}_n = \frac{n+1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$

EXERCICE№8

$U_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$; $n \geq 1$

1) $n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$ d'où $\left(\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) $0 \leq U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geq 4$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

EXERCICE№9

$W_n = \frac{n!}{3^n}$; n∈ IN

1) $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$

$n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{n+1}{3} \geq \frac{4}{3}$, d'où $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{4}{3}$

2) démonstration par récurrence

*** vérifions pour n = 3**

$W_3 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^0 W_3$ (donc la proprieté est vraie à l'ordre initial)

*** Soit n ≥ 3**

Supposant que : $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ et montrons que : $W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

D'après 1) : $W_{n+1} \geq \frac{4}{3} W_n \Rightarrow W_{n+1} \geq \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$

$\Rightarrow W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

***conclusion :** $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

3) $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3 = +\infty$ car : $W_3 > 0$ et $\frac{4}{3} \geq 1$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$

EXERCICE№10

$U_n = \frac{n}{3^n}$; n ≥ 1

1) – a) $A_0(0,0)$; $A_1(1,\frac{1}{3})$; $A_2(2,\frac{2}{3^2})$; . . . . .

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$ pour : n ≥ 1 , $\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{2}{3} = \frac{1-n}{3n} \leq 0$

d'où : , $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$ pour : n ≥ 1

c) pour : n = 0 ; $U_0 = 0$; $U_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$, (vraie)

Supposant que : $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que : $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

D'après b) : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ *or* $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

***conclusion :** $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour n ∈ IN

d) $0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) pour k ≥ 1 on a : $U_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right)$: somme de n termes d'une suites géométrique

De raison $\left(\frac{2}{3}\right)$

D'où : $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2 \Rightarrow S_n \leq 2$ car $U_0 = 0$

b) $S_{n+1} - S_n = = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0$

(S_n) est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

EXERCICE№11

$a > 0$, $b_n = \frac{n}{(1+a)^n}$

1) $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \Rightarrow (1+a)^n \geq C_n^2 a^2 \Rightarrow (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$

2) pour n ≥ 2

$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)a^2} \Rightarrow \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{(n-1)a^2} \Rightarrow 0 \leq b_n \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(n-1)a^2} = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

3) $0 < q < 1$

a) $\frac{1}{q} > 1$ d'où il existe un réel $a > 0$ tel que $\frac{1}{q} = 1 + a$

par suite $q = \frac{1}{1+a}$

b) $x_n = x_0.q^n$; $|x_n| = \frac{|x_0|}{(1+a)^n} \Rightarrow n|x_n| = |x_0|\, b_n$

$\lim_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$ d'après 2)

Par suite $\lim_{n \to +\infty} n x_n = 0$

4) – a) la suite $x_n = \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} n x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$

b) la suite $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} n x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = 0$

c) $U_n = n.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

soit $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} n x_n = 0$, par suite $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

EXERCICE№12

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

1) démonstartion par reccurence:

* pour n=1 , $U_1 = 1 \leq 3$ (vrai)

* supposons que : $U_n \leq 3$ et montrons que : $U_{n+1} \leq 3$

$U_n \leq 3 \Rightarrow 3.U_n \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3.U_n} \leq 3 \Rightarrow U_{n+1} \leq 3$

conclusion : $U_n \leq 3$;$\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3.U_n} - U_n = \dfrac{3U_n - U_n^2}{\sqrt{3.U_n} + U_n} = \dfrac{U_n(3 - U_n)}{\sqrt{3.U_n} + U_n}$

on a : $U_n > 0$ et $3 - U_n \geq 0$ d'où $U_{n+1} - U_n \geq 0$ $\Rightarrow U_n \leq U_{n+1}$

par suite : (U_n) est croissante

3) (U_n) est croissante et majorée par 3 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \geq U_1 \Rightarrow U_n \geq 1$ Donc $1 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \ell \leq 3$

* $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x}$ f est continue sur $[1,3]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \sqrt{3\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3\ell \Leftrightarrow \ell(\ell - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$,$0 \notin [1,3]$ d'où $\ell = 3$

conclusion : $\lim U_n = 3$

EXERCICE№13

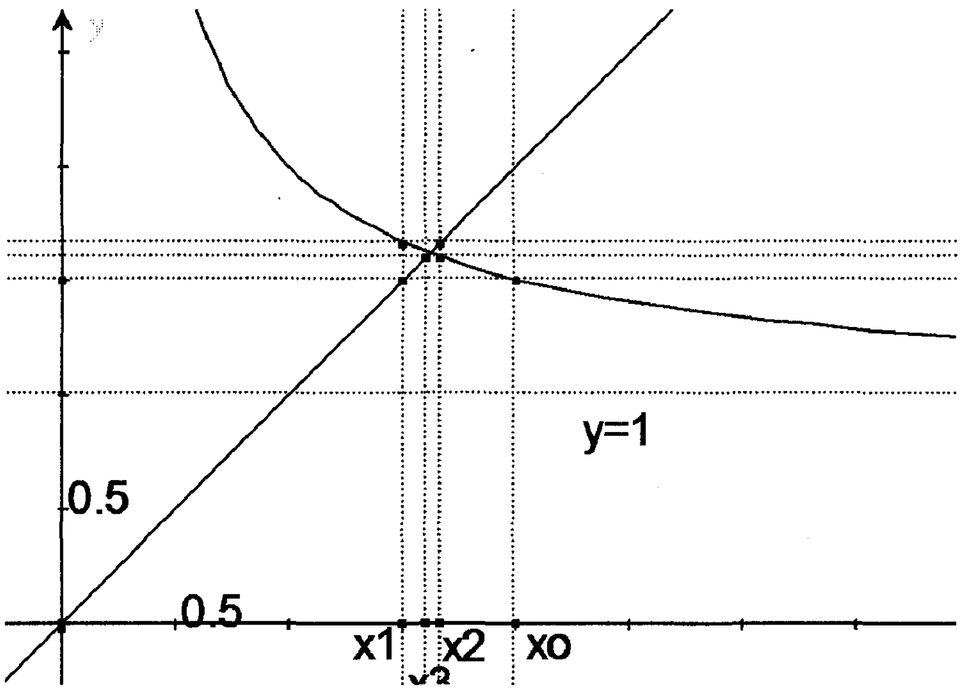
1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$

x	0	+∞
f'(x)	-	
f(x)	+∞ ↘	1

f est continue et strictement décroissante sur]0,+∞[d'où

$f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f, \lim_{0^+} f\right[=]1,+\infty[$

2)



3) $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$f(\varphi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1 + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

4) $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

a) $x_1 = f(x_0) = f(2) = \dfrac{3}{2}$

$x_2 = f(x_1) = f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{5}{3}$

$x_3 = \dfrac{8}{5}$; $x_4 = \dfrac{13}{8}$

b) par reccurence

* $U_0 = 2 \in \mathbb{Q}_+$ (vrai)

* supposons que $x_n \in \mathbb{Q}_+$ et montrons que $x_{n+1} \in \mathbb{Q}_+$

$x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \dfrac{1}{x_n} \in \mathbb{Q}_+$

c) * montrons que : $x_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$;$\forall n \in \mathbb{N}$

* pour n=0 : $x_0 = 2 \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$

* supposons que : $x_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ et montrons que : $x_{n+1} \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$

$x_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \Rightarrow \dfrac{3}{2} \leq x_n \leq 2 \Rightarrow f(2) \leq f(x_n) \leq f(\dfrac{3}{2})$ (car f est décroissante)

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq 2$$

conclusion: $x_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$;$\forall n \in \mathbb{N}$

* $|x_{n+1} - \varphi| = |f(x_n) - f(\varphi)| = \left|1 + \dfrac{1}{x_n} - 1 - \dfrac{1}{\varphi}\right| = \left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{\varphi}\right| = \dfrac{|x_n - \varphi|}{\varphi . x_n}$

comparons $\dfrac{1}{\varphi . x_n}$ et $\dfrac{4}{9}$

$$x_n \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{2}{3}\times\frac{1}{\varphi} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{3(\sqrt{5}-1)}{9} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{4}{9}$$

d'où $|x_{n+1}-\varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n-\varphi|$

d) $|x_1-\varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n-\varphi|$

$|x_2-\varphi| \leq \frac{4}{9}|x_1-\varphi|$

$|x_3-\varphi| \leq \frac{4}{9}|x_2-\varphi|$

.

.

$|x_n-\varphi| \leq \frac{4}{9}|x_{n-1}-\varphi|$

multiplions membre à membre et simplifions on a :

$|x_n-\varphi| \leq (\frac{4}{9})^n\,|2-\varphi|$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{4}{9})^n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-\varphi)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\varphi$

EXERCICE№14

$U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$; $n\in\mathbb{N}^*$

1) a) $U_1=\sum\limits_{k=1}^{1}\frac{1}{k^2}=1$; $U_2=\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$;$U_3=U_2+\frac{1}{3^2}=\frac{5}{4}+\frac{1}{9}=\frac{49}{36}$

b) $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(n+1)^2}\geq 0$ d'où (U_n) est croissante

2) a) $k\geq 2$

$(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2(k-1)}\geq 0$ d'où $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

b) $n\geq 2$ $k\geq 2$, on a : $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \Rightarrow U_n - 1 \le 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow U_n \le 2 - \frac{1}{n}$$

c) (U_n) est croissante et majorée par 2

elle est donc convergente soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

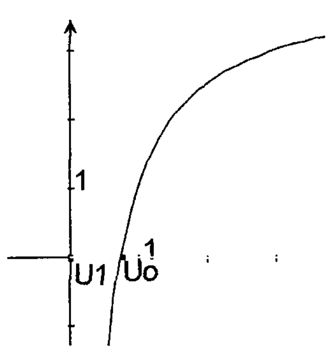
(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \ge U_3$, pour $n \ge 3$

$$\Rightarrow \frac{49}{36} \le U_n \le 2-\frac{1}{n} \quad or \quad \lim_{n\to+\infty}(2-\frac{1}{n})=2 \quad \text{d'où} \quad \frac{49}{36} \le \ell \le 2$$

EXERCICE№15

$x \in \left]0,+\infty\right[$

1) $f(x)=4-\dfrac{3}{x}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{3}{x^2}>0$



x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f′(x)	+
f(x)	$-\infty \nearrow 4$

2) $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

a) $U_1=f(U_0)=f(\frac{3}{4})=0$

b) $U_2=f(U_1)=f(0)$ n'existe pas d'où (U_n) n'est pas définie

3) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1=f(U_0)=3$; $U_2=3$; $U_3=3$

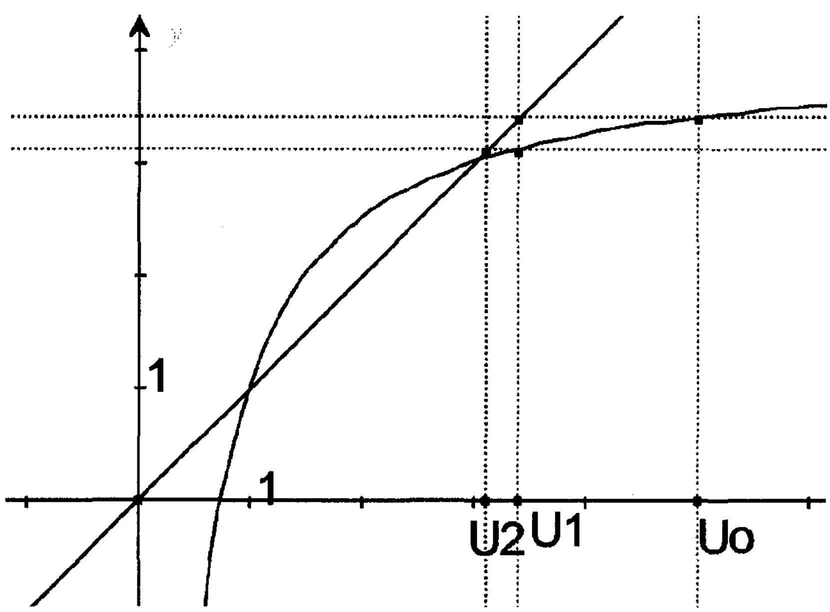
b) •pour n=0 on a $U_0=3$

• supposons que $U_n=3$ et montrons que : $U_{n+1}=3$

$U_{n+1}=f(U_n)=f(3)=3$ d'où : $U_n=3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

4) $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1=f(5)={}^{17}\!/_{5}$ $U_2=f(\frac{17}{5})=\frac{53}{17}$



b) montrons que : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

•$U_1 = \frac{17}{5} > 3$ (vrai)

• supposons que : $U_n \geq 3$ et montrons que $U_{n+1} \geq 3$

$U_n \geq 3 \Rightarrow f(U_n) \geq f(3)$ (car f est croissante) $\Rightarrow$ $U_{n+1} \geq 3$

conclusion : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$* \ U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 3}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 4U_n - 3}{U_n} = \frac{-(U_n - 1).(U_n - 3)}{U_n}$$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$ car $U_n \geq 3$ d'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 3 donc elle est convergente

soit $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ on a: $U_n \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq 3$

f est continue sur $[3, +\infty[$ d'où $\alpha = f(\alpha)$

$\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4\alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = 3$ *or* $\alpha \geq 3 \Rightarrow \alpha = 3$

d) $U_n - 3 \leq 10^{-5}$ calculatrice $n_0 = 11$ $(n \geq 11)$

EXERCICE№16

$$\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = 5 - \frac{6}{U_n} , \ n \geq 1 \end{cases}$$

1) $U_2 = \frac{19}{5}$; $U_3 = \frac{65}{19}$

2) démonstration par récurrence :

*** vérifions pour n = 0**

$U_{0+1} = U_1 = 5$

$\frac{3^{0+2} - 2^{0+2}}{3^{0+1} - 2^{0+1}} = \frac{9-4}{3-2} = 5$; $U_{0+1} = \frac{3^{0+2} - 2^{0+2}}{3^{0+1} - 2^{0+1}}$ (vraie)

***supposons que :** $U_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$ et montrons que :

$U_{n+2} = \frac{3^{n+3} - 2^{n+3}}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$, on a : $U_{n+2} = 5 - \frac{6}{U_{n+1}} = 5 - \frac{6(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$

$$= \frac{5(3^{n+2} - 2^{n+2}) - 6(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}} = \frac{5 \times 3^{n+2} - 5 \times 2^{n+2} - 2 \times 3^{n+2} - 3 \times 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$$

$$= \frac{3 \times 3^{n+2} - 2 \times 2^{n+2}}{3^{n+2} - 2^{n+2}} = \frac{3^{n+3} - 2^{n+3}}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$$

*** conclusion :** $U_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$ pour tout n ∈ IN

3) pour n ≥ 1 ; $U_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n} = \frac{3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

EXERCICE№17

1) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^{\ 2} + a_n\ ,\ n \geq 0 \end{cases}$

* pour n = 0 on a : $a_0 \geq 0$ (vraie)

***supposons que :** $a_n \geq n$; montrons que : $a_{n+1} \geq n+1$

$a_n \geq n \Rightarrow a_n^{\ 2} \geq n^2$ d'où : $a_n^{\ 2} + a_n \geq n^2 + n$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq n(n+1)$ d'où : $a_{n+1} \geq n+1$

* **conclusion :** $a_n \geq n$ pour tout n ∈ IN ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

2) – a) *) pour n = 0 , on a : $-1 \leq b_0 \leq 0$

* supposons que : $-1 \leq b_n \leq 0$, montrons que : $-1 \leq b_{n+1} \leq 0$

$-1 \leq b_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq b_n + 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \geq b_n(b_n+1) \geq b_n$

$\Rightarrow -1 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq 0$ d'où : $-1 \leq b_{n+1} \leq 0$

* **conclusion :** $-1 \leq b_n \leq 0\ \forall$ n ∈ IN

b) $b_{n+1} - b_n = b_n^{\ 2} \geq 0 \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n$ d'où : (b_n) est croissante.

c) (b_n) est croissante et majorée par 0 , elle est donc convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

$-1 \leq b_n \leq 0 \Rightarrow \ell \in [0,1]$

On a : $b_{n+1} = f(b_n)$ avec $f(x) = x^2 + x$

F est continue sur [0,1] d'où $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell^2 + \ell = \ell \Leftrightarrow \ell^2 = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

EXERCICE№18

$\begin{cases} U_0 = 0{,}1 \\ U_{n+1} = 1{,}6U_n.(1-U_n) \end{cases}$

1) $f(x) = 1{,}6.x.(1-x) \Rightarrow f'(x) = 1{,}6.[1-2x]$

x	-∞	½	+∞
f'(x)	+	0	-
f(x)	-∞ ↗	0,4	↘ -∞

2) * pour n=0, on a : $0,1 \leq U_0 = 0,1 < \frac{3}{8}$

* supposons que : $0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8}$ *et montrons* que : $0,1 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$

$0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8} \Rightarrow f(0,1) \leq f(U_n) \leq f(\frac{3}{8})$ (car f est croissante sur $\left[(0,1);\frac{3}{8}\right]$

$\Rightarrow 0,144 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8} \qquad \Rightarrow 0,1 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$

conclusion : $0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $U_{n+1}-U_n = U_n\left[1,6-1,6U_n-1\right] = U_n.\left[0,6-1,6U_n\right] = \frac{U_n}{10}\left[6-16U_n\right] = \frac{8}{5}U_n.\left[\frac{3}{8}-U_n\right]$

$\Rightarrow U_{n+1}-U_n \geq 0$ car $0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8}$ d'où (U_n) est croissante

(U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{8}$ elle est donc convergente

4) a) $1,6.(\frac{5}{8}-U_n)(\frac{3}{8}-U_n) = 1,6.\left[\frac{15}{64}-U_n+U_n^2\right] = \frac{16}{10}\times\frac{15}{64}-(1,6)(U_n-U_n^2)$

$$= \frac{3}{8}-(1,6)U_n(1-U_n) = \frac{3}{8}-U_{n+1}$$

b) $V_n = \frac{3}{8}-U_n$

* $V_n \geq 0$ car $U_n \leq 3/8$

* d'après 4) a) : $V_{n+1} = 1,6(\frac{5}{8}-U_n).V_n \Rightarrow \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = (1,6)(\frac{5}{8}-U_n)$

$U_n \geq 0,1 \Rightarrow -U_n \leq \frac{-1}{10} \Rightarrow \frac{5}{8}-U_n \leq \frac{21}{40} \Rightarrow (1,6)(\frac{5}{8}-U_n) \leq \frac{16}{10}\times\frac{21}{40} \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{4\times21}{100}$

$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 0,84$

c) * $V_0 = \frac{3}{8}-U_0 = \frac{3}{8}-\frac{1}{10} = \frac{11}{40} \quad \Rightarrow 0 \leq V_0 \leq (0,84)^0 = 1$ (vrai)

* supposons que : $0 \leq V_n \leq (0,84)^n$ *et* montrons que : $0 \leq V_{n+1} \leq (0,84)^{n+1}$

• $V_{n+1} \geq 0$ d'aprés 4) b)

• $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 0,84 \Rightarrow V_{n+1} \leq (0,84).V_n \Rightarrow V_{n+1} \leq (0,84).(0,84)^n$

d'où $0 \leq V_{n+1} \leq (0,84)^{n+1}$

conclusion : $0 \leq V_n \leq (0,84)^n$

d) $0 \leq V_n \leq (0,84)^n$ *or* $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,84)^n = 0$ car $0,84 \in]-1,1[$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

$U_n = \frac{3}{8} - V_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{8}$

c) on a : $0 \leq \frac{3}{8} - U_n \leq (0,84)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$(0,84)^n \leq 10^{-5} \Rightarrow (calculatrice)$ $n_0 \geq 67$

EXERCICE№19

1) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-5}{x^2}\right) = \frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{2x^2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{5}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

2) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$

Montrons par récurrence que : $U_n > \sqrt{5}$; pour $n \geq 0$

* $U_0 = 3 > \sqrt{5}$ (vraie)

* supposons que : $U_n > \sqrt{5}$ et montrons que : $U_{n+1} > \sqrt{5}$

$U_n > \sqrt{5} \Longrightarrow f(U_n) > f(\sqrt{5})$ car f est strictement croissante sur $[\sqrt{5}, +\infty[$

D'où : $U_{n+1} > \sqrt{5}$

Conclusion : $U_n > \sqrt{5}$; $\forall$ n $\in$ IN $\Longrightarrow U_{n+1} > \sqrt{5}$ **(1)**

* $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{5}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{U_n} - U_n\right)$

$$= \frac{5-U_n{}^2}{2U_n} = \frac{(\sqrt{5}-U_n)(\sqrt{5}+U_n)}{2U_n}$$

$U_n > \sqrt{5}$ d'où : $U_{n+1} - U_n < 0 \Longrightarrow (U_n)$ est strictement décroissante

Par suite : $U_{n+1} < U_n \le U_0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n \le 3$ **(2)**

$(\mathbf{1}) + (\mathbf{2}) \Rightarrow \sqrt{5} < U_{n+1} < U_n \le 3$

b) (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$, elle est donc convergente.
Soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} U_n$
$\sqrt{5} < U_n \le 3 \Rightarrow \ell \in [\sqrt{5},3]$

$U_{n+1} = f(U_n)$; f est continue sur $[\sqrt{5},3]$ d'où : $\ell = f(\ell)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{5}{\ell}\right) = \ell \Leftrightarrow \ell + \frac{5}{\ell} = 2\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{5}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 5 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{5}$

Comme $\ell \ge \sqrt{5}$; conclusion : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{5}$

EXERCICE№20

1) $\begin{cases} U_n = \frac{2}{n} \\ \mathcal{V}_n = -\frac{3}{n} \end{cases}$ n ≥ 2

$n \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \ge \frac{1}{n+1}$ d'où : $\frac{2}{n} \ge \frac{2}{n+1}$ et $-\frac{3}{n} \le -\frac{3}{n+1}$

$\Rightarrow U_n \ge U_{n+1}$ et $\mathcal{V}_n \le \mathcal{V}_{n+1}$

(U_n)est décroissante et $(\mathcal{V}_n)$ est croissante
Et on a : $\mathcal{V}_n \le U_n$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n - \mathcal{V}_n = 0$
conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

2)) $\begin{cases} U_n = \frac{n+2}{n-1} \\ \mathcal{V}_n = \frac{2n+3}{2n+5} \end{cases}$ (n ≥ 4)

$U_n - \mathcal{V}_n = \frac{8n+13}{(2n+5)(n-1)} \ge 0$ d'où : $\mathcal{V}_n \le U_n$

(U_n)est décroissante et $(\mathcal{V}_n)$ est croissante

$\lim_{n \to +\infty}(U_n - \mathcal{V}_n) = 0$

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

3) $U_n \geq 0$ et $(\mathcal{V}_n) \leq 0$ d'où : $\mathcal{V}_n \leq U_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq 0$ d'où (U_n) est décroissante .

$\mathcal{V}_n = - U_n \Rightarrow (\mathcal{V}_n)$ est croissante

$\lim_{n \to +\infty}(U_n - \mathcal{V}_n) = \lim_{n \to +\infty} 2U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

EXERCICE№21

1) soit $W_n = U_n - \mathcal{V}_n$

$W_{n+1} = U_{n+1} - \mathcal{V}_{n+1} = \frac{U_n+2\mathcal{V}_n}{3} - \frac{U_n+3\mathcal{V}_n}{4} = \frac{U_n-\mathcal{V}_n}{12} = \frac{1}{12} W_n$

D'où (W_n) est une suite géometrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme$W_0 = 11$

2) $U_n - \mathcal{V}_n = W_n = W_0.q^n \Rightarrow U_n - \mathcal{V}_n = 11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \Rightarrow U_n - \mathcal{V}_n \geq 0$

Par suite : $U_n \geq \mathcal{V}_n$

3)* $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n+2\mathcal{V}_n}{3} - U_n = \frac{2(\mathcal{V}_n-U_n)}{3} = \frac{2}{3} W_n \leq 0$ d'où : (U_n) est décroissante

* $\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = \frac{1}{4} W_n \geq 0$ d'où : $(\mathcal{V}_n)$ est croissante

* $\lim_{n \to +\infty}(U_n - \mathcal{V}_n) = \lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} 11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$

* on sait que : $U_n \geq \mathcal{V}_n$;

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes

par suite elles convergent vers une même limite α

4) $t_n = 3U_n + 8\mathcal{V}_n$

a) $t_{n+1} = 3U_{n+1} + 8\mathcal{V}_{n+1} = (U_n + 2\mathcal{V}_n) + 2(U_n + 3\mathcal{V}_n)$

$= 3U_{n+1} + 8\mathcal{V}_{n+1} = t_n$ d'où : (t_n) est constante.

b) $t_0 = 3U_0 + 8\mathcal{V}_0$

$t_0 = 44$ d'où : $t_n = 44$, $\forall$ n $\in$ IN

$\Rightarrow 3U_n + 8\mathcal{V}_n = 44 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}(3U_n + 8\mathcal{V}_n) = 44 \Rightarrow 11\alpha = 44$

$\Rightarrow \alpha = \frac{44}{11} = 4$

EXERCICE№22

0<b<a

1) a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab)$

$(\sqrt{ab})^2=a.b$

$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab)$

$=\frac{1}{4}(a-b)^2\geq 0$

d'où $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq(\sqrt{ab})^2$ et par suite $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$

b) $(a-b)^2-(a^2-b^2)=a^2+b^2-2ab-a^2+b^2=2b^2-2ab$

$=2b.(b-a)\leq 0$ (car 0<b<a)

d'où $(a-b)^2\leq a^2-b^2$

2) $\begin{cases}a_0=a\\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\end{cases}$, $\begin{cases}b_0=b\\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\end{cases}$

a) * pour n=0 $b_0=b\leq a_0=a$

* supposons que : $b_n\leq a_n$ et montrons que : $b_{n+1}\leq a_{n+1}$

$b_{n+1}\leq a_{n+1}$ d'après 1) a) conclusion : $b_n\leq a_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b)* $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}\leq 0$ d'où (a_n) est décroissante

* $b_{n+1}-b_n=\sqrt{a_nb_n}-b_n=\sqrt{b_n}\left[\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right]\geq 0$ car $\sqrt{a_n}\geq\sqrt{b_n}$

d'où (b_n) est croissante

3) a) d'après 1) b) : $(a_{n+1}-b_{n+1})^2\leq a_{n+1}^2-b_{n+1}^2\Rightarrow(a_{n+1}-b_{n+1})^2\leq\frac{(a_n+b_n)^2}{4}-a_nb_n$

$$\Rightarrow(a_{n+1}-b_{n+1})^2\leq\frac{a_n^2+b_n^2+2a_nb_n}{4}-a_nb_n$$

$$\Rightarrow(a_{n+1}-b_{n+1})^2\leq\frac{a_n^2+b_n^2-2a_nb_n}{4}$$

$$\Rightarrow(a_{n+1}-b_{n+1})^2\leq\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)^2$$

b) * pour n=0 $\quad a_0 - b_0 = a - b \leq \dfrac{a-b}{2^0}$ (vrai)

* supposons que : $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n}$ et montrons que : $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a-b}{2^{n+1}}$

on a : $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$ or $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n}$ d'où $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a-b}{2^{n+1}}$

conclusion : $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4)
* $b_n \leq a_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
* (b_n) est croissante et (a_n) décroissante
* $0 \leq a_n - b_n \leq (\frac{1}{2})^n.(a-b)$ *or* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n.(a-b) = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

d'où (a_n) et (b_n) sont adjacentes par suite, elles convergent vers la meme limite α

5) (a_n) est décroissante $\Rightarrow a_n \leq a_0 \Rightarrow a_n \leq a$;$\forall n \in \mathbb{N}$

on a : $b_n \leq a_n$ d'où $b_n \leq a$

(b_n) est croissante et majorée par a
et (b_n) converge vers α
$\Rightarrow$ *alors* $b_n \leq \alpha$;$\forall n \in \mathbb{N}$

de meme : $a_n \geq \alpha$; $\forall n \in \mathbb{N}$ d'où $b_n \leq \alpha \leq a_n$;$\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n} \Rightarrow 0 \leq a_n - \alpha \leq \dfrac{a-b}{2^n}$

pour a=2 et b=1 $\quad 0 \leq a_n - \alpha \leq \dfrac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-10} \Leftrightarrow 2^n \geq 10^{10}$$

on a : $2^{40} \geq 10^{10} \leftarrow$ (*calculatrice*) d'où $\alpha \simeq a_{40}$ (à calculer)

QCM

1. $f(x)=\sin(\pi x^2) \Rightarrow f'(x)=2\pi x.\cos(\pi x^2)$
2. a/ $f(-2)<f(-1)$

   b/ $y= -\frac{1}{2}x$

3. $f([1,+\infty[=[-1,+\infty[$
4. $x = 2$
5. (ζ_f) admet deux tangentes horizontales

VRAI – FAUX :

1. (VRAI) f est continue sur $[-1,2]$ et dérivable sur $]-1,2[$ alors d'après le théorème des accroissement fini il existe au moins un réel $c \in]-1,2[$ tel que

   $f(2) - f(-1) = f'(c)(2-(-1)) \Leftrightarrow f'(c)=-1$
2. (FAUX)

   Contre exemple : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x$ $h(x)= (f.g)(x)= x\sqrt{x}$

   h est dérivable en 0 mais f n'est pas dérivable à droite en 0

3. (VRAI)

   $f'(x) = 3x^2 -6x +2$ $\Delta' = 3 >0$ alors l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions distinctes (Rq :on pourra utiliser le th acc fini)

4. (VRAI) f est dérivable sur $[2,5]$ et $|f'(t)| \leq 2 \ \forall t \in [2,5]$ alors d'après le th des inégalités des Accroissement finis :

$$|f(5)-f(2)| \leq 2\times(5-2) \Rightarrow |f(5)-f(2)| \leq 6$$

EXERCICE№1

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; a = 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{x+1}{x-1}-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-2}{(x-1)} = -2$$

D'où f est dérivable en 2 et f′(2) = -2

(T) : $y = f'(2).(x - 2) + f(2)$

(T) : $y = -2x + 7$

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x$; a = 0

Comme étant fonction polynôme , f est dérivable sur IR et

$f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$; $f''(0) = -1$

(T) : $y = f'(0).(x - 0) + f(0)$

(T) : $y = -x$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; a = -3

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{5}}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{(x+3)(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5})}$$

$= \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)}{(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5})} = \frac{-3}{\sqrt{5}}$ d'où f est dérivable en (-3) et $f'(-3) = \frac{-3}{\sqrt{5}}$

(T) : $y = \frac{-3}{\sqrt{5}}.(x+3) + \sqrt{5}$

(T) : $y = \frac{-3}{\sqrt{5}}.(x + \frac{4}{3})$

4) $f(x) = \sqrt{|2x+1|}$; a = -1

Pour $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}]$; $f(x) = \sqrt{-2x-1}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{-2x-1}-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{-2(x+1)}{(x+1)(\sqrt{-2x-1}+1)}$$

$= \lim_{x \to -1} \frac{-2}{(\sqrt{-2x-1}+1)} = -1$ d'où f est dérivable en (-1) et $f'(-1) = -1$

(T) : $y = -1\ (x+3) + 1$

(T) : $y = -x$

EXERCICE№2

1) soit $f(x) = \sqrt{x+1}$, f est dérivable sur]-1, +∞[et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f''(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2) soit $f(x) = x - \sqrt{x-2}$, f est dérivable sur]2, +∞[et $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - \sqrt{x-2} - 2}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{1}{2}$$

3) soit $f(x) = (x+1)^{195}$

f est dérivable sur IR et $f'(x) = 195(x+1)^{194}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^{195} - 1}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 195$$

4) soit $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 14$$

EXERCICE№3

$f(x) = |x^2 - 4|$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-	0	+	

1) – a) * $\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} [-(x+2)]$

$= -4 = f'_g(2)$

* $\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} (x+2) = 4 = f'_d(2)$

$f'_g(2) \neq f'_d(2)$ d'où f n'est pas dérivable en 2

b) $\lim_{x \to (-2)^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{(x^2-4)}{x+2}$

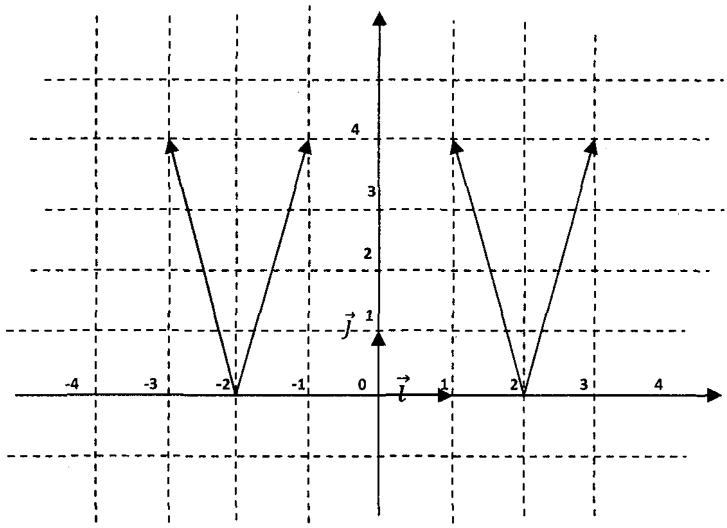
$= \lim_{x \to (-2)^-} (x-2) = -4 = f'_g(-2)$

* $\lim_{x \to (-2)^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2}$

$= \lim_{x \to (-2)^+} [-(x - 2)] = 4 = f'_d(-2)$

$f'_g(-2) \neq f'_d(-2)$ d'où f n'est pas dérivable en (-2)

2)



EXERCICE№4

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2} \to f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ f est dérivable en 1et f'(1)=-2

f(1)+f'(1).h est une approximation de f(1+h) Donc

1-2h est une approximation de $\frac{1}{(1+h)^2}$

*1- $2.(2.10^{-10})$=0,9999999996 est une approximation de

$$\frac{1}{(1,0000000002)^2} = \frac{1}{(1+2.10^{-10})}$$

* même travail pour h=-2.10^{-10} donne

1,0000000004 est une approximation de $\frac{1}{(0,9999999998)^2}$

EXERCICE№5

1. $f(x)= 3x^{10}-\frac{5}{4}x^8 +3x -10$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et $f'(x)=30x^9-10x^7+3$

2. $f(x)=(1-x-3x^3)(x^2+2x)^3$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et $f'(x)= (-1-9x^2)(x^2+2x)^3+3(2x+2)(x^2+2x)^2(1-x-3x^3)$

3. $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur $D_f = IR\backslash\{1\}$ et en particulier sur $]1,+\infty[$ et $f'(x)=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$

4. $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur $D_f = IR^*$ et en particulier sur $[1,+\infty[$
$f'(x) = 1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$

5. les fonctions $x \mapsto \cos(3x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$ sont dérivables sur IR d'où f est dérivable sur IR et
$f'(x)= -3\sin(3x)-2\cos(2x)$

6. $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ La fonction $x \mapsto 1-\cos x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ donc f est dérivable sur $]0,\pi[$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables et $f'(x) = \frac{-1}{1-\cos x}$
7. $f(x)= (1+\sin(2x))^3$ f est dérivable sur IR comme étant la puissance d'une fonction dérivable et $f'(x)= 6\cos(2x).[1+\sin(2x)]^2$
8. $f(x)=\tan^2(\frac{\pi}{2}x)$ la fonction u: $x \mapsto \frac{\pi}{2}x$ est dérivable sur $[0,1[$ et $u([0,1[)= [0,\frac{\pi}{2}[$ et comme la fonction tangente est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ Alors f est dérivable sur $[0,1[$ comme étant la composé de deux fonctions dérivables et
$f'(x)=2.tg(\frac{\pi}{2}x).[\frac{\pi}{2}.(1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x))] = \pi.tg(\frac{\pi}{2}x).[1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x)]$

9. $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable et strictement positive sur $]1,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f'(x)= \frac{1}{(x+1).\sqrt{x^2-1}}$
10. $x \mapsto \sqrt{x}-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sqrt{x}+2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables et

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+2)^2}$$

<u>EXERCICE№6</u>

f $(x) = x^3 - 3x$ g$(x) = x - \frac{4}{x}$

1) M(x,y) $\in (\mathcal{C})\cap(\mathcal{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = x - \frac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = x - \frac{4}{x} \\ y = x^3 - 3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x + \frac{4}{x} = 0 \\ y = x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \\ y = x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 = 0 \\ y = x^3 - 3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$

D'où : $(\mathcal{C})\cap(\mathcal{C}') = \{A(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

2) * f′ $(x) = 3x^2 - 3$

g′$(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$

* f′ $(-\sqrt{2}) =$ g′$(-\sqrt{2}) = 3$

d'où : $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ admettent la même tangente (T_A) en A

(T_A) : y = $3(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$

(T_A) : y = $3x + 4\sqrt{2}$

* f′ $(\sqrt{2}) =$ g′$(\sqrt{2}) = 3$

(T_B) : y = $3(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}$

(T_B) : y = $3x - 4\sqrt{2}$

<u>EXERCICE№7</u>

1) <u>continuité en (-1)</u>

f(-1) = 0

* $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \sqrt{-x-1} = 0 =$ f(-1)

* $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} (x^2 - 1) = 0 =$ f(-1)

f est continue à droite et à gauche en (-1) , d'où : f est continue en (-1)

continuité en 1

f(1) = 0

* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 = f(1)$

* $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2\sin(x-1) = 0 = f(1)$

f est continue à droite et à gauche en 1 , d'où : *f est continue en 1*

2) dérivabilité en (-1)

* $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{\sqrt{-x-1}}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{-(x+1)}{(x+1)\sqrt{-x-1}}$

$= \lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{-1}{\sqrt{-x-1}} = -\infty$; f n'est pas dérivable en (-1)

dérivabilité en 1

* $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2 = f'_g(1)$

* $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2\sin(x-1)}{x-1}$; on pose : $X = x - 1$

$\lim\limits_{X \to 0^+} \frac{2\sin X}{X} = 2 = f'_d(1)$

f est dérivable à droite et à gauche en 1 et $f'_g(1) = f'_d(1) = 2$, d'où : f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

3) * la fonction $x \mapsto -x-1$ est dérivable et strictement positive sur]-∞,-1[

D'où : f est dérivable sur]-∞,-1[

* la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur IR , en particulier sur]-1,1[

d'où : f est dérivable sur]-1,1[

* la fonction $x \mapsto 2\sin(x-1)$ est dérivable sur IR ,

en particulier sur] 1,+∞[, d'où : f est dérivable sur] 1,+∞[.

EXERCICE№8

1) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x + 4$

$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$

$f''(x) = 20x^3 - 12x$

$f^{(3)}(x) = 60x^2 - 12$

$f^{(4)}(x) = 120x$

$f^{(5)}(x) = 120$

$f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geq 6$

2) $f(x) = \cos x + \sin x$

* on pose : $g(x) = \sin x$; $g'(x) = \cos x$; $g''(x) = -\sin x$

$g^{(3)}(x) = -\cos x$; $g^{(4)}(x) = \sin x$

On pourra remarquer que : $g^{(2n)}(x) = (-1)^n.\sin x$, pour $n \geq 1$

Montrons ce résultat par récurrence :

* <u>pour n = 1</u>

$g^{(2)}(x) = g''(x) = -\sin x = (-1)^1.\sin x$ (vraie)

* <u>supposons que</u> : $g^{(2n)}(x) = (-1)^n.\sin x$

et <u>montrons que</u> : $g^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1}.\sin x$

$g^{(2n)}(x) = (-1)^n.\sin x \Rightarrow g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$

$\Rightarrow g^{(2n+2)}(x) = -(-1)^n \sin x \Rightarrow g^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$

<u>Conclusion :</u>

$g^{(2n)}(x) = (-1)^n.\sin x$, *par suite* $g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$

De même on pose : $h(x) = \cos x$

$h^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$

$h^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$

<u>Conclusion :</u>

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n.[\cos x + \sin x]$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n[\cos x - \sin x]$

3) $f(x) = \sin 2x$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n.2^{2n} \sin 2x$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n.2^{2n+1} \cos 2x$

(récurrence)

4) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

$f'(x) = -\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]$

$f''(x) = 2\left[\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right]$

$f^{(3)}(x) = -6\left[\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x+1)^4}\right]$

$f^{(4)}(x) = 24\left[\frac{1}{(x-1)^5} + \frac{1}{(x+1)^5}\right]$

Remarquons que pour $n \geq 1$: $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n!)\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

(DEMONSTRATION PAR RECURRENCE)

<u>EXERCICE№9</u>

1. La fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ d'où

   f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

2. La fonction : $x \mapsto \frac{\pi}{x}$ est dérivable sur [1,+∞[et comme la fonction sinus est dérivable sur IR Alors f est dérivable sur [1,+∞[et f'(x)= $\frac{-\pi}{x^2}\cos(\frac{\pi}{x})$
3. f(x)= tg(sin(x))

La fonction sinus est dérivable sur IR et $\forall x \in IR;\ \sin(x) \in [-1,1]$; comme

la fonction tangente est dérivable sur [-1,1]Alors f est dérivable sur IR et

f'(x)=cos(x).[1+tg²(sin(x))]

EXERCICE№10

$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$

1) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

$f'(x) = -3 \Leftrightarrow -3(x-1)^2 = x^2 - 2x - 3$

$\Leftrightarrow -3(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0$

$\Leftrightarrow 4x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 2$

Conclusion :

Les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ respectivement aux points d'abscisses : 0 et 2 sont parallèles à la droite d'équation : y = -3x

2) A(0,-6) et B(2,4) $\begin{cases} (T_A): y = -3x - 6 \\ (T_B): y = -3x + 10 \end{cases}$

EXERCICE№11

$f(x) = x^3 - 3x + 2$; A(1,0) et B(2,4)

$f'(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 4 \quad \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{3} \quad \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ car $x \in [1,2]$

Conclusion :

La tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point M_0 ($\sqrt{\frac{7}{3}}$, f($\sqrt{\frac{7}{3}}$)) est parallèle à la droite (AB)

EXERCICE№12

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

* f est continue sur [1,2] et dérivable sur]1,2[et on a : f(1) = f(2)

D'après le théorème de ROLLE il existe un réel $\alpha_1 \in$]1,2[tel que $f'(\alpha_1) = 0$

De même il existe un réel $\alpha_2 \in$]2,3[tel que $f'(\alpha_2) = 0$

Et il existe un réel $\alpha_3 \in$]3,4[tel que $f'(\alpha_3) = 0$

Conclusion :

α_1 , α_2 et α_3 sont trois zéros distinctes de f'.

EXERCICE№13

$f(x) = \tan x$

1) $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \leq \tan x \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car la fonction tan est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \tan^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \tan^2 x \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq f'(x) \leq 2$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

2) pour $t \in [0, x]$: $1 \leq f'(x) \leq 2$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis.

$1(x - 0) \leq f(x) - f(0) \leq 2(x - 0)$

$\Rightarrow x \leq \tan x \leq 2x$

EXERCICE№14

Soit $f(t) = \sqrt{1 + t}$

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$

$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour $t \in [0, x]$ d'où : $0 \leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}x$

Par suite : : $0 \leq \sqrt{1 + x} - 1 \leq \frac{1}{2}x$

2) d'après la 1ère) question : : $0 \leq \sqrt{1 + u} - 1 \leq \frac{1}{2}u$ pour $u \geq 0$

Pour $u = \frac{1}{x^2}$ on aura : $0 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \leq \frac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x}\sqrt{1 + x^2} - 1 \leq 1 + \frac{1}{2x^2} \Rightarrow x \leq \sqrt{1 + x^2} - 1 \leq x + \frac{1}{2x}$ car $x > 0$

EXERCICE№15

a) soit $f(t) = \sin t$; f est dérivable sur IR et $f'(t) = \cos t$

$|f'(t)| \leq 1$ d'où : $|f(x) - f(0)| \leq 1|x - 0|$

$\Rightarrow |f(x)| \leq |x| \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$

b) soit $f(t) = \tan t$; f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et $f'(t) = 1 + \tan^2 t \geq 1$

pour tout $t \in [0, x]$ d'où : $f(x) - f(0) \geq 1(x - 0) \Rightarrow \tan x \geq x$

c) soit $f(t) = \cos t$; f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(t) = - \sin t$

pour $t \in [0, x]$: $-1 \leq f'(x) \leq 1$ d'où : $-x \leq f(x) - f(0) \leq x$

$\Rightarrow -x \leq \cos x - 1 \leq x \Rightarrow 1 - x \leq \cos x \leq x + 1$

EXERCICE№16

$f(x) = (x - 1)\sqrt{1 - x}$

1) $D_f =]-\infty,1]$

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$

f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$

interprétation graphique:

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 1.

3) f est dérivable sur]-∞,1 [et $f'(x) = \sqrt{1-x} + (x-1).(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}})$

$f'(x) = \sqrt{1-x} + (\frac{\sqrt{1-x}}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{1-x} \geq 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0

EXERCICE№17

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

1) la fonction $x \longmapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur IR $_+$

D'où f est dérivable sur IR $_+$

$f'(x) = \frac{-1}{2(\sqrt{x+1})^3}$ et $|f'(x)| = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})^3}$

$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^3 \geq 1$

$\Rightarrow 2(\sqrt{x+1})^3 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2(\sqrt{x+1})^3} \leq \frac{1}{2}$ d'où : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) f est dérivable sur [0,+∞ [et $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout t ∈ IR $_+$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|x-0| \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 1$

D'où : $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{x}{2} + 1$

3) $1 - \frac{10^{-11}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+10^{-11}}} \leq \frac{10^{-11}}{2} + 1$

EXERCICE№18

$f(x) = x^3 - x$

1) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3x^2 - 1$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) – a)

$$\underbrace{0{,}577350268}_{b} < \underbrace{0{,}577350269}_{a}$$

a , b $\in [\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}]$ f est strictement décroissante sur $[\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}]$

d'où : f(b) > f(a) $\Rightarrow$ B > A

b) a = 0,577350271 ; b = 0,577350272

A = f(a) et B = f(b)

a < b et a , b $\in [\frac{1}{\sqrt{3}} , +\infty[$ f est strictement croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{3}} , +\infty[$

d'où : f(a) < f(b) $\Rightarrow$ A < B

EXERCICE№19

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

f est dérivable sur]1 , +∞ [et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$

$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})} < 0 ; \ \forall \ x \in]1 , +\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	↘	0

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = 0$$

<u>Rq :</u> f n'est pas dérivable à droite en 1

2) $g(x) = \cos x - \sin x$; I = [0,π]

g est dérivable sur [0,π] et $g'(x) = -\sin x - \cos x = -[\cos x + \sin x]$

$$\begin{cases} g'(x) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\sin x \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	-1

3) $h(x) = \cos(\sin x)$

$h'(x) = \cos x \,.\, \cos'(\sin x) = -\cos x \,.\, \sin(\sin x)$

le signe de $h'(x)$ est celui de $(-\cos x)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	1	$\searrow$	$\cos 1$	$\nearrow$	1

EXERCICE№20

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x+1} & si \quad x \geq 3 \\ x^2 - 5x + c & si \quad x < 3 \end{cases}$$

1) – a) $f(3) = 8$

f est continue à gauche en 3 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 5x + c) = f(3)$

$\Leftrightarrow$ -6 + c = 8 $\Leftrightarrow$ c = 14 d'où : $f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x+1} & si \quad x \geq 3 \\ x^2 - 5x + 14 & si \quad x < 3 \end{cases}$

b) f est dérivable sur chacun des intervalles]-∞,3[et]3,+∞[

<u>* dérivabilité en 3 :</u>

* $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} (x-2) = 1$

D'où : f est dérivable à gauche en 3 et $f_g'(3) = 1$

* $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4\sqrt{x+1}-8}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4(\sqrt{x+1}-2)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4[(x+1)-4]}{(x-3)[(\sqrt{x+1})+2]} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} = 1$

D'où : f est dérivable à droite en 3 et $f_d'(3) = 1 = f_g'(3)$

D'où : f est dérivable en 3 ;

<u>conclusion :</u> f est dérivable sur IR

c) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x+1}} & si \quad x \geq 3 \\ 2x - 5 & si \quad x < 3 \end{cases}$

2) * pour $x \in$]3,+∞[; $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

* pour $x \in$]-∞,3[; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{31}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4\sqrt{x+1} = +\infty$
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

3) f admet $\frac{31}{4}$ comme minimum absolu en $\frac{5}{2}$

EXERCICE№21

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_f = [-1,1]$

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x(1+x)(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ (de la forme $\frac{-2}{0^+}$)

f n'est pas dérivable à gauche en 1

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3) – a) pour $x \in D_f = [-1,1]$, on a $(-x) \in D_f$

$f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2} = -x\sqrt{1-x^2} = -f(x)$ d'où : f est impaire.

b) f n'est pas dérivable à droite en (-1) (f est impaire)

pour $x \in]-1,1[$; $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-2x^2)$

x	-1		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

c) * f admet $(-\frac{1}{2})$ comme minimum absolue en $(-\frac{1}{\sqrt{2}})$

* f admet $(\frac{1}{2})$ comme maximum absolue en $(\frac{1}{\sqrt{2}})$

4) – a) T : $y = f'(0).(x-0) + f(0)$

(T) : $y = x$

b) $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$

x	-1		0		1
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖

f'' s'annule en 0 en changeant de signe d'où le point de coordonnées $(0,f(0))$ est un point d'inflexion pour $(\mathcal{C}_f)$;

$f(0) = 0$, d'où $O(0,0)$ est un point d'inflexion pour $(\mathcal{C}_f)$.

EXERCICE№22

$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2 \quad ; \quad x \geq 0$

1) f est dérivable]0,+∞[comme étant produit et somme de fonction dérivables.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} - \frac{3}{16}x) = 0$, d'où f est dérivable à droite en 0

Par suite f est dérivable sur [0,+∞[.

Pour $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \sqrt{x} + x(\frac{1}{2\sqrt{x}}) - \frac{3}{8}x = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{8}x$

$= \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{8}x = \frac{12\sqrt{x}-3x}{8}$

Pour $x = 0$; $\frac{12\sqrt{0}+30}{8} = 0 = f'_d(0)$

<u>Conclusion :</u> Pour $x \in [0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{12\sqrt{x}-3x}{8}$

b) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{8}\left[4 - \sqrt{x}\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 16$

x	0		16		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	16	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left[1 - \frac{3}{16}\sqrt{x}\right] = -\infty$

c) l'équation $f(x) = 20$ n'admet pas de solution dans [0,+∞[

($f(x) \leq 16$, $\forall x \in [0,+\infty[$)

2) – a) f est dérivable sur]0,+∞[et $f'(x) = \frac{12\sqrt{x}-3x}{8}$

f'est dérivable sur]0,+∞[; ($x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur]0,+∞[)

d'où ; f est deux fois dérivable sur]0,+∞[

b) $f''(x) = \frac{12\frac{1}{2\sqrt{x}}-3}{8} = \frac{1}{8}\left[\frac{6}{\sqrt{x}} - 3\right] = \frac{3}{8}\left[\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right]$

$= \frac{3}{8}\left(\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{4-x}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}\right)$

Le signe de $f''(x)$ est celle de $(4 - x)$

x	-1		4		1
$f''(x)$	‖	+	0	-	

f'' s'annule en 4 en changeant de signe d'où le point I(4, f(4)) est un point d'inflexion pour $(\mathcal{C})$; I(4,5).

EXERCICE№23

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

1) $D_f = [0,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

interprétation graphique :

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0.

3) – a) la fonction : $x \longmapsto x + \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et strictement positive

D'où : f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

b) $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad$ +
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

EXERCICE№24

$f(x) = \frac{1}{2}(4 + \sin x)$

1) $f'(x) = \frac{1}{2}\cos x$

On a : $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) – a) $g(x) = f(x) - x$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$, car $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

D'où : g est strictement décroissante sur IR.

b) pour tout $x \in$ IR , on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Rightarrow 3 \leq 4 + \sin x \leq 5 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}(4 + \sin x) \leq \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} - x \leq \frac{1}{2} f(x) - x \leq \frac{5}{2} - x$

$\Rightarrow \frac{3}{2} - x \leq g(x) \leq \frac{5}{2} - x$

c) $g(x) \leq \frac{5}{2} - x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{2} - x\right) = -\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

* $g(x) \geq \frac{3}{2} - x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{3}{2} - x\right) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

D'où : g est continue et strictement décroissante sur IR ;

d'où : $g(IR) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} g , \lim\limits_{x \to -\infty} g \right[= \left]-\infty , +\infty\right[$

$g(IR) = IR$

d) $0 \in g(IR)$ d'où il existe un réel a tel que $g(a) = 0$

comme g est strictement décroissante alors a est unique.

Par suite il existe un unique réel a tel que $f(a) = a$

$g(\frac{2\pi}{3}).g(\frac{5\pi}{6}) < 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < a < \frac{5\pi}{6}$

3) $\begin{cases} U_0 & \textit{donné} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) f est dérivable sur IR et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$|f(U_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|U_n - a|$ d'où : $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|U_n - a|$

b) démonstration par récurrence :

* $|U_0 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - a|$ (vraie)

* supposons que : $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$

et montrons que : $|U_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

on a : $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$ et $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|U_n - a|$

d'où : $|U_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

<u>conclusion :</u>

$|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$ pour tout $n \in IN$

c) $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a| = 0$; d'où :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a.$

QCM

1) $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

2) $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

3) f réalise une bijection de $[1,4]$ sur $[1,4]$

4) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

VRAI-FAUX :

1) (FAUX)

CONTRE EXEMPLE : $f(x) = 3 - \frac{4x}{x^2+3}$

* $f(1)=2$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$
* f est dérivable sur $[1,+\infty[$
* $f'(x) = \frac{4(x^2-3)}{(x^2+1)^2}$

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$3-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	3

$f([1,+\infty[) = \left[3 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 3 \right[$

2) (VRAI)

* $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$

$f'(x) = a$

• si $a>0$; f continue et strictement croissante

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

• si $a<0$; f est continue et strictement décroissante

f : bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

3) (FAUX)

$$\sqrt[3]{16} > 2 \qquad \text{car } 16>2^3$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt[4]{16} < \sqrt[3]{16}$$

4) (VRAI) POUR N≥2

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = x^n$$

$$(f^{-1})'(0) = 0$$

5) (FAUX) CONTRE EXEMPLE :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \qquad I=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0\end{array}\right\rangle$$

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{1+y^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = x - y \Leftrightarrow 1+y^2 = x^2+y^2-2xy \Leftrightarrow y = \frac{x^2-1}{2x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}$$ f^{-1} ne garde pas un signe constant sur $]0,+\infty[$

EXERCICE№1

1) f_1 n'est pas une bijection de [-4,3] sur [-4,3]
2) f_2 est une bijection de [-3,1] sur [-4,4] (continue et strictement décroissante)
3) f_3 est une bijection de [-3,4] sur [-3,4] (continue et strictement croissante)

EXERCICE№2

$f(x) = x^2 - 4x + 5$; $I =]-\infty,2]$

1) f est dérivable sur $]-\infty,2]$

et $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty,2]$

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,2]$

elle réalise donc une bijection de $]-\infty,2]$ sur $J = f(]-\infty,2]) = [f(2), \lim\limits_{x \to -\infty} f\ [$

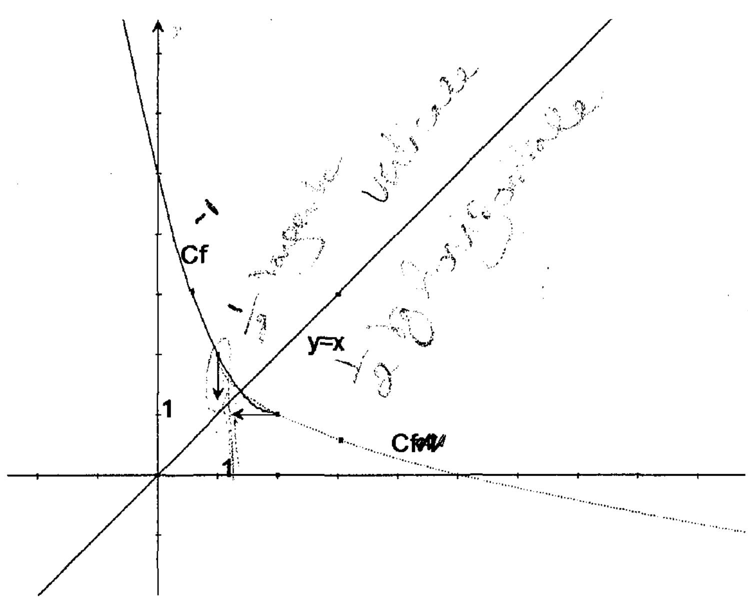
$J = [1,+\infty[$

2)

x	$-\infty$	2
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(0,\vec{j})$ au voisinage de $(-\infty)$



3) – a) $(\mathcal{C}_{f^{-1}}) = S_\Delta(\mathcal{C}_f)$ avec $\Delta : y = x$

b) $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.⇒f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1

c) f est dérivable sur $]-\infty,2[$ et $f'(x) = 2(x-2) \neq 0$ pour tout $x \in]-\infty,2[$
d'où : f^{-1} est dérivable sur $f(]-\infty,2[) =]1,+\infty[$.

explicitement S I

d) on pose : $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [1,+\infty[$ et $y \in]-\infty,2]$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 5 = x \Leftrightarrow (y-2)^2 + 1 = x$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 = x - 1 \Leftrightarrow |y-2| = \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow y - 2 = -\sqrt{x-1}$ car $y \leq 2$

$\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt{x-1}$ d'où : $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

EXERCICE№3

$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x}$; $I =]-\infty,0[$

1) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0[$

elle réalise donc une bijection de $]-\infty,0[$ sur $J = f(]-\infty,0[)$

$J = f(]-\infty,0[) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f, \lim\limits_{x\to 0^+} f[=]-\infty,+\infty[= IR$

2) soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in IR$ et $y \in]-\infty,0[$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y - 1 - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = xy$

$\Leftrightarrow y^2 - (1+x)y - 1 = 0$

$\Delta = (1+x)^2 + 4 > 0$

$y = \frac{1 + x - \sqrt{(1+x)^2+4}}{2}$ car $y < 0$

D'où : $f^{-1}(x) = \frac{1 + x - \sqrt{x^2+2x+5}}{2}$

3) f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \neq 0$ pour tout $x \in]-\infty,0[$

$\boxed{\text{d'où : } f^{-1} \text{ est dérivable sur IR.}}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right]$

EXERCICE№4

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $I =]1,+\infty[$

1) f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$

f est continue et strictement décroissante sur]1,+∞[

elle réalise donc une bijection de]1,+∞[sur J = f(]1,+∞[)

J = f(]1,+∞[) =] $\lim\limits_{x \to +\infty} f$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f$ [=]1,+∞ [

$$\text{fof}(x) = \text{f}(\text{f}(x)) = \frac{\text{f}(x)+1}{\text{f}(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = x \text{ ; fof}(x) = x$$

b) $D_{\text{f}^{-1}} = D_{\text{f}} =]1,+\infty[$ et fof$(x) = x$

d'où : $\text{f}^{-1}(x) = \text{f}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ pour $x \in]1,+\infty[$

$D_{f^{-1}} = D_f$
$f \circ f(x) = x$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$

EXERCICE№5

$\text{f}(x) = \sqrt{x-1} + 2$

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\text{f}(x)-\text{f}(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 1

$(\mathcal{C}_\text{f})$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 1.

2) f est dérivable sur]1,+∞[et $\text{f}'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$

x	1	+∞
$\text{f}'(x)$	+	
$\text{f}(x)$	2 ↗	+∞

$\lim\limits_{x \to +\infty} \text{f}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-1} + 2\right) = +\infty$

3) * f est continue et strictement croissante sur]1,+∞[

elle réalise donc une bijection de]1,+∞[sur]2,+∞[

* soit $y = \text{f}^{-1}(x)$ avec : $x \geq 2$ et $y \geq 1$

$\Leftrightarrow \text{f}(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y-1} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{y-1} = x - 2$

$\Leftrightarrow y - 1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 5$

D'où : $\text{f}^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$

4) f^{-1} est dérivable sur [2,+∞[

EXERCICE№6

$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})}{1+x^2}$

$f'(x) = \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2} > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ 2

Pour $x \neq 0$

$f(x) = 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 0$

* f est continue et strictement croissante sur IR ,elle réalise donc une bijection de IR sur $f(IR) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f, \lim\limits_{x \to +\infty} f[=]0, 2[$

2) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in]0, 2[$ et $y \in IR$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x - 1$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x-1)^2$ avec y et $(x-1)$ sont de même signe (*)

$\Leftrightarrow y^2 = (x-1)^2 + (x-1)^2.y^2 \Leftrightarrow (2x - x^2)\, y^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow y\sqrt{2x - x^2} = x - 1$ d'après (*)

D'où : $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$; $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}$

EXERCICE№7

1) * <u>continuité à droite en 0</u>

Pour x > 0 ; $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 0 = f(0)$, d'où est continue à droite en 0

* <u>dérivabilité à droite en 0</u>

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

2) – a) f est dérivable sur]0,+∞[et $f'(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x})-x(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x+\sqrt{x})^2}$

$= \dfrac{x+\sqrt{x}-x-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x+\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} > 0$

Pour $x \in]0,+\infty[$

x	0	+∞
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	0 ↗	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) = 1$

b) * f est continue et strictement croissante sur [0 ,+∞[,

elle réalise donc une bijection de IR_+ sur $f(IR_+) = [\, f(0) , \lim\limits_{x\to+\infty} f [= [\, 0 , 1 [$

c) * f est dérivable sur]0,+∞[et $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} \neq 0$

d'où : f^{-1} est dérivable sur f(]0,+∞[) =] 0 , 1[.

* f n'est pas dérivable à droite en 0

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 , par suite :
$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse f(0) = 0
D'où : f^{-1}est dérivable à droite en 0, et $(f^{-1})_d'(0) = 0$

<u>Conclusion :</u> f^{1} est dérivable sur [0,1[

3) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [\,0\,,1[$ et $y \in IR_+$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{y+\sqrt{y}} = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = x\sqrt{y} + x \Leftrightarrow \sqrt{y}(1-x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ d'où : $f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ pour $x \in [\,0\,,1[$

EXERCICE№8

1) * f(0)=-1 $\Rightarrow$ g(-1)=0

(ζ_f) admet une tangente horizontal au point d'abscisse 0 d'ou (ζ_g) admet une tangente verticale au point d'abscisse f(0)=-1

par suite g n'est pas dérivable en (-1)

* f(-2)=1 $\Rightarrow$ g(1)=-2

(ζ_f) admet une tangente verticale au point d'abscisse (-2) d'ou (ζ_g) admet une tangente horizontale au point d'abscisse f(-2)=1 par suite : g est dérivable en 1 et g'(1)=0

2) * f est décroissante sur $\mathbb{R}$ d'ou g est décroissante sur f($\mathbb{R}$)=$\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

x	-∞	-1	+∞
f '(x)	-	||	-
f(x)	+∞ ↘		-∞

3) $(\zeta_g) = S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x

EXERCICE№9

1) * f(1)= -1 $\Rightarrow$ g(-1)=1

f est dérivable en 1 et f '(1)= -1 ≠0 d'ou g est dérivable en (-1) et $g'(-1) = \frac{1}{f'(1)} = -1$

* f(2)= -4 $\Rightarrow$ g(-4)=2

f n'est pas dérivable a gauche en 2

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2 d'ou (ζ_g) admet une demi tangente horizontal au point d'abscisse (-4)

g est dérivable a droite en (-4) et $g'_d(-4)=0$

2)

x	-4		+∞
g(x)	2	↘	-1

3) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -1$

EXERCICE№10

$f(x) = \tan x$

1) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

* f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f[$

$=]-\infty,+\infty[= IR$

2) * f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) \neq 0$? $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d'où : f^{-1} est dérivable sur IR .

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

On pose $y = f^{-1}(x)$ on aura : $f(y) = x \Leftrightarrow \tan y = x$

d'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in IR$

EXERCICE№11

$f(x) = 2\cos x + 3 \quad x \in [0,\pi]$

1) $f'(x) = -2\sin x < 0$ pour $x \in]0,\pi[$

x	0		π
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	5	↘	1

2) * f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$,

elle réalise donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi]) = [f(\pi),f(0)] = [1,5]$

3) - a) $g(5) = 0$; $g(1) = \pi$; $g(3) = \frac{\pi}{2}$

b) * f est dérivable sur $]0\,,\pi\,[$ et $f'(x) = -2sinx \neq 0$? $\forall\, x \in\,]0\,,\pi\,[$

d'où : g est dérivable sur $f(]0\,,\pi\,[) =]1\,,5\,[$

$(g)'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{2siny}$ avec $y = g(x)$; $f(y) = x$

$$2cosy + 3 = x \iff cosy = \frac{x-3}{2}$$

* on a : $\sin y = \sqrt{1 - cos^2 y}$, car $\sin y > 0$

$\sin y = \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2}$ d'où : $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}$

EXERCICE№12

$f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1) et $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \geq 0$ pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[$

* f est continue et strictement croissante sur $[\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[$,

elle réalise donc une bijection de $[\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[$ sur $f([\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[) = [f(\frac{\pi}{2})\,,\lim\limits_{x\to\pi^-} f\,[= [1,+\infty[$

2) soit $\alpha = (f^{-1})(\frac{2\sqrt{3}}{3}) \iff \begin{cases} f(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[\end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[\end{cases}$

$\iff \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[\end{cases} \iff \alpha = \frac{2\pi}{3}$ d'où : $(f^{-1})(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\pi}{3}$; $(f^{-1})(\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$

3) * f est continue sur $[\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[$, d'où : f^{-1} est continue sur $[1\,,+\infty\,[$

* f est dérivable sur $]\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[$ et $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \neq 0$

d'où : f^{-1} est dérivable sur $f(]\frac{\pi}{2}\,,\pi\,[) =]1\,,+\infty\,[$

* f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1 (voir EX :7 , 2) – c))

Conclusion :

f^{-1} est continue sur $[1\,,+\infty\,[$; f^{-1} est dérivable sur $]1\,,+\infty\,[$

4) $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)} = -\frac{sin^2(y)}{\cos(y)}$ avec $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sin(y)} \Leftrightarrow \sin(y)=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x)= -\frac{1}{x^2.\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

EXERCICE№13

$f(x) = 1 - \tan x$

1) $f'(x) = -(1 + \tan^2 x) < 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

2) * f est continue et strictement décroissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f, \lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} f[$

$=]-\infty,+\infty[= IR$

3) $(f^{-1})(0) = \frac{\pi}{4}$; $(f^{-1})(2) = -\frac{\pi}{4}$

4) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = -(1 + \tan^2 x) \neq 0$; $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d'où : f^{-1} est dérivable sur IR .

* soit $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 - \tan y = x \Leftrightarrow \tan y = 1 - x$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{1+\tan^2 y} = \frac{-1}{1+(1-x)^2} = \frac{1}{-x^2+2x-2}$

5) $\lim_{x \to -(\frac{\pi}{2})^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$ de même $\lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives :

$y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE№14

$f(x) = \sqrt{\cos x}$; $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1) $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sqrt{\cos x}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$

$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}\right) = \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = -\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

2) – a) f est dérivable sur $[0 , \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \leq 0 \ \forall x \in [0 , \frac{\pi}{2}[$

* f est continue et strictement décroissante sur $[0 , \frac{\pi}{2}]$,

elle réalise donc une bijection de $[0 , \frac{\pi}{2}]$ sur $f([0 , \frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{2}) , f(0)] = [0 , 1]$

par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0 , 1]$

b) f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ d'où :

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $f(\frac{\pi}{2})=0$

Par suite f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$

c) $f'_d(0) = 0$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0 d'où :

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $f(0) = 1$

D'où : f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1

3) f est dérivable sur $]0 , \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \neq 0$

D'où : f^{-1} est dérivable sur $]0 , 1[$

* soit $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{\cos y} = x \Leftrightarrow \cos y = x^2$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 y = 1 - \cos^2 y \Leftrightarrow \sin y = \sqrt{1 - x^4}$ car $y \in]0 , \frac{\pi}{2}[$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-2\sqrt{\cos y}}{\sin y} = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

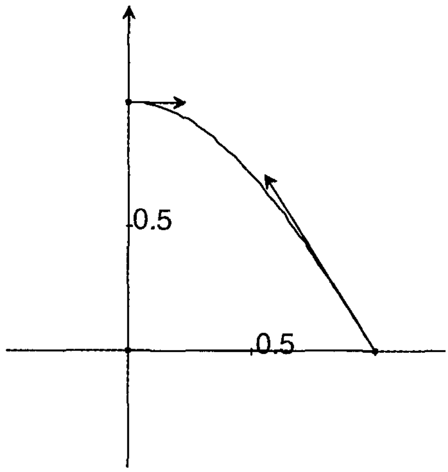
EXERCICE№15

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $\forall x \in [0 , 1]$

1) f est dérivable sur $[0 , 1]$ et $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 0$ car pour $0 \leq x \leq 1$; on a :
$0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$

x	0	1
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1 ↘	0

$f'_d(0) = 0$; $f'_g(1) = -\frac{\pi}{2}$



2) * f est continue et strictement décroissante sur [0 , 1] ,

elle réalise donc une bijection de [0 , 1] sur f([0 , 1]) = [f(1) , f(0)] = [0 , 1] = I

3) f est dérivable sur]0 , 1] et $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$

D'où : f^{-1} est dérivable sur f(]0,1])= [0 , 1[

* $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$, avec $y = f^{-1}(x)$ d'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}$

On a : $y = f^{-1}(x) \Rightarrow f(y) = x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = x \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) = \sqrt{1-x^2}$

Car : $\frac{\pi}{2}y \in]0, \frac{\pi}{2}]$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

EXERCICE№16

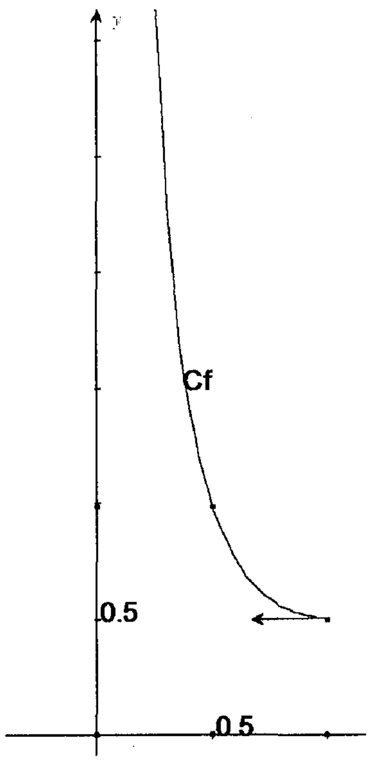
$f(x) = \frac{1}{1-\cos(\pi x)}$; $\forall x \in]0 , 1]$

1) f est dérivable sur]0 , 1] et $f'(x) = \frac{-\pi\sin(\pi x)}{(1-\cos(\pi x))^2}$,

$\forall x \in]0 , 1] \Rightarrow (\pi x) \in]0 , \pi] \Rightarrow \sin(\pi x) \geq 0$ d'où : $f'(x) \leq 0$

x	0	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos(\pi x)} = +\infty$ car : $1 - \cos(\pi x) > 0$



2) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose : $g(x) = f(x) - x$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \leq 0$

* g est continue et strictement décroissante sur]0 , 1] ,

elle réalise donc une bijection de]0 , 1] sur g(]0 , 1]) = [$-\frac{1}{2}$, $+\infty$[

comme $0 \in$ g(]0 , 1]) alors il existe un unique réel $x_0 \in$]0 , 1] tel que $g(x_0) = 0$

par suite l'équation $f(x) = x$ admet x_0 comme unique solution dans]0 , 1]

$f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ d'où : $x_0 = \frac{2}{3}$

3) a) f est continue et strictement décroissante sur]0 , 1] ,

Donc f est une bijection de]0 , 1] sur f(]0 , 1]) = [f(1), $\lim\limits_{x \to 0^+}$ f[= [$\frac{1}{2}$, $+\infty$[

b) $f'_g(1) = 0 \Rightarrow (\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 1

d'où : $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $f(1) = \frac{1}{2}$

D'où : f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$

c) f est dérivable sur $]0\,,1[$ et $f'(x) = \frac{-\pi\sin(\pi x)}{(1-\cos(\pi x))^2} \neq 0$

$\forall x \in]0\,,1[$ d'où : f^{-1} est dérivable sur $f(]0\,,1[) =]\frac{1}{2}\,,+\infty[$

* soit $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1-\cos(\pi y)} = x \Leftrightarrow 1-\cos(\pi y) = \frac{1}{x}$

et $\cos(\pi y) = 1 - \frac{1}{x}$; $\sin(\pi y) = \sqrt{1-\cos^2(\pi y)}$ car $y \in]0\,,\pi[$

$\Rightarrow \sin(\pi y) = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x}\sqrt{2x-1}$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-(1-\cos(\pi y))^2}{\pi\sin(\pi y)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{\pi}{x}\sqrt{2x-1}}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi x\sqrt{2x-1}}$

EXERCICE№17

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} \leq 0 \ \forall x \in [-1\,,1]$

f est continue et strictement décroissante sur [-1 , 1] , elle réalise donc une bijection de [-1 , 1] sur $[\frac{2}{3}\,,2] = I$

x	-1		1
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	2	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

2) : $g(x) = f(x) - x$

a) alors $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \leq 0$

* g est continue sur [-1 , 1], et $g(-1).g(1) = -1 < 0$, d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]-1\,,1[$,

comme g est strictement décroissante alors α est unique.

b) $g(\frac{2}{3}).g(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in]\frac{2}{3}, 1[$,

c) $M(x,y) \in (\mathcal{C}_f)\cap\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ f(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ g(x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = x = \alpha$

$(\mathcal{C}_f)\cap\Delta = \{A(\alpha,\alpha)\}$

3) : f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\frac{2}{3}$ (voir ex 16 , 3) – b)

4) – a) $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{3}$; $f(0) = 1$; $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{7}$

b) $(f^{-1})'(\frac{5}{3}) = \frac{1}{f'(-\frac{1}{2})} = -\frac{4}{3}$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -1$

$(f^{-1})'(\frac{5}{7}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = -\frac{49}{12}$

EXERCICE№18

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

1) $f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2 ↗	0

* f est continue et strictement croissante sur IR ,elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR) =] -2, 0[

2) – a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose : $g(x) = f(x) - x$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} - 1 \leq 0$ car $x^2 + 1 \geq 1$

* g est continue et strictement décroissante sur IR ,

elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR) = IR ;

comme $0 \in g(IR)$ alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$

par suite l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution dans IR

$g(-2).g(-1) < 0$ (à vérifier) d'où : $-2 < \alpha < -1$

b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x) - x$		+	0	-	

3) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in]-2, 0[$ et $y \in IR$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 1 + x$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x+1)^2$ *avec* y et $(x+1)$ de même signe

$\Leftrightarrow y^2 = (x+1)^2 + y(x+1)^2 \Leftrightarrow (-x^2 - 2x)y^2 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow y\sqrt{-x^2 - 2x} = x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}}$

d'où : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}}$ pour $x \in]-2,0[$

4) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) récurrence

* $U_0 = -1$ on a : $\alpha \leq U_0 \leq -1$ (vraie)

* supposons que : $\alpha \leq U_n \leq -1$

montrons que : $\alpha \leq U_{n+1} \leq -1$

$\alpha \leq U_n \leq -1 \Rightarrow f(\alpha) \leq f(U_n) \leq f(-1)$ car f est croissante sur IR

d'où : $\alpha \leq U_{n+1} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \leq -1 \Rightarrow \alpha \leq U_{n+1} \leq -1$

* <u>conclusion :</u> $\alpha \leq U_n \leq -1$ pour tout n ∈ IN

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

$U_n \geq \alpha \Rightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$ d'après 2) – b)

D'où : $U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

La suite (U_n) est décroissante et minorée par α , elle est donc convergente.

Soit ℓ sa limite : $U_{n+1} = f(U_n)$, f est continue sur IR.

D'où : ℓ = f(ℓ) ⟺ ℓ = α ; <u>conclusion</u> : $\lim\limits_{x \to 0^+} U_n = \alpha$

<u>EXERCICE№19</u>

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$; $\forall x \in [1, +\infty[$

1) – a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

D'où : f n'est pas dérivable à droite en 1.

b) f est dérivable sur]1 , +∞[

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2.\sqrt{x^2-1}} > 0$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	1 ↗	2

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right) = 2$

c) f est continue et strictement croissante sur [1 , +∞[, elle réalise donc une bijection de [1 , +∞[sur I = f([1 , +∞[) = [1 , 2[

2) –a): f^{-1} est dérivable à droite en 1 et $(f^{-1})_d(1) = 0$ (voir ex 14 , 2) – b))

b) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [1, 2[$ et $y \in [1, +\infty[$

$\Leftrightarrow$ f(y) = x $\Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}+1=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1}=y(x-1)$

$\Leftrightarrow y^2-1 = y^2(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[1-(x-1)^2\right].y^2=1$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2x-x^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (car y>0) d'où : $f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

B)

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{f(\frac{1}{cosx})} & si\ x\in[0,\frac{\pi}{2}[\\ \frac{1}{2}\quad si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

1) – a) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1}{cosx}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

D'où : $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(\frac{1}{cosx})=2$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} g(x)=\frac{1}{2}=g(\frac{\pi}{2})$; g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

b) * pour $x=\frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{1+sin(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{2}=g(\frac{\pi}{2})$

* pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$

$$f(\frac{1}{cosx})=\frac{\sqrt{\frac{1}{cos^2x}-1}}{\frac{1}{cosx}}+1=cosx.\sqrt{\frac{sin^2x}{cos^2x}}+1=cosx.\left|\frac{sinx}{cosx}\right|+1$$

$= cosx.\frac{sinx}{cosx}+1$ car $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$

$=1+sinx$ d'où : $g(x)=\frac{1}{1+sinx}$

<u>conclusion</u> : $g(x)=\frac{1}{1+sinx}$, pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

2) $g'(x)=\frac{-cosx}{(1+sinx)^2}\le 0$ pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$

* g est continue et strictement décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, elle réalise donc une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$, sur J = $[\frac{1}{2},1]$,

3) –a): g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et $g'(x)=\frac{-cosx}{(1+sinx)^2}\neq 0$

D'où : g^{-1} est dérivable sur $g([0,\frac{\pi}{2}[)=]\frac{1}{2},1]$ et : $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

* soit $y = g^{-1}(x) \Longrightarrow g(y) = x \Longrightarrow \frac{1}{1+\sin y} = x \Longrightarrow 1 + \sin y = \frac{1}{x}$

et $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \Longrightarrow \cos y = \sqrt{1-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}$

$\cos y = \frac{1}{x}\sqrt{2x-1}$

d'où : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = -\frac{(1+\sin y)^2}{\cos y} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{2x-1}}$

$(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{2x-1}}$

b) $g'_g(\frac{\pi}{2}) = 0$

$(\mathcal{C}_g)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ d'où :

$(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

D'où : g^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$

EXERCICE№20

1) * $x = \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{27}\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^4}}$

$= \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times 2}{3\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt{3}$

* $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

* $t = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

2) a) $(2+\sqrt{5})^3 = 2^3 + 3\times 2^2\sqrt{5} + 3\times 2\times(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$

$= 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$

b) $B = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} - \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}} \leftarrow n'a$ pas de sens

car $38-17\sqrt{5} < 0$

EXERCICE№21

1) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x=(\sqrt[4]{2})^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[4]{8} \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\left\{\sqrt[4]{8}\right\}$

2) $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x^2=(\sqrt[3]{3})^5 \Leftrightarrow x=\sqrt[6]{3^5}$ ou $x=-\sqrt[6]{3^5} \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\left\{\sqrt[6]{3^5},-\sqrt[6]{3^5}\right\}$

3) $\sqrt[3]{x^2}-3.\sqrt[3]{x}+2=0$

dans $\mathbb{R}_+$: (E) $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2-3.\sqrt[3]{x}+2=0$ on pose $t=\sqrt[3]{x}$

l'équation devient : $t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=1$ ou $t=2$

$t=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ *et* $t=2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=2 \Leftrightarrow x=8 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{1,8\}$

4) $(1-\sqrt[4]{x})^3+8=0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-1)^3=8 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-1=2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}=3$

$\Leftrightarrow x=3^4 \Leftrightarrow x=81 \qquad \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{81\}$

EXERCICE№22

* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x^2-x+1)}=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}.\left[\sqrt[3]{x^2}-1\right]=+\infty$

* on pose $f(x)=\sqrt[3]{x}$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

* $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[12]{x^3}$; $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4}}=\sqrt[12]{x^4}$; $\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt[6]{x^6}}=\sqrt[12]{x^6}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}-\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3}}-\frac{\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}-\sqrt[12]{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}.(1-\sqrt[12]{x^2})=-\infty$$

EXERCICE№23

$f(x) = x + \sqrt[3]{x}$;

1) – a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

<u>interprétation :</u>

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0

2) f est dérivable sur]0 , +∞[

$f'(x) = 1 + \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une bronche parabolique de direction asymptotique celle de $\Delta : y = x$

4) * f est continue et strictement croissante sur IR_+ , elle réalise donc une bijection de IR_+, sur $f(IR_+) = [f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f[= [0, +\infty[= IR_+$

5) $f(1) = 2$; $f(2) = 10$

$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{3}{4}$; $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{1 + 3\sqrt[3]{4}}$

EXERCICE№24

$f(x) = x \,.\, \sqrt[4]{x}$;

1) – a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[4]{x} = 0$

f est dérivable à droite en 0 $f'_d(0) = 0$

<u>interprétation :</u>

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0

2)

$f'(x) = \sqrt[4]{x} + x\left(\frac{1}{4\left(\sqrt[4]{x}\right)^3}\right) = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x} \geq 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad$ $+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

3) * $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[4]{x} = +\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une bronche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$au vois$(+\infty)$

4) * f est continue et strictement croissante sur IR_+ , elle réalise donc une bijection de IR_+, sur $f(IR_+) = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f[= [0, +\infty[= IR_+$

5) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : x et $y \in IR_+$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y \,.\, \sqrt[4]{y} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{y}\right)^5 = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{y} = \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow y = \sqrt[5]{x^4}$ d'où : $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^4}$ pour $x \in IR_+$

QCM :

1) 0 est un minimum relatif de f
2) La fonction f est croissante sur [-1,-0,5[et]-0,5,0]
3) X=-0,5
4) Y=2
5) Trois point communs

Vrai-Faux :

1) (faux) ; conte exemple : f(x)=x^4 et a=0
2) (vrai)

x	$a-h$		a		$a+h$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$f'(a)$	$\nearrow$	

f'' s'annule en a en changeant de signe d'où le point I(a,f(a)) est un point d'inflexion pour (C_f)

3) (faux) ; contre exemple : f(x)=$\frac{1}{x}$, f'(x)=$\frac{-1}{x^2}$, I=]0,2[f' est croissante sur]0,2[mais f est décroissante sur]0,2[
4) (faux) ; contre exemple :

$$f(x) = \cos x \qquad \text{I}= \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x \leq 0 \qquad \text{pour } x \in \text{I}$$

mais f n'est pas décroissante sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Ex1 :

$\Delta : y = -x+2$

1) $* \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad * \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty \quad * \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty \quad * \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

$* \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty \quad * \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad * \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad * \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+x-2) = 0$

2)

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3) * $m \in \left]-\infty,0\right] \cup \{1\}$ l'équation : f(x)=m admet trois solutions

* $m \in \left]0,1\right[$ l'équation f(x)=m admet quatre solutions

* $m \in \left]1,+\infty\right[$ l'équation f(x)=m admet deux solutions

Ex2 :

1) $(\zeta_f) = (\zeta_3)$; $(\zeta_g) = (\zeta_1)$; $(\zeta_h) = (\zeta_2)$

2) * (ζ_1) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$

* (ζ_2) admet la droite Δ:y=x comme asymptote oblique

* (ζ_3) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

Ex3 :

1) $D_f = \left[1,+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -3\sqrt{x-1} = -\infty$ d'où : la droite Δ:y=2x est une direction asymptotique à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x+2} \quad D_f = \left[-2,+\infty\right[/ \{0\}$

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} - \sqrt{x+2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

la droite d'équation x=0 est une asymptote verticae à (ζ_f)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$

(ζ_f) admet une branche infinie de direction parabolique celle de $(O,\vec{i})$

3) $f(x)=x.\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x-1		-		-	0	+	
x+1		-	0	+		+	
$\frac{x-1}{x+1}$		+	||	-	0	+	

$D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left[1,+\infty\right[$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right]$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{x+1})(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1})=-1$$

d'où Δ:y=x-1 est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty \Rightarrow$ *la droite d'éq* : $x=-1$ *est une* asymptote à (ζ_f)

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{x}{x+1})(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}) = -1$

Δ:y=x-1 asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage (-∞)

<u>Ex4 :</u>

$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0$

d'où y=0 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (-∞)

2) $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$

d'où Δ:y=2x est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (+∞)

<u>Ex5 :</u> $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ \frac{1}{x} + x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) $\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to1^-} (x-1) = 0 = f'_g(1)$

* $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x}+x-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{x} = 0 = f'_d(1)$

f est dérivable à gauche et à droite en 1 et $f'_d(1) = f'_g(1) = 0$ d'où

f est dérivable en 1 et f'(1)=0

2)

- la fonction : $x \mapsto x^2 - 2x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

en particulier sur $]-\infty,1[$ d'où f est dérivable sur $]-\infty,1[$

- de meme f est dérivable sur $]1,+\infty[$
- f est dérivable en 1

conclusion : f est dérivable sur IR

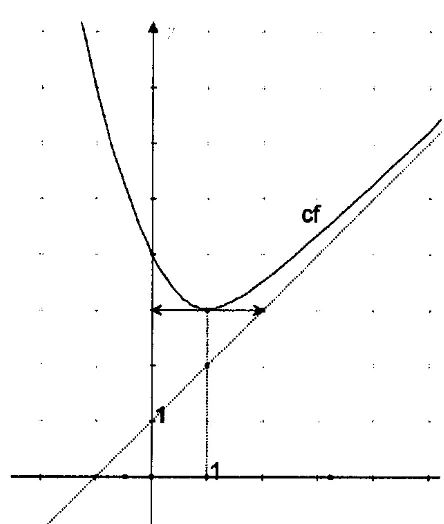
$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \le 1 \\ f'(1) = 0 & \\ \dfrac{x^2-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3) $f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2+\dfrac{4}{x}) = +\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ $\Delta : y = x+1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage $(+\infty)$



Ex6 : $f(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{9}{4x}$

1) $D_f=\mathbb{R}^*$

2) $f'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{9}{4x^2}=\frac{(2x-3)(4x^2+6x+9)}{12x^2}$ le signe de $f'(x)$ est celui de (2x-3) car $4x^2+6x+9>0$

3)

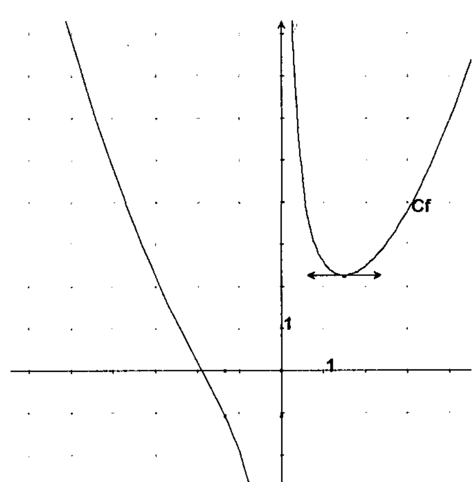
x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

4) • la droite d'équation x=0 est une asymptote à (C_f)

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3}+\frac{9}{4x^2}\right)=+\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$

• de meme : $\lim\limits_{-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage $(-\infty)$

5)



6)

$(C'): y=|f(x)|$

Ex7 :

1)* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$ (de la forme $\dfrac{1}{0^+}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$

Δ:y=x+2 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

2) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$

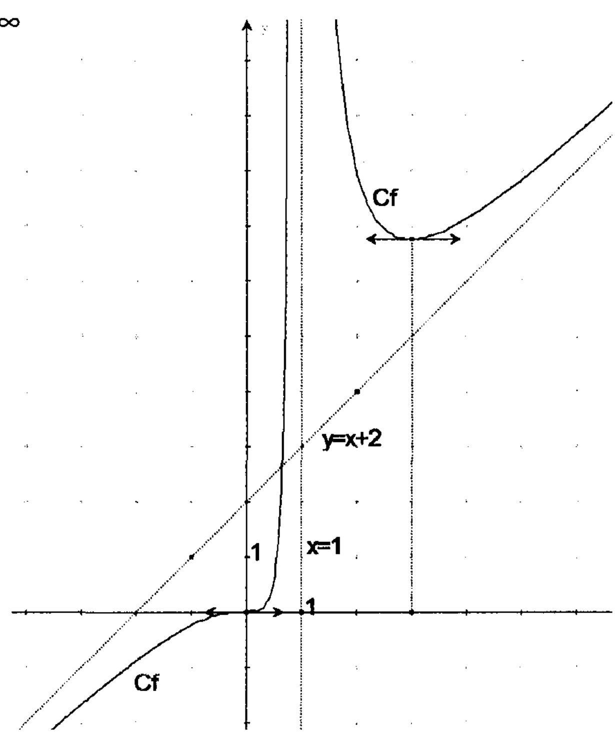
Δ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

• $f'(x)=\dfrac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	||	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		$+\infty$	||	$+\infty$ ↘	27/4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



Ex8 :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2} \qquad x\neq -1$$

1) $f(x)=\frac{(x^3+3x^2+3x+1)+4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+4}{(x+1)^2}=x+1+\frac{4}{(x+1)^2}$ (a=1 ; b=1 ; c=4)

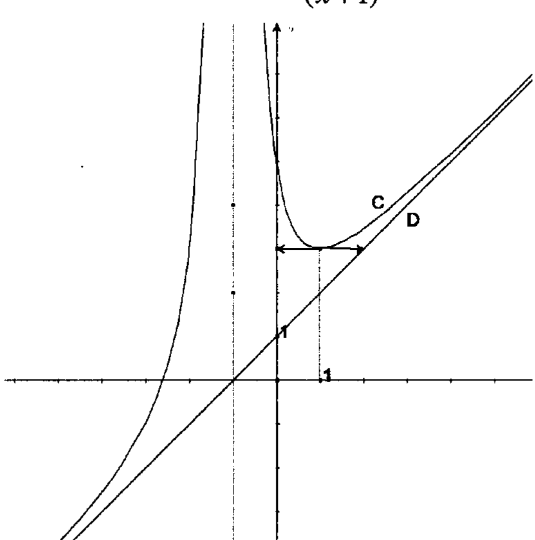
2) $f'(x)=1-\frac{8}{(x+1)^3}=\frac{(x+1)^3-8}{(x+1)^3}=\frac{(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$

$x^2+4x+7>0$ (car $\Delta<0$)$\Rightarrow$le signe de f'(x) est celui de $\frac{x-1}{x+1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	||	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

3) a) $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x+2)^2}=0$ d'où D :y=x+1 est une asymptote à (C) au voisinage de ($\pm\infty$)

b) $f(x)-(x+1)=\frac{4}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow$ (C) est au dessus de D



Ex9 :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$$

1) $f(x)=\dfrac{(x^2-2x+1)+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}$

2) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ $\quad x^2-2x-1=0$ *pour* $x=1-\sqrt{2}$ ou $x=1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

3) montrons que I(1,0) est un centre de symétrie pour (C)

- pour $x\in D_f=\mathbb{R}/\{1\}\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow -x\neq -1\Rightarrow 2-x\neq 1\Rightarrow (2-x)\in D_f$
- $f(2-x)=(2-x)-1+\dfrac{2}{(2-x)-1}=1-x+\dfrac{2}{1-x}=-x+1-\dfrac{2}{x-1}=-f(x)$

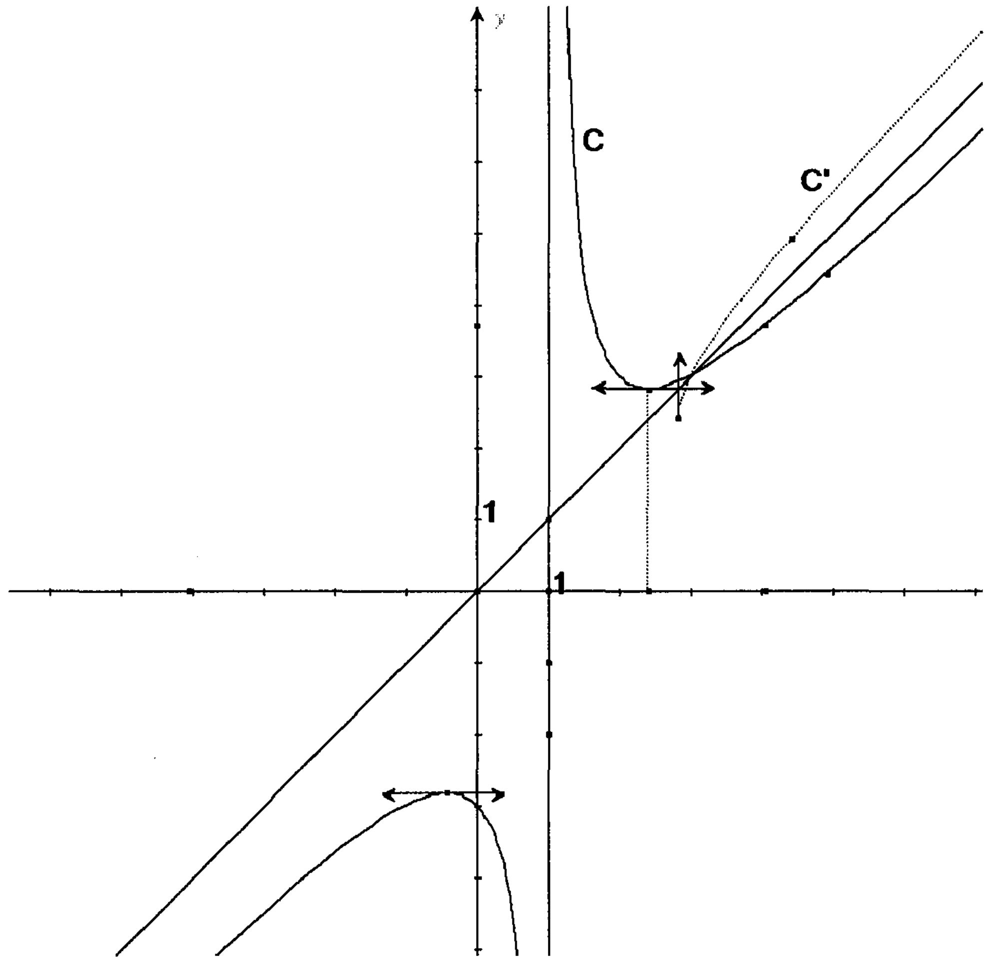
d'où $I(1,0)$ est un centre de symétrie pour (C)

4) a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ d'où D : y=x-1 est une asymptote à (C)

b) $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	‖	+
P.R	$D/(C)$	‖	$(C)/D$

c)



5) g est continue et strictement croissante sur $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$, *elle réalise donc une* bijection de $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$ sur $\left[2\sqrt{2},+\infty\right[$

6) a) g est strictement croissante sur $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$, d'où g^{-1} est strictement croissante sur $\left[2\sqrt{2},+\infty\right[$

x	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
g^{-1}(x)	$1+\sqrt{2}$ $\nearrow$	$+\infty$

b) $g(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}=x \Leftrightarrow x^2-2x+3=x^2-x \Leftrightarrow x=3$

$(C)\cap(C')=\{A(3,3)\}$

c) $(C')=S_{\Delta}(C_g)$ avec Δ :y=x

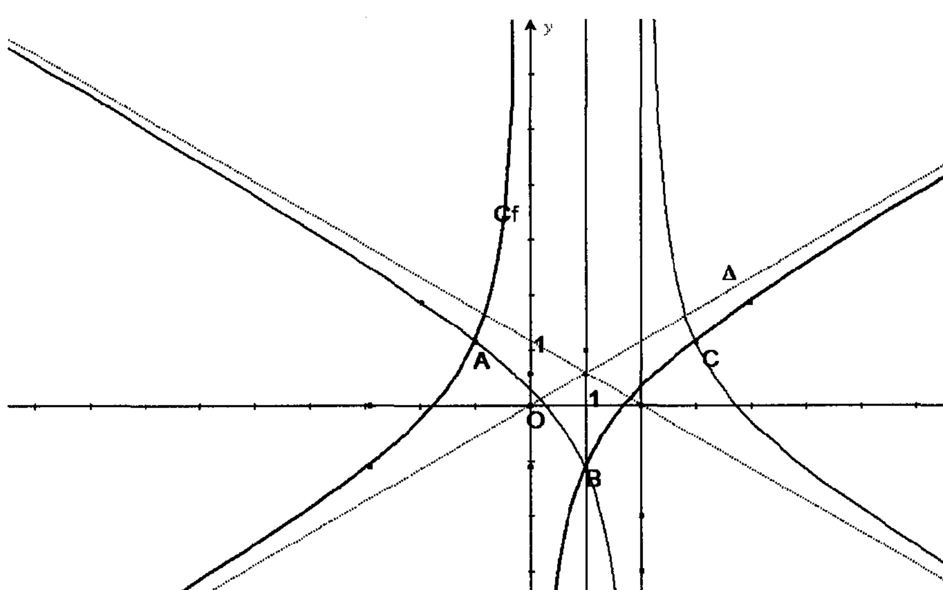
<u>Ex10 :</u> $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{x}$

1) $D_f=\mathbb{R}^*$ f est une fonction impaire $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}>0$

x	$-\infty$	0		$+\infty$
f'(x)	+	‖	+	
f(x)	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}})=\lim\limits_{|x|\to+\infty}-\dfrac{\sqrt{3}}{x}=0$

d'où la droite $\Delta: y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $\pm\infty$



2) D :x=1

a) M(x,y) ; M'(x',y')

$$S(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}M*M'\in D\\ \overrightarrow{MM'}\perp\vec{j}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=1\\ y'=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=2-x\\ y'=y\end{cases}$$

b) $M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{x}\Leftrightarrow y'=\frac{2-x'}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2-x'}$

d'où (C') : $y=\frac{2-x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2-x}$

c) $(C)\cap(C')$

$$M(x,y)\in(C)\cap(C')\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{x}\\ y=\dfrac{2-x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2-x}\end{cases}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{x}=\frac{2-x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2-x}\Leftrightarrow x-\frac{3}{x}=2-x-\frac{3}{2-x}\Leftrightarrow\frac{x^2-3}{x}=\frac{x^2-4x+1}{2-x}$$

$$\Leftrightarrow(x^2-3)(2-x)=x(x^2-4x+1)\Leftrightarrow 2x^3-6x^2-2x+6=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(2x^2-4x-6)=0\Leftrightarrow x-1=0\quad\text{ou}\quad 2x^2-4x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=1\quad\text{ou}\quad x=-1\quad\text{ou}\quad x=3$$

d'où $(C)\cap(C')=\{A,B,C\}$ A(1,f(1)) ; B(-1,f(-1)) et C(3,f(3))

d) $(C')=S_D(C)$

Ex11 : $f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$

1) $D_f=\mathbb{R}/\{-1,1\}$

2) $f(x)=\begin{cases}-(x+1)+\dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x<-1\\ x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 1\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}-1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x<-1\\ 1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 1\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}-(1+\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}) & \text{si } x<-1\\ \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 1\end{cases}$$

* pour $x\in\,]-\infty,1[\quad f'(x)<0$

* dans $]-1,+\infty[\,/\{1\}\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\sqrt{3}$

X	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	‖	-	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$			‖	$+\infty$ ↘	$1+3\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ $+\infty$	

3) les droites d'équations respectives x=-1 et x=1 sont des asymptotes à (C)

$$*\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$\Delta_1 : y=x+1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+(x+1)\right]=0$$

d'où $\Delta_2 : y=-x-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

4) pour $x\in\,]-1,+\infty[\,/\{1\}$, $f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

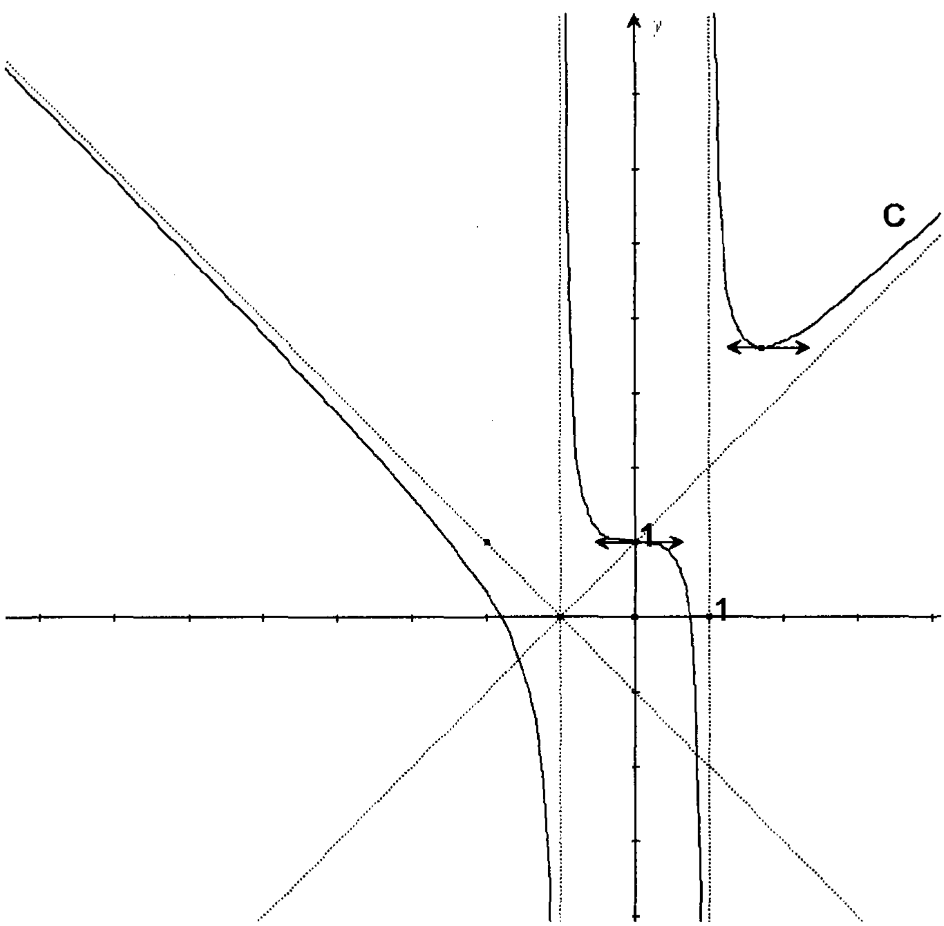
x	-1		0		1		$+\infty$
f(x)-(x+1)	‖	+	0	-	‖	+	
P.R	‖	$(C)/\Delta_1$	A(0,1)	$\Delta_1/(C)$	‖	$(C)/\Delta_1$	

pour $x\in\,]-\infty,-1[\quad f(x)+x+1=\dfrac{x}{x^2-1}<0$ (C) est au dessus de Δ_2

5) T :y=1 pour x $]-1,1[$ $\quad f(x)=x+1+\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow f(x)-1=x+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x^3}{x^2-1}$

x	-1		0		1
f'(x)		+	0	-	
P.R		$(C)/T$	A(0,1)	$T/(C)$	

6)



Ex12 : $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$

1) a) $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou x=1 ou x=-1. $D_f=\mathbb{R}^*/\{-1,1\}$

b) $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$

$$f(x)=\frac{x^2(x^2-1)+a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x^4+(a+b+c-1)x^2+(b-c)x-a}{x^3-x}$$

Par identification : on aura : $\left|\begin{array}{l} a+b+c-1=-6 \\ b-c=0 \\ -a=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=-1 \\ b=c=-2 \end{array}\right.$ d'où

$$f(x)=x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

2) $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$ $\qquad f'(x)>0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	‖ +	‖ +	‖ +	
f(x)	$+\infty$	‖ $+\infty$	‖ $+\infty$	‖ $+\infty$	
	$-\infty$ ↗	$+\infty$ ‖ ↗	$-\infty$ ‖ ↗	$-\infty$ ‖ ↗	

3) $\lim\limits_{|x|\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\dfrac{-1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=0$

les droite d'équations respectives x=-1 ; x=0 ; x=1 et y=x sont des asymptotes à (C)

4)

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-6x^2+1=0$ et $x\in D_f \Leftrightarrow (x^2-3)^2=8$ et $x\in D_f$

$\Leftrightarrow x^2-3=\sqrt{8}$ ou $x^2-3=-\sqrt{8} \Leftrightarrow x^2=3+\sqrt{8}$ ou $x^2=3-\sqrt{8}$

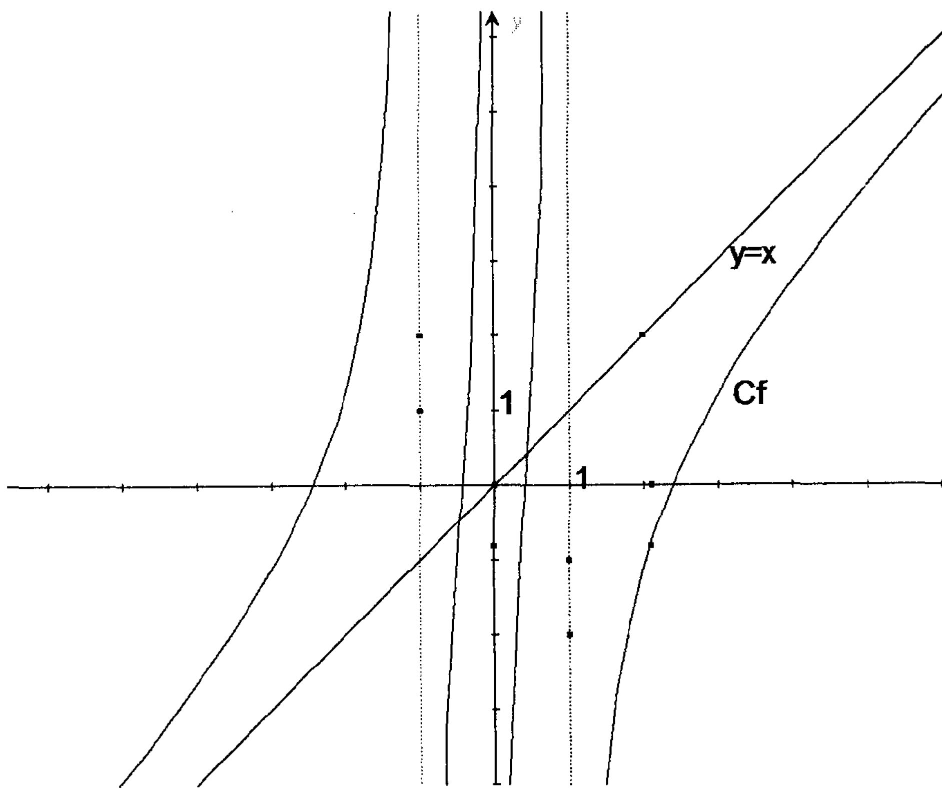
$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ou $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ou $x=-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ou $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\sqrt{3+2\sqrt{2}};\sqrt{3+2\sqrt{2}};-\sqrt{3-2\sqrt{2}};\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right\}$

$$*f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}=x \Leftrightarrow x^4-6x^2+1=x^4-x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

5) f est une fonction impaire d'où (C) admet le point O(0,0) comme centre de symétrie



6) $P_k(x)=x^4-kx^3-6x^2+kx+1$ dans $\mathbb{R}^*/\{-1;1\}$ $P_k(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=k$; graphiquement l'équation f(x)=k admet toujours quatre solutions distinctes

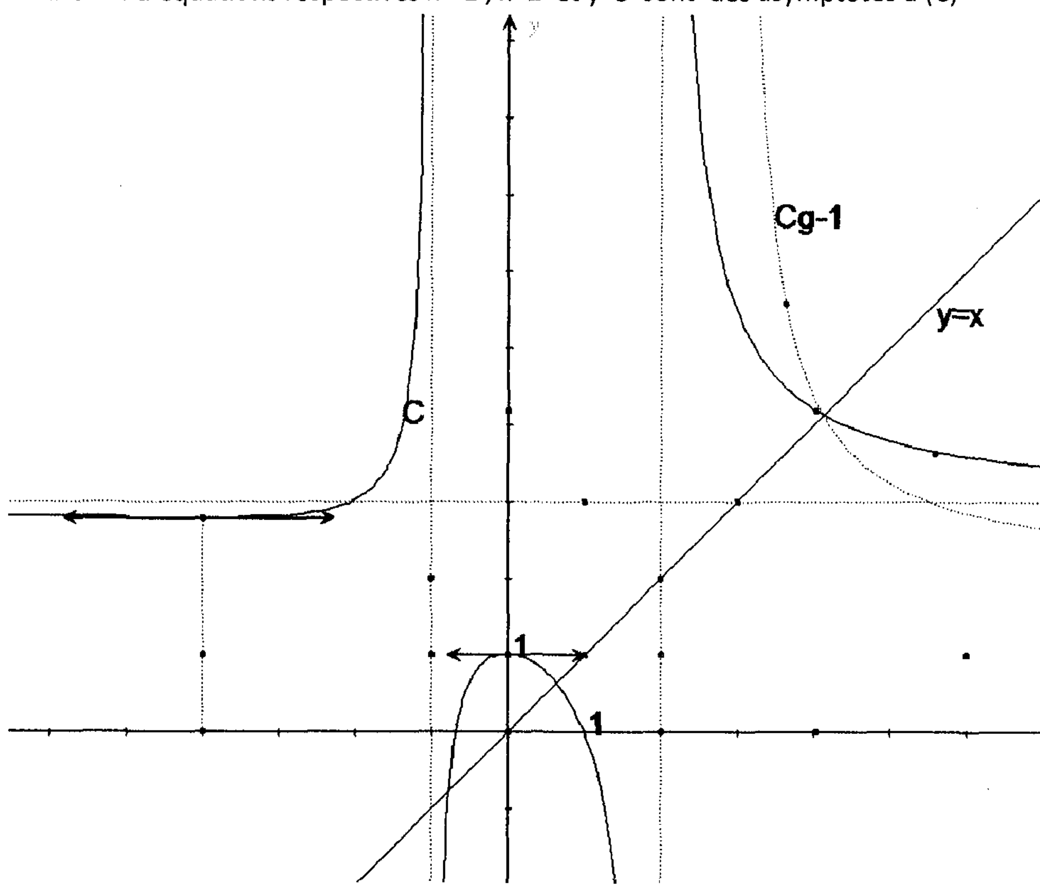
<u>Ex13 :</u> $f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$

1) $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x'=-1$ et x''=2 $\quad D_f=\mathbb{R}/\{-1;2\}$

2) $f'(x)=\dfrac{-2x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$

X	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f(x)	3	$\searrow$	$\frac{25}{9}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3

3) les droites d'équations respectives x=-1 ; x=2 et y=3 sont des asymptotes à (C)



4) dans $\mathbb{R}/\{-1,2\}$

$$f(x)=m \Leftrightarrow (3-m)x^2+(m-1)x+2(m-1)=0$$

<u>1er cas</u> : $m\in \left]-\infty,1\right[\cup \left]3,+\infty\right[$ l'équation (E_m) admet deux solutions de signes contraires

<u>2em cas</u> : $m\in \left]1,\frac{25}{9}\right[$ l'équation (E_m) n'admet pas de racines

<u>3^{em} cas</u> : $m \in \left[\frac{25}{9}, 3\right[\cup \{1\}$ l'équation (E_m) admet une unique solution négative

5) a) g est continue et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$ elle réalise donc une bijection de $]2,+\infty[$ sur g($]2,+\infty[$)= $]3,+\infty[$

par suite g admet une fonction réciproque g^{-1}

définie sur $]3,+\infty[$

b) $(C_{g^{-1}}) = S_{\Delta}(C_g)$ avec $\Delta : y = x$

Ex14 :

$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)2}$; $x \neq 1$

1) $x+5+\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2} = \frac{(x+5)(x-1)^2+12(x-1)+8}{(x-1)^2} = ... = f(x)$

2) $f'(x) = 1 - \frac{12}{(x-1)^2} - \frac{16}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		$+\infty$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{27}{2}$	↗	$+\infty$

3) a) $\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x+5)]$

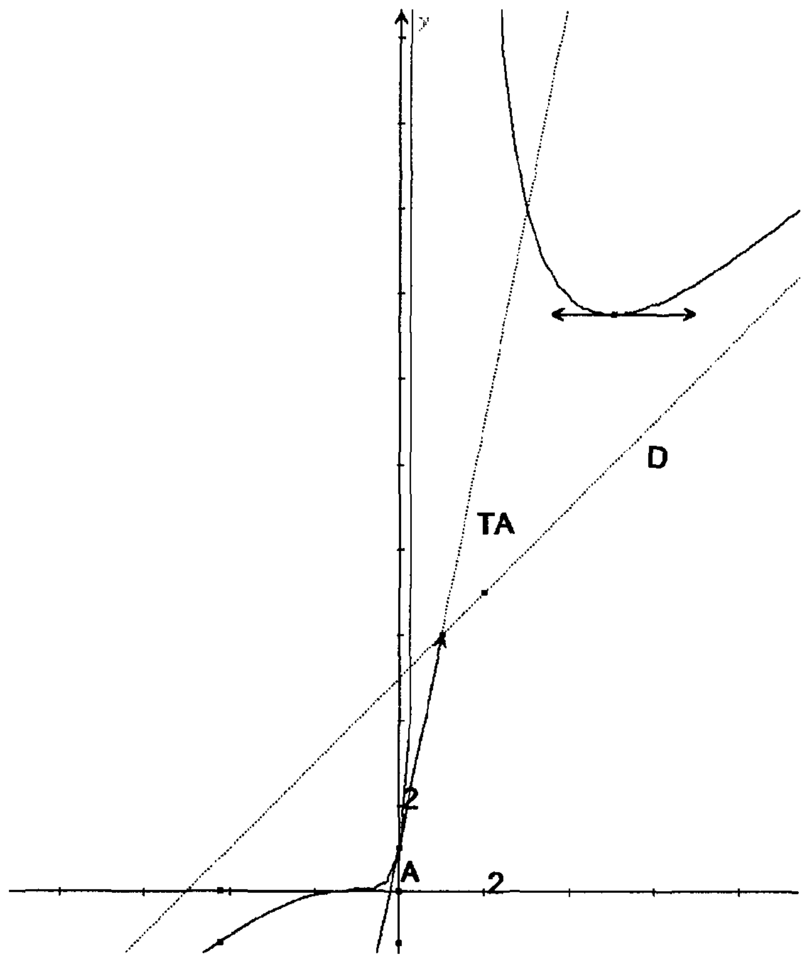
$= \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} \right) = 0$ d'où la droite D : y=x+5 est une asymptote à (C)

b) $f(0) = 1 \Rightarrow A(0,1)$

$f(x) = x+5 \Leftrightarrow \frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)} = 0 \Leftrightarrow 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ d'où $B(\frac{1}{3}, \frac{16}{3})$

c) $T_A : y = 5x + 1$ $T_B : y = 28x - 4$

d)



Ex15:

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

1) a) $x^2 - x + 1 = 0$ Δ=-3<0

d'où $x^2 - x + 1 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

b) $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ d'où $f(x) = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

2) a) $f(x) - (x - \frac{1}{2}) = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - (x - \frac{1}{2}) = \dfrac{3/4}{\sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + (x - \frac{1}{2})}$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \Delta$:y=x-$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

$$b)\, f(x)-(x-\frac{1}{2})=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})$$

$$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>(x-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})>0$$

$$\Rightarrow f(x)-(x-\frac{1}{2})>0 \quad donc\ (\zeta_f) \text{ est au dessus de } \Delta$$

$$3)\ *\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2.(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1$$

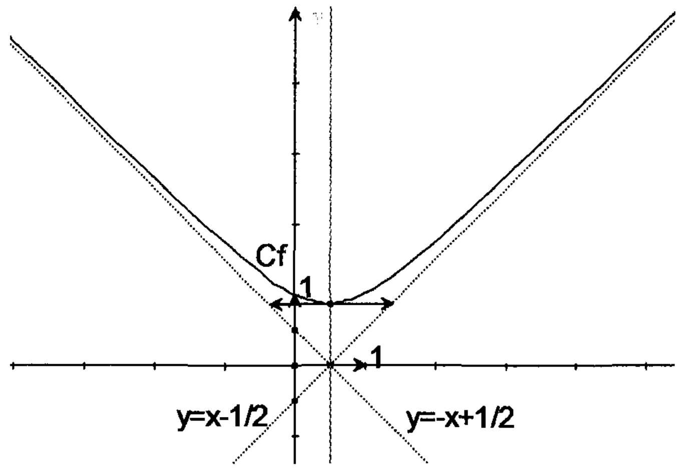
$$*\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x+1)-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(1-\frac{1}{x})}{-x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

D:y=-x+$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (-∞)

$$4)\ f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

x	-∞		½		+∞
f'(x)		-	0	+	
f(x)	+∞	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	+∞



Ex16 :

$f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

1) $x^2+3x-4=0$ x'=1 et x ''=-4

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		+	0	-	0	+	

$D_f=]-\infty,-4]\cup[1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}=\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4}=\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3x-4}}=-\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en (-4)

(C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse -4

$*\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+3x-4}}=+\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 1

(C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 1

3) la fonction $x \mapsto x^2+3x-4$ est dérivable et strictement positive sur chacun des intervalles $]-\infty,-4[$ et $]1,+\infty[$, d'où f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-4[$ et $]1,+\infty[$ $\quad f\,'(x)=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}$

4)

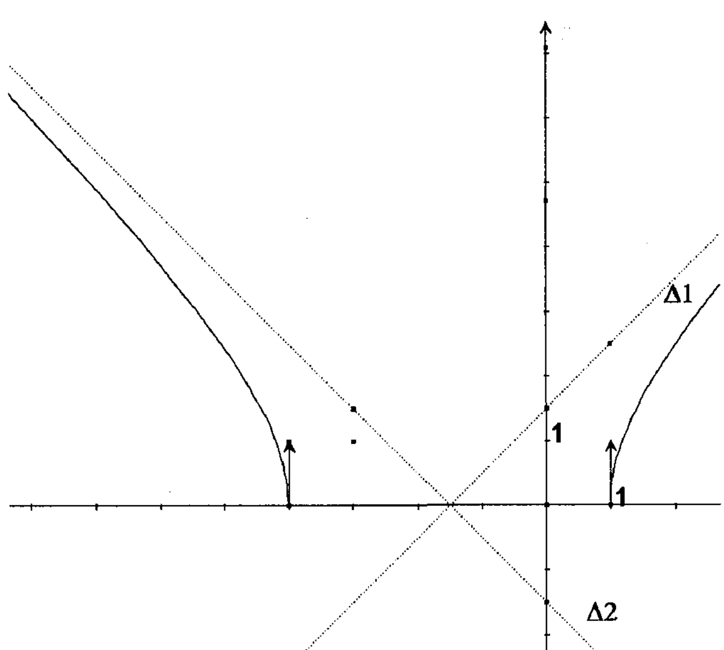
X	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	||		||	$+$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0 ||		|| 0	$\nearrow$	$+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+3x-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-4/x}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$$

$\Delta_1 : y=x+\dfrac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

de même : $\Delta_2 : y=-x-\dfrac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de ($-\infty$)



6) a)

b) $(\Gamma): x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0$ $\qquad x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+3x-4}$ ou $y = -\sqrt{x^2+3x-4} \Leftrightarrow$ y=$f(x)$ ou y=-$f(x)$

d'où $(\Gamma) = (C) \cup (C')$ avec (C')=$S_{(Ox)}(C)$

Ex17 :

$f(x) = x^2 - 32\sqrt{x} + 31$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \dfrac{32}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 0

2) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$et\ f'(x) = 2x - \frac{16}{\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} - 16}{\sqrt{x}} = \frac{2\left[(\sqrt{x})^3 - 8\right]}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}}$$

x	0		4		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	31	↘	-17	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[x - \dfrac{32}{\sqrt{x}} + \dfrac{31}{x}\right] = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \dfrac{32}{\sqrt{x}} + \dfrac{31}{x}\right) = +\infty$

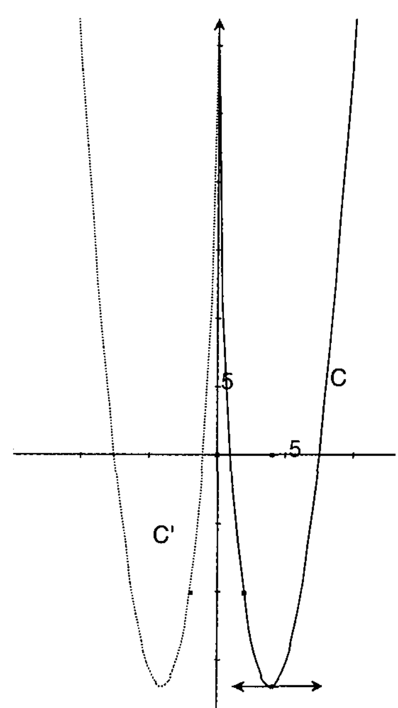
(C) admet une branche parabolique de

direction celle de $(O, \vec{j})$

4) $g(x) = x^2 - 32\sqrt{|x|} + 31$

- $D_g = \mathbb{R}$
- g est une fonction paire
- pour $x \in \mathbb{R}_+$ g(x)=$f(x)$

d'où $(C_g) = (C) \cup (C')$ avec (C')=$S_{(Oy)}(C)$



Ex18 :

$g(x) = x\sqrt{x} + 10$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

2) $g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \geq 0$

3)

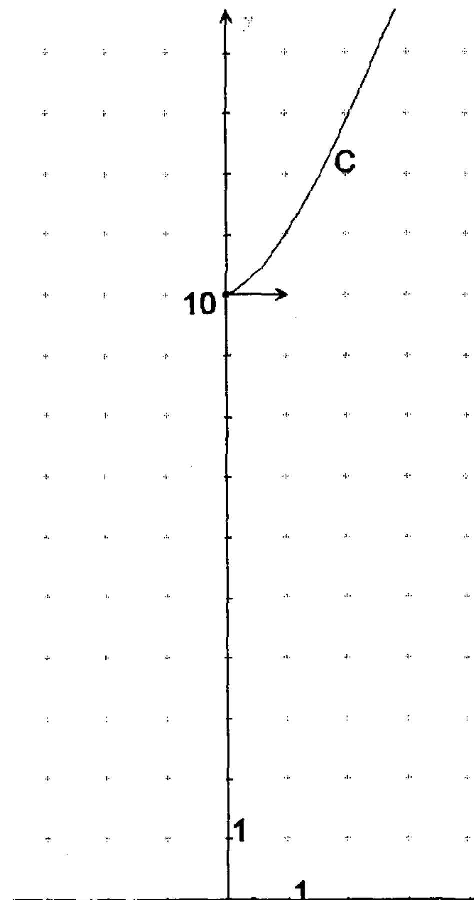
x	0		$+\infty$
g'(x)	0	+	
g(x)	10	↗	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x} + \dfrac{10}{x}\right) = +\infty$

(C) admet une branche parabolique de direction

celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

5)



Ex19 :

$f(x) = \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$

1)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		-	0	+	0	-	

$D_f = [-2, 2] / \{0\}$

2)
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}+(2-x)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}\left[-1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\right]$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}\left[-1+\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}\right]=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}\left[-1-\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\right]=-\infty$$

f n'est pas dérivable à gauche en 2.

(C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 2

3) la fonction : $x\mapsto 4-x^2$ est dérivable et strictement positive sur]0,2[

d'où la fonction : $x\mapsto \sqrt{4-x^2}$ est dérivable sur]0,2[

par suite f est dérivable sur]0,2[comme étant quotient de deux fonctions dérivables

$$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$
$$f'(x)=\frac{-2}{x^2}+\frac{\frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\frac{-2}{x^2}-\frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2}{x^2}\left[1+\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right]<0$$

4) f est une fonction impaire , il suffit de l'étudier sur]0,2]

x	0		2
f'(x)		-	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	1

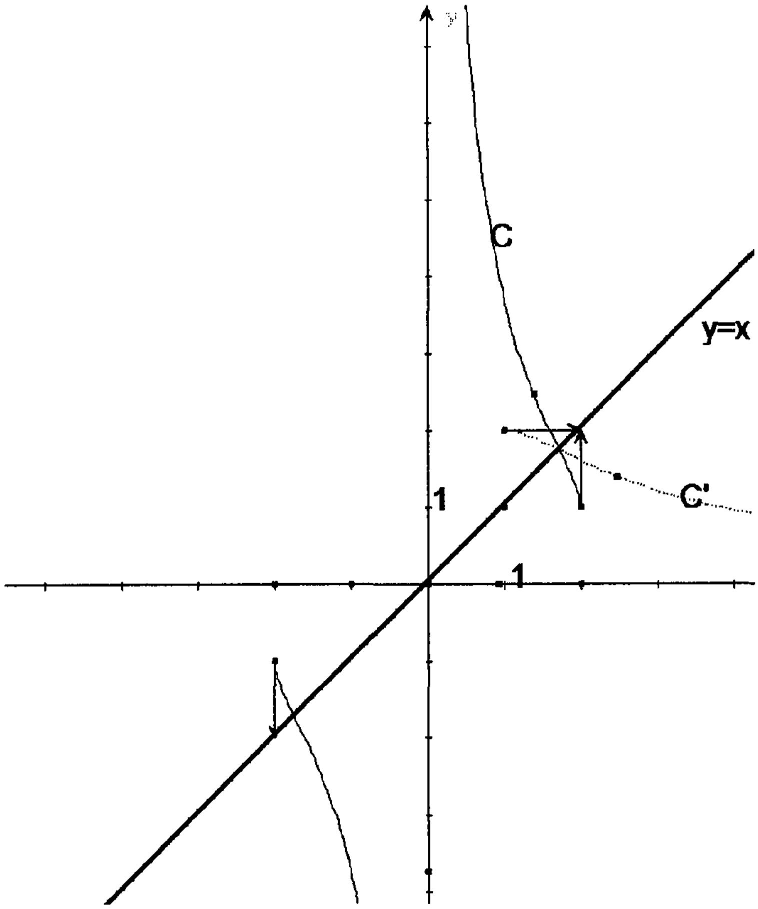
5) a) $f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}=x \Leftrightarrow x^2=2+\sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^4-4x^2+4=4-x^2 \Leftrightarrow x^4-3x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x^2=3$ car $x\neq 0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

$(C)\cap D=\{A,B\}$ *avec* $A(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ et $B(\sqrt{3},\sqrt{3})$

b) O(0,0) est un centre de symétrie pour (C)



6) a) f est continue et strictement décroissante sur]0,2] , elle réalise donc une bijection de]0,2] sur [1,+∞[

b) soit $y=f^{-1}(x)$ avec : $x\in\left[1,+\infty\right[$; $y\in\left]0,2\right]$

$$\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}=x\Leftrightarrow xy-2=\sqrt{4-y^2}\Leftrightarrow x^2y^2-4xy+4=4-y^2$$

$$\Leftrightarrow(1+x^2)y^2-4xy=0\Leftrightarrow y\left[(1+x^2)y-4x\right]=0\Leftrightarrow(1+x^2)y-4x=0\quad\text{car } y\neq0\Leftrightarrow y=\frac{4x}{1+x^2}$$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$

c) $(C')=S_D(C_1)$ avec (C_1) : la courbe de la restriction de f sur]0,2]

<u>Ex20 :</u>

$$f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1) $D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-2	$\nearrow$	2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-2$$

2) $f(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$ $\qquad I(\frac{-1}{2},0)$

- pour $x\in D_f=\mathbb{R}$ on a : $(-1-x)\in D_f$
- $f(-1-x)=\frac{2(-1-x)+1}{\sqrt{(1+x)^2+(-1-x)+1}}=\frac{-(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}=-f(x)$

d'où $I(\frac{-1}{2},0)$ est un centre de symétrie pour (C)

3) $\Delta : y=\frac{3}{2}x$

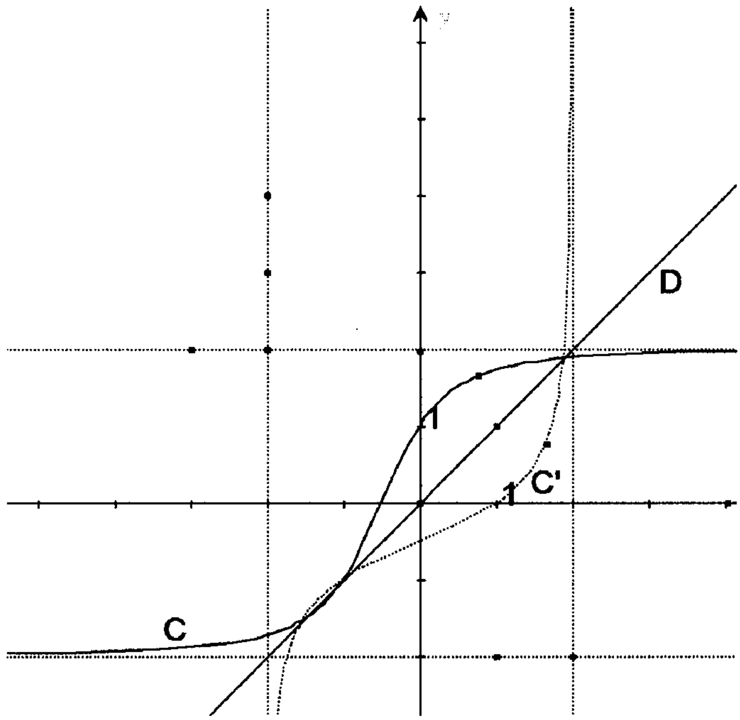
$$f'(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}=1\Leftrightarrow x^2+x+1=1$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$$

les tangentes à (C) aux points d'abscisse 0 et -1 sont parallèles à Δ

$$T_0 : y=\frac{3}{2}x+1 \qquad T_1 : y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$$

4)



5) a) f est continue et strictement croissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]-2,2[, d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur]-2,2[

b) $(C_{f^{-1}}) = S_D(C_f)$ avec D : y=x

c) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{2}{3}$

Ex21 :

I/ $f(x) = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

1) $D_f = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

x	-∞		+∞
f'(x)		+	
f(x)	-1	↗	0

$$f(x)=\frac{-1}{2}+\frac{x}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

pour x>0 , $f(x)=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

pour x<0 , $f(x)=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

2) f est continue et strictement croissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]-1,0[

II/ $g(x)=\frac{-1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

1) $g'(x)=f(x)<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
g'(x)		-	
g(x)	$+\infty$	$\searrow$	1

$$g(x)=1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

$$g(x)=1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right] \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=1$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ d'où Δ_1 :y=1 est une asymptote à (C')

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)=1$

Δ_2 :y=-x+1 est une asymptote à (C) au voisinage de ($-\infty$)

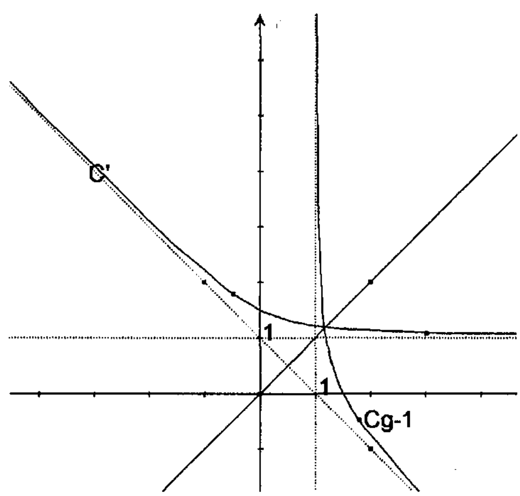
- position relative de (C') et Δ_1

$$\left.\begin{array}{l} g(x)-1=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \\ x^2+1>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>|x| \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>x \end{array}\right\rangle \Rightarrow g(x)-1>0$$ (C') est au dessus de Δ_1

- position relative de (C') et Δ_2

$$\left.\begin{array}{l} g(x)-(-x+1)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \\ \sqrt{x^2+1}>|x| \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \end{array}\right\rangle \Rightarrow g(x)-(-x+1)>0$$ (C') est au dessus de Δ_2

3) a)



b) g est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR)=]1,+∞[

c) on pose $y=g^{-1}(x)$ avec x>1 , y∈ $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow \frac{-1}{2}y+1+\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}=2x+y-2$$

$$\Leftrightarrow y^2+1=4x^2+4xy-8x+y^2-4y+4 \Leftrightarrow (4x-4)y=1-4(x^2-2x+1)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4x-4}-\frac{x^2-2x+1}{x-1} \Leftrightarrow y=\frac{1}{4x-4}-\frac{(x-1)^2}{x-1} \Leftrightarrow y=\frac{1}{4x-4}-(x-1)$$

d'où $g^{-1}(x)=\frac{1}{4x-4}-(x-1)$

d) $(C_{g^{-1}})=S_\Delta(C')$ avec Δ :y=x

Ex22 :

$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1) $D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	2

pour $x\neq 0$; $f(x)=1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=2 \quad et \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$$

2) a) $f''(x)=\frac{-3x}{(1+x^2)^2.\sqrt{1+x^2}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	

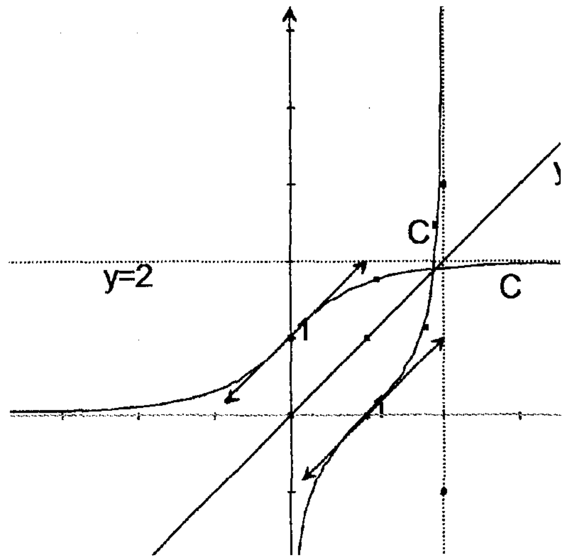
f'' s'annule en 0 en changeant de signe d'où A(0,1) est un point d'inflexion pour (C)

b) T :y=x+1

c) A(0,1) * pour $x\in D_f=\mathbb{R}$ on $(-x)\in D_f$

$$* \quad f(-x)=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=2-\left[1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=2-f(x)$$

d'où A(0,1) est un centre de symétrie pour (C)



3) a) f est continue et strictement croissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]0,2[

b) $y = f^{-1}(x)$ avec $\left| \begin{array}{l} x \in \left]0,1\right[\\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x-1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x-1)^2$$

avec y et (x-1) de même signe (*)

$$\Leftrightarrow y^2 = (x-1)^2 y^2 + (x-1)^2 \Leftrightarrow (2x-x^2)y^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{(x-1)^2}{2x-x^2} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

d'après (*) d'où $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

c) $(C_{f^{-1}}) = S_\Delta(C)$ avec Δ :y=x

d) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \neq 0$ d'où f^{-1} est dérivable sur]0,2[

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2} - (x-1)\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{(2x-x^2)+(x-1)^2}{(\sqrt{2x-x^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$$

4) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

on pose h(x)=f(x)-x $\Rightarrow h'(x)=f'(x)-1=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}-1\leq 0$ car $1+x^2\geq 1$

h est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur $h(\mathbb{R})=\left]\lim_{+\infty} h, \lim_{-\infty} h\right[=\left]-\infty,+\infty\right[=\mathbb{R}$

comme $0\in h(\mathbb{R})$, alors il existe un unique réel α tel que $h(\alpha)=0$

$$h(\sqrt{3})\times h(2)<0 \quad \Rightarrow \alpha\in\left[\sqrt{3},2\right]$$

par suite α est l'unique solution de l'équation f(x)=x dans IR

5) $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) (récurrence)

- $U_0=2$, $U_1=f(U_0)=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $U_0\geq U_1$ (vrai)
- supposons que : $U_n\geq U_{n+1}$ et montrons que : $U_{n+1}\geq U_{n+2}$

$U_n\geq U_{n+1}\Rightarrow f(U_n)\geq f(U_{n+1})$ car f est croissante sur IR d'où $U_{n+1}\geq U_{n+2}$

conclusion : $U_n\geq U_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

par suite (U_n) est décroissante

b) (récurrence)

- $\sqrt{3}\leq U_0\leq 2$ (vrai)
- supposons que : $\sqrt{3}\leq U_n\leq 2$ et montrons que : $\sqrt{3}\leq U_{n+1}\leq 2$

$$\sqrt{3}\leq U_n\leq 2\Rightarrow f(\sqrt{3})\leq f(U_n)\leq f(2)\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\leq U_{n+1}\leq 1+\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{2}\leq U_{n+1}\leq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\leq U_{n+1}\leq 2$$

conclusion : $\sqrt{3}\leq U_n\leq 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$ elle est donc convergente

- soit $l = \lim\limits_{x \to +\infty} U_n$

$U_{n+1} = f(U_n)$, f est continue sur IR d'où $l = f(l) \Leftrightarrow l = \alpha$ d'après 4)

Ex23 :

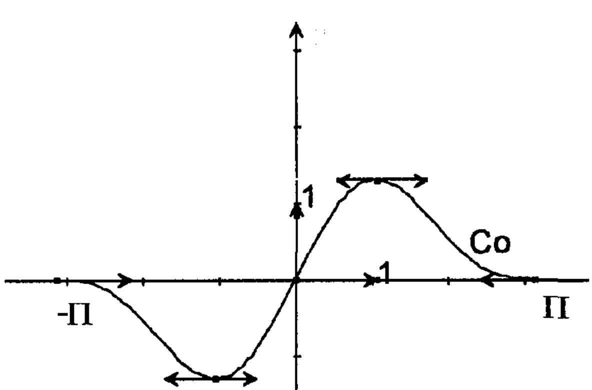
$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$

f(-x)=-f(x) : f est impaire
f(x+2π)=f(x) : 2π est une période de f

il suffir d'étudier f sur $[0,\pi]$

$f'(x) = \cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2(\cos x + 1)(\cos x - \frac{1}{2})$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



$(\zeta_f) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$

Ex24 :

$$f(x)=\frac{cosx}{2\cos x-1}$$

$$2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ;\mathrm{k}\in\mathbb{Z} \quad ou \quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ;\mathrm{k}\in\mathbb{Z} \right.$$

$$D_f=\mathbb{R}/\left\{\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\} ;\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}$$

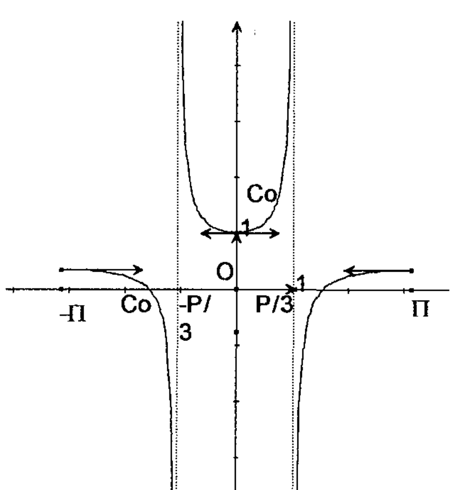
f est dérivable sur $\mathrm{D_f}$ $et\ f'(x)=\dfrac{-\sin x(2\cos x-1)+2\sin x\cos x}{(2\cos x-1)^2}=\dfrac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}$

- 2π est une période de f
- f(-x)=f(x) : f est paire

$\Rightarrow \mathrm{D_E}=[0,\pi]/\left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	‖	+	0
f(x)	1 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^-}\frac{\cos x}{2\cos x-1}=+\infty$$



$$(\zeta_f)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{t}_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$$

Ex25 :

$f(x)= \sin^2(x)+\cos(x)$

1) a/ $f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)= \sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$ Donc 2π est une période de f.

b/ *pour $x\in\mathbb{R}$ on a $(-x)\in\mathbb{R}$

* $f(-x)=\sin^2(-x)+\cos(-x)=[\sin(-x)]^2+\cos(x) = \sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$

donc f est une fonction paire$\Rightarrow$la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f

2) a/ Domaine d'étude $D_E = [0,\pi]$

$f'(x) =2\cos(x).\sin(x)-\sin(x) \quad =2\sin(x).\left[\cos(x)-\frac{1}{2}\right]$

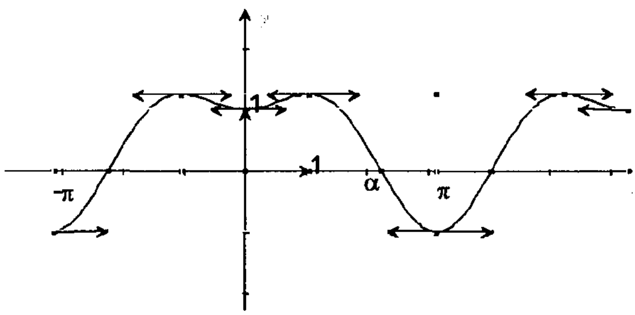
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	0	-	0
f(x)	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1

b/ *f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ sur f($\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$)= $\left[1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\notin\left[1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 n'a pas de solution dans $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

* f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur f($\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$)= $\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\in\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 admet une seule solution α dans $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Conclusion : **l'équation f(x)=0 admet α comme unique solution dans $[0,\pi]$**

$f(2,2).f(2,3)<0 \Rightarrow 2,2<\alpha<2,3$



EX 26 :

I. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ $D_f = IR\backslash\{1\}$

f est dérivable sur IR\{1} et $f'(x)=\dfrac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$ le signe de f'(x) est celui de (x-1).(x-3)

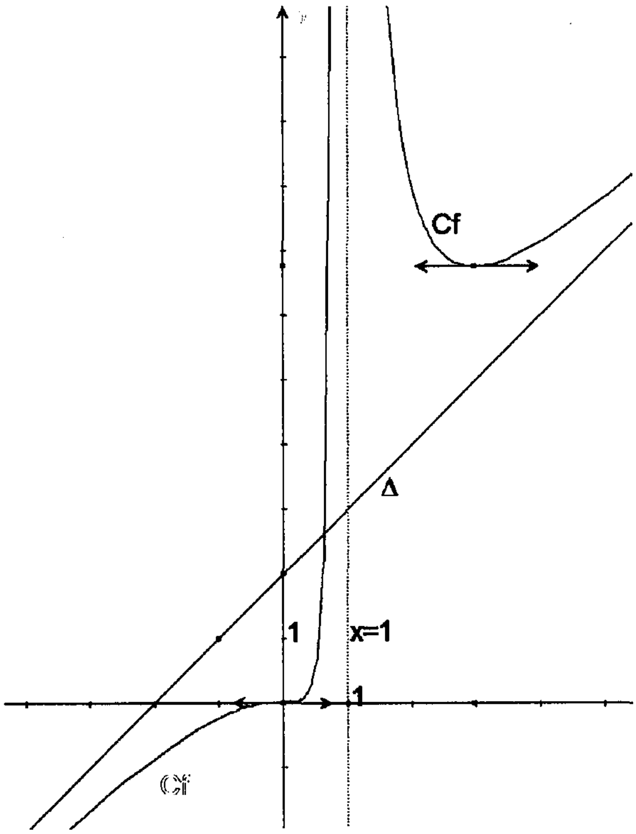
x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	||	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		$+\infty$	|| $+\infty$	↘	$\frac{27}{8}$	↗	$+\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ $\bullet \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$

Δ : y=x+2 est une asymptote à C_f au voisinage de ($-\infty$) et au voisinage de ($+\infty$)



II. $$h(x)=\frac{\sin^3(x)}{(\sin(x)-1)^2}=f(\sin(x))$$

1)

a/ sin(x)-1=0⇔sin(x)=1⇔ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathbb{Z}$ ⇒ **D_h = IR\{** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ **}**

b/ h(x+2π)=f(sin(x+2π))=f(sin(x))=h(x) **donc 2π est une période de h.**

c/ • x∈D_h ⇒x≠$\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ⇒-x≠$-\frac{\pi}{2}-2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

⇒π-x≠$\frac{\pi}{2}-2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ⇒ $2.\frac{\pi}{2}-x\in$ D_h

• h(π-x)= f(sin(π-x))=f(sin(x))=h(x)

Conclusion: Δ: **x=π/2 est un axe de symétrie pour C_h**

2) a/ h(x)= f(sin(x))

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\sin(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}h(x)=+\infty$$

b/ h'(x)= cos(x).f'(sin(x))

$$pour\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \left.\begin{array}{c}\cos(x)\geq 0\\ et\ \sin(x)\in[-1,1[\Rightarrow f'(\sin(x))\geq 0\end{array}\right\rangle\Rightarrow h'(x)\geq 0\,;\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow h\ est\ croissante\ sur\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

c/

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=0\quad ou\quad f'(\sin(x))=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad ou\quad \sin(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad ou\quad x=k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}$$

$$S_{D_h}=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$$

d/ h' s'annule et ne change pas de signe

en 0 donc le point de coordonnées (0,h(0)) est un point d'inflexion pour C_h

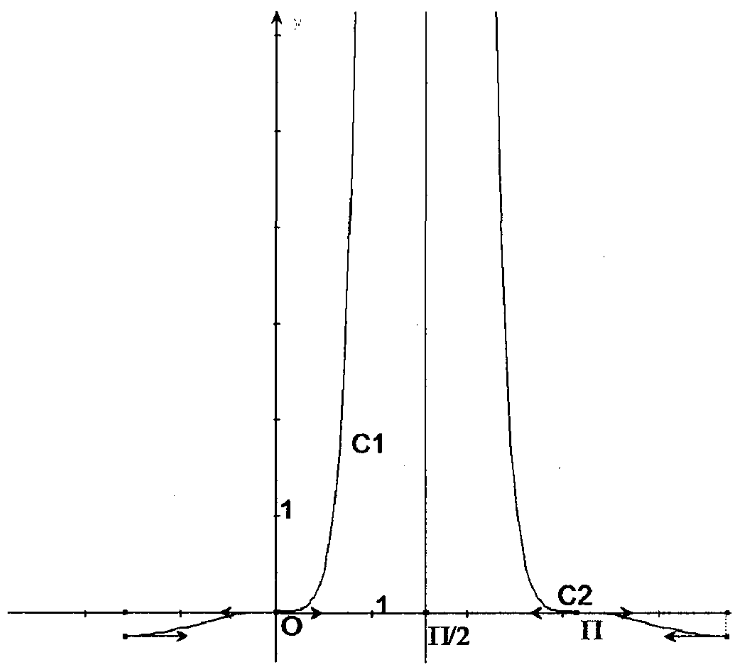
Conclusion : **l'origine du repère est un point d'inflexion pour C_h**

3) Soit C_1 la courbe de la restriction de h sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et Δ :x=π/2

$C_2=S_\Delta(C_1)$:la courbe de la restriction de h sur $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

$$C_h=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}t_{2k\pi\vec{i}}(C_1\bigcup C_2)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
h'(x)	0	+	0	+	
h(x)	$-\frac{1}{4}$	↗			$+\infty$



EX 27 :

1) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}/\{2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}/\{2\}$ *et* $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

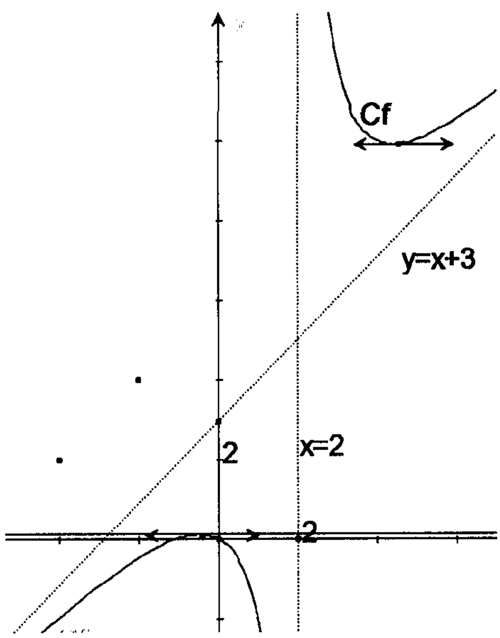
$x^2-4x-2=0$ pour x=2-$\sqrt{6}$ *ou* x=2+$\sqrt{6}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	f(x')	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	f(x'')	↗	$+\infty$

* $f(x)=x+3+\dfrac{6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x-2}=0 \Rightarrow \Delta : y=x+3$ est une asymptote à (ζ_f)

f($2-\sqrt{6}$)=$5-2\sqrt{6}$ et f($2+\sqrt{6}$)=$5+2\sqrt{6}$



2) dans $\mathbb{R}/\{2\}$

$x^2+(1-m)x+2m=0 \Leftrightarrow x^2+x=m.(x-2) \Leftrightarrow \dfrac{x(x+1)}{x-2}=m \Leftrightarrow f(x)=m$

*1^{er} *cas* : m$\in \left]-\infty,5-2\sqrt{6}\right[\cup \left]5+2\sqrt{6},+\infty\right[$ l'équation admet deux solutions

*2^{eme} *cas* : m=$5-2\sqrt{6}$ ou m=$5+2\sqrt{6}$l'équation admet une unique solution

*3^{eme} cas : m$\in \left]5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}\right[$ l'équation n'a pas de solution

3) (E) $\Leftrightarrow$ f(cosx)=m $\quad \cos x \in [-1,1]$

$f([-1,1])=\left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$

h(x)=f(cosx) est périodique de période 2π

1er cas : $m \notin \left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$ l'équation n'a pas de solution

2eme cas : $m \in \left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$ l'équation admet une infinité de solutions

Q.C.M :

1. $x \to 1 + tg^2\, x$
2. $x \to 1 - Cos\, x$
3. impaire
4. $x \to \dfrac{1}{2(1-x)^2} - \dfrac{1}{2}$
5. $x \to x \sin x + Cos\, x$

Vrai - Faux :

1. (Vrai)
En effet : cette primitive est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$
2. (VRAI)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \sin x \succ 0 \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$$

F et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$F'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2(\frac{-1}{x^2} Cos \frac{1}{x})$$

$$F'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - Cos(\frac{1}{x})$$

$F'(x) = f(x)$ *pour* $x \succ 0$

Montrons que F est dérivable à droite en 0 *et*

$F_d'(0) = f(0) = 0$

pour $x \succ 0$

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = x \sin(\frac{1}{x})$$

$$-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1 \Rightarrow$$

$$-x \le x \sin(\frac{1}{x}) \le x$$

$$\lim_{x \to 0^+} (-x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$$

d'ou

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0 = f(0)$$

Conclusion : F est une primitive de f

3. (FAUX)
Contre exemple :

$f(x) = 1 \to F(x) = x$

$g(x) = x \to G(x) = \dfrac{1}{2} x^2$

$(F.G)\,(x) = \dfrac{1}{2} x^3$

$(F.G)'(x) = \dfrac{3}{2} x^2 \neq (f.g)\,(x)$

4. (FAUX)

$F(2x) \overset{dérivée}{\to} 2.f(2x)$

5. (VRAI)
Thérèse du cours :
Il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donnée.

EX 1 :

1. $f(x)=-5x^4+2x-3$

$I=\mathbb{R}$

$F(x)=-x^5+x^2-3+k\,;(k\in\mathbb{R})$

2. $f(x)=(x+2)-\frac{3}{x^2}\,;I=\left]-\infty,0\right[$

$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{3}{x}+k\ (k\in\mathbb{R})$

3. $f(x)=\frac{3x}{(3x^2+2)^2}\,;I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{3x^2+2}\right)+k\,;(k\in\mathbb{R})$

4. $f(x)=(-x+3)^6\quad I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{-1}{7}(-x+3)^7+k\ \ (k\in\mathbb{R})$

5. $f(x)=(x-1).(x^2-2x+7)^4\ I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{10}(x^2-2x+7)^5+k$

6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$

$I=\left]-\infty,\frac{3}{4}\right[$

$F(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{-4x+3}+k$

7. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.Cos(\sqrt{x})\,;I=\left]0,+\infty\right[$

$F(x)=2\sin(\sqrt{x})+k$

8. $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^3+3x)^5}$

$F(x)=\frac{-1}{12(x^3+3x)^4}+k$

9. $f(x)=\sin(2x+1).Cos^4(2x+1)$

$F(x)=\frac{-1}{10}Cos^5(2x+1)+k$

10. $f(x)=x^2.\sin(x^3+1)$

$F(x)=-\frac{1}{3}Cos(x^3+1)+k$

11. $f(x)=\frac{\sin x}{(1+Cos\,x)^3}$

$F(x)=+\frac{1}{2}(\frac{1}{(1+Cos\,x)^2})+k$

12. $f(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}$

$F(x)=\frac{-3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{3x^3}+k$

$F(x)=\frac{2-6x-9x^2}{3x^3}+k$

13. $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

$F(x)=2\sqrt{x^2-x}+k$

14. $f(x)=(1+tg^2x)-1$

$F(x)=tgx-x+k\ \ (k\in\mathbb{R})$

Ex 2 :

1. *soit F une primitive de f sur* $[-2,2]$

$F'(x)=f(x$

pour $x\in[-2,-1)\to f(x)\le 0$

$x\in[-1,0]\to f(x)\ge 0$

$x\in[0,1]\to f(x)\le 0$

$x\in[1,2]\to f(x)\ge 0$

par exemple :

F est croissante sur $[-1,0]$

or graphiquement :

h est decroissante sur $[-1,0]$

d'ou h n'est pas une primitive de f

par suit : g est primitive de f

2. *soit H : une primitive de h*

$H'(x)=h(x);\ \forall x\in[-2,2]$

graphiquement : $h(0)\neq 0$

$\Rightarrow H'(0)\neq 0$

$\Rightarrow (\varsigma_H)$ *n'admet pas une tgte horizentale au point d'assisse* 0

$\Rightarrow (\varsigma_H)\neq(\varsigma_g)$

d'ou f est une primitive de h sur $[-2,2]$

EX 3 :

1. $f(x)=\sqrt{x+1}$

$F(x)=\frac{2}{3}(x+1).\sqrt{x+1}$

2. $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$

$F(x)=\frac{1}{3}(1+x^2).\sqrt{1+x^2}$

3. $f(x)=(x-3).\sqrt{x^2-6x}$

$F(x)=\frac{1}{3}(x^2-6x).\sqrt{x^2-6x}$

4. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\frac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

d'où :

$F(x)=\frac{2}{3}(x-1).\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}$

$F(x)=(\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}).\sqrt{x-1}$

5. $f(x)=(x+\frac{1}{2}).(x^2+x)^7$

$F(x)=\frac{1}{16}(x^2+x)^8$

6. $f(x)=\frac{1}{x^2}.\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2})'=\frac{-3}{2x^2}$

$f(x)=\frac{-2}{3}\left[\frac{-3}{2x^2}\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}\right]$

$F(x)=\frac{-2}{3}.(\frac{2}{3})(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}).\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{-4}{9}(\frac{3+x}{2x})\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

$F(x)=\frac{-2(3+x)}{9x}\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

7. $f(x)=(x+1)^{2009}-(x+1)^{2008}$

$F(x)=\frac{1}{2010}(x+1)^{2010}-\frac{1}{2009}(x+1)^{2009}$

Ex 4 :

1. f(x)=tg x+tg^3 x

f est continue sur I= $[0,\frac{\pi}{2}[$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x)=(1+tg^2x).tg\ x$

(de la forme U'.U)

D'où

$F(x)=\frac{1}{2}tg^2x+k$

$F(\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow\frac{1}{2}+k=1$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg^2\ x)$

2. f(x)=Cos(x)-Cos^3 (x)

f est continue sur I= IR

f admet donc des primitives sur I

f (x)=Cos x (1-Cos^2 x)

f (x)=Cos x . sin^2 (x)

d'où

$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x+k$

$F(\frac{\pi}{2})=-1\Rightarrow\frac{1}{3}+k=-1$

$\Rightarrow k=-\frac{4}{3}$

$F(x)=\frac{1}{3}(-4+\sin^3 x)$

3. f est continue sur I=$\mathbb{R}$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x)=\sin x(1-\sin^2 x)$

$f(x)=\sin x.Cos^2 x$

$F(x)=\frac{-1}{3}Cos^3 x+k$

$f(\frac{-\pi}{4})=2\Rightarrow\frac{-1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^3+k=2$

$\Rightarrow k=2+\frac{\sqrt{2}}{12}$

$F(x)=\frac{-1}{3}Cos^3 x+2+\frac{\sqrt{2}}{12}$

4. f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=\frac{1}{Cos^2 x}(1+tg\ x)$

(de la forme U'.U)

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg\ x)^2+k$

$F(\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow k=-2$

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg\ x)^2-2$

EX 5 :

1. $f(x)=Cos(x).Cos(3x)$

$g(x)=\sin x.\sin(3x)$

a)

$*(f+g)(x)=Cos\ x.Cos\ 3x+\sin x\sin 3x$

$=Cos(3x-x)$

$=Cos\ 2x$

$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ *est une primitive de* $(f+g)$ *sur IR*

$*(f-g)(x)=Cos\ 4x$

$\psi(x)=\frac{1}{4}\sin 4x$

est une primitive de (f-g) sur IR

b).

$(\varphi+\psi)'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)$

$=(f+g)(x)+(f-g)(x)$

$=2f(x)$

$F(x)=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)(x)$ est une primitive de f sur IR

$F(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)+k$ k∈ IR

$(\varphi-\psi)'(x)=(f(x)+g(x))-(f(x)-g(x))$

$=2g(x)$

$G(x)=\frac{1}{2}(\varphi-\psi)(x)$

G est une primitive de g sur IR

$G(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(4x)+k$ k∈ IR

2.

$h(x)=\sin 4x+Cosx.\sin 4x$

$h(x)=\sin 4x+2Cosx.\sin 2x\ Cos2x$

$=\sin 4x+4\sin x.Cos^2x\ (Cos\ 2x)$

$=\sin 4x+4\sin x.Cos^2x\ (2Cos^2x-1)$

$=\sin 4x+8\sin x.Cos^4x-4\sin x\ Cos^2x$

$H(x)=\frac{-1}{4}Cos\ 4x-\frac{8}{5}Cos^5x+\frac{4}{3}Cos^3+k$

$H(\pi)=0\Rightarrow\frac{8}{5}-\frac{4}{3}+k=0$

$k=\frac{-4}{15}$

$H(x)=\frac{1}{4}Cos\ 4x-\frac{8}{5}Cos^5x+\frac{4}{3}Cos^3x-\frac{4}{15}$

EX 6 :

$f(x)=x.\sin x$

1. *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$

(produit de 2 fonction dérivables)

$f'(x)=\sin x+x\ Cos\ x$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f''(x)=Cos\ x+Cos\ x-x\sin x$

$f''(x)=2\ Cos\ x-f(x)$

$\Rightarrow f(x)=2\ Cos\ x-f''(x)$

2. $F(x)=+2\sin x-f'(x)+k$

$F(x)=2\sin-\sin x-x\ Cos\ x+k$

$F(x)=\sin x-x\ Cos\ x+k$

$F(\pi)=0\Rightarrow k=-\pi$

d'où :

$F(x)=\sin x-x\ Cos\ x-\pi$

EX 7 :

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^4}$$

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{(x+1)^4}$$

1. a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4.f(x)=$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+2)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}=\lim\limits_{+\infty}\frac{x^2}{x^4}$

$=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

b) $(x+1)^4.f(x)=$

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^2f(x)=d$

or $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4f(x)=1$ *d'où* $d=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{d}{(x+1)^3})=a$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=0$

d'où $a=0$

$$f(x)=\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^4}$$

2. a) $\frac{x+2}{(x+1)^4}=\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^4}$

$\Rightarrow\frac{x+2}{(x+1)^4}-\frac{1}{(x+1)^4}=\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\frac{1-c}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}$

b) $\frac{1-c}{(x+1)^3}=\frac{bx+b}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\b=1-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^4}$$

3. $F(x)=\frac{-1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)^3}+k$

$F(0)=2\Rightarrow-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+k=0\Rightarrow k=\frac{5}{6}$

d'où

$$F(x)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)^3}$$

EX 8 :

$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)^3}\quad ,x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

1. $f(x)=\frac{2(x-2)+5}{(x-2)^3}$

$f(x)=\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{5}{(x-2)^3}$

2. $F(x)=\frac{-2}{x-2}-\frac{5}{2(x-2)^2}$

$F(x)=\frac{-4x+3}{2(x-2)^2}$

EX 9 :

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;x\in\ ]-1,1[$

F est dérivable sur $]-1,1[$

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$g(x)=F(\sin x)$

1. *la fonction* : $x \to \sin x$

est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1,1[$

F est dérivable sur $]-1,1[$ *d'où g est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$g'(x) = Cos\, x.F'(\sin x)$$
$$= Cos\, x.f(\sin x)$$
$$= \frac{Cos\, x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{Cos\, x}{\sqrt{Cos^2 x}}$$
$$= \frac{Cos\, x}{|Cos\, x|} = 1 \;\; car \;\; \frac{Cos\, x \succ 0}{x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

$g'(x) = 1 ; \forall x \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2. $g'(x) = 1$

$d'où\ g(x) = x + k,\ k \in \mathbb{R}$

$g(0) = F(0) = 0$

$\Rightarrow 0 + k = 0$

$\Rightarrow k = 0$

$d'ou\ g(x) = x \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. $F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = F\left(\sin(\frac{\pi}{4})\right) = g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{2}) = F\left(\sin(\frac{\pi}{6})\right) = g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$

$F(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = F\left(\sin(-\frac{\pi}{3})\right) = g(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}$

EX 10 :

$f(x) = \sqrt{1-x^2} \;\; ; x \in [0,1]$

F dérivable sur $[0,1]$

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

$g = F(Cos\, x) ; x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1. *g est dérivable sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *comme était composée de deux fonction dérivable.* (*voir ex* 9)

$$g'(x) = (-\sin x).F'(Cos\, x)$$
$$= (-\sin x).f(Cos\, x)$$
$$= -\sin x\sqrt{1-Cos^2 x}$$
$$= -\sin x|\sin x|$$
$$= -\sin^2 x \qquad car \sin x \geq 0$$

2. $g'(x) = -\sin^2 x = -\frac{1}{2}(1 - Cos\, 2x)$

$g(x) = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + k$

$g(\frac{\pi}{2}) = F(0) = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) + k = 0$

$\Rightarrow k = \frac{\pi}{4}$

d'où

$g(x) = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{\pi}{4}$

3. $F(1) = F(Cos 0) = g(0) = \frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{\sqrt{2}}) = F(Cos\frac{\pi}{4}) = g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

EX 11 :

1. $f''(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = a ; a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = a\,x + b \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

2. $f''(x) = \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = -Cos\, x + a; \quad a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = -\sin x + a\,x + b$

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$

EX 12 :

1. $f(x)=|x| \quad x\in\mathbb{R}$

a) f *est continue sur* $\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} f(x)=x & \sin x\in[0,+\infty[\\ f(x)=-x & \sin x\in]-\infty,0[\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a \quad pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+b \ pour\ x<0 \end{cases}$

F est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow F$ *continue en* 0

$\Rightarrow a=b$

$d'où \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a \quad pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+a \quad pour\ x<0 \end{cases}$

$F(4)=0\Rightarrow 8+a=0\Rightarrow a=-8$

$\begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2-8 \quad pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2-8 \quad pour\ x<0 \end{cases}$

2. $g(x)=|x|+|x-1|$

a) g *est continue sur IR*

x	-∞	0	1 +∞
|x|	-x	x	x
|x-1|	-x+1	-x+1	x-1
g(x)	-2x+1	1	2x-1

$\begin{cases} g(x)=-2x+1 & pour\ x\leq 0 \\ g(x)=1 & pour\ \ 0<x\leq 1 \\ g(x)=2x-1 & pour\ \ x>1 \end{cases}$

d'où

$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+b & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+c & pour\ x>1 \end{cases}$

G *est continueen* 0

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)\Rightarrow a=b$

G *continue en* $1\Rightarrow$

$1+b=c\Rightarrow c=a+1$

d'où

$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+a & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+a+1 & pour\ x\geq 1 \end{cases}$

$(a\in\mathbb{R})$

EX 13 :

$f(x)=\sin^3 x+\sin^5 x$

$=\sin x.(1-Cos^2x)+\sin x.(1-Cos^2x)^2$

$=\sin x-\sin x\, Cos^2x+\sin x.(1+Cos^4x-2Cos^2x)$

$f(x)=2\sin x-3\sin x.\,Cos^2x$

$\quad +\sin x.Cos^4x$

$F(x)=-2Cos\,x+Cos^3x-\frac{1}{5}Cos^5x$

(on pourra aussi linéariser f(x))

EX 14 :

$a(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2} \quad ;t\in[0,10]$

1. $\begin{cases} v'(t)=a(t) \\ v(0)=0 \end{cases}$

$v(t)=t+\frac{1}{t+1}+k$

$v(0)=0\Rightarrow 1+k=0\Rightarrow k=-1$

$v(t)=t-1+\frac{1}{t+1}$

2. $v(10)=\frac{100}{11}m/s$

EX 15 :

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$; $x\in[-2,2]$

1.a) *la fonction* : $x\to 4-x^2$ *est continue et positive sur* $[-2,2]$ *d'où* f *est continue sur* $[-2,2]$

par suit f *admet au moins une primitive sur* $[-2,2]$

b)

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$\forall x\in D_F=[-2,2]\,;(-x)\in D_F$

$f(x)=f(-x)\Rightarrow$

$F(x)=-F(-x)+k$

$F(0)=0\Rightarrow k=0$

d'où $F(-x)=-F(x)$

F est impaire.

2. $G(x)=F(2Cos\ x)\,;x\in[0,\pi]$

$\Rightarrow -\pi\le -x\le 0$

$\Rightarrow 0\le \pi-x\le\pi$

$\Rightarrow (\pi-x)\in D_G$

$$\begin{aligned}G(\pi-x)&=F(2Cos(\pi-x)\\&=F(-2Cos\ x)\\&=-F(2Cos\ x)\\&=-G(x)\end{aligned}$$

conclusion : $I(\frac{\pi}{2},0)$ *est un centre de symétrie pour la courbe de* f

b)
$$\begin{aligned}G'(x)&=-2\sin x.F'(2Cos\ x)\\&=-2\sin x\ f(2Cos\ x)\\&=-2\sin x\sqrt{4(1-Cos^2x)}\\&=-2\sin x\sqrt{4\sin^2 x}\\&=-4\sin x.|\sin x|\end{aligned}$$

$G'(x)=-4\sin^2 x$ (*car* $\sin x\ge 0$)

$G'(x)=-2(1-Cos\ 2x)$

d'où $G(x)=-2(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$G(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -2(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\pi$

d'où

$G(x)=-2x+\sin 2x+\pi$

$\forall x\in[0,\pi]$

c) $F(1)=F(2cos\left(\frac{\pi}{3}\right))$

$=G(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F(2)=F(2cos(0))$

$=G(0)=\pi$

$F(\sqrt{2})=F(2Cos\frac{\pi}{4})$

$=G(\frac{\pi}{4})=1+\frac{\pi}{2}$

EX 16 :

$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1. $u'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où

$\sqrt{1+x^2}=\dfrac{u(x)}{u'(x)}$

2. $f(x)=\dfrac{1}{u(x).\sqrt{1+x^2}}$

$f(x)=\dfrac{u^1(x)}{u^2(x)}$

d'où

$F(x)=\dfrac{-1}{u(x)}$

$F(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=\dfrac{u^2(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x).\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x)\ \dfrac{u^1(x)}{u(x)}$

$g(x)=u^1(x).u(x)$

d'où

$G(x)=\dfrac{1}{2}u^2(x)$

$G(x)=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{1+x^2})^2$

<u>EX 17</u> :

$f(x)=x.Cos\ x$

$g(x)=x.\sin x$

1. $f'(x)+g(x)=Cos x-x\sin x+x\sin x$

$=Cos\ x$

d'où $g(x)=Cos\ x-f'(x)$

$G(x)=\sin x-(f(x))$

$G(x)=\sin x-x\ Cos\ x$

2. $g'(x)-f(x)=\sin x+x\ Cos\ x-f(x)$

$=\sin x$

d'où $f(x)=g'(x)-\sin x$

$F(x)=g(x)-Cos\ x$

$F(x)=x\sin x-Cos\ x$

EX 18 :

$n \geq 2$

$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + n.x^{n-1}$

1. $F_n(x) = x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + k \quad k \in \mathbb{R}$

$F_n(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

$d'où$

$F_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n$

2. *pour* $x \neq 1$

$$F_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(somme de (n+1) termes d'une suite géométrique de raison x)

$$F'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n.(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$F'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

$$d'où \begin{cases} p_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ p_n(1) = \dfrac{(n+1).n}{2} \end{cases}$$

EX 19 : $\quad x \in [0, \pi]$

1. $g(x) = x.\sin x + Cos\ x - 1$

a) $g'(x) = \sin x + x\ Cos\ x - \sin x$

$g'(x) = x.Cos\ x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'(x)	0	+	0	-	
g(x)	0	↗	$\frac{\pi}{2}-1$	↘	-2

b) g *est continue sur* $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

$g(\frac{2\pi}{3}).g(\pi) = -2(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}) < 0$

d'où l'équation g(x)=0 admet une solution $\alpha \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$

x	0		α		π
g(x)	0	+	0	-	

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} & \sin x \in \left]0, \pi\right] \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} = 0 = f(0)$

f *est continue en droite en* 0

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - Cos\ x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

f *est dérivable à droite en* 0 *et* $f'_d(0) = \dfrac{1}{2}$

b) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

x	0		α		π
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	f(α)	↘	$\dfrac{2}{\pi}$

c) $f(\alpha) = \dfrac{1 - Cos\ \alpha}{\alpha}$

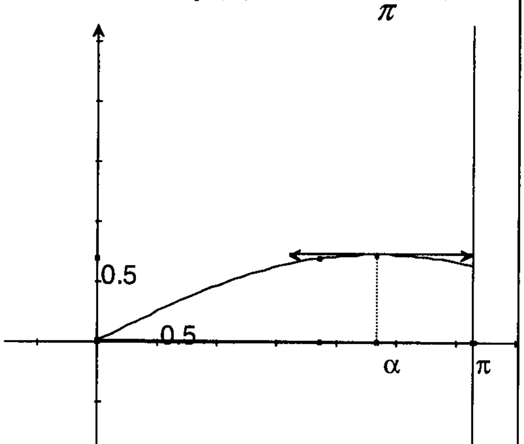
$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha.\sin\alpha + Cos\,\alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow Cos\ \alpha = 1 - \alpha.\sin\alpha$

d'où

$f(\alpha) = \dfrac{\alpha\sin\alpha}{\alpha} = \sin\alpha$

3. $\alpha \simeq 2{,}34$; $f(\alpha) \simeq 0{,}72$; $\dfrac{2}{\pi} \simeq 0{,}61$



4. $k(x) = f(x)$ *pour* $x \in [\alpha, \pi]$

k est continue et strictemen décroissant sur $[\alpha,\pi] \Rightarrow$ *k est une bijéction de* $[\alpha,\pi]$ *sur* $\left[\dfrac{2}{\pi}, f(\alpha)\right] = I$

5. $h(x) = g(x) - 2\,Cos\ x \quad x \in [0,\pi]$

h est continue sur $[0,\pi]$ *d'où h admet des primitives sur* $[0,\pi]$

$h(x) = x.\sin x - Cos\ x - 1$

$H(x) = -x.Cos\ x - x + k$

$H(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

d'où $\quad H(x) = 1 - x - x.Cos\ x$

EX 20 :

$\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\begin{cases} G'(x) = \varphi(x) \\ G(0) = 0 \end{cases}$

1. $G'(-x) = \varphi(-x) = \varphi(x)$

$\qquad = G'(x)$

$G'(x) = G'(-x)$

$\Rightarrow G(x) = -G(-x) + k \quad k \in \mathbb{R}$

$G(0) = 0 \rightarrow k = 0$

d'où $\ G(-x) = -G(x)$

G est impaire

2.a) $x \in \mathbb{R}^*$

$\psi(x) = G(x) + G(\dfrac{1}{x})$

ψ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$

$\psi'(x) = G'(x) - \dfrac{1}{x^2}G'(\dfrac{1}{x})$

$= \varphi(x) - \dfrac{1}{x^2}.\varphi(\dfrac{1}{x})$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1}$

$= 0$

$\psi'(x) = 0$

D'où ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$

$\psi(1) = G(1) + G(1) = 2G(1)$

$d'où$

$\psi(x) = 2G(1) \ ; \forall x \in \left]0,+\infty\right[$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 2G(1)$

b) $u(t) = G(tg\ t) \ ; \ \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$u'(t) = (1+tg^2t).G'(tg\ t)$

$\quad = (1+tg^2t)\ \varphi(tg\ t)$

$\quad = (1+tg^2t).\dfrac{1}{1+tg^2t}$

$u'(t) = 1$

$u(t) = t + k \ ; \ (k \in \mathbb{R})$

$u(0) = G(tg\ 0) = G(0) = 0$

$\quad \Rightarrow k = 0$

$u(t) = t \quad ; \quad \forall t \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$G(1) = G(tg\ \frac{\pi}{4}) = u(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 2G(1) = \frac{\pi}{2}$

$G(x) = \psi(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} G(\frac{1}{x}) = G(0) = 0$

$d'où \ \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\pi}{2}$

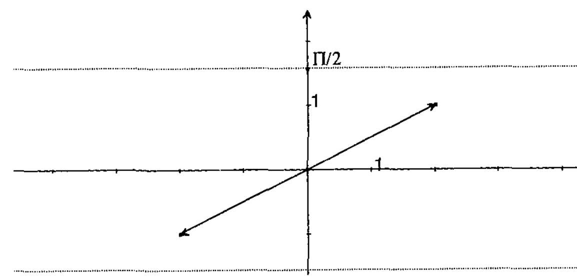
4. $G'(x) = \varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$

x	0	$+\infty$
G'(x)	+	
G(x)	0 $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

G est impaire.

$G'(0) = \dfrac{1}{2}$

O : centre de symétrie.



EX 21 :

$f(x) = \sqrt{1+Cos\ x} \quad ; \ x \in [0,\pi]$

1.a) *f Est dérivable sur* $[0,\pi[$

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1+Cos\ x}} \le 0$

f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ *elle réalise donc une bijection de* $[0,\pi]$ *sur*

$g([0,\pi]) = [g(\pi), g(0)] = [0,\sqrt{2}]$

b) *f est dérivable sur* $]0,\pi[$

et $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1+Cos\ x}} \ne 0$

d'où f^{-1} *est dérivable sur*

$f(]0,\pi[) =]0,\sqrt{2}[$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \textit{on pose}: y=f^{-1}(x)$$
$$f(y)=x$$
$$=\frac{-2\sqrt{1+Cos\ y}}{\sin y}$$
$$f(y)=\sqrt{1+Cos\ y}=x$$
$$\Rightarrow 1+Cos\ y=x^2$$
$$\Rightarrow Cos\ y=x^2-1$$
$$\Rightarrow Cos^2 y=(x^2-1)^2$$
$$\Rightarrow -Cos^2 y=-1-x^4+2x^2$$
$$\Rightarrow 1-Cos^2 y=2x^2-x^4$$
$$\Rightarrow \sin^2 y=2x^2-x^4$$
$$\Rightarrow \sin y=\sqrt{2x^2-x^4}$$
d'où
$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$
$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$
$$\forall x\in \left]0,\sqrt{2}\right[$$

2. $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

$$x\in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$$
$$\begin{cases} G'(x)=g(x) \\ G(0)=0 \end{cases}$$

a) $\varphi(x)=G(x)+G(-x)$
$$\varphi'(x)=G'(x)-G'(-x)$$
$$=g(x)-g(-x)$$
$$=0$$

φ est constante sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$\varphi(0)=0$

$\varphi(x)=0,\ \forall\, x\in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$\Rightarrow G(x)+G(-x)=0$

$\Rightarrow G(-x)=-G(x)$

G est impaire.

b) *on a* :
$$g(x)=-\left(f^{-1}\right)'(x)$$
$$\Rightarrow G(x)=-f^{-1}(x)+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$$
$$G(0)=-f^{-1}(0)+k$$
$$\Rightarrow 0=-\pi+k$$
$$\Rightarrow k=\pi$$
d'où
$$G(x)=\pi-f^{-1}(x)$$
$$G(1)=\pi-f^{-1}(1)$$
$$G(1)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

EX 22 :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f'(x)=\dfrac{-2}{\pi.\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

1. $f'(x)<0\ ;\ \forall x\in \left]0,1\right[$

f est continue sur $[0,1]$ *et strictement décroissante*

$\Rightarrow$ *f réalise une bijective de* $[0,1]$ *sur*

$f([0,1])=[f(1),f(0)]=[0,1]$

2.a) *soit* $g(x)=f(Cos\ x)$
$$g'(x)=-\sin x\,.f'(Cos\ x)$$
$$=\frac{+2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}$$
$$=\frac{+2\sin x}{\pi.|\sin x|}$$
$$=\frac{2}{\pi} \quad car \quad \sin x>0$$

g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{2}{\pi}x+k \quad ; \ k\in\mathbb{R}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=1$

$\Rightarrow 1=1+k\Rightarrow k=0$

$d'où \ \ g(x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

b) $f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f^{-1}(\frac{2}{\pi}x)=Cos\ x$

soit $t=\frac{2}{\pi}x$

$x=\frac{\pi}{2}t$

d'où $f^{-1}(t)=Cos\ (\frac{\pi}{2}t)$

conclusion :

$f^{-1}(x)=Cos\ (\frac{\pi}{2}x) \ ; \ \forall x\in[0,1]$

3. $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(\sin x)$

a) *comme était composée et somme de fonctions dérivables*

h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(Cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$=\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)$

$h(x)=1$

$h'(x)=-\sin x\ f'(Cos\ x)+Cos\ x\ f'(\sin x)$

$h'(x)=\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2x}}-\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-\sin^2 x}}$

$h'(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$

b) *h continue sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=0 \ ; \ \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

d'où h est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(0)=f(1)+f(0)=1$

d'où

$h(x)=1 \ ; \ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

4. $n\in\mathbb{N}^*$

$\varphi_n(x)=Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n$

$x\in[0,1]$

a) $\varphi_n'(x)=\frac{-\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)-n\,x^{n-1}$

$\varphi_n'(x)\leq 0 \ ; \ \forall x\in[0,1]$

φ_n *est continue et strictement décroissante sur* $[0,1]$ *elle réalise donc une bijection de* $[0,1]$ *sur*

$\varphi_n([0,1])=[-1,1]$ *et comme* $0\in[-1,1]$

alors il existe un uniqueréel

$a_n\in[0,1]$ *tq* : $\varphi_n(a_n)=0$

$\varphi_n(0).\varphi_n(1)<0\Rightarrow a_n\in\,]0,1[$

$b)\quad n-p>0$ *alors*

$0<x<1 \Rightarrow 0<x^{n-p}<1$

$\Rightarrow 0<(x^{n-p}).x^p<x^p$

$\Rightarrow x^n<x^p$

$\Rightarrow -x^n>-x^p$

$\Rightarrow Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n>Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^p$

$\Rightarrow \varphi_n(x)>\varphi_p(x)$

$c)\quad a_n$ *et* $a_{n+1}\in]0,1[$

d'après $b)\quad n+1>n$

d'où $\quad \varphi_{n+1}(a_{n+1})>\varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow 0>\varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow \varphi_n(a_n)>\varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow a_n<a_{n+1}$

car φ_n *est strictement décroissante sur* $[0,1]$

d'où (a_n)*est strictement décroissante*

et comme on a $\quad a_n>0$

(a_n) *est décroissante et* min*orée par* 0

elle est donc convergente.

Q-C-M :

1. a. La distance MM'=$|z - z'|$
   b. O,M et M' sont alignées.
   c. z=iz'
2. A ,B et C sont alignées.
3. (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

VRAI FAUX

1. Faux ; il suffit de prendre z_1=3i et z_2= 1+2i
2. Faux ;il suffit de prendre z = $e^{i\frac{\pi}{3}}$
3. *Faux ; il suffit de prendre z=1* et z'=i

EX 1 page 19 :

2i +$\frac{1}{i}$ -1= 2i-i-1=-1+i

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i\sqrt{3}).(\sqrt{3}+i)}{3+1} = i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = i^2 = -1$$

$$\frac{(1-i)(2+i)}{i-2} = \frac{(1-i)(2+i)^2}{-5} = \frac{(1-i)(3+4i)}{-5}$$

$$= -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

EX 2 page 19 :

$$A = \frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)} = \frac{17-7i}{-6+21i} \Rightarrow \bar{A} = \frac{17+7i}{-6-21i}$$

$$B = \left(\frac{i-3}{1+i}\right)^2 = \frac{8-6i}{2i} = -3 - 4i$$

$$\Rightarrow \bar{B} = -3 + 4i$$

C= (2-i)(3+2i)(2+i)(3-2i)

= (2-i)(2+i) (3+2i) (3-2i) =5X13=65

$$\Rightarrow \bar{C} = 65$$

EX 3PAGE 19

$\overline{Z_1}$=...=Z_1 donc Z_1 est un réel

$Z_3=\overline{Z_2}$ donc Z_3+Z_2 est un réel

et Z_3-Z_2 est imaginaire.

EX 4 PAGE 19

1. L'ensemble des points M d'affixe z=a+i(a+1) avec a∈IR
   Est la droite d'éq :y=x+1
2. L'ensemble des points M d'affixe z=2isin($\frac{a}{2}$) avec a∈[0,2π [est le segment [AB]
   Avec A(-2i) et B(2i).
3. a(z-i)=i(z+1) avec a∈IR^* est équivaut à $\frac{z-i}{z+1}$ imaginaire et z∉{-1,i} donc l'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB] avec A(i) et B(-1),privé de A et B.

EX 5 PAGE 19

$|(1+i)^4|=|1+i|^4=\sqrt{2}^4=4$

$|(2-3i)^2|=|2-3i|^2=\sqrt{13}^2=13$

$|(-2+i)(1-3i)(1-4i)|=$

$|-2+i||1-3i||1-4i|$
$=\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{17}=\sqrt{850}$

$$\left|\frac{1-5i}{i+2\sqrt{3}}\right|=\frac{|1-5i|}{|i+2\sqrt{3}|}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}=\sqrt{2}$$

EX 6 PAGE 19

1. $\bar{Z}=\frac{1}{Z}\Leftrightarrow Z.\bar{Z}=1\Leftrightarrow |Z|^2=1$

$\Leftrightarrow |Z|=1$

2. $|Z_1|=|Z_2|=1\Rightarrow\overline{Z_1}=\frac{1}{Z_1}$

$et\bar{Z}_2=\frac{1}{Z_2}$

$$\Rightarrow\overline{\left(\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}\right)}=\frac{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}}{1+\overline{Z_1}.\overline{Z_2}}=\frac{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}{1+\frac{1}{Z_1}.\frac{1}{Z_2}}$$

$=\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}$ donc $\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}$est réel

EX 7 PAGE 19

On désigne par M le point d'affixe z
$*\ |Z|=|Z^2|\Leftrightarrow |Z|=|Z|^2$

$\Leftrightarrow|Z|=1$ ou$|Z|=0$

$\Leftrightarrow$M=0 ou Mϵ Cercle trigo (1)

$*\ |Z|=|1-Z|\Leftrightarrow$OM=AM avec $Z_A=1$

$\Leftrightarrow$ M$\epsilon\Delta$:x=1/2 (Δ:med de [AO]) (2)

(1) Et (2) $\Rightarrow Z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $Z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

EX 8 PAGE 19

1. $z'=z^2\Leftrightarrow z'=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

   $\Rightarrow$Réel$(z')=x^2-y^2$ et $Im(z')=2xy$

2. z' réel$\Leftrightarrow$ 2xy=0$\Leftrightarrow$x=0 ou y=0

   $\Rightarrow$L'ensemble des points M est la réunion de deux axes du repère.

3. z' imaginaire $\Leftrightarrow x^2-y^2=0$

   $\Leftrightarrow$(x-y)(x+y)=0$\Leftrightarrow$y=x ou y=-x

   $\Rightarrow$L'ensemble des points M est la réunion de deux droites
   D :y=x la 1^{ere}bissectrice
   et D' :y=-x la 2^{ere}bissectrice

EX 9 PAGE 19

1. $Z_I=\frac{Z_B+Z_C}{2}=\frac{2-2i}{2}$=1-i
2. a/

AB=$|Z_B-Z_A|=|-3-i|=\sqrt{10}$

AC=$|Z_C-Z_A|=|1-3i|=\sqrt{10}$

BC=$|Z_C-Z_B|=|4-2i|=\sqrt{20}$

b/ AB=AC $\Rightarrow$ ABC isocèle en A

$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow$ABC rectangle en A

Cclusion : ABC est un triangle isocèle et rectangle en A

3. a/ D=S_I(A)$\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID}$

$\Rightarrow Z_D-Z_I=Z_I-Z_A$

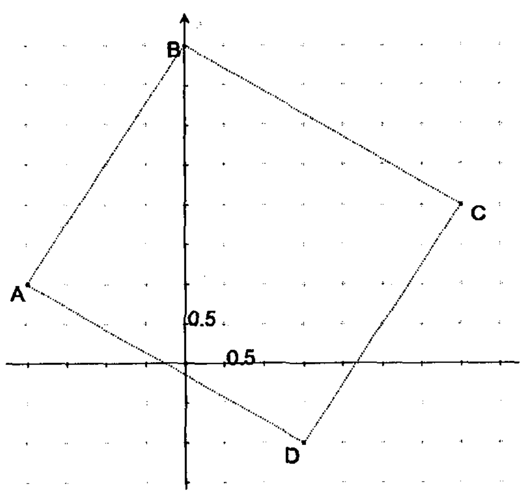
$\Rightarrow Z_D=Z_I+Z_I-Z_A=2-2i-2-i=-3i$

b/ on a I=A*D=B*C⇒ABDC #

et on a : ABC triangle rectangle et isocèle en A

Donc ABDC est un carré

EX 10 PAGE 19



A(-2,1) ;B(0,4) ;C($\frac{7}{2}$,2) ;D($\frac{3}{2}$,-1)

$Z_B-Z_A=4i-(-2+i)=2+3i$

$Z_C-Z_D=\frac{7}{2}+2i-\left(\frac{3}{2}-i\right)=2+3i$

$\Rightarrow Z_B-Z_A= Z_C-Z_D \Rightarrow$ABCD#

EX 11 PAGE 19

1) $|\bar{z}-1+2i|=3\Leftrightarrow$
$|z-1-2i|=3\Leftrightarrow$
$|z-(1+2i)|=3\Leftrightarrow$

AM= 3 avec $Z_A=1+2i$

Donc E est le cercle de centre le point A(1 ;2) et de rayon 3

2) $\left|\frac{iz+1-i}{\bar{z}+2+i}\right|=1\Leftrightarrow$

$\frac{|i(z-i-1)|}{|z+2-i|}=1\Leftrightarrow$

$\frac{|i||z-(1+i)|}{|z-(-2+i)|}=1\Leftrightarrow$

CM=BM avec $Z_C=1+i$ et $Z_B= -2+i$

Donc l'ensemble E est la droite médiatrice de [BC].

(représentation graphique : t .facile)

EX 12 PAGE 20 OBC est équilatéral

$Z_A=-2+2i\Rightarrow|Z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

et $Arg(Z_A)=\frac{3\pi}{4}$

$|Z_B|=|Z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$Arg(Z_B)=Arg(Z_A)-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$

$Z_C=2\Rightarrow|Z_C|=2\ et\ Arg(Z_C)=0$

$Z_D=-1-i\Rightarrow|Z_D|=\sqrt{2}\ et\ Arg(Z_D)=-\frac{3\pi}{4}$

EX 13 PAGE 20

$|Z_A|=1{,}5$ et $Arg(Z_A)=\frac{\pi}{6}$

$|Z_B|=|Z_A|=1{,}5$ et $Arg(Z_B)=\frac{\pi}{3}$

$|Z_C|=1{,}5\ \ et\ Arg(Z_C)=\frac{2\pi}{3}$

$|Z_D|=1{,}5\ \ et\ Arg(Z_D)=\frac{5\pi}{6}$

$|Z_E|=1{,}5\ \ et\ Arg(Z_E)=-\frac{2\pi}{3}$

$|Z_F|=1{,}5$ et $Arg(Z_B)=-\frac{\pi}{3}$

EX 14 PAGE 20

a. *$-8i=8.(\cos(-\frac{\pi}{2})+isin(-\frac{\pi}{2}))$

*$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i.sin(\frac{3\pi}{4})$

* $3i+\sqrt{3}=\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})$

$=2\sqrt{3}.(\cos(\frac{\pi}{3})+i.\sin(\frac{\pi}{3}))$

- $-2,5=2,5.(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$
- $\sqrt{2}-\sqrt{6}i=\sqrt{2}(1-i\sqrt{3})$

  $=2\sqrt{2}.(\cos(-\frac{\pi}{3})+i.\sin(-\frac{\pi}{3}))$
- $5+5i=5\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+isin(\frac{\pi}{4}))$

b. *$\frac{3(1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2}=\frac{6e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$=3.(\cos(--\frac{\pi}{6})+isin(-\frac{\pi}{6}))$

*$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin(\frac{\pi}{2})$

*$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^3=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^3$

$=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin(\frac{\pi}{2})$

* $(1-i)^5(1+i)^3=4\sqrt{2}e^{-i5\frac{\pi}{4}}.2\sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}$

$=16e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$=16(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+isin(-\frac{\pi}{2})$

EX 15 PAGE 20

1) $|Z_1|=|1+i|=\sqrt{2}$

$\text{Arg}(Z_1)=\frac{\pi}{4}$

$|Z_2|=|\sqrt{3}-i|=2$

$\text{Arg}(Z_2)=-\frac{\pi}{6}$

2) $Z_1.Z_2=(1+i)(\sqrt{3}-i)$

$=(1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})$

$Z_1.Z_2=2.\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\mu}{6})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$=2\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin(\frac{\pi}{12}))$

3) $2\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin(\frac{\pi}{12}))=$

$(1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})$

$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

et $sin(\frac{\pi}{12}))=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

EX 16 PAGE 20

1. $|Z_1|=|-1+i\sqrt{3}|=2$

   $\text{Arg}(Z_1)=\frac{2\pi}{3}$

   $|Z_2|=|1+i|=\sqrt{2}$

   $\text{Arg}(Z_2)=\frac{\pi}{4}$

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

   $\arg(\frac{z_1}{z_2})=\arg(z_1)-\arg(z_2)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$

3. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$rel(\frac{z_1}{z_2})=\sqrt{2}.\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Rightarrow\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$\operatorname{Im}(\frac{z_1}{z_2})=\sqrt{2}.\sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

EX 17 PAGE 20

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}=\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$e^{2i\frac{\pi}{3}}=\cos(2\frac{\pi}{3})+i\sin(2\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{e^{i\pi}}{4}=\frac{-1}{4}$$
$$2ie^{i\frac{\pi}{6}}=2i(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=-1+i\sqrt{3}$$

EX 18 PAGE 20

$$2\sqrt{3}-2i=4(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$-5-5i=5(-1-i)=5\sqrt{2}.e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$
$$-1+i\sqrt{3}=2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2.e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\cos(\frac{\pi}{5})-i\sin(\frac{\pi}{5})=\cos(-\frac{\pi}{5})+i\sin(-\frac{\pi}{5})=e^{-i\frac{\pi}{5}}$$

EX 19 PAGE 20

1. $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. $z^6=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6=e^{i\frac{\pi}{6}.6}=e^{i\pi}=-1$

EX 20 PAGE 20

1. $-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. $(-1+i)^{11}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{11}$

$$=\sqrt{2}^{11}e^{i\frac{33\pi}{4}}=32\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$=32.(1+i)=32+32i$$

EX 21 PAGE 20

1. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $z=2e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0\,;\pi]$ est le demi-cercle de centre le point O et de rayon 2 située dans le demi plan $y\geq O$.
2. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $z=-2e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0\,;\pi]$ est le demi-cercle de centre le point O et de rayon 2 située dans le demi plan $y\leq O$.
3. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $z=2+\cos(\theta)+i\sin(\theta)=2+e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0\,;2\pi[$ est le cercle de centre le point I(2 ;0) et de rayon 1

   (faire une figure pour chaque cas)

EX 22 PAGE 21

1.

$$1+e^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{formue\,d'Euler}$$
$$=2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$1-e^{i\theta}=e^{i0}-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{formue\,d'Euler}$$
$$=-2i\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2.

$$\left|1+e^{i\theta}\right|=\left|2\cos\frac{\theta}{2}.\right|e^{i\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}.(car\ \frac{\theta}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[)$$

$$Arg\left(1+e^{i\theta}\right)=Arg(\ 2\cos\frac{\theta}{2}\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ )=\frac{\theta}{2}$$

$$\left|1-e^{i\theta}\right|=\left|-2i\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i\frac{\theta}{2}}\right|=2\sin(\frac{\theta}{2})$$

$$Arg\left(1-e^{i\theta}\right)=Arg(-2i\sin(\frac{\theta}{2})\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ )=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}$$

EX 2 3 PAGE 21

1) $Z=\cos(\theta)\text{-i}\sin(\theta)=\overline{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$

$$=\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$$

2) $Z=\sin(\theta)+i\cos(\theta)$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

3) $Z=-\cos(\theta)\text{-i}\sin(\theta)=-(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$

$$=-e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$$

4) $Z=1+i.\tan(\theta)=\dfrac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$$=\frac{1}{\cos(\theta)}e^{i\theta}(\cos(\theta)>0)$$

5) $Z=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\dfrac{2i\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}=\tan(\theta)e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$*\ pour\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\quad Z=-\tan(\theta)e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$*\ pour\ \theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\quad Z=\tan(\theta)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

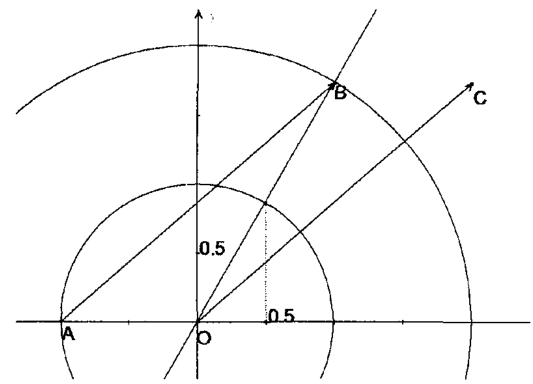
EX 2 4 PAGE 21

1. M(t)$\in\zeta$ et $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\alpha\Rightarrow$t=$e^{i\alpha}$ $\Rightarrow$

   U=t^3 =$e^{i3\alpha}$ =cos(3α)+isin(3α)

   et v=2t=2(cos(α)+isin(α))

2. Pour α=$\frac{\pi}{3}$⇒U=-1⇒A(-1 ;0)
   W=2t-t^3=Z_B-Z_A
   $\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow C=t_{\overrightarrow{AB}}(O)$



3. O ;A et B alignées ssi $\frac{aff(\overrightarrow{OA})}{aff(\overrightarrow{OB})}$ réel

   Ssi $\frac{t^3}{2t}$=½t² réel

   Ssi 2α=k.π⇔α=k.π/2 or α∈[0 ;π/2]

Donc **O ;A et B sont alignées pour α=π/2 ou α=0**

4. a/ On a
   $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow OABC\ est\ un\ parallèlogramme$
   b/ OABC rectgle ssi $AC=OB=2$
   ssi

   $$\left|2t-2t^3\right|=2$$

   $$\Leftrightarrow\left|t-t^3\right|=1\Leftrightarrow\left|1-t^2\right|=1\ car\left|t\right|=1$$

   $$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha)=\pm1\ (d'après\ Ex\,22)$$

   $$or\ \alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\quad\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$$

   Conclusion : OABC est un rectangle pour α=π/6

EX 2 5 PAGE 21

$$z=e^{i2\theta}-i\Rightarrow\overline{z}=e^{-i2\theta}+i$$

1. Soit I le milieu de [MM']
   ⇒Z_I=$\frac{z+\bar{z}}{2}$=cos(2θ)

OMNM' losange⇒ I milieu de [ON]

⇒ L'affixe du point N est :2cos(2θ)

2. a/

$$z = e^{i2\theta} - i = e^{i2\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$= e^{i\frac{2\theta-\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{2\theta+\frac{\pi}{2}}{2}} + e^{-i\frac{2\theta+\frac{\pi}{2}}{2}}\right)$$
$$= e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}.2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$$
$$= 2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$$

b/ $\frac{z}{\bar{z}} = \dfrac{2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})}} = e^{i(2\theta-\frac{\pi}{2})}$

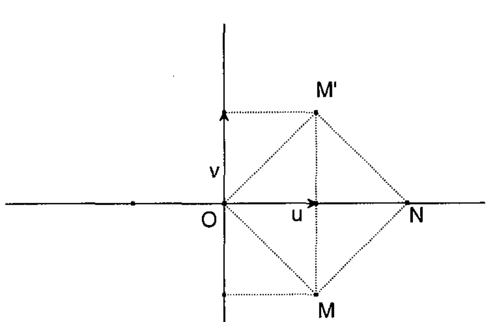
c/ On a OMNM' est un losange $\Rightarrow$

OMNM' carré ssi OMN rctgle en O

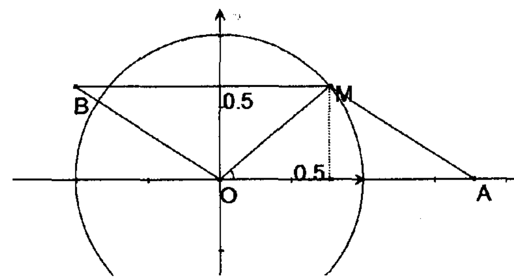
$$ssi \quad \frac{z}{\bar{z}} imaginair$$
$$ssi \quad 2\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$$
$$ssi \quad \theta = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \quad or \theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$$
$$\Rightarrow \theta = 0$$

d/ pour θ=0 ⇒ z=1-i

⇒M(1 ;-1) ;M'(1 ;1) et N(2 ;0)



EX 26 PAGE 21



2. a/ aff($\overrightarrow{BM}$)=Z_M-Z_B

=cos(θ)+i.sin(θ)+1-i.sin(θ)

=1+cos(θ)=aff($\overrightarrow{OA}$)

⇒$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OA}$⇒OAMB est un parallélogramme

b/ OAMB est un losange ssi OA=OB

ssi 1+cos(θ) =$\sqrt{1+sin^2(\theta)}$

ssi 1+2cos(θ)+cos²(θ)=1+sin²(θ)

ssi 2 cos²(θ)+2cos(θ)-1=0

ssi cos(θ)=$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ou cos(θ)=$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

et comme $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$є[-1 ;1] donc il existe une valeur de θ tel que cos(θ)=$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ donc il existe une valeur de θ tel que OAMB est un losange.

c/ cos(θ)=$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ donc θ= 1,2rad

3. A(θ)=(1+cos(θ)).sin(θ)

=sin(θ)+½sin(2θ)

⇒A'(θ)=cos(θ)+cos(2θ)

θ	0 π/3 π/2
A'(θ)	+ 0 -
A(θ)	↗ ↘

Donc A(θ) est maximale pour θ=π/3

EX 27 PAGE 21

$$z=\frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)+i\left(1-\cos(\varphi)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)-i\left(\cos(\varphi)\right)+i\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)+i\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}.\left(e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}+e^{-i\frac{\varphi-\pi}{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}.2\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right).e^{i\frac{\varphi}{2}}\quad(0<\varphi<\pi\Rightarrow\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right)>0)$$
$$Donc\,|z|=\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right)=\sin(\frac{\varphi}{2})\quad et\ \ Arg(z)=\frac{\varphi}{2}$$

2.

$$z_1=z-i=\frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)-i\left(\cos(\varphi)-i\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)-i\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}+e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}.\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}+e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}.2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}\ (0<\varphi<\pi\Rightarrow\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)>0)$$
$$Donc\,|z_1|=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ et\ \ Arg(z_1)=\frac{\varphi-\pi}{2}$$

$$|z_2|=\frac{|z|}{|z_1|}=\frac{\cos(\frac{\varphi-\pi}{2})}{cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}=tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$Arg(z_2)=Arg(z)-Arg(z_1)$$
$$=\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi-\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

3)a/

$$on\,a\,z_1=z-i=\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}+e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}-\frac{1}{2}i$$
$$\Leftrightarrow z_1-(-\frac{1}{2}i)=\frac{1}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}$$
$$\Leftrightarrow z_M-z_A=\frac{1}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}\quad avec\,z_A=-\frac{1}{2}i$$
$$\Leftrightarrow z_M-z_A=\frac{1}{2}e^{i\theta}\ \ avec\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$\Leftrightarrow M\in\frac{1}{2}cercle\,de\,centre\,A\,et\,de\,rayon\,\frac{1}{2}$$

E est le demi-cercle de centre

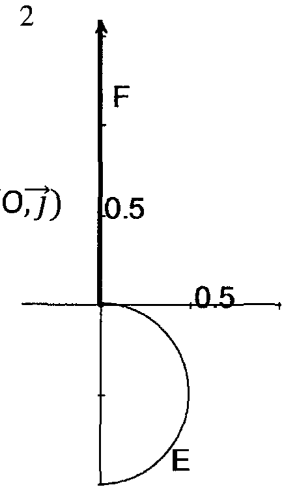
le point A(0,-1/2) et de rayon ½ (Voiy figure)

$|z_2|=tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $Arg(z_2)=\frac{\pi}{2}$

$avec\ \frac{\varphi}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow$F est la demi droite $[O,\vec{j})$

privée de O.



QCM

1. L'équation $z^2+z+1=0$ a deux *solutions conjuguées*(les coefficients réels)
2. L'équation $z^2-2z+2=0$ a pour solutions 1-i et 1+i (solutions conjuguées)
3. L'équation $z^3- z^2+z-1=0$ admet une seule solution réelle
4. L'équation $z^4=-1$ admet quatre solutions distinctes
5. Le nombre $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une racine carrée de 4i

VRAI –FAUX

1. FAUX $i\sqrt{3}$ est une solution de l'éq : $z^2=-3$
2. FAUX 0 est une solution de $z^4=z^2$ et 0 n'est pas solution de $z^2=1$
3. FAUX i est aussi une solution de $z^4+z^2=0$
4. FAUX L'équation $z^2-2z+2=0$ a pour solutions 1-i et 1+i(ne sont pas opposées)
5. FAUX $z^4=a^4$ ssi z=a ou z=-a ou z=ia ou z=-ia
6. FAUX $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une racine cubique de i qui n'est pas imaginaire

EX 1 PAGE 31 :

$$a=4\sqrt{2}(1+i)=4\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})=8e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines cubiques de a sont : $z_k=\sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3})}$ *avec* $k\in\{0,1,2\}$

$$\Rightarrow z_0=2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad ; \quad z_1=2e^{3i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_2=2e^{17i\frac{\pi}{12}}$$

EX 2 PAGE 31 :

$$a=8\sqrt{2}(-1-i)=8\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}})=16e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines quatrièmes de a sont :

$$z_k=\sqrt[4]{16}.e^{i(\frac{-3\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4})} \quad avec \quad k\in\{0,1,2,3\}$$

$$\Rightarrow z_0=2e^{-3i\frac{\pi}{16}} \; ; \; z_1=2e^{5i\frac{\pi}{16}} \; ; \; z_2=2e^{13i\frac{\pi}{16}} : \; z_3=2e^{21i\frac{\pi}{16}}$$

EX 3 PAGE 31 : $a = 32i = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$

Les racines cinquièmes de a sont :

$$z_k = \sqrt[5]{32}e^{i(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5})} = 2e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})} \quad avec\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

EX 4 PAGE 31 :

$$a = 32(-\sqrt{3}+i) = 32(2e^{5i\frac{\pi}{6}}) = 64e^{5i\frac{\pi}{6}}$$

Les racines sixièmes de 32(i-√3) sont : $z_k = 2e^{i(\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{6})}$ $avec\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

EX 5 PAGE 31 :

*$z^2 = 2i = (1+i)^2 \Leftrightarrow$ z=1+i ou z=-1-i $S_{\mathbb{C}} = \{1+i; -1-i\}$

* $z^2+4=0 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow$ z=2i ou z=-2i $S_{\mathbb{C}} = \{2i; -2i\}$

* $z^2 = -5+12i$ en posant z =x+iy l'équation est équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \\ 2xy = 12 & (3) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$pour\ x = 2\ ;(3)\,donne\ \ y = 3 \to z = 2+3i$$

$$pour\ x = -2\ ;(3)\,donne\ \ y = -3 \to z = -2-3i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{2+3i; -2-3i\}$$

$$*z^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \pm e^{i\frac{\frac{\pi}{3}}{2}} = \pm e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad S_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}; -e^{i\frac{\pi}{6}} \right\}$$

* $z^2+i=0 \Leftrightarrow z^2 = -i = \frac{-2i}{2} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow$ z= $\mp \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

*$(1-iz)^2=-1=i^2 \Leftrightarrow 1-iz=i$ ou $1-iz=-i \Leftrightarrow z=\frac{1-i}{i}=-1-i$ ou $z=\frac{1+i}{i}=1-i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1-i;-1-i\}$$

*$(2z-1)^2-(i-z)^2=0 \Leftrightarrow (2z-1-i+z)(2z-1+i-z)=0 \Leftrightarrow (3z-1-i)(z-1+i)=0 \Leftrightarrow z=1-I$ ou $z=\frac{1}{3}+i\frac{1}{3}$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{1-i;\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i\right\}$$

EX 6 PAGE 31 :

1. $Z^2+z+2=0$ $\Delta=1^2-4.2=-7 \Rightarrow \delta=i\sqrt{7} \Rightarrow$

   $z=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ ou $z=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ $\quad S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2};-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2. $Z^2-2iz-1=0$ $\Leftrightarrow (z-i)^2=0 \Leftrightarrow z=I$ $\quad S_{\mathbb{C}}=\{i\}$
3. $Z^2-(4+2i)z+2+4i=0$ $\Delta'=(2+i)^2-(2+4i)=1 \Rightarrow z=1+I$ ou $z=3+I$ $S_C=\{1+I;3+i\}$
4. $(2+i)z^2+(1-7i)z-5=0$ $\Delta=(1-7i)^2+20(2+i)=-8+6i \Rightarrow \delta=1+3i \Rightarrow$

   $Z=\frac{-1+7i+1+3i}{2(2+i)}=\frac{10i}{4+2i}=1+2i$ ou $z=\frac{-1+7i-1-3i}{2(2+i)}=\frac{-2+4i}{4+2i}=i \Rightarrow S_C=\{1+2i\ ;i\}$

EX 7 PAGE 31 :

1. $(\alpha-i)^2=\alpha^2-2i\alpha-1$
2. (E) $z^2-\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$ $\quad \Delta=\alpha^2(\alpha+i)^2-4i\alpha^3=\alpha^2(\alpha^2+2i\alpha-1)-4i\alpha^3=\alpha^2(\alpha^2-2i\alpha-1)=\alpha^2(\alpha-i)^2 \Rightarrow \delta=\alpha(\alpha-i)$

   $\Rightarrow z=\frac{\alpha(\alpha+i)+\alpha(\alpha-i)}{2}=\alpha^2$ ou $z=\frac{\alpha(\alpha+i)-\alpha(\alpha-i)}{2}=i\alpha$ $\Rightarrow S_C=\{\alpha^2\ ;i\alpha\}$

3.

$$|\alpha^2|=|\alpha|^2=r^2 \quad Arg(\alpha^2)\equiv 2.Arg(\alpha)\equiv 2.\theta[2\pi]$$

$$|i\alpha|=|i\alpha|=|i||\alpha|=1.r=r \quad Arg(i\alpha)\equiv Arg(i)+Arg(\alpha)\equiv\frac{\pi}{2}+\theta[2\pi]$$

EX 8 PAGE 31 :

1. a. E : $z^2-(3+i)z+2(1+i)=0$ $\Delta=(3+i)^2-8(1+i)=-2i=(1-i)^2 \Rightarrow \delta=1-I$

   $\Rightarrow z=\frac{3+i+1-i}{2}=2$ ou $z=\frac{3+i-1+i}{2}=1+i \Rightarrow S_C=\{2\ ;1+i\}$

   b. $2=2.(\cos(0)+i\sin(0))$ $\quad 1+i=\sqrt{2}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
2. E' : $X^4-(3+i)X^2+2(1+i)=0$ en posant $X^2=z$ on obtient l'équation E

   $\Rightarrow X^2=2$ ou $X^2=1+i \Rightarrow X=\pm\sqrt{2}$ ou $X=\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

EX 9 PAGE 31 :

1. $\sqrt{2}.(1+i)$ est une solution de (E) $\Rightarrow[\sqrt{2}.(1+i)]^4+a.[\sqrt{2}.(1+i)]^2+b+12i=0$

   $\Rightarrow 4.(-4)+a.2.2i+b+12i=0 \Rightarrow i.(4a+12)+b-16=0 \Rightarrow a=-3$ et $b=16$

2. (E) : $z^4-3z^2+16+12i=0$ est une équation bicarrée et $\sqrt{2}.(1+i)$ une solution $\Rightarrow -\sqrt{2}.(1+i)$solution

   $\Rightarrow z^4-3z^2+16+12i=(z-\sqrt{2}.(1+i))(z+\sqrt{2}.(1+i))(z^2+n)=(z^2-4i)(z^2+n) \Rightarrow n=-3+4i$

   $(E) \Leftrightarrow z^2-4i=0$ ou $z^2=3-4i \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}.(1+i)$ ou $z=\pm(1+2i)$

   Conclusion : $S_C=\{1+2i ; -1-2i ; \sqrt{2}.(1+i) ; -\sqrt{2}.(1+i)\}$

EX 10 PAGE 31 :

1. (E):$z^2+(1+i)z+i=0$ $a-b+c=0 \Rightarrow z=-1$ ou $z=-i$ $\Rightarrow S_C=\{-1 ; -i\}$
2. a. $iz^2+(1-i)z-1=0 \Leftrightarrow i.(z^2+(-1-i)z+i)=0 \Leftrightarrow (z^2+(-1-i)z+i)=0$ $a+b+c=0 \Rightarrow z=1$ ou $z=i$ $\Rightarrow S_C=\{1 ; i\}$

   b. $z^4+(1+i)z^2+i=0$ en posant $Z=z^2$ on obtient l'équation (E)$\Rightarrow z^2=-1$ ou $z^2=-i$

   $\Rightarrow z=\pm i$ ou $z=\pm\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$

EX 11PAGE31 :

1. $z^4+6z^2+25=0$ on pose : $t=z^2$

l'équation devient : $t^2+6t+25=0$

$\Delta'=-16 \rightarrow \delta'=4i \qquad t'=-3+4i \quad et \quad t''=-3-4i$

$$\bullet\, t=-3+4i \Leftrightarrow z^2=-3+4i \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\, x^2-y^2=-3\\(2)\, x^2+y^2=5\\(3)\, 2xy=4\end{cases}$$ (en posant z=x+iy)

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=2 \Rightarrow z=1+2i$ et Pour $x=-1$ l'éq (3) donne $y=-2 \Rightarrow z=-1-2i$

$$\bullet\, t=-3-4i \Leftrightarrow z^2=-3-4i \Leftrightarrow z^2=(1-2i)^2 \Leftrightarrow z=1-2i \text{ ou } z=-1+2i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1+2i; -1-2i; 1-2i; -1+2i\}$$

2. $z^4+4z^2-77=0$

On pose : t = z² On aura : $t^2+4t-77=0$

$\Delta'=81 \to \delta'=9$

$t'=-11 \; et \; t''=7$

$\bullet\, t=7 \Leftrightarrow z^2=7 \Leftrightarrow z=-\sqrt{7} \; ou \; z=\sqrt{7}$

$\bullet\, t=-11 \Leftrightarrow z^2=-11 \Leftrightarrow z=i\sqrt{11} \; ou \; z=-i\sqrt{11}$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{-\sqrt{7};\sqrt{7};-i\sqrt{11};i\sqrt{11}\right\}$$

3. $(E): z^5=\overline{z}$

• 0 est une solution de (E).

• Déterminons les solutions non nulles de (E).

On pose $z=re^{i\theta}$; $r>0$

$$(E) \Leftrightarrow (re^{i\theta})^5=\overline{re^{i\theta}} \Leftrightarrow r^5e^{5i\theta}=re^{-i\theta} \Leftrightarrow r^4e^{6i\theta}=1e^{i.0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4=1 \\ 6\theta=2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$z_0=1 \;;\; z_1=1.e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; z_2=1.e^{i2\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; z_3=1.e^{i\pi}=-1$$

$$z_4=1.e^{4i\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; z_5=1.e^{5i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{0,-1,1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

EX 12PAGE31:

$$posons\; P(z)=z^3-8z^2+24z-32; \qquad (E)\Leftrightarrow P(z)=0$$

1) $p(4)=4^3-8\times 4^2+24\times 4-32=0$ d'où $z_0=4$ est une solution de (E).

2) • Factorisons P(z).

$$p(z)=(z-4)(z^2+bz+c)$$
$$p(z)=z^3+(b-4)z^2+(c-4b)z-4c$$

Identifions On aura : $\begin{cases} b-4=-8 \\ c-4b=24 \\ -4c=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=8 \end{cases}$

D'où $P(z)=(z-4)(z^2-4z+8)$

$$\bullet\; P(z)=0 \Leftrightarrow z-4=0 \;ou\; z^2-4z+8=0 \;\;(\Delta'=-4\rightarrow \delta'=2i)$$
$$\Leftrightarrow z=4 \quad ou \quad z=2+2i \quad ou \quad z=2-2i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\{4;\,2+2i;\,2-2i\}$$

3. $z_0=4=4e^{i0}$; $z_1=2(1+i)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

EX 13PAGE 31 :

$$soit\;\; P(z)=z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12\;; \qquad (E)\Leftrightarrow P(z)=0$$

1. On pose $z=\alpha,\ \alpha\in IR$

$$P(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha^3-(3+4i)\alpha^2-4(1-3i)\alpha+12=0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12)+i(-4\alpha^2+12\alpha)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12=0 & (1) \\ -4\alpha^2+12\alpha=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2)\Leftrightarrow \alpha(-4\alpha+12)=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \;ou\; \alpha=3$$

Vérifions dans (1) pour $\alpha = 3$.

$(3)^3 - 3(3)^2 - 4.3 + 12 = 27 - 27 - 12 + 12 = 0$ D'où 3 est une solution réelle de(E).

2) 3 est une solution de E$\Rightarrow$

$$P(z) = (z-3)\left[z^2 + b.z + c\right]$$
$$P(z) = z^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c$$

Identifions

On aura : $\begin{cases} b-3 = -(3+4i) \\ c-3b = -4(1-3i) \\ -3c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4i \\ c = -4 \end{cases}$ D'où : $P(z) = (z-3)\left[z^2 - 4iz - 4\right]$

$$(E) \Leftrightarrow (z-3)(z^2 - 4iz - 4) = 0 \Leftrightarrow z = 3 \; ou \; z^4 - 4iz - 4 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \; ou \; (z-2i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \; ou \; z = 2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{3; 2i\}.$$

EX 14 PAGE32:

$$(E) : z^3 = 2 + 11i$$

1)

$$(2+i)^3 = 2^3 + 3.2^2 i + 3.2(i)^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

D'où $z_0 = 2 + i$ est solution de (E)

2) $(E) \Leftrightarrow z^3 - (2+11i) = 0$ Soit $f(z) = z^3 - (2+11i)$

On a : $f(2+i) = 0$ D'où $f(z) = \left[z - (2+i)\right].\left[z^2 + bz + c\right]$

$$f(z) = z^3 + (b-2-i)z^2 + \left[c - b(2+i)\right]z - c(2+i)$$

Identifions ON AURA $\begin{cases} b-2-i = 0 \\ c - b(2+i) = 0 \\ -c(2+i) = -(2+11i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2+i \\ c = 3+4i \end{cases}$

On aura :

D'où : $$f(z)=\left[z-(2+i)\right].\left[z^2+(2+i)z+3+4i\right]$$

$$(E)\Leftrightarrow z=2+i \text{ ou } z^2+(2+i)z+3+4i=0$$

$$\Delta=-3(3+4i)\Rightarrow\delta=i\sqrt{3}(2+i)\quad z'=\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)-i\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2}\ et\ \ z''=\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{2+i;\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)-i\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2};\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{2}\right\}$$

EX 15 PAGE32:

1. $\alpha=\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

   $\beta=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2})=\sqrt{3}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. a. $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$ $\quad\Delta'=1-1+e^{2i\theta}=e^{2i\theta}\Rightarrow\delta=e^{i\theta}\Rightarrow z=1+e^{i\theta}$ ou $z=1-e^{i\theta}$

   $z_1=1-e^{i\theta}$ $\quad z_2=1+e^{i\theta}$

   $$z_1=1-e^{i\theta}=e^{i0}-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}.\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{-2i\sin(\frac{\theta}{2})}=2\sin(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$$

   b.

   $$z_2=1+e^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{2\cos(\frac{\theta}{2})}=2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$$

   c. $z_1=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=1\\ \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$ $\quad\Leftrightarrow\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}\left(car\,\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\Leftrightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{3}$

   pour $\theta=\frac{\pi}{3}$ on a aussi $z_2=\boldsymbol{\beta}$

EX 16 PAGE32:

1) (E) : $z^2+(1-2i)z-2i=0$ $\quad$ $a-b+c=0\Rightarrow$ $z=-1$ ou $z=2i$ $\quad S_C=\{-1;2i\}$

2) E_θ : $z^2+(1-2e^{i\theta})z-2e^{i\theta}=0$ $\quad$ $a-b+c=0\Rightarrow$ $z_1=-1$ et $z_2=2e^{i\theta}$ $\quad S_C=\{-1\,;2e^{i\theta}\}$

1. $Z_I = \frac{-1+2e^{i\theta}}{2}$ =-0,5+$e^{i\theta}$ $\Rightarrow Z_I+0,5 = e^{i\theta}$
2. Z_I=-0,5+$e^{i\theta}$ l'ensemble des points I l'orsque θ varie dans [0 ;2π[est le cercle de rayon 1

   Et de centre le point B d'affixe -0,5
3. Le point A d'affixe -1 ;donc les points O et A sont sur l'axe des abscisses

   Pour que le point I soit aussi sur l'axe des abscisses il faut que Im(Z_I=-0,5+$e^{i\theta}$) =0

   $\Rightarrow$sin(θ)=0 $\Rightarrow$θ=0 ou θ=π (car θ∊[0 ;2π[ )

EX 17 PAGE32:

1. $z^2-2z+1+a^2=0 \Leftrightarrow (z-1)^2-(ia)^2=0 \Leftrightarrow z-1=ia$ ou $z-1=-ia \Leftrightarrow z=1+ia$ ou $z=1-ia$ $S_C=\{1+ia\ ;1-ia\}$
2. a/ O,A et B alignées ssi $\frac{z_A}{z_B}$ réel ssi $\frac{1+ia}{1-ia}$ réel ssi $\frac{1-a_2+ia_1}{1+a_2-ia_1}$ réel

   ssi $(1-a_2+ia_1).(1+a_2+ia_1)$ réel ssi $(1-a_2)a_1 + a_1(1+a_2)$=0

   ssi $2a_1$=0 ssi a_1=0

   b/ $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont orthogonaux* ssi $\frac{z_A}{z_B}$ imaginaire ssi $\frac{1+ia}{1-ia}$ imaginaire

   ssi $\frac{1-a_2+ia_1}{1+a_2-ia_1}$ imaginaire ssi $(1-a_2+ia_1).(1+a_2+ia_1)$ imaginaire

   ssi $(1-a_2)(1+a_2) - a_1a_1$ =0 ssi $a_1{}^2 + a_2{}^2 = 1$ ssi $|a| = 1$
3. a/ $$1+e^{ix} = e^{i0}+e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right)}_{2\cos(\frac{x}{2})} = 2\cos(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}$$

   $$1-e^{ix} = e^{i0}-e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}.\underbrace{\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}_{-2i\sin(\frac{x}{2})} = -2i\sin(\frac{x}{2}).e^{i\frac{x}{2}}$$

   b/

   $$1+ia = 1+ie^{i\alpha} = 1+e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

   $$1-ia = 1-ie^{i\alpha} = 1-e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = -2i\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

   c/ on a $a = e^{i\alpha} \Rightarrow |a| = 1$ donc $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont orthogonaux* $\Rightarrow$OAB est rectangle en O

   pour que OAB soit isocèle en O il faut et il suffit que OA=OB

   $\Leftrightarrow |1+ia| = |1-ia| \Leftrightarrow \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \to 0 < \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right)$

   $$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow a=1$$

   Conclusion : pour que OAB soit un triangle rectangle et isocèle en O il faut que a=1

EX 18 PAGE32:

1.

$$z+\frac{4}{z}=4\cos(\theta) \Leftrightarrow z^2-4\cos(\theta)z+4=0$$

$$\Delta'=4\cos^2(\theta)-4=4(\cos^2(\theta)-1)=-4\sin^2(\theta)=\left(2i\sin(\theta)\right)^2 \Rightarrow \delta'=2i\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow z=2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)\, ou\, z=2\cos(\theta)-2i\sin(\theta)$$

2. $2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)=2e^{i\theta}$

$$2\cos(\theta)-2i\sin(\theta)=\overline{2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)}=2e^{-i\theta}$$

3.

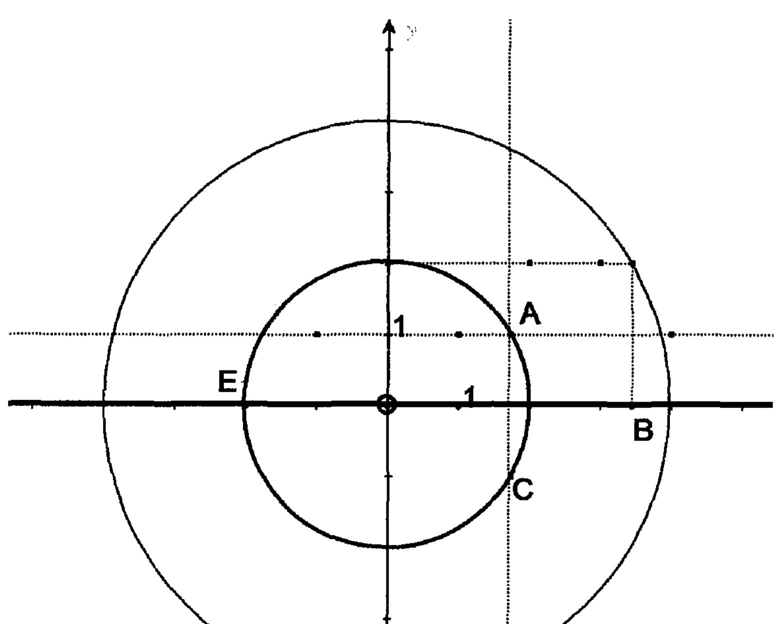
$$w\,réel \Leftrightarrow \overline{w}=w \Leftrightarrow \overline{z}+\frac{4}{\overline{z}}=z+\frac{4}{z} \Leftrightarrow z.\overline{z}^2+4z=z^2\overline{z}+4\overline{z}\, et\, z\neq 0$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}.\left(\overline{z}-z\right)+4(z-\overline{z})=0 \Leftrightarrow (z-\overline{z})\left(4-z\overline{z}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow z=\overline{z} \quad ou \quad z\overline{z}=4 \Leftrightarrow z\, réel \quad ou\, |z|=2$$

$$M\in\left(O\vec{i}\right)\, privée\, de\, O\;\; ou\, M\in cercle\, de\, centre\, O\, et\, de\, rayon\, 2$$

$$E=\varsigma(O;2)\cup\left(O;\vec{i}\right)\setminus\{O\}$$



4. a/ voir figure
   b/ A et C sont deux points du cercle de centre O et de rayon 2 donc appartiennent à E
   B est un point de l'axe des abscisses donc appartient à E

c/ $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}{2}=2\cos(\theta)=\frac{z_O+z_B}{2}\,donc\,OABC\,est\,un\,parallèlogramme\,(1)$

$$OA=OC=2 \qquad (2)$$

$$(1)\ et\ (2)\Rightarrow OABC\ est\ un\ losange$$

d/

$$OABC\ est\ un\ carrée\ ssi\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_O}\right|=1$$

$$ssi\left|\frac{-4i\sin(\theta)}{4\cos(\theta)}\right|=1 \iff \cos(\theta)=\pm\sin(\theta)$$

$$ssi\ \theta=\frac{\pi}{4}\quad (\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[)$$

EX 19 PAGE33

1. a/ $\left(e^{i\theta}-i\right)^2=e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}+i^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$

   b/

$$z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0\quad \Delta'=-1-2ie^{i\theta}+e^{2i\theta}=\left(e^{i\theta}-i\right)^2\Rightarrow\delta=e^{i\theta}-i$$

$$z'=i+e^{i\theta}-i=e^{i\theta}\qquad et\quad z''=i-e^{i\theta}+i=2i-e^{i\theta}\ S_{\mathbb{C}}=\left\{e^{i\theta};2i-e^{i\theta}\right\}$$

2. a/ ζ_1 est le cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1)

   b/ $Z_I=\frac{Z_{M_1}+Z_{M_2}}{2}=\frac{e^{i\theta}+2i-e^{i\theta}}{2}=i$

   c/ ζ_2 est le cercle de centre le point A d'affixe 2i et de rayon 1 .

3. a/

$$(M_1M_2)^2=\left|2i-e^{i\theta}-e^{i\theta}\right|^2=4\left|i-e^{i\theta}\right|^2=4\left|2i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\right|^2=8\times2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$$

$$=8\times(1-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta))=8.(1-\sin\theta)$$

   b/ $M_1M_2\ est\ \max imale\ pour\ \sin(\theta)=-1; or\ \theta\in[0;2\pi[\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}$

EX 20 PAGE33

I.

$$z^2+i\sqrt{3}z-i=0 \quad \Delta=-3+4i=(1+2i)^2 \Rightarrow \delta=1+2i$$

$$z=\frac{-i\sqrt{3}-1-2i}{2}=-\frac{1}{2}-i(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad ou \quad z=\frac{-i\sqrt{3}+1+2i}{2}=\frac{1}{2}+i(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

II.

1. a/

$$(\cos\theta+i)^2=\cos^2\theta+2i\cos\theta-1=-(1-\cos^2\theta)+2i\cos\theta=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$$

b/

$$(E):z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0 \quad \Delta'=(i\sin\theta)^2+2i\cos\theta=-\sin^2\theta+2i\cos\theta=(\cos\theta+i)^2$$

$$z=-i\sin\theta-(\cos\theta+i)=-\cos\theta-i(1+\sin\theta) \ ou \ z=-i\sin\theta+(\cos\theta+i)=\cos\theta+i(1-\sin\theta)$$

2. a/

$$A,B\ et\ C\ align\acute{e}es\ ssi\ \frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\ est\ un\ r\acute{e}el \Leftrightarrow \frac{\cos\theta-i.\sin\theta}{-\cos\theta-i.(\sin\theta+2)}\ est\ un\ r\acute{e}el$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta-i.\sin\theta)(-\cos\theta+i.(\sin\theta+2))\ est\ un\ r\acute{e}el$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta)(\sin\theta+2)+(\sin\theta)(\cos\theta)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta)(2+2\sin(\theta))=0 \Leftrightarrow \cos\theta=0 \ ou \ \sin(\theta)=-1 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}\left(car\ \theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

b/

$$B\ et\ C\ appartiennent\ \grave{a}\ un\ cercle\ de\ centre\ O\ Ssi\ |Z_B|=|Z_C| \Leftrightarrow |e^{-i\theta}+i|=|-e^{i\theta}-i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^2(\theta)+(1-\sin(\theta))^2}=\sqrt{\cos^2(\theta)+(1+\sin(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\theta)=0 \Leftrightarrow \theta=0(car\ \theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

$$Le\ rayon\ de\ ce\ cercle\ est\ |Z_B|=|1+i|=\sqrt{2}$$

EX 21 PAGE33

1.

$$(E):2z^2-2(1+i)z+\frac{1}{2}+i=0 \qquad \Delta'=(1+i)^2-1-2i=-1 \Rightarrow \delta'=i$$

$$z=\frac{1+i-i}{2}=\frac{1}{2} \quad ou \quad z=\frac{1+i+i}{2}=\frac{1}{2}+i \quad S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}+i\right\}$$

2. a/

$$E_\theta:2z^2-(1+2\cos(\theta)+2i)z+\cos(\theta)+i=0$$

$$\textit{un nombre réel } \alpha \textit{ est une solution ssi } 2\alpha^2-(1+2\cos(\theta)+2i)\alpha+\cos(\theta)+i=0$$

$$ssi\ 2\alpha^2-\alpha-2\cos(\theta)\alpha-2i\alpha+\cos(\theta)+i=0$$

$$ssi\ \left(2\alpha^2-(1+2\cos(\theta))\alpha+\cos(\theta)\right)+i(-2\alpha+1)=0$$

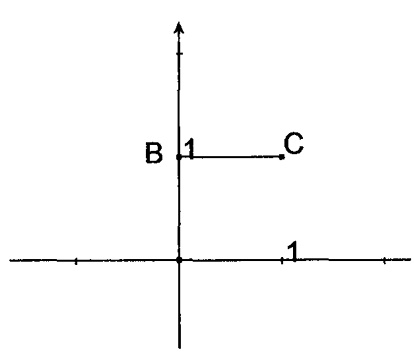
$$ssi\begin{cases}-2\alpha+1=0\\ 2\alpha^2-(1+2\cos(\theta))\alpha+\cos(\theta)=0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

$$Conclusion: \alpha=\frac{1}{2} \textit{ est une solution réelle de } E_\theta.$$

$$z'.z''=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{1}{2}.z''=\frac{\cos(\theta)+i}{2}\Rightarrow z''=\cos(\theta)+i$$

b/ $L'orsque\ \theta$ varie dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos\theta$ varie dans $[0;1]$ et donc l'ensemble

E des points M est le segment de droite $[BC]$ avec $z_B=i$ et $z_C=1+i$



c/

$$AM=\left|\cos(\theta)-\frac{1}{2}+i\right|=\sqrt{\left(\cos(\theta)-\frac{1}{2}\right)^2+1}\Rightarrow AM \textit{ est minimale pour } \cos(\theta)=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$Conclusion: AM \textit{ est minimale pour } \theta=\frac{\pi}{3}$$

EX 22 PAGE33

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\frac{k\pi}{2}} \quad k \in \{0,1,2,3\} \quad S_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \{1, i, -1, -i\}$$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = e^{i\frac{k\pi}{2}} \quad k \in \{0,1,2,3\} \quad d'après \quad a)$$

$$* \ \frac{z-i}{z+i} = 1 \ \ impossible \qquad * \frac{z-i}{z+i} = i \Leftrightarrow z - i = iz - 1 \Leftrightarrow z(1-i) = -1 + i \Leftrightarrow z = -1$$

$$* \frac{z-i}{z+i} = -1 \Leftrightarrow z - i = -z - i \Leftrightarrow z = 0 \quad * \frac{z-i}{z+i} = -i \Leftrightarrow z - i = -iz + 1 \Leftrightarrow z(1+i) = 1 + i \Leftrightarrow z = 1$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-1, 0, 1\}$$

EX 23 PAGE33

1.

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}} \quad avec\, k \in \{0,1,2\}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right); 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right); 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \right\}$$

2.

$$Les\, racines\, cubiques\, de\, l'unité\, sont : 1,\, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \ et\ j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2}\ étant\ une\ racine\ cubique\ de\ 4\sqrt{2}(-1+i) \Rightarrow Les\ racines\ cubiques\ de\ 4\sqrt{2}(-1+i)\ sont :$$

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right).j = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \ et\ \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right).j^2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

3.

$$\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right).j = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \ et\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

EX 24 PAGE 33 :

$$z^6 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \quad k \in \{0;1;2;3;4;5\}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{\pi}{2}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}; e^{i\frac{7\pi}{6}}; e^{i\frac{3\pi}{2}}; e^{i\frac{11\pi}{6}}; \right\}$$

$$x^6+1 = \underbrace{\left(x-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(x-e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)}_{\left(x^2-x(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{11\pi}{6}})+1\right)} . \underbrace{\left(x-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(x-e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)}_{\left(x^2-x(e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\frac{3\pi}{2}})+1\right)} . \underbrace{\left(x-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(x-e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)}_{\left(x^2-x(e^{i\frac{5\pi}{6}}+e^{i\frac{7\pi}{6}})+1\right)}$$

$$= \left(x^2-2\cos(\frac{\pi}{6})x+1\right)\left(x^2-2\cos(\frac{\pi}{2})x+1\right)\left(x^2-2\cos(\frac{5\pi}{6})x+1\right)$$

$$= \left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)$$

QCM :

1) $\vec{u}.\vec{v}=-2$
2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC)
3) $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|$
4) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$
   b) $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{EG}=\vec{0}$
   c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FH}=0$
   d) V=$\frac{1}{6}$

Vrai-Faux :

1) (vrai)

en effet : la droite (AD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc elle est perpendiculaire à ce plan

2) (faux)

si$\vec{u}$ et$\vec{v}$ *nesont pas coliéaires alors* $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base

3) a) (vrai)

$\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{v}$ or $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{v}$ d'où $\vec{v}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}$

b) (faux)

contre exemple : si par exemple $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$ pour tout vecteur $\vec{v}$ et $\vec{w}$

c) (faux)

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{u}\wedge\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}(\vec{v}-\vec{w})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ sont colinéaires

ou bien : (voir QCM)

4) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ mais $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AD}$

EX1 :

dans le repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ on a :

A(0,0,0) ; F(1,0,1) ; H(0,1,1) ; E(0,0,1) ; B(1,0,0) ; C (1,1,0) et G(1,1,1)

$* \quad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\,\overrightarrow{FH} = -1+1+0=0$

$* \quad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\,\overrightarrow{HC} = 1+0-1=0$

$* \quad \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{EG}.\,\overrightarrow{GB} = 0-1+0=-1$

$* \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{HB} = 1+0+0=1$

EX2 :

1) $* \; \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos B\hat{A}D = 1\times1\times\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

- de même $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ d'où les droites (AB) et (CD) sont orthogonales
- de même on pourra montrer que (AC) et (BD) sont orthogonales
- aussi pour les droites (AD) et (BC)

EX3 :

a) * $(\vec{j}+\vec{k}).(\vec{k}-\vec{j})=\|\vec{k}\|^2-\|\vec{j}\|^2=1-1=0$ d'où $(\vec{j}+\vec{k})\perp(\vec{k}-\vec{j})$

- $(\vec{j}+\vec{k}).\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}+\vec{k}.\vec{i}=0+0=0$ d'où $(\vec{j}+\vec{k})\perp\vec{i}$
- $(\vec{k}-\vec{j}).\vec{i}=\vec{k}.\vec{i}-\vec{j}.\vec{i}=0-0=0$ d'où $\vec{i}\perp(\vec{k}-\vec{j})$

d'où le repère $(O,\vec{j}+\vec{k},\vec{k}-\vec{j},\vec{i})$ est orthogonal

b) $(\vec{i}-\vec{j}).(\vec{j}-\vec{k})=\vec{i}.\vec{j}-\vec{i}.\vec{k}-\vec{j}.\vec{j}+\vec{j}.\vec{k}=0-0-\|\vec{j}\|^2+0=-1\neq 0$

d'où le repère $(O,\vec{i}-\vec{j},\vec{j}-\vec{k},\vec{k}-\vec{i})$ n'est pas orthogonal

EX4 :

1) $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BA}=\vec{0}+\overrightarrow{AC}\wedge(-\overrightarrow{AB})$

$=-(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\wedge(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}+(-\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{AB}$

$=-(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

3) * $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\Rightarrow\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\|=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

$\Rightarrow BC\times BA\times\sin\hat{B}=AB\times AC\times\sin\hat{A}$

$\Rightarrow BC.\sin\hat{B}=AC.\sin\hat{A}$

$\Rightarrow\dfrac{AC}{\sin\hat{B}}=\dfrac{BC}{\sin\hat{A}}\qquad(1)$

- $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\Rightarrow\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\|=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

$\Rightarrow AC\times BC\times\sin\hat{C}=AB\times AC\times\sin\hat{A}$

$\Rightarrow BC.\sin\hat{C}=AB.\sin\hat{A}$

$\Rightarrow\dfrac{AB}{\sin\hat{C}}=\dfrac{BC}{\sin\hat{A}}\qquad(2)$

$(1)+(2)\Rightarrow\dfrac{AB}{\sin\hat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\hat{B}}=\dfrac{BC}{\sin\hat{A}}$

EX5 :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$ d'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 2/3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/3\\ \frac{-4}{9}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2/3 & -4/9\\ 1/2 & 1/2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1/3\\ 1/2 & 1/2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1/3\\ 2/3 & -4/9\end{vmatrix}\end{pmatrix} \qquad \vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}5/9\\ -1/3\\ -2/3\end{pmatrix}$$

d'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=\frac{5}{9}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$

EX6 :

on sait que : $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$; $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$ et $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$ car $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé direct

d'où :

- $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$
- $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$
- $\vec{i}\wedge(-\vec{j})=-(\vec{i}\wedge\vec{j})=-\vec{k}$
- $(2\vec{j})\wedge(-3\vec{k})=-6(\vec{j}\wedge\vec{k})=-6\vec{i}$

EX7 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}.\vec{w}=6+(-4)+(-2)=0$ d'où $\vec{u}\perp\vec{w}$

2) soit $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{vmatrix}1 & \text{b}\\1 & \text{c}\end{vmatrix}=3\\-\begin{vmatrix}2 & \text{a}\\1 & \text{c}\end{vmatrix}=-4\\\begin{vmatrix}2 & \text{a}\\1 & \text{b}\end{vmatrix}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{c-b=3}\\\text{a-2c=-4}\\\text{2b-a=-2}\end{cases}$$ pour a=2 on aura : b=0 et c=3

d'où $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ convient

3) soit $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ d'après 2)° $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\-1+\dfrac{a}{2}\\2+\dfrac{a}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{u}.\vec{v}=1$

d'où $2a+(-1+\dfrac{a}{2})+(2+\dfrac{a}{2})=1\Leftrightarrow 3a=0\Leftrightarrow a=0$ d'où $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

EX8 :

$\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}.\vec{v}=2$; $\vec{w}=2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v}$

* $\vec{u}.\vec{w}=\vec{u}.(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})=2\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{u}.\vec{v}=0-3\vec{u}.\vec{v}=-6$ ($\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$ car $\vec{u}\perp(\vec{u}\wedge\vec{v})$)

* $\vec{v}.\vec{w}=2\vec{v}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{v}.\vec{v}=0-3\|\vec{v}\|^2=-3(4)^2=-48$

* $\|\vec{w}\|^2=(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})^2=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9\|\vec{v}\|^2-12(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{v}=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9(4)^2-0=144+4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2$

or

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\Rightarrow 2=1\times4\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|=1\times4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

d'où $\|w\|^2=144+4(2\sqrt{3})^2=192$ $\Rightarrow\|w\|=\sqrt{192}=8.\sqrt{3}$

EX9 :

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$; $\vec{u}\perp\vec{v}$; $\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}$

1) * $\vec{v}\perp(\vec{w}\wedge\vec{v})\Rightarrow\vec{v}.(\vec{u}-\vec{w})=0\Rightarrow\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{w}=0\Rightarrow\vec{v}.\vec{w}=0$ (car $\vec{v}.\vec{u}=0$) $\Rightarrow\vec{w}\perp\vec{v}$

* on a: $\vec{u}=\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}\Rightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2\Leftrightarrow 1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2+2\vec{w}.(\vec{w}\wedge\vec{v})$

$\Leftrightarrow$ $1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2$ *or* $\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{w},\vec{v}})\right|$ ($\vec{w}\perp\vec{v}\Rightarrow\sin(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=1$)

d'où $\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|$ on aura donc : $1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\|^2=2\|\vec{w}\|^2$

$$\Rightarrow\|\vec{w}\|^2=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) en général, lorsque : $\|\vec{t}\|=\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{t}\perp\vec{k}$ $\left|\begin{array}{l}\text{on a : }(\vec{t},\vec{k},\vec{t}\wedge\vec{k})\text{:R.o.n direct}\\ \text{et on a aussi : }\vec{k}\wedge(\vec{t}\wedge\vec{k})=\vec{t}\ ;\ (\vec{t}\wedge\vec{k})\wedge\vec{t}=\vec{k}\end{array}\right.$

on a : $\vec{w}\perp\vec{v}$, $\|\vec{v}\|=1$, $\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\left(\sqrt{2}\vec{w},\vec{v},\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})\right)$ est un repère orthonormé direct

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\vec{v}\wedge\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})=\sqrt{2}\vec{w}\ \Rightarrow\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{v})=\vec{w}\\ \text{et comme : }\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}\end{array}\right\rangle\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge(\vec{u}-\vec{w})\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}-\vec{v}\wedge\vec{w}$$

$$\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}+\vec{w}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=-\vec{u}\wedge\vec{v}+(\vec{u}-\vec{w})\ \Rightarrow\ 2\vec{w}=\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}\Rightarrow\ \vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}\wedge\vec{v}$$

EX10 :

on sait que lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\-7\\7\end{pmatrix}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\-7\\7\end{pmatrix}$ convient

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ convient

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2-\sqrt{2}\\3-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires , il suffit donc de choisir un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$

soit $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\vec{u}.\vec{w}=0 \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})a-b\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})c=0$

pour a=1 et c=1 , on aura b= $\sqrt{2}$ d'où $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ convient

EX11 : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

a) $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'où $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{v}\wedge\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

c) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\neq\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$: le produit vectoriel n'est pas associative .

<u>EX12 :</u>

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}=-\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$, d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à chacun des plans (ABC) et (ADE) ,
d'où ils sont parallèles
or $A\in(ABC)\cap(ADE)$, ils sont donc confondus , par suite les points A,B,C,D et E sont coplanaires

<u>EX13 :</u>

$$d_{(A,(BC))}=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

a) A(1,1,1) ; B(-1,0,1) ; C(0,0,1)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $d=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\dfrac{1}{1}=1$

b) A(-1,2,0) ; B(-1,5,0) ; C(-3,7,-3)

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} ; \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-9\\0\\6\end{pmatrix} \qquad d=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{17}}$$

c) A(1,-1,2) ; B(1,0,1) ; C(0,1,2)

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad d=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

EX 14 :

a) A(0,3,-2) ; M(1-2t,3+2t, -1-t)

$$AM=\sqrt{(1-2t)^2+(2t)^2+(1-t)^2}=\sqrt{9t^2-6t+2}$$

b) $AM=\sqrt{(3t-1)^2+1}$ AM est minimale pour $t=\frac{1}{3}$

ou bien , on pose : $f(t)=\sqrt{9t^2-6t+2}$ $\Rightarrow f'(t)=\dfrac{3.(3t-1)}{\sqrt{9t^2-6t+2}}$

t	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
f'(t)		-	0	+	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) soit H : le projeté orthogonal de A sur D $H(\frac{1}{3},\frac{11}{3},\frac{-4}{3})$; $(t=\frac{1}{3})$

EX15 : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix};\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$

$$1.\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\quad or\,\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-6\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=-9\neq 0$$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires et par suite les points A,B,C et D ne sont pas coplanaires.

2. $$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}.\left|-9\right|=\frac{3}{2}\ (u.v)$$

3. a)

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}\qquad AC=AD=CD=3\sqrt{2}\Rightarrow ACD\ est\ équilatéral$$

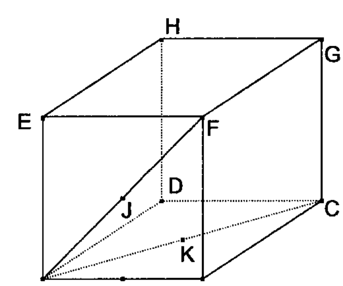
b) Soit @ l'aire du triangle ACD

$$V=\frac{BH.@}{3}\Rightarrow BH=\frac{3.V}{@}\quad or\,on\,a:V=\frac{3}{2}et\ @=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=9.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BH=\frac{3.\frac{3}{2}}{9.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

EX 16 : O=A*G=B*H=C*E=D*F

I=A*B ; J=A*F=B*E ; K=A*C=B*D



1) On rapporte l'éspace au R.O.N $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

A(0,0,0) ;B(1,0,0) ;D(0,1,0) ;E(0,0,1) ;G(1,1,1) ;C(1,1,0)

$\Rightarrow$ I($\frac{1}{2}$,0,0) ;O($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$);J ($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$) et K($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$,0)

$$\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix};\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix};\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}\Rightarrow \overrightarrow{IO},\overrightarrow{IJ}\ et\ \overrightarrow{IK}\ sont\ coplanaires$$

et par suite les points O,I,J et K sont coplanaires

2)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}\Rightarrow OKIJ\ est\ un\ parall\grave{e}\log ramme\\ IJ=IK=\frac{1}{2}\\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}=0\Rightarrow \overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{IK}\end{array}\right\rangle\Rightarrow OKIJ\ est\ un\ carr\acute{e}$$

3)

$$V=\frac{1}{3}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IB}\right|\quad or\ \overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}.\left|-\frac{1}{8}\right|=\frac{1}{24}\ (u.v)$$

EX 17:

1) * $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BJ}$ d'où ABJI est un parallélogramme (1)

* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{LH}$ d'où ALHI est un parallélogramme (2)

* $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$ d'où ABKL est un parallélogramme (3)

(1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ ABKLIJGH est un parallélepipède

2) a/ A(0,0,0) ; B(1,0,0) $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

A(0,0,0) ; D(0,1,0) $\Rightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ d'où $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}$

b) $V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\right).\overrightarrow{AL}\right|$

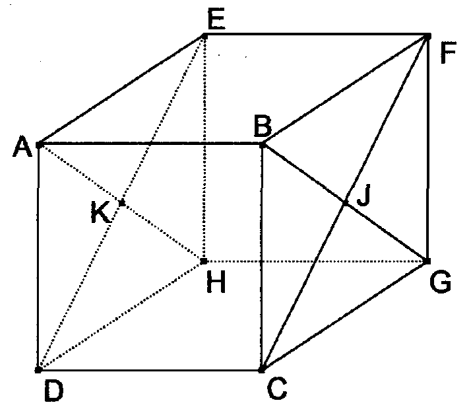
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{3}\\0 & 0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}).\overrightarrow{AL}=0+0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

d'où $V=\frac{1}{3}$ *unité de volume*

EX 18 :

K=A*H =D*E

J=B*G=C*F



1) D(0,0,0) ; C(1,0,0) ; H(0,1,0) ;A(0,0,1)

B(1,0,1) ; G(1,1,0) ;E(0,1,1) ;F(1,1,1)

$$*\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FE}\wedge\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FE}\wedge\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{FB}$$

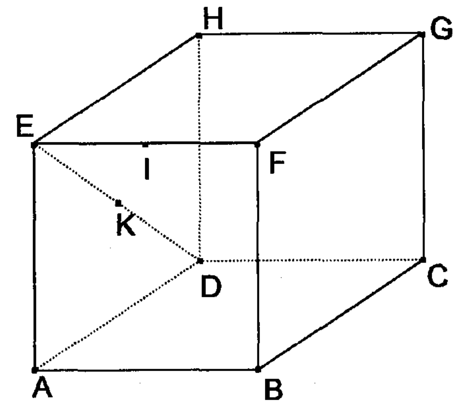
$$*\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HD}$$

$$*\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH}$$

2) $$*\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$$

3) $J(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$*\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DK}$$



Ex 19 :

$I = E * F \quad , K = A * H = D * E$

1) a)

$A(0,0,0)\ ; B(1,0,0)\ ; G(1,1,1); K(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ ; I(\frac{1}{2},0,1)$

$$\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix};\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{BK}$$

b) $aire(IGA)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BK}\right\|=\frac{\sqrt{6}}{4}\ (u.a)$

2)

$$\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right).\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{6}\left|-\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{6}(u.v)$$

QCM

1) a) S a pour centre I(0,5 :0,5 :0,5) et pour rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$
   b) $S \cap P = \emptyset$
2) a) (BCH) : $x + z - 1 = 0$
   b)La droite (HC)
   c) La droite passant par le centre du carré ABCD et parallèle à (AE)

VRAI-FAUX

1) Vrai en effet $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{N'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectives des deux plans et
$$\vec{N}.\overrightarrow{N'} = 1 - 2 + 1 = 0$$
2) Vrai en effet $\vec{U}$ est un vecteur normal à P et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est aussi un vecteur normal à P ;par suite $\vec{U}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3) Faux
   S de centre le point O et de rayon R=1 et P : $x-\frac{1}{2}=0$
   $D(O,P)=\frac{\left|0-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2} < R$ d'où $S \cap P$ est un cercle de rayon :
   $$r = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
4) Vrai S est de centre I(1,1,1) et de rayon R=1.
   P_1 :x=0 ; P_2 : y=0 ; P_3 :z=0
   $D(I,P_1) = D(I,P_2) = D(I,P_3) = 1 = R$
   D'où S est tangente à chacun des plans P_1 ;P_2 et P_3

EX 1 :

a/ A(1,-2,3) ; B(-1,0 ,1) ;$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

D'où (AB) :$\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

b/ A($2,\frac{7}{2}$,0) ; B(2,-2 ,1) ;$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-5,5\\1\end{pmatrix}$

D'où (AB) :$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 - 5,5\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

c/ A(0,0,1) ; B(-1,-1,-1) ;$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

D'où (AB) :$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; $t \in IR$

EX 2 :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de D et D' et sont colinéaires (il est clair que $\overrightarrow{u'} = -2\vec{u}$) ; par suite les droites D et D' sont parallèles.

EX 3 :

a/ $\Delta:\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -5 - 3\alpha \quad t \in IR \\ z = 8 + t \end{cases}$

P :x+y+z-5=0

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$:vecteur directeur de Δ

$\vec{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:vecteur normal à P

$\vec{u}.\vec{N} = 2 - 3 + 1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{N}$

Par suite Δ et P sont parallèles

A(4,-5,8) un point de Δ et n'appartient pas à P

Conclusion : Δ et P sont strictement parallèles.

b/ $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:vecteur directeur de Δ

$\vec{N}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$:vecteur normal à P

$\vec{u}.\vec{N} = 10 + 0 + 8 = 18 \neq 0$

$\Rightarrow \vec{u}$ *et* $\vec{N}$ ne sont pas orthogonaux

Par suite Δ et P sont sécantes.

EX 4 :

a/ P :2x+ 3y-5z-20=0

$(O,\vec{i})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ t∊IR

M(x,y,z)∊P∩$(O,\vec{i})$ ssi

$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 20 = 0 \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 2t + 3\times 0 - 5\times 0 - 20 = 0 \end{cases}$ ssi

$x = 10 \; ; y = 0 \; ; \; z = 0$

Conclusion : P∩$(O,\vec{i})$={$A(10,0,0)$}

b/ $(O,\vec{j})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ t∊IR

M(x,y,z)∊P∩$(O,\vec{i})$ ssi

$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 20 = 0 \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ 2\times 0 + 3t - 5\times 0 - 20 = 0 \end{cases}$ ssi

x=0 ; y=$\frac{20}{3}$; z=0

Conclusion : P∩$(O,\vec{j})$=$\left\{B(0,\frac{20}{3},0)\right\}$

c/ $\vec{j}\wedge\vec{i}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (O\,;\vec{j}\wedge\vec{i})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$ t∊IR

M(x,y,z)∊P∩$(O, \vec{j}\wedge\vec{i})$ ssi

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \\ 2x + 3y - 5z - 20 = 0 \end{cases}$ ssi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \\ 2\times 0 + 3\times 0 + 5t - 20 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi}$$

x=0 ; y=0 ; z=4

Conclusion : P∩(O, $\vec{j}$^$\vec{i}$)={$C(0,0,-4)$}

EX 5 :

1) B(2,0,0) ;D(0,1,0) et H(0,1,1)

$\Rightarrow$I(1 ;0,5 ;0) et $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Par suite (HI) : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = 1 - t \end{cases}$; t∈IR

2) D(0,1,0) ,E(0,0,1) et G(2,1,1)

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\overrightarrow{DE}$ ^$\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DEG).

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (DEG) ssi \overrightarrow{DM}.(\overrightarrow{DE}$ ^$\overrightarrow{DG})$=0

Ssi –x+2y+2z-2=0

Conclusion (DEG) : –x+2y+2z-2=0

3) Les points H,D,E et G ne sont pas coplanaires ⇒H∉(DEG)

⇒ (HI)⊄ (DEG) (1)

Soit J le milieu de [HI]⇒J($\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{2}$)

$\frac{1}{2} - 2\times\frac{3}{4} - 2\times\frac{1}{2} + 2 = 0$⇒J∈(DEG) (2)

1) et (2) ⇒(HI)∩(DEG)={J}

Ex 6 : A(-1,-2,-3)

1) a/ $(\vec{i}-\vec{j})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\vec{i}-\vec{j})$^$\vec{k}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P\ ssi\overrightarrow{AM}.((\vec{i}-\vec{j})$^$\vec{k})$=0

Ssi –(x+1)-(y+2)+0=0

ssi -x-y-3=0

Conclusion P : x + y +3 = 0

b/ $(\vec{i}+\vec{j})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{i}+\vec{k}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\vec{i}+\vec{j})$^$(\vec{i}+\vec{k})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan Q.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Q\ ssi\overrightarrow{AM}.[(\vec{i}+\vec{j})$^$(\vec{i}+\vec{k})]$=0

Ssi x – y-z -4 = 0

Conclusion Q : x – y-z -4 = 0

c/ $(\vec{i}\wedge\vec{j})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{j}\wedge\vec{k}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge(\vec{j}\wedge\vec{k})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan R.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P$ $ssi\overrightarrow{AM}.(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge(\vec{j}\wedge\vec{k})=0$

Ssi y+2 = 0

Conclusion R : y + 2 = 0

2) O(0,0,0) P : x + y +3 = 0

$d(O\,;P)=\frac{|3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$d(O\,;Q)=\frac{|-4|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$d(O\,;R)=\frac{|2|}{\sqrt{1}}=2$

Ex 7 :

1) (OIJ) : z=0
   (OJK) :x=0
   (OIK) :y=0
   (IJK) :x+y+z-1=0
2) $M(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

D(M,(OIJ))= D(M,(OJK))

$= D(M,(OIK))=\frac{1}{3}$

D(M,(IJK))=0

3) M∉(OIJ)⇒O,I,J et M ne sont pas coplanaires.

$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;$\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{0M}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OM}\right|=\frac{1}{6}.\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

EX 8 :

a/ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$un vecteur normal à P ⇒

P :2x-y+3z+d=0

A∈P⇒2-0+3+d=0⇒d=-5

⇒ P : 2x-y+3z-5=0

b/ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P$ SSi $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

1.(x-1)-(y-2)+0=0

ssi x-y+1=0

Cclision P :x-y+1 =0

c/ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P$ SSi $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

ssi 2x-3y-4z-4=0

Cclision P : 2x-3y-4z-4=0

Ex 9 :

a/ D⊥P⇒$\vec{N}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite D. et on a A(0,0,1)∈D ⇒

$$D : \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 1 \end{cases} ; \quad \alpha \in IR$$

b/ $D \perp P \Rightarrow \vec{N}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite D. et on a $A(1,-3,2) \in D \Rightarrow$

$$D : \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + \alpha \\ z = 2 \end{cases} ; \quad \alpha \in IR$$

c/ $D \perp P \Rightarrow \vec{N}\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite D. et on a $A(1,5,3) \in D \Rightarrow$

$$D : \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \alpha \\ z = 3 - 5\alpha \end{cases} ; \quad \alpha \in IR$$

Ex 10 :

1) $-1+5\times1-5=-1\neq7 \Rightarrow A\notin P$

2) a/ $\overrightarrow{AH}$ *et* $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs normaux à P donc $\overrightarrow{AH}$ *et* $\vec{N}$ sont colinéaires et par suite il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k.\vec{N}$ ce qui donne $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-k\\5k\\-k\end{pmatrix}$

b/ $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_0-1\\y_0-1\\z_0-5\end{pmatrix}$ et $H \in P$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = -k \\ y_0 - 1 = 5k \\ z_0 - 5 = -k \\ -x_0 + 5y_0 - z_0 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 - k \\ y_0 = 1 + 5k \\ z_0 = 5 - k \\ -x_0 + 5y_0 - z_0 = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow k=\frac{8}{27}$ et par suite

$x_0 = \frac{19}{27} ; y_0 = \frac{67}{27}$ *et* $z_0 = \frac{127}{27}$

Conclusion : $H(\frac{19}{27} ; \frac{67}{27} ; \frac{127}{27})$

EX 11 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}=1+2=3\neq0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A,B et C ne sont pas alignées.

2) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) ssi \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})=0$

Ssi -2x+y+3z-5=0

Conclusion (ABC) : -2x+y+3z-5=0

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan Q $\Rightarrow$

Q : -2x+y+3z+d=0

$D(0,1,2) \in Q \Rightarrow 1+6+d=0 \Rightarrow d=-7$

Q : -2x+y+3z-7=0

4) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$ (OD) : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$;t∈IR

M(x,y,z)∈(OD)∩(ABC)⇔

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \\ -2x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = \frac{5}{7} \Rightarrow x=0 ; y = \frac{5}{7}$ et $z= \frac{10}{7}$

Conclusion : L'intersection de la droite (OD) avec le plan (ABC) est le point H$(0\,;\frac{5}{7}\,;\frac{10}{7})$

EX 12 :

P : 2x-y+2z-5=0

Q :2x+2y-z-4=0

1) $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{N'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectives de P et Q

   et $\vec{N}.\overrightarrow{N'} = 4 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{N} \perp \overrightarrow{N'}$ et par suite P⊥Q

2) A(1,2-1)

   $d(A,P) = \frac{|2-2-2-5|}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$

   $d(A,Q) = \frac{|2+4+1-4|}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$

3) P∩Q=Δ et P⊥Q

   $\Rightarrow d^2(A,\Delta)= d^2(A,P)+ d^2(A,Q)$

   $\Rightarrow d(A,\Delta)=\frac{\sqrt{58}}{3}$

4) $\Delta : \begin{cases} 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$

On pose z=t on aura

$$\begin{cases} z = t & (1) \\ 2x - y = 5 - 2t & (2) \\ 2x + 2y = 4 + t & (3) \end{cases}$$

(3)-(2)$\Rightarrow$3y=-1+3t$\Rightarrow y= -\frac{1}{3} + t$

Et par suite $x = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}t$

Donc $\Delta : \begin{cases} x = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{1}{3} + t \\ z = t \end{cases}$; t∈IR

5) $M(\frac{7}{3} - \frac{1}{2}t\,; -\frac{1}{3} + t\,;t)$

Soit la fonction f :t→f(t)=AM²

$\Rightarrow f(t) = (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}t)^2 + (-\frac{7}{3} + t)^2 + (1+t)^2$

$\Rightarrow f'(t)= \frac{9}{2}t - 4$

t	-∞	8/9	+∞
f'(t)	-	0	+
f(t)	↘	58/9	↗

La distance AM est minimale pour t= 8/9 $\Rightarrow M(\frac{17}{9};\frac{5}{9};\frac{8}{9})$

EX 13 : A(0,3,2)

P_m :(1+m)x+y-2mz-4-3m=0

1) a/

$d(A,P_m)=\frac{|3+4m-4-3m|}{\sqrt{(1+m)^2+1+4m^2}}=\frac{|m-1|}{\sqrt{5m^2+2m+2}}$

b/ $d(A,P_m)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{5m^2+2m+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2}{5m^2+2m+2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2.(m-1)^2 = 5m^2+2m+2$

$\Leftrightarrow 3m^2+6m=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=-2$

2) $D:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+2t \\ z = -1-t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

(1+m)(1-2t)+(3+2t)-2m(-1-t)-4-3m=

1-2t+m-2mt+3+2t+2m+2mt-4-3m=0

$\Rightarrow D \subset P_m$; pour tout réel m

EX 14 :

1) $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$\overrightarrow{N_Q}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normal à Q

$\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{N_P}$ et $\overrightarrow{N_Q}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ P et Q sont secants.

2) Soit E l'ensemble des points équidistant de P et Q

*$M(x,y,z) \in E \Leftrightarrow d(M,P)=d(M,Q)$

$\Leftrightarrow \frac{|x+2y+2z-1|}{\sqrt{9}}=\frac{|3x-4z|}{\sqrt{25}}$

$\Leftrightarrow 25(x+2y+2z-1)^2=9(3x-4z)^2$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 5x+10y+10z-5 = 9x-12z \\ ou \\ 5x+10y+10z-5 = 12z-9x \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 4x-10y-22z+5=0 \\ ou \\ 14x+10y-2z-5=0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow$

M∊ plan F: $4x-10y-22z+5=0$

ou

M∊ plan H : $14x+10y-2z-5=0$

Donc E=F**U**H

$\overrightarrow{N_F}\begin{pmatrix}4\\-10\\-22\end{pmatrix}$ vecteur normal à F

$\overrightarrow{N_H}\begin{pmatrix}14\\10\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal à H

$\overrightarrow{N_F} . \overrightarrow{N_H}$ =56-100+44=0$\Rightarrow F \perp H$

*Soit $\Delta = P \cap Q$ tout point de Δ est équidistant de P et Q (d=0)$\Rightarrow \Delta \subset E$

CONCLUSION : l'ensemble des points équidistants de P et Q est la réunion de deux plans :

F: $4x-10y-22z+5=0$ et

H : $14x+10y-2z-5=0$

Qui sont perpendiculaires et contenants la droite Δ .

<u>EX 15</u> : A(1,2,-1) ; B(2,1,1)

1) Q passe par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$M(x,y,z) \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\times 1+(y-2)\times(-1)+(z+1)\times 2=0$

$\Leftrightarrow x-y+2z+3=0$

Cclusion Q : x-y+2z+ 3=0

2) $P_m : x+y+m-3=0$

a/ $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal à P_m

$\overrightarrow{AB}.\vec{N} = 1-1+0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{N}$

Par suite (AB) // P_m

b/ $A \in P_m \Leftrightarrow 1+2+m-3=0 \Leftrightarrow m=0$

$(AB) \subset P_m$ ssi $m=0$

c/ Q de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \vec{N}$

$\Rightarrow Q \perp P_m$ pour tout $m \in IR$

3) ABB'A' carré ssi AA'=AB

Ssi $d(A,P_m)=AB$

$\Leftrightarrow \frac{|1+2+m-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow |m| = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow m = 2\sqrt{3}$ ou $m = -2\sqrt{3}$

Ex 16 :

A(a,0,0) B(0,b,0) C(0,0,c)

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

(ABC) : (bc).x+(ac).y+(ab).z+d=0

$A(a,0,0) \in (ABC) \Rightarrow abc+d=0 \Rightarrow d=-abc$

d'où (ABC):(bc).x+(ac).y+(ab).z-abc=0

b) $OH = d_{(O,(ABC))}$

$$OH = \frac{abc}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

2) a) soit A : l'aire du triangle ABC

$$A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

d'où : $A = \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}$

b) $A_1 = aire(OAB) = \frac{ab}{2}$

$A_2 = aire(OAC) = \frac{ac}{2}$

$A_3 = aire(OBC) = \frac{bc}{2}$

$A^2 = \frac{1}{4}\left[(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2\right]$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

Ex 17 :

1) S : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-3)^2-9=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 14$

D'où l'ensemble S est la sphère de centre le point I(2,-1,3) et de rayon $\sqrt{14}$.

2) (E) : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)=-14 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 0$

(E) = {I(2,-1,3)}

3) (F) : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+16=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)=-16 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2= -2$

(F) $=\emptyset$

Ex 18 :

(S) : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

O,A,B et C appartiennent à (S)$\Rightarrow$

$$\begin{cases} d=0 \\ 1+1+1+a+b+c+d=0 \\ 4+2a+d=0 \\ 1+4+4+a-2b+2c+d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=-3 \\ 2a+d=-4 \\ a-2b+2c+d=-9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow d=0$; $a=-2$; $b=5/4$ et $c=-9/4$

(S) : $x^2+y^2+z^2-2x+5/4.y-9/4.z=0$

Ex 19 :

1) A(1,7,-1) P : $x+y+z=0$

(S) est de rayon $R=d(A,P)=\frac{|7|}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$(S) : $(x-1)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=\frac{49}{3}$

2) A(0,2,3) P : $x+y+z=0$

$R=d(A,P)=\frac{|-2+3+5|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$(S) : $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$

2) A(5,3,1) P : $3x-2y-z+7=0$

$R=d(A,P)=\frac{|15-6-1+7|}{\sqrt{14}}=\frac{15}{\sqrt{14}}$

$\Rightarrow$(S) : $(x-5)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{225}{14}$

Ex 20 :

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\Rightarrow$P : $y-3z+d=0$

$A(1,4,-5)\in P \Rightarrow 4-3\times(-5)+d=0 \Rightarrow d=-19$

Cclusion P : $y-3z-19=0$

Ex 21 :

1) $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à(OAB)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal à(ABC)

$(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0+0+0=0 \Rightarrow$

(OAB)$\perp$ (ABC)

2) Désignons par P,Q et R les plans médiateurs respectifs de [OA],[OB] et [OC]

*$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P$\Rightarrow$

P : $2x+d=0$

$I=O*A(1,0,0)\in P \Rightarrow 2+d=0 \Rightarrow d=-2$

P: $2x-2=0 \Leftrightarrow$ P: $x=1$

*$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q$\Rightarrow$

Q : $x+y+d=0$

$J=O*B(1/2,1/2,0)\in Q \Rightarrow 1+d=0 \Rightarrow d=-1$

Q: $x+y-1=0$

*$M(x,y,z)\in R \Leftrightarrow OM=OC$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

$\Leftrightarrow 2x+2y+2z-3=0$

R : $2x+2y+2z-3=0$

3) Soit I(x,y,z) son centre $\Rightarrow I\in P\cap Q\cap R$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ x+y-1=0 \\ 2x+2y+2z-3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$x=1 ;y=0 et z=1/2

Donc I(1 ;0 ; ½)

Le rayon est r = IO=$\frac{\sqrt{5}}{2}$

EX 22 :

1) (S) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$

(S) de centre I(1,1,1) et de rayon R=4

d(I,P)= $\frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$<R $\Rightarrow$ (S)$\cap$P est

le cercle de rayon r = $\sqrt{16-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{44}{3}}$

et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P $\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{Iw}=k.\overrightarrow{N_P}\\ w\in P\end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$$\Rightarrow\begin{cases} x=1+k \\ y=1+k \\ z=1+k \\ x+y+z-1=0\end{cases} \Rightarrow k=-2/3$$

$\Rightarrow$W(1/3 ,1/3 ,1/3)

(S)$\cap$P est le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{44}{3}}$ et de centre le point W(1/3,1/3,1/3)

2)

(S) $(x-3/2)^2+(y+5/2)^2+(z-1/2)^2=35/4$

(S) de centre I(3/2,-5/2,1/2) et de rayon R=$\frac{\sqrt{35}}{2}$

d(I,P)= $\frac{\left|\frac{3}{2}-5+\frac{3}{2}+5\right|}{\sqrt{14}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$<R $\Rightarrow$ (S)$\cap$P est

le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{35}{4}-\frac{9}{14}}=\sqrt{\frac{227}{28}}$

et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P $\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{Iw}=k.\overrightarrow{N_P}\\ w\in P\end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$$\Rightarrow\begin{cases} x=3/2+k \\ y=-5/2+2k \\ z=1/2+3k \\ x+y+z-1=0\end{cases} \Rightarrow k=-3/14$$

$\Rightarrow$W(9/14 ,-41/14 ,-1/7)

(S)$\cap$P est le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{227}{28}}$ et de centre le point W(9/14 ,-41/14 ,-1/7)

EX23 :

3)(S) $(x-1)^2+(y+3/2)^2+(z-1/2)^2=4$

(S) de centre I(1,3/2,1/2) et de rayon R=2

d(I,P)= $\frac{|1+3+1-1|}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$<R $\Rightarrow$ (S)$\cap$P est

le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P $\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{Iw}=k.\overrightarrow{N_P}\\ w\in P\end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$$\Rightarrow\begin{cases} x=1+k \\ y=3/2+2k \\ z=1/2+2k \\ x+2y+2z-1=0\end{cases} \Rightarrow k=-4/9$$

$\Rightarrow$W(5/9 ,11/18 ,-7/18)

(S)∩P est le cercle de rayon $r = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ et de centre le point W(5/9 ,11/18 ,-7/18)

4)P : $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha - \beta & (1) \\ y = -1 + \beta & (2) \\ z = 1 - \alpha & (3) \end{cases}$

(2) et (3)⇒α=1-z et β=1+y

Remplaçons dans (1) on aura :

x= 1+2(1-z)-(1+y) ⇒ P a pour équation cartésienne :x+y+2z-2=0

(S) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=5$

(S) de centre I(-1,2,2) et de rayon R=$\sqrt{5}$

d(I,P)=$\frac{|-1+4+2-2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$<R ⇒ (S)∩P est le cercle de rayon $r = \frac{\sqrt{14}}{2}$ et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P ⇒$\begin{cases} \overrightarrow{Iw} = k.\overrightarrow{N_P} \\ w \in P \end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

⇒$\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 + k \\ z = 2 + 2k \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ ⇒k= -1/2

⇒W(-3/2 ,1 ,3/2)

(S)∩P est le cercle de rayon r = $\frac{\sqrt{14}}{2}$ et de centre le point W(-3/2 ,1 ,3/2)

EX 24 :

1) (S) est de centre A et A∊ (ABC)⇒ (S)∩(ABC) est le cercle de centre A , de même rayon 1 et situé dans le plan (ABC).

2) Soit Q le plan passant par A et perpendiculaire à(AC).
   (S)∩Q est le cercle de centre A,de rayon 1 et situé dans le plan Q.
3) Soit P le plan passant par C et perpendiculaire à(AC).
   AC=$\sqrt{2}$ >R=1⇒ (S)∩Q=∅

EX 25 : A(1,-1,2) ; B(-1,1,-2)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$;

(AB) :$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$ $, t \in IR$

2) a/

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$:vecteur normal à P⇒

P :-2x+2y-4z+d=0

A(1,-1,2) ∊P⇒-2-2-8+d=0⇒d=12

P : -2x+2y-4z+12=0

P : x-y+2z-6=0

b/ Q : x-y+2z **+6=0**

B(-1,1,-2)

-1-1+2×(-2)+6=-6+6=0⇒B∊Q

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal à chacun des plans P et Q ⇒ P//Q

3) I(a,b,c)

a/ A:le projeté orthogonal de I sur P

$\Rightarrow$ (AI) $\perp$ P or on a (AB)$\perp$P

$\Rightarrow$ (AI) //(AB) et par suite I$\in$(AB)

b/ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} a-1 \\ b+1 \\ c-2 \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Rightarrow$

$\begin{vmatrix} -2 & a-1 \\ 2 & b+1 \end{vmatrix} = 0et\ \begin{vmatrix} 2 & b+1 \\ -4 & c-2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$-2(b+1)-2(a-1)=0 et 2(c-2)+4(b+1)=0

$\Rightarrow$ b+a=0 et c+2b=0

$\Rightarrow$b= - a et c = 2a

c/ (S) est de centre I et de rayon R=IB

(S)$\cap$P est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $IB^2=IA^2+(2\sqrt{3})^2 \Rightarrow IB^2-IA^2=12$

$$\left.\begin{array}{l} IB^2-IA^2=12 \\ IB^2=(a+1)^2+(b-1)^2+(c+2)^2 \\ IA^2=(a-1)^2+(b+1)^2+(c-2)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a-b+2c=3$$

d/ on a $\begin{cases} b=-a \\ c=2a \\ a-b+2c=3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ a=1/2 ; b = - ½ et c = 1

I(1/2 ; - ½ ; 1)

(S) est une sphère de centre I(1/2; -½ ;1)

Et de rayon R=IB=$\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow$ (S) : $(x-1/2)^2+(y+1/2)^2+(z-1)^2=27/2$

<u>EX 26 :</u>

A(6,0,0) ;B(0,6,0) ;C(0,0,6) D(-2,-2,-2)

1) a/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A,B et C ne sont pas alignées.

b/ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P$\Rightarrow$ $\vec{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal àP

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow P : x+y+z+d=0 \\ A\in P \Rightarrow 6+d=0 \Rightarrow d=-6 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$P :x+y+z-6=0

c/ $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = -2 . \vec{N}$ $\Rightarrow\overrightarrow{OD}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires et par suite (OD) et P sont perpendiculaires.

d/ (OD) :$\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t \\ z=-2t \end{cases}$;t $\in$ IR

e/ H(x,y,z)$\in$(OD)$\cap$P $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t \\ z=-2t \\ x+y+z-6=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ -6t-6=0$\Rightarrow$ t=-1 $\Rightarrow$H(2 ;2 ;2)

* AH=BH=CH= $2\sqrt{6}$

f/ (OD) est perpendiculaire à P et (OD) passe par H : centre du cercle ζ circonscrit au triangle ABC ; alors (OD) est l'axe de ζ.

2) a/ M(x,y,z)∈Q ⇔ CM= DM

⇔ $x^2+y^2+(z-6)^2 =(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2$

⇔4x+4y+16z-24=0

⇔x+y+4z-6=0

Q : x+y+4z-6=0

b/ M(x,y,z)∈(OD)∩Q ⇔

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t \\ z=-2t \\ x+y+4z-6=0 \end{cases}$$

⇒ (-2t)+(-2t)+4(-2t)-6=0⇒-12t-6=0

⇒t= - 1/2⇒ x=y=z=1

(OD)∩Q={I(1,1,1)}

3/a/ (S) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2= 27$

b/ IA=IB=IC=ID= $3.\sqrt{3}$ ⇒ A,B,C et D appartiennent à (S)

c/ A,B et C appartiennent à (S)∩P⇒(S)∩P est le cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

Ex 27 :

1) S : $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$

⇔ $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$

⇒ S de centre I(-1,1,0) et de rayon R=2

2) P_m :x+z+m=0

a/ P_0 : x+z=0

$d(I,P_0)=\frac{|-1+0|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<R$ ⇒ $(S)\cap P_0$ est le cercle ζde rayon $r=\sqrt{4-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$ et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P_0 ⇒$\begin{cases} \overrightarrow{Iw}=k.\overrightarrow{N_0} \\ w\in P \end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_0}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P_0

$$\Rightarrow\begin{cases} x=-1+k \\ y=1 \\ z=k \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow k=½$$

⇒w(-1/2;1;1/2)

b/ $\overrightarrow{N_0}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P_0

$(\vec{\imath}-\vec{k})\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{N_0}.(\vec{\imath}-\vec{k})$=1+0-1=0⇒$\vec{\imath}-\vec{k}$ est un vecteur de P_0. (1)

$\overrightarrow{N_0}.\vec{\jmath}$ =0+0+0=0 ⇒$\vec{\jmath}$est un vecteur de P_0. (2)

$(\vec{\imath}-\vec{k}).\vec{\jmath}$ =0+0+0=0⇒ $(\vec{\imath}-\vec{k})\perp\vec{\jmath}$ (3)

$\|\vec{\jmath}\|=1$ $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}-\vec{k})\right\|=1$ (4)

(1),(2),(3) et (4) ⇒ $(O;\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}-\vec{k});\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé de P_0

c/ on a :

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \\ \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{X}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k}) + Y\vec{\jmath}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{X}{\sqrt{2}} = x \\ Y = y \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} = z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ X=$\sqrt{2}x = -\sqrt{2}z$ et Y=y

w(-1/2;1;1/2) le centre de ζ

$\Rightarrow$w($-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1) dans (O; $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k}); \vec{\jmath}$)

ζ est de rayon $\sqrt{\frac{7}{2}}$ donc

ζ : $(X+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (Y-1)^2 = \frac{7}{2}$ dans le repère (O; $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k}); \vec{\jmath}$)

3) $d(I,P_m)=\frac{|-1+0+m|}{\sqrt{2}} = \frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$ et R=2

$d(I,P_m) < R \Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} < 2$

$\Leftrightarrow |m-1| < 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m-1 < 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{2} < m < 1+2\sqrt{2}$

- Pour $m\in]1-2\sqrt{2}\,;1+2\sqrt{2}[$ S et P_m sont sécants
- Pour $m\in\{1-2\sqrt{2}\,;1+2\sqrt{2}\}$ S et P_m sont tangents
- Pour $m\in]-\infty\,;1-2\sqrt{2}\,[\,\boldsymbol{\cup}\,]1+2\sqrt{2};+\infty[$ S et P_m sont disjoints

EX 28 : A(0,4,-1) ;B(-2,4,-5) ;C(1,1,-5)

Et D(1,0,-4)

1) Désignons par P,Q et R les plans médiateurs respectifs de [AB],[BC]et [AD]

- $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\Rightarrow$ P : 2x+4z+d=0

A*B=I(-1,4,-3)$\in$ P$\Rightarrow$-2-12+d=0

$\Rightarrow$ d= 14 $\Rightarrow$ P: 2x+4z+14=0

$\Rightarrow$ **P: x+2z+7=0**

- M(x,y,z) $\in$Q$\Leftrightarrow$ BM=CM

$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z+5)^2$

$\Leftrightarrow$ 6x -6y +18 =0 $\Leftrightarrow$ x – y + 3= 0

$\Rightarrow$ **Q: x-y +3=0**

- $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à R

D*A=J(0,5 ;2 ;-2,5) $\in$R

M(x,y,z)$\in$ R$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{DA}$ =0

$\Leftrightarrow$-1 (x-0,5)+4(y-2)+3(z+2,5)=0

$\Leftrightarrow$ -x+ 4.y+3z= 0

R : -x+ 4.y+3z= 0

2) M(x,y,z)$\in$P$\cap$Q$\cap$R $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + 2z + 7 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=-\frac{1}{2}(x+7) \\ y=x+3 \\ x-4(x+3)+\frac{3}{2}(x+7)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=-\frac{1}{2}(x+7) \\ y=x+3 \\ -3x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **P∩Q∩R={I(-1,2,-3)}**

S est de rayon IA= 3

$\Rightarrow$ **S : $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$**

EX 29 :

A(0,6,0) ; B(0,0,8) ; C(4,0,8)

1) a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=0+0+0=0$ d'où (BC) $\perp$ (BA)

b) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0+0+0=0$

d'où (OA) $\perp$ (OC)

c) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OB}=0$ d'où (BC) $\perp$ (OB)

$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(BA)\\(BC)\perp(OB)\end{array}\right\}\Rightarrow$ (OB) est perpendiculaire au plan (OAB)

2) $\vec{V}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}\right|$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}48\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$

$V=\frac{1}{6}|192|=32$

3) O,A,B et C ne sont pas coplanaires d'où O,A,B et C appartiennent à une meme sphère (S)

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+d=0$

$0\in(S)\Rightarrow d=0$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z=0$

$A\in(S)\Rightarrow 36+6\beta=0 \Rightarrow \beta=-6$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x-6y+\gamma z=0$

$B\in(S)\Rightarrow 64+8\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-8$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x-6y-8z=0$

$C\in(S)\Rightarrow 16+64+4\alpha-64=0\Rightarrow \alpha=-4$

d'où (S): $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z=0$

(S) : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=29$

d'où (S) est de centre I(2,3,4) de rayon $\sqrt{29}$

(Rq: on pourra considérer comme dans l'ex:18)

4) M$(0,0,\alpha)$

a) le plan P contenant M et perpendiculaire à (OB) a pour équation : $\boxed{z=\alpha}$

la droite (OC) passe par O et de vecteur directeur

$$(OC) : \begin{cases} x=4k \\ y=0 \\ z=8k \end{cases} ,k\in\mathbb{R}$$

$$P\cap(OC) : \begin{cases} x=4k \\ y=0 \\ z=8k \\ z=\alpha \end{cases}$$

$k=\dfrac{\alpha}{8}$

d'où $N(\dfrac{\alpha}{2},0,\alpha)$

de meme : $P(\dfrac{\alpha}{2},6-\dfrac{3\alpha}{4},\alpha)$ et $Q(0,6-\dfrac{3\alpha}{4},\alpha)$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ d'où MNPQ est un parallélogramme

$$\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix} 0 \\ 6-\dfrac{3\alpha}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MQ}=0$ d'où $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{MQ}$

<u>conclusion:</u> MNPQ est un rectangle

b) * (OB) perpendiculaire au plan (MNPQ) d'où (OB) $\perp$ (MP)

$$* \ \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} \alpha/2 \\ 6-\dfrac{3\alpha}{4} \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(MP) $\perp$ (AC) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 4(\dfrac{\alpha}{2})-6(6-\dfrac{3\alpha}{4})=0 \Leftrightarrow 2\alpha-36+\dfrac{9}{2}\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{72}{13}$

c) $MP^2=\dfrac{\alpha^2}{4}+(6-\dfrac{3\alpha}{4})^2$

on pose : $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+(6-\dfrac{3x}{4})^2$

$f'(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}(6-\dfrac{3x}{4})=\dfrac{13x}{8}-\dfrac{18}{2}$

x	0		72/13		8
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	f(72/13)	↗	

MP est minimale pour $\alpha=\dfrac{72}{13}$

EX 30 :

$J(0,1,0)$

$\overrightarrow{OM}=\alpha.\vec{k}$

$\overrightarrow{AN}=\beta.\vec{i}$

1) $S: x^2+(y-1)^2+z^2=1$

2) $M(0,0,\alpha)$ et $N(\beta,2,0)$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$

$(MN):\begin{cases}x=k\beta\\y=2k\\z=\alpha-k\alpha\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$

3) a) (MN) tangente à (S) ssi la distance de J à la droite (MN) est égale R=1

$\Leftrightarrow \dfrac{\|\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\|}{\|\overrightarrow{MN}\|}=1$

$\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}0\\-1\\\alpha\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+4}$

$\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\beta\\\beta\end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2}$

(MN) tangente à (S) $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\|=\|\overrightarrow{MN}\|$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+4=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=4$

b) $\{Q\}=(MN)\cap S$

$Q(x,y,z)$ tq : $\begin{cases}x=k\beta\\y=2k\\z=\alpha-k\alpha\\x^2+(y-1)^2+z^2=1\end{cases}$ d'où

$k^2\beta^2+(2k-1)^2+\alpha^2(1-k)^2=1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2+4k^2-4k+1+\alpha^2(1-2k+k)^2=1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2+4k^2-4k+\alpha^2-2\alpha^2k+\alpha^2.k^2=0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+4).k^2-(4+2\alpha^2)k+\alpha^2=0$

$\Delta'=(2+\alpha^2)^2-\alpha^2(\alpha^2+\beta^2=4)$

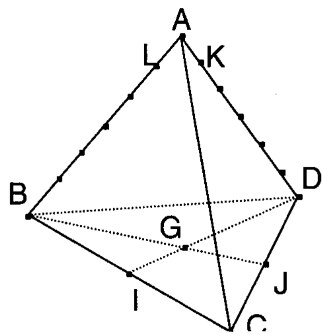
$\Delta'=4+4\alpha^2-\alpha^2\beta^2-4\alpha^2=4-(\alpha^2\beta^2)$

$\Delta'=4-4=0$

d'où : $k=\dfrac{2+\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+4}$

$Q\left(\dfrac{(2+\alpha^2)\beta}{\alpha^2+\beta^2+4},\dfrac{2(2+\alpha^2)}{\alpha^2+\beta^2+4},\dfrac{2+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+4}\right)$

EX31 :



$5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

$(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$: repère de (ξ)

1) A(0,0,0) ; B(1,0,0) ; c(0,1,0) ; D(0,0,1)

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

d'où $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$I=B*C \Rightarrow I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$J=C*D \Rightarrow J(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

* $5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$\Rightarrow 6\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

d'où $K(0,0,\frac{1}{6})$

* $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\Rightarrow L(\frac{1}{6},0,0)$

2)* $K(0,0,\frac{1}{6})$; $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/6\end{pmatrix}$

d'où (IK): $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\alpha\\ y=\frac{1}{2}\alpha\\ z=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\alpha\end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

*

$L(\frac{1}{6},0,0)$; $\overrightarrow{LJ}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; d'ou (LJ) : $\begin{cases}x=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\beta\\ y=\frac{1}{2}\beta\\ z=\frac{1}{2}\beta\end{cases}$ $\beta\in IR$

*** (AG) :** $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\gamma\\ y=\frac{1}{3}\gamma\\ z=\frac{1}{3}\gamma\end{cases}$ $(\gamma\in IR)$

3) M(x,y,z)∈(LJ)∩(AG)⇔ $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\gamma\\ y=\frac{1}{3}\gamma\\ z=\frac{1}{3}\gamma\\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\beta=\frac{1}{3}\gamma\\ \frac{1}{2}\beta=\frac{1}{3}\gamma\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{3}\gamma \\ y=\frac{1}{3}\gamma \\ z=\frac{1}{3}\gamma \\ \gamma=\frac{3}{8} \\ \beta=\frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=\frac{1}{8} \\ z=\frac{1}{8}\end{cases}$$

Conclusion : (LJ)∩(AG)={Q($\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$)}

Pour vérifier que le point Q∈(IK) ; il suffit de signaler qu'en remplaçant α par ¼ dans l'équation de (IK) on obtient x=y=z=1/8

Alors on peut conclure que les droites (IK),(JL) et (AG) sont concourantes en Q($\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$).

<u>**EX 32**</u> : B(1,1,0)

P : x+y-a=0 ; $a \in]0,1[$

1)A(1,0,0) ;C(0,1,0) S(0,0,1)

$\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ D'où

$$(SA):\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=0 \\ z=-\alpha\end{cases} ;\ (\alpha\in IR)$$

$\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ D'où

$$(SB):\begin{cases} x=\beta \\ y=\beta \\ z=1-\beta\end{cases} ;\ (\beta\in IR)$$

$\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ D' où

$$(SC):\begin{cases} x=0 \\ y=1+\delta,\ \delta\in IR \\ z=-\delta\end{cases}$$

$$(OC):\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0\end{cases} ,(t\in IR)$$

$$(OA):\begin{cases} x=k \\ y=0,(k\in IR) \\ z=0\end{cases}$$

2) $*\{I\}=P\cap(SA)$

I(x ,y ,z) tel que :

$$\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=0 \\ z=-\alpha \\ x+y=a\end{cases}$$

$(1+\alpha)+0=a \Rightarrow \alpha=a-1$

D'où I(a,0,1-a)

$*\{J\} = (SB) \cap P$

J(x ,y ,z) tq :

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = 1 - \beta \\ x + y = a \end{cases}$$

$\beta + \beta = a \Rightarrow \beta = \frac{a}{2}$

D'où $J\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 1 - \frac{a}{2}\right)$

De même :

K(0, a , 1-a) ; L(0,a,0) ; M(a,0,0)

b) $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$

on a :

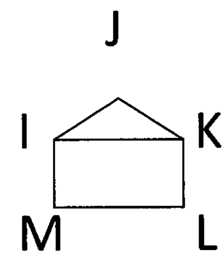
$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{ML}$ *d'oùIKLM est un parallélogramme*

$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IM} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{IM}$

D'où IKLM est un rectangle

c)A=aire(IKLM)+aire(IJK)

= A1+A2



A1=IKxIM carIKLMestun rectangle.

$A_1 = \sqrt{2a^2}.\sqrt{(a-1)^2} = a.\sqrt{2}.|a-1|$

$A_1 = \sqrt{2}.a(1-a)$

$A_2 = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\right\|$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{-\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2} \\ \frac{a^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}}$$

$$A_2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

D'où $A = A_1 + A_2 = \frac{a\sqrt{2}}{4}.(4-3a)$

3) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{4}(4-3x)$

a) $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-3x)$

X	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

f *admet* $\frac{\sqrt{2}}{3}$ *comme maxime absolu en* $\frac{2}{3}$

$A = f(a)$ D'où A est maximale Pour

$a = \frac{2}{3}$

*soit Gle centre de gravité de OAC

$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 0 \Rightarrow$

$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ d'où $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

Pour $a = \frac{2}{3}$

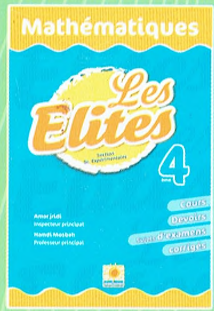
$P: x + y = \frac{2}{3}$

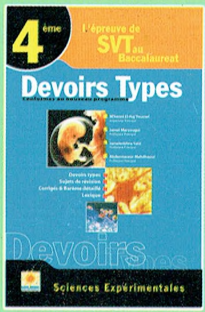
On a : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow G \in P$

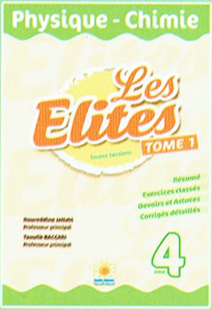
Collection

CMS

1 ère - 2 ème - 3 ème - 4 ème







Prix : 8000

I.S.B.N : 978-9938-808-08-7

CHAMS EDITION