EDITION 2006

CONFORME AU NOUVEAU BAC

transMATH

Tle S

Obligatoire

Nathan

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

1700

1682 Dans un assez court article de la revue savante, *Acta Eruditorum* publiée à Leipzig, **Wilhelm Gottfried Leibniz** donne les règles du calcul différentiel, comme la différentielle d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions. Suivent dans la même revue et sur plusieurs années différents articles de Leibniz, qui lient le calcul différentiel et le calcul intégral, considéré comme le calcul inverse des tangentes. Il utilisait la notation *omn* en 1675, et la remplace par l'écriture $\int$, un grand S pour la première lettre de *summa*, « somme » en latin.
Le marquis **Guillaume de l'Hospital** publie à Paris, et sous les auspices de l'Académie des sciences, l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. C'est le premier traité didactique sur le calcul différentiel.

1650

1660-1670 Dans ses *Lectiones geometricæ*, publiées en 1670, **Isaac Barrow**, relie l'aire sous une courbe algébrique à la primitive de la fonction, comme **James Gregory** dans sa *Geometriæ pars universalis* publiée à Venise en 1667. Mais dans des manuscrits remontant à 1666, **Isaac Newton** se débarrasse du caractère algébrique de la courbe. *La Méthode des fluxions et des séries infinies* ne verra le jour en librairie dans une version anglaise qu'en 1736, et en traduction française, effectuée par le naturaliste Buffon seulement quatre ans plus tard.

Newton

1659 **Blaise Pascal**, dans son *Traité des sinus du quart du cercle*, donnant aux indivisibles la forme dite des sommes de Riemann, obtient ce que l'on interprète comme la formule d'intégration par parties.

1600

1647 Publication à Anvdans de l'*Opus geometricum* du jésuite **Grégoire de Saint-Vincent**, qui obtient par la méthode d'exhaustion le logarithme comme primitive de la fonction $\frac{1}{x}$.

1637 **René Descartes**, dans sa *Géométrie* publiée avec le *Discours de la méthode à Leyde*, sans infiniment petits, fournit un moyen pour trouver la tangente à toute courbe exprimée par une équation algébrique. **Pierre de Fermat** donne une méthode utilisant des minima et des maxima. Elle sera publiée à Toulouse, après sa mort, par son fils en 1679.

1635 Dans une *Géométrie des indivisibles* publiée en latin à Bologne, le jésuite **Cavalieri** propose une manière d'additionner des familles de droites, « toutes les ordonnées » sous une courbe, afin d'en obtenir l'aire, et fournit douze ans plus tard l'intégrale définie des fonctions puissances entières.

1000

XVI^e siècle Dans une *Statique* publiée en 1586 à Leyde, **Simon Stevin** reprend la méthode d'exhaustion pour le calcul des centres de gravité, comme le fait aussi **Luca Valerio** dans son *De Centro gravitatis* publié à Rome en 1604.

X^e et XI^e siècles Les mathématiciens arabes **al-Karajī** et **al-Samaw'al** étendent les calculs d'Archimède sur les suites pour obtenir des intégrales.

−500

Vers 300 avant J.-C. Au livre XII des *Éléments* **d'Euclide** est expliquée la méthode d'exhaustion. Elle permet de calculer l'aire d'un cercle et le volume délimité par une sphère. Dans des textes comme la *Mesure du cercle*, ou la *Quadrature de la parabole*, **Archimède** montre comment la méthode d'exhaustion peut faire usage des suites. C'est le premier lien rigoureusement établi entre des calculs numériques par récurrence et le calcul intégral en formation.

A. FONCTIONS

OBJECTIFS

f est la fonction définie sur R par :

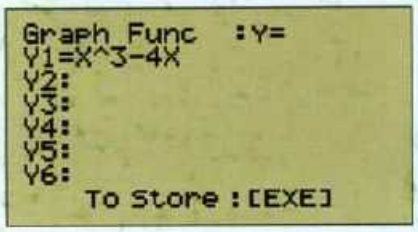
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x + 2$$

On veut obtenir :

- Un tableau de valeurs (ex : les valeurs de $f(x)$ pour x variant entre – 2 et 3 de 0,1 en 0,1).
- Quelques valeurs isolées (ex : $f(27)$; $f(-5)$ et $f(3,84)$).
- La courbe représentative de la fonction f.

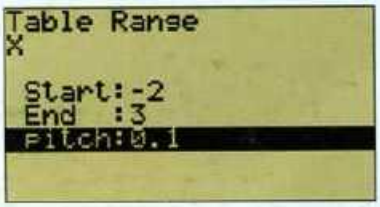
1. Enregistrement de la fonction

Choisir le mode TABLE dans le menu principal.
Se placer sur Y1 à l'aide des touches de curseur (▼ et ▲) et taper l'expression de $f(x)$ (attention aux règles de priorité).
Appuyer sur EXE.



2. Tableau de valeurs

La fonction étant enregistrée dans Y1, toujours dans le mode TABLE, choisir l'option RANG (F5) pour effectuer les réglages.



Start : -2 EXE (valeur de départ)
End : 3 EXE (valeur de fin)
Pitch : 0,1 EXE (pas de 0,1)
Sortir de l'écran Table Range par Exit.
Avec l'option TABL (F6), on obtient le tableau souhaité dans lequel on peut se déplacer avec les touches de curseur (◄, ►, ▲, ▼).

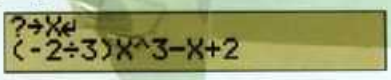
3. Calcul de valeurs isolées

- **Première méthode : en utilisant le tableau**

La fonction étant dans Y1 (ou une autre ligne que l'on active), taper dans le tableau la valeur de x puis EXE, la valeur de $f(x)$ apparait dans la colonne Y correspondante.

- **Deuxième méthode : à l'aide d'un programme**

À partir du menu principal, choisir le mode PRGM puis l'option NEW.
Choisir un nom de programme (ou un numéro).
Taper le programme :

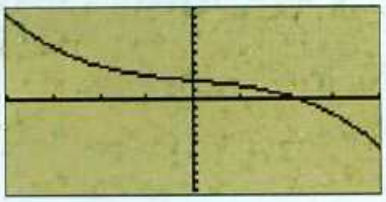


Sortir de l'éditeur de programme par Exit.
(si la fonction est déjà saisie dans Y1, on peut taper Y1 à la deuxième ligne du programme mais il faut utiliser VARS / GRPH / Y pour la saisie du Y).
Pour exécuter le programme, on le sélectionne avec PRGM / Program list et les touches de curseur puis EXE.
Le programme affiche « ? » pour demander la valeur de x.

Taper 27 puis EXE pour obtenir $f(27)$.
Taper EXE pour obtenir à nouveau l'affichage de « ? » et recommencer.

4. Courbe

La fonction est dans Y1.
Utiliser GRAPH puis DRAW (on peut aussi passer par TABLE / TABL / G-CON).
Pour changer les unités, utiliser V-Windows.
Choisir des valeurs pour Xmin, Xmax et Scale (unité), Ymin, Ymax, Scale.



Sortir avec Exit.

B. SUITES

1. Suites données par $u_n = f(n)$

Ce qui a été dit en A.1 et A.2 pour les fonctions reste valable en prenant un pas de 1 pour le tableau de valeurs.

2. Suites données par $u_{n+1} = f(u_n)$

- On peut aisément programmer le calcul de u_n pour une valeur donnée de n. L'algorithme et le programme sont donnés dans le TD2 du chapitre 6.
- Les calculatrices possèdent un utilitaire prévu pour le calcul des termes de certaines suites définies par récurrence. Dans le menu principal, choisir le mode RECUR. On peut programmer par exemple les suites définies par a_0 et une relation du type $a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$.

C. LISTES

1. L'éditeur de listes

On peut stocker des valeurs dans des listes qui fonctionnent comme des tableaux aux cases numérotées.

a. Édition manuelle

● En utilisant le mode LIST, on peut rentrer les valeurs d'une liste une à une dans un tableau.

b. Édition dans un programme

● En utilisant le mode RUN, on peut rentrer une série de valeurs.

EXEMPLE

{2,5,10,3,2,7,5} → List 1 a pour effet d'initialiser List 1 qui contient la séquence des 7 valeurs données. La première des valeurs est désignée par List1[1] , la deuxième par List1[2]...

● Une liste peut aussi être initialisée par l'instruction Seq(...) que l'on trouve dans LIST / OPTN / LIST.

EXEMPLE 1

Seq(0,X,1,6,1) crée une liste de 6 cases numérotées de 1 à 6 avec un pas de 1 et initialise toutes les cases à 0.

X	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0

EXEMPLE 2

Seq(Y1,X,0,2,0.2) créé une liste de 11 cases contenant les valeurs de 0 à 2 avec un pas de 0,2, chaque case contenant la valeur prise par la fonction en ce point (attention : il faut utiliser VARS pour la saisie du Y).

x	1	0,2	0,4	...	1,8	2
$f(x)$	$f(0)$	$f(0,2)$	$f(0,4)$	...	$f(1,8)$	$f(2)$

2. Utilisation des listes en statistique

Une série statistique peut être stockée dans une liste afin d'utiliser des instructions pour le traitement des données.

● Il est possible de procéder au classement (ordre croissant ou décroissant) avec STAT ▶.

● Dans le menu STAT / CALC / 1VAR, on obtient les principaux paramètres d'une série (voir *Mémento de Seconde*, fiche 9). Il est aussi possible de calculer dans le mode RUN, le minimum : Min(list1) ; le maximum : Max(list1) ; la moyenne : Mean(list1) ; la médiane : Med(list1) ; la somme : Sum(list1)...
L'accès à ces fonctions a lieu par OPTN / LIST / ▶.

D. NOMBRES AU HASARD

Dans le menu RUN / OPTN / PROB, l'instruction Ran # donne un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[.
Pour simuler un tirage aléatoire d'un nombre entier entre 1 et N, on utilise Int(N Ran # + 1).
Par exemple, Int(6Ran # + 1) simule le lancer d'un dé parfait.

EXEMPLE

Programme simulant N lancers d'un dé et plaçant les fréquences d'apparition de chaque face dans une liste.

Algorithme (et commentaires) :

Lire N
(N est le nombre de tirages)
Créer et initialiser Liste 1 à 0
(On crée une liste de 6 cases toutes mises à 0)
Pour K de 1 à N Faire
X ← Nb au hasard entre 1 et 6
(On tire un nb au hasard et on le met dans X)
Liste1[X] ← Liste1[X] + 1
(La case du n° X est augmentée de 1)
Fin de Faire
Liste1 ← Liste1/N
(On calcule la fréquence de chaque numéro)
Afficher Liste 1

Le programme :

```
======NLANCERS======
"NB LANCERS":?→N
Seq(0,X,1,6,1)→List1
For 1→K To N
Int (6xRan#+1)→X
```

```
1+List 1[X]→List 1[X]
Next
List 1÷N→List 1
List 1
TOP BTM SRC MENU SYBL
```

Un résultat obtenu :

```
Ans
1 0.1866
2 0.1433
3 0.16
4 0.19
5 0.1833
0.1866666667
```

EDITION 2006
PROGRAMME 2002

transMATH

Term S

obligatoire

Raymond Barra – Jean Morin
André Antibi

Par : Raymond Barra
Jean-Michel Barros
Patrick Bénizeau
Jacques Burgaud
Jean Morin
David Nivaud

Nathan

SOMMAIRE

1 Rappels sur les suites Récurrence 9

1. Généralités sur les suites : rappels 10
2. Le raisonnement par récurrence 12
Exercices et problèmes 14

2 Fonctions : limites et continuité 19

Activités 20
1. Limites à l'infini 22
2. Limites en un réel a 24
3. Opérations sur les limites 26
4. Théorèmes de comparaison 28
5. Limite d'une fonction composée 30
6. Asymptote oblique 30
7. Continuité 32
8. Fonctions continues et résolution d'équations ..... 34 et 36
Travaux dirigés 39
Exercices et problèmes 44

3 Dérivation 53

1. Définitions (rappels) 54
2. Dérivées des fonctions usuelles (rappels) 56
3. Application de la dérivation 58
4. Dérivée d'une fonction composée ..... 60 et 62
5. Dérivées successives 62
Travaux dirigés 65
Exercices et problèmes 72

4 La fonction exponentielle 83

Activités 84
1. La fonction exponentielle 86
2. Propriétés de la fonction exponentielle 88
3. Étude de la fonction exponentielle ..... 90 et 92
4. Équations différentielles 94
Travaux dirigés 97
Exercices et problèmes 101

5 La fonction logarithme népérien 115

1. Le logarithme népérien 116
2. Logarithme d'un produit 118
3. Étude de la fonction ln ..... 120 et 122
Travaux dirigés 125
Exercices et problèmes 129

6 Les fonctions puissances Croissances comparées 143

1. Puissances réelles 144
2. Étude des fonctions $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ 146
3. La fonction racine n-ième 148
4. Croissances comparées 150
Travaux dirigés 153
Exercices et problèmes 155

7 Limites de suites 163

1. Limites de suites : rappels 164
2. Théorèmes sur les limites 166
3. Convergence des suites monotones 168
4. Suites adjacentes 170
Travaux dirigés 173
Exercices et problèmes 177

8 Intégration et primitives 191

Activités 192
1. Notion d'intégrale sur un intervalle 194
2. Extension et premières propriétés 196
3. Encadrement, valeur moyenne 198
4. Primitives 200
5. Calculs de primitives 202
6. Calculs d'intégrales 204
Travaux dirigés 207
Exercices et problèmes 214

9 Éléments de combinatoire 235

Activités ... 236
1. Dénombrer des listes ... 238
2. Combinaisons ... 240
3. Formules ... 242
Travaux dirigés ... 245
Exercices et problèmes ... 247

10 Probabilités 253

1. Rappels ... 254
2. Probabilités conditionnelles ... 256
3. Probabilités totales ... 258
4. Indépendance ... 260
5. Expériences indépendantes ... 262
Travaux dirigés ... 265
Exercices et problèmes ... 269

11 Lois de probabilités 285

Activités ... 286
1. Loi binomiale ... 288 et 290
2. Lois de probabilités continues. Généralités ... 292
3. Deux lois particulières ... 294
4. Variables sans mémoire ... 296
Travaux dirigés ... 298
Exercices et problèmes ... 303

12 Les nombres complexes 315

Activités ... 316
1. Les nombres complexes ... 318
2. Conjugué d'un nombre complexe ... 320
3. Forme trigonométrique ... 322
4. Propriétés des modules et arguments ... 324
5. Forme exponentielle ... 326
6. Équation du second degré à coefficients réels ... 328
Travaux dirigés ... 331
Exercices et problèmes ... 333

13 Application des nombres complexes à la géométrie 345

Activités ... 346
1. Affixe d'un vecteur ... 348
2. Utilisation de l'affixe d'un vecteur ... 350
3. Écriture complexe de transformations ... 352
Travaux dirigés ... 355
Exercices et problèmes ... 360

14 Le produit scalaire dans l'espace 375

Activités ... 376
1. Produit scalaire dans le plan ... 378
2. Produit scalaire dans l'espace ... 380
3. Orthogonalité dans l'espace ... 382
4. Équation cartésienne d'un plan ... 384
Travaux dirigés ... 387
Exercices et problèmes ... 394

15 Droites et plans dans l'espace 403

Activités ... 404
1. Caractérisations barycentriques ... 406
2. Représentations paramétriques ... 408
3. Intersections de plans et de droites ... 410
4. Intersection de trois plans ... 412
Travaux dirigés ... 415
Exercices et problèmes ... 418

16 Travaux dirigés de géométrie 431

TD 1 Concours, milieux, alignements ... 432
TD 2 Égalités de longueurs. Orthogonalité ... 434
TD 3 Lieu géométrique ... 435
TD 4 Espace et orthogonalité ... 436
Exercices ... 438

• ***Problèmes de synthèse*** ... 440

Bloc méthodologique
- Le vocabulaire de la logique ... 448
- Types de problèmes et raisonnements ... 453
- Conseils pour les vrai ou faux ... 463
- Conseils pour les ROC ... 466

• ***Corrigés des exercices*** ... 469

• ***Lexique des rappels*** ... 478

• ***Index*** ... 480

À LA DÉCOUVERTE DE VOTRE MANUEL

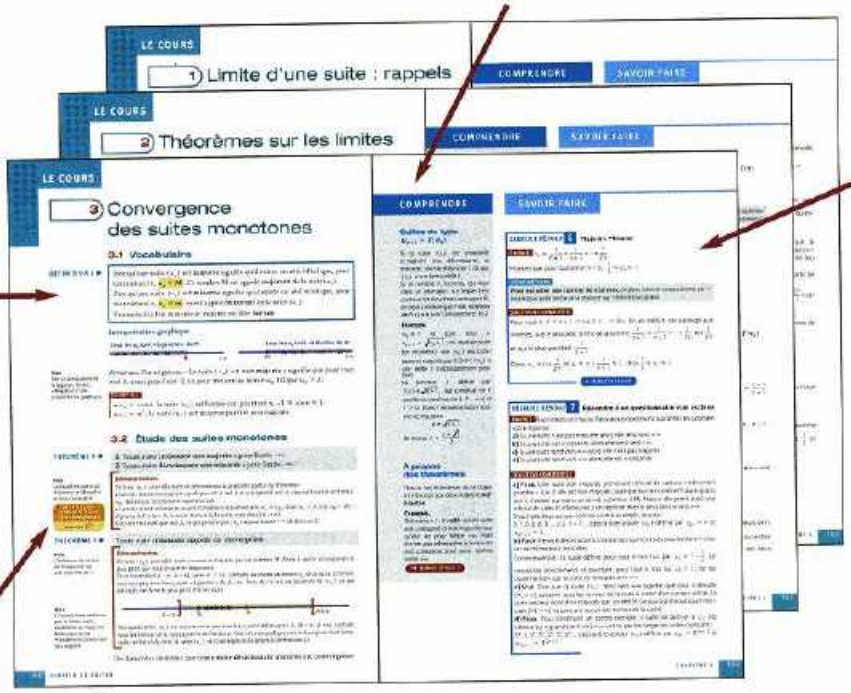
La structure d'un chapitre

ACTIVITÉS

Des activités pour faire le lien avec les acquis et aborder les notions nouvelles du chapitre.

COURS

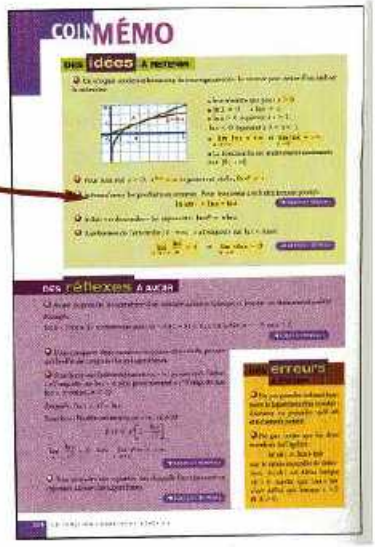
La rubrique *Comprendre* pour éclaircir les points délicats.



Les définitions à retenir et les théorèmes à connaître avec leur démonstration rigoureuse et complète.

Des exercices résolus qui mobilisent les savoir-faire de base.

Les démonstrations auxquelles correspondent des exercices de Restitution Organisée des Connaissances sont signalées par un logo.



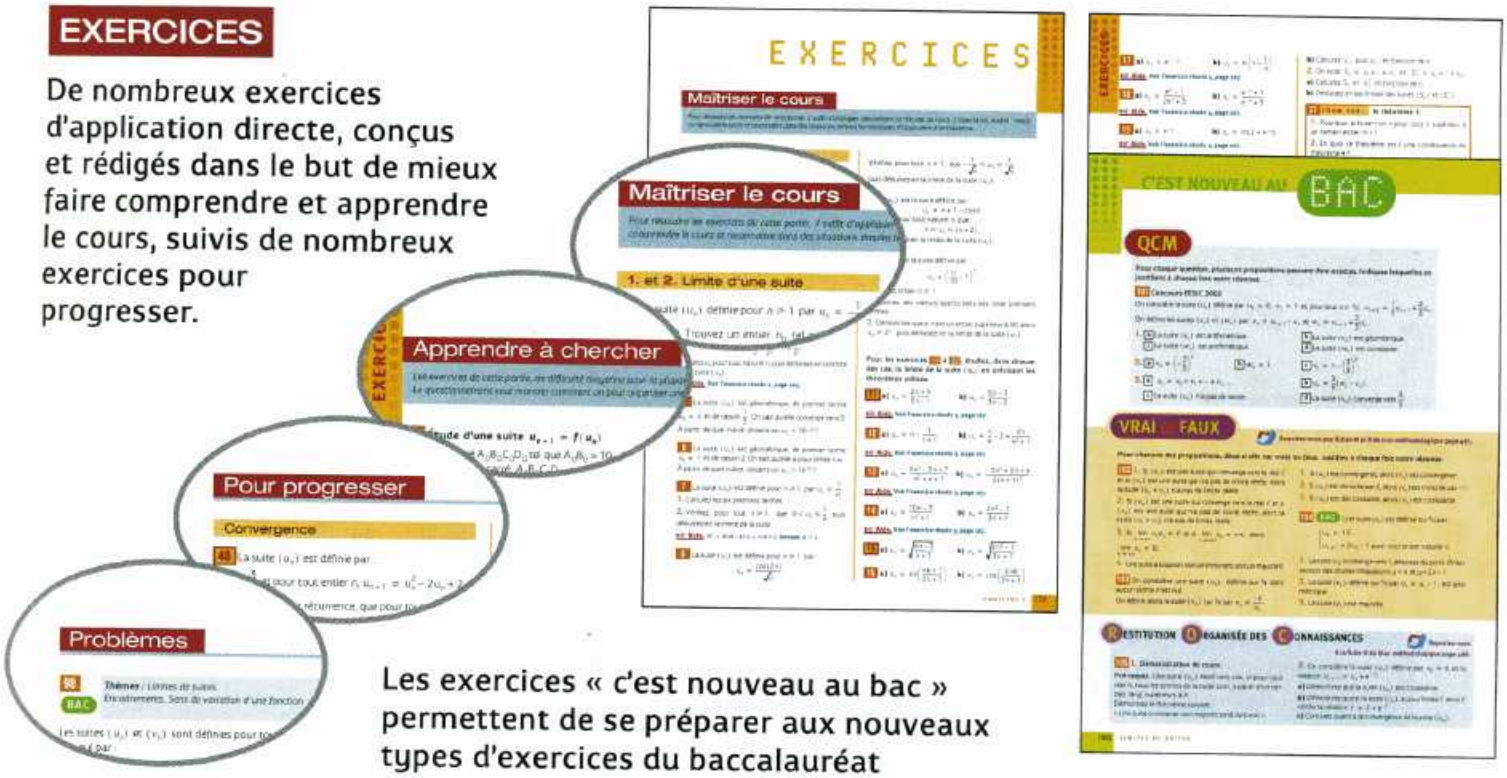
Un récapitulatif des points importants et des techniques à retenir dans le *Coin-mémo*.

TRAVAUX DIRIGÉS

Des exercices guidés afin d'acquérir les méthodes essentielles de résolution d'exercices.

EXERCICES

De nombreux exercices d'application directe, conçus et rédigés dans le but de mieux faire comprendre et apprendre le cours, suivis de nombreux exercices pour progresser.



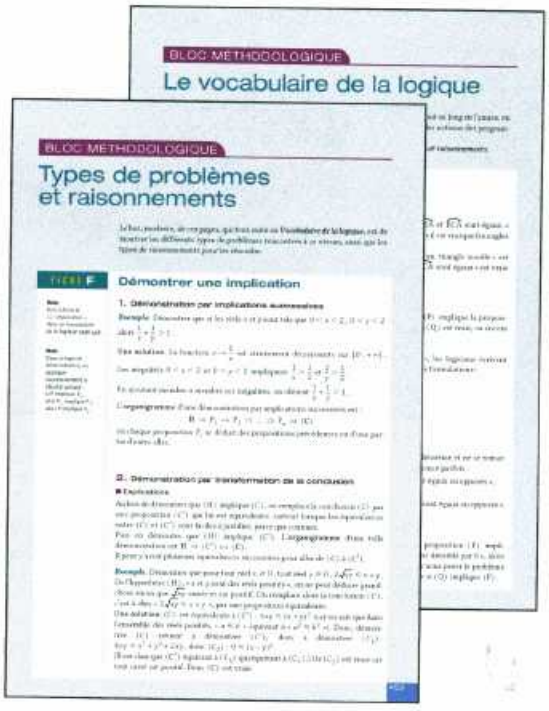
Les exercices « c'est nouveau au bac » permettent de se préparer aux nouveaux types d'exercices du baccalauréat

(BO n°19 du 8 mai 2003 et document d'accompagnement des programmes)

Les « plus » du manuel

Le **bloc méthodologique** comprend :

- Le **vocabulaire de la logique** pour comprendre les notions de logique utiles en Terminale S.
- Les **Types de problèmes et raisonnements**, pour acquérir les méthodes de résolution de problèmes.



- Des **fiches d'aide méthodologique** pour donner des pistes dans la résolution d'un problème ou d'un exercice.

Des **problèmes de synthèse** pour une application transversale des acquis.

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES TERM S

D'après le BO hors série n°4, 30 août 2001

Analyse

Contenus	
Limites de suites et de fonctions	**Étude des fonctions logarithmes et exponentielles**
Rappel de la définition de la limite d'une suite. Extension à la limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$. Notion de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel a. Théorème « des gendarmes » pour les fonctions. Limites de la somme, du produit, du quotient de deux suites ou de deux fonctions ; limite de la composée de deux fonctions, de la composée d'une suite et d'une fonction.	Fonction logarithme népérien ; notation ln. Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; comportement asymptotique. Fonctions $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$. Comportement asymptotique ; allure des courbes représentatives. Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme. Fonction racine n-ième.
Langage de la continuité et tableau de variations	**Suites et récurrence**
Continuité en un point a. Continuité d'une fonction sur un intervalle. Théorème (dit des *valeurs intermédiaires*) : « soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$ ».	Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée. Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes. Théorème de convergence des suites croissantes majorées.
Dérivation	**Intégration**
Rappels sur les règles de dérivation et sur le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction. Application à l'étude de la fonction tangente. Dérivation d'une fonction composée.	Pour une fonction f continue positive sur $[a\,;\,b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)$ comme *aire sous la courbe.* Valeur moyenne d'une telle fonction. Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque. Linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles. Inégalité de la moyenne.
Introduction de la fonction exponentielle	**Intégration et dérivation**
Étude de l'équation $f' = kf$. Théorème : « il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. » Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.	Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. » Calcul de à l'aide d'une primitive de f. Intégration par parties.
	Équations différentielles $y' = ay + b$

Géométrie

Contenus	
Géométrie plane : nombres complexes	**Produit scalaire dans l'espace**
Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe; module et argument d'un produit, d'un quotient. Écriture $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels. Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$ avec $z' = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec k réel non nul, ou $z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$.	Rappels sur le produit scalaire dans le plan. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal. Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace. Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans. Discussion géométrique ; discussion algébrique.

Probabilités et statistiques

Contenus	
Conditionnement et indépendance	**Lois de probabilité**
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements. Indépendance de deux variables aléatoires. Formule des probabilités totales. Statistique et modélisation. Expériences indépendantes. Cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes.	*Exemples de lois discrètes* Introduction des combinaisons, notées $\binom{n}{p}$. Formule du binôme. Loi de Bernoulli, loi binomiale ; espérance et variance de ces lois. *Exemples de lois continues* Lois continues à densité : – loi uniforme sur [0 ; 1] ; – loi de durée de vie sans vieillissement. Statistique et simulation

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

"Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs.
Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.
En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite".

© Nathan 2006
25, avenue Pierre de Coubertin – 75013 – Paris
ISBN 209-172638-9

AVANT-PROPOS

Cette édition 2006 du programme 2002 présente l'exponentielle avant le logarithme, l'édition 2002 restant à la disposition des professeurs qui préfèrent traiter l'exponentielle après le logarithme.

Nous définissons donc l'exponentielle comme une solution de l'équation différentielle $y' = y$. Mais nous ne démontrerons pas son existence, car l'existence de l'exponentielle ne résulte pas « aussitôt » de celle de la réciproque du logarithme. En effet, si on note g cette réciproque, pour prouver que $g = \exp$, il faut prouver que $g' = g$ et que $g(0) = 1$.

La preuve serait immédiate si nous disposions du théorème disant que la réciproque d'une fonction strictement monotone et dérivable possède elle aussi ces mêmes qualités. Comme ce n'est pas le cas, il nous faudrait le prouver dans ce cas particulier, i.e. prouver que g est strictement monotone, que $g(u+v) = g(u)g(v)$, ce qui a déjà été fait pour exp mais doit être refait, puis que g est continue et enfin que g est dérivable.

Notons que démontrer la dérivabilité de g en s'appuyant sur l'argument : « la symétrie conserve le contact », conduirait à commettre une erreur de raisonnement, puisque c'est le théorème cité qui permet de prouver cette propriété de la symétrie, et non le contraire.

Nous admettrons donc jusqu'au bout dans le cours l'existence de exp et définirons aussitôt ln comme sa réciproque, puisqu'on ne peut guère travailler avec l'exponentielle sans connaître le logaritme. À noter que depuis 1989 au moins, tous les programmes ont demandé d'admettre la dérivabilité de l'exponentielle, alors définie comme la réciproque de ln.

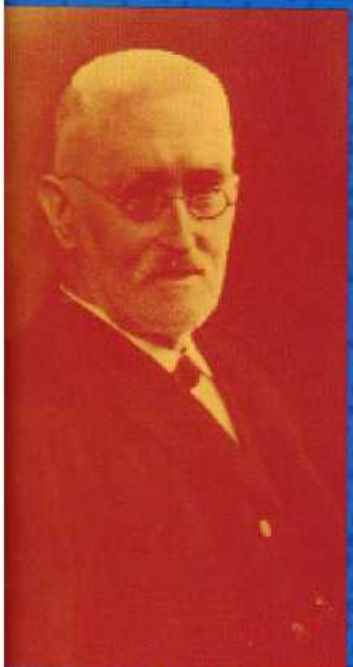
Nous donnons en annexe les preuves de l'existence et de la dérivabilité de chacune de ces deux fonctions. Nous suivons pour cela la progression plus traditionnelle, qui allie rapidité et simplicité (voir par exemple *Mathématiques pour le 1er cycle* de Jacques Dixmier).

Les auteurs

1 Rappels sur les suites Récurrence

1889

À la fin du XIX^{e} siècle, Dedekind (1888), puis Peano (1889), proposent des axiomatiques très voisines de l'ensemble $\mathbb{N}$. C'est-à-dire qu'ils dressent la liste des énoncés considérés *sans démonstration* comme vrais dans l'ensemble $\mathbb{N}$ (les axiomes), en nombre minimal, à partir desquels on démontre toutes les propriétés vraies dans $\mathbb{N}$. La récurrence fait partie de ces axiomes. En France, Poincaré, expliquant dans un article la nature du raisonnement mathématique, avait conclu lui aussi que le raisonnement par récurrence doit être pensé comme un axiome.



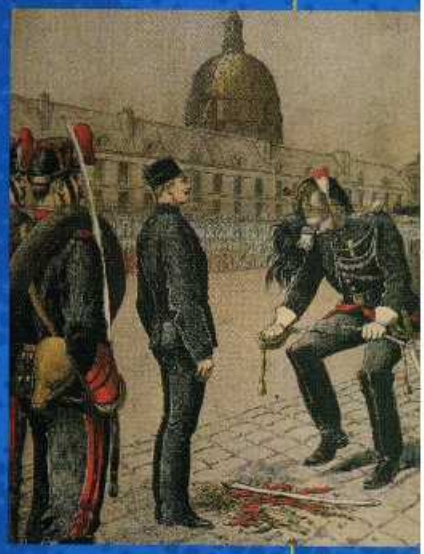
Richard Dedekind
1831 – 1916

Cependant, le raisonnement par récurrence était déjà largement utilisé par les mathématiciens : il figure déjà implicitement dans les *Éléments* d'Euclide (vers –300), explicitement dans le livre *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* paru en 1612 et clairement formulé par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique* vers 1654.

À LA MÊME ÉPOQUE

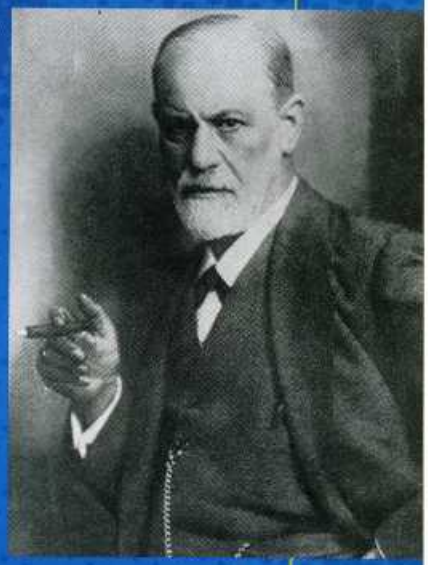
POLITIQUE

L'affaire Dreyfus éclate en 1898 et divise la France. Zola dénonce l'erreur judiciaire commise par l'armée française dans son article « J'accuse » publié dans l'*Aurore*. Dreyfus sera réhabilité en 1906 au terme d'un nouveau procès.



PSYCHOLOGIE

Médecin de formation, Freud découvre l'inconscient psychique. *L'interprétation des rêves* est le premier ouvrage à instaurer les fondements de la psychanalyse et formuler le concept d'acte manqué.



ARTS

Le cinéma, créé par les frères Lumière en 1895, ne se contente plus de reproduire le réel. Dans son *Voyage dans la Lune*, Georges Méliès est le premier à utiliser des effets spéciaux.

1 Généralités sur les suites : rappels

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou sur $\mathbb{N}$ privé des premiers entiers : 0, 1, 2, ..., m.

1.1 Deux façons de définir une suite

■ Suites définies par la donnée explicite de leurs termes

C'est le cas par exemple de chacune des suites (u_n) et (v_n) respectivement définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = f(n)$ où f est la fonction $x \mapsto x^2 + 3x - 1$.

■ Suites définies par récurrence

C'est le cas par exemple de la suite définie par :

$u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 1 + u_n$ pour tout naturel n.

Remarquons que pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $x \mapsto 1 + x$.

1.2 Sens de variation

- Dire qu'une suite (u_n) est **croissante** signifie que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Dire qu'une suite (u_n) est **décroissante** signifie que pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

1.3 Suite arithmétique

■ Dire que la suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé **raison** de la suite.

Il en résulte que quels que soient m et p, $u_m = u_p + (m-p)r$.

Note
Dans une somme $S = u_m + \cdots + u_p$, (avec $p > m$), le nombre de termes est $p - m + 1$.

■ Somme de termes consécutifs

Si $S = a + \cdots + \ell$ est la somme de p **termes consécutifs** d'une suite arithmétique alors $S = \dfrac{p(a+\ell)}{2}$. Il en résulte que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.4 Suite géométrique

■ Dire que la suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que pour tout naturel n, $u_{n+1} = qu_n$. Le réel q est appelé la **raison** de la suite.

Il en résulte que quels que soient m et p, $u_m = u_p q^{m-p}$.

Note
La suite q^n a pour limite $+\infty$ quand $q > 1$, et a pour limite 0 lorsque $-1 < q < 1$.

■ Somme de termes consécutifs

Si $S = a + \cdots + \ell$ est la somme de p termes **consécutifs** d'une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$ alors $S = a\left(\dfrac{1-q^p}{1-q}\right)$.

Il en résulte que, lorsque $q \neq 1$, $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

COMPRENDRE

Suite arithmétique

Il résulte de la définition que pour **démontrer qu'une suite est arithmétique**, il suffit de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs quelconques est **constante**. Cette constante est la raison.

Exemple. $\forall n,\ u_n = 3n + 1$,
$\forall n$,
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1)$
$= 3$.
La suite (u_n) est arithmétique de raison 3.

Suite géométrique

Il résulte de la définition que pour **démontrer qu'une suite est géométrique**, il suffit de montrer (si tous les termes sont non nuls) que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ de deux termes consécutifs quelconques est **constant**, cette constante est la raison.

Exemple. $\forall n,\ u_n = \frac{2}{3^n}$ $(u_n \neq 0)$,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2} = \frac{1}{3}$.
La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tout entier non nul n,
$$a^n - b^n = (a-b) \times P$$
où P est la somme de tous les nombres $a^\alpha b^\beta$ avec a et b des entiers naturels tels que $\alpha + \beta = n - 1$.

Exemple.
$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.
Cette factorisation, souvent utilisée, mérite d'être retenue.

→ EXERCICE RÉSOLU 2

Remarque. $a^n + b^n$ se factorise seulement si n est impair.
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Étudier le sens de variation d'une suite

ÉNONCÉ Étudiez le sens de variation de chacune des suites suivantes définies pour tout entier naturel n, par :

a) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$. **b)** $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. **c)** $u_n = 2n - n^2$.

POINT MÉTHODE

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :
- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si tous les termes sont strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le réel 1 ;
- s'il existe une fonction f telle que pour tout n, $u_n = f(n)$, étudier les variations de la fonction f.

SOLUTION COMMENTÉE

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)}$.
Cette différence est strictement positive pour tout n donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Tous les termes sont strictement positifs et, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$.
Donc, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est strictement décroissante.

c) $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - x^2$.
$f'(x) = 2(1-x)$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x > 1$, f est strictement décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.
La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.

→ EXERCICES 3 à 12

EXERCICE RÉSOLU 2 Factoriser $a^n - b^n$

ÉNONCÉ a et b sont deux réels distincts et non nuls, n un entier naturel $(n \geqslant 2)$.

a) Calculez la somme $S = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$.

b) Déduisez-en une forme factorisée de $a^n - b^n$.

SOLUTION COMMENTÉE

a) Nous sommes en présence de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{b}{a}$ ($\frac{b}{a}$ différent de 0 et de 1).
D'où $S = \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1}(a-b)}$.

b) $a^n - b^n = Sa^{n-1}(a-b) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
d'où l'égalité $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
À retenir. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

→ EXERCICES 23 et 25

2 Le raisonnement par récurrence

2.1 Intérêt du raisonnement par récurrence

Note
Nous appelons « proposition », un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

EXEMPLE Notons P_n la proposition « $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ ».

Nous pouvons dire que :

P_1 est vraie, puisque $1^3 = 1^2$;

P_2 est vraie, puisque $1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$;

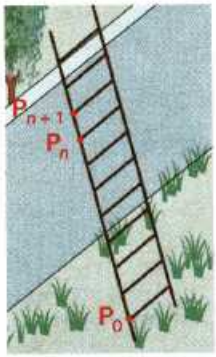
P_3 est vraie, puisque $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$.

Mais P_n est-elle vraie quel que soit n ? Et si l'on pense que oui, comment le prouver, puisque nous ne pouvons pas faire une infinité de vérifications ?

Une démonstration par récurrence permet de conclure que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$ (voir exercice résolu 3, page ci-contre).

Le raisonnement par récurrence « est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini » (Henri Poincaré), c'est-à-dire qu'avec seulement deux vérifications, il permet de prouver qu'une infinité de propositions P_n sont vraies.

2.2 Principe du raisonnement par récurrence



L'idée du raisonnement par récurrence est simple et peut être imagée ainsi : si l'on peut d'abord se placer sur un barreau d'une échelle, **et si** l'on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, **alors** on peut gravir tous les autres barreaux de cette échelle.

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, on procède en deux étapes, puis on conclut :

- ***Première étape*** : on vérifie que P_0 est vraie.
- ***Deuxième étape*** : on suppose que pour un entier naturel n quelconque, la proposition P_n est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie.
- ***Conclusion*** : lorsque les deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Note
La première étape consiste à **initialiser** la récurrence au point de départ. Dans la deuxième étape, l'hypothèse « P_n est vraie » s'appelle **l'hypothèse de récurrence.** La deuxième étape consiste à prouver que cette hypothèse est « héréditaire ».

Avec l'image de l'échelle :

- *Première étape* : on vérifie que l'on peut se placer sur le premier barreau P_0 d'une échelle qui représente la suite de propositions P_n.
- *Deuxième étape* : on montre que l'on peut passer d'un barreau quelconque P_n au barreau suivant P_{n+1}.
- On conclut que l'on peut gravir toute l'échelle.

Comment démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout naturel n supérieur ou égal à un entier m non nul ?

La démarche est la même : la seule différence est que lors de la première étape, on vérifie que P_m est vraie au lieu de vérifier que P_0 est vraie, et lors de la deuxième, on suppose que P_n est vraie pour un naturel $n \geqslant m$.

COMPRENDRE

Quand utiliser la récurrence ?

Pour démontrer qu'**une proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, lorsqu'on ne dispose pas de méthode directe**.

Inutile d'utiliser un tel raisonnement pour démontrer, par exemple, que pour tout entier naturel n,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

« P_0 vraie, étape essentielle »

Exemple.

P_n est la proposition « $7^n + 1$ est un multiple de 6 ».

Si P_n est vraie, alors il existe un entier k tel que $7^n + 1 = 6k$.

Comme $7^{n+1} = 7^n \times 7$, alors,

$7^{n+1} + 1 = (6k - 1) \times 7 + 1$

$= 42k - 6$

qui est aussi un multiple de 6.

Donc P_{n+1} est vraie.

Mais P_0 n'étant pas vraie car $7^0 + 1 = 2$ n'est pas un multiple de 6, on ne peut pas en déduire que P_n est vraie pour tout n.

D'ailleurs P_n n'est jamais vraie.

En arithmétique, on démontre que $7^n + 1$ est congru à 2 (mod 6), donc n'est jamais multiple de 6.

VOCABULAIRE

Hors Mathématiques, le mot **récurrence** est synonyme de répétition d'un phénomène.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 — Rédiger une démonstration par récurrence

ÉNONCÉ Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

SOLUTION COMMENTÉE

Remarquons que la dernière égalité résulte directement du fait que :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons P_n la proposition :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Démontrons que P_1 est vraie : $1^3 = 1$ et $\frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$, et donc P_1 est vraie.
- Démontrons maintenant que si P_n est vraie pour un entier n quelconque, $n \geqslant 1$, alors P_{n+1} est vraie.

Il s'agit sous l'hypothèse « P_n est vraie » de montrer que :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}[n^2 + 4(n+1)] = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Donc la proposition P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, d'où le résultat.

→ EXERCICES 33 à 42 et 66

EXERCICE RÉSOLU 4 — Rédiger une démonstration par récurrence

ÉNONCÉ On considère la suite (u_n) à termes positifs, définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

Démontrez par récurrence que (u_n) est croissante.

SOLUTION COMMENTÉE

Il s'agit de démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

On note P_n la proposition : « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».

- Démontrons que P_0 est vraie : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$, $u_1 > u_0$ donc P_0 est vraie.
- Démontrons maintenant que si P_n est vraie pour un entier n quelconque, $n \geqslant 1$, alors P_{n+1} est vraie.

Il s'agit sous l'hypothèse « P_n est vraie » de montrer que $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$. Or d'après cette hypothèse, $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc $u_{n+1} + 1 \geqslant u_n + 1$. Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, et que par définition tous les termes de la suite sont positifs, on obtient $\sqrt{u_{n+1} + 1} \geqslant \sqrt{u_n + 1}$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite (u_n) est croissante.

→ EXERCICES 58 et 59, 64

EXERCICES

Pour progresser

Généralités sur les suites

1 La suite (v_n) est telle que $v_0 = 1$, et pour tout n,
$$v_{n+1} = 3v_n - 1.$$
Calculez v_2. Exprimez v_{n+2} en fonction de v_n.

2 (u_n) est la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{n^2+4}$.
Exprimez u_{n+1}, u_{n-3}, u_{2n} en fonction de n.

Pour les exercices 3 à 5, dans chacun des cas, donnez le sens de variation de la suite (u_n) indiquée.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 11.

3 **a)** $u_n = \dfrac{3}{n^2}$. **b)** $u_n = \sqrt{3n+1}$. **c)** $u_n = \dfrac{2n-1}{n+4}$.

4 **a)** $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$. **b)** $u_n = \dfrac{n}{10^n}$. **c)** $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$.

5 **a)** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$. **b)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$.

c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$.

Pour les exercices 6 à 12, trouvez, parmi les suites proposées, celles qui sont monotones, éventuellement à partir d'un certain rang.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 11.

6 **a)** $u_n = -3n + 1$. **b)** $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

7 **a)** $u_n = 2^n$. **b)** $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

8 **a)** $u_n = n!$. **b)** $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$.

☞ **Note.** $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ lorsque $n \geqslant 1$.

9 **a)** $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$. **b)** $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

☞ **Note.** $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ lorsque $n \geqslant 1$.

10 **a)** $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$.

b) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} - n$.

11 Pour tout n non nul :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \text{ et } v_n = u_{2n} - u_n.$$

12 **a)** $u_0 = 8$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2$.

b) $u_0 = 2$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2$.

13 (u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes.
La suite $(u_n + v_n)$ est-elle croissante ?

14 Pour tout n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n^2}$.
Étudiez la monotonie des quatre suites :
$$(u_n),\ (v_n),\ (u_n + v_n) \text{ et } (u_n \times v_n).$$

Suites arithmétiques. Suites géométriques

15 (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
Prouvez que les suites (v_n) et (w_n) définies respectivement, pour tout n, par :
$$v_n = 3u_n - 1 \text{ et } w_n = u_{2n} + 3$$
sont arithmétiques et donnez pour chacune la raison.

16 Les mesures des angles d'un triangle rectangle sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Calculez ces angles.

17 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n}$.
Justifiez que pour tout n, $v_n > 0$ et prouvez que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ est arithmétique.

18 Pour tout naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$.
Prouvez que la suite (u_n) est géométrique, précisez sa raison.

19 (u_n) est une suite arithmétique, $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$.
Calculez u_{20}.

20 (u_n) est une suite géométrique, $u_7 = \dfrac{1}{1\,080}$ et $u_{10} = \dfrac{25}{2\,197}$.
Calculez u_{50}.

21 (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et $u_1 = -2$.

1. Exprimez u_n en fonction de n.

2. Calculez $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

22 (u_n) est une suite arithmétique de raison -2.
On sait que $u_0 = -3$.
Calculez la somme $S = u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$.

23 (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et $u_1 = -2$.

1. Exprimez u_n en fonction de n.

2. Calculez $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_{2n}$. Calculez la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

24 Calculez la somme :

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \cdots + 10.$$

25 (u_n) est une suite géométrique de raison 2.
On sait que $u_0 = 1$.
Calculez la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$.

26 • Calculez la somme :

$$S = 0{,}02 - 0{,}1 + 0{,}5 - 2{,}5 + \cdots + 312{,}5.$$

27 • On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Trouvez deux nombres réels a et b tels que :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}.$$

2. On note (v_n) la suite $n \mapsto u_{n+1} - au_n$.
Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison b.

3. On note (w_n) la suite $n \mapsto u_{n+1} - bu_n$.
Démontrez que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison a.

4. Exprimez explicitement v_n et w_n en fonction de n, puis déduisez-en l'expression explicite de u_n en fonction de n.

28 • a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

On sait que $\begin{cases} a + b + c = 36{,}75 \\ abc = 343 \end{cases}$. Calculez a, b, c.

29 • a, b, c sont trois réels distincts avec $a \neq 0$. On sait que :

• a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ;

• $3a$, $2b$, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Calculez q.

30 • **Suite « arithmético-géométrique »**

BAC On considère la suite (u_n) de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = a$ (a réel donné).

1. (v_n) est la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = 13u_n - 4$. Démontrez que (v_n) est une suite géométrique et déterminez sa raison k.

2. **a)** Exprimez v_n en fonction de n et a.

b) Déduisez-en u_n en fonction de n et de a.

31 ⋮ Pour tout entier naturel non nul, on pose $A_n = 11\ldots111$ qui est, dans le système décimal, un nombre de n chiffres égaux à 1.
Calculez $S_n = A_1 + \cdots + A_n$ en fonction de n.

32 ⋮ (u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n - 7n$ pour tout entier naturel n. (v_n) est la suite définie par :

$$v_n = u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. À l'aide d'un tableur, on veut programmer le calcul des dix premiers termes de (u_n) et (v_n).

a) Dans la ligne 1, faites afficher les valeurs de n de 0 à 9.

Aide. Tapez n dans A1, 0 dans B1 et 1 dans C1 ; sélectionnez les cellules B1 et C1 avec la souris et faites un glisser/copier vers la droite.

b) Programmez le calcul de u_n dans la ligne 2.

Aide. Écrivez u_n dans A2, puis entrez dans B2 la valeur de u_0, c'est-à-dire 5.
Dans C2, tapez la formule indiquée dans la vue d'écran ci-dessous, puis faites un glisser/copier vers la droite.

c) Programmez dans la ligne 3 le calcul de v_n à l'aide de u_n et n.

Aide. Si vous hésitez, regardez la formule dans la vue d'écran. Faites un glisser/copier pour aller jusqu'à v_9.

	A	B	C
1	n	0	1
2	u_n	5	=5*B2-7*B1
3	v_n	=B2-7/4*B1-7/16	

2. En observant la ligne 3, conjecturez la nature de la suite (v_n). (Vous pouvez rajouter une ligne pour calculer le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.)

3. Démontrez la conjecture établie à la question 2.

4. Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

5. Calculez $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer des égalités, des inégalités

33 BAC On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ où n est un entier naturel, $n \geqslant 1$.

1. **a)** Calculez S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Exprimez S_{n+1} en fonction de S_n.

2. Démontrez par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

☞ **Commentaire.** **La question 2. aurait pu être l'unique question de cet exercice, proposée alors sous la forme « Démontrez par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. »**

En fait, en posant la question 1., l'énoncé donne une « astuce » technique qui consiste, dans ce genre de problèmes (calculs de sommes), à noter S_n la somme proposée puis à établir une relation simple entre S_{n+1} et S_n, ce qui permet d'utiliser facilement l'hypothèse de récurrence.

34 • On note $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et on lit : « factorielle n ».

Démontrez par récurrence que pour tout entier n non nul,

$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

☞ **Aide.** **Voir le commentaire de l'exercice 33.**

35 • On note $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$,

et $T_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Démontrez que pour tout entier naturel non nul, $S_n = T_n$.

☞ **Aide.** **Voir le commentaire de l'exercice 33.**

36 • Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (n-1)2^{n-2}$.

Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$S_n = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1.$$

☞ **Aide.** **Voir le commentaire de l'exercice 33.**

37 • Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

☞ **Aide.** **Voir le commentaire de l'exercice 33.**

38 • On note $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et on lit « factorielle n ». Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $n! \geqslant 2^{n-1}$.

39 • Démontrez par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, $5^n \geqslant 4^n + 3^n$.

40 • **Inégalité de Bernoulli**

a est un réel strictement positif.

1. Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

2. Déduisez-en la justification d'un théorème (admis) en classe de Première :

si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

41 • 1. Démontrez que pour tout entier n, $n \geqslant 2$,

$$3n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

2. On note P_n la proposition : « $3^n \geqslant 2^n + 5n^2$ ».

a) Quel est le plus petit entier naturel n, non nul, pour lequel P_n est vraie ?

b) Démontrez que pour tout entier n, $n \geqslant 5$, P_n est vraie.

42 • Pour tout nombre entier naturel, on note P_n la proposition : « $3^n \geqslant (n+2)^2$ ».

1. P_0, P_1, P_2 et P_3 sont-elles des propositions vraies ?

2. Démontrez par récurrence que pour tout entier n, $n \geqslant 3$, P_n est vraie.

Conjecturer puis démontrer

43 **Apprendre à chercher**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 10u_n - 18.$$

Objectif : exprimer u_n en fonction de n.

1. Avec une suite définie par récurrence, le calcul de u_n est possible à condition de connaître les termes qui le précèdent. Ici, on veut trouver un moyen de calculer directement u_n à partir de l'indice n.
Dans ce genre de problèmes, on calcule des premiers termes et on essaie de voir comment l'indice n de u_n intervient dans la valeur de u_n, afin de trouver une relation entre cette valeur u_n et l'indice n.

Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

2. L'examen des résultats montre que tous ces nombres commencent par 5, se terminent par 2, et contiennent des zéros entre 5 et 2. Mais le nombre de ces 0 varie avec l'indice n, et c'est certainement cela qui va permettre d'exprimer u_n directement en fonction de n.

Donnez le nombre de 0 en fonction de n lorsque n prend les valeurs 1, 2, ...

3. Mais cette formulation ne se prête guère aux calculs. D'où l'idée de trouver une écriture « numérique » dans laquelle la place de n indique le nombre de zéros voulus.

a) Énoncez la conjecture sous cette forme. Éventuellement, testez-la sur des exemples.

b) Prouvez que votre conjecture est vraie.

☞ **Commentaire.** **Évidemment, les conjectures ne sont pas toujours aussi faciles à prouver et même, parfois, elles sont fausses. Voir exercice 30, page 15.**

44 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout n non nul.

1. Déterminez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n.

2. En calculant $u_n - 3$ pour tout $n \geqslant 0$, exprimez u_n en fonction de n.

45 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = -u_n + 4$ pour tout n non nul.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n.

2. Déterminez u_n en fonction de n.

46 On pose, pour tout n entier naturel non nul :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

1. Calculez S_1, S_2, S_3 et S_4. Conjecturez l'expression de S_n en fonction de n.

2. Démontrez cette conjecture par récurrence.

3. Observez la somme S_n et donnez une autre démonstration de la conjecture.

☞ **Aide.** $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

47 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n$.

1. Calculez les 5 premiers termes de la suite et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n.

2. Utilisez un raisonnement par récurrence pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

48 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.

1. Calculez les 6 premiers termes de la suite et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n.

2. Utilisez un raisonnement par récurrence pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Divisibilité

49 Démontrez par récurrence que la propriété P_n : « $4^n + 5$ est un multiple de 3 » est vraie pour tout n entier naturel.

50 Pour tout entier naturel n, on considère la proposition P_n : « 9 divise $10^n + 1$ ».

1. Démontrez que si P_n est vraie pour un certain n, alors P_{n+1} est vraie.

2. La proposition P_n est-elle vraie pour tout entier ?

51 Prouvez que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

52 BAC Prouvez que pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

53 Est-il vrai que pour tout entier $n \geqslant 1$, $n^3 + 2n$ est un multiple de 3 ?

54 Démontrez par récurrence que la proposition P_n : « $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7 » est vraie pour tout n entier naturel.

Divers

55 BAC La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudiez la monotonie de la suite (u_n).

2. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

56 BAC La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0 ; 1[$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. Démontrez par récurrence que,

pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

57 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2$.
(v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + u_n$.

1. Exprimez u_n en fonction de n.

2. Démontrez par récurrence que $v_n = 1 + n^2$.

58 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout n non nul.

1. Démontrez que pour tout n naturel, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. Prouvez que la suite est strictement croissante.

59 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3}$ pour tout n non nul.

1. Démontrez que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2. Prouvez que la suite est strictement décroissante.

60 Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux entiers p_n et q_n tels que :

$$(2 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{3}.$$

61 θ est un réel de l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2\cos\theta$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. **a)** Calculez u_1 et u_2.

☞ **Aide.** On rappelle que $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$.

b) Prouvez par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, et déduisez-en que pour tout n, u_n est bien défini.

2. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

62 **Une autre forme de récurrence**

Parfois, pour démontrer que la proposition P_{n+1} est vraie, il n'est pas suffisant de supposer que la proposition P_n est vraie. Il se peut que la démonstration nécessite le fait que P_n est vraie pour un certain nombre d'indices inférieurs ou égaux à n. L'hypothèse de récurrence est alors « P_p est vraie pour tout $p \leqslant n$ ». Dans la première étape, on vérifie la propriété aux premiers rangs, en accord avec le nombre de propositions nécessaires pour démontrer P_{n+1} dans la deuxième étape.

A. La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

1. Calculez u_3, u_4, u_5 et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrez cette conjecture par récurrence.

B. La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{2}{5}$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Démontrez que pour tout naturel n, $u_n = \frac{2^n + 3^n}{5}$.

63 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n$.

Démontrez par récurrence que :

$$u_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n].$$

64 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Démontrez que :

a) pour tout n, $u_n > -1$ et que la suite est bien définie pour tout n ;

b) la suite (u_n) est monotone ;

c) pour tout n, $u_n \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 4, page 13.

65 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 2}$.

On pose, pour tout entier n, $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 4}$.

1. Démontrez que la suite (v_n) est géométrique.

2. Exprimez v_n, puis u_n en fonction de n.

66 P est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$

1. Vérifiez que pour tout réel x,

$$P(x+1) - P(x) = x^2.$$

2. Démontrez par récurrence, que pour tout entier naturel n, $P(n) \in \mathbb{N}$.

3. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

67 La suite (u_n) est définie par $u_1 = 0$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

Donnez la valeur exacte de u_{2006}.

68 Démontrez par récurrence que tout entier n supérieur ou égal à 24 peut s'écrire $n = 5a + 7b$, avec a et b **entiers naturels**.

69 **1. a)** Calculez les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

b) Démontrez par récurrence que $u_n = \frac{n}{2^n}$.

2. k est un entier naturel non nul, (v_n) est la suite définie par $v_1 = \frac{1}{k}$ et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = \left(\frac{n+1}{kn}\right)v_n$.

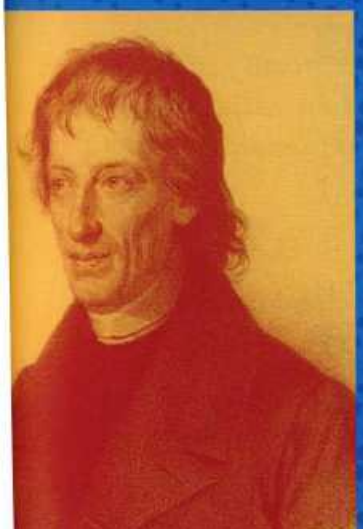
Conjecturez l'expression de v_n en fonction de n et prouvez votre conjecture par récurrence.

2 Fonctions : limites et continuité

1820

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe est d'un seul morceau. Cette notion, qui paraît simple, n'a cependant pas été explicitement isolée avant Bolzano et Cauchy aux environs de 1820. En effet, les fonctions que les Fondateurs – tous ceux qui ont contribué à fonder l'Analyse moderne – ont rencontrées dans les débuts de l'Analyse sont presque toutes continues car données par des formules algébriques ou d'origine géométrique ou cinématique !

L'un des théorèmes les plus importants de la théorie des fonctions continues, le théorème des valeurs intermédiaires, est dû à Bolzano en 1817. Il est important par ses conséquences : en pratique, par exemple dans la résolution d'équations $f(x) = 0$, et surtout en théorie, car on démontre grâce à lui que toute fonction continue et strictement monotone admet une fonction réciproque, ce qui permet d'agrandir la classe des fonctions usuelles.



Bernard Bolzano
1781 – 1848

À LA MÊME ÉPOQUE

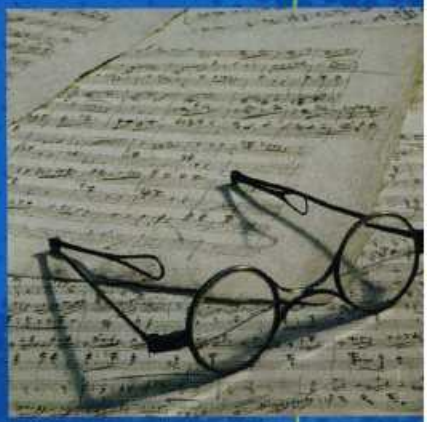
HISTOIRE

Les pays d'Amérique du Sud s'affranchissent de la tutelle espagnole et portugaise et deviennent indépendants.

LINGUISTIQUE

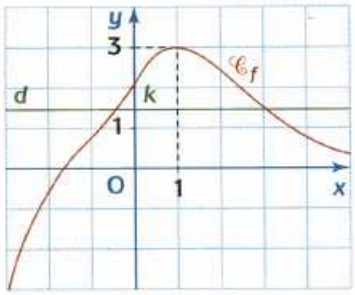
Champollion déchiffre le premier les hiéroglyphes égyptiens. Grâce à la fameuse pierre de Rosette, mais aussi à un obélisque découvert à Philae en 1821, il découvre la correspondance entre les hiéroglyphes, le démotique et le grec.

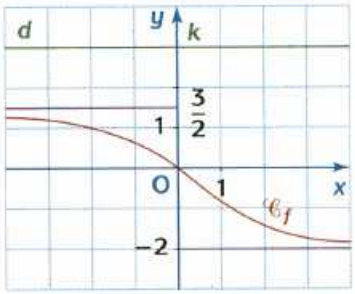
MUSIQUE

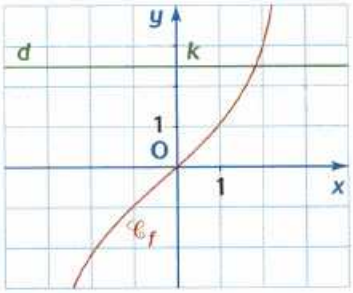
La facture enjouée des six cents lieder de Schubert renouvelle la musique de chambre. La liberté de l'invention mélodique et rythmique de ses dernières œuvres fait de lui le précurseur de Schumann.

ACTIVITÉ 1 Résolution d'équations

1 Existence de solutions

Les figures ci-dessous sont les représentations graphiques de fonctions f définies sur $\mathbb{R}$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$, c'est trouver, s'ils existent, les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d d'équation $y = k$.

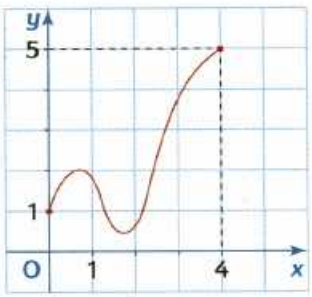


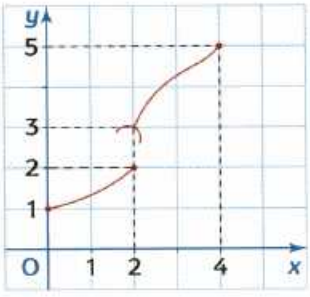




Si, dans le cas d'une fonction polynôme du second degré, on sait résoudre l'équation $f(x) = k$, dans le cas d'une fonction f quelconque, en général, une solution algébrique est impossible. On se tourne alors vers l'analyse qui permet de trouver, lorsqu'une solution existe, des valeurs approchées de cette solution avec autant de précision que l'on veut. D'où l'intérêt, avant tout calcul, de savoir s'il existe ou non des solutions.
Ainsi, pour les deux cas ci-dessous, on peut dire :

- dans le premier cas, que, pour tout k compris entre 1 et 5, l'équation $f(x) = k$ a des solutions ;
- dans le deuxième cas, il n'y a pas de solution pour tout k tel que $2 < k \leqslant 3$.



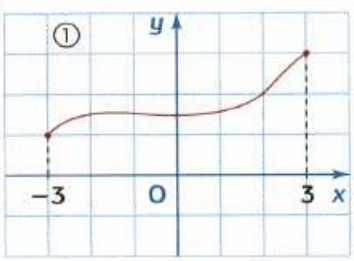


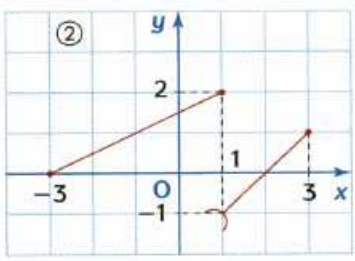
Note
D'une manière générale, une fonction continue sur un intervalle I est une fonction dont la courbe restreinte à I est d'un « seul morceau ».

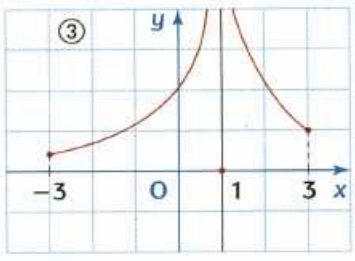
Cela tient au fait que dans le premier cas, la courbe est d'un « seul morceau » : on dit alors qu'elle est **continue** sur l'intervalle [0 ; 4] ; tandis que dans le deuxième cas, la courbe n'est pas d'un seul morceau. On dit qu'elle est **discontinue** sur [0 ; 4] (plus précisément ici en 2).

2 Exercice

Les figures ci-dessous sont les représentations graphiques de fonctions f définies sur l'intervalle [−3 ; 3]. Ces fonctions sont-elles continues sur [−3 ; 3] ?





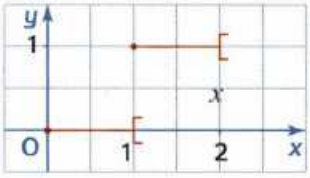


ACTIVITÉ 2 Continuité, limites, intervalles

1 Exemple : la fonction partie entière

Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$.
Cet entier x est appelé la **partie entière** de x. Elle est notée $E(x)$.

Par exemple, $E(\pi) = 3$; $E(-3{,}5) = -4$; $E\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.



1. Vérifiez que la fonction représentée ci-contre est la fonction $E : x \mapsto E(x)$ restreinte à l'intervalle $[0 ; 2[$.

2. a) Précisez $E(1)$.

b) La fonction E a-t-elle pour limite $E(1)$ au point 1 ? Autrement dit, pour tous les x voisins de 1, inférieurs à 1 et supérieurs à 1, les nombres $E(x)$ viennent-ils s'accumuler en $E(1)$?
Ainsi la fonction E est définie au point 1 ($E(1) = 1$) et n'a pas de limite en ce point.
On dit alors qu'**elle n'est pas continue** en ce point ou qu'elle est **discontinue** en ce point.
Vous constatez que la courbe représentant E sur l'intervalle $[0 ; 2[$ est faite en « deux morceaux » et qu'elle présente une « coupure » en $x = 1$. On dit que E n'est pas continue sur $[0 ; 2[$ ou qu'elle est discontinue sur cet intervalle. En revanche, la fonction E est continue sur l'intervalle $[0 ; 1[$ et continue sur l'intervalle $[1 ; 2[$.

3. Tracez la courbe représentative de la fonction E restreinte à l'intervalle $[0 ; 5[$.

a) En quels points de $[0 ; 5[$, la fonction E est-elle discontinue ?

b) La fonction E est-elle continue sur l'intervalle $]3 ; 5[$?

2 Images d'intervalles

L'image d'un intervalle I par une fonction f est l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ avec x dans I. On note $f(I)$ cet ensemble.

1. Avec la fonction $x \mapsto x^2$.

a) Tracez la parabole représentant la fonction $f : x \mapsto x^2$. Observez que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle.

b) Quelle est l'image par f de l'intervalle $I = [0 ; 2]$? de l'intervalle $[-2 ; 2]$? de l'intervalle $[-2 ; 4]$? de l'intervalle $]-\infty ; 2]$? de $\mathbb{R}$?

2. Avec la fonction partie entière.
Quelle est l'image de l'intervalle $I = [0 ; 2[$ par la fonction E ? $E(I)$ est-il un intervalle ?

CONCLUSION Dans chaque cas, $f(I)$ est un intervalle. Le résultat est général :
Lorsque f est continue sur I, l'image $f(I)$ de I est un intervalle.
Nous admettrons ce résultat.

1 Limites à l'infini

1.1 Limite réelle (ou finie) en $+\infty$. Asymptote horizontale

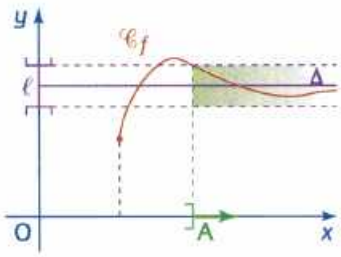
DÉFINITION 1

Dire qu'une fonction f a pour **limite le nombre ℓ en $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x « assez grands » (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A ; +\infty[$).

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Cette définition traduit l'accumulation des valeurs $f(x)$ « autour » de ℓ.

Interprétation graphique. Quel que soit l'intervalle ouvert centré en ℓ et aussi petit soit-il, on peut trouver un réel A tel que la courbe représentative de f restreinte à l'intervalle $]A ; +\infty[$ est dans la partie colorée ci-contre.



On dit alors que la droite Δ d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.**

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Note
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, ℓ réel, signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les $f(x)$ lorsque x décrit un certain intervalle $]-\infty ; A[$.

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ (n naturel non nul) ; $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

1.2 Limite infinie en $+\infty$

DÉFINITION 2

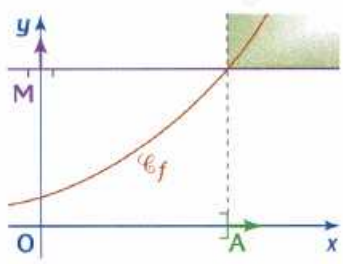
Dire qu'une fonction f a pour **limite $+\infty$ en $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert $]M ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x « assez grands », (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A ; +\infty[$).

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ finissent, pour les grandes valeurs de x, par dépasser n'importe quel réel M aussi grand soit-il.

Note
Autrement dit, quel que soit M, $f(x) > M$ pour tout x supérieur à un certain nombre A.

Interprétation graphique. Pour toute droite d'équation $y = M$, on peut trouver une droite d'équation $x = A$, telle que la courbe représentative de f restreinte à $]A ; +\infty[$ est dans la partie colorée ci-contre.



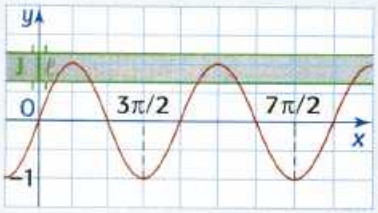
On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **et aussi les limites infinies en $-\infty$.**

Les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ (n naturel non nul) ; $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
Les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ (n naturel **pair** non nul) ont pour limite $+\infty$ en $-\infty$.
Les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^n$ (n naturel **impair**) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.

COMPRENDRE

Il peut ne pas y avoir de limite

• Il en est ainsi, par exemple, de la fonction sinus.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que cette limite en $+\infty$ existe et notons-la ℓ. Puisque, quel que soit x réel, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, ℓ est dans $I = [-1 ; 1]$.
Considérons un intervalle ouvert J centré en ℓ et de rayon $\frac{1}{4}$.
J, de longueur $\frac{1}{2}$, ne peut contenir à la fois -1 et 1. Supposons que -1 n'est pas dans J.



Par définition de la limite, J doit contenir toutes les valeurs de $\sin x$ pour x « assez grand ».
Or, quel que soit le réel A, et « aussi grand » soit-il, on peut trouver des réels $x > A$ tels que $\sin x = -1$ (ce sont tous les x qui s'écrivent :

$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi > A$).

Donc pour ces valeurs de x, $\sin x$ n'est pas dans l'intervalle J.
Donc ℓ ne peut pas être la limite de la fonction sinus.
La démonstration est analogue si 1 n'est pas dans J : **la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$ (ni en $-\infty$).**
• De même, **la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.**

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Étudier la position relative d'une courbe et de son asymptote horizontale

ÉNONCÉ

Vous avez vu en classe de Première que la fonction $f : x \mapsto \frac{4x-5}{2x+3}$ a pour limite 2 en $+\infty$ et en $-\infty$.
Étudiez la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f par rapport à son asymptote horizontale, la droite Δ d'équation $y = 2$.

POINT MÉTHODE

Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale Δ d'équation $y = a$ revient à étudier le signe de $f(x) - a$.

SOLUTION COMMENTÉE

Étudions le signe de $f(x) - 2$.

$\frac{4x-5}{2x+3} - 2 = \frac{4x-5-4x-6}{2x+3} = \frac{-11}{2x+3}$.

$f(x) - 2$ est du signe contraire de $2x + 3$ donc :

$f(x) - 2 > 0$ pour $x < -\frac{3}{2}$ et $f(x) - 2 < 0$ pour $x > -\frac{3}{2}$.

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$ et en dessous sur $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

→ EXERCICES 10 et 11

EXERCICE RÉSOLU 2 Trouver un réel « assez grand »

ÉNONCÉ

La fonction f est la fonction $f : x \mapsto \frac{4x-5}{2x+3}$ de l'exercice résolu 1. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, il existe un réel A tel que « $x > A$ » implique « $f(x)$ est dans l'intervalle de centre 2,]1,95 ; 2,05[».
Trouvez un tel nombre A.

SOLUTION COMMENTÉE

Dire que $1{,}95 < f(x) < 2{,}05$ signifie que $1{,}95 < \frac{4x-5}{2x+3} < 2{,}05$.
Puisqu'on s'intéresse aux « grandes valeurs » de x, on peut supposer $x > 0$ et donc $2x + 3 > 0$.
D'où $1{,}95(2x + 3) < 4x - 5 < 2{,}05(2x + 3)$
ou $-0{,}1x + 5{,}85 < -5 < 0{,}1x + 6{,}15$.
Il en résulte que si $-0{,}1x < -10{,}85$ et $0{,}1x > -11{,}15$,
c'est-à-dire si $x > 108{,}5$ **et** $x > -111{,}5$ (donc si $x > 108{,}5$),
alors $1{,}95 < f(x) < 2{,}05$.
On peut donc prendre A = 108,5 (ou tout nombre supérieur à 108,5).

→ EXERCICES 7 et 9

2 Limites en un réel a

Dans tout ce qui suit, on note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition d'une fonction f.
On se place en un réel a tel que **ou bien** a est dans $\mathscr{D}_f$, **ou bien** a n'est pas dans $\mathscr{D}_f$ mais est une **borne** de $\mathscr{D}_f$.

2.1 Limite infinie en a. Asymptote verticale

DÉFINITION 3

Dire qu'une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** a signifie que tout intervalle $]M ; +\infty[$ contient **toutes les valeurs** $f(x)$ prises pour tous les x **proches** de a, c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]a - \alpha ; a + \alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.

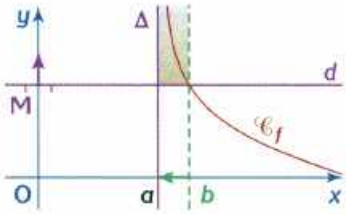
Note
On définit de manière analogue
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty ; M[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x proches de a, c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]a - \alpha ; a + \alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.

On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ finissent par dépasser n'importe quel nombre M, aussi grand soit-il, pour des valeurs de x de plus en plus proches de a.

Interprétation graphique

Pour toute droite d d'équation $y = M$, on peut trouver un intervalle $]a ; b[$ tel que la courbe représentative de f restreinte à $]a ; b[$ est dans la partie colorée.
On dit alors que la droite Δ d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



EXEMPLE

On note f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Zéro est une borne de $\mathscr{D}_f$. Aussi grand que soit le réel M, les nombres $f(x)$ dépassent M pour tout x de l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{1}{M}\right[$, car $\dfrac{1}{x} > M$ dès que $0 < x < \dfrac{1}{M}$.

2.2 Limite réelle (ou finie) en a

DÉFINITION 4

Dire qu'un réel ℓ **est limite d'une fonction** f **lorsque** x **tend vers** a signifie que **tout** intervalle ouvert de centre ℓ contient **toutes les valeurs** $f(x)$ prises pour tous les x **proches** de a, c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]a - \alpha ; a + \alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.

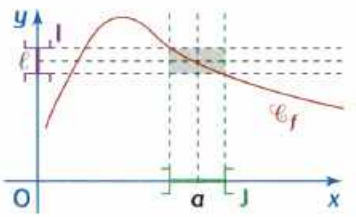
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$, prises pour tous les x proches de a, finissent par s'accumuler « autour » de ℓ, c'est-à-dire que les distances de $f(x)$ à ℓ tendent vers 0. Or la distance de $f(x)$ à ℓ est $|f(x) - \ell|$. Donc :

dire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ **signifie que** $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$.

Interprétation graphique

Quel que soit l'intervalle ouvert I centré en ℓ, et **aussi petit soit-il**, on peut trouver un intervalle ouvert J centré en a tel que la représentation graphique de f restreinte à J est dans la partie colorée.
Il en résulte que si a est dans $\mathscr{D}_f$ et si f a une limite ℓ en a, alors cette limite est $f(a)$.

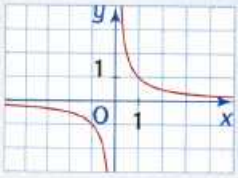


COMPRENDRE

Limite à gauche, limite à droite

Exemples.

• La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.



Mais sa restriction à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ a pour limite $+\infty$ en zéro.

On dit alors que **f a une limite à droite en 0** et on écrit :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

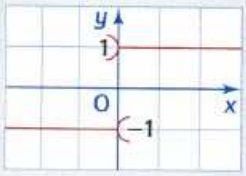
ou $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

De même, **f a une limite à gauche en 0** et on écrit :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

ou $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$.

• La fonction $g : x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ n'a pas de limite en 0.



$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$

et $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$.

Cet exemple montre qu'une fonction peut ne pas avoir de limite réelle en un point.

➜ EXERCICE RÉSOLU 3

Pourquoi $\ell = f(a)$?

Si f a une limite ℓ en a et que a appartient à $\mathscr{D}_f$, alors $\ell = f(a)$.

En effet, par définition, tout intervalle ouvert de centre ℓ, $]\ell - \alpha ; \ell + \alpha[$ avec $\alpha > 0$, contient tous les $f(x)$ pour x « suffisamment proche » de a.

Or a est dans $\mathscr{D}_f$, donc $\ell - \alpha < f(a) < \ell + \alpha$, quel que soit α et aussi petit soit-il.

Ceci n'est possible que si $f(a) = \ell$.

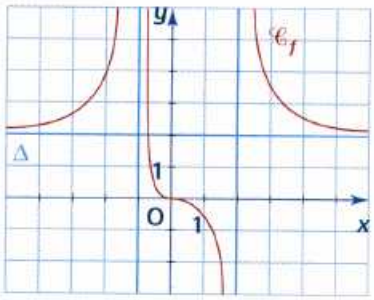
SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Conjecturer des limites

ÉNONCÉ

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 2\}$.

Conjecturez les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$.



SOLUTION COMMENTÉE

Attention. Une conjecture n'est pas une vérité tant qu'elle n'est pas démontrée.

• À l'infini

Lorsque x tend vers $-\infty$, la courbe semble « se rapprocher » de la droite Δ d'équation $y = 2$: les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus proches de 2.

On peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et que Δ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$.

De même, lorsque x tend vers $+\infty$, on peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

• En −1

Lorsque les valeurs de x prennent des valeurs de plus en plus proches de -1, les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes (vers $+\infty$).

On peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$, et donc que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

• En 2

Lorsque les valeurs de x prennent des valeurs de plus en plus proches de 2, mais supérieures à 2, c'est-à-dire dans l'intervalle $]2 ; +\infty[$, les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes (vers $+\infty$).

Par contre, lorsque les valeurs de x prennent des valeurs de plus en plus proches de 2, mais inférieures à 2, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty ; 2[$, les valeurs de $f(x)$ sont négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue (vers $-\infty$).

La fonction f n'a donc pas de limite en 2.

Cependant, on peut conjecturer qu'elle a $-\infty$ pour limite à gauche et $+\infty$ pour limite à droite, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et une asymptote verticale, la droite d'équation $x = 2$.

➜ EXERCICE 6

EXERCICE RÉSOLU 4 Trouver x « assez proche » de 2

ÉNONCÉ

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ a pour limite $+\infty$ en 2.

Trouvez un intervalle I centré en 2, tel que pour tout x de I, $x \neq 2$, $f(x) > 100$.

SOLUTION COMMENTÉE

Dire que $f(x) > 100$ signifie que $(x-2)^2 < 0{,}01$.

La fonction racine carrée étant croissante, cela signifie que $\sqrt{(x-2)^2} < \sqrt{0{,}01}$ donc que $|x-2| < 0{,}1$ ou encore $-0{,}1 < x - 2 < 0{,}1$.

Il en résulte que si le réel x, $x \neq 2$, est dans l'intervalle $]1{,}9 ; 2{,}1[$, alors $f(x) > 100$.

➜ EXERCICES 8 et 51

3 Opérations sur les limites

Lorsque deux fonctions f et g ont des limites connues, on peut, en général, en déduire la limite de la fonction somme $f+g$, de la fonction produit $f \times g$, de la fonction quotient $\frac{f}{g}$. Ces règles opératoires, intuitivement évidentes, sont rassemblées dans les tableaux qui suivent. Les limites sont prises soit en $-\infty$, soit en $+\infty$, soit en un réel a. ℓ et ℓ' sont des nombres réels.
Une case rose correspond à un cas où il n'y a pas de conclusion en général ; on dit alors que c'est un cas de **forme indéterminée**.

■ Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

■ Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

■ Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

● Cas où la limite de g n'est pas nulle

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

● Cas où la limite de g est nulle

Si f a pour limite	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

■ Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.
Ces cas sont, pour les opérations élémentaires ($+$, $\times$, $\div$), au nombre de quatre.
On les note pour les retenir :

« $\infty - \infty$ » ; « $0 \times \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; « $\frac{0}{0}$ »,

mais en aucun cas, ces écritures ne doivent être utilisées dans une rédaction.

COMPRENDRE

Limites à l'infini

• **D'un polynôme**

À l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), un polynôme a **même limite que son monôme de plus haut degré** (rappel de 1re).

Pour démontrer ce théorème, on met en facteur le terme dominant.

Exemple.

Étude de la limite en $+\infty$ de la fonction f :

$x \mapsto x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Le terme dominant est x^3 :

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• **D'une fonction rationnelle**

Il résulte de ce qui précède que,

à l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), une fonction rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur (rappel de 1re).

Exemple.

Étude de la limite en $+\infty$ de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2-3x-1}$.

f a la même limite en $+\infty$ que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 5

VOCABULAIRE

Indéterminé : qui n'est pas précisé, pas fixe.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Lever une indétermination

ÉNONCÉ

Étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$.

SOLUTION COMMENTÉE

Pour les grandes valeurs de x, l'ordre de grandeur de $x+1$ est celui de x et l'ordre de grandeur de $x+\sqrt{x}$ est aussi celui de x (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 0$).

Ainsi, intuitivement, f a pour limite 1 en $+\infty$. Pour le prouver, on met en facteur le terme dominant x et $f(x) = \dfrac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, $(x \neq 0$, étude en $+\infty)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

➜ EXERCICES 15 et 16

EXERCICE RÉSOLU 6 Lever une indétermination avec l'expression conjuguée

ÉNONCÉ

Étudiez la limite

1) en 0 de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

2) en $+\infty$ de la fonction g : $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » car $\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{x+1}-1) = 0$. Pour lever cette indétermination, utilisons l'astuce de calcul parfois efficace qui consiste, en présence de radicaux, à multiplier ou diviser numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée.

L'expression conjuguée de $\sqrt{x+1}-1$ est $\sqrt{x+1}+1$, donc on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

En admettant que $\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{x+1} = 1$ (ce qui sera justifié dans le § 7 et *Comprendre* page 33), les règles opératoires permettent de conclure que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2) Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Multiplions et divisons par l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+1}+x$:

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

➜ EXERCICES 17, 53 et 58

4 Théorèmes de comparaison

4.1 Théorème d'encadrement

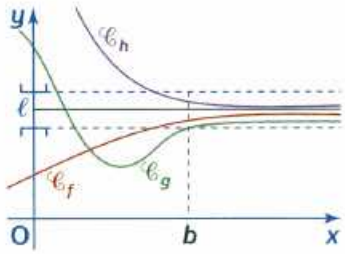
THÉORÈME 1

f, g, h sont trois fonctions définies sur $I =]b ; +\infty[$ et ℓ est un réel.

Si pour tout x dans I, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$, **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Note
Les conclusions des théorèmes 1 et 2 restent valables lorsqu'on prend des limites en $-\infty$ ou en un réel a. Il suffit, dans les hypothèses, de modifier le domaine de validité des inégalités.

Démonstration. Par hypothèse, tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs $g(x)$ et $h(x)$ donc aussi **toutes les valeurs** $f(x)$ pour x assez grand (et supérieur à b), car $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (d'après la définition 1, page 22).



EXEMPLE Limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Pour tout réel dans $]0 ; +\infty[$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ d'où $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'après le théorème 1 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

THÉORÈME 2

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]b ; +\infty[$ et ℓ est un réel.

Si pour tout x dans I, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Démonstration. L'inégalité $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ signifie que $\ell - g(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell + g(x)$.
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, d'après les règles opératoires, $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ell - g(x)] = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ell + g(x)] = \ell$. Par encadrement (théorème 1), on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

4.2 Comparaison à l'infini

THÉORÈME 3

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]b ; +\infty[$. **Si** pour tout x dans I :

1. $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
2. $f(x) \leqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Note
Ce théorème s'adapte facilement pour obtenir, par comparaison, des limites en $-\infty$.

Démonstration du 1. Par hypothèse, tout intervalle de la forme $]M ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $g(x)$, donc aussi **toutes les valeurs** $f(x)$ pour x assez grand (et supérieur à b) car $g(x) \leqslant f(x)$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (d'après la définition 2, page 22).
On démontre de manière analogue le deuxième résultat.

EXEMPLE Limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = x + \cos x$.

Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x$ d'où $x - 1 \leqslant f(x)$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$, le théorème 3 nous permet de conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \cos x) = +\infty$.

COMPRENDRE

Intérêt du théorème d'encadrement

Ce théorème, en plus de permettre un calcul de limite, donne des renseignements :

- sur l'approximation des valeurs de $f(x)$ pour les grandes valeurs de x,
- sur l'allure de la branche infinie de la courbe représentative, etc.

Exemple. Étudions le comportement en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 2\sin x$ *(courbe ci-après)*.

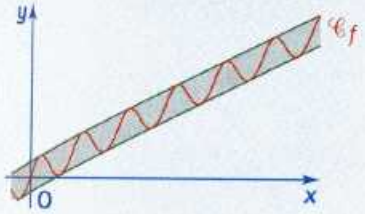
Puisque tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on en déduit l'encadrement :

$$\frac{x}{2} - 2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{2} + 2.$$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Mais nous avons de plus deux renseignements :

- $\frac{x}{2}$ est une valeur approchée de $f(x)$ à 2 près ; par exemple,
  $4\,998 \leqslant f(10\,000) \leqslant 5\,002$;
- la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe dans la bande délimitée par les droites d'équations :
  $y = \frac{x}{2} - 2$ et $y = \frac{x}{2} + 2$.



Pas de lien direct entre croissance et limite infinie

- La fonction f ci-dessus n'est croissante sur aucun intervalle $[A ; +\infty[$ et pourtant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Une fonction strictement croissante n'a pas nécessairement une limite infinie en $+\infty$.

Exemple. $g : x \mapsto \frac{x+1}{x+3}$.

Pour tout réel $x > -3$, g est dérivable,

$g'(x) = \frac{2}{(x+3)^2} > 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 — Encadrer une fonction à l'infini

ÉNONCÉ Étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{E(x)}{x}$ où E est la fonction « partie entière ». (Voir activité 2, page 21).

SOLUTION COMMENTÉE

$E(x)$ est l'unique entier relatif tel que $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$,
ou encore $x - 1 < E(x) \leqslant x$.
On en déduit que pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leqslant 1 \text{ ou encore } 1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leqslant 1.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$, le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$.

EXERCICES 18 et 19

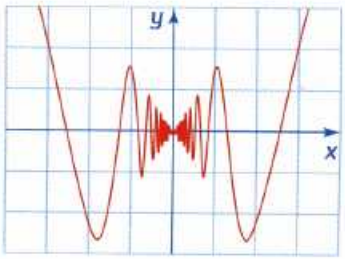
EXERCICE RÉSOLU 8 — Encadrer une fonction au voisinage de zéro

ÉNONCÉ Étudiez la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ (définie pour $x \neq 0$).

SOLUTION COMMENTÉE

$f(x)$ est le produit de x par $\sin\frac{1}{x}$. Pour tout réel y, $|\sin y| \leqslant 1$, donc pour tout réel x non nul,

$$|f(x) - 0| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| = |x| \times \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|.$$



Or $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ donc le théorème 2 (adapté au cas où la limite étudiée est en 0) permet de conclure que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Remarque. Dans l'intervalle $]0 ; 1]$, la courbe coupe l'axe des abscisses en une infinité de points d'abscisses $x = \frac{1}{k\pi}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

EXERCICE RÉSOLU 9 — Étudier une fonction au voisinage de plus l'infini

ÉNONCÉ Étudiez le comportement en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$.

SOLUTION COMMENTÉE

Pour $x \geqslant 0$, $x^2 + x \geqslant x^2$. Puisque la fonction racine carrée est croissante, il en résulte que $\sqrt{x^2 + x} \geqslant \sqrt{x^2}$; c'est-à-dire $f(x) \geqslant x$ (car $\sqrt{x^2} = x$ lorsque $x \geqslant 0$).

Donc, d'après le théorème 3 de comparaison à l'infini, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque. Une autre démonstration est possible en utilisant le théorème sur la limite d'une fonction composée p. 30.
Mais, ici, la comparaison des fonctions a permis d'obtenir un renseignement supplémentaire « $f(x)$ tend vers $+\infty$ plus vite que x ».

EXERCICES 21 à 26

5 Limite d'une fonction composée

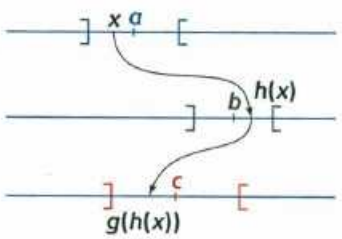
THÉORÈME 4 (théorème admis)

f, g et h sont trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$.
Chacune des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ **et si** $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, **alors** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Note
Pour appliquer le théorème sur la limite en a d'une fonction composée $x \to g(h(x))$, on cherche d'abord la limite b de h en a, puis la limite de g en b.

Expliquons ce théorème de façon intuitive, par exemple dans le cas où a, b et c sont des réels.

Lorsque x tend vers a, les nombres $h(x)$ se rapprochent de b puisque $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$.
Posons $h(x) = X$. Alors $f(x) = g(X)$.
Lorsque les nombres $h(x) = X$ tendent vers b, alors les nombres $g(X)$ se rapprochent de c, puisque $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$. D'où $\lim\limits_{x \to a} g(h(x)) = c$.



Note
Lorsqu'on écrit $h(x) = X$ et $f(x) = g(X) = (g \circ h)(x)$, on dit que l'on a changé de variable.
En fait, on a composé des fonctions.

EXEMPLES • Cherchons la limite en $+\infty$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Posons $X = x^2 - x + 1$, alors $f(x) = \sqrt{X}$.
Nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et que $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$;
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$.

• f est définie sur $\left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}}$. Cherchons la limite en $\frac{1}{3}$.

Posons $X = 3x - 1$, alors $X > 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$.

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x) = +\infty$.

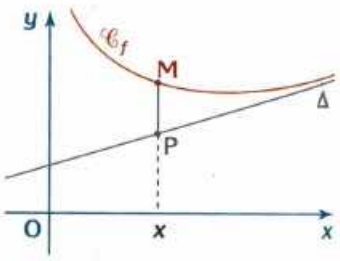
6 Asymptote oblique

DÉFINITION 5

Note
On définit de la même manière une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné.
Dire que la droite Δ d'équation $y = ax + b$, $(a \neq 0)$, est **asymptote oblique** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

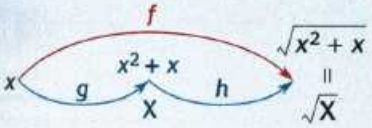
Interprétation graphique. Pour un nombre x dans le domaine de définition de f, notons M et P les points d'abscisse x respectivement sur $\mathscr{C}_f$ et sur Δ.
Alors $PM = |f(x) - (ax + b)|$ (repère orthonormal).
Ainsi, pour les grandes valeurs de x, la distance PM est voisine de zéro, $\mathscr{C}_f$ et Δ sont très proches l'une de l'autre. (Voir aussi le point méthode du résolu 11).



COMPRENDRE

Changer de variable

Pour étudier le comportement en $+\infty$ de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2+x}$, on peut poser $X = x^2 + x$. Alors, $f(x) = \sqrt{X}$. En fait, changer de variable c'est **composer** des fonctions.



Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, nous sommes dans les conditions d'utilisation du théorème 4, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$.

Changement $X = \frac{1}{x}$

Le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ permet de ramener l'étude de la limite en $+\infty$ d'une fonction, à l'étude de la limite en **0** d'une autre fonction. Ce qui est intéressant si cette limite en 0 est connue.

➜ EXERCICE RÉSOLU 10

Pourquoi $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$?

Une fonction f est dérivable en a signifie que la fonction :

$$t: h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a une limite réelle en 0, notée $f'(a)$.

Considérons la fonction :

$$g: x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et posons $h = x - a$.

Alors $g(x) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = t(h)$.

Or $\lim\limits_{x \to a} h = 0$

et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$,

donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f'(a)$, soit :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 10 Utiliser le théorème 4

ÉNONCÉ Étudiez le comportement en $+\infty$ de la fonction $f: x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$.

SOLUTION COMMENTÉE

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \sin X = 0$. Le théorème 4 nous permet de conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$.

Les règles de calculs sur la limite d'un produit conduisent à la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ».

Effectuons le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. Alors $f(x) = \frac{\sin X}{X}$.

Or nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Commentaires.

- La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$).
- Le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ permet aussi, par exemple, de ramener une étude en 0 en une étude à l'infini.

➜ EXERCICE 31

EXERCICE RÉSOLU 11 Étudier la position relative d'une courbe et de son asymptote

ÉNONCÉ Prouvez que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x+2}$ et précisez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

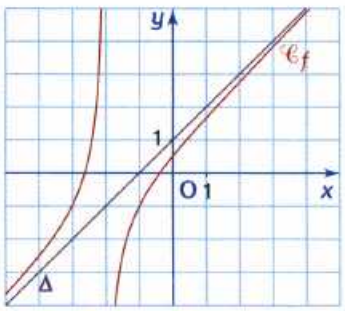
POINT MÉTHODE

Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique Δ d'équation $y = ax + b$ revient à étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$.

SOLUTION COMMENTÉE

$$f(x) - (x+1) = \frac{x^2+3x+1-(x+1)(x+2)}{x+2} = \frac{-1}{x+2}.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$, la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est bien asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



$\frac{-1}{x+2}$ est du signe contraire de $x + 2$ donc :

- si $x > -2$, $x + 2$ est positif et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ ;
- si $x < -2$, $x + 2$ est négatif et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ.

➜ EXERCICE 33 à 35, 62 à 68

7 Continuité

7.1 Continuité en un point, sur un intervalle

Dans tout ce paragraphe :
f est une fonction et I un **intervalle** inclus dans son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

DÉFINITION 6

- Dire que **f est continue en un point a** de I signifie que **f a une limite en a et cette limite est** alors nécessairement $f(a)$, ainsi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Dire que **f est continue sur l'intervalle** I signifie que f est continue en tout point de I.

Note
L'étude de la continuité en un point qui n'appartient pas au domaine n'a donc pas de sens.

Conséquence.
Il résulte directement de cette définition et des théorèmes sur les opérations sur les limites que la somme, le produit et la composée de fonctions continues sont continues.

7.2 Dérivabilité et continuité

THÉORÈME 5

- Si f est **dérivable en a** élément de I, alors f est **continue en a**.
- Si f est **dérivable sur I**, alors f est **continue sur** I.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice résolu 13

Démonstration.
Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction g, définie par :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a pour limite $f'(a)$ en a (voir *Comprendre*, page 31).
Pour tout $x \neq a$, $g(x)(x-a) = f(x) - f(a)$ d'où $f(x) = f(a) + g(x)(x-a)$.
Puisque $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} (x-a) = 0$, il en résulte que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

7.3 Conséquences : continuité des fonctions usuelles

Note
On appelle fonctions usuelles toutes ces fonctions. On y ajoutera les fonctions logarithme, exponentielle et racine n-ième qui seront vues plus tard.

- Nous avons démontré en Première S que la **fonction racine carrée** est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0 ; +\infty[$, donc elle est continue sur $]0 ; +\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, donc la fonction racine carrée **est continue en 0, donc sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$**, fermé en zéro.

- Les fonctions **polynômes** sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

- Les fonctions **rationnelles** sont dérivables sur leur domaine de définition $\mathscr{D}$, donc elles sont continues sur tout intervalle contenu dans $\mathscr{D}$.

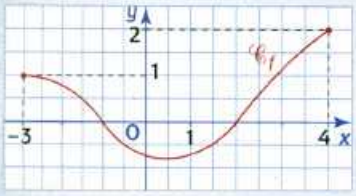
- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

- Il résulte de la conséquence du § 7.1 que **toutes les fonctions construites algébriquement par somme, produit, quotient, composition de fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition.**

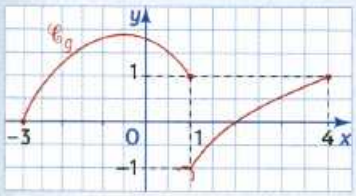
COMPRENDRE

Reconnaître graphiquement une fonction continue

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f, restreinte à I, est d'un seul morceau.



f est continue sur $[-3 ; 4]$.



g n'est pas continue sur $[-3 ; 4]$.

« Continue » n'implique pas « dérivable »

Lorsqu'une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point (théorème 5). **La réciproque** de cette proposition est **fausse**.

➜ EXERCICE RÉSOLU 12

Conséquences du § 7.2. pour les limites

Si f est une fonction obtenue par des opérations algébriques sur les fonctions usuelles, alors pour tout a de $\mathscr{D}_f$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En effet, d'après le § 7.2., une telle fonction est continue en a.

Exemples. • $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Alors pour tout $a > -1$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sqrt{a+1}$ (car f est la composée de deux fonctions usuelles : un polynôme suivi de la racine carrée).

• $f(x) = \sin x + \cos x$,

$\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = -1$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 12 Étudier la fonction racine carrée en zéro

ÉNONCÉ

La fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Démontrez que f a pour limite 0 en 0 et déduisez-en sa continuité en 0.

2) Démontrez que f n'est pas dérivable en 0.

SOLUTION COMMENTÉE

1) Il s'agit de s'assurer que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0, les nombres $\sqrt{x}$ correspondants s'accumulent vers 0.

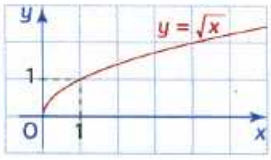
Plus précisément que, quel que soit le réel $\alpha > 0$, $\sqrt{x}$ est proche de 0 à α près, pour tout x d'un intervalle $[0 ; \beta[$.

Or $0 \leqslant \sqrt{x} < \alpha$ équivaut à $0 \leqslant x < \alpha^2$. Donc $\sqrt{x}$ est dans $[0 ; \alpha[$ pour tout x de $[0 ; \alpha^2[$, ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ (d'après définition 4 p. 24).

Ainsi f a une limite en zéro égale à $f(0)$ (car $\sqrt{0} = 0$...) donc f est continue en 0 (d'après la définition 6 p. 32).

2) $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Comme pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$,

f n'est donc pas dérivable en 0.



Remarque. La courbe admet une tangente verticale à l'origine et ceci est une nouvelle preuve que la continuité n'implique pas la dérivabilité.

➜ EXERCICE 12

EXERCICE RÉSOLU 13 Répondre à un questionnaire « Vrai ou Faux »

ÉNONCÉ

Une fonction f est définie sur un intervalle I et a est un nombre réel appartenant à I. Dans chacun des cas suivants, indiquez si les deux propriétés citées peuvent être vérifiées simultanément ou non :

1) f est continue en a et f est dérivable en a ;

2) f est continue en a et f n'est pas dérivable en a ;

3) f n'est pas continue en a et f est dérivable en a ;

4) f n'est pas continue en a et f n'est pas dérivable en a.

SOLUTION COMMENTÉE

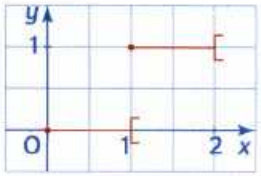
1) Oui, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est continue et dérivable (pour tout réel x).

2) Oui, la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ en 0. (Voir exercice résolu ci-dessus.)

3) Non, car « dérivable » implique « continue » (théorème 5).

4) Oui, la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ en 1.

Elle est discontinue en 1 donc ne peut être dérivable en 1 (voir **3)**).



➜ EXERCICES 91 et 92

8 Fonctions continues et résolution d'équations

8.1 Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 6

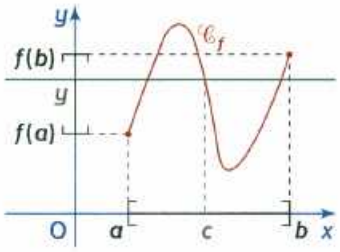
f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b, tel que :

$$f(c) = y\ .$$

Note
Ce théorème est admis. Pour une preuve, voir l'exercice 5, page 442.

La conclusion du théorème peut s'énoncer différemment. En supposant $f(a) \leqslant f(b)$ et en posant $I = [a\,;b]$, on peut dire, de façons équivalentes :

- pour tout y de l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x a au moins une solution c dans I ;
- tout réel y de l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$ est l'image par f d'au moins un réel c de I.



Note
La figure ci-contre montre que le nombre c n'est pas nécessairement unique.

Si on note $f(I)$ l'ensemble des images $f(x)$ de tous les nombres x dans I, cet énoncé peut encore se traduire ainsi : l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$ est inclus dans $f(I)$.

Note
D'une manière générale, on appelle image de I par la fonction f, et on note $f(I)$, l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ lorsque x décrit I.

Vocabulaire. L'ensemble $f(I)$ est appelé **image de I par f.**

8.2 Fonction continue strictement monotone sur $[a\,;b]$

Le théorème suivant est énoncé pour une fonction f strictement croissante. Le résultat est analogue pour f strictement décroissante, en remplaçant $[f(a)\,;f(b)]$ par $[f(b)\,;f(a)]$ dans la conclusion.

THÉORÈME 7

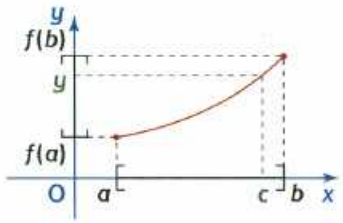
Si f est une fonction **continue strictement croissante** sur l'intervalle $I = [a\,;b]$:

1. l'image de I par f est l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$;
2. pour tout y dans $[f(a)\,;f(b)]$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x, a **une solution et une seule** dans I.

Note
En général, la stricte monotonie s'obtient à partir de l'étude de la dérivée f' de f (voir chapitre 3).

Démonstration.

1. Puisque f est strictement croissante sur I, pour tout réel x dans I, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.
Donc toute image $f(x)$, c'est-à-dire tout nombre de $f(I)$, est dans $[f(a)\,;f(b)]$.
Réciproquement, si y est dans $[f(a)\,;f(b)]$, y est l'image d'au moins un réel c de I (théorème 6), donc y est dans $f(I)$.
Ainsi $f(I)$ et $[f(a)\,;f(b)]$ ont les mêmes éléments donc $f(I) = [f(a)\,;f(b)]$.



2. En outre, l'équation $f(x) = y$ ne peut avoir deux solutions car f étant strictement croissante, deux nombres distincts ont des images distinctes.

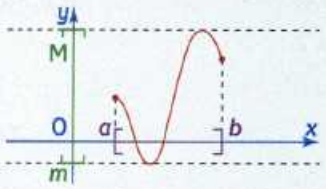
Cas particulier. Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b] = I$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans I.

En effet, l'hypothèse $f(a)f(b) < 0$ implique $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ et $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, donc zéro est dans $[f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, d'où le résultat.

COMPRENDRE

Image d'un intervalle [a ; b]

L'image d'un intervalle [a ; b] par une fonction **continue** est toujours un intervalle **fermé**, même si la fonction n'est pas monotone.

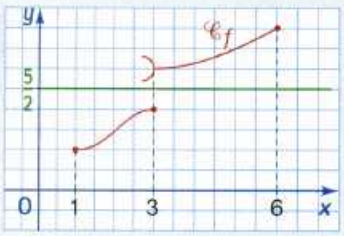


L'image par f de l'intervalle [a ; b] est l'intervalle [m ; M].
En effet, pour tout x dans [a ; b], $m \leqslant f(x) \leqslant M$, et pour tout y dans [m ; M], il existe au moins un nombre c de [a ; b] tel que $f(c) = y$.
Remarquez que l'image de [a ; b] n'est pas toujours [$f(a)$; $f(b)$] ou [$f(b)$; $f(a)$].

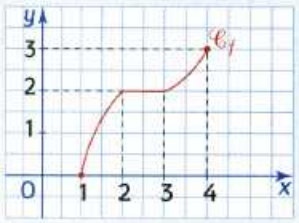
Existence et unicité de la solution de l'équation $f(x) = y$

• **L'existence** de la solution est assurée par la **continuité**. Si la fonction n'est pas continue, l'existence n'est pas nécessairement assurée comme le montre la figure ci-dessous :

$f(x) = \dfrac{5}{2}$ n'a pas de solution.



• **L'unicité** est assurée par la **stricte monotonie.** Si la monotonie n'est pas stricte, on peut avoir plusieurs solutions, $f(x) = 2$ admet une infinité de solutions.



SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 14 Résoudre une équation

ÉNONCÉ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.
Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans [2 ; 3] et donnez de α un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

POINT MÉTHODE

Pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle [a ; b], il suffit de prouver que f est strictement monotone sur [a ; b] et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

SOLUTION COMMENTÉE

L'étude de la fonction continue f conduit à :

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0			$+$			
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\frac{59}{27}$		↗		8	↗	$+\infty$

$f(2) = -1$ et $f(3) = 8$ donc $f(2)f(3) < 0$, et f est strictement croissante sur [2 ; 3] donc l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans [2 ; 3].
Le tableau montre également que pour tout $x < 2$, $f(x) < 0$ et pour tout $x > 3$, $f(x) > 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet dans $\mathbb{R}$ que la solution α.
Avec la calculatrice, on trouve :

$$f(2{,}2) < 0 \text{ et } f(2{,}3) > 0, \text{ donc } 2{,}2 < \alpha < 2{,}3.$$

→ EXERCICES 36 à 39

EXERCICE RÉSOLU 15 Prouver qu'une équation n'a pas de solution

ÉNONCÉ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^4$.
Démontrez que l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution.

SOLUTION COMMENTÉE

f est une fonction polynôme de degré 4. Nous n'avons pas de méthode de résolution d'une telle équation.
f étant continue, dire qu'elle ne prend jamais la valeur 1 signifie graphiquement que sa courbe représentative est tout entière au-dessus de la droite d d'équation $y = 1$, ou alors, toute entière en dessous de d.
Étudions les variations de la fonction f.
Pour tout x, f est dérivable est $f'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3 - 4x)$,
d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{27}{256}$	↘	$-\infty$

Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est donc $\dfrac{27}{256}$, la fonction ne prend jamais la valeur 1 et l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution.

→ EXERCICES 36 à 39

8 Résolution d'équations (suite)

8.3 Extensions du théorème 7

Lorsque f est une fonction continue et strictement monotone, le résultat du théorème 7 s'étend à un **intervalle I quelconque**.
L'image d'un intervalle I par f est encore un intervalle J et **pour tout réel y dans J, l'équation $f(x) = y$ a une solution et une seule dans I.**

Le tableau suivant précise l'intervalle $J = f(I)$ dans chacun des cas possibles pour I. (On admet implicitement que f a toujours une limite réelle ou infinie en une borne de I.)

THÉORÈME 8 ➡
(théorème admis)

Dans le tableau ci-dessous, a et b désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

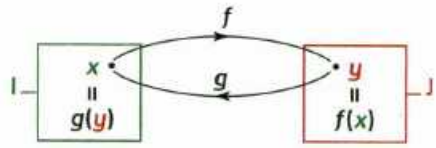
	L'image de I par f est l'intervalle :	
Si I =	**f est strictement croissante sur I**	**f est strictement décroissante sur I**
$[a\,;\,b]$	$[f(a)\,;\,f(b)]$	$[f(b)\,;\,f(a)]$
$]a\,;\,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x)\,;\,f(b)\right]$	$\left[f(b)\,;\,\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$[a\,;\,b[$	$\left[f(a)\,;\,\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x)\,;\,f(a)\right]$
$]a\,;\,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

8.4 Notion de fonction réciproque

■ f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I quelconque. Posons $J = f(I)$. J est un intervalle (voir le tableau ci-dessus). Alors :

- pour tout réel x dans I, $f(x)$ est dans J ;
- pour tout réel y dans J, il existe un x et **un seul** tel que $f(x) = y$.

Lorsque ces deux conditions sont réunies, on dit que f est une **bijection de I sur J.**
On peut alors définir une fonction g sur J de la manière suivante :



si y est un réel dans J et si $y = f(x)$, alors $g(y)$ est ce nombre x.
Ainsi si $y = f(x)$, alors $x = g(y)$ et réciproquement, si $x = g(y)$ alors $f(x) = y$.
On dit que g, définie sur $J = f(I)$, est la **fonction réciproque** de f définie sur I.
Il en résulte que pour tout réel x dans I, $g(f(x)) = x$ et pour tout y dans J, $f(g(y)) = y$.

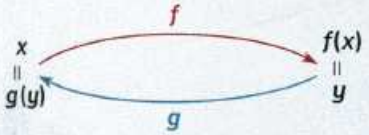
Note
On dit aussi que g est la **bijection réciproque** de f, et que la fonction réciproque de g est la fonction f.

■ Plus généralement, si f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et si g est une fonction définie sur J à valeurs dans I, **telles que pour tout x de I, tout y de J, « $f(x) = y$ » équivaut à « $x = g(y)$ »** alors f et g sont des fonctions réciproques.

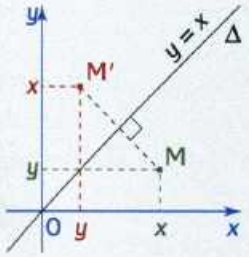
COMPRENDRE

Courbes de deux fonctions réciproques

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont **symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.** Prouvons-le.
f est une fonction définie sur I à valeurs dans J et g la fonction réciproque de f.

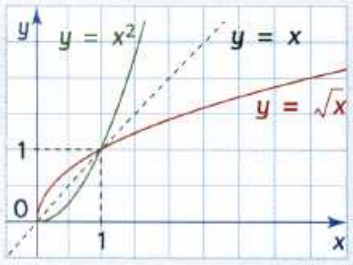


Tout point M de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(x ; y)$ avec $x \in I$ et $y = f(x)$.
Son symétrique M′ par rapport à Δ a pour coordonnées $(y ; x)$ avec $y \in J$ et $x = g(y)$ donc $M'(y ; g(y))$ est un point de $\mathscr{C}_g$.



Comme de la même manière, on montre que le symétrique de tout point de $\mathscr{C}_g$ est un point de $\mathscr{C}_f$, les deux courbes sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple.
Les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ restreintes à $[0 ; +\infty[$ sont, dans un repère orthonormal, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 16 Prouver l'existence de solution(s) d'une équation

ÉNONCÉ

Prouvez que l'équation (E) : $x\sqrt{x} = 1 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.

POINT MÉTHODE

Pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, il faut se ramener à une équation du type $f(x) = k$.

SOLUTION COMMENTÉE

La présence du facteur $\sqrt{x}$ dans le premier membre limite l'étude à $\mathbb{R}^+$.
L'équation (E) est équivalente à $x\sqrt{x} + x = 1$,
soit encore à $f(x) = 1$ avec f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x} + x$.
f est dérivable (donc continue) sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
L'image de $[0 ; +\infty[$ par f est donc :

$$[f(0) ; \lim_{x \to +\infty} f(x)[= [0 ; +\infty[\text{ qui contient le réel 1.}$$

L'équation (E) admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.

➔ EXERCICE 79

EXERCICE RÉSOLU 17 Utiliser le théorème 8

ÉNONCÉ

f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-contre.
Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘		↗	4	↘	
			-2				3

SOLUTION COMMENTÉE

À partir du tableau de variations, on va s'intéresser à la restriction de f aux intervalles $]-\infty ; -1[$; $[-1 ; 2]$ et $]2 ; +\infty[$.
D'après le théorème 8, les images respectives de ces intervalles sont $]-2 ; +\infty[$ $[-2 ; 4]$ et $]3 ; 4[$.

- f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et zéro est dans $]-2 ; +\infty[$, donc il existe un réel α unique dans $]-\infty ; -1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- f est strictement croissante sur $[-1 ; 2]$ et zéro est dans $[-2 ; 4]$, donc il existe un réel β unique dans $[-1 ; 2]$ tel que $f(\beta) = 0$.

De plus, f n'a pas de solution dans $]2 ; +\infty[$ car zéro n'appartient pas à $]3 ; 4[$. En résumé, $f(x) = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$.

➔ EXERCICES 36 à 39, 79

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

Formes indéterminées

Les opérations sur les limites peuvent conduire à **quatre cas** de formes indéterminées :

« $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Comparaison

- Une fonction qui « domine » une fonction qui tend vers $+\infty$, tend elle-même vers $+\infty$.
- Une fonction « dominée » par une fonction qui tend vers $-\infty$, tend elle-même vers $-\infty$.

→ EXERCICE RÉSOLU 9

Encadrement

Une fonction encadrée à l'infini par deux fonctions de **même limite** ℓ a elle-même pour limite ℓ (ℓ réel ou infini).

Fonctions composées

- Pour appliquer le théorème sur la limite en a d'une fonction composée $x \mapsto g(h(x))$, on cherche **d'abord** la limite b de h en a, **puis** la limite de g en b.
- Le théorème sur la limite d'une fonction composée permet, par **changement de variable**, de remplacer l'étude de la limite d'une fonction « en un endroit » par celle plus simple d'une autre fonction « en un autre endroit ».

Continuité

- Calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et trouver $f(a)$, c'est prouver que f est continue en a.
- Les fonctions **dérivables** sont **continues**.

→ EXERCICE RÉSOLU 12

DES réflexes À AVOIR

Indéterminations

- Pour lever une indétermination « $\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ », pensez à mettre en facteur le terme dominant.

→ EXERCICE RÉSOLU 5

- Pour lever une indétermination en présence de radicaux, pensez à utiliser l'expression conjuguée.

→ EXERCICE RÉSOLU 6

Asymptote

- Pour démontrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, pensez à démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (résultat analogue en $-\infty$).
- Pour déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote, il suffit d'étudier le signe de $[f(x) - (ax + b)]$.

→ EXERCICE RÉSOLU 11

À l'infini

- une **fonction polynôme** a même limite que son monôme de plus haut degré,
- une **fonction rationnelle** a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré.

Si les règles opératoires ne peuvent s'appliquer, pensez à utiliser **le théorème d'encadrement** (dit « des gendarmes ») ; encadrez la fonction étudiée par deux fonctions de **même limite** (connue).

→ EXERCICE RÉSOLU 7

Pour lever d'autres indéterminations, pensez au **changement de variable** qui permet parfois de se ramener (en un autre endroit) à une limite connue.

En particulier, le changement $X = \frac{1}{x}$ permet de remplacer :

- une étude à l'infini par une étude en zéro,
- une étude en zéro par une étude à l'infini.

→ EXERCICE RÉSOLU 10

Pensez que la **continuité et la stricte monotonie** d'une fonction f permettent de prouver l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation $f(x) = k$ dans un intervalle donné.

→ EXERCICES RÉSOLUS 14, 16 et 17

DES erreurs À ÉVITER

Une fonction continue en a n'est pas toujours dérivable.

Exemples. $x \mapsto |x|$ en 0 et $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

Pour déterminer l'image de $[a\,;\,b]$ par une fonction continue f, il n'est pas toujours suffisant de calculer $f(a)$ et $f(b)$.

TD 1 Comportements asymptotiques

1 Droite asymptote

1. $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}.$$

a) Pourquoi peut-on affirmer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$? (voir le cours § 6 p. 30).

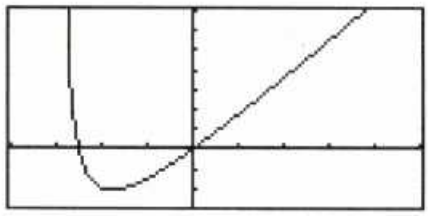
b) Précisez la position relative de Δ et de $\mathscr{C}_f$ (voir le point méthode de l'exercice résolu 11 p. 31).

c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote en $-\infty$?
Si oui, donnez une équation de cette asymptote Δ' et précisez la position de la courbe par rapport à Δ'.

2. $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x + 3}.$$

Le degré du numérateur dépasse d'une unité le degré du dénominateur : on peut envisager l'existence d'une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$. Ce qui semble confirmé par l'écran de la calculatrice ci-contre.



On cherche alors à écrire $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 3}$.

a) Démontrez qu'il existe bien trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout $x > -3$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 3}.$$

b) Déduisez-en que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ. Donnez une équation de Δ et précisez la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.

2 Courbes asymptotes

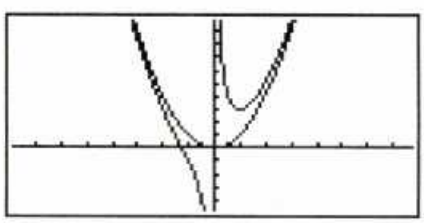
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

$\mathscr{C}_f$ est sa représentation graphique.

À l'infini ($+\infty$ et $-\infty$), $\dfrac{2}{x}$ tend vers 0 et $f(x)$ se comporte comme x^2.

1. Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x^2]$.

2. Que pouvez-vous dire de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$? Vérifiez-le avec votre calculatrice graphique (voir courbe ci-contre). On dit que **les deux courbes sont asymptotes** l'une de l'autre.



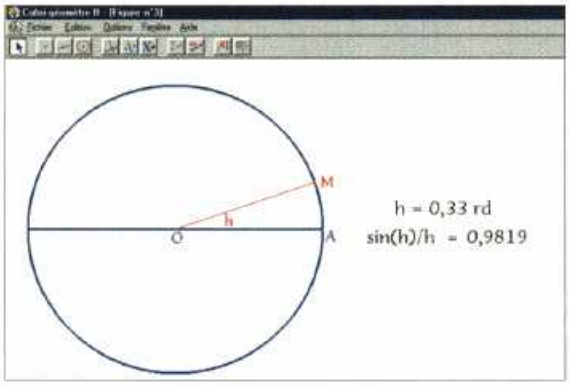
3. Précisez, suivant les valeurs de x, la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{P}$.

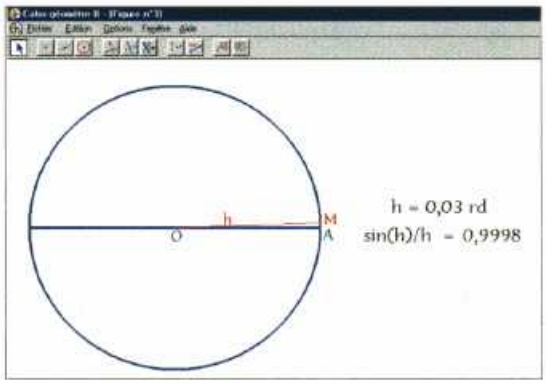
TD 2 Des limites remarquables

Le **but** de ce TD est de calculer les limites $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

1 Limite en zéro avec la fonction sinus

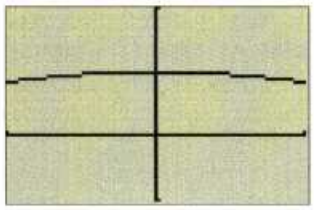
Le calcul de la limite en 0 de $\dfrac{\sin h}{h}$ nous conduit à une forme indéterminée car numérateur et dénominateur tendent vers 0 avec h.
L'utilisation d'un logiciel (Cabri-Géomètre par exemple) permet une première approche.





On peut ainsi aisément **conjecturer** que la limite du rapport $\dfrac{\sin h}{h}$ est 1 lorsque h tend vers 0.

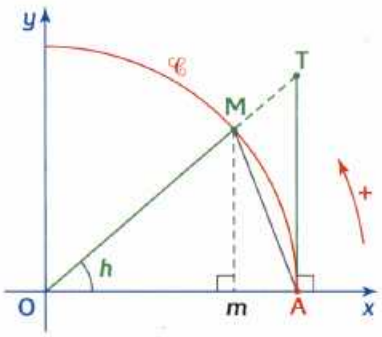
De même, si vous faites afficher sur votre calculatrice la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, vous pouvez aussi conjecturer que la limite est 1.



Ce qui suit a pour but de démontrer ce résultat.

1. Supposons h dans l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.
Notons M le point de $\mathscr{C}$ tel que h est la mesure principale en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
h est donc aussi la mesure principale en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOM}$.
Dans ces conditions et avec les notations de la figure, on sait que $OA = 1$; $Om = \cos h$; $Mm = \sin h$ et l'arc $\overset{\frown}{AM}$ a pour longueur h.



L'aire du triangle OAM est inférieure à l'aire du secteur circulaire OAM, elle-même inférieure à l'aire du triangle OAT :

$$\mathscr{A}(\text{triangle OAM}) \leqslant \mathscr{A}(\text{secteur circulaire OAM}) \leqslant \mathscr{A}(\text{triangle OAT}) \quad [1].$$

a) Prouvez que l'aire du secteur circulaire OAM est $\dfrac{h}{2}$.

b) Prouvez que l'aire du triangle OAM est $\dfrac{1}{2}\sin h$.

c) Prouvez que l'aire du triangle OAT est $\frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{\cos h}$.

d) Déduisez-en que les inégalités [1] s'écrivent :

$$\sin h \leqslant h \leqslant \frac{\sin h}{\cos h}.$$

e) Tous les réels qui interviennent dans ces inégalités étant positifs, déduisez-en que :

$$\frac{\sin h}{h} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \cos h \leqslant \frac{\sin h}{h},$$

et que pour tout réel h appartenant à $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos h \leqslant \frac{\sin h}{h} \leqslant 1$.

2. Supposons h dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$.

Posons $h' = -h$, alors $h' > 0$ et d'après l'étude précédente, $\cos h' \leqslant \frac{\sin h'}{h'} \leqslant 1$.

Déduisez-en que, pour tout réel h, $h \neq 0$, dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos h \leqslant \frac{\sin h}{h} \leqslant 1$.

3. La fonction usuelle $x \mapsto \cos x$ a pour limite 1 en 0. Déduisez-en $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$.

2 Limite en zéro de $h \mapsto \frac{\cos h - 1}{h}$

Le calcul de la limite en 0 de $\frac{\cos h - 1}{h}$ nous conduit aussi à une forme indéterminée car numérateur et dénominateur tendent vers 0 avec h.

1. Une solution

a) En remarquant que $\cos h = 1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}$, prouvez que $\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$.

b) Lorsque h est très voisin de 0, $\frac{h}{2}$ est très voisin de 0.

De quel nombre $\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ est-il alors voisin ?

Déduisez-en $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$.

2. Autre solution

En remarquant que $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h - \cos 0}{h - 0}$, justifiez que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ est le nombre dérivé d'une fonction usuelle en 0 (voir *Comprendre* p. 31).

Retrouvez ainsi le résultat précédent.

TD 3 Valeurs approchées d'une solution d'une équation $f(x) = 0$

1 Explications sur un exemple

On se propose de résoudre l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ (E).

En désignant par f la fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 1$, l'équation (E) s'écrit $f(x) = 0$.

1. Existence d'une solution

a) Étudiez la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ puis démontrez que l'équation (E) a une solution et une seule que l'on note α, et que $0 < \alpha < 1$.

b) Représentez la fonction f restreinte à l'intervalle $[0 ; 1]$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 10 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée).

2. Construction de deux suites (par dichotomie)

Nous allons définir deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers α. Pour cela, nous allons encadrer α de plus en plus finement en utilisant le principe suivant :

• On partage l'intervalle $[0 ; 1]$ en deux intervalles de même longueur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

• On cherche celui de ces deux intervalles qui contient α : si c'est $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, on pose $u_1 = 0$ et $v_1 = \frac{1}{2}$, si c'est $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, on pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = 1$.

• Puis à partir de l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ (ou $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$) qui contient α, on réitère l'opération : partage en deux, localisation de α, ...

On construit ainsi deux suites :

• celle des extrémités inférieures qui est croissante. Notons-la (u_n), avec $u_0 = 0$;

• celle des extrémités supérieures qui est décroissante. Notons-la (v_n), avec $v_0 = 1$.

La localisation est facilitée par la monotonie de la fonction f.
(Pour tout n, $f(u_n) \leqslant 0 \leqslant f(v_n)$.)

a) Vérifiez que $[u_1 ; v_1] = [0 ; 0{,}5]$ et que $[u_2 ; v_2] = [0{,}25 ; 0{,}5]$. Placez les réels u_1, v_1, u_2 et v_2 sur l'axe des abscisses.

b) Trouvez u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5 et placez-les sur l'axe des abscisses.

c) Démontrez que, pour tout entier n, $v_n - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $v_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\alpha - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Déduisez-en le nombre de partages nécessaires pour parvenir à un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3}. Trouvez cet encadrement.

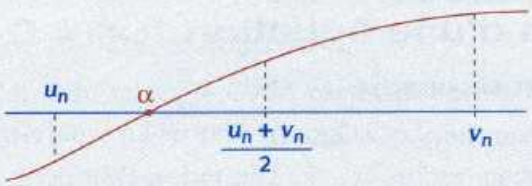
d) Expliquez pourquoi les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite. Soit α leur limite commune. Quel théorème a-t-on vérifié avec cet exemple ?

CONCLUSION

Ce que nous venons de faire sur un exemple est généralisable. Lorsqu'une solution de l'équation $f(x) = 0$ est localisée dans un intervalle $[a ; b]$, la dichotomie consiste à définir deux suites (u_n) et (v_n) encadrant et convergeant vers cette solution.

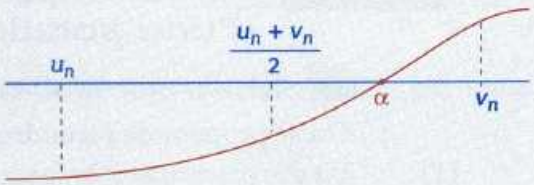
• Lorsque $f(u_n)$ et $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$ sont de signes contraires, on pose :

$$u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$



• Lorsque $f(u_n)$ et $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$ sont de même signe, on pose :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = v_n.$$



Note. Ces deux suites sont des suites adjacentes (voir le chapitre 7, page 170). Ces suites sont utilisées dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

2 Programmation sur la calculatrice

f est une fonction strictement monotone et continue sur $[a\,;b]$ et $f(a)\,f(b) < 0$. On se fixe une précision d. Dans cette partie, on veut trouver par la méthode de dichotomie présentée précédemment, un encadrement du type $u < x < v$ avec $v - u < d$, x étant la solution dans $[a\,;b]$ de l'équation $f(x) = 0$.

1. Algorithme commenté

algorithme	commentaires
Lire U Lire V Lire D Tant Que V– U > D Faire Si f(U) × f((U+V)/2) < 0 Alors U←(U+V)/2 Sinon V←(U+V)/2 Fin du Si Fin du Tant Que Afficher (U < x < V)	On met dans U la valeur de a (début de l'intervalle). Dans V, on met la valeur b (fin de l'intervalle). D : Précision. Ici 10^{-3}. Dans la boucle Tant Que, les valeurs successives de U et V définissent les deux suites décrites précédemment.

2. Programmes

Note
Dans les programmes, évidemment, f(U) et f(T) doivent être remplacés par les expressions concrètes.

famille Casio	famille TI83
"A=" : ?→U "B=" : ?→V "D=" : ?→D While V–U > D (U+V)/2→T If f(U) × f(V) < 0 Then T→V Else T→U IfEnd WhileEnd "U=" : U ◢ "<" ; "V=" : V	Input "A", U Input "B", V Input "D", D While V–U > D (U+V)/2→T If f(U) × f(V) < 0 Then T→V Else T→U End End Disp U, "<", V

3. Applications

a) Programmez votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de la solution positive de l'équation $2x^4 + x - 2 = 0$.

b) Programmez votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de la solution de l'équation $x^3 - 2x + 5 = 0$.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. 2. 3. Limite d'une fonction

Pour les exercices 1 à 5, dans chacun des cas, étudiez la limite de la fonction f en l'endroit indiqué. Lorsque f n'est pas définie au réel indiqué, étudiez la limite à droite et la limite à gauche.

1 **a)** $f(x) = 5x^3 - 3x + 1$; en $-\infty$, en $+\infty$.

b) $f(x) = -2x^4 + 3$; en $-\infty$, en $+\infty$.

c) $f(x) = -x^3 - x^2 - x - 1$; en $-\infty$, en $+\infty$.

2 **a)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en 1.

b) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en 1.

c) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en 2.

3 **a)** $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+1}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en -1.

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en 3.

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; en $-\infty$, en $+\infty$.

4 **a)** $f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en -2.

b) $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x^2}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en 0.

c) $f(x) = x^2 + 3x - \dfrac{1}{1+x}$; en $-\infty$, en $+\infty$, en -1.

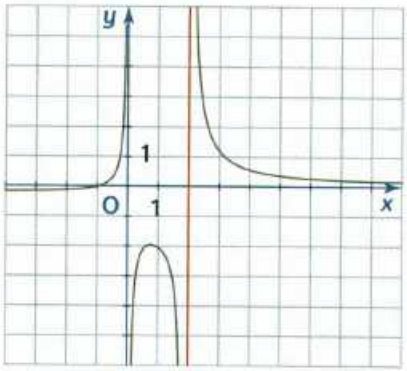
5 **a)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 et en 2.

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x-2}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 et en 2.

c) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{(1-x)^2}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 1.

6 La courbe $\mathscr{C}_f$, ci-après, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{0\,;2\}$. Conjecturez les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$.

Aide. Voir l'exercice résolu 3, page 25.



7 Déterminez la limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x-1}{x-1}$, puis trouvez un réel A tel que, si $x > A$, alors $f(x)$ est dans l'intervalle $]4{,}9\,;5{,}1[$.

Aide. Voir l'exercice résolu 2, page 23.

8 Déterminez la limite en 1 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$, puis trouvez un réel α tel que, si x est dans l'intervalle $]1-\alpha\,;1+\alpha[$, alors $f(x) > 10^3$.

Aide. Voir l'exercice résolu 4, page 25.

9 Déterminez la limite en 5 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$, puis trouvez un intervalle I centré en 5 tel que si x est dans I, alors $f(x)$ est dans l'intervalle $]3{,}95\,;4{,}05[$.

Aide. Voir l'exercice résolu 2, page 23.

10 **1.** Étudiez la limite en $-\infty$, en $+\infty$, en 1 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

2. Précisez les équations des asymptotes et la position de la courbe représentative par rapport à l'asymptote horizontale.

Aide. Voir l'exercice résolu 1, page 23.

11 Étudiez les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -1 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$. Précisez les équations des asymptotes et la position de la courbe représentative par rapport à l'asymptote horizontale.

Aide. Voir l'exercice résolu 1, page 23.

Pour les exercices 12 à 17, dans chacun des cas, étudiez à l'aide des règles opératoires la limite de la fonction f en l'endroit indiqué. Lorsque f n'est pas définie au réel indiqué, étudiez si nécessaire la limite à droite et à gauche.

12 **a)** $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 5$; en $+\infty$.

b) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{5}{x}$; en $+\infty$, en 0.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 12, page 33.

13 **a)** $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$; en 1.

b) $f(x) = (2x-3)(5-\sqrt{x})$; en $+\infty$, en $\dfrac{3}{2}$.

14 **a)** $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{x}$; en 0, en $+\infty$.

b) $f(x) = 2x + \sin x$; en $\dfrac{\pi}{2}$, en $+\infty$.

15 **a)** $f(x) = x^2 - 2x - 5$; en $+\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x}{x+1}$; en $+\infty$.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 27.

16 **a)** $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 7$; en $+\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2+1}$; en $+\infty$.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 27.

17 **a)** $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$; en $+\infty$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$; en $-\infty$.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 6, page 27.

4. Théorèmes de comparaison

18 f est une fonction telle que pour tout $x > 1$,

$$\frac{3x + \cos x}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3x+7}{x-1}.$$

f a-t-elle une limite en $+\infty$?

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 7, page 29.

19 Démontrez que pour tout $x > -1$,

$$\frac{-1}{x+1} \leqslant \frac{\cos x}{x+1} \leqslant \frac{1}{x+1}.$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x+1}$ a-t-elle une limite en $+\infty$?

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 7, page 29.

20 f est une fonction telle que pour tout $x \geqslant 0$,

$$|f(x) - 3| \leqslant \frac{1}{x+1}.$$

f a-t-elle une limite en $+\infty$?

Pour les exercices 21 à 26, vous pouvez vous reporter à l'exercice résolu 9, page 29.

21 f est une fonction telle que pour tout réel $x < 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{1}{4}x^2$. f a-t-elle une limite en $-\infty$?

22 Démontrez que pour tout réel x,

$$1 \leqslant 2 - \cos x \leqslant 3.$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2-\cos x}$ a-t-elle une limite en $+\infty$?

23 Démontrez que pour tout x, $x^2 - 5\sin x \geqslant x^2 - 5$. La fonction $f : x \mapsto x^2 - 5\sin x$ a-t-elle une limite en $+\infty$? en $-\infty$?

24 La fonction $f : x \mapsto x^2 + x\sin x$ a-t-elle une limite en $+\infty$? en $-\infty$?

25 f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}.$$

1. Vérifiez que pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}.$$

2. Déduisez-en que pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

26 f est une fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}.$$

1. Démontrez que pour tout $x > 1$:

$$\frac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+1}{x-1}.$$

2. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

5. Limite d'une fonction composée

Pour les exercices 27 à 31, étudiez la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

27 **a)** f est définie sur $]5 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$; en 5.

b) $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$; en $-\infty$.

28 **a)** f est définie sur $]-\infty ; 1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$; en $-\infty$.

b) f est définie sur $]-1 ; 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; en -1 et en 1.

29 **a)** $f(x) = \cos \pi x + \dfrac{1}{(x-1)^2}$; en 1.

b) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x + 1}{x+2}\right)$; en $+\infty$.

30 **a)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$; en $-\infty$.

b) $f(x) = \sin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; en $+\infty$.

31 **a)** $f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^3$; en $+\infty$.

b) $f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{x}$; en $+\infty$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 10, page 31.

32 ZOOM SUR... **le théorème 7**

f est la fonction définie sur $I = [0\,;3]$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x - 2.$$

1. **a)** Justifiez que f est dérivable sur I et calculez $f'(x)$.

b) Pourquoi le théorème 7 permet-il d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I ?

2. g est la fonction définie sur $J = [0\,;2]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = 2x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ g(x) = -2x + 5 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

a) On s'intéresse à l'équation $g(x) = 0$ dans J. Le théorème 7 est-il applicable ? Justifiez avec soin votre réponse.

b) Vérifiez cependant que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans J.

☞ **Commentaire.** **Le théorème 7 ne donne que des conditions suffisantes (stricte monotonie et continuité) pour l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation $f(x) = 0$. Cet exercice montre qu'elles ne sont pas nécessaires.**

6. Asymptote oblique

Pour les exercices 33 à 35, pour chacune des fonctions, dites si sa courbe représentative admet la droite Δ proposée comme asymptote oblique en $+\infty$, en $-\infty$ et précisez la position de la courbe par rapport à Δ.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 11, page 31.

33 **a)** $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{10}{x+1}$; $\Delta : y = 2x + 3$.

b) $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $\Delta : y = -x + 1$.

34 **a)** $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$; $\Delta : y = x$.

b) $f(x) = 3x + 7 - \dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$; $\Delta : y = 3x + 7$.

35 **a)** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$; $\Delta : y = 2x + 1$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2}$; $\Delta : y = x - 2$.

7. et 8. Fonctions continues

Dans les tableaux de variations, par convention, les flèches obliques indiquent la stricte monotonie sur l'intervalle considéré.

Pour les exercices 36 à 39, vous pouvez vous reporter aux exercices résolus 14, 15 et 17, pages 35 et 37.

36 Voici le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

Pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet-elle une unique solution dans l'intervalle $]1\,;2[$?

37 Voici le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Pourquoi l'équation $f(x) + 1 = 0$ a-t-elle trois solutions distinctes et trois seulement dans $\mathbb{R}$?

38 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

1. Calculez $f(-1)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$.

2. Déduisez-en que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois racines réelles distinctes dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

39 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + 3x - x^3.$$

1. Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. **a)** Calculez $f'(x)$ puis étudiez le signe de $f'(x)$.

b) Dressez le tableau de variations de f.

3. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique dans chacun des intervalles suivants :

$$[-2\,;-1]\,;\ [-1\,;1]\,;\ [1\,;2].$$

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

40 Un changement de variable

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}.$$

Objectif : étudier la limite de f en 0.

1. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

Vérifiez-le.

2. L'expression de $f(x)$ fait penser à la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ dont la limite en 0 est 1 (voir le TD 2, page 40). D'où l'idée d'utiliser un changement de variable.

Effectuez le changement de variable $X = 3x$, puis concluez.

3. Autre solution. $f(x)$ peut s'écrire $\frac{\sin 3x - \sin 0}{x - 0}$.

Cette expression est le taux de variation entre x et 0 de la fonction $x \mapsto \sin 3x$.

En suivant cette piste, trouvez la limite de $f(x)$ en 0.

41 Courbes asymptotes

f est la fonction définie sur $]-2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x + 2}$$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

Objectif : savoir s'il existe une droite ou une courbe « connue » « proche de $\mathscr{C}$ » au voisinage de $+\infty$.

1. Un premier réflexe est de calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

Faites-le.

2. Pour calculer cette limite, nous avons utilisé le fait que f est une fonction rationnelle et donc que sa limite en $+\infty$ est celle du quotient $\frac{x^3}{x}$, c'est-à-dire de x^2.

Il n'y a donc pas d'espoir de trouver une droite asymptote car à l'infini, $f(x)$ n'est pas équivalent à $ax + b$ mais « se comporte » comme x^2. D'où l'idée d'étudier $f(x) - x^2$.

a) Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x^2]$.

b) Expliquez pourquoi la courbe $\mathscr{C}$ et la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ sont « de plus en plus proches » lorsque x tend vers $+\infty$.

Déduisez-en l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Représentez $\mathscr{P}$ puis $\mathscr{C}$.

☞ **Note.** **$\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ sont dites courbes asymptotes (en $+\infty$).**

42 Comparer des branches infinies

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } g(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$

Objectif : comparer le comportement en $+\infty$ de ces deux fonctions.

Les polynômes $x^2 + 1$ et $x^2 + x$ ont le même terme dominant x^2. On pourrait conjecturer que $f(x)$ et $g(x)$ se comportent pour les « grandes valeurs » de x comme $\sqrt{x^2} = x$.

a) Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) En utilisant la méthode de l'expression conjuguée, calculez :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] \text{ et } \lim_{x \to +\infty} [g(x) - x].$$

Que pensez-vous de la conjecture faite ?

c) Sans nouveau calcul, précisez

$$\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]$$

et concluez.

43 Polynôme de degré impair

L'écriture générale d'un polynôme P de degré n est :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

avec x réel et $a_n \neq 0$.

Objectif : démontrer que si n est impair, P admet au moins une racine.

1. Il s'agit de prouver, lorsque n est impair, qu'il existe au moins un réel c tel que $P(c) = 0$. Le problème est si général qu'il est exclu de penser dresser un tableau de variations. Mais P étant continu, on peut penser à trouver deux nombres a et b tels que $P(a) \times P(b) < 0$.

Quel théorème permet alors de conclure ?

2. Mais il faut toujours se demander à quoi sert une hypothèse. Ici on se demande à quoi sert l'hypothèse n impair ? Pour comprendre l'intérêt de cette hypothèse, prenons par exemple les polynômes P définis par $P(x) = x^3$, $P(x) = -2x^5$, $P(x) = x^7$ et dressons les tableaux de variations pour chacun d'eux. Vous remarquerez chaque fois que l'image de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$... Ce n'est pas étonnant car ceci est vrai pour tout polynôme P de degré n impair.

a) Précisez les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$.
(Envisagez deux cas $a_n > 0$ et $a_n < 0$.)

b) Précisez $f(\mathbb{R})$ et concluez.

☞ **Remarque.** **Cet exercice prouve l'existence d'une racine lorsque n est impair mais ne prouve pas l'unicité.**

Pour progresser

Limites de fonctions

Pour les exercices 44 à 48, dans chacun des cas, étudiez les limites de la fonction f aux endroits indiqués.
Lorsque f n'est pas définie au réel indiqué, étudiez la limite à droite et la limite à gauche.

44 $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 et en 5.

☞ **Aide.** Pensez au signe du trinôme.

45 **a)** $f(x) = \dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 2 et en -2.

b) $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 et en -2.

46 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 3 et -3.

b) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$; en $+\infty$, en $-\infty$, en 1.

47 **a)** $f(x) = 2x + \sin x$; en $+\infty$, en $-\infty$.

b) $f(x) = x^3(2+\cos x)$; en $+\infty$, en $-\infty$.

48 **a)** $f(x) = 3x - 1 + \sin x$; en $+\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$; en 1, en $+\infty$.

49 • Étudiez les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x}.$$

☞ **Aide.** Voir l'exercice 22, page 45.

50 • f est la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1\,;2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

1. Trouvez les trois réels a, b, c tels que pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-2}$.

2. Étudiez alors la limite de f aux bornes des trois intervalles constituant $\mathcal{D}$.

51 • f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

1. Étudiez la limite de f en 1.

2. Trouvez un intervalle I de centre 1 tel que pour tout x de I différent de 1, $f(x) > 10^6$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 25.

Pour les exercices 52 à 58, dans chacun des cas, étudiez la limite de la fonction f aux endroits indiqués.

52 • **a)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$; en $+\infty$.

b) $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x$; en $-\infty$.

53 • **a)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; en 3.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$; en 0.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 27.

54 • **a)** $f(x) = \dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$; en $+\infty$, en 1.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$; en $+\infty$, en -1.

55 • **a)** $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{x}$; en 0.

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$; en 0, en $+\infty$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice 40 page 47.

56 • $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; en 0.

☞ **Aide.** Voir le TD 2, page 40.

57 • $f(x) = \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; en 0.

☞ **Aide.** Voir le TD 2, page 40.

58 • $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$; en 2.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 27.

59 • f est la fonction définie sur $]-5\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}.$$

1. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduisez-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2. Retrouvez cette dernière limite en explicitant $f(f(x))$.

60 • Reprenez les questions de l'exercice précédent avec la fonction f définie sur $]3\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-3}.$$

Asymptotes

61 La fonction f est telle que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}.$$

$\mathscr{C}$ est sa représentation graphique.
Déterminez les réels a, b et c tels que :

a) $\mathscr{C}$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x=3$;

b) $\mathscr{C}$ a pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y=2x-5$;

c) $\mathscr{C}$ passe par le point A(1 ; 2).

Pour les exercices 62 à 68, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative, dans un repère donné, de la fonction f et $\mathscr{D}$ son domaine de définition.
Précisez dans chaque cas, lorsqu'elles existent, les asymptotes (verticales, horizontales ou obliques) à la courbe $\mathscr{C}$.

☞ **Note.** Le jour du bac, la démarche à suivre pour trouver une asymptote oblique est, en général, donnée comme dans les exercices 33 à 35 de la rubrique *Maîtriser le cours*.
Vous pouvez vous reporter au TD 1, page 39 et à l'exercice résolu 11, page 31.

62 • **a)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{1\}$.

b) $f(x) = -x + 3 + \dfrac{2}{x^2+1}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

63 • **a)** $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

b) $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+3}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

64 • $f(x) = \dfrac{x^2+6x+1}{x^2-1}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$.

65 • $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{1\}$.

☞ **Aide.** Trouvez des réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

66 • $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

☞ **Aide.** Trouvez des réels a, b, c et d tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2+2}$.

67 • $f(x) = |x+1| + \dfrac{3}{x}$, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

68 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}.$$

1. a) Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)]$.

b) Déduisez-en l'existence d'une asymptote oblique Δ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$.

c) Étudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et de Δ.

2. a) Calculez $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Prouvez qu'il existe un réel a tel que :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a,$$

puis que $x \mapsto f(x) - ax$ a une limite finie b en $-\infty$.

c) Déduisez-en que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ' en $-\infty$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice 42, page 47.

69 • BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudiez la limite de f en $-\infty$. Interprétez graphiquement ce résultat.

2. Prouvez que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. Étudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et de Δ.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 42, page 47.

70 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2-1|}$$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

1. Précisez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$.

b) Calculez $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$.

3. a) Déduisez-en que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes obliques Δ_1 et Δ_2.
Donnez pour chacune une équation.

b) Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à chacune de ses asymptotes obliques.

71 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Prouvez que la droite Δ d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Étudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. Est-il vrai que la droite Δ' d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$?

Courbes asymptotes

72 • Recherchez une courbe asymptote (représentative d'une fonction usuelle) à la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = -2x^2 + \frac{1}{x+1}$$

et précisez la position des deux courbes.

☞ **Aide.** Voir l'exercice 41, page 47 et le TD 1, page 39.

73 • Recherchez une courbe asymptote (représentative d'une fonction usuelle) à la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

et précisez la position des deux courbes.

☞ **Aide.** Voir l'exercice 41, page 47 et le TD 1, page 39.

EXERCICES

Continuité

74 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

Précisez $f(-1)$ et $f(0)$ et démontrez l'existence d'un réel c dans l'intervalle $]-1\,;0[$ tel que $f(c) = 0$.

75 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}.$$

1. Démontrez que f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;-1\right[$.

2. Complétez le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{3}{2}\,;-1\right[$.

3. Déterminez $f\left(\left[-\frac{3}{2}\,;-1\right[\right)$ et déduisez que l'équation $f(x) = 10$ a une solution unique dans $\left[-\frac{3}{2}\,;-1\right[$.

76 • f est la fonction définie sur $I = [0\,;3]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Précisez $f(I)$.

77 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Vérifiez que f est continue sur $\mathbb{R}$ et précisez $f(\mathbb{R})$.

78 • La fonction f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

79 • **1.** Représentez sur l'écran de votre calculatrice les courbes représentatives de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x$, pour x appartenant à l'intervalle $I =]0\,;\pi]$.
Conjecturez le nombre de solution(s) dans I de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}x$.

2. f est la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x.$$

a) Justifiez que f est dérivable pour tout x de I et calculez $f'(x)$. Vérifiez que $f'(x)$ s'annule pour $x = \frac{\pi}{3}$.

b) Dressez le tableau de variations de f.

3. a) Déduisez de la question précédente que l'équation $\sin x = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution α dans l'intervalle I.

b) Déterminez un encadrement de α de longueur 10^{-4}.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 16 et 17, page 37.

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

80 • **1.** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$

a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Trouvez un nombre $A > 0$ tel que $x > A$ implique $f(x) > 10^6$.

☞ **Note.** **On ne demande pas de trouver le plus petit de ces nombres A, seulement d'en trouver un.**

2. Même question avec $f(x) = 2x^4 - x^3 - x^2$.

81 • Étudiez la limite en -2 de :

$$f : x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x-6}}.$$

82 • Étudiez la limite en $+\infty$ de :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{3x^2}.$$

83 • Étudiez la limite en $+\infty$ de :

$$f : x \mapsto x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right).$$

84 • n est un entier naturel non nul.
Démontrez que l'équation $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ admet une racine comprise entre $\frac{2n}{n+1}$ et 2.

85 •• f est une fonction continue définie sur $I = [0\,;1]$ telle que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à I.
Démontrez qu'il existe au moins un réel a de I tel que $f(a) = a$.

86 •• A et B sont deux points d'un cercle de centre O tels que $\widehat{AOB} < 180°$.
M est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Les tangentes en A et B au cercle se coupent en T et la tangente en M au cercle coupe (TA) en A' et (TB) en B'. Quelle est la limite de $\frac{\text{aire (A'TB')}}{\text{aire (ATB)}}$ (si elle existe) lorsque A tend vers B ?

Problèmes

87 • BAC

Thèmes : *Fonctions irrationnelles. Limites. Asymptotes obliques. Changement de repère*

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\mathscr{R}(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrez que $\mathscr{C}$ a un axe de symétrie.

2. Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Vérifiez que pour tout réel x, $f(x) - x = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

Déduisez-en que $\mathscr{C}$ a une asymptote oblique d en $+\infty$.
Précisez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à d.

4. $\mathscr{C}'$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -f(x)$.
$\mathscr{H}$ est la réunion des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
Vérifiez que $\mathscr{H}$ a pour équation dans $\mathscr{R}$: $y^2 - x^2 = 1$.

5. On considère un nouveau repère $\mathscr{R}(O ; \vec{u}, \vec{v})$ avec :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}).$$

Un point M de coordonnées $(x ; y)$ dans $\mathscr{R}$ a pour coordonnées $(X ; Y)$ dans $\mathscr{R}'$.
Exprimez x et y en fonction de X et Y.
Donnez une équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}'$.
Tracez $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}'$.

88 • BAC

Thèmes : *Valeurs absolues. Variations. Résolution d'équation*

f est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par :

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère donné.

1. a) Donnez une écriture de $f(x)$ sans valeur absolue.

b) Étudiez les limites de f aux bornes des intervalles de $\mathscr{D}_f$.

2. a) Exprimez $f'(x)$ et étudiez le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}_f$.

b) Dressez le tableau de variations de f.

3. a) Vérifiez que les droites d'équations $y = x + 1$ et $y = -x - 1$ sont asymptotes obliques à $\mathscr{C}$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à ses asymptotes.

b) Trouvez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

c) Tracez T, les asymptotes puis $\mathscr{C}$.

4. En utilisant une propriété des fonctions continues et monotones sur un intervalle que vous préciserez, démontrez que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur l'intervalle $]-1 ; 1[$ et donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

89 •

Thèmes : *Fonctions polynômes et équations du troisième degré. Image d'un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires*

A. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c et d sont quatre réels ($a \neq 0$).

1. Étudiez suivant le signe de a, la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)$.

2. Prouvez que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3. Déduisez-en que toute équation du troisième degré admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

B. Dans cette partie, $f(x) = 2x^3 - x - 1$.

1. Étudiez les variations de f.

2. Justifiez que l'équation $2x^3 = x + 1$ admet une unique solution réelle.

3. Donnez la valeur exacte de cette solution.

C. Dans cette partie, $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 1$.

1. Prouvez que l'équation $f(x) = 0$ admet (au moins) une solution dans l'intervalle $I = [0 ; 1]$.

2. Étudiez les variations de f.

3. Justifiez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I.

4. Calculez $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Que pouvez-vous en déduire pour le réel α ?

5. Donnez une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

90 **1.** L'équation $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a aucune solution. **b** une unique solution. **c** exactement deux solutions. **d** trois solutions.

2. La fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x - 3}$:

a a pour limite 3 en $+\infty$. **b** a pour limite $+\infty$ en 3. **c** a pour limite 2 en $+\infty$.

3. Dans un repère donné, la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f définie par :

a $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$. **b** $f(x) = x\sqrt{x - 1}$. **c** $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{x + 1}$. **d** $f(x) = x - 1$. **e** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre réponse.

91 BAC

1. Si A est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[A ; +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$, g ne s'annulant pas.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$.

3. Si f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

92 **Concours E.S.I.E.E., Mai 2005**

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans un repère orthonormal d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Soit Δ la droite d'équation $y = x - 3$.

1. Si Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Si Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ alors $\mathscr{C}$ ne peut admettre d'asymptote horizontale.

3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ alors Δ ne peut être asymptote à $\mathscr{C}$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

93 **D'après document ministériel.**

1. Démonstration de cours

Pré-requis. Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x « assez grands » (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A ; +\infty[$).

Démontrez le théorème suivant :

« soient u, v et w des fonctions définis sur $]1 ; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > 1$, $u(x) \leqslant v(x) \leqslant w(x)$. S'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \ell$ ».

2. Application

f est la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x + \sin x}{x - 1}.$$

a) Démontrez que pour tout $x > 1$:

$$|f(x) - 3| \leqslant \frac{4}{x - 1}.$$

b) Déduisez de la démonstration précédente la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3 Dérivation

1797

Le Calcul différentiel (*The Calculus* pour les Anglo-Saxons) a pour origine la recherche de solutions à trois grands types de problèmes : détermination des tangentes à une courbe, des extremums d'une fonction, des vitesses instantanées d'un mobile en mouvement. Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716), bien qu'ils aient travaillé sans se concerter et adopté des points de vue différents, sont considérés comme les fondateurs de ce calcul.

Mais c'est Lagrange qui, en 1797 dans son livre *Théorie des fonctions analytiques*, introduit le mot « dérivée » et la notation $f'(x)$ qu'il définit comme limite du taux de variation.

Louis Lagrange
1736 – 1813

Pour donner au Calcul différentiel des bases rigoureuses, leurs successeurs devront élucider complètement les notions de fonction, de limite, d'infiniment petit... Les nombres réels, les fonctions, les limites de fonctions, deviendront alors, dans cet ordre, les notions de base de l'Analyse mathématique.

À LA MÊME ÉPOQUE

FRANCE

En 1793, l'île Bourbon devient l'île de la Réunion, en souvenir de l'union des Marseillais et des gardes nationaux pour l'assaut des Tuileries, le 10 août 1792.

MÉDECINE

L'anglais E. Jenner découvre la vaccination. Il parvient à immuniser un garçon en lui injectant un extrait des pustules causées par une maladie bovine.

MUSIQUE

Mozart meurt en 1791, année où il compose *la Flûte enchantée*. Génie absolu, il laisse au terme de sa courte vie une œuvre immense, dans laquelle il a réussi la synthèse des courants de deux siècles de musique européenne.

1 Définitions (rappels)

Notations. Dans tout ce chapitre, pour une fonction f, $\mathscr{D}_f$ désigne son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. De plus, $\mathscr{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

1.1 Nombre dérivé. Fonction dérivée

DÉFINITION 1

f est une fonction et a est un point de $\mathscr{D}_f$. Dire que **f est dérivable en a** et, que **le nombre dérivé de f en a** est le réel ℓ, signifie que l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

1. la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite ℓ en 0 ;
2. la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a pour limite ℓ en a.

Note
Voir *Comprendre* chapitre 2 page 31.

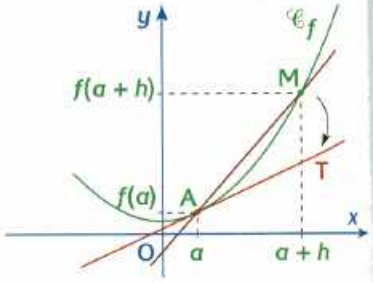
- Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.
- Lorsque f est dérivable en tout point a de $\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles, on dit que f est dérivable sur $\mathscr{D}$.

Lorsque f est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$, **la fonction dérivée** de f sur $\mathscr{D}$ est la fonction f' qui, à tout a, associe $f'(a)$.

1.2 Tangente. Approximation affine locale

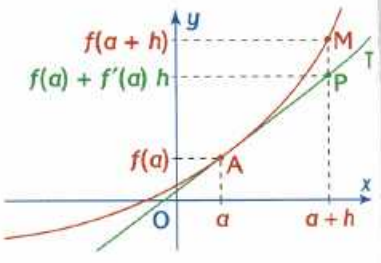
f est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ et $a \in \mathscr{D}$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;f(a))$ est la droite T passant par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$. Une équation de T est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$



Remarque.
La tangente se conçoit comme « la position limite » des sécantes (AM) lorsque « M se rapproche de A » sur la courbe.

Localement, on peut remplacer la fonction f par la fonction affine représentée par T. On peut donc remplacer $f(x)$ par $f'(a)(x-a)+f(a)$ pour x voisin de a ou encore, en écrivant $x = a+h$, $f(a+h)$ par $f'(a)h+f(a)$ pour h voisin de zéro. Nous admettrons que c'est la meilleure des approximations affines. On dit alors que $f'(a)h+f(a)$ est **l'approximation affine locale** de $f(a+h)$ pour h voisin de zéro.



Remarque.
En physique, on écrit souvent $\Delta f \approx f'(a)\Delta x$ pour exprimer cette approximation.

COMPRENDRE

Dérivabilité et continuité

« f dérivable » implique « f continue » mais la réciproque est fausse.

Exemple.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

➜ EXERCICE RÉSOLU 1

Utilité des approximations affines

En général, il est plus facile de calculer $f(a)+hf'(a)$ que $f(a+h)$ car $f(a)+hf'(a)$ est un polynôme du premier degré en h, dont le calcul nécessite seulement une multiplication et une addition.

Exemple.

L'approximation affine de $\sin h$ en zéro est h. On peut donc dire que $\sin(0{,}003) \approx 0{,}003$.

Mais cette approximation de $\sin h$ par h n'a d'intérêt pour le calculateur que s'il connaît un majorant de l'erreur commise.

Or on sait démontrer que, pour tout h positif,

$$h - \frac{h^3}{6} \leqslant \sin h \leqslant h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120}$$

donc $\sin h \approx h - \frac{h^3}{6}$ avec une erreur inférieure à $\frac{h^5}{120}$.

Notation en physique

On écrit :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ ou } f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 — Utiliser la définition

ÉNONCÉ

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Prouvez que f n'est pas dérivable en zéro.

SOLUTION COMMENTÉE

Il s'agit d'étudier la limite en zéro de la fonction t :

$$x \mapsto t(x) = \frac{f(0+x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}, \ x \text{ non nul.}$$

Or, lorsque $x > 0$, $t(x) = 1$ et, lorsque $x < 0$, $t(x) = -1$.

Il en résulte que la fonction t n'a pas de limite réelle en 0 et f n'est pas dérivable en zéro.

➜ EXERCICES 1, 44 à 46

EXERCICE RÉSOLU 2 — Étudier l'existence de tangentes particulières

ÉNONCÉ

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On rappelle que $f'(x) = 2x$ pour tout réel x.

1) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à la droite d d'équation $y = -4x + 6$?

2) Existe-t-il des tangentes passant par le point A(−2 ; 3) ?

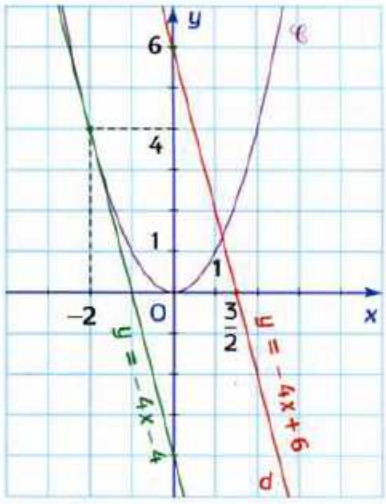
SOLUTION COMMENTÉE

Dans ce genre de problème, il est utile de commencer par écrire une équation de la tangente T_a en un point quelconque $(a ; f(a))$ de $\mathscr{C}$:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

1) Le coefficient directeur de d est -4, celui de T_a est $f'(a)$. Le problème est donc de savoir s'il existe des réels a tels que $f'(a) = 2a = -4$.

Il existe donc une tangente et une seule parallèle à d, celle qui passe par le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -2. Cette tangente a pour équation $y = -4x - 4$.



2) L'appartenance de A(−2 ; 3) à une tangente se traduit par :

$$3 = 2a(-2-a) + a^2.$$

La résolution de cette équation conduit à deux solutions $a = -3$ et $a = -1$. Donc il existe deux tangentes, et deux seulement, qui passent par A, l'une au point M_1 de $\mathscr{C}$ de coordonnées (−3 ; 9) et l'autre au point M_2 de $\mathscr{C}$ de coordonnées (−1 ; 1).

La tangente en M_1 a pour équation $y = -6x - 9$ et celle en M_2 a pour équation $y = -2x - 1$.

➜ EXERCICES 2, 4 à 6, 15 à 18

2 Dérivées des fonctions usuelles (rappels)

2.1 Dérivées et opérations

THÉORÈME 1

u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est une réunion d'intervalles) et k un réel. Alors $u+v$, $u-v$, uv et ku sont dérivables sur $\mathcal{D}$ et :

$$(u+v)' = u'+v' \quad ; \quad (u-v)' = u'-v' \quad ;$$
$$(uv)' = u'v+uv' \quad ; \quad (ku)' = ku' .$$

Si, de plus, v ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$ et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} .$$

Conséquences. Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

2.2 Principaux résultats

Note
Ce tableau sera complété cette année.

Notation
$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de zéro, donc la réunion :
$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

fonction	dérivée	commentaire
$x \mapsto k$ (constante)	$x \mapsto 0$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^n$, n entier relatif non nul	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$ $x \in \mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto -1$ si $x<0$ $x \mapsto 1$ si $x>0$	$x \in \mathbb{R}^*$

2.3 Calcul de la dérivée d'un polynôme

P est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Pour calculer $P'(x)$, on dérive chaque monôme u, puis on ajoute les fonctions dérivées u'.

monôme	$a_n x^n$	$a_{n-1}x^{n-1}$	...	$a_1 x$	a_0
dérivée	$na_n x^{n-1}$	$(n-1)a_{n-1}x^{n-2}$	...	a_1	0

Donc $\mathbf{P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1}$.

COMPRENDRE

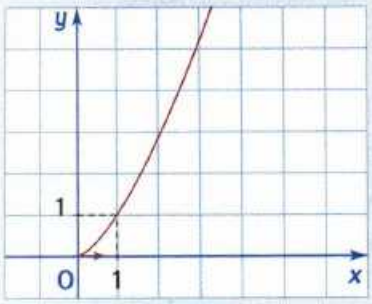
Appliquer le théorème 1

Pour appliquer le théorème 1, il n'est pas nécessaire que u et v aient le même ensemble de dérivabilité.
Il suffit que $\mathscr{D}$ soit inclus dans chacun des deux ensembles de dérivabilité.

À propos du théorème 1

Le théorème 1 n'énonce que des conditions **suffisantes** sur u et v.
Mais si ces conditions ne sont pas remplies, pour savoir si le produit uv est dérivable en a, il faut alors revenir à la définition du nombre dérivé.

Exemple.
Bien que la fonction racine carrée ne soit pas dérivable en zéro, la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable en zéro. Et $f'(0) = 0$. L'axe des abscisses est tangent à la courbe au point O origine du repère.



→ EXERCICE RÉSOLU 4

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Calculer des fonctions dérivées

ÉNONCÉ Pour chaque fonction, indiquez son ensemble de définition, son ensemble de dérivation, puis calculez sa fonction dérivée.

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{4}$.

2) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

3) $h(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x}$.

4) $k(x) = x^2 \cos x$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 10x + 1).$$

2) Pour tout réel x, $x^2 + x + 1 \neq 0$ (voir lexique page 478), donc g est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, et donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

g est de la forme $\dfrac{1}{f}$ dont la dérivée est $-\dfrac{f'}{f^2}$, donc :

$$g'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

3) h est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\,;0\}$.

h est de la forme $\dfrac{f}{g}$ dont la dérivée est $\dfrac{gf' - g'f}{g^2}$, d'où :

$$h'(x) = \frac{(x^2 + x)(2x + 2) - (2x + 1)(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + x)^2}$$

ou encore

$$h'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 2}{(x^2 + x)^2}.$$

4) k est produit de deux fonctions ($x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos x$) dérivables sur $\mathbb{R}$, k est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$k'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x.$$

→ EXERCICES 8 à 14

EXERCICE RÉSOLU 4 Étudier la dérivabilité d'une fonction

ÉNONCÉ f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

1) Justifiez que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculez $f'(x)$.

2) Démontrez, à l'aide de la définition du nombre dérivé, que f est dérivable en 0.

SOLUTION COMMENTÉE

1) Sur $[0\,;+\infty[$, f est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
Or u est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ mais v n'est dérivable que sur $]0\,;+\infty[$, donc

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1\sqrt{x}$

ou encore

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

2) Pour tout réel x, $x > 0$, $\dfrac{f(0 + x) - f(0)}{x} = \sqrt{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

→ EXERCICES 8 à 14, 44 à 46

3 Applications de la dérivation

3.1 Sens de variation (rappels)

THÉORÈME 2

Vocabulaire
Si g est une fonction, la notation $g > 0$ sur I signifie que, pour tout x dans I, $g(x) > 0$.

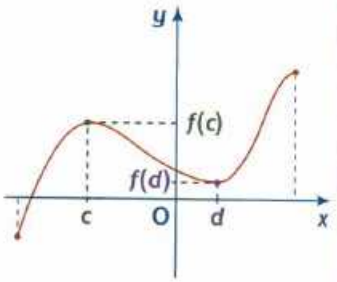
f est une fonction dérivable sur un **intervalle** I inclus dans $\mathscr{D}_f$.
Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, **alors f est strictement croissante sur I.**
Si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, **alors f est strictement décroissante sur I.**
Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

3.2 Extremum local (rappels)

DÉFINITION 2

f est une fonction définie sur un intervalle I et c un point de I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** de f en c signifie qu'il existe un intervalle ouvert J, contenant c tel que, pour tout x dans I et dans J,

$$f(x) \leqslant f(c).$$



De façon analogue, on définit un minimum local de f ($f(d)$ sur la figure).
Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local.

Il résulte de la définition 2 et du théorème 2 :

THÉORÈME 3

Note
Donc, lorsque $f(c)$ est un extremum local, la tangente à $\mathscr{C}$ en A(c ; $f(c)$) est horizontale.

f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I, c est un point de I.
1. **Si** $f(c)$ est un extremum local, **alors** $f'(c) = 0$.
2. **Si** f' s'annule en c **en changeant de signe, alors** $f(c)$ est un extremum local.

3.3 Résolution d'équations

THÉORÈME 4

f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Si $f' > 0$ sur $[a\,;\,b]$, sauf en quelques points où f' s'annule, alors pour tout réel k de l'intervalle $[f(a)\,;\,f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ a une **unique solution** dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Note
L'utilité de la continuité et de la stricte monotonie est expliquée chap. 2, p. 34, *Comprendre.*

Démonstration.
Nous avons vu au chapitre 2, p. 32, que toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. De plus, la condition $f' > 0$, sauf en quelques points où elle s'annule, assure la stricte monotonie de f sur $[a\,;\,b]$. Donc f satisfait aux hypothèses du théorème 7 du chapitre 2. D'où le résultat.

On dispose d'un résultat analogue avec $f' < 0$ sur $[a\,;\,b]$.

f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Si $f' < 0$ sur $[a\,;\,b]$, sauf en quelques points où f' s'annule, alors pour tout réel k de l'intervalle $[f(b)\,;\,f(a)]$, l'équation $f(x) = k$ a une **unique solution** dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

COMPRENDRE

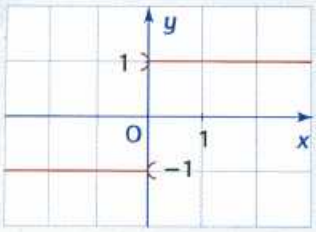
Nécessité du mot intervalle

Dans le théorème 2, si on remplace « intervalle » par « réunion d'intervalles », l'énoncé n'est plus vrai.

Exemple.

La fonction f définie par :

- $f(x) = -1$ si $x < 0$,
- $f(x) = 1$ si $x > 0$.



f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Cependant, f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Extremum local

Dans le théorème 3, pour dire que $f(c)$ est un extremum local, l'hypothèse $f'(c) = 0$ ne suffit pas.

Exemple.

$f(x) = x^3$, pour tout réel x, $f'(0) = 0$ et pourtant f n'a pas d'extremum en 0.

Mais si f' s'annule en c en changeant de signe alors $f(c)$ est un extremum local.

Équation $f(x) = 0$

Sous toutes les hypothèses du théorème 4, **lorsque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires**, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans $[a\,;b]$ (car alors 0 est dans l'un des intervalles $[f(a)\,;f(b)]$ ou $[f(b)\,;f(a)]$). On peut alors calculer des valeurs approchées en x_0 avec la précision voulue.

➜ EXERCICE RÉSOLU 5

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 — Localiser et approximer les solutions d'une équation $f(x) = 0$

ÉNONCÉ

Déterminez une valeur approchée à 10^{-2} près des éventuelles solutions de l'équation $\dfrac{x^3}{3x^2+8} = 1$.

SOLUTION COMMENTÉE

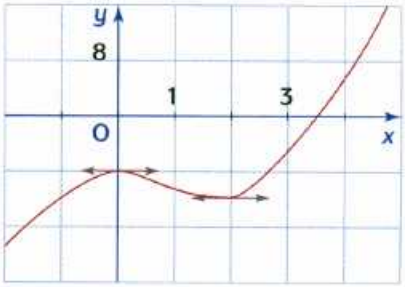
Puisque pour tout réel x, $3x^2 + 8$ est non nul, l'équation est équivalente à $x^3 - 3x^2 - 8 = 0$, soit en notant f le polynôme $x \mapsto x^3 - 3x^2 - 8$, à $f(x) = 0$.

f est un polynôme de degré 3 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et, comme f est un polynôme dont le terme de plus haut degré est x^3, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Il en résulte le tableau et la courbe suivants (le repère n'est pas orthonormal) :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-8	↘	-12	↗	$+\infty$



D'après ce tableau,

- sur $]-\infty\,;2[$, $f(x) \leqslant -8$ et $f(2) < 0$.
- sur $]2\,;+\infty[$, f est strictement croissante et $f(4) > 0$.

Donc f ne peut s'annuler ni sur $]-\infty\,;2[$, ni sur $]4\,;+\infty[$.

Sur $[2\,;4]$, f est continue et $f(2)$ et $f(4)$ sont de signes contraires.

D'après le théorème 4, l'équation admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in [2\,;4]$.

X	Y1
3.6	-.224
3.61	-.0504
3.62	.12473
3.63	.30145
3.64	.47974

Pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-2} près, on peut utiliser la méthode par balayage.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$3{,}61 < \alpha < 3{,}62.$$

➜ EXERCICES 24 à 26, 55 à 57

4 Dérivée d'une fonction composée

4.1 Théorème fondamental

Le théorème suivant permet de calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto g(u(x))$ lorsqu'on sait calculer les dérivées de g et de u.

Note
$\mathscr{D}'$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles ; il en est de même pour $\mathscr{D}$.

THÉORÈME 5

g est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}'$, u est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$, et pour tout x de $\mathscr{D}$, $\boldsymbol{u(x)}$ **appartient à** $\mathscr{D}'$.
Alors la fonction f définie par $\boldsymbol{f(x) = g(u(x))}$ est dérivable sur $\mathscr{D}$ et pour tout x de $\mathscr{D}$,

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)}.$$

Démonstration.

L'IDÉE de la démonstration
Elle consiste à faire apparaître les taux de variations $\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$ et $\frac{g(x)-g(u(a))}{x-u(a)}$ pour utiliser la dérivabilité de u en a et celle de g en $u(a)$.

Il s'agit de démontrer que, en un point a quelconque de $\mathscr{D}$, la fonction t définie par $t(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a pour limite en a le nombre $g'(u(a)) \times u'(a)$.
Supposons que pour tout x d'un voisinage de a et distinct de a, $u(x)$ est distinct de $u(a)$. Nous pouvons alors écrire pour tout x de ce voisinage :

$$t(x) = \frac{g(u(x))-g(u(a))}{u(x)-u(a)} \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \quad [1].$$

Or u est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a} = u'(a)$.

D'autre part, posons $h(x) = \frac{g(u(x))-g(u(a))}{u(x)-u(a)}$, puis $u(x) = \mathrm{X}$, alors :

$$h(x) = \frac{g(\mathrm{X})-g(u(a))}{\mathrm{X}-u(a)}.$$

Or u est dérivable en a donc elle est continue en a (voir *Comprendre* chap. 2, page 32) et ainsi $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{X} = u(a)$.

Alors $\lim\limits_{\mathrm{X} \to u(a)} \left(\frac{g(\mathrm{X})-g(u(a))}{\mathrm{X}-u(a)}\right) = g'(u(a))$ car g est dérivable en $u(a)$.

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to a} t(x) = g'(u(a)) \times u'(a)$, d'où le résultat.

Remarques.

1. On retrouve ainsi la formule admise en Première S (lorsque les hypothèses du théorème 5 sont satisfaites) :

$$\text{si } g(x) = f(ax+b), \text{ alors } g'(x) = af'(ax+b).$$

En effet, $u(x) = ax+b$ et $u'(x) = a$. En appliquant le théorème 5, on obtient le résultat.

2. Si g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors, dans le théorème 5, l'hypothèse « $u(x)$ appartient à $\mathscr{D}'$ » est toujours vérifiée.

3. Retenez que le nombre dérivé de $g \circ u$ en x est le produit de deux nombres dérivés : le nombre dérivé de la fonction g en $u(x)$, $g'(u(x))$, par le nombre dérivé de la fonction u en x, $u'(x)$.

COMPRENDRE

Que des conditions suffisantes

Le théorème 5 n'énonce que des conditions **suffisantes** sur g et u.
Mais si ces conditions ne sont pas remplies, pour savoir si $g \circ u$ est dérivable en a, il faut alors revenir à la définition du nombre dérivé.

→ EXERCICE RÉSOLU 6 COMPLÉMENT

Sur la preuve du théorème 5

Il a été démontré avec l'**hypothèse** « $u(x) \neq u(a)$ pour tout $x \neq a$ d'un voisinage de a » qui permet d'écrire l'égalité [1].
Pour toutes les fonctions que nous utiliserons, en pratique, cette hypothèse sera satisfaite.

Contre-exemple.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

avec $a = 0$.
On peut démontrer que, dans tout intervalle ouvert contenant 0, il existe une infinité de nombres x tels que $f(x) = f(a) = 0$.

→ EXERCICE 71, p. 80

Pour mémoriser

Lorsque $f(x) = g(u(x))$,

$f'(x) =$ dérivée de g en $u(x)$ × dérivée de u en x

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 6 Calculer la dérivée d'une fonction composée

ÉNONCÉ Calculez les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **2)** $f_2(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

3) $f_3(x) = \cos(x^2)$. **4)** $f_4(x) = \sin\sqrt{x}$ avec $x > 0$.

SOLUTION COMMENTÉE
Les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont des fonctions composées $g \circ u$. Dans chaque cas, il s'agit de reconnaître les fonctions g et u qui interviennent.

1) $g_1(x) = \cos x$ et $u_1(x) = 2x + \dfrac{\pi}{3}$; ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème 5, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme g_1 est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}$, d'après la remarque 2 de la page ci-contre, il est inutile de vérifier que $u_1(x)$ appartient à $\mathscr{D}'$).
Pour tout réel x, $g_1'(x) = -\sin x$ et $u_1'(x) = 2$, donc :

$$f_1'(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \times 2 = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

2) $g_2(x) = \sin x$ et $u_2(x) = \dfrac{1}{x}$; g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (théorème 5).
Pour tout réel x, $g_2'(x) = \cos x$ et, pour tout réel x non nul, $u_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donc pour tout réel x non nul, $f_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3) $g_3(x) = \cos x$ et $u_3(x) = x^2$, ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g_3'(x) = -\sin x$ et $u_3'(x) = 2x$, donc pour tout réel x,

$$f_3'(x) = -\sin(x^2) \times 2x = -2x\sin(x^2).$$

4) $g_4(x) = \sin x$ et $u_4(x) = \sqrt{x}$, g_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et u_4 sur $]0 ; +\infty[$ donc f_4 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Pour tout réel x, $g_4'(x) = \cos x$ et pour tout réel x, $x > 0$, $u_4'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc, pour tout $x > 0$, $f_4'(x) = \cos\sqrt{x} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

COMPLÉMENT **Étudier la dérivabilité de f_4 en 0**
f_4 est définie en zéro mais le théorème 5 ne permet pas de conclure sur la dérivabilité de f.
On revient alors à la définition du nombre dérivé.
Pour tout réel x, $x > 0$, $\dfrac{f_4(0+x) - f_4(0)}{x} = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$ car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

D'après le théorème de composition de limites, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} = +\infty$ et f n'est pas dérivable en zéro.

→ EXERCICES 27 à 36

4 Dérivée d'une fonction composée (suite)

4.2 Dérivation de $\sqrt{u}$

THÉORÈME 6

u est une fonction **strictement positive** et dérivable sur $\mathcal{D}$.
Alors la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout x dans $\mathcal{D}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 85

Démonstration. $f(x) = g(u(x))$ avec $g(x) = \sqrt{x}$; g est dérivable sur $\mathcal{D} =]0 ; +\infty[$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$ car u est strictement positive et dérivable sur $\mathcal{D}$.
Pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$ avec $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc $g'(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$.
On en déduit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$.

4.3 Dérivation de u^n (n entier relatif non nul)

THÉORÈME 7

u est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et n un entier non nul.
1. Si $n \geqslant 1$, la fonction f définie par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout x de $\mathcal{D}$:

$$f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x).$$

2. Si $n \leqslant -1$ et si, en outre, la fonction u ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$, alors la fonction g définie par $g(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout x réel de $\mathcal{D}$,

$$g'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x).$$

Démonstration. 1. $f(x) = h(u(x))$ avec $h(x) = x^n$. Or pour tout réel x, $h'(x) = nx^{n-1}$, donc pour tout x dans $\mathcal{D}$, $h'(u(x)) = n[u(x)]^{n-1}$. D'où pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$.

2. Écrivons $g(x) = (u(x))^n = \frac{1}{(u(x))^{-n}}$ et $-n \geqslant 1$. D'après le point 1., la dérivée de $x \mapsto (u(x))^{-n}$ est $-n \times (u(x))^{-n-1} \times u'(x)$. Donc, d'après les règles de calcul de la dérivée d'un quotient, $g'(x) = \frac{n(u(x))^{-n-1} \times u'(x)}{(u(x))^{-2n}} = \frac{nu'(x)}{(u(x))^{-n+1}} = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$,
c'est-à-dire : $g'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$.

5 Dérivées successives

DÉFINITION 3

f est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$. Sa fonction dérivée f' s'appelle fonction **dérivée première** (ou d'ordre 1) de f (on la note parfois $f^{(1)}$).
Lorsque f' est dérivable sur $\mathcal{D}$, sa fonction dérivée est notée f'' (ou parfois $f^{(2)}$) ; f'' est appelée **dérivée seconde** (ou d'ordre 2) de f.
Par itération, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit la fonction **dérivée n-ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$, $f^{(1)} = f'$ et pour tout naturel $n \geqslant 2$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

COMPRENDRE

Remarque sur le théorème 6

Si en un point a, $u(a) = 0$, le théorème 6 ne s'applique pas.

Pour savoir si $\sqrt{u}$ est dérivable ou non en a, il faut revenir à la définition du nombre dérivé.

→ EXERCICE 36, p. 74

Dérivée de u^n

La dérivée de u^n, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ est toujours $nu'u^{n-1}$; mais lorsque $n < 0$, la formule n'est valable que « pour tout réel x de $\mathcal{D}$ tel que $u(x) \neq 0$ ».

Dérivées successives

Il est nécessaire de savoir ce qu'est la dérivée seconde d'une fonction.

L'étude de f'' permet parfois d'obtenir le signe de $f'(x)$ lorsque celui-ci est difficile à déterminer par les moyens algébriques.

→ EXERCICE 40, p. 74

En physique, la dérivée seconde permet, par exemple, de définir la notion d'accélération instantanée.

Notation en physique

Comme pour f', on peut écrire :

$$f''(x) = \frac{df'}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2}.$$

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Appliquer le théorème 6

ÉNONCÉ

Dans chacun des cas, déterminez la fonction dérivée de f.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. **2)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) On peut écrire $f(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = x^2 + 2x + 3$ (u est dérivable sur $\mathbb{R}$).

La fonction f est définie lorsque $u(x) \geqslant 0$ et dérivable lorsque $u(x) > 0$ (théorème 6).

Cherchons alors le signe du trinôme $x^2 + 2x + 3$ (voir lexique page 478).

On trouve que ce trinôme est **strictement positif** pour tout réel x ($\Delta = -8$, $\Delta < 0$), donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

2) On peut écrire $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$. De plus, $u(x) > 0$ pour tout réel x donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = -\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$.

→ EXERCICES 29 et 30, 34 et 35

EXERCICE RÉSOLU 8 Appliquer le théorème 7

ÉNONCÉ

Dans chacun des cas, déterminez la fonction dérivée de la fonction f.

1) $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$. **2)** $f(x) = \cos^2 x$. **3)** $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) On peut écrire $f(x) = [u(x)]^3$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 1$.

La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel :

$$f'(x) = 3[u(x)]^2 u'(x) = 3(2x+3)(x^2+3x+1)^2.$$

2) On peut écrire $f(x) = [u(x)]^2$ avec $u(x) = \cos x$.

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (théorème 7) et, pour tout réel x :

$f'(x) = 2u(x) \times u'(x)$ avec $u'(x) = -\sin x$; donc $f'(x) = -2\sin x \cos x$.

3) On peut écrire $f(x) = [u(x)]^{-3}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$.

Or pour tout x de $\mathbb{R}$, le trinôme $x^2 + x + 1$ est strictement positif ($\Delta = -3$, $\Delta < 0$).

Ainsi u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) \neq 0$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (théorème 7) et, pour tout réel x, $f'(x) = -3[u(x)]^{-4}u'(x)$ avec $u'(x) = 2x + 1$, donc :

$$f'(x) = \frac{-3(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}.$$

→ EXERCICES 27, 31 à 34

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

La dérivation permet de lever une indétermination « $\frac{0}{0}$ ».

Lorsque l'étude de la limite d'une fonction f en a conduit à une indétermination du type « $\frac{0}{0}$ », tentez d'écrire :

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

avec g dérivable en 0.

Une formule fondamentale : lorsque $f(x) = g(u(x))$ alors

$$f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x) .$$

Conséquences.

- Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Si $f(x) = u^n(x)$ alors $f'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$.

→ EXERCICES RÉSOLUS 7 et 8

Les théorèmes de dérivation n'énoncent que des conditions suffisantes. Lorsqu'ils ne s'appliquent pas, il faut revenir à la définition du nombre dérivé.

→ EXERCICES RÉSOLUS 4 et 6

DES réflexes À AVOIR

Lors d'une étude de fonction :

- si $f'(a) = 0$, pensez alors que la tangente en $A(a ; f(a))$ est horizontale (et réciproquement).
- si le signe de $f'(x)$ est difficile à étudier, pensez à étudier les variations d'une fonction g dont le signe est celui de f'.
- si vous devez chercher le signe de $f'(x)$ lorsque $f(x) = \sqrt{u(x)}$, pensez qu'il suffit de chercher celui de $u'(x)$ puisque $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Profiter d'une étude de fonction pour :

- comparer deux fonctions f et g sur un intervalle en étudiant le signe de $\psi = f - g$ grâce aux variations de ψ.
- résoudre une équation $f(x) = 0$.

→ EXERCICE RÉSOLU 5

- rechercher des extrema en dressant un tableau de variations.

L'étude du signe de $f - g$ permet de donner la position de la courbe de f par rapport à celle de g.

En particulier, le signe de $f(x) - (x - a)f'(a) - f(a)$ renseigne sur la position relative de la courbe représentative de f et de sa tangente en $A(a ; f(a))$.

Exemple. $f(x) = x^2$. La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -2x - 1$.

$f(x) - (-2x - 1) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Or pour tout x, $(x + 1)^2 \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente.

DES erreurs À ÉVITER

Dans la formule de la dérivée de $x \mapsto g(u(x))$, ne pas oublier le facteur $u'(x)$.

Si $f = g$ alors $f' = g'$ est vrai, mais si $f > g$ alors $f' > g'$ est faux.

TD 1 Méthode d'Euler. Résolution numérique de $y' = g(x)$

Le **but** de ce TD est de se familiariser avec la *méthode d'Euler* qui sera utilisée en physique pour construire des solutions approchées à des problèmes du type $f'(x) = g(x)$ où f est l'inconnue.

En mathématiques, on va se contenter de décrire la méthode car, à notre niveau, on ne peut pas prouver que ce type de problème a des solutions. De plus, on ignore la précision des valeurs approchées fournies. Euler note qu'à chaque étape, l'erreur peut être rendue très petite en choisissant un pas assez petit, mais que les erreurs s'accumulent lorsqu'on s'éloigne du départ. Cauchy, en 1821, donnera une majoration de l'erreur commise.

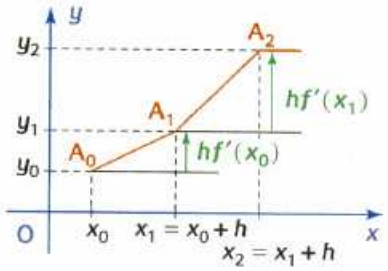
Le chapitre 8 sur l'intégration fournit des méthodes beaucoup plus performantes pour répondre aux mêmes problèmes.

Note
Euler décrit sa méthode dans « Institutionum Calculi Integralis » de 1768, vingt ans après l'apparition explicite de la fonction exponentielle dans son « Traité des infiniments petits ».

1 Principe de la méthode

f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que l'on connaît seulement f' et la valeur y_0 en un point x_0 de I ($f(x_0) = y_0$ est appelée condition initiale).

On construit d'abord $A_0(x_0 ; y_0)$. On choisit ensuite un réel h, $h > 0$, voisin de zéro. (h est appelé le pas). Par approximation affine locale, $f(x_0 + h)$ est voisin de $f(x_0) + hf'(x_0)$. On construit alors A_1 d'abscisse $x_1 = x_0 + h$ et d'ordonnée $y_1 = y_0 + hf'(x_0)$.



De même, à partir de A_1, on construit $A_2(x_2 = x_1 + h ; y_2 = y_1 + hf'(x_1))$ et ainsi de suite on construit les points $A_n(x_n ; y_n)$ tels que $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette méthode s'implémente sur tableur ou sur calculatrice.

2 Étude d'un exemple

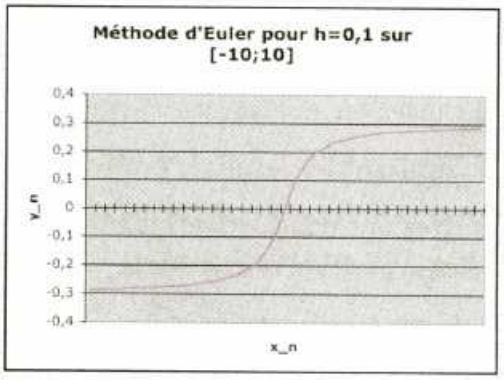
Note
On admet l'existence d'une telle fonction (voir exercice 176, chap 8).

f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(0) = 0$.

1. Justifiez que la méthode d'Euler conduit à choisir $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{1+x_n^2}$.

2. Implémentez cet algorithme de calcul à l'aide d'un tableur pour différentes valeurs de h et observez les courbes correspondantes à l'aide de l'assistant graphique sur $[0 ; 10]$ puis sur $[-10 ; 10]$.

-8	-0,2820172
-7,1	-0,2804788
-7	-0,2785336
-6,1	-0,2765336
-6	-0,2739165
-5,1	-0,2712128
-5	-0,2675115
-4,1	-0,2636653
-4	-0,2580505
-3,1	-0,2521681
-3	-0,2427401
-2,1	-0,2327401
-2	-0,2142588
-1,1	-0,1942588
-1	-0,1490099
-0,1	-0,0990099
0	0
0,1	0,0990099
1	0,1490099
1,1	0,19425877
2	0,21425877
2,1	0,23274306
3	0,24274306
3,1	0,25216813
4	0,25805048
4,1	0,2636653
5	0,26751146
5,1	0,27121379



TD 2 Étude de fonctions. Fonction auxiliaire

1 Étudier une fonction

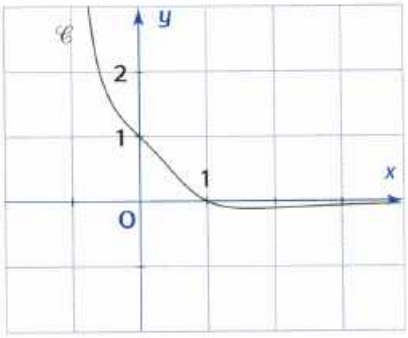
Étudier une fonction f, c'est en général : préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, étudier ses variations, ses limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$, rechercher les asymptotes à sa courbe représentative $\mathscr{C}$, tracer cette courbe.
Parfois, il apparaît assez vite que f est paire, ou impaire, ou périodique, ce qui permet de **réduire l'ensemble sur lequel on étudie f.**

2 Étude d'une fonction rationnelle

f est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1},$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).



À l'aide d'un logiciel, on a tracé ci-contre la courbe $\mathscr{C}$. L'étude qui va suivre permet de préciser le tracé graphique (en particulier l'allure de $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$) et d'obtenir des renseignements complémentaires sur $\mathscr{C}$.

En effet, la courbe fournie par l'ordinateur ou la calculatrice ne donne pas toujours des renseignements certains, mais des conjectures que l'on doit confirmer ou infirmer. Néanmoins, outre les possibilités de conjecture, la vision de la courbe peut permettre de déceler des erreurs grossières dans les calculs.

1. Calculez $f'(x)$ pour tout réel x dans $]-1\,;+\infty[$ et vérifiez que $f'(x)$ a le même signe que $2x^3-3x^2-1$.

POINT MÉTHODE

Lorsque l'étude du signe de $f'(x)$ est impossible par l'algèbre, on étudie les variations d'une **fonction auxiliaire g** afin d'en déduire le signe de $f'(x)$.

2. On note g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3-3x^2-1.$$

a) Étudiez les variations de g.

b) Prouvez que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-1\,;+\infty[$ et que α appartient à $[1{,}6\,;1{,}7]$.

c) Déduisez-en, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

3. En utilisant les résultats précédents, dressez le tableau de variations de f.

4. Écrivez une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
Étudiez la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ pour x de l'intervalle $]-1\,;1]$.

5. Prouvez que $\mathscr{C}$ est située au-dessus de sa tangente d au point d'abscisse 1.

6. Tracez $\mathscr{C}$, Δ et d.

TD 3 Étude de la fonction tangente

Par définition, **la fonction tangente, notée tan**, est la fonction définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans la suite, on note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de tan.

POINT MÉTHODE

Comment étudier une fonction trigonométrique ?

Les propriétés spécifiques des fonctions trigonométriques permettent souvent de réduire l'intervalle d'étude de la fonction trigonométrique f définie sur $\mathscr{D}_f$.

S'il existe une période T, c'est-à-dire un nombre T strictement positif tel que pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $(x + T)$ est dans $\mathscr{D}_f$ et $f(x + T) = f(x)$, on peut se limiter à étudier la fonction sur un intervalle de longueur T.

Si la fonction est impaire ou paire, il suffit de l'étudier sur $\left[0 ; \frac{T}{2}\right] \cap \mathscr{D}_f$.

Pour obtenir la courbe sur d'autres intervalles, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on opère ainsi :

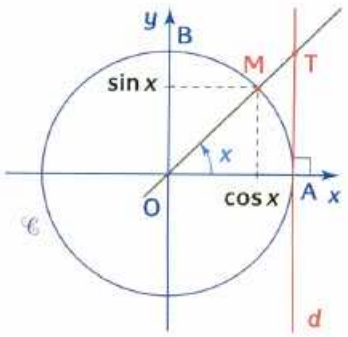
- si f est impaire, la symétrie de centre O donne la courbe sur $\left[-\frac{T}{2} ; 0\right]$,
- si f est paire, la symétrie d'axe $(O ; \vec{j})$ donne la courbe sur $\left[-\frac{T}{2} ; 0\right]$,

puis des translations de vecteurs $T_{\vec{i}}$ et $T_{-\vec{i}}$ permettent d'obtenir la courbe sur n'importe quel intervalle.

Ensuite, le plan d'étude est celui commun à toutes les fonctions.

Rappel
Les fonctions sin, cos sont périodiques, de période 2π car
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Les fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$ sont périodiques, de période $\frac{2\pi}{|a|}$.

La figure ci-contre représente le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dans le repère $(O ; \vec{OA}, \vec{OB})$ **orthonormal direct**.



1. x est un réel de $\mathscr{D}$, M est le point associé à x sur $\mathscr{C}$.
T est le point d'intersection de (OM) et de la droite d tangente en A à $\mathscr{C}$.

a) Calculez, en fonction de x, le coefficient directeur de la droite (OM).

b) Déduisez-en les coordonnées de T.

2. Démontrez que pour tout x de $\mathscr{D}$, $\tan(-x) = -\tan x$ et $\tan(x + \pi) = \tan x$.

3. **a)** Démontrez que tan est dérivable sur $\mathscr{D}$. Calculez $\tan'(x)$ pour tout x de $\mathscr{D}$.

b) Étudiez la limite à gauche en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction tangente.

c) Étudiez les variations de tan sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

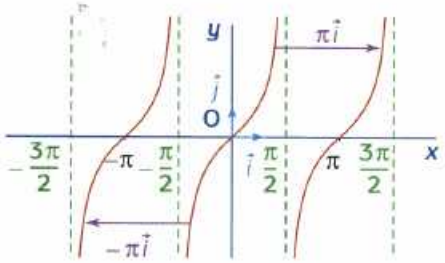
4. À l'aide des questions précédentes, justifiez chacune des **cinq** affirmations suivantes :

- tan est définie et dérivable sur $\mathscr{D}$ et $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- tan est une fonction impaire et π-périodique. Sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine du repère et invariante par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ sont asymptotes verticales à la courbe représentative de la fonction tangente.

● Son tableau de variations est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'$	$+$		
tan	0	↗	$+\infty$

● Sa courbe représentative est :



TD 4 Tangente verticale. Fonctions irrationnelles

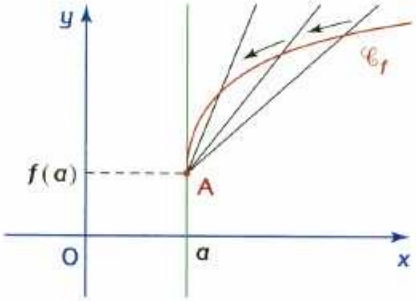
1 Tangente verticale à une courbe

1. Cas général

f est une fonction non dérivable en un point a de $\mathscr{D}_f$.

Si f est continue en a et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ (ou $-\infty$), **alors** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f dans un repère orthogonal admet une tangente verticale au point $A(a\,;\,f(a))$.

Géométriquement, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ (ou $-\infty$) et « f continue en a » signifient que les coefficients directeurs des sécantes issues de A tendent vers $+\infty$, donc que ces sécantes « tendent vers la droite » d'équation $x = a$.



2. Cas de la fonction racine carrée

Vous savez que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est non dérivable en 0 et que f est continue en 0.

Prouvez que l'axe des ordonnées est tangent à $\mathscr{C}_f$ à l'origine du repère.

2 Étude de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x(2-x)}$

1. a) Vérifiez que f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

b) Prouvez que f est dérivable sur $]0\,;\,2[$.

Calculez $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,2[$.

2. a) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0 ?

b) Déduisez-en que f est dérivable en 0.

3. a) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x)}{x-2}$ lorsque x tend vers 2 ?

b) La fonction f est-elle dérivable en $x = 2$?

4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

a) Étudiez les variations de f.

Dressez son tableau de variations.

b) Précisez les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 2.

c) Tracez la courbe $\mathscr{C}$.

TD 5 Limites et dérivées

1 Principe

Supposons qu'une fonction f soit telle que, pour tout x d'un intervalle ouvert contenant a, $x \neq a$, $f(x) = \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Supposons de plus la fonction g dérivable en a.
Alors, f a une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g'(a)$.

En effet, $f(x)$ est le taux de variation de g entre a et x. Puisque la fonction g est dérivable en a, ce taux de variation a une limite en a, qui est $g'(a)$. (C'est la définition du nombre dérivé de g en a.) D'où l'assertion.

POINT MÉTHODE Pour lever une indétermination de la forme « $\frac{0}{0}$ » pour une fonction f en un point a, on peut tenter d'écrire $f(x) = \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ avec g dérivable en a.
Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g'(a)$.

2 Applications

1. f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^{10}-1}{x}$. La limite de f en 0 conduit à une forme indéterminée.
En posant $g(x) = (1+x)^{10}$, calculez la limite de f en 0.

2. On se propose d'étudier la limite en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

a) Vérifiez que l'on est en présence d'une forme indéterminée.

b) Remarquez que $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, déduisez-en que la limite de f en $\dfrac{\pi}{2}$ est égale au nombre dérivé de la fonction cosinus en $\dfrac{\pi}{2}$. Quelle est cette limite ?

3. Dans chacun des cas, étudiez la limite de la fonction f au point indiqué.

a) $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$; en $\dfrac{\pi}{4}$.

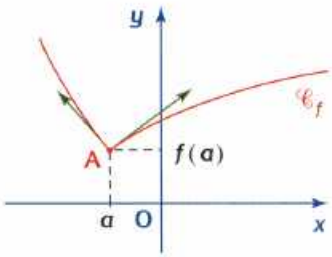
b) $f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi}$; en π.

TD 6 Dérivée à gauche et à droite (point anguleux)

1 Cas général : définition d'une demi-tangente

Lorsque la fonction f est continue sur un intervalle contenant a et lorsque la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite ℓ à droite en a, on dit que la fonction f est **dérivable à droite** en a. On note $f'_d(a)$ le nombre ℓ, qu'on appelle nombre dérivé à droite de f en a.
On définit de façon analogue la **dérivabilité à gauche** en a et le nombre dérivé à gauche $f'_g(a)$.
Lorsque $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) existe, la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite (resp. à gauche) en $A(a ; f(a))$. Le coefficient directeur de la demi-tangente à droite (resp. à gauche) est $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Lorsque $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, on dit que A est un **point anguleux**.
On démontre, et nous l'admettrons, que lorsque $f'_d(a) = f'_g(a)$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.
La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit dérivable en un point a, intérieur à un intervalle I, est que f admette une dérivée à droite en a, une dérivée à gauche en a et que ces deux dérivées soient égales.



2 Étude d'un exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$.

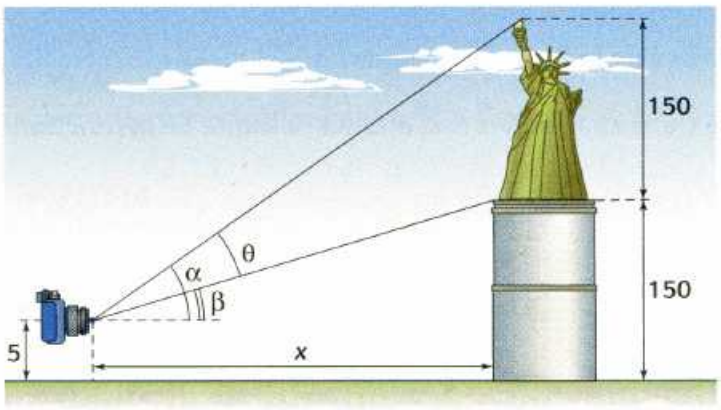
1. Étudiez la dérivabilité de f à droite en zéro, puis écrivez une équation de la demi-tangente à droite en A(0 ; 2).

2. Étudiez la dérivabilité de f à gauche en zéro, puis écrivez une équation de la demi-tangente à gauche en A.

TD 7 Optimisation

Note
D'après *Problem Book for first year calculus*, Springer-Verlag.

La statue de la Liberté, haute de 150 pieds, est posée sur un piédestal de 150 pieds. Nous vous proposons de trouver à quelle distance de la base du piédestal, il faut placer un appareil photo pour que l'angle sous lequel on voit la statue dans l'objectif soit le plus grand possible. L'objectif de l'appareil est à 5 pieds du sol, supposé plat.
Pour cela, notons x la distance de l'appareil photo à la statue. Les angles θ, α, β (exprimés en radians), indiqués sur la figure, sont fonctions de x.
Nous supposerons que la fonction $x \mapsto \theta(x)$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.



Formule
$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
avec a, b, $a-b$ différents de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Exprimez $\tan\alpha(x)$ et $\tan\beta(x)$ en fonction de x.
Puis, en écrivant que $\theta(x) = \alpha(x) - \beta(x)$, vérifiez que $\tan\theta(x) = \dfrac{150x}{x^2 + (295 \times 145)}$.

2. Posons $f(x) = \tan\theta(x)$.

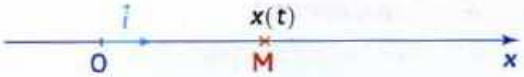
a) Démontrez que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et donnez sa fonction dérivée.
Déduisez-en que :

$$[1 + \tan^2\theta(x)]\theta'(x) = \frac{150((295 \times 145) - x^2)}{(x^2 + (295 \times 145))^2}.$$

b) Donnez le tableau de variations de θ.
Démontrez que θ admet un maximum sur $]0 ; +\infty[$, puis concluez.

TD 8 Dérivation et cinématique

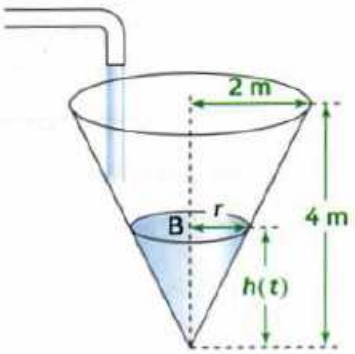
Un point M suit une trajectoire rectiligne et sa position est déterminée par son abscisse $x(t)$ (t est le temps) dans un repère $(O ; \vec{i})$ de cette trajectoire.



Note
$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i}$ est le vecteur vitesse
$\vec{a}(t) = v'(t)\vec{i}$ est le vecteur accélération.

- Sa vitesse instantanée à l'instant t est $v(t) = x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$.
- Son accélération instantanée à l'instant t est $a(t) = v'(t) = \dfrac{dv}{dt}$.

Un réservoir d'eau a la forme d'un cône de révolution renversé. Sa hauteur est 4 mètres, le rayon de base est 2 mètres. Il est rempli d'eau selon un débit constant de 40 litres par minute.
Quelle est la vitesse instantanée du niveau de l'eau, à l'instant où ce niveau est de 1 mètre ?



1. Mise en équation du problème

a) Que demande-t-on ? La vitesse instantanée du point B à un instant précis. Notons $h(t)$ la hauteur du niveau d'eau à la date t ; alors cette vitesse instantanée est $h'(t)$.
On demande $h'(t_0)$, t_0 étant la date telle que $h(t_0) = 1$.

b) Que connaît-on ? Le débit instantané. Par définition, ce débit est $V'(t)$, lorsque $V(t)$ désigne le volume d'eau fourni à la date t. Il est constant, d'après l'énoncé.
On connaît aussi les dimensions du réservoir.

2. Résolution

a) Prouvez que $V(t) = \dfrac{1}{12}\pi h^3(t)$.

Aide. Exprimez d'abord r en fonction de h (voir la figure).

b) Déduisez-en que lorsque $h(t) \neq 0$, $h'(t) = \dfrac{4V'(t)}{\pi h^2(t)}$.

c) Calculez alors une valeur approchée de $h'(t_0)$.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. et 2. Calculs de dérivées, tangentes (révisions)

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

a) Vérifiez, que pour tout réel h, $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}.$$

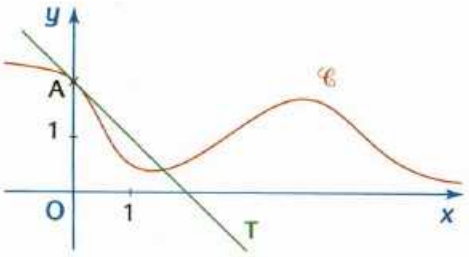
b) Déduisez-en que f est dérivable en 1 et précisez $f'(1)$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 55.

2 f est une fonction dérivable en 2 telle que $f'(2) = 1$ et la courbe représentative de f passe par A(2 ; 3).
Donnez une équation de la tangente à cette courbe au point A.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 55.

3 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $x = 0$. La tangente T en A(0 ; 2) à $\mathscr{C}$ a pour équation $y = 2 - x$.



1. Précisez $f(0)$ et $f'(0)$.
2. x est un réel non nul. Interprétez graphiquement le nombre $\frac{f(x) - 2}{x}$.
3. Justifiez l'existence et donnez la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x}$.

Pour les exercices 4 à 6, écrivez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 55.

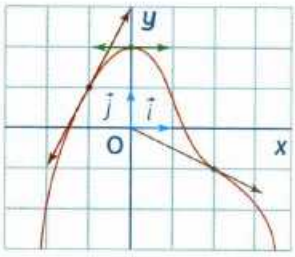
4 $f(x) = \frac{1}{x}$, pour tout réel x non nul.

5 $f(x) = x^3 + x^2$, pour tout réel x.

6 $f(x) = \sqrt{x}$, pour tout réel x positif.

7 À l'aide de la représentation graphique de la fonction f ci-contre, donnez les valeurs de :

- $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$;
- $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.



Pour les exercices 8 à 11, dans chacun des cas, calculez la fonction dérivée de la fonction f en précisant le domaine de validité de vos calculs.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 3 et 4, page 57.

8 **a)** $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4$.

b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{6}$.

9 **a)** $f(x) = 2\theta x^2 + \theta^3 x + \theta$, θ réel.

b) $f(\theta) = 2\theta x^2 + \theta^3 x + \theta$, x réel.

10 **a)** $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. **b)** $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 1}$.

11 **a)** $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$. **b)** $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

Pour les exercices 12 à 14, dans chacun des cas, calculez la fonction dérivée de la fonction f sur l'ensemble $\mathscr{D}$ indiqué.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 3 et 4, page 57.

12 **a)** $f(x) = x + x\cos x$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos x \sin x$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

13 **a)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$; $\mathscr{D} = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

14 **a)** $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$; $\mathscr{D} = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Pour les exercices 15 à 17, dans chacun des cas, écrivez une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse indiquée.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 2, page 55.

15 **a)** $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$; $a = 0$.

b) $f(x) = x\sqrt{x}$; $a = 1$.

16 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$; $a = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; $a = 0$.

17 **a)** $f(x) = \cos x$; $a = 0$.

b) $f(x) = x\cos x$; $a = \dfrac{\pi}{4}$.

18 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x+1}$.

1. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à la droite d'équation $y = -4x$?

2. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à la droite d'équation $3x - 2y = 0$?

19 Justifiez les approximations affines locales en zéro suivantes.

a) $(1+x)^3 \approx 1 + 3x$. **b)** $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$.

c) $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$. **d)** $\sin x \approx x$.

3. Applications de la dérivation (révisions)

20 Dans chacun des cas suivants, étudiez les variations de f.

a) $f(x) = 2x^4 - 27x + 7$.

b) $f(x) = (2x-3)\sqrt{x}$.

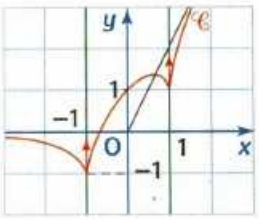
c) $f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$.

d) $f(x) = x + \cos x$.

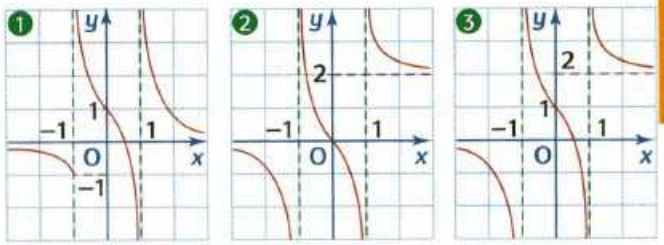
e) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

21 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$.



L'une des courbes ci-dessous est-elle susceptible de représenter f' ?



22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1.$$

1. Étudiez les variations de f et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. f admet-elle des extrema locaux ?

3. f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

23 f est la fonction définie pour $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

Le but de l'exercice est de trouver (s'ils existent) les réels a et b tels que $f(-1)$ est un extremum local et cet extremum local est nul.

1. Pourquoi $f'(-1) = 0$ et $f(-1) = 0$?

2. Trouvez alors a et b, puis vérifiez que la fonction obtenue convient.

24 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Déterminez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudiez les variations de f.

3. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.

4. Donnez un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 59.

25 f est la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4.$$

1. Dressez le tableau de variations de f.

2. Indiquez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Pour chaque solution, donnez un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 59.

26 n est un entier naturel non nul, a est un réel.

1. Étudiez, suivant la parité de n, les variations de la fonction $f_n : x \mapsto x^n$.

2. Étudiez les limites de f_n en l'infini.

3. Discutez suivant les valeurs de n et de a, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x, $x^n = a$.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 59.

4. Dérivée d'une fonction composée

Pour les exercices 27 à 34, calculez la dérivée de la fonction sur l'ensemble $\mathscr{D}$ indiqué.

☞ Aide. Voir les exercices résolus 6, 7 et 8, pages 61 et 63.

27 **a)** $f(x) = (x^2+2x-3)^3$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$; $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

c) $f(u) = (2u+3)^2$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

d) $f(u) = (3u-1)^3$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

28 **a)** $f(x) = \cos 2x$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

c) $f(t) = \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

29 **a)** $f(x) = \sqrt{4-x}$; $\mathscr{D} =]-\infty ; 4[$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$; $\mathscr{D} =]-2 ; +\infty[$.

d) $x(t) = \sqrt{\dfrac{t+1}{2-t}}$; $\mathscr{D} =]-1 ; 2[$.

30 **a)** $f(x) = kx\sqrt{x^2+1}$, k réel ; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

31 **a)** $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{(3x+1)^3}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

b) $f(x) = (3x-1)^2(1-2x)^3$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

32 **a)** $f(t) = \cos^2 t$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sin^3 x$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

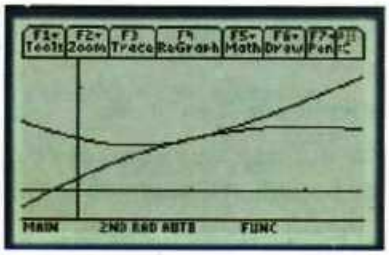
33 **a)** $f(\theta) = \tan(3\theta)$; $\mathscr{D} = \left[0 ; \dfrac{\pi}{6}\right[$.

b) $f(x) = \tan^2 x$; $\mathscr{D} = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

34 **a)** $f(x) = \sqrt{\cos x}$; $\mathscr{D} = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) $v(t) = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^3 t}$; $\mathscr{D} = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

35 À l'aide de la calculatrice, on a représenté les courbes d'équations $y = \sqrt{x^2-x+1}$ et $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{4}$.



1. Que pouvez-vous conjecturer pour ces deux courbes au point d'abscisse 1 ?

2. f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2-x+1} \text{ et } g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}.$$

a) Démontrez que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) Calculez $f(1)$; $g(1)$; $f'(1)$ et $g'(1)$.

c) Démontrez votre conjecture.

36 **ZOOM SUR... le théorème 6**

f est la fonction définie sur $[0 ; 1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

1. Pourquoi le théorème 6 permet-il d'affirmer que f est dérivable sur $]0 ; 1[$?

2. f est définie en 0 et $f(0) = 0$, on se pose alors la question : f est-elle dérivable en 0 ?

a) Pourquoi le théorème 6 ne permet-il pas d'apporter de réponse ?

b) On pose alors, $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pour tout x dans $]0 ; 1[$.
Étudiez la limite de la fonction t en zéro.

5. Complément : dérivées successives

Pour les exercices 37 et 38, dans chacun des cas, calculez les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction f indiquée. Précisez, chaque fois, sur quel ensemble votre calcul est valable.

37 **a)** $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

b) $f(x) = x\sqrt{x}$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

38 **a)** $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

39 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}.$$

1. Vérifiez que pour tout réel x, $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$.

2. Déduisez-en que pour tout réel x,

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0.$$

40 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. **a)** Déduisez-en le signe de $f'(x)$.

b) Dressez le tableau de variations de la fonction f.

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus. Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

41 Lieu géométrique

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, M est le point de coordonnées $(m ; 0)$ avec $0 \leqslant m \leqslant 3$, N est le point de coordonnées $(0 ; n)$, $n \geqslant 0$, tel que MN = 3 et J le point du segment [MN] tel que MJ = 2.

Objectif : déterminer et tracer le lieu $\mathscr{L}$ de J lorsque m décrit l'intervalle [0 ; 3].

1. C'est un problème de lieu géométrique analytique (voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche J, page 460). On va donc calculer d'abord les coordonnées $(x ; y)$ de J en fonction de m. On peut penser au théorème de Thalès, mais le plus simple semble être l'utilisation des vecteurs.

a) Prouvez que $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.

b) Démontrez que $n = \sqrt{9 - m^2}$. Déduisez-en les coordonnées $(x ; y)$ de J en fonction de m.

2. Pour obtenir une équation du lieu de J, on cherche une expression de y en fonction de x, indépendante du nombre variable m.

Prouvez que $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ et donc que J appartient à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$.

3. Il reste maintenant à répondre à la question : J décrit-il toute la courbe $\mathscr{C}$ lorsque m décrit l'intervalle [0 ; 3] ?

a) Prouvez que x appartient à l'intervalle [0 ; 1].

b) Quel est donc le lieu de J ?

c) Étudiez les variations de f et la dérivabilité de f au point 1. Tracez $\mathscr{C}$ et $\mathscr{L}$.

42 Fonctions et ensembles de points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note Γ l'ensemble des points M$(x ; y)$ tels que :

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \quad [1].$$

Objectifs : prouver que Γ est l'ensemble réunion de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2, puis tracer Γ.

1. Il s'agit de prouver que l'ensemble Γ des points M$(x ; y)$ est égal à l'ensemble réunion de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Il faut donc prouver que « M$(x ; y)$ appartient à Γ » équivaut à « M$(x ; y)$ appartient à la réunion de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ », donc à « M appartient à $\mathscr{C}_1$ **ou** à $\mathscr{C}_2$ » (voir *Le vocabulaire de la logique*, fiche C, page 450).

Si $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives de deux fonctions f_1 et f_2, elles ont donc pour équations respectives $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$. Il s'agit donc de trouver deux fonctions f_1 et f_2 telles que « Les coordonnées $(x ; y)$ de M sont telles que $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ » équivaut à « Les coordonnées $(x ; y)$ de M sont telles que $y = f_1(x)$ ou $y = f_2(x)$ ».

a) Vérifiez que [1] équivaut à $y^2 = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{4}$.

b) On sait que $y^2 = a$ équivaut à $y = \sqrt{a}$ ou $y = -\sqrt{a}$, mais seulement lorsque $a \geqslant 0$. Pour quelles valeurs du réel x, $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$ (voir lexique, page 00) ?

c) Déterminez $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

2. Il reste à étudier les variations de f_1 et f_2, puis à tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On note f_1 la fonction définie sur [−1 ; 3] par :

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}{2}.$$

a) Vérifiez que f_1 est dérivable sur]−1 ; 3[.

b) Calculez $f_1'(x)$ pour tout x dans]−1 ; 3[.

c) Étudiez la dérivabilité de f_1 aux points −1 et 3.

d) Dressez le tableau de variations de f_1. Tracez $\mathscr{C}_1$.

3. On peut ensuite, pour tracer $\mathscr{C}_2$, étudier les variations de la fonction f_2, mais ce n'est pas utile dans le cas présent, car pour tout x dans [−1 ; 3], $f_2(x) = -f_1(x)$.

Par quelle transformation géométrique, $\mathscr{C}_2$ est-elle l'image de $\mathscr{C}_1$? Tracez $\mathscr{C}_2$.

43 L'inégalité de Huygens

Objectif : prouver que pour tout réel x dans l'intervalle $I = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$ [1].

1. Une solution par la trigonométrie semble impossible, d'où l'idée de ramener le problème à celui de l'étude d'une fonction, plus précisément de la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x.$$

Justifiez que le signe de $f'(x)$ sur I est celui de :

$$2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1.$$

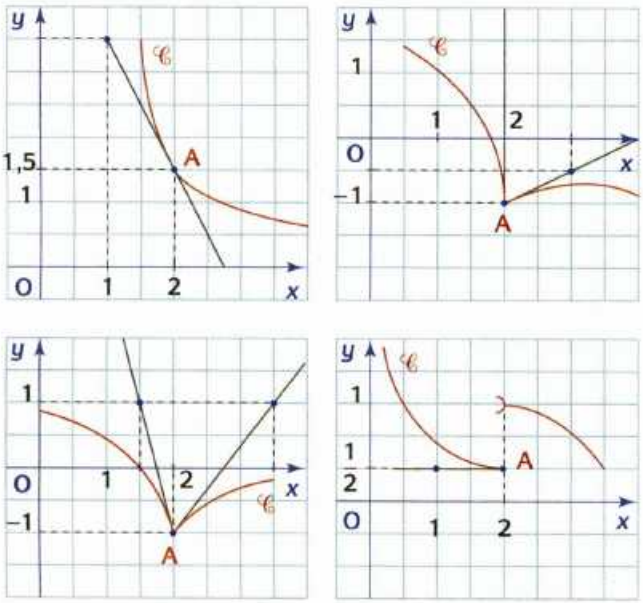
2. L'étude du signe de $f'(x)$ pour x appartenant à I revient à celle de $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$ pour $\cos x$ appartenant à]0 ; 1]. D'où l'idée, pour trouver ce signe, d'étudier sur]0 ; 1] le signe du polynôme P tel que $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

En étudiant les variations de P sur]0 ; 1], vérifiez que P est positif, puis concluez.

Pour progresser

Dérivabilité en un point

44 Dans chacun des cas, $\mathscr{C}$ est la courbe d'une fonction f. A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2.
En vert, on a tracé les éventuelles tangentes ou demi-tangentes à $\mathscr{C}$ en A.



1. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

2. Précisez, si possible, le nombre dérivé (éventuellement à droite ou à gauche) de f en 2.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 1 et 4, pages 55 et 57.

45 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

a) $f(x) = x^2\sqrt{x}$. **b)** $f(x) = x|x|$.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 1 et 4, pages 55 et 57.

46 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f(x) = x^2\cos\dfrac{1}{x}$.

1. f est-elle dérivable en 0 ?

2. Calculez $f'(x)$ pour x non nul.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 1 et 4, pages 55 et 57.

Dérivées de fonctions composées

47 **1.** Calculez la fonction dérivée de la fonction f définie pour tout $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

2. Déduisez-en la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$. **b)** $h : x \mapsto \dfrac{x^4+1}{x^2-1}$.

c) $k : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$.

d) $m : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$.

☞ **Aide.** Écrivez chacune des fonctions sous la forme $f \circ u$ ou $u \circ f$.

Pour les exercices 48 à 50, dans chacun des cas, calculez la dérivée de f en précisant sur quel ensemble votre calcul est valable.

48 **a)** $f(x) = \cos^3 2x$.

b) $f(x) = \sin^2 3x$.

49 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 2x}$.

50 p et q sont deux entiers naturels,

$$f(x) = \sin^p x \cos^q x.$$

51 • **1.** Si une fonction f paire est dérivable, quelle est la parité de f' ?

2. Si une fonction f impaire est dérivable, quelle est la parité de f' ?

Trouver la fonction

Pour les exercices 52 à 54, vous pouvez vous reporter à la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche K, page 461.

52 • a et b sont deux réels. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2+1}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Existe-t-il des réels a et b tels que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 4x + 3$?

53 • a est un réel. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$.
Existe-t-il un réel a tel que la fonction f a un extremum local pour $x = 1$?

54 • f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable. En outre :

- $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$;
- f' est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Tracez une courbe $\mathscr{C}$ qui, d'après ces seuls renseignements, est susceptible de représenter cette fonction f.

Résolution d'équations

Pour les exercices 55 et 56, donnez le nombre de solutions de l'équation proposée, et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions.

Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 59.

55 • $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$.

56 • $x(2x+1)^2 = 5$.

57 • f est la fonction définie sur $I =]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}.$$

1. Étudiez les variations de f sur I.

2. **a)** Déduisez-en que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]1 ; 2[$.

b) Donnez une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Dérivées successives

58 • La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\cos x.$$

1. Pour tout réel x, calculez $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$.

2. Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

59 •• La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

1. Trouvez deux réels a et b tels que pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$,

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

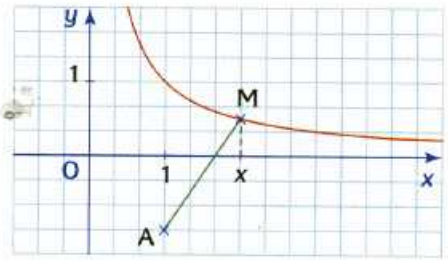
2. n est un entier naturel non nul.
À l'aide du résultat précédent, donnez l'expression de $f^{(n)}(x)$.

Optimisation

60 • Le graphique ci-après représente, dans un repère orthonormal, la branche d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$.

A est le point de coordonnées $(1 ; -1)$ et M de coordonnées $\left(x ; \frac{1}{x}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer, s'il existe, le point M pour lequel la distance AM est minimale.



1. **a)** Justifiez que « AM est minimale » équivaut à « AM^2 est minimale ».

b) Calculez en fonction de x, $d(x) = AM^2$.

2. Démontrez que pour tout $x > 0$, $d'(x) = \frac{2f(x)}{x^3}$ où f est un polynôme de degré 4.

3. **Étude de f**

a) Étudiez les variations de f sur $I =]0 ; +\infty[$.

b) Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I.

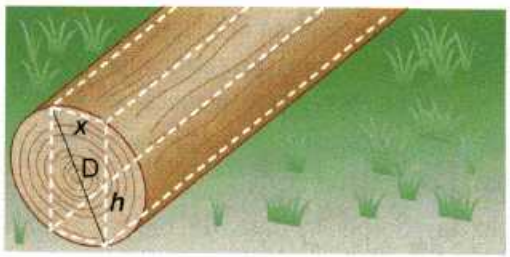
Déterminez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c) Déduisez-en le signe de f sur I.

4. Déduisez de ce qui précède les variations de d et concluez.

5. Justifiez que si M est le point le plus proche de A alors (AM) est perpendiculaire à la tangente en M à l'hyperbole.

61 • BAC Lorsqu'on veut équarrir un tronc d'arbre de manière à donner à la poutre obtenue la plus grande résistance possible à la flexion, on se garde bien de la faire de section carrée, mais toujours « plus haute que large ». Si la base est x et la hauteur h, on montre, en Mécanique, que la résistance est d'autant plus grande que xh^2 est grand.



A. f est la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{3}{2}\right]$ par :

$$f(x) = -x^3 + \frac{9}{4}x.$$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur $(O ; \vec{i})$; 1 cm sur $(O ; \vec{j})$).

1. Calculez f' et dressez le tableau de variations de f.

2. Écrivez une équation de la tangente t_1 à la courbe $\mathscr{C}$ au point O ainsi qu'une équation de la tangente t_2 à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\frac{3}{2}$, puis étudiez sur $\left[0 ; \frac{3}{2}\right]$ la position de $\mathscr{C}$ par rapport à t_1 et par rapport à t_2.

3. Construisez les tangentes t_1 et t_2, puis $\mathscr{C}$.

B. Application

Dans cette application, les lettres D, x, h désignent des longueurs exprimées en mètres.

On suppose que le diamètre D du tronc d'arbre mesure 1,5 mètre.

1. Expliquez pourquoi $x^2 + h^2 = \frac{9}{4}$.

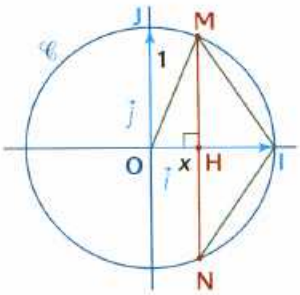
2. Calculez xh^2 en fonction de x.

3. En utilisant la partie A de ce problème, trouvez x et h de façon que la poutre ait le maximum de résistance à la flexion.

62 BAC Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et le point I de coordonnées (1 ; 0).

M et N sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ tels que (MN) $\perp$ (OI) et H est le point d'intersection des droites (OI) et (MN).

On pose $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$.



1. Calculez l'aire du triangle MNI en fonction de x.

2. f est la fonction définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}.$$

a) Trouvez les valeurs de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudiez la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1. Déduisez-en une équation des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f aux points d'abscisses -1 et 1.

c) Étudiez le sens de variation de la fonction f et donnez son tableau de variations.

d) Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

3. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est-elle maximale ?

Quelle est cette aire ?

4. Déterminez à 0,01 près, pour quelle valeur de x, autre que zéro, l'aire du triangle MNI est égale à 1.

Études de fonctions

63 • **Courbes asymptotes**

A. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x + 2)}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Démontrez qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = a(x - 1)^2 + \frac{b}{x + 2}.$$

2. **a)** Étudiez les limites de f aux bornes des intervalles de définition.

b) Dressez le tableau de variations de f.

B. On appelle Γ la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$.

x est un réel différent de -2.

P est le point de Γ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.

1. Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PM}$.

Déduisez-en que lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la distance PM tend vers 0. Interprétez graphiquement ce résultat.

2. Tracez sur le même graphique les courbes Γ et $\mathscr{C}$.

☞ **Vocabulaire.** **On dit que la parabole Γ est une courbe asymptote à $\mathscr{C}$.**

64 • **Résolution graphique d'équation**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x(x + 1)}{x - 2}.$$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative.

1. Étudiez les variations de f.

2. **a)** Justifiez que la droite d d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ et étudiez leurs positions relatives.

b) Tracez d puis $\mathscr{C}_f$.

3. **a)** En utilisant $\mathscr{C}_f$, déterminez, suivant m, le nombre de solutions de l'équation $x^2 + (1 - m)x + 2m = 0$.

b) Déduisez-en alors, suivant m, le nombre de solutions de l'équation :

$$\cos(2u) + 2(1 - m)\cos u + 4m + 1 = 0$$

avec $u \in [0 ; 2\pi[$.

65 • **Famille de fonctions**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$.

1. Calculez les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudiez les variations de f_n (distinguez les cas n pair et n impair).

3. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifiez que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_n$, puis que $\mathscr{C}_n$ passe par quatre points dont les coordonnées ne dépendent pas de n.

Calculez les coordonnées de ces quatre points.

4. Tracez dans le même repère $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_7$.

66 Lieu géométrique

λ est un réel, $\lambda > 0$. f_λ est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f_\lambda(x) = x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}.$$

$\mathscr{C}_\lambda$ est sa courbe représentative.

1. **a)** Étudiez les limites de f_λ aux bornes de I.

b) Démontrez qu'il existe une asymptote oblique d à $\mathscr{C}_\lambda$ et étudiez leurs positions relatives.

2. **a)** Étudiez les variations sur I de f_λ.

b) Démontrez que f_λ admet un minimum atteint en un réel que l'on note x_λ.

3. P_λ est le point de $\mathscr{C}_\lambda$ d'abscisse x_λ.

a) Démontrez que l'ensemble des points P_λ est inclus dans la droite d'équation $y = \frac{16}{9}x$.

b) Quel est l'ensemble des points P_λ lorsque λ décrit I ?

67 BAC

f est la fonction définie sur l'ensemble $]-\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Prouvez que la droite d d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. f est-elle dérivable en 0 ? en -4 ?

4. Calculez $f'(x)$ pour x dans $]-\infty ; -4[\cup]0 ; +\infty[$.

5. Dressez le tableau de variations de f.

6. Tracez les asymptotes, puis la courbe $\mathscr{C}$.

68 BAC Trouver une fonction

F est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et pour tout réel x, $F'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

On admet que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de $F(x)$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de F dans un repère orthonormal.

1. G est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = F(x) + F(-x).$$

a) Justifiez que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $G'(x)$ pour tout réel x.

b) Calculez $G(0)$ et déduisez-en que F est une fonction impaire.

2. H est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) Justifiez que H est dérivable sur I et calculez $H'(x)$ pour tout réel x dans I.

b) Démontrez que pour tout x dans I, $H(x) = 2F(1)$.

c) Déduisez-en que la limite de la fonction F en $+\infty$ est $2F(1)$.

d) Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. T est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$T(x) = F(\tan x) - x.$$

a) Calculez $T'(x)$.
Qu'en déduisez-vous pour la fonction T ?

b) Calculez $F(1)$.

4. Dressez le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

5. Tracez la courbe $\mathscr{C}$, ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses -1 ; 0 et 1.

Pour les exercices 69 à 71 vous pouvez vous reporter au TD 3 page 67.

69 •

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin 3x - 3\sin x.$$

1. Comparez $f(x + 2\pi)$, $f(-x)$ et $f(\pi - x)$ à $f(x)$.

Démontrez alors qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Démontrez que pour tout réel x, $f'(x) = -6\sin x \sin 2x$.

3. Étudiez les variations de f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Tracez la courbe de f sur $[-2\pi ; 2\pi]$.

70 •

Le but de cet exercice est « d'approcher » localement au voisinage de zéro, la fonction tangente par des polynômes.
On note f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} \text{ et } g(x) = x + \frac{2x^3}{3}.$$

À l'aide de la calculatrice, pouvez-vous conjecturer les positions des courbes représentant les fonctions f, g et tangente ?

Partie A : Fonctions auxiliaires

1. **a)** Étudiez les variations de la fonction :

$$u : x \mapsto \tan x - x \text{ sur } I = \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right].$$

b) Déduisez-en le signe de $\tan x - x$ sur I.

2. **a)** Justifiez qu'il existe un unique α dans I tel que $\tan^2\alpha = \sqrt{2} - 1$.

b) Déduisez-en le signe de $\tan^2 x + 1 - \sqrt{2}$ sur I.

c) Étudiez alors les variations de la fonction :

$$v : x \mapsto \tan x - x\sqrt{2}$$

et déduisez-en le signe de $v(x)$ sur I.

Partie B : Encadrement de tan

1. Étudiez les variations sur I de la fonction $x \mapsto \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ et déduisez-en que pour tout x de I, $x + \frac{x^3}{3} \leqslant \tan x$.

2. En procédant comme au **1.** justifiez que pour tout x de I, $\tan x \leqslant x + \frac{2x^3}{3}$.

3. En utilisant la parité de la fonction tangente, justifiez que pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{3} ; 0\right]$, $x + \frac{2x^3}{3} \leqslant \tan x \leqslant x + \frac{x^3}{3}$.

71 • **Une tangente inhabituelle**

1. g est la fonction définie par :

$$g(0) = 0 \text{ et } g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$

a) Démontrez que g est dérivable en 0.

b) $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de g dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Vérifiez que l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$ en O.

2. a) Démontrez que $g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0$, pour tout entier k.

b) α est un réel strictement positif, aussi petit que l'on veut. Il y a une infinité de nombres $\frac{1}{k\pi}$, avec k entier, dans $[0 ; \alpha]$. Pourquoi ?

3. Est-il vrai qu'une tangente en A à $\mathscr{C}$ ne coupe pas $\mathscr{C}$, en un autre point que A, dans un voisinage de A ?

72 **1.** On désigne par g la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$g(x) = x\cos x - \sin x.$$

a) Étudiez les variations de g et dressez son tableau de variations.

b) Déduisez-en le signe de $g(x)$ sur $[0 ; \pi]$.

2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } 0 < x \leqslant \pi \text{ et } f(0) = 1.$$

Étudiez les variations de f sur $]0 ; \pi]$.

3. Le but de cette question est d'étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.

a) Prouvez que pour tout réel x,

$$x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

On calculera $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\varphi'''(x)$ et on en déduira le signe de φ.

b) Démontrez que f est dérivable en $x = 0$ et calculez $f'(0)$.

4. Construisez la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonomal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 3 cm pour unité).

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

73 Les courbes d'équations $y = x^3$ et $y = \frac{1}{x}$ peuvent-elles avoir des tangentes parallèles ?

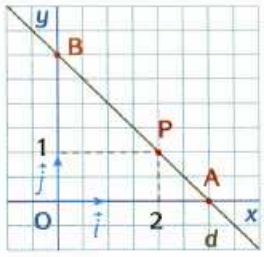
74 Étudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

75 • Démontrez que pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

76 • Comparez, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(\sin x)$ et $\sin(\cos x)$.

77 • Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, P est le point de coordonnées (2 ; 1). Une droite variable qui passe par P coupe (Ox) en A et (Oy) en B, l'ordonnée de B étant supérieure à 1.



Déterminez la droite (AB) qui rend l'aire du triangle OAB minimale.

78 Étudiez $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan x}$.

79 f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

1. Justifiez que $(1 + x^2)f'(x) = xf(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel n,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+(n^2-1)f^{(n)}(x)=0.$$

80 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}.$$

Tracez sa courbe représentative après avoir précisé, sous réserve d'existence :

a) les asymptotes ;

b) les tangentes ;

c) l'axe ou centre de symétrie.

Problèmes

81

Thèmes : Réunion de courbes. Équation de cercle. Équation de droite. Produit scalaire

A. f est la fonction définie, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1[$, par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

1. f est-elle dérivable en 0 ?

2. Dressez le tableau de variations de f.

3. On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Écrivez une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

4. Sur le même graphique, tracez $\mathscr{C}_1$ et T, puis la courbe $\mathscr{C}_2$ symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.

5. Démontrez que « M$(x ; y)$ appartient à $\Gamma = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ » est équivalent à « Les coordonnées de M$(x ; y)$ vérifient (E) : $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$ ».
La courbe Γ est appelée **cissoïde de Dioclès**.

6. **Interprétation géométrique de (E)**
I est le point de coordonnées $(1 ; 0)$, $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [OI] et Δ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point I.
d est la droite passant par O de coefficient directeur t, $t \in \mathbb{R}$.

a) Déterminez les coordonnées de M, point d'intersection, autre que O, de $\mathscr{C}$ et d.
Déterminez les coordonnées de M′, point d'intersection, autre que O, de Γ et d.
Calculez les coordonnées de N, intersection de Δ et de d.

b) Démontrez que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$.

c) Déduisez-en un procédé permettant de construire Γ point par point à partir de M et N.
Construisez Γ.

B. Prolongements

1. La droite (IM′) coupe l'axe des ordonnées en P.

a) Démontrez que $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NO} = NI^2$ et que :
$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OI} = OI^2.$$

b) Déduisez-en que $NI^2 = OM' \times NO$ et que :
$$OI^2 = OM \times ON.$$

c) Démontrez que $\dfrac{OP}{NI} = \dfrac{OM'}{M'N} = \dfrac{OM'}{OM}$.

d) Déduisez alors des questions **b)** et **c)** que :
$$OP \times OI^2 = (IN)^3 \text{ ou encore } OP = (IN)^3.$$

2. En choisissant OP = 2, il vient IN = $\sqrt[3]{2}$.

Expliquez alors comment la cissoïde de Dioclès permet de résoudre le problème suivant : Étant donné un cube d'arête a, construire l'arête x d'un cube dont le volume est double du cube précédent.

☞ Un peu d'histoire. Selon la légende, ce problème de la duplication du cube est attribué à un oracle. Il aurait demandé la construction dans l'île de Délos d'un autel de forme cubique et de volume double d'un autel de même forme existant déjà dans cette île.
Parmi les méthodes préconisées par les géomètres de l'ancienne Grèce pour résoudre un tel problème, figure celle attribuée à Dioclès par Eutocius et qui utilise la courbe étudiée ci-dessus. Dans les ouvrages de Pappus et de Proclus, on désigne cette courbe sous le nom de cissoïde (lierre).

82

Thèmes : Lieu géométrique dans l'espace. Produit scalaire. Étude d'une fonction rationnelle et optimisation

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
A$(2 ; 0 ; 0)$, B$(-1 ; \sqrt{3} ; 0)$ et C$(-1 ; -\sqrt{3} ; 0)$.

1. Placez sur une figure les points A, B et C dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Démontrez que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.

3. **a)** Déterminez l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.

b) Déterminez l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C.

c) Démontrez que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $(O ; \vec{k})$.

4. Démontrez qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre ABCD soit régulier et calculez ses coordonnées.

5. Soit M un point quelconque du segment [CD].
On pose $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CD}$ avec $\lambda \in [0 ; 1]$.

a) Démontrez que $\cos \widehat{AMB} = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.

On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(\lambda) = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}.$$

b) Étudiez les variations de la fonction f.

c) Déduisez-en la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum.

d) Quelle est la valeur de ce maximum ?

D'après Inspection générale

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

83 **1.** f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

a Si f admet un maximum en a de I alors $f'(a) = 0$.

b Si $f'(a) = 0$ alors f admet un extremum en a.

c f est continue sur I.

2. f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - x + 1}$.

a L'équation $x^3 - x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b f est strictement monotone sur $[\alpha ; +\infty[$.

c f est dérivable sur $]\alpha ; +\infty[$.

d Pour tout réel k, $k \geqslant 0$, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution.

3. Concours EISEE, 2005

f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal, a, b, c et d sont des réels non nuls.

T_1 est la droite d'équation $y = ax + b$ tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 1$.

T_2 est la droite d'équation $y = cx + d$ tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = -1$.

a Si f est paire alors $a = -c$.

b Si $a = c$ alors f est impaire.

c Si $b = d$ alors $f(1) = f(-1)$.

d Si $ac < 0$ alors il existe x de l'intervalle $[-1 ; 1]$ tel que $f'(x) = 0$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre réponse.

84 **1.** Si $f'(2) = -4$ alors $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -4$.

2. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $g : x \mapsto f(\tan x)$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x) = f'(\tan x)$.

3. L'équation $\tan x = x$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

4. Si $f' = g'$ sur un intervalle I alors $f - g$ est une fonction constante sur I.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

85 **Pré-requis.** La fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

1. Démonstration de cours. u est une fonction strictement positive sur $\mathscr{D}$.

Démontrez que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur $\mathscr{D}$ et que pour tout x de $\mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

2. Application. f est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2(1 - x)}$.

Étudiez la dérivabilité de f sur $[0 ; 1]$ et dressez son tableau de variations.

4 La fonction exponentielle

1748

La fonction exponentielle est la fonction la plus importante de l'Analyse, en particulier grâce au rôle qu'elle jouera dans la résolution des équations différentielles. Elle est intimement liée à une autre fonction fondamentale, la fonction logarithme népérien ln (que vous verrez plus précisément au chapitre suivant).

Dans son *Traité des infiniment petits* (1748), Euler donne à la fois une définition et un calcul de la fonction exponentielle, qu'il note e, puis démontre qu'elle est la fonction réciproque du logarithme népérien ln. L'exponentielle est obtenue en définissant l'expression a^s pour tout exposant réel s.

Leonhard Euler
1707 – 1783

Mais l'exponentielle est connue bien avant d'être rigoureusement définie. Ainsi de Leibniz lorsqu'il étudie la courbe formée par une chaîne pesante suspendue en deux points. Ainsi de Newton qui, en inversant le développement de $\ln(1+x)$, trouve les premiers termes du développement de l'exponentielle, sans se rendre compte, et pour cause, de l'importance de sa découverte.

À LA MÊME ÉPOQUE

FRANCE

Le traité d'Aix-la-Chapelle marque la fin de la guerre de Succession d'Autriche. Louis XV, souhaitant « traiter non en marchant mais en roi », restitue toutes ses conquêtes et accepte de revenir au *statu quo ante*.

SCIENCES

En tentant d'électriser de l'eau enfermée dans un récipient en verre, Musschenbroek et von Kleist réalisent la bouteille de Leyde (1745). Le condensateur électrique est né !

PHILOSOPHIE

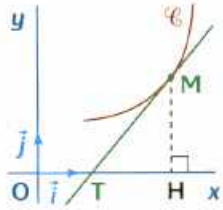
À travers son personnage de Zadig (1747), Voltaire évoque une nouvelle conception du bonheur individuel, caractéristique du siècle des Lumières.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉ 1 Un problème de Leibniz : approche de la notion d'équation différentielle

Problème.

Trouver une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal donné $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, a la propriété suivante :
quel que soit le point M de $\mathscr{C}$, la tangente en M à $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point T tel que $\overrightarrow{TH} = \vec{i}$.



Un peu d'histoire.

Leibniz, mathématicien allemand (1646-1716), a énoncé ce problème pour montrer l'insuffisance de l'algèbre. Pour résoudre ce problème, il faut utiliser le calcul différentiel. Ce problème n'est pas spéculatif. On le rencontre en physique, en économie, en médecine etc.

Note
Voir aussi le TD 3, page 98, et les exercices 85 et 86, page 110.

Le **but** de cette activité est de caractériser les fonctions f satisfaisant à la condition énoncée par Leibniz. Supposons qu'une telle fonction f existe et notons x_0 l'abscisse du point quelconque M de $\mathscr{C}$.

1. a) Pourquoi, par hypothèse, $f'(x_0)$ est-il différent de zéro ?

b) Trouvez une équation de la tangente en M à $\mathscr{C}$.

c) Déduisez-en que T a pour abscisse $x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

2. a) Démontrez que $\overrightarrow{TH} = \vec{i}$ équivaut à $f'(x_0) = f(x_0)$.

b) Déduisez-en que f convient si et seulement si $f' = f$.

CONCLUSION Pour déterminer f, on est conduit à résoudre une équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle figure la dérivée première de la fonction. Une telle équation est dite **équation différentielle**.

ACTIVITÉ 2 Utilisation de la méthode d'Euler

À l'équation différentielle $f' = f$, on ajoute la condition $f(0) = 1$.
Une solution de cette équation est donc une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 1$ et pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$.
Nous allons utiliser la méthode d'Euler vue en Première S pour construire une « solution approchée » sur l'intervalle $[0 ; 1]$. n est un entier naturel, non nul.

On découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$ et on note $t_0 = 0$, $t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n = 1$ les points de la subdivision rangés dans l'ordre croissant. On va calculer les valeurs approchées $y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n$ des nombres $f(t_0)$, $f(t_1)$, ..., $f(t_k)$, ..., $f(t_n)$ à l'aide de leurs approximations affines.

1. Calcul de y_1

Comme on sait que $f(0) = 1$, on pose $y_0 = 1$.

Justifiez que l'approximation affine de $f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right)$ est $1 + \frac{1}{n}$.

On choisit $y_1 = 1 + \frac{1}{n}$.

2. Calcul de y_{k+1}

On suppose que l'on a construit $y_0, y_1, \ldots, y_k$.

a) Justifiez que l'approximation affine de $f\left(t_k + \frac{1}{n}\right)$ est $f(t_k)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On choisit $y_{k+1} = y_k\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) Démontrez, par récurrence sur l'entier naturel k, que $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$.

3. Utilisation d'un tableur

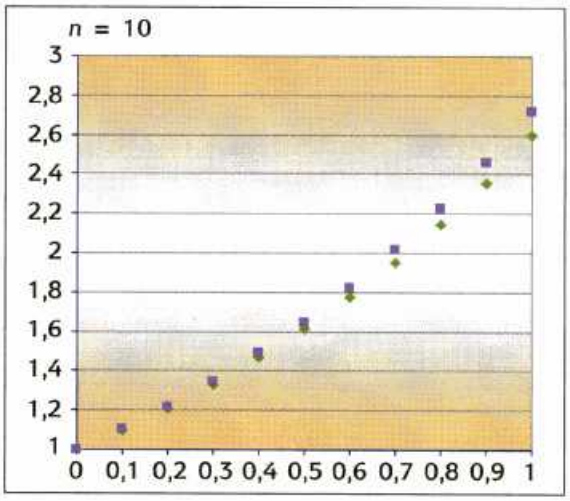
On va calculer dans une feuille de calcul d'un tableur les valeurs approchées pour différentes valeurs de n. Choisissons $n = 10$.

a) Comme le montre la vue d'écran ci-contre, on écrit dans la colonne A les valeurs de l'entier k, puis on calcule dans la colonne B, les valeurs t_k et dans la colonne C, celles de y_k. On saisit la valeur de n dans B1.

	A	B	C
1	n=	10	
2	k	t_k	y_k
3	0	0	1
4	1	=B3+1/$B$1	=PUISSANCE(1+1/$B$1;A4)
5	2	=B4+1/$B$1	=PUISSANCE(1+1/$B$1;A5)
6	3	=B5+1/$B$1	=PUISSANCE(1+1/$B$1;A6)

- Saisissez 0 dans A3 et 1 dans A4, puis recopiez ces cellules vers le bas afin de faire afficher les valeurs de k jusqu'à n.
- Dans B3, saisissez la valeur de t_0 ; comme pour tout k compris entre 0 et $n - 1$, $t_{k+1} = t_k + \frac{1}{n}$, écrivez dans B4 la formule « B3+1/$B$1 » et recopiez cette formule jusqu'à obtenir la valeur 1. (Les $ dans la formule servent à « fixer » la lettre B et l'indice 1 lorsqu'on recopie la formule.)
- Procédez de même pour faire afficher les valeurs de y_k dans la colonne C (regardez ci-dessus la formule à écrire dans C4 et à recopier vers le bas).

b) À l'aide de l'assistant graphique, faites afficher les points de coordonnées $(t_k ; y_k)$ pour obtenir la courbe ci-dessous.



c) Modifiez la feuille de calcul pour obtenir les valeurs pour $n = 20$, puis pour $n = 30$ et observez chaque fois la courbe obtenue. (N'oubliez pas de recopier les formules vers le bas.) Quelles remarques pouvez-vous faire ?

1 La fonction exponentielle

1.1 Existence de la fonction exponentielle

THÉORÈME 1 Il existe une **unique** fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée **$\exp : x \mapsto \exp x$**.
Nous admettrons l'existence de cette fonction.
Démontrons son unicité. Pour cela, nous avons besoin du théorème suivant :

THÉORÈME 2 Pour tout réel x, **$\exp(x) > 0$**.

Démonstration.
Pour alléger les écritures, nous notons f la fonction exponentielle. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$.
La fonction φ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$, $\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$. Or $f(x) = f'(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$ donc $\varphi'(x) = 0$ pour tout réel x. Il en résulte, puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, que φ est constante (voir chapitre 3, théorème 2 page 58) et donc que $\varphi(x) = \varphi(0) = 1$. Ainsi pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$.
Donc pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.
Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) < 0$ alors $f(x_0) \times f(0) < 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[x_0 ; 0]$ ou l'intervalle $[0 ; x_0]$ (suivant le signe de x_0), il existe un réel c tel que $f(c) = 0$. Ce qui est impossible.
Il en résulte que pour tout réel x, $f(x) > 0$ ou $\exp(x) > 0$.

1.2 Démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle

Pour alléger les écritures, nous notons f la fonction exponentielle. On a établi que pour tout x réel, $f(x)f(-x) = 1$. Supposons qu'il existe une autre fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$ et introduisons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) \times f(-x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)f(-x) - g(x)f'(-x)$. Or $g'(x) = g(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$ donc $h'(x) = 0$ pour tout réel x. Donc sur l'intervalle $\mathbb{R}$, h est constante et pour tout réel x, $h(x) = h(0) = 1$. Puisque, pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$ et $g(x)f(-x) = 1$ donc $f(x)f(-x) = g(x)f(-x)$. Or $f(-x) \neq 0$ (théorème 2) d'où par division, pour tout réel x_0, $f(x) = g(x)$. Il en résulte que $f = g$. D'où l'unicité de la fonction exponentielle.

1.3 Conclusion

La fonction exponentielle notée exp :
- est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.
- Pour tout réel x, $(\exp)'(x) = \exp(x)$.

COMPRENDRE

Équations différentielles

$y' = y$ ou, plus généralement, $y' = ay$ ou $y' = ay + b$ (a et b réels non nuls) sont des équations qui lient une fonction inconnue y et sa dérivée première y'.

Une telle équation est dite équation différentielle du **premier ordre** parce que figure uniquement la dérivée première.

Dans une équation différentielle, l'inconnue, en général notée y, est une fonction.

➜ PARAGRAPHE 4 p. 94 et le TD 4 p. 99

VOCABULAIRE

Exponentiel : vient du latin exponere, qui signifie exposer. Dont l'exposant est variable ou inconnu.

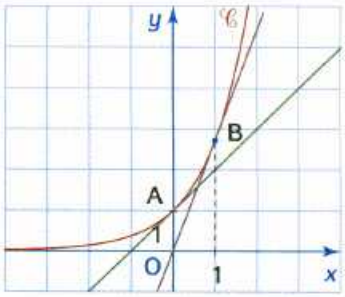
Fonction exponentielle : fonction réciproque de la fonction logarithme.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Trouver des équations de tangentes remarquables

ÉNONCÉ

La courbe du graphique ci-contre représente la fonction exponentielle dont l'étude sera faite dans les paragraphes suivants.
On note A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0 et 1.
Trouvez une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A, ainsi qu'une équation de la tangente en B.



SOLUTION COMMENTÉE

Tangente en A

On sait que $\exp(0) = 1$ donc A a pour coordonnées $(0 ; 1)$.
De plus pour tout réel x, $(\exp)'(x) = \exp(x)$,
donc $(\exp)'(0) = \exp(0) = 1$.
Ainsi la tangente en A a pour équation $y - \exp(0) = (\exp)'(0)(x - 0)$
soit $y - 1 = x$ ou $y = x + 1$.

Tangente en B

Le point B a pour coordonnées $(1 ; \exp(1))$. De plus $(\exp)'(1) = \exp(1)$.
Donc la tangente en B a pour équation $y - \exp(1) = (\exp)'(1)(x - 1)$.
Soit $y = \exp(1)x - \exp(1) + \exp(1)$, d'où $y = \exp(1)x$.
Ainsi la tangente à $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1 passe par l'origine du repère.

EXERCICE RÉSOLU 2 Utiliser l'égalité $(\exp)' = \exp$

ÉNONCÉ

On se propose de démontrer qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = m$ (m étant un réel non nul). On note g la fonction telle que $g = \frac{1}{m}f$.

Vérifiez que $g' = g$ et $g(0) = 1$. Déduisez-en qu'il existe une unique fonction f et que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = m\exp(x)$.

SOLUTION COMMENTÉE

Si f existe, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \frac{1}{m}f'(x)$.

Or $f' = f$ donc $g'(x) = \frac{1}{m}f(x) = g(x)$.

De plus $g(0) = \frac{1}{m}f(0) = 1$. Donc d'après le théorème 1, la fonction g est unique et pour tout réel x, $g(x) = \exp(x)$. Donc nécessairement f est unique et pour tout réel x, $f(x) = m\exp(x)$. On vérifie facilement que cette fonction f satisfait les conditions imposées.

2 Propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Propriétés

THÉORÈME 3 Pour tout réel a et tout réel b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration. On fixe le réel a et on introduit la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{\exp'(x+a)}{\exp(a)}$.
Or $\exp'(x+a) = \exp(x+a)$.
Donc pour tout réel x, $h'(x) = h(x)$ et $h(0) = 1$. Donc d'après le théorème 1, pour tout réel x, $h(x) = \exp(x)$, soit $\exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$. D'où le théorème, en remplaçant x par b.

THÉORÈME 4 Pour tout réel a et tout réel b, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ et $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Démonstration.
• D'après le théorème 3, $\exp(a-a) = \exp(a+(-a)) = \exp(a) \times \exp(-a)$.
Or $\exp(a-a) = \exp(0) = 1$ et de plus $\exp(a) > 0$, donc $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
• D'après le théorème 3, $\exp(a-b) = \exp(a+(-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

THÉORÈME 5 Pour tout entier relatif n, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Démonstration. Démontrons par récurrence. Pour tout entier **naturel** n, notons P_n la proposition : « $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ ». Pour $n = 0$, $[\exp(0)]^0 = 1^0 = 1$ donc P_0 est vraie.
Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n et prouvons alors que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire que « P_n » implique « P_{n+1} ».
Or $\exp[(n+1)x] = \exp(nx+x)$. D'après le théorème 3, $\exp(nx+x) = \exp(nx) \times \exp(x)$.
Or P_n est vraie donc $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$
et $\exp[(n+1)x] = [\exp(x)]^n \times \exp(x) = [\exp(x)]^{n+1}$.
Il en résulte que la proposition est vraie pour tout entier naturel n.
De plus $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{[\exp(x)]^n} = [\exp(x)]^{-n}$.
Donc la proposition est vraie pour tout n entier relatif.

2.2 Autre notation de la fonction exponentielle

• L'image de 1 par la fonction exponentielle est le nombre réel noté $\mathbf{e}$ (voir *Comprendre* page suivante). La calculatrice affiche pour e : 2,718281828...

• D'après le théorème 5, pour tout entier relatif n, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ donc $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$.
Par extension à tout nombre réel x, on note : $\exp(x) = e^x$. On lit « exponentielle de x » ou « e exposant x ».
Ainsi avec cette nouvelle notation :

• $e^0 = 1$. • $e^1 = e$. • $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
• Pour tout réel a et tout réel b :
$$e^{a+b} = e^a \times e^b ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$
• Pour tout entier relatif n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

COMPRENDRE

Le nombre e

La notation « e » est due au mathématicien suisse Léonhard EULER. Il montra que e est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers ; ou encore que e n'est pas le quotient de deux entiers.

→ TD 2 p. 97

Fonctions f telles que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

On a vu (théorème 3) que, pour tout réel a et tout réel b,

$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Ainsi la fonction exponentielle est une fonction qui transforme les sommes en produits.

D'une manière plus générale au TD 1 page 97, on cherchera **toutes** les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, transformant les sommes en produits, c'est-à-dire les fonctions f, telles que pour tout réel x et tout réel y :

$f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

On verra que ces fonctions sont les fonctions :

$x \mapsto e^{ax}$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Simplifier des écritures

ÉNONCÉ

Simplifiez les écritures suivantes.

1) $e^{2x} \times (e^{-x})^3$. **2)** $\frac{e^{4x}}{(e^x)^2 \times e}$. **3)** $\frac{e^{2x+4}}{e^{2x-1}}$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) D'après le théorème 5, $(e^{-x})^3 = e^{-3x}$

et d'après le théorème 4, $e^{2x} \times e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$.

2) $(e^x)^2 \times e = e^{2x} \times e = e^{2x+1}$ donc $\frac{e^{4x}}{(e^x)^2 \times e} = e^{4x-2x-1} = e^{2x-1}$.

3) $\frac{e^{2x+4}}{e^{2x-1}} = e^{2x+4-2x+1} = e^5$.

→ EXERCICE 1

EXERCICE RÉSOLU 4 Transformer des expressions

ÉNONCÉ

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

Démontrez que f est une fonction constante.

2) Démontrez que pour tout réel x,

$$\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

3) Démontrez que tout réel x, $e^x + e^{-x} - 2 \geqslant 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x e^{-x}$.

Or $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, donc pour tout réel x, $f(x) = 4$ et f est une fonction constante.

2) Pour démontrer une égalité, une méthode consiste à partir d'un membre pour retrouver l'autre :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient $\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$.

3) $e^x + e^{-x} - 2 = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = \frac{(e^x)^2 - 2e^x + 1}{e^x} = \frac{(e^x-1)^2}{e^x}$.

Or $(e^x-1)^2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$ donc $e^x + e^{-x} - 2 \geqslant 0$.

Remarque.

La somme d'un nombre strictement positif X et de son inverse $\frac{1}{X}$ est toujours supérieure ou égale à 2. En effet :

$X + \frac{1}{X} - 2 = \frac{X^2 - 2X + 1}{X} = \frac{(X-1)^2}{X} \geqslant 0$.

Ici $X = e^x$ et $\frac{1}{X} = e^{-x}$.

→ EXERCICES 2 et 3

3 Étude de la fonction exponentielle

3.1 Variations de la fonction exponentielle

THÉORÈME 6

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

En effet, sa fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$.

Note
Le résultat est général : si f est une fonction strictement croissante sur un intervalle I, $a < b$ équivaut à $f(a) < f(b)$ et $a = b$ équivaut à $f(a) = f(b)$.
La démonstration est analogue à celle ci-contre.

Conséquences.

Pour tout réel a, pour tout réel b,
- $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$ **(1)**.
- $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$ **(2)**.

(1) résulte de la croissance stricte de la fonction exponentielle.
Pour **(2)**, si $a = b$ alors $e^a = e^b$. Si $e^a = e^b$, alors $a = b$ car $a < b$ conduit à $e^a < e^b$ et $a > b$ conduit à $e^a > e^b$, ce qui dans les deux cas est contraire à l'hypothèse. En particulier, puisque $e^0 = 1$, $x > 0$ équivaut à $e^x > 1$.

3.2 Limites à l'infini et courbe représentative

THÉORÈME 7

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration.

• Pour démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, nous allons comparer e^x à x et pour cela étudier la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$. Pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$ et $f'(x) \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant 1$ ou à $e^x \geqslant e^0$, c'est-à-dire d'après les conséquences (1) et (2) à $x \geqslant 0$.
D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	1	↗	

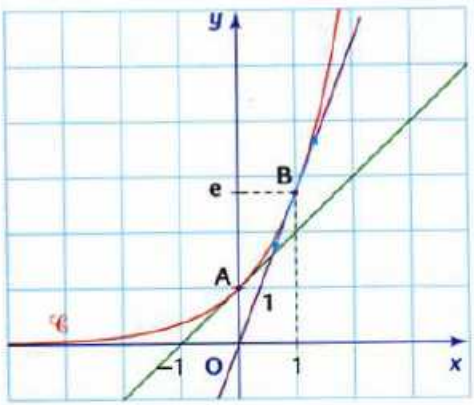
Il résulte que pour tout réel x, $f(x) > 0$ donc $e^x > x$.
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

• Pour trouver la limite de e^x en $-\infty$, posons $X = -x$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$.

• Courbe représentative de $x \mapsto e^x$

D'après les paragraphes précédents, la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
D'où le tableau de variations et la courbe.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$(\exp)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$



COMPRENDRE

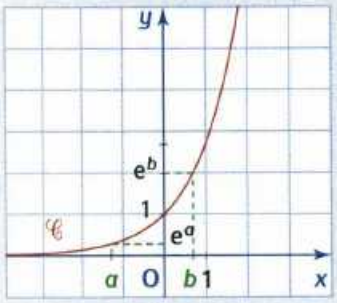
Équations $e^{u(x)} = e^{v(x)}$

• Les équations (E_1) : $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ et (E_2) : $u(x) = v(x)$ ont même **ensemble de solutions**.
En effet, quel que soit x_0 dans $\mathscr{D}_u$ et dans $\mathscr{D}_v$ (ensembles de définition respectifs de u et v) d'après les conséquences du théorème 6, « $u(x_0) = v(x_0)$ » équivaut à « $e^{u(x_0)} = e^{v(x_0)}$ ».
Donc toute solution de (E_2) est solution de (E_1) et réciproquement.

• De la même manière, on démontre que les inéquations $e^{u(x)} > e^{v(x)}$ et $u(x) > v(x)$ ont le même ensemble de solutions.

➜ EXERCICE RÉSOLU 5

Utiliser la courbe représentative



Un croquis rapide de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $x \mapsto e^x$ condense beaucoup de renseignements :
• $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$.
• $e^x > 1$ équivaut à $x > 0$.
• $e^0 = 1$ équivaut à $x = 0$.
• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 — Résoudre des équations et des inéquations

ÉNONCÉ Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1) $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1}$. **2)** $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$. **3)** $(e^x)^2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^2$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) Dans $\mathbb{R}$ privé de zéro, les équations $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1}$ et $\frac{1}{x} = x+1$ ont le même ensemble de solutions (voir *Comprendre*). Or $\frac{1}{x} = x+1$ équivaut dans $\mathbb{R} - \{0\}$ à $x^2 + x - 1 = 0$ dont les solutions sont :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

D'où $\mathscr{S} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2) Les inéquations $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$ et $2x+1 < -x^2+4$ ont le même ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$.
$2x+1 < -x^2+4$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $]-3 ; 1[$ qui est donc aussi l'ensemble des solutions de $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$.

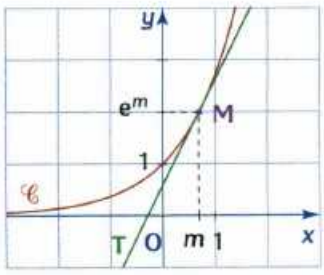
3) $(e^x)^2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^2$ équivaut à $e^{2x} \leqslant e^{-2}$ d'où $x \leqslant -1$.
L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

➜ EXERCICES 4 à 10, 67

EXERCICE RÉSOLU 6 — Situer la courbe de $x \mapsto e^x$ par rapport à ses tangentes

ÉNONCÉ Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$. M est un point quelconque de $\mathscr{C}$ d'abscisse m. Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

SOLUTION COMMENTÉE



On note T la tangente au point M de coordonnées $(m ; e^m)$. Une équation de T est donc $y - e^m = e^m(x-m)$ ou $y = e^m(x-m+1)$.
Pour étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T, introduisons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^x - e^m(x-m+1)$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\varphi'(x) = e^x - e^m$. Il en résulte que $\varphi'(x) > 0$ équivaut à $e^x > e^m$ soit $x > m$. Et $\varphi'(x) = 0$ équivaut à $x = m$.
D'où le tableau de variations.
Ainsi pour tout réel x, $\varphi(x) \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}$ est située au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

x	$-\infty$		m		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	↘		0		↗

➜ EXERCICE 20

3 Étude de la fonction exponentielle (suite)

3.3 Des limites importantes

THÉORÈME 8

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration.

La fonction exponentielle est dérivable en zéro et $(\exp)'(0) = \exp(0) = 1$. Or dire que 1 est le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto e^x$ en zéro équivaut à dire que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

D'où le théorème.

Remarque.

L'**approximation affine locale** de e^x en 0 est $1 + x$ et lorsqu'on remplace e^x par $1 + x$, on commet une erreur inférieure à $\frac{x^2}{2}$ pour tout réel x tel que $0 < x < 1$.

3.4 Croissance comparée de e^x et x

THÉORÈME 9

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration.

• g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = e^x - x$. Or pour tout réel x, $e^x > x$ (voir l'étude de la fonction f du théorème 7 page 90). Donc pour tout réel x, $g'(x) > 0$.

D'où le tableau de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'		+	
g		1 ↗	

Il en résulte que pour tout réel x, $x > 0$, $g(x) > 0$ donc $e^x > \frac{x^2}{2}$ ou $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (voir chapitre 2, théorème 3, page 28).

• Pour trouver la limite de xe^x en $-\infty$, posons $X = -x$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^X} = 0$.

Donc, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

3.5 Dérivée d'une fonction $\exp \circ u$

La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de $\exp \circ u$ est donc égal à l'ensemble de définition de u.

THÉORÈME 10

Lorsqu'une fonction u est dérivable sur un intervalle I, la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

Démonstration.

D'après le théorème sur la dérivée d'une fonction composée (voir chapitre 3, théorème 5, page 60) :

$$f'(x) = (\exp)'(u(x)) \times u'(x).$$

Or $(\exp)'(u(x)) = \exp(u(x))$, donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

COMPRENDRE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Le résultat peut s'interpréter en disant que « pour les grandes valeurs de x », e^x est « infiniment grand par rapport à x ».

On dira aussi qu'au voisinage de $+\infty$ l'exponentielle « l'emporte » sur x ou que « x est négligeable devant e^x ».
Ainsi pour trouver une limite en $+\infty$ dans le cas de formes indéterminées « $\infty - \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », il est parfois intéressant de mettre e^x en facteur lorsqu'il est le terme dominant.

➜ EXERCICE RÉSOLU 7

$$f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$$

Une exponentielle étant toujours strictement positive, le signe de $f'(x)$ est celui de $u'(x)$.

Exemple.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{x^2+1}$.
Le polynôme $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $u'(x) = 2x$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.
Le signe de $f'(x)$ est celui de x.

Remarque.
Le théorème 10 n'énonce qu'une condition **suffisante**, $\exp \circ u$ peut être dérivable en a sans que u le soit.

➜ EXERCICE 41, p. 103

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Chercher des limites

ÉNONCÉ **1)** Étudiez les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x - e^x$.

b) $g : x \mapsto \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$.

c) $h : x \mapsto x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

2) Pourquoi la droite d'équation $y = x + 2$ est-elle asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$?

SOLUTION COMMENTÉE

1) a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- En $+\infty$, les théorèmes sur les opérations conduisent à la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Puisque l'exponentielle « l'emporte » sur x, on met en facteur le terme dominant e^x, $f(x) = e^x\left[\frac{x}{e^x} - 1\right]$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- En $+\infty$, les théorèmes sur les opérations conduisent à la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Mais pour tout réel x, $g(x) = \frac{e^x(2 + e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{2 + e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$.

c) La fonction h est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

Donc en $+\infty$ et en $-\infty$, les théorèmes sur les opérations conduisent à la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ».

On pose alors $X = \frac{1}{x}$, soit $x = \frac{1}{X}$, d'où $f(X) = \frac{e^X - 1}{X}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ (théorème 8). Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

2) Il s'agit de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + 2) = 0$.

Or $f(x) - (x + 2) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} - 2 = \frac{-1}{e^x + 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x + 1} = 0$

donc la droite d'équation $y = x + 2$ est bien asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

Notez que pour tout réel x, $f(x) - (x + 2) < 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de son asymptote oblique.

➜ EXERCICES 21 à 28

4 Équations différentielles

4.1 Vocabulaire

Résoudre sur un intervalle I, l'équation différentielle $y' = ay$ $(a \neq 0)$ d'inconnue la fonction y, c'est trouver toutes les fonctions f, dérivables sur I, telles que pour tout réel x de I, $f'(x) = af(x)$. Une telle fonction est dite **solution sur I de l'équation différentielle $y' = ay$.**

4.2 Résolution de l'équation $y' = ay$ $(a \neq 0)$

■ Solution générale

THÉORÈME 11

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un réel **quelconque.**

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 102

Démonstration.

• Pour tout réel x, $f_k'(x) = ake^{ax} = af_k(x)$ donc f_k est solution de l'équation $y' = ay$.

• Démontrons que les fonctions f_k sont les seules solutions. Pour cela, supposons qu'une fonction g est solution de $y' = ay$ et notons z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = g(x)e^{-ax}$.

La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$z'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}[g'(x) - ag(x)].$$

Or $g'(x) = ag(x)$ pour tout réel x donc $z'(x) = 0$. Ainsi la dérivée de la fonction z est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc z est une fonction constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x, $z(x) = k$ donc $g(x) = ke^{ax}$. Ainsi toute solution est une fonction f_k.

■ Solution soumise à une condition

Parmi les solutions f_k, on cherche celles qui satisfont à la condition $f(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont deux réels donnés.

THÉORÈME 12

Pour tout couple $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' = ay$ admet une **unique** solution f telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration.

Dire que $f_k(x_0) = y_0$ équivaut à dire que $ke^{ax_0} = y_0$ ou $k = y_0e^{-ax_0}$.

Il n'y a donc qu'une seule valeur possible de k et f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = y_0e^{-ax_0}e^{ax}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = y_0e^{a(x-x_0)}.$$

4.3 Résolution de l'équation $y' = ay + b$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

THÉORÈME 13

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ sont les fonctions f_k définies pour tout réel x par :

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$ où k est un réel **quelconque.**

Pour la démonstration, voir *Comprendre* page suivante.

COMPRENDRE

Résolution de $y' = ay + b$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

• Supposons qu'une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de l'équation (E) : $y' = ay + b$ $(a \neq 0, b \neq 0)$, alors pour tout réel x,

$$f'(x) = af(x) + b.$$

Posons pour tout x,

$$g(x) = f(x) + \frac{b}{a}.$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) = af(x) + b = ag(x)$. Ce qui prouve que g est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Il en résulte que $g(x) = ke^{ax}$ et $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

• **Réciproquement**

Toute fonction $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ est solution de (E) car, pour tout réel x,

$$f'(x) = kae^{ax} = a\left[f(x) + \frac{b}{a}\right]$$

soit $f'(x) = af(x) + b$.

Il en résulte que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}.$$

→ EXERCICE RÉSOLU 9

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 8 Équation différentielle du type $y' = ay$

ÉNONCÉ

Trouvez la solution f de l'équation différentielle $2y' + y = 0$ telle que $f(0) = 2$.

POINT MÉTHODE

Pour appliquer directement les théorèmes 11 et 13, il est **impératif** d'écrire l'équation à résoudre sous la forme $y' = ay$ ou $y' = ay + b$.

SOLUTION COMMENTÉE

L'équation proposée s'écrit $y' = -\frac{1}{2}y$. Les solutions dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème 11, sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$ où k est un réel quelconque.

D'après le théorème 12, il existe une fonction f unique telle que $f(0) = 2$. Elle est telle que $2 = ke^0$ d'où $k = 2$. Ainsi la solution f de $2y' + y = 0$, qui prend la valeur 2 en zéro, est la fonction :

$$f : x \mapsto 2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

→ EXERCICES 45 à 47

EXERCICE RÉSOLU 9 Équation différentielle du type $y' = ay + b$

ÉNONCÉ

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Déterminez f sachant que :

- Pour tout réel x, $2f(x) + f'(x) = 3$.
- $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse $x = 1$ une tangente de coefficient directeur 2.

SOLUTION COMMENTÉE

Avant de résoudre cet exercice, il est impératif de traduire l'énoncé.

- Dire que pour tout réel x, $2f(x) + f'(x) = 3$ équivaut à dire que f est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 3$.
- Dire que $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse $x = 1$ une tangente de coefficient directeur 2 équivaut à dire que $f'(1) = 2$ ou $2f(1) + 2 = 3$ soit $f(1) = \frac{1}{2}$.
- Les solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = -2y + 3$ sont les fonctions f_k telles que, pour tout réel x :

$$f_k(x) = ke^{-2x} + \frac{3}{2}.$$

Ainsi la fonction f est telle que $\frac{1}{2} = ke^{-2} + \frac{3}{2}$ d'où $k = -e^2$.

Il en résulte que la fonction cherchée est :

$$f : x \mapsto -e^{2(1-x)} + \frac{3}{2}.$$

→ EXERCICES 51, 53, 55

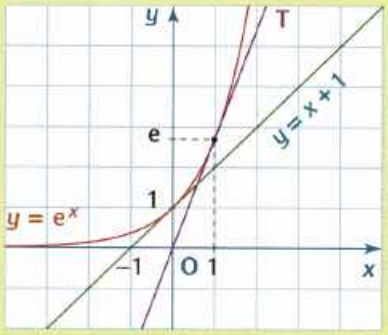
COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est l'**unique solution**, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $y(0) = 1$.

Ainsi : La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Un croquis rapide de la courbe représentative de $x \mapsto e^x$ condense beaucoup de renseignements. Le mémoriser peut être utile.



- $e^x > 0$. • $e^0 = 1$.
- $x \mapsto e^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- $e^x > 1$ équivaut à $x > 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

- Pour tout réel x : $e^x \geqslant x + 1$.

Lorsque $f : x \mapsto e^{u(x)}$, f est dérivable « là » où u est dérivable.

Exemple. $f(x) = e^{\frac{1}{x} + x}$, $u : x \mapsto \dfrac{1}{x} + x$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ donc pour tout x, $x \neq 0$, $f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) e^{x + \frac{1}{x}}$.

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, il suffit d'appliquer les théorèmes 11 et 13 de la page 94. Mais il faut impérativement écrire les équations sous la forme $y' = ay$ **ou** $y' = ay + b$.

→ EXERCICES RÉSOLUS 8 et 9

DES réflexes À AVOIR

Dans les calculs, pensez que :

- Pour simplifier, $(e^{nx}) = (e^x)^n$.
- $e^{\square}$ n'est jamais nul quel que soit l'exposant $\square$. $e^{\square}$ est strictement positif.
- L'équation « $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ » équivaut à « $u(x) = v(x)$ ».
De même, « $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ » équivaut à « $u(x) < v(x)$ ».

→ EXERCICE RÉSOLU 5

- Pour lever une indétermination en $+\infty$, « e^x l'emporte sur x ».

→ EXERCICE RÉSOLU 7

Exemple.

$f(x) = e^x - x = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

- Pour lever une indétermination en $-\infty$, on peut poser $X = -x$.

→ EXERCICE RÉSOLU 7

Exemple.

$f(x) = x + e^{-x}$. On pose $X = -x$ et $f(X) = -X + e^X$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$.

On démontre comme précédemment que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

- Le signe de $f'(x)$ lorsque $f(x) = e^{u(x)}$ est celui de $u'(x)$ car $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

DES erreurs À ÉVITER

Ne pas croire que $e^a + e^b$ est égal à e^{a+b}.

Ne pas croire que la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ est $x \mapsto e^{u(x)}$.

TD 1 Recherche des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

La fonction exponentielle est une fonction qui transforme les sommes en produits :

pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = (\exp x) \times (\exp y)$.

Le **but** de ce TD est de rechercher **toutes** les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ont cette propriété.

On suppose que, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \quad [1].$$

1. Démontrez que s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$, alors f est la fonction nulle. (On pourra calculer, pour tout réel x, $f(x_0 + x)$.)

Dans la suite, on suppose f solution de [1] et distincte de la fonction nulle.

2. a) En prenant $y = 0$, démontrez que $f(0) = 1$.

b) En prenant $x = y = \frac{X}{2}$, démontrez que pour tout réel X, $f(X) > 0$.

3. Supposons x fixé et considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(y) = f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

a) Démontrez que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel y,

$$g'(y) = f'(x+y) = f(x) \times f'(y).$$

b) Cette égalité est aussi vraie pour tout réel x.

Déduisez-en que pour tout réel x, $f'(x) = f'(0) \times f(x) = af(x)$ avec $a = f'(0)$.

c) Ainsi f est la solution de l'équation différentielle $y' = ay$ telle que $f(0) = 1$.

Déduisez-en que $f(x) = e^{ax}$.

4. **Réciproquement**, a est un réel, f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = e^{ax}$.

Démontrez que pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

CONCLUSION Les fonctions f (non nulles) dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ sont les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel).

TD 2 Des encadrements de e. Irrationalité de e

1 Premier encadrement

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (x+1)$.

1. a) Étudiez les variations de f et déduisez-en que pour tout réel x,

$$1 + x \leqslant e^x \quad (1).$$

b) En remplaçant x par $-x$ dans (1), démontrez que pour tout réel x, $x < 1$,

$$e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \quad (2).$$

2. n est un entier supérieur ou égal à 2.

a) En posant $x = \frac{1}{n}$, démontrez, à partir de (1), que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$ (3).

b) En posant $x = \dfrac{1}{n+1}$, démontrez à partir de **(2)**, que $e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Ainsi pour tout $n \geqslant 2$, on obtient :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (3).$$

2 Un deuxième encadrement de e

n est un entier naturel, $n \geqslant 2$. g et h sont des fonctions définies sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = e^{-x}\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right] \text{ et } h(x) = g(x)+e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

1. a) Étudiez les variations de g et h sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Déduisez-en que $g(1) < 1$ et $h(1) > 1$.

2. Démontrez alors que :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < e < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!} \quad (4).$$

3 Irrationalité de e

Pour démontrer que e est irrationnel, nous allons utiliser l'encadrement de e du paragraphe **2**.

Supposons e rationnel, alors $e = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers.

1. En multipliant les inégalités **(4)** par $n!$, prouvez que $n!e$ est encadré **strictement** par deux entiers consécutifs a_n et $a_n + 1$.

Aide. Si $k \leqslant n$, alors $k!$ divise $n!$

2. a) Prouvez que $q \leqslant n$ est impossible.

Aide. Tout entier $q \leqslant n$ divise $n!$ et donc $\dfrac{n!p}{q}$ est un entier...

b) Déduisez-en que $q > n$, quel que soit l'entier n, $n \geqslant 1$.

Concluez que e est irrationnel.

TD 3 L'exponentielle dans d'autres sciences

1 En médecine : temps d'effet d'un médicament

On admet, lorsqu'on injecte dans le sang une dose A d'un médicament, qu'il reste dans le sang, à la date t, après élimination naturelle, la quantité $Ae^{-\frac{t}{24}}$ de médicament. L'unité de temps est l'heure ; l'origine du temps est l'instant de l'injection ; l'unité de volume est le cm^3.

1. Quelle quantité de médicament reste-t-il 8 heures après l'injection ?

2. On injecte une dose A toutes les 8 heures. Représentez graphiquement la quantité de médicament contenue dans le sang pendant les 64 heures qui suivent la première injection.

3. Le médicament est efficace lorsque le sang véhicule une quantité au moins égale à 2,2 A. D'après le graphique, indiquez l'instant à partir duquel le médicament sera efficace.

2 En économie

En économie pour suivre et décrire l'évolution de « populations à croissance limitée », on utilise les fonctions logistiques f du type :

$$t \mapsto \frac{a}{1+be^{-kt}} \text{ où } a, b, k \text{ sont des constantes positives.}$$

Elles servent par exemple à l'étude d'équipement d'un ménage en automobile, en récepteurs TV etc. et ceci en fonction du temps.

1. Pourquoi cette fonction est-elle définie sur $\mathbb{R}$?

2. Étudiez la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative pour $a = 3$, $b = 2$, $k = 1$.

3 En physique

1. Dans un four dont la température constante est 1 000 °C, on place une figurine en céramique. Les variations de la température x de la figurine en fonction du temps, (en heures) sont données par l'équation différentielle suivante où k est une constante réelle, (E) : $x'(t) = k[1\,000 - x(t)]$.

a) Résolvez l'équation (E).

b) La figurine, initialement à 40 °C, est mise au four à l'instant $t = 0$.
À l'instant $t = 1$, la température de la figurine est 160 °C.

- Démontrez que $e^{-k} = \frac{7}{8}$ (il est inutile de chercher k).
- Calculez la température de la figurine à l'instant $t = 5$.

2. Mise en mouvement d'un canot

Un canot de masse m est disposé sur un plan d'eau horizontal. On exerce sur ce canot, à l'instant $t = 1$, une force constante horizontale $\vec{F}$.
La vitesse du canot est alors définie en fonction du temps par l'équation différentielle :

$$(\dot{E}) : mv' + rv = F \text{ où } r \text{ est une constante.}$$

a) Résolvez l'équation différentielle (E).

b) Quelle est la vitesse limite du canot ?

TD 4 Résolution d'une équation différentielle avec second membre

L'équation différentielle $y' - ay = f$, où f est une fonction non nulle donnée, est dite équation avec **second membre** pour la distinguer de l'équation $y' - ay = 0$ qualifiée d'équation **homogène**.
Le cas particulier où f est la fonction constante : $x \mapsto b$, b réel donné, a été traité en cours, théorème 12, page 94.

1 Étude commentée d'un exemple

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ et on cherche les solutions de (E) définies sur $]0 ; +\infty[$. On note I cet intervalle.

1. Démontrez que la fonction h définie sur I par $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

Commentaire. L'équation (E) doit se lire $y(x) - y'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$, où y est la fonction inconnue. Pour démontrer que h est une solution de E, définie sur I, il suffit donc de calculer, pour tout $x > 0$, $h(x) - h'(x)$, et de prouver que l'on obtient $\dfrac{e^x}{x^2}$.

2. Démontrez qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si, la fonction $g_1 = g - h$, définie sur I, est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y - y' = 0$.

Commentaire. La présence du « si et seulement si » indique l'équivalence entre les deux propositions « g est solution de (E) » et « $g - h$ est solution de (E_1) ».
On peut procéder ainsi :
a) supposer que g est solution de (E), c'est-à-dire que pour tout $x > 0$, $g(x) - g'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$, puis en déduire que pour tout $x > 0$, $g(x) - h(x) - (g'(x) - h'(x)) = 0$.
b) réciproquement, supposer que pour tout $x > 0$, $g(x) - h(x) - (g'(x) - h'(x)) = 0$, puis en déduire que $g(x) - g'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

3. Résolvez l'équation (E_1).

Commentaire. Il suffit d'appliquer directement le théorème 11 à condition d'écrire (E_1) sous la forme énoncée dans ce théorème : $y' = ay$, donc ici, $y' = y$.

4. Déduisez-en toutes les solutions, définies sur I, de l'équation (E).

Commentaire. Il résulte de la question **2.** que toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à h une solution g_1 de (E_1). Ce résultat est général.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) : $y' - ay = f$ est l'ensemble des fonctions $g_1 + h$, où g_1 est une solution de l'équation $y' - ay = 0$ et h est solution particulière de (E).
Les exercices demandent de démontrer ce théorème dans des cas particuliers. Une fonction particulière h est donnée ou un moyen de la trouver est indiqué.

2 Applications

On donne deux équations différentielles avec second membre et le moyen de trouver, pour chacune, une solution particulière h. Trouvez pour chacune d'elles, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$, en reprenant la démarche suivie dans l'exemple.

1. $y' + y = x^2 + x$, h est un polynôme de degré 2.

2. $y - 2y' = 5\cos x$, $h : x \mapsto a\cos x + b\sin x$.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. La fonction exponentielle

1 Simplifiez l'écriture des expressions suivantes.

a) $(e^x)^3e^{-2x}$.

b) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$.

c) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x}$.

d) $(e^{-x})e^2$.

e) $\dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2\times e^x}$.

f) $\dfrac{e^x e^y}{e^{x-y}}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 89.

2 Pour tout réel x, on pose :

$$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

1. Démontrez que $[g(x)]^2-[h(x)]^2=1$.

2. Démontrez que $g(2x)=2[g(x)]^2-1$ et que $h(2x)=2g(x)\times h(x)$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 89.

3 Pour tout réel x, on pose :

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Démontrez que $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 89.

Pour les exercices 4 à 10, résolvez dans chacun des cas, l'équation ou l'inéquation proposée.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 91.

4 **a)** $e^{3-x}=1$. **b)** $e^{2x^2+3}=e^{7x}$.

5 **a)** $2e^{-x}=\dfrac{1}{e^x+2}$. **b)** $e^{x^3}=e^8$.

6 **a)** $e^{x+1}=e^{\frac{2}{x}}$. **b)** $e^{\sin x}=e^{\frac{1}{2}}$.

7 **a)** $e^{x^2}=(e^2)^3e^{-x}$. **b)** $e^{x^2}=e^{x-2}$.

8 **a)** $e^{x^2}\leqslant\dfrac{1}{e^2}$. **b)** $(e^x)^3\leqslant e^{x+6}$.

9 **a)** $e^x\leqslant\dfrac{1}{e^x}$. **b)** $(e^x-1)e^x>e^x-1$.

10 **a)** $e^{2x}<e^x$. **b)** $3(e^x)^2+e^x-4<0$.

2. Étude de la fonction exponentielle

Pour les exercices 11 à 16, calculez la dérivée de la fonction f proposée, sur l'intervalle I indiqué.

11 $f(x)=(x^2-2x)e^x$; $I=\mathbb{R}$.

12 $f(x)=\dfrac{1}{x}e^x$; $I=\mathbb{R}-\{0\}$.

13 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{2e^x+1}$; $I=\mathbb{R}$.

14 $f(x)=(\sin x+\cos x)e^x$; $I=\mathbb{R}$.

15 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-x}$; $I=\mathbb{R}$.

☞ **Remarque.** I = ℝ car pour tout réel x, $e^x>x$ (voir théorème 7, page 90).

16 $f(x)=x^2-2(x-1)e^x$; $I=\mathbb{R}$.

17 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \text{ et } g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$$

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h=\dfrac{g}{f}$.

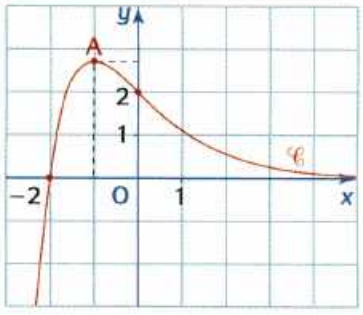
1. Calculez, pour tout réel x, $f'(x)$ et $g'(x)$.

2. Démontrez que $h'=\dfrac{1}{f^2}$.

18 La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(ax+b)e^{-x}$

où a et b sont deux réels.



1. À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminez a et b.

2. Calculez $f'(x)$ pour tout réel x.
Déduisez-en les coordonnées du point A correspondant au maximum de f.

19 1. Tracez dans un repère orthonormal la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction exp.

2. Déduisez-en la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

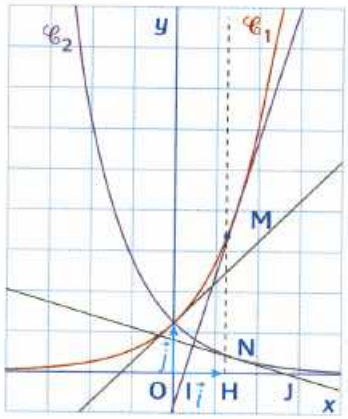
a) $f_1 : x \mapsto e^x - 2$; **b)** $f_2 : x \mapsto 1 - e^x$;

c) $f_3 : x \mapsto |1 - e^x|$.

20 Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$.

H est un point de coordonnées $(m ; 0)$ et M et N les points d'abscisse m, respectivement pris sur $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Les tangentes en M et N à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ coupent respectivement l'axe des abscisses en I et J. Démontrez :



a) que les tangentes en M et N sont perpendiculaires ;

b) que H est le milieu de [IJ].

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 91.

3. Des limites importantes

Pour les exercices 21 à 26, étudiez la limite de la fonction f à l'endroit indiqué.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 93.

21 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$; en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

22 $f(x) = 2xe^{-x}$; en $+\infty$.

23 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$; en $+\infty$ et en $-\infty$.

24 $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$; en $+\infty$ et en $-\infty$.

25 $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$; en $+\infty$ et en $-\infty$.

26 $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^{2x} - 1)$; en 0 et en $+\infty$.

27 f est la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Étudiez les limites de f en chacune des bornes de l'ensemble de définition.

28 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + e^{-2x}.$$

1. Démontrez que la droite d d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f en $+\infty$.

2. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à d.

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + 4e^{-x}.$$

Démontrez que la courbe représentative de f a une asymptote oblique en $+\infty$.

30 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 + xe^x.$$

Démontrez que la courbe représentative de f a une asymptote oblique en $-\infty$.

31 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Pourquoi les droites d et Δ d'équations respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}$?

2. a) Calculez $f'(x)$ pour tout réel x.

b) Étudiez les variations de f.

3. Tracez d, Δ puis $\mathscr{C}$.

32 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 1)e^x.$$

1. Déterminez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudiez les variations de f.

3. Construisez la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.

33 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Pourquoi la droite d d'équation $y = -x$ est-elle asymptote à $\mathscr{C}$?

2. Étudiez les variations de f et construisez $\mathscr{C}$.

34 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}.$$

1. Précisez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Démontrez que la droite d d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.

b) Démontrez que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

3. Dressez le tableau de variations de f.

4. Construisez dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les droites d et Δ puis la courbe $\mathscr{C}$.

35 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 2$.

1. Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Dressez le tableau de variations de f.

3. a) Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que :

$$-1{,}9 < \alpha < -1{,}8 \quad \text{et} \quad 1{,}1 < \beta < 1{,}2.$$

b) Précisez le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3 - x)e^x.$$

Justifiez les affirmations suivantes.

1. Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	e^2	↘	$-\infty$

2. Pour tout réel $m > 0$ et $m \neq e^2$, l'équation $f(x) = m$ admet soit aucune, soit deux solutions.

4. Des fonctions $x \mapsto e^{u(x)}$

Pour les exercices 37 à 40, calculez la dérivée de la fonction f proposée sur l'ensemble indiqué.

37 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

38 $f(x) = 2(x-1)e^{x-1}$; $I = \mathbb{R}$.

39 $f(x) = \cos x e^{\sin x}$; $I = \mathbb{R}$.

40 $f(x) = e^{\frac{1+x}{1+x^2}}$; $I = \mathbb{R}$.

41 ZOOM SUR... le théorème 10

f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$ et u est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x}$.

1. a) Pourquoi peut-on affirmer que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$?

b) Calculez alors $f'(x)$, pour tout réel x, $x > 0$.

2. La fonction u n'est pas dérivable en $x = 0$, faut-il en conclure que f n'est pas dérivable en zéro ? Justifiez votre réponse.

42 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Calculez $f(-x)$.

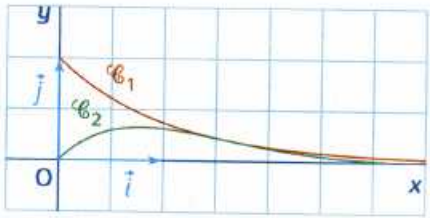
Que peut-on en conclure pour $\mathscr{C}$?

b) Étudiez les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

2. Tracez la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

43 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2e^x$. Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative.

44



Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé ci-dessus les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies sur $[0 ; \pi]$ par $f_1(x) = e^{-x}$ et $f_2(x) = \sin x e^{-x}$.

1. Démontrez que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont un point commun et un seul A sur $[0 ; \pi]$.

2. Démontrez que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ admettent en A une tangente commune.

5. Équations différentielles

Pour les exercices 45 à 47, dans chaque cas, résolvez l'équation différentielle proposée.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 95.

45 **a)** $y' = 3y$. **b)** $y' + 2y = 0$.

46 **a)** $2y' + 3y = 0$. **b)** $3y' = 5y$.

47 **1.** Résolvez l'équation différentielle $y = 2y'$.

2. Trouvez la solution f de cette équation telle que $f(0) = 1$.

48 f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative. Déterminez la fonction f telle que :

- pour tout réel x, $f(x) = -5f'(x)$;
- le point $A(-2 ; 1)$ est un point de $\mathscr{C}$.

49 f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative. Déterminez la fonction f telle que :

- pour tout x réel, $f(x) + 2f'(x) = 0$;
- $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

50 ZOOM SUR... les théorèmes 11 et 12

$\mathscr{E}$ est l'ensemble des fonctions solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

Pourquoi la fonction $u : x \mapsto e^{-1-2x}$ est-elle le seul élément de $\mathscr{E}$ qui prend la valeur 1 en $x = -\frac{1}{2}$?

51 Dans chacun des cas, résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle indiquée.

a) $y' = 2y + 1$. **b)** $y + 3y' = 2$.

c) $2y + 3y' - 1 = 0$. **d)** $2y' = y - 1$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 9, page 95.

52 f est une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + 3y = 0.$$

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et dans chacun des cas suivants, construisez la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.

1. Le point $(0 ; 1)$ est un point de $\mathscr{C}$.

2. Au point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$, la tangente a pour coefficient directeur 3.

53 f est une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y - 5 = 0$.

Est-il vrai que sa courbe représentative admet en $+\infty$, la droite d'équation $y = \frac{5}{2}$ pour asymptote horizontale ?

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 9, page 95.

54 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-3x}$.

Trouvez une équation différentielle de la forme $y' = ay$ pour laquelle f est solution.

55 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x} - 4$.

Trouvez une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ pour laquelle f est solution.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 9, page 95.

6. Applications

56 Résolution d'une équation

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a)** Démontrez que la droite d d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Pourquoi $\mathscr{C}$ est-elle au-dessus de d ?

2. Justifiez le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions et deux seulement dans $\mathbb{R}$, l'une α dans l'intervalle $]-2 ; -1[$ et l'autre β dans $]1 ; 2[$.

57 Le rayonnement d'une étoile

L'intensité $I(\lambda)$ du rayonnement d'une étoile pour une longueur d'onde λ ($\lambda > 0$), est donnée par $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{K}{\lambda}}$ où K est une constante positive qui dépend de l'étoile.

Démontrez que l'intensité $I(\lambda)$ rayonnée par l'étoile est maximale pour une valeur λ_0 de λ que l'on déterminera en fonction de K. Déduisez-en $I(\lambda_0)$.

58 Dopage de puces

Pour réaliser des circuits électroniques dans un cristal de silicium, on dépose à sa surface des impuretés (bore, phosphore, etc.).

Celles-ci s'enfoncent progressivement dans le silicium. Le nombre $N(t)$ d'impuretés présentes à la profondeur d ($d > 0$) s'exprime en fonction du temps t ($t > 0$) par :

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{2d^2}{t}}.$$

Démontrez que $N(t)$ est maximal pour une valeur t_1 du temps que l'on déterminera en fonction de d.

Déduisez-en $N(t_1)$.

59 La chute libre

Un corps de masse m est lâché en chute libre sans vitesse initiale. La vitesse $v : t \mapsto v(t)$ est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{k}{m} y = g$

où k est le coefficient de freinage et g l'accélération de la pesanteur. Démontrez que $v(t) = \frac{gm}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$.

60 BAC f est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. **a)** Démontrez que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

b) Étudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et de Δ.

2. **a)** Démontrez que tout x de I,

$$f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}).$$

b) Déduisez-en que pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.

c) Précisez $f'(0)$ et dressez le tableau de variations de f.

3. **a)** Tracez Δ puis $\mathscr{C}$.

b) Quel est le point A de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à Δ ?

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

61 Tangentes à une courbe issues d'un point

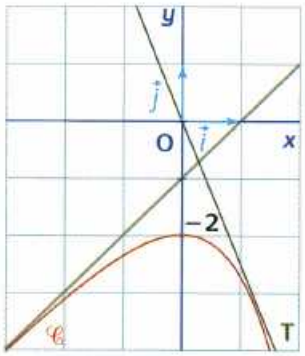
Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 - e^x$.

Objectif : démontrer qu'il existe une seule tangente à $\mathscr{C}$ passant par O et préciser cette tangente.

1. Afin de bien comprendre la représentation graphique ci-contre, démontrez que :

a) la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

b) Pour tout réel x, $f(x) \leqslant -2$.



2. Il semble qu'il existe une unique tangente T à $\mathscr{C}$ issue de O. Pour trouver T, nous avons deux contraintes :
- T passe par O ;
- T est tangente à $\mathscr{C}$.

Une méthode pour trouver T consiste à « abandonner » dans un premier temps une contrainte (par exemple T passe par O). On va donc considérer un point M quelconque de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0 et chercher une équation de la droite T_{x_0} tangente à $\mathscr{C}$ en M_0. On traduira ensuite l'hypothèse « O est un point de T_{x_0} ».

a) Trouvez, en fonction de x_0, une équation de T_{x_0}.

b) Démontrez que T_{x_0} passe par O si et seulement si :

$$(x_0 - 1)e^{x_0} - 1 = 0 \quad \textbf{(1)}.$$

3. Il reste à résoudre l'équation **(1)** pour trouver x_0, s'il existe. La résolution d'une telle équation nécessite l'étude des variations d'une fonction. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x - 1)e^x - 1$.

a) Précisez $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$.

b) Étudiez les variations de φ et dressez son tableau de variations.

4. Résoudre **(1)** équivaut à résoudre $\varphi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Prouvez que α appartient à l'intervalle $]1 ; 2[$ et donnez une valeur approchée de α par excès à 10^{-2} près.
Concluez.

62 Famille de fonctions et lieu géométrique

m est un réel donné, f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = (x + m)e^{-x}$$

et I_m le point de la courbe $\mathscr{C}_m$, lorsqu'il existe, dont l'ordonnée est l'extremum de f_m.

Objectif : trouver le lieu $\mathscr{E}$ de I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

1. I_m n'existe que si la fonction f_m a un extremum.
D'après l'énoncé, cette existence est à discuter.
On est donc amené à étudier les variations de f_m. Mais, au préalable pour avoir une idée des courbes $\mathscr{C}_m$, on peut visualiser quelques courbes à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel.

a) Faites afficher $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$.

Le point I_m semble exister chaque fois.

b) Il semble que deux courbes $\mathscr{C}_{m_1}$ et $\mathscr{C}_{m_2}$ $(m_1 \neq m_2)$ n'ont aucun point commun.
Justifiez cette affirmation.

2. On étudie les variations de f_m. La visualisation des courbes précédentes sur écran peut permettre un contrôle des résultats.

a) Calculez pour tout réel x, $f'_m(x)$.

b) Démontrez que I_m existe pour tout réel m et calculez ses coordonnées en fonction de m.

3. Pour trouver le lieu $\mathscr{E}$ de I_m, la piste analytique s'impose (voir *Types de problèmes et raisonnements*, fiche J, page 460).

a) Trouvez une relation indépendante de m entre les coordonnées x et y de I_m.

b) Déduisez-en que I_m appartient à une courbe Γ dont vous préciserez une équation. Tracez Γ.

4. On vient de prouver que si I_m est un point de $\mathscr{E}$ alors I_m est un point de Γ. Donc $\mathscr{E}$ est inclus dans Γ.
Il reste à répondre à la question suivante : le point I_m décrit-il toute la courbe Γ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

a) Démontrez que l'abscisse de I_m décrit $\mathbb{R}$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

b) Déduisez-en que I_m décrit toute la courbe Γ.

Pour progresser

Études de fonctions

63 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Étudiez la fonction f. Tracez sa courbe représentative.

64 BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

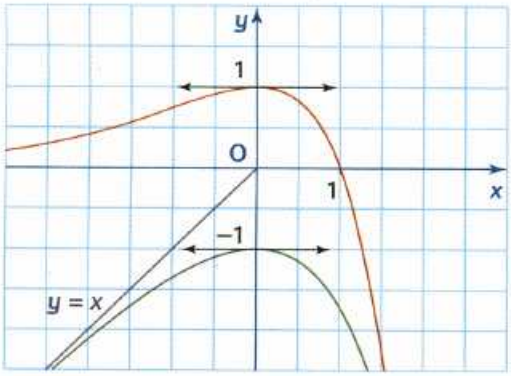
$$f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Étudiez les limites de f aux bornes des intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.
2. Étudiez les variations de f.
3. Tracez la courbe $\mathscr{C}$.

65 On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^x \text{ et } g(x) = (1-x)e^x.$$



1. Attribuez à chaque fonction sa courbe en justifiant votre réponse.
2. On note h la fonction $(f - g)$.

a) Vérifiez que pour tout réel x,

$$h'(x) = 1 - g(x).$$

b) En utilisant les courbes précédentes, déduisez-en le sens de variation de h et dressez son tableau de variations.

3. **a)** Démontrez que les deux courbes admettent un unique point d'intersection dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $]1 ; 2[$.

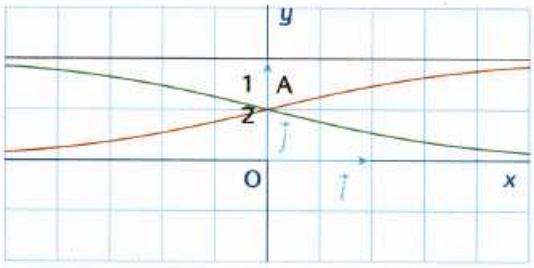
b) Donnez de α un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

66 • BAC f_0 et f_1 sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \text{ et } f_1(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

$\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On a tracé ci-dessous $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. Attribuez à chaque fonction sa courbe en justifiant votre réponse.



2. Le point $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ est-il centre de symétrie pour les deux courbes ?
3. Par quelle transformation simple, $\mathscr{C}_1$ est-elle l'image de $\mathscr{C}_0$?
4. **a)** Vérifiez que pour tout réel x, $f_0(x) + f_1(x) = 1$.

b) Déduisez-en que $\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}_0$ par une autre symétrie.

67 • BAC f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. **a)** Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, construisez la courbe Γ d'équation $y = e^x$ et la droite d tangente à Γ en $x = 0$.

b) Justifiez graphiquement que pour tout réel u :

$$e^u \geqslant u + 1.$$

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 91.

2. Déduisez de la question précédente que pour tout réel x :

a) $e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$. **b)** $1 + (x-1)e^x \geqslant 0$.

3. Démontrez alors que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

68 • BAC f est la fonction $x \mapsto x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe dans un repère orthonormal.

1. **a)** Vérifiez que pour tout réel x,

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \text{ et } f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}.$$

b) Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Démontrez que les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = x - 1$ sont asymptotes à $\mathscr{C}$ respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Précisez les positions relatives de $\mathscr{C}$ par rapport aux droites Δ_1 et Δ_2.

2. **a)** Démontrez que la fonction f est impaire.

b) Étudiez les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

3. Tracez Δ_1, Δ_2, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

4. Démontrez que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule α. Déterminez un encadrement de α au dixième.

69 • BAC f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrez que la droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2. **a)** Quelle est la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers zéro ?

☞ **Aide.** Posez $X = \frac{1}{x}$.

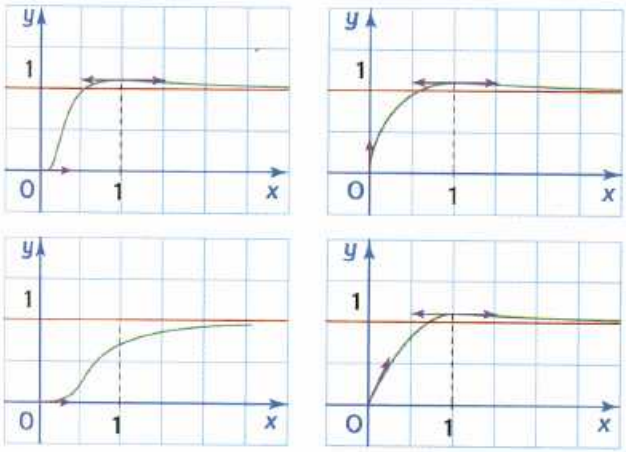
b) Déduisez-en que la fonction f est dérivable en $x = 0$.

3. **a)** Démontrez que pour tout réel x, $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}.$$

b) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

4. Parmi les courbes suivantes, quelle est la courbe $\mathscr{C}$? Justifiez votre réponse.



70 • BAC f est la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. **a)** Déterminez les limites de f aux bornes de I.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Calculez $f'(x)$ pour tout x dans I, et démontrez que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$.

3. Dressez le tableau de variations de f.

4. Tracez la courbe $\mathscr{C}$.

71 • BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Étudiez les variations de g et déduisez-en le signe de $g(x)$.

b) Justifiez alors pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. **a)** Calculez les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interprétez graphiquement les résultats obtenus.

b) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

c) T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.

d) Tracez T, les asymptotes puis la courbe $\mathscr{C}$.

72 • BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A. Étude de f sur $]0 ; +\infty[$

1. Déterminez les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. **a)** Vérifiez que pour tout $x > 0$:

$$f(x) - x - 1 = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1.$$

b) Déduisez-en la limite de $f(x) - x - 1$ en $+\infty$, et démontrez que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$. On admettra que pour tout $x > 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

3. Étudiez les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dressez son tableau de variations.

B. Étude de f sur $]-\infty ; 0[$

1. Déterminez les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

2. Par une démonstration analogue à celle de la partie **A**, on démontre que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ et on admet que pour tout réel $x < 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.

3. On note g la fonction définie sur $]-\infty ; 0]$ par :

$$g(x) = f(x) \text{ si } x < 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

a) Déterminez $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$.

b) Déduisez-en que g est dérivable en zéro.

c) Étudiez les variations de g sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et dressez son tableau de variations.

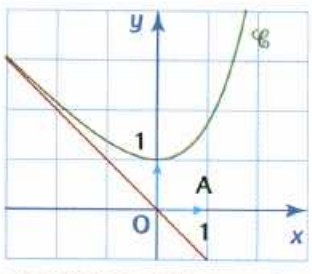
4. Construisez la courbe $\mathscr{C}$.

73 ⁝ **Tangentes à une courbe passant par un point**

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x.$$

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par A de coordonnées $(1 ; 0)$ et de préciser ces tangentes.



☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, exercice 61, page 105.

1. M est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0 et T_{x_0} est la tangente en M à $\mathscr{C}$.

a) Trouvez en fonction de x_0 une équation de T_{x_0}.

b) Prouvez que T_{x_0} passe par A si et seulement si :

$$e^{x_0}(2 - x_0) = 1 \quad (1).$$

2. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = e^x(2 - x).$$

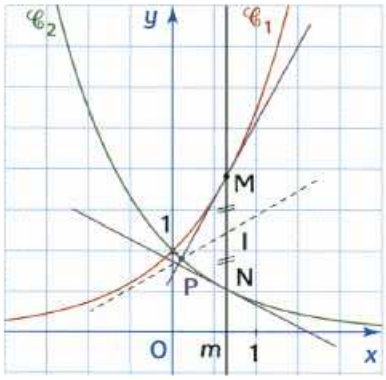
a) Étudiez les variations de φ et dressez son tableau de variations.

b) Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 1$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$ notées α et β.

c) Donnez de α et β une valeur approchée par excès à 10^{-1} près.

3. Concluez.

74 : Dans le repère orthonormal ci-contre, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = e^{-x}$.



À tout réel m, on associe les points M de $\mathscr{C}_1$ et N de $\mathscr{C}_2$ d'abscisse m. On note I le milieu de [MN].

Le but de l'exercice est de définir puis de construire la courbe Γ, lieu de I, lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

1. a) Calculez en fonction de m les coordonnées de I.

b) Trouvez une relation indépendante de m entre les coordonnées de I.

c) Déduisez-en le lieu Γ de I, lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

Aide. Voir *Apprendre à chercher*, exercice 62, page 105.

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

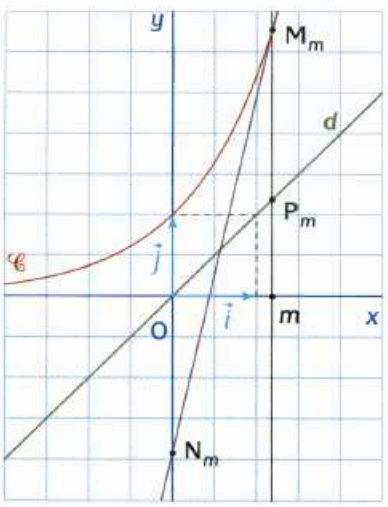
a) Étudiez les variations de f.

b) Construisez Γ sur la même figure que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

3. Les tangentes en M et N à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en P. Démontrez que la droite (IP) est tangente en I à Γ.

75 : BAC

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x$ et la droite d d'équation $y = x$.



À tout réel m, on associe les points M_m de $\mathscr{C}$ et P_m de d d'abscisse m.

La tangente en M_m à $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en N_m. On note G_m l'isobarycentre de O, N_m, M_m et P_m. Le but de l'exercice est de déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points G_m.

1. a) Calculez les coordonnées de G_m en fonction de m.

b) Déduisez-en que l'ensemble $\mathscr{E}$ des points G_m est la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}[e^{2x}(1 - x) + x]$.

Aide. Voir *Apprendre à chercher*, exercice 62, page 105.

2. Dans cette question, on se propose de construire $\mathscr{E}$. Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}[x + (1 - x)e^{2x}].$$

a) Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduisez-en le tableau de variations de f'.

c) Démontrez que l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que α appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$. Donnez une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

3. Étudiez les variations de f et construisez $\mathscr{E}$ sur la figure donnée.

76 : BAC Famille de fonctions

n est un entier non nul et f_n la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = 1 - \frac{2n}{x + n} - e^{-x}$.

1. a) Étudiez les variations de f_n.

b) Précisez $f_n(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

2. a) Calculez $f_n(n)$ et précisez son signe.

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier n non nul, $e^{n+1} > 2n + 1$.

c) Déduisez-en le signe de $f_n(n + 1)$.

3. Démontrez que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution u_n et que $n < u_n < n + 1$.

77 : BAC Fonction exponentielle et suite arithmétique

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$. On note $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., $f^{(n)}$ ses dérivées successives. On dit que $f^{(n)}$ est la dérivée « n-ième » de f. De même, $f^{(1)}$ est la dérivée notée habituellement f'.

1. a) Calculez $f^{(1)}(x)$.

b) Démontrez par récurrence que $f^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $(x^2 + a_n x + b_n)e^x$ où a_n et b_n sont des **entiers naturels**.

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

- $a_1 = 3$ et $a_{n+1} = a_n + 2$.
- $b_1 = 2$ et $b_{n+1} = b_n + a_n$.

a) Vérifiez que la suite (a_n) est une suite arithmétique et déduisez-en a_n en fonction de n.

b) Démontrez que $b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$.

Déduisez-en b_n en fonction de n.

3. Question supplémentaire pour les élèves ayant choisi la spécialité « mathématiques ».

a) Démontrez que tout diviseur de a_n et de b_n est un diviseur de 5 et que a_n et b_n ont pour PGCD 5 si et seulement si $n \equiv 2 \pmod 5$.

b) Que peut-on dire de a_n et b_n pour les autres valeurs de n ?

78 Pour une fonction f, on note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, ..., $f^{(n)}$ ses dérivées successives.

f_0, f_1, f_2 sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = e^x ; \quad f_1(x) = xe^x ; \quad f_2(x) = x^2e^x.$$

1. Démontrez par récurrence que :

a) $f_1^{(n)} = nf_0 + f_1$. **b)** $f_2^{(n)} = n(n-1)f_0 + 2nf_1 + f_2$.

2. Déduisez-en la dérivée « n-ième » de la fonction :

$$f : x \mapsto (2x^2 - 3x)e^x.$$

Équations différentielles

79 • 1. Soit (E) l'équation différentielle :

$$2y' + 3y = 0.$$

Déterminez toutes les solutions de (E).

2. On note (E′) l'équation différentielle $2y' + 3y = x^2 + 1$.

a) Déterminez une fonction f, polynôme du second degré, solution de (E′).

b) Démontrez que si g est une solution de (E′), alors $g - f$ est une solution de (E).

c) Réciproquement, démontrez que si $g - f$ est une solution de (E), alors g est une solution de (E′).

d) Déterminez toutes les solutions de (E′) (*voir note*).

3. Donnez toutes les solutions de l'équation :

$$2y' + 3y = \cos x \quad (E'').$$

☞ **Aide.** **Cherchez une solution particulière f de (E″) de la forme $f(x) = a\cos x + b\sin x$.**

☞ **Note.** **Vous venez de démontrer le résultat suivant : les solutions de l'équation (E′) : $ay' + by = k$, où k est une fonction de x sont toutes les fonctions qui s'écrivent $f + g_1$, où f est une solution particulière de (E′) et g_1, une solution quelconque de l'équation $ay' + by = 0$. Ce résultat est général mais il n'est pas au programme.**

80 • 1. Trouvez une fonction g de la forme $x \mapsto ae^{-x}$ telle que pour tout réel x, on ait $g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$.

2. Démontrez qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = h$, où h est la fonction telle que $h(x) = 2e^{-x}$, si et seulement si $f - g$ est solution de (E′) : $y' + 3y = 0$.

3. Résolvez (E).

81 • 1. Trouvez une fonction g de la forme :

$$x \mapsto a\cos 2x + b\sin 2x,$$

telle que, pour tout réel x, on ait :

$$2g'(x) + g(x) = 17\sin 2x.$$

2. Procédez comme à l'exercice 80 pour résoudre :

$$2y' + y = h \text{ où } h(x) = 17\sin 2x.$$

82 • BAC 1. On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + y = x + 1$, y étant une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.

a) On pose $z = y - x$; écrivez l'équation différentielle (F) satisfaite par z.

b) Résolvez (F), puis (E).

2. On appelle f_α la solution de (E) telle que $f_\alpha(0) = \alpha$ et $\mathscr{C}_\alpha$ la courbe représentative de f_α où α est un paramètre réel donné.

a) Démontrez que, pour tout α, la tangente à $\mathscr{C}_\alpha$ au point d'abscisse -1 passe par l'origine du repère.

b) Plus généralement, démontrez que toutes les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_\alpha$ en un point d'abscisse x_0 donnée se coupent sur $\mathscr{C}_0$.

83 • BAC Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) \begin{cases} f(-x)f'(x) = 1 \text{ pour tout réel } x, \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

puis de déterminer cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a) Démontrez que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b) Calculez la fonction dérivée de la fonction g.

c) Déduisez-en que la fonction g est constante et déterminez sa valeur.

d) On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = \frac{1}{16}y.$$

Montrez que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Démontrez qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduisez des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et précisez quelle est cette fonction.

84 On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$f'(x) + 2f(x) = (f(x))^2, \text{ pour tout réel } x.$$

1. f est une fonction de $\mathscr{E}$. Démontrez que la fonction g, définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$y' + ay = b \quad (a, b \text{ réels}).$$

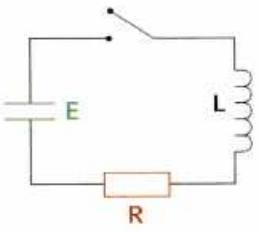
2. Déduisez-en que les fonctions de $\mathscr{E}$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{2}{2ke^{2x} + 1}, \text{ où } k \text{ est un réel, } k \geqslant 0.$$

L'exponentielle dans d'autres sciences

85 En physique : intensité d'un courant

Le circuit ci-contre comprend une bobine d'induction L, une résistance R. L'origine du temps est à la fermeture du circuit.
On suppose que pour $t = 0$, l'intensité I est nulle.
La force électromotrice aux bornes du circuit est constante et égale à E (en volts). On sait que la fonction $I : t \mapsto I(t)$ est telle que, à l'instant t pour tout t, $t \geqslant 0$:



$$LI'(t) + RI(t) = E \quad (1).$$

1. **a)** Résolvez cette équation différentielle.

b) Trouvez la fonction I telle que $I(0) = 0$.

2. Pourquoi la fonction I a-t-elle une limite en $+\infty$?

86 En biologie : étude d'une population de rongeurs

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. La variable t réelle, désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution dans $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = \frac{y}{4}$.

a) Résolvez (E_1).

b) Déterminez $g(t)$ lorsqu'à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs ($g(0) = 1$).

c) Après combien d'années, la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, satisfait aux conditions :

$$(E_2)\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$.
On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$.
Démontrez que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3)\begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donnez les solutions de l'équation différentielle :

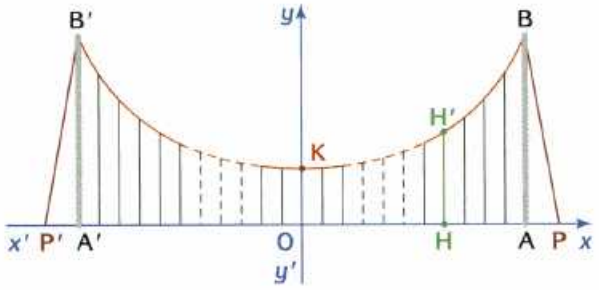
$$y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

et déduisez-en l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

87 En Travaux Publics : pont suspendu

La figure ci-dessous schématise l'un des deux côtés verticaux d'un pont suspendu. Les filins verticaux tels que HH' sont régulièrement espacés les uns des autres. Il n'y a pas de filin en AB, ni en A'B'. La longueur AA' est 360 mètres.



On se propose de représenter avec précision l'arc $\overset{\frown}{B'KB}$ et d'exploiter cette représentation.
On admet que, dans le repère orthonormal d'axes $(x'Ox)$ et $(y'Oy)$ dans lequel le point A a pour coordonnées $(180 ; 0)$, l'arc $\overset{\frown}{B'KB}$ est représenté par l'arc de courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $I = [-180 ; 180]$ par $f(x) = e^{\frac{x}{41}} + e^{-\frac{x}{41}}$.

1. **a)** Étudiez la parité de la fonction f.
Déduisez-en une conséquence graphique.

b) Étudiez f et tracez avec précision l'arc de courbe $\mathscr{C}$ (échelle : 1 mètre est représenté par 0,5 mm).

2. Quelle est la hauteur de la tour AB ?

88 • BAC En économie

A. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10x}{e^x + 1}.$$

1. **a)** Démontrez que pour tout réel x de I,

$$f'(x) = \frac{10}{(e^x + 1)^2}g(x)$$

où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.

b) Démontrez qu'il existe un réel α unique de I tel que $g(\alpha) = 0$. Donnez de α un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

c) Déduisez-en le tableau de variations de f et démontrez que $f(\alpha) = 10(\alpha - 1)$.

2. Construisez la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
(Unités graphiques : 2 cm.)

B. Application économique

Après avoir lancé la fabrication d'un nouvel objet, une entreprise a réalisé une étude qui a montré que le coût total $\mathscr{C}_T(q)$ en milliers d'euros pouvait être assez bien décrit par la fonction :

$\mathscr{C}_T : q \mapsto f(q) + q$, f étant la fonction de la partie **A** et q le nombre d'objets fabriqués en centaines d'objets.

1. a) Sur la figure de la question **A. 2.**, représentez la courbe de $\mathscr{C}_T$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$ en justifiant votre construction.

b) À combien peut-on évaluer le coût de 300 objets ?

2. Le coût unitaire est donné par $\mathscr{C}_u(q) = \dfrac{\mathscr{C}_T(q)}{100q}$.

À l'aide de la calculatrice, estimez à partir de combien d'objets fabriqués le coût unitaire est inférieur à 12 €.

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

89 • Une fonction f est définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - x - 2}$.

Quel est le signe de $f(x)$ sur $\mathscr{D}$?

90 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x)e^x$. Démontrez qu'il existe deux tangentes, et deux seulement, à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f de coefficient directeur 2.

91 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}.$$

Est-il vrai que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{16}$ a deux solutions distinctes ?

92 • La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$. On note (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = e^{-u_n}$.

Démontrez que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_0 + \cdots + v_n) = \dfrac{1}{e - 1}$.

93 • u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est dressé ci-après (a, b, c sont des réels).

x	$-\infty$		0	a	b	$+\infty$
u		↘	c	↗	0	↘

1. Quel est le sens de variations de $v_1 : x \mapsto e^{u(x)}$?

2. Indiquez un intervalle sur lequel il est possible de donner un sens de variation à $v_2 : x \mapsto u(x)e^x$.

94 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{|x|}}{e^x + 1}$.

f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

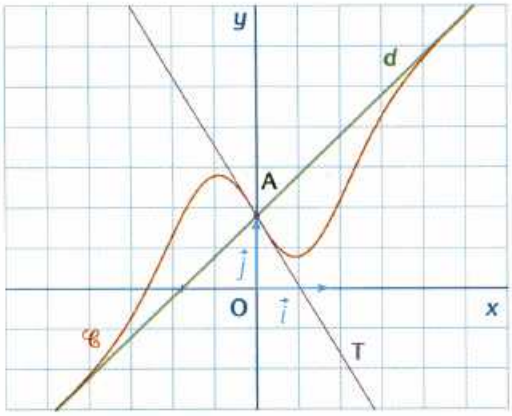
95 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = ax + b$ si $x > 1$ (a et b sont deux réels). Déterminez a et b, s'ils existent, pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

96 • Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = e^{ax}$ ($a \neq 0$).
M est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0 qui se projette orthogonalement en H sur l'axe des abscisses. La tangente en M à $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en T. Démontrez que la longueur TH ne dépend pas du choix de M sur $\mathscr{C}$.

Problèmes

97 BAC

Thèmes : *Étude de fonction. Lecture graphique*



Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La droite d est asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
Le point A(0 ; 1) est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$ et la tangente T en A à $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$y = (1 - e)x + 1.$$

A. Expression de f

On suppose que pour tout réel x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = mx + p + \varphi(x)$$

où m et p sont deux réels et φ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$.

1. a) Déterminez m et p.

b) Démontrez que pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 2$.

c) Déduisez-en que la fonction φ est impaire.

2. On suppose que pour tout réel x, $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont deux réels.
Démontrez en utilisant les résultats de la question **1** et l'équation de T que $b = 0$ et $a = -e$.

B. Étude de f

f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + x - xe^{1-x^2}$$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Vérifiez que T est bien la tangente au point A à la courbe $\mathscr{C}$.

b) Étudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et T.

2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur [0 ; 1].

a) Démontrez que $f''(x)$ est du signe de $6x - 4x^3$.

b) Démontrez que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1] et que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

c) Exprimez $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.
Précisez alors ce minimum relatif.

98

Thèmes : *Famille de fonctions. Lieu géométrique*

m est un réel, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = (x + m)e^x,$$

et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Étudiez les variations de f_m et dressez son tableau de variations.

2. On note S_m le point de $\mathscr{C}_m$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}_m$ est parallèle à l'axe des abscisses.

a) Calculez en fonction de m les coordonnées de S_m.

b) Quel est le lieu géométrique $\mathscr{E}$ de S_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

☞ **Aide.** Voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, Fiche J, page 460, et l'exercice 62, page 105.

3. Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, construisez $\mathscr{E}$, puis les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-2}$.

4. Démontrez que par un point M donné de coordonnées $(a ; b)$, il passe une courbe $\mathscr{C}_m$ et une seule.

Partie B

Dans cette partie, x_0 est un réel donné et on note M_m le point de $\mathscr{C}_m$ d'abscisse x_0.
On se propose de démontrer que la tangente T_m à $\mathscr{C}_m$ en M_m passe par un point fixe dont les coordonnées dépendent de x_0.

1. Démontrez que :

$$y = e^{x_0}[(x_0 + 1)x - x_0^2 + m(1 - x_0 + x)]$$

est une équation de T_m.

2. Déduisez-en que T_m passe par un point fixe A.
Donnez ses coordonnées en fonction de x_0.

Partie C

α, β, γ sont trois réels distincts deux à deux.
On note M_α, M_β, M_γ les points de $\mathscr{C}_\alpha$, $\mathscr{C}_\beta$, $\mathscr{C}_\gamma$ de même abscisse x.

1. Démontrez qu'il existe un réel k, indépendant de x, tel que :

$$\overrightarrow{M_\beta M_\alpha} = k\overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}.$$

2. a) Réciproquement, démontrez que, quel que soit le réel k différent de 1, l'ensemble $\mathscr{E}_k$ des points N tels que :

$$\overrightarrow{M_\beta N} = k\overrightarrow{M_\gamma N}$$

est une courbe $\mathscr{C}_\alpha$.
Calculez α en fonction de k, β, γ.

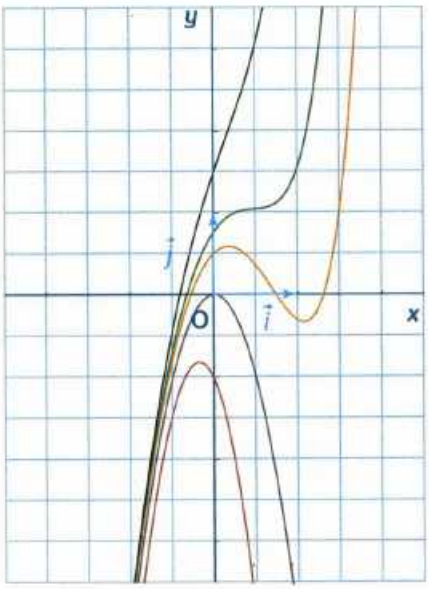
b) Déterminez $\mathscr{E}_{-1}$ pour $\beta = 0$ et $\gamma = -2$.

99 BAC

Thèmes : Famille de fonctions. Lieu géométrique

m est un réel, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = me^{2x} - 4x^2$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La figure ci-dessous donne pour quelques valeurs de m les courbes représentatives $\mathscr{C}_m$ associées.



L'objet du problème est d'étudier la famille des fonctions f_m ainsi définies.

A. 1. La figure ci-dessus semble indiquer que les courbes $\mathscr{C}_m$ n'ont pas de point commun.

a) Démontrez que par un point $M(x_0 ; y_0)$ donné, il passe une courbe $\mathscr{C}_m$ et une seule.

b) Démontrez que pour tout réel a fixé, l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_m$ d'abscisse a est une fonction croissante de m.

2. a) Vérifiez, pour tout réel x, que :

$$f_m'(x) = 2e^{2x}[m - 4xe^{-2x}].$$

b) Déduisez-en que le signe de $f_m'(x)$ est le même que celui de $m - 4xe^{-2x}$.

3. a) Étudiez les variations de la fonction γ définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma(x) = 4xe^{-2x}$ et construisez sa courbe représentative Γ.

b) Déduisez le signe de $f_m'(x)$ de la question précédente.

4. a) Étudiez les variations de f_m selon les valeurs du paramètre m.

b) Dressez le tableau de variations f_m dans chacun des cas suivants :

- $m > \frac{2}{e}$;
- $m = \frac{2}{e}$;
- $0 < m < \frac{2}{e}$;
- $m = 0$;
- $m < 0$.

B. L'étude précédente prouve que, selon la valeur de m, la courbe $\mathscr{C}_m$ possède au plus deux points en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

1. a) Si S_m est l'un de ces points de coordonnées $(X ; Y)$, démontrez que :

$$4Xe^{-2X} = m \text{ et } Y = me^{2X} - 4X^2.$$

b) Déduisez-en que les points S_m appartiennent à une parabole $\mathscr{P}$.

Donnez-en une équation cartésienne.

2. Réciproquement, tout point de la parabole $\mathscr{P}$ est-il un point S_m ?

3. a) On note K_m le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ et de l'axe des ordonnées.

Démontrez que la tangente à $\mathscr{C}_m$ en K_m passe par un point fixe I. Précisez ce point.

b) Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm),

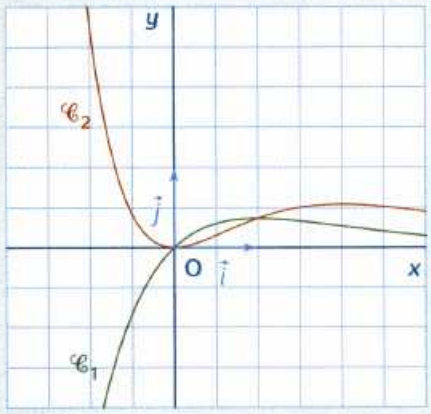
- tracez la parabole $\mathscr{P}$, placez le point I puis tracez les courbes $\mathscr{C}_0$; $\mathscr{C}_{\frac{2}{e}}$; $\mathscr{C}_{-1}$; $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$; $\mathscr{C}_1$;
- tracez la courbe $\mathscr{C}_m$ passant par le point A de coordonnées $(1 ; 0)$.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

100 On a tracé ci-contre dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = xe^{-x}$ et $f_2(x) = x^2e^{-x}$.



1. Positions relatives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$

a $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$.

b $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont un troisième point commun qui n'apparaît pas sur la figure ci-contre.

2. Propriétés de f_1

a Pour tout réel x, $f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x}$.

b Pour tout réel x, $2f_1(x) \leqslant 1$.

c L'équation $4f_1(x) = 1$ a deux solutions distinctes.

3. Exploitation de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$

M est un point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse m et la tangente T_m à $\mathscr{C}_1$ en M coupe l'axe des ordonnées en N.

a Si P est le point de $\mathscr{C}_2$ d'abscisse m alors P et N ont la même ordonnée.

b Si H est un point quelconque de l'axe des ordonnées de coordonnées $(0 ; h)$ alors on peut mener de H trois tangentes à $\mathscr{C}_1$ si et seulement si $h \in \left]0 ; \frac{4}{e^2}\right[$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre réponse.

101 **1.** a est un réel strictement négatif donné. Pour tout réel b, l'équation $e^x = ax + b$ a toujours une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

2. Si u est une fonction positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $f : x \mapsto u(x)e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}e^{1-x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$ est dérivable en $x = 0$.

4. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f, définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

5. La fonction $f : x \mapsto e^{-x} + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$, vérifiant $f(0) = 2$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

102 Dans une pièce à température constante de 20 °C, à l'instant initial noté 0, la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 70 °C.
Cinq minutes plus tard, elle est de 60 °C.
On admet que la température θ du liquide est une fonction dérivable du temps t, exprimé en minutes, et que $\theta'(t)$ est proportionnel à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce. On notera a le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbb{R}$.

1. Démonstration de cours

Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.

Pré-requis. La fonction $x \mapsto e^{ax}$ est solution de l'équation (E).

Démontrez que toute solution de (E) est de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

2. Résolvez l'équation différentielle : $y' = ay - 20a$.

3. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

5 La fonction logarithme népérien

1614

En 1614, Néper publie une table de logarithmes destinée à faciliter les longs calculs que doivent effectuer les astronomes, les navigateurs, les financiers. Avec cette table, on associe à tout nombre un autre nombre, son logarithme, de telle sorte que pour calculer le produit de plusieurs nombres, il suffit simplement d'additionner leurs logarithmes.

Si l'idée paraît simple, sa réalisation nécessite quinze années de travail. Pour construire sa table, Néper ne raisonne pas en termes de fonctions et de dérivées, celles-ci ne sont pas encore connues, mais il étudie le mouvement d'un point se déplaçant sur un segment à une vitesse inversement proportionnelle à sa distance à l'origine.

Les tables de logarithmes, utilisées jusque dans les années 1960, sont devenues inutiles depuis l'arrivée massive des calculatrices, qui utilisent le développement illimité du logarithme de $1 + x$ avec $|x| < 1$ donné par Newton :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Les mathématiciens découvrent lentement l'intérêt des logarithmes pour l'Analyse, mais la « fonction logarithme », inventée pour simplifier des calculs, devient au fur et à mesure des progrès, une fonction essentielle en théorie.

John Neper
1550 – 1617

À LA MÊME ÉPOQUE

FRANCE

Le roi de France, Henri IV, qui a mis fin aux guerres de religion entre protestants et catholiques, est assassiné par Ravaillac. Son fils Louis XIII lui succède.

ÉTATS-UNIS

Le *Mayflower* quitte l'Angleterre avec à son bord 102 émigrants, notamment des puritains, issue d'une église séparatiste de Leyde. Ils débarquent en Amérique et fondent la première ville de Nouvelle-Angleterre.

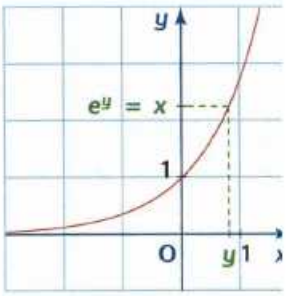
PEINTURE

Lyrisme, éloquence et sensualité s'expriment dans l'œuvre de Rubens, notamment dans ses compositions mythologiques aux accents souvent truculents.
Ci-contre, *La Toilette de Vénus*.

1 Logarithme népérien

1.1 Définition

La fonction exp est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.
De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
Il en résulte d'après l'extension du corollaire des valeurs intermédiaires (théorème 8, chap. 2) que l'image par la fonction exp de l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$ est l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$. Et aussi, que quel que soit le réel $x > 0$ de I, il existe un réel y et un seul dans $\mathbb{R}$ tel que $e^y = x$.
On note $y = \ln x$ d'où $e^{\ln x} = x$. Ainsi **$\ln x$ est le nombre dont l'exponentielle est x.**



DÉFINITION 1

La fonction **logarithme népérien** est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ qui, à tout réel x strictement positif, associe le réel y noté **$\ln x$** dont l'exponentielle est x.

Conséquences.

Note
La fonction logarithme népérien est notée ln.

- Pour **tout réel $x > 0$**, $e^{\ln x} = x$ **(1)** (résulte de la définition).
- Pour **tout réel x**, $\ln e^x = x$ **(2)**.

En effet, $\ln e^x$ est l'unique réel dont l'exponentielle est e^x, donc c'est x.

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

En effet, $\ln e^0 = 0$ et $\ln e^1 = 1$ d'après **(2)**.

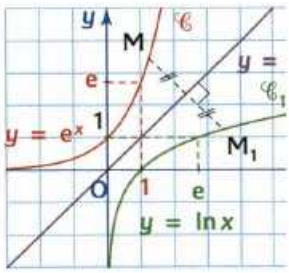
THÉORÈME 1

Pour tout réel $x > 0$ et pour tout **réel y**, $y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$.

En effet si $y = \ln x$, alors $e^y = e^{\ln x} = x$ d'après **(1)**.
Réciproquement, si $x = e^y$ alors $x > 0$ et $\ln x = \ln e^y = y$ d'après **(2)**.

1.2 Courbe représentative de $x \mapsto \ln x$

Il résulte du théorème 1 que **les fonctions ln et exp sont des fonctions réciproques** (chapitre 2, § 8). Donc dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ représentatives respectivement des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



1.3 Sens de variation

THÉORÈME 2

La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

En effet, si u et v sont deux réels de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ tels que $0 < u < v$, d'après ($0 < e^{\ln u} < e^{\ln v}$, d'où $\ln u < \ln v$ (chap. 4, théorème 2) et la fonction ln est strictement croissant
Il résulte alors de la stricte croissance de la fonction ln sur $]0 ; +\infty[$ que :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.
- $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.

Pour tout réel x strictement positif :

- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$.
- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$.

COMPRENDRE

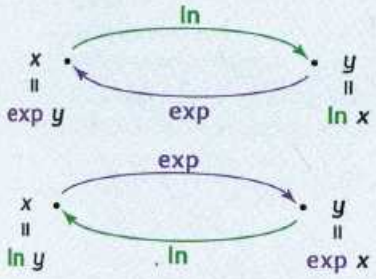
Existence de ln x

Seuls les nombres strictement positifs ont un logarithme

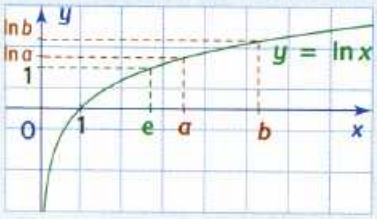
Donc, avant de prendre le logarithme d'un nombre, il faut s'assurer que ce nombre est strictement positif.

→ EXERCICE RÉSOLU 1

Réciprocité de ln et exp



Visualiser des résultats



La courbe permet de retrouver certains résultats :

- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$;
- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$;
- $\ln 1 = 0$;
- $\ln e = 1$;
- $\ln a < \ln b$ $(a > 0,\ b > 0)$ équivaut à $a < b$.

Équation $\ln u(x) = \ln v(x)$

u et v sont deux fonctions de la variable x. D'après les conséquences du théorème 2 :

- $\ln u(x) = \ln v(x)$ équivaut à $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ et $u(x) = v(x)$.
- $\ln u(x) \leqslant \ln v(x)$ équivaut à $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ et $u(x) \leqslant v(x)$.

→ EXERCICE RÉSOLU 2

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 — Préciser la validité d'une expression. Simplifier des écritures

ÉNONCÉ **1)** Pour quelles valeurs de x, les expressions suivantes ont-elles un sens ?

a) $\ln(x-1) + \ln(x+1)$. **b)** $\ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$.

2) Écrivez plus simplement les nombres suivants :

a) $e^{\ln 2} + \ln e^3$. **b)** $e^{2+\ln 8}$. **c)** $e^{-\ln 3} + e^{\ln \frac{2}{3}}$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) ● L'expression $\ln(x-1) + \ln(x+1)$ n'a de sens que pour les réels x, tels que $x > 1$ et $x > -1$ donc pour tout x de l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

● De même, $\ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$ n'a de sens que pour les réels x tels que $\dfrac{1-x}{x+2} > 0$, donc pour tout x de l'intervalle $]-2 ; 1[$.

2) a) $e^{\ln 2} + \ln e^3 = 2 + 3 = 5$, d'après les conséquences de la définition 1.

b) De même, $e^{2+\ln 8} = e^2 \times e^{\ln 8} = 8e^2$.

c) $e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{e^{\ln 3}} = \dfrac{1}{3}$ et $e^{\ln \frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$ donc $e^{-\ln 3} + e^{\ln \frac{2}{3}} = 1$.

→ EXERCICES 1 à 6

EXERCICE RÉSOLU 2 — Résoudre des équations et des inéquations

ÉNONCÉ Résolvez :

a) $\ln 2x = \ln(x^2 - 1)$. **b)** $\ln 2x \geqslant \ln(x^2 - 1)$. **c)** $e^{2x+5} = 5$.

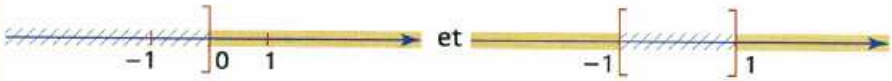
POINT MÉTHODE

Pour résoudre $\ln u(x) = \ln v(x)$ ou $\ln u(x) \geqslant \ln v(x)$:

- on trouve l'ensemble E des réels x pour lesquels $u(x) > 0$ **et** $v(x) > 0$;
- on résout dans $\mathbb{R}$, $u(x) = v(x)$ ou $u(x) \geqslant v(x)$ et on ne garde que les solutions qui sont dans E.

SOLUTION COMMENTÉE

Pour **a)** et **b)**, E est l'ensemble des réels x tels que $2x > 0$ et $x^2 - 1 > 0$, donc tels que $x > 0$ et $(x < -1$ ou $x > 1)$.



Donc E $=]1 ; +\infty[$.

● $\ln 2x = \ln(x^2 - 1)$ équivaut dans E à $x^2 - 2x - 1 = 0$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Or $x_1 < 0$, donc l'équation $\ln 2x = \ln(x^2 - 1)$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{1 + \sqrt{2}\}$.

● De même, l'inéquation $\ln 2x \geqslant \ln(x^2 - 1)$ équivaut dans E à $x^2 - 2x - 1 \leqslant 0$. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution est l'intervalle $[1 - \sqrt{2} ; 1 + \sqrt{2}]$. Donc dans E, l'inéquation, on a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} =]1 ; 1 + \sqrt{2}]$.

c) $e^{2x+5} = 5$ équivaut à $2x + 5 = \ln 5$ d'après le théorème 1, donc $x = \dfrac{1}{2}(\ln 5 - 5)$ et l'ensemble de solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}(\ln 5 - 5)\right\}$.

→ EXERCICES 7 à 13

2 Logarithme d'un produit

2.1 Propriété fondamentale

THÉORÈME 3 ➡ Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Démonstration. Pour démontrer que deux réels α et β sont égaux, il suffit de démontrer que $e^{\alpha} = e^{\beta}$ car $e^{\alpha} = e^{\beta}$ équivaut à $\alpha = \beta$.
Or $e^{\ln ab} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$.
Donc $e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b}$, il en résulte que $\ln ab = \ln a + \ln b$.

2.2 Conséquences de la propriété fondamentale

■ Logarithme d'un quotient et d'un inverse

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ et $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.

Démonstration. • D'après la propriété fondamentale, $\ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln \frac{a}{b} + \ln b = \ln a$.
D'où $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
• Dans le cas particulier $a = 1$, $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.

■ Logarithme du produit de plusieurs nombres

Pour tous réels $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_p > 0$:

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_p) = \ln a_1 + \cdots + \ln a_p.$$

Démonstration. Notons P_p cette proposition et démontrons qu'elle est vraie par récurrence. Elle est vraie pour $p = 1$, car $\ln a_1 = \ln a_1$. Supposons la proposition vraie pour l'entier p et prouvons qu'elle est vraie pour l'entier $(p + 1)$.

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_p \times a_{p+1}) = \ln(a_1 a_2 \ldots a_p) + \ln a_{p+1}.$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $\ln(a_1 \times \ldots \times a_p) = \ln a_1 + \cdots + \ln a_p$.
D'où $\ln(a_1 + \cdots + a_{p+1}) = \ln a_1 + \cdots + \ln a_{p+1}$.
Le principe de récurrence permet de conclure que la proposition P_p est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$. D'où le théorème.

Des formules précédentes, on déduit :

• Pour tout réel $a > 0$, pour tout **entier relatif** p, $\ln a^p = p \ln a$.

En effet, lorsque $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = a$, on obtient pour tout $a > 0$ et pour tout entier $p \geqslant 1$, $\ln(a^p) = p \ln a$.
Si p est un entier strictement négatif, $\ln(a^p) = \ln\left(\frac{1}{a^{-p}}\right) = -(-p \ln a) = p \ln a$.
Si $p = 0$, $\ln a^p = \ln 1 = 0$ et $p \ln a = 0$. D'où le résultat.

EXEMPLE $\ln 4^{-3} + 5 \ln 2 = -3 \ln 2^2 + 5 \ln 2 = -6 \ln 2 + 5 \ln 2 = -\ln 2$.

• Pour tout réel $a > 0$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

En effet, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, donc $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a}$ et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

EXEMPLE $\ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 5$.

COMPRENDRE

Du bon usage de la propriété fondamentale

La propriété fondamentale n'est vraie que pour les nombres **strictement positifs**.

• ***Exemple.***
L'égalité :
$\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$
est vraie uniquement lorsque $x > 1$ et $x > -2$, c'est-à-dire lorsque $x \in]1 ; +\infty[$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 3

• En revanche, on peut écrire pour tout $a < 0$ et tout $b < 0$,
$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$.
Donc pour tout réel x non nul,
$\ln x^2 = 2\ln|x|$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 — Résoudre des équations et des inéquations

ÉNONCÉ **1)** Résolvez $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$.

2) Résolvez $\ln(2x^2-3x) \geqslant 2\ln(6-x)$.

POINT MÉTHODE

Pour résoudre une équation ou une inéquation dans laquelle figurent des logarithmes, on essaie de ramener sa résolution à celle d'une équation $\ln u(x) = \ln v(x)$ (ou $\ln u(x) \geqslant \ln v(x)$). (Voir exercice résolu 2 page 117).

SOLUTION COMMENTÉE

1) Un nombre x ne peut être solution que si $2x-3>0$ **et** $6-x>0$ **et** $x>0$. C'est-à-dire $x > \frac{3}{2}$ et $x<6$ et $x>0$. Donc l'ensemble $E = \left]\frac{3}{2} ; 6\right[$.
Dans E, l'équation s'écrit $\frac{1}{2}\ln(2x-3) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$ ou encore $\ln(2x-3) = 2\ln(6-x) - \ln x$.
Pour éviter d'avoir le logarithme d'un quotient, on transpose $\ln x$ dans le premier membre. D'où $\ln(2x-3) + \ln x = 2\ln(6-x)$. Ou encore :
$\ln x(2x-3) = \ln(6-x)^2$. Cette dernière équation est équivalente, dans E, à $2x^2-3x = 36-12x+x^2$ c'est-à-dire à $x^2+9x-36 = 0$.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -12$. Or (-12) n'est pas dans E, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{3\}$.

2) Un nombre x ne peut être solution de l'inéquation que si $2x^2-3x>0$ et $6-x>0$, c'est-à-dire $(x<0$ **ou** $x>\frac{3}{2})$ **et** $x<6$, donc $E =]-\infty ; 0[\cup \left]\frac{3}{2} ; 6\right[$.
L'inéquation s'écrit $\ln(2x^2-3x) \geqslant \ln(6-x)^2$. Cette inéquation équivaut dans E à $2x^2-3x \geqslant 36-12x+x^2$ ou $x^2+9x-36 \geqslant 0$. Cette dernière inéquation a pour ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$, $]-\infty ; -12] \cup [3 ; +\infty[$. Donc dans E, l'inéquation a pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} =]-\infty ; -12] \cup [3 ; 6[$.

➜ EXERCICES 22 à 27

EXERCICE RÉSOLU 4 — Résoudre une inéquation $b^n \leqslant a$, d'inconnue n, $n \in \mathbb{N}$

ÉNONCÉ (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\frac{3}{4}$. Trouvez le plus petit entier n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-4}$.

SOLUTION COMMENTÉE

La raison $q = \frac{3}{4}$ et le premier terme $u_0 = 1$ donc, pour tout n, $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
Il s'agit alors de résoudre l'inéquation d'inconnue n (où n est un naturel) $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-4}$ **(1)**. Or les nombres $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et 10^{-4} sont strictement positifs donc l'inéquation **(1)** est équivalente à $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant \ln 10^{-4}$ soit $n\ln\frac{3}{4} \leqslant -4\ln 10$.

Attention. $\ln\frac{3}{4} < 0$ car $0 < \frac{3}{4} < 1$ donc $n \geqslant (-4\ln 10) : \left(\ln\frac{3}{4}\right)$.

À la calculatrice, on trouve que $n = 33$ est la plus petite valeur de n.

➜ EXERCICE 21

3 Étude de la fonction ln

3.1 Dérivée de la fonction ln

On **admet** que la **fonction ln** est **continue** sur $]0 ; +\infty[$.

THÉORÈME 4

La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration.

Notons a un réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Il s'agit donc de prouver que la fonction $\mathcal{T}: x \mapsto \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a}$ a pour limite $\dfrac{1}{a}$ lorsque x tend vers a.

Pour cela, posons $\ln x = y$ donc $x = e^y$ et $\ln a = b$ donc $a = e^b$.

Ainsi $\mathcal{T}(x) = \dfrac{y - b}{e^y - e^b}$ soit $\mathcal{T}(x) = \dfrac{1}{g(y)}$ avec $g(y) = \dfrac{e^y - e^b}{y - b}$.

Or puisque ln est continue sur $]0 ; +\infty[$, $\lim\limits_{x \to a} y = \ln a = b$ et puisque la fonction exponentielle est dérivable en b avec pour nombre dérivé e^b, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = e^b$. Ainsi d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to a} g(y) = e^b$. Il en résulte que $\lim\limits_{x \to a} \mathcal{T}(x) = \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{1}{a}$.

Le résultat est vrai pour tout a de $]0 ; +\infty[$ donc ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3.2 Limites et courbe représentative

THÉORÈME 5

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Démonstration.

• Il s'agit de démontrer que quel que soit $M > 0$, $\ln x > M$ pour tout x assez grand, c'est-à-dire supérieur à un certain réel A.

Or $\ln x > M$ équivaut à $x > e^M$. Donc $\ln x > M$ pour tout réel $x > e^M$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

• Posons $X = \dfrac{1}{x}$ alors $\ln X = -\ln x$. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} (-\ln X) = -\infty$.

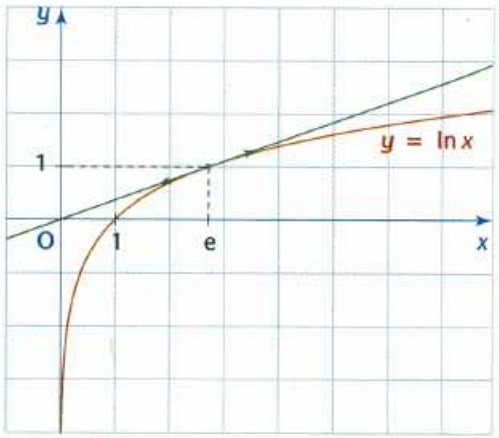
Donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Conclusion.

La fonction ln : $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Elle est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

D'où le tableau de variations et la courbe :

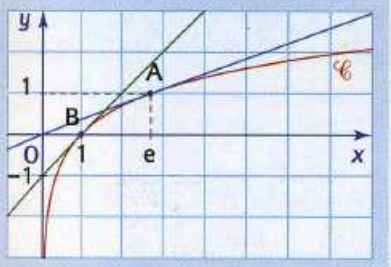
x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln)'$	||	+	1	+	$\frac{1}{e}$	+	
ln	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



COMPRENDRE

Tangentes remarquables

• Tracé



• Le point A de coordonnées (e ; 1) est un point de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$.
La tangente en A à $\mathscr{C}$ a pour équation :

$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$ soit $y = \frac{1}{e}x$.

Ainsi la tangente en A passe par l'origine du repère.

• Au point B de coordonnées (1 ; 0), la tangente à $\mathscr{C}$ a pour équation :

$y = 1(x - 1)$ soit $y = x - 1$

et pour tout réel x, $x > 0$ $\ln x \leqslant x - 1$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 5

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Situer la courbe de la fonction ln par rapport à ses tangentes

ÉNONCÉ Dans un repère orthonormal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln. M est un point quelconque de $\mathscr{C}$ d'abscisse m et T la tangente en M à $\mathscr{C}$. Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de n'importe laquelle de ses tangentes.

SOLUTION COMMENTÉE

Le point M a pour coordonnées $(m ; \ln m)$ et T a pour équation : $y = \frac{1}{m}(x - m) + \ln m$, ou encore $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$.

Pour étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T, introduisons la fonction φ, définie sur $]0 ; +\infty[$, par $\varphi(x) = \ln x - \frac{1}{m}x + 1 - \ln m$. Cette fonction est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{m}$. Il en résulte que $\varphi'(x) > 0$ équivaut à $x < m$ et $\varphi'(x) = 0$ équivaut à $x = m$.

D'où le tableau de variations :

x	0		m		$+\infty$
φ'		+	0	−	
φ		↗	0	↘	

Ainsi pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}$ est située en dessous de n'importe laquelle de ses tangentes.

En particulier, $\mathscr{C}$ est en dessous de sa tangente en B(1 ; 0).
D'où pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

➜ EXERCICES 29, 32 et 33

EXERCICE RÉSOLU 6 Étudier une fonction

ÉNONCÉ f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$.
Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative.

SOLUTION COMMENTÉE

• Étude des limites aux bornes de l'intervalle de définition

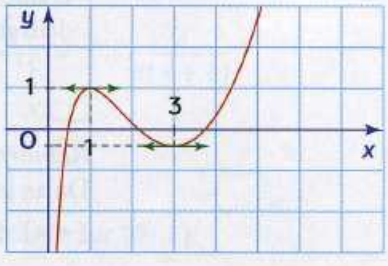
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = x^2\left[1 - \frac{8}{x} + \frac{8}{x^2}\right] + 6\ln x$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

• Étude du sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} = \frac{2[x^2 - 4x + 3]}{x}$ ou encore $f'(x) = \frac{2}{x}(x - 1)(x - 3)$.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	0		1		3		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	1	↘	$6\ln 3 - 7$	↗	$+\infty$
		$-\infty$					



➜ EXERCICE 53

3 Étude de la fonction ln (suite)

3.3 Des limites importantes

THÉORÈME 6

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0.$$

Démonstration.

• Posons $\ln x = X$ alors $x = e^X$ et $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ (car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ chapitre 4, théorème 9, page 92).

Donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

• En posant $\ln x = X$ alors $x = e^X$ et $x \ln x = Xe^X$. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$. Donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 113

Conséquence.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. En effet, pour tout $x > 0$, $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$. Or les deux fonctions $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{n-1}}$ ont toutes deux pour limite 0 en plus l'infini, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

THÉORÈME 7

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Démonstration.

• La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout réel $x > 0$.

Donc, en particulier, la fonction ln est dérivable en $x = 1$ et $(\ln)'(1) = 1$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = 1$ ou encore $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

• En posant $X = 1 + x$ alors $\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln X}{X-1}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} X = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$ donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3.4 Dérivée d'une fonction $\ln \circ u$

THÉORÈME 8

Si u est une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration.

D'après le théorème 5, chapitre 3, la fonction $f = \ln \circ u$ définie sur I par $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et pour tout x de I :

$$f'(x) = (\ln)'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Remarque.

Dans le cas où la fonction u est dérivable et **strictement négative** sur I, la fonction $(-u)$ est dérivable et strictement positive sur I donc $\ln \circ (-u)$ est dérivable sur I et $(\ln \circ (-u))'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

COMPRENDRE

Interprétation de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

Le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ permet de comparer les ordres de grandeur de x et $\ln x$ pour « les grandes valeurs de x ».

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, on obtient par exemple, $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{10^{30}}$ pour tout x suffisamment grand et donc $\ln x<\dfrac{x}{10^{30}}$. Et aussi grand que soit l'entier p, $\ln x<\dfrac{x}{10^{p}}$ pour des grandes valeurs de x.

On dira qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln x$ est « négligeable » devant x ou que « x l'emporte sur $\ln x$ »

Utilité du théorème 6

Le théorème 6 peut servir à lever des indéterminations dans l'étude de limites.

Exemple.

$f: x\mapsto x^2-\ln x$.

Le théorème sur la limite d'une différence ne permet pas de conclure (cas « $\infty-\infty$ »).

Or x^2 est le terme dominant et, pour tout $x>0$:

$$f(x)=x^2\left[1-\frac{\ln x}{x^2}\right].$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 7

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Utiliser les théorèmes 6 et 7 pour lever des indéterminations

ÉNONCÉ **1)** Étudiez la limite en 0 de la fonction f, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$, $x>0$.

2) Étudiez la limite en $+\infty$:

a) de la fonction g, $g(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$;

b) de la fonction h, $h(x)=\ln(2x+1)-\ln x$, $x>0$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$.

On obtient la forme indéterminée « $\infty-\infty$ ». On va écrire $\dfrac{1}{x}+\ln x$ sous une autre forme afin de faire apparaître des limites « connues ».

Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1+x\ln x}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to0}(1+x\ln x)=1$ car $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$.

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$. On obtient donc la forme indéterminée « $\infty\times0$ ».

Posons $\dfrac{1}{x}=X$, alors $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln(1+X)}{X}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}X=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$. Donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. D'où la forme indéterminée « $\infty-\infty$ ». Mais pour tout réel x, $x>0$, $\ln(2x+1)-\ln x=\ln\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x}=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2x+1)-\ln x]=\ln 2$.

➜ EXERCICES 36 à 39, 52

EXERCICE RÉSOLU 8 Utiliser le théorème 8

ÉNONCÉ La fonction f est définie sur $I=]0;+\infty[$ par $f(x)=x+2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. Étudiez les variations de f sur I.

SOLUTION COMMENTÉE

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ car, en posant $u(x)=1+\dfrac{1}{x}$, la fonction u est dérivable et strictement positive sur $]0;+\infty[$.

Donc pour tout réel x de I, $f'(x)=1+2\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{2}{x(x+1)}$,

c'est-à-dire $f'(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x(x+1)}$.

Sur I, $x(x+1)>0$ et $x^2+x-2>0$ pour $x>1$.

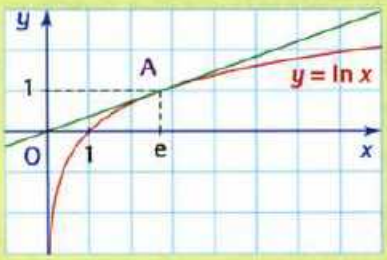
Donc f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]0;1]$.

➜ EXERCICES 48 à 52

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

Un croquis condense beaucoup de renseignements. Le retenir peut éviter d'encombrer la mémoire.



- $\ln x$ n'existe que pour $x > 0$.
- $\ln 1 = 0$. • $\ln e = 1$.
- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$; $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.
- La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x, $\ln e^x = x$.

ln transforme les produits en sommes. Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

→ EXERCICE RÉSOLU 1

ln fait « redescendre » les exposants : $\ln a^n = n \ln a$.

Aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, « x l'emporte sur $\ln x$ ». Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

→ EXERCICE RÉSOLU 7

DES réflexes À AVOIR

Avant de prendre le logarithme d'un nombre, assurez-vous que ce nombre est **strictement positif.**

Exemple.
$\ln(x-2)(x+3)$ n'existe que pour $(x-2)(x+3) > 0$, c'est-à-dire $x < -3$ ou $x > 2$.

→ EXERCICE RÉSOLU 1

Pour comparer deux nombres strictement positifs, pensez qu'il suffit de comparer leurs logarithmes.

Pour lever une indétermination en $+\infty$, pensez qu'à l'infini « x l'emporte sur $\ln x$ » et plus généralement « x^n l'emporte sur $\ln x$ ». (n entier, $n \geqslant 1$).

Exemple. $f(x) = x^3 - \ln x$.

Pour lever l'indétermination en $+\infty$, on écrit :

$$f(x) = x^3\left[1 - \frac{\ln x}{x^3}\right].$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

→ EXERCICE RÉSOLU 7

Pour résoudre une équation dans laquelle l'inconnue est en exposant, utilisez les logarithmes.

→ EXERCICE RÉSOLU 4

DES erreurs À ÉVITER

Ne pas prendre automatiquement le logarithme d'un nombre : s'assurer au préalable qu'il est **strictement positif.**

Ne pas croire que les deux membres de l'égalité :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

ont le même ensemble de définition. $\ln(ab)$ est défini lorsque $ab > 0$ tandis que $\ln a + \ln b$ n'est défini que lorsque $a > 0$ et $b > 0$.

TD 1 Un encadrement de ln(1+x)

1 Un encadrement de ln(1 + x)

Note
La droite d'équation $y = x - 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentant ln au point d'abscisse 1. Donc si on sait que la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de n'importe laquelle de ses tangentes (voir l'exercice résolu 5), alors on peut affirmer sans plus de calculs, que $\ln x \leqslant x - 1$.

1. En étudiant sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln x + 1 - x$, démontrez que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$ **(1)**.

2. À partir de l'inégalité (1) :

a) démontrez que pour tout réel $t > -1$, $\ln(1 + t) \leqslant t$;

b) en posant $x = \dfrac{1}{1+t}$, démontrez que tout réel $t > -1$, $\dfrac{t}{t+1} \leqslant \ln(1 + t)$ **(2)**.

CONCLUSION Ainsi, il résulte des questions précédentes que, pour tout réel $x > -1$:

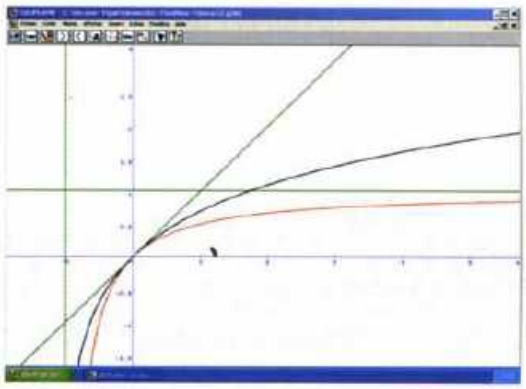
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x \quad \textbf{(3)}.$$

2 Une approximation de ln(1 + x)

Note
Γ_1 est en rouge, Γ_2 est en noir et Γ_3 est en vert.

Sur la figure ci-contre, on a tracé les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $]-1 ; +\infty[$ respectivement par : $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

$f_2(x) = \ln(x + 1)$; $f_3(x) = x$.



Cette figure illustre l'encadrement (3).

De plus, l'amplitude de l'encadrement est $x - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Donc si on choisit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, $1 + x \geqslant \dfrac{1}{2}$,

donc $0 \leqslant \dfrac{x^2}{x+1} \leqslant 2x^2$.

Ainsi on peut dire que $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+1} + x\right)$ est une **approximation de $\ln(1 + x)$ avec une erreur inférieure à x^2** lorsque $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Exemples. $x = 0{,}2$; $\ln(1{,}2) \approx 0{,}183\,3$ et à la calculatrice, $\ln(1{,}2) \approx 0{,}182\,321\,556$;
$x = -0{,}1$; $\ln(0{,}9) \approx -0{,}105\,5$ et à la calculatrice, $\ln(0{,}9) \approx -0{,}105\,3$.

3 Un encadrement de ln 2

On note p un entier naturel non nul et on pose $x = \dfrac{1}{p}$.

1. Démontrez, à partir de **(3)**, que $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) \leqslant \dfrac{1}{p}$. **(4)**

2. On note (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

a) Démontrez en tenant compte de **(4)** que $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant u_n + \dfrac{1}{2n}$.

b) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

c) Quel encadrement de $\ln 2$ obtient-on avec $n = 10$?

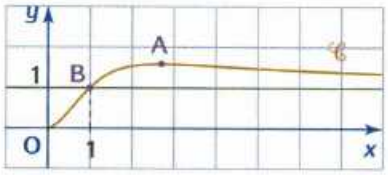
TD 2 Étude d'une fonction et d'une suite

g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(0) = 0$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{x}{x - \ln x}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g.

1 Étude de la fonction g



1. Justifiez que l'ensemble de définition de g est $[0 ; +\infty[$.

Aide. Étudiez la fonction $x \to x - \ln x$.

2. a) Démontrez que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$.

b) Étudiez la dérivabilité de g en zéro et précisez éventuellement la tangente à $\mathscr{C}$ à l'origine du repère.

c) Pourquoi la droite d'équation $y = 1$ est-elle asymptote à la courbe $\mathscr{C}$?

3. a) Étudiez les variations de g et dressez son tableau de variations.

b) La courbe $\mathscr{C}$ présente en A un maximum. Quelles sont les coordonnées de A ?

2 Étude d'une suite

a est un réel donné de l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

On note (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \left(\frac{\ln a}{a}\right) + \left(\frac{\ln a}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\ln a}{a}\right)^n$.

1. Démontrez que u_n est la somme des termes d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2. a) En utilisant les résultats de la partie 1, démontrez que $0 \leqslant \frac{\ln a}{a} \leqslant \frac{1}{e}$.

b) Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = g(a)$.

TD 3 Recherche des fonctions f, définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ telles que $f(xy) = f(x) + f(y)$

La fonction ln transforme les produits en sommes. En effet, pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. Le **but** de ce TD est de rechercher **toutes** les fonctions définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ qui ont cette propriété.
Notons f une fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ telle que pour tous réels x et y strictement positifs,

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \textbf{(1)}.$$

1. En posant $x = y = 1$, démontrez que $f(1) = 0$.

2. Supposons x **fixé** et considérons la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(y) = f(xy) = f(x) + f(y).$$

a) Pourquoi g est-elle dérivable sur $]0 ; +\infty[$?

b) Démontrez que, pour tout réel $y > 0$, $g'(y) = xf'(xy) = f'(y)$ **(2)**.

c) Déduisez de **(2)** que pour tout réel $x > 0$, $xf'(x) = f'(1) = k$ avec $k = f'(1)$.

3. Il résulte de la question précédente que les fonctions f sont solutions de l'équation différentielle $xf'(x) = k$ **(3)** où k est un réel.

a) Vérifiez que la fonction $x \mapsto k\ln x$ est solution de **(3)**.

b) On pose pour tout réel $x > 0$, $h(x) = f(x) - k\ln x$. Démontrez que f est solution de **(3)** si et seulement si, pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = 0$.

c) Déduisez-en que si f est solution de **(3)**, alors $f(x) = k\ln x + C$ où C est un réel.

4. Réciproquement, posons-nous la question, les fonctions f obtenues vérifient-elles $f(xy) = f(x) + f(y)$? Démontrez que f vérifie **(1)** si et seulement si $C = 0$.

CONCLUSION L'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ telles que $f(xy) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = k\ln x$ avec k réel quelconque.

TD 4 La fonction logarithme décimal

1 Définition et propriétés

Par définition, **la fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

1. Calculez log1 et log10, puis log100 ; log1 000 ; log10 000.

2. On pose $k = \dfrac{1}{\ln 10}$. Vérifiez que $0 < k < 1$.

3. En utilisant l'égalité $\log x = k\ln x$, vérifiez que tous les résultats énoncés dans le cours relatifs à la fonction ln restent vrais pour la fonction log.

4. Tracez dans un même repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), les courbes représentatives des fonctions ln et log restreintes à $]0 ; 10]$.

2 Quelques utilisations de la fonction log

1. En chimie

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH, $pH = -\log[H_3O^+]$, où $[H_3O^+]$ désigne la concentration de la solution en ions H_3O^+ (en moles par litres).

a) Comment varie le pH d'une solution lorsque sa concentration en ions H_3O^+ décuple ?

b) L'étiquette d'une eau minérale gazeuse indique $pH = 6{,}3$.
Quelle est la concentration en ions H_3O^+ de cette eau ?

2. En sismologie

I_0 désignant une intensité de référence, la magnitude M d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par $M = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.

Quelle a été la magnitude du séisme de 1971 à Los Angeles ($I = 50{,}01 \times 10^6 I_0$) ?

3. En acoustique

L'intensité $\mathcal{I}$ (en décibels) d'un son de puissance $\mathcal{P}$ est donnée par $\mathcal{I} = 10\log\dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}$, où $\mathcal{P}_0$ correspond au seuil d'audibilité au-dessous duquel aucun son n'est perçu.
Quelle est l'intensité d'une conversation normale ($\mathcal{P} = 10^5\,\mathcal{P}_0$) ?

TD 5 Étude d'une fonction

f est la fonction : $x \mapsto \ln(x + e^{-x})$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Démontrez que pour tout réel x, $x + e^{-x} \geqslant 1$.

Aide. Étudiez la fonction $x \mapsto x + e^{-x}$.

b) Déduisez-en que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifiez les deux affirmations suivantes :

a) pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$ **(1)** ;

b) pour tout réel $x > 0$, $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \dfrac{e^{-x}}{x}\right)$ **(2)**.

c) Exploitez les résultats précédents pour déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. a) Déduisez de la question **2.** que la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

b) Quelle est la limite de $[f(x) - \ln x]$ en $+\infty$? Que dire alors de la courbe $\mathscr{C}$ et de la courbe (Γ) représentative de la fonction ln ?

4. Dans cette question, on se propose d'étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.
Pour cela, on note φ la fonction définie sur $]-\infty ; 0]$ par $\varphi(x) = 1 + xe^x$.

a) Étudiez les variations de φ et déduisez-en que, pour tout réel $x < 0$, $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$.

b) Exploitez les résultats de la question **4. a)** pour étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ pour $x < 0$.

5. Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracez Δ, puis (Γ) puis la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. Les fonctions ln et exp

1 Écrivez plus simplement les nombres suivants :

$a = e^{\ln 3} + e^{-\ln 5}$; $b = \dfrac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$; $c = \dfrac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 117.

2 Prouvez que pour tout réel $x > 1$,

$e^{\ln(x-1)+\ln x} = x^2 - x$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 117.

3 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{-\ln x}$.

1. Simplifiez l'écriture de $f(x)$.
2. Tracez dans un repère la courbe représentative de f.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 117.

4 Dans chacun des cas, quels sont les réels x pour lesquels l'expression proposée a un sens ?

a) $\ln(x^2)$. **b)** $\ln(1-x)$. **c)** $\ln(x-3)$.

d) $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$. **e)** $\dfrac{1}{\ln x}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 117.

5 Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x l'expression donnée a-t-elle un sens ?

a) $\ln(x^2+4x)$. **b)** $\ln|x^2-3x+2|$.

c) $\ln|x+1| - \ln|x-1|$. **d)** $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 117.

6 Dans chacun des cas suivants, pour quelles valeurs de x l'expression donnée a-t-elle un sens ?

a) $\ln(e^x - 1)$. **b)** $e^x + \ln|x|$.

c) $\ln e^x - e^{\ln(x+1)}$. **d)** $e^{\ln(x^2-1)}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 117.

2. Résolution d'équations et d'inéquations

Pour les exercices 7 à 13, résolvez dans chacun des cas l'équation ou l'inéquation proposée.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 117.

7 **a)** $\ln(5-2x) = 1$. **b)** $\ln(2-x) = -3$.

c) $\ln(x^2-8) = 0$. **d)** $\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 2$.

8 **a)** $e^{x+2} = 3$. **b)** $e^{\frac{x}{x+1}} = 2$.

c) $(e^x+1)(e^x-4) = 0$. **d)** $\ln(e^x+1) = 2$.

9 **a)** $\ln x < 1$. **b)** $\ln x \geqslant 2$.

c) $-1 \leqslant \ln x \leqslant 2$. **d)** $\ln(2x-1) > -1$.

10 **a)** $e^{x-1} < 2$. **b)** $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$.

c) $\dfrac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$. **d)** $(e^x+1)(e^x-4) \leqslant 0$.

11 **a)** $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$.

b) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$.

12 **a)** $\ln(x-2) = \ln 2$. **b)** $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$.

13 **a)** $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$.

b) $\ln(-3x) \geqslant \ln(x^2-4)$.

c) $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \geqslant \ln x$.

d) $\ln x \leqslant \ln(x^2-2x)$.

3. Logarithme d'un produit

14 Simplifiez l'écriture des nombres suivants :

$a = \ln 3 + \ln\dfrac{1}{3}$; $b = \ln\dfrac{1}{16}$; $c = \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{2}$.

15 Exprimez les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$: $a = \ln 50$; $b = \ln\dfrac{16}{25}$; $c = \ln 250$.

16 Démontrez que $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$.

17 Dans chacun des cas, comparez, sans calculatrice, les réels x et y.

a) $x = \ln 5$ et $y = \ln 2 + \ln 3$.

b) $x = 2\ln 3$ et $y = 3\ln 2$.

☞ **Aide.** $a > 0$, p entier, $\ln a^p = p \ln a$.

18 Simplifiez les écritures suivantes :

$$a = \ln 567 - \ln 72 - \ln \frac{7}{8} + \ln \frac{1}{27};$$

$$b = \ln \sqrt{135} + \ln \sqrt{75} - \ln \sqrt{15} - \ln \sqrt{27}.$$

19 Démontrez que pour tout réel x, $x > 0$:

a) $\ln(1 + x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

b) $\ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) + \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) = 0$.

20 Dans chacun des cas suivants, précisez l'ensemble des réels x pour lesquels l'égalité est vraie.

a) $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x - 1)$.

b) $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x - 1) - \ln(x + 2)$.

21 Dans chacun des cas suivants, résolvez l'inéquation d'inconnue n proposée (n entier naturel).

a) $2^n \leqslant 100$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-2}$.

c) $0{,}2 \geqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

d) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geqslant 2$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 119.

Pour les exercices 22 à 27, dans chacun des cas, résolvez l'équation ou l'inéquation proposée.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 113.

22 **a)** $2\ln x = \ln(x + 4) + \ln 2x$.

b) $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$.

23 **a)** $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$.

b) $\ln(x + 3)(x + 2) = \ln(x + 11)$.

24 **a)** $\ln(x - 6) + \ln(x + 1) = \ln 4 + \ln 2$.

b) $\ln \sqrt{3x - 1} + \ln \sqrt{x - 1} = \ln(x - 2)$.

☞ **Aide.** $a > 0$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

c) $\frac{1}{2}\ln 2x = \ln(3 - x) - \ln \sqrt{x + 1}$.

25 **a)** $\ln(5 - x) - \ln 3 + \ln(x - 1) \geqslant 0$.

b) $\ln(3x^2 - x) \leqslant \ln x + \ln 2$.

26 **a)** $\ln(3x^2 - x - 2) \geqslant \ln(6x + 4)$.

b) $3\ln x > \ln(3x - 2)$.

27 **a)** $e^{3x} = 4e^x$.

b) $e^{2x} < 2e^x$.

c) $e^{x + \ln 4} > \frac{2}{3}$.

d) $e^{x+2} \geqslant \frac{3}{e^x}$.

28 Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, construisez, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ satisfaisant à la condition indiquée.

a) $\ln x = \ln(y + 1)$. **b)** $\ln y = 2\ln x$. **c)** $\ln x + \ln y = 0$.

4. Étude de la fonction ln

29 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln x.$$

1. Justifiez que f est dérivable sur I et calculez $f'(x)$.

2. Trouvez une équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 1$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 121.

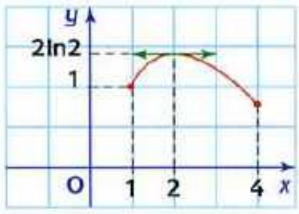
30 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

1. Justifiez que f est dérivable sur I et calculez $f'(x)$.

2. Dressez le tableau de variations de f (on ne demande pas le calcul des limites), puis déduisez-en que pour tout réel x dans I, $f(x) \geqslant 0$.

31 f est une fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + c\ln x$ où a, b, c sont des réels.
On a tracé ci-contre la partie de la courbe représentative de f relative à l'intervalle $[1 ; 4]$.



1. À partir des renseignements portés sur la figure, démontrez que :

$$a + b = 1 ; \quad 2a + c = 0 ; \quad a + c\ln 2 = 2\ln 2 - 1.$$

2. Déduisez-en a, b, c et l'expression de $f(x)$.

32 f est une fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. A(1 ; 0) est un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.

1. Calculez, pour tout x dans I, $f'(x)$.

2. **a)** Pourquoi $f'(1) = 3$?

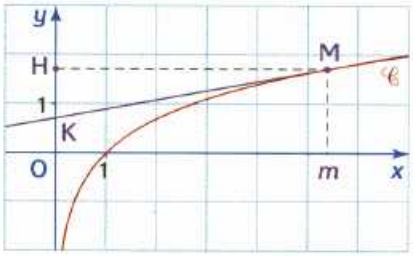
Déduisez-en que $a + 1 = 3$.

b) Prouvez que $a + b = 0$.

3. Déduisez-en $f(x)$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 121.

33 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. M est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse m.



1. Trouvez, en fonction de m, une équation de la tangente T en M à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a)** Démontrez que pour tout réel $m > 0$, T coupe l'axe des ordonnées au point K de coordonnées :

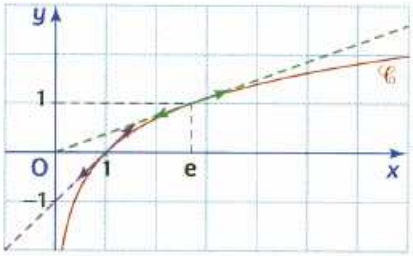
$$(0 ; \ln m - 1).$$

b) Déduisez-en que si H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées, alors $\overrightarrow{KH} = \vec{j}$.

c) Donnez alors un procédé simple de construction de la tangente en M à $\mathscr{C}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 121.

34 Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction ln.



Dans chacun des cas, déduisez-en la courbe représentative de la fonction indiquée.

a) $x \mapsto \ln(-x)$ sur $]-\infty ; 0[$.

b) $x \mapsto 1 + \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

35 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

1. Déterminez la limite de cette suite.

☞ **Aide.** (u_n) est une suite $f(v_n)$ avec $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) Démontrez que $S_n = -\ln(n+1)$.

b) Quelle est la limite de S_n ?

5. Des limites importantes

Pour les exercices 36 à 39, dans chacun des cas étudiez la limite de la fonction f à l'endroit indiqué.

☞ **Aide.** Voir *Comprendre* et l'exercice résolu 7, page 123.

36 **a)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; en 0. **b)** $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$; en 0.

37 **a)** $f(x) = x - \ln x$; en $+\infty$.

b) $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$; en $+\infty$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$; en 0.

38 **a)** $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$; en 0.

b) $f(x) = x + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; en $+\infty$.

☞ **Aide.** Posez $X = \dfrac{1}{x}$.

39 **a)** $f(x) = \ln(e^x + 2)$; en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2e^x + 3}\right)$; en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour les exercices 40 et 41, dans chacun des cas étudiez la limite de la fonction f aux bornes de I.

40 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; $I =]1 ; +\infty[$.

b) $f(x) = x(1 - \ln x)$; $I =]0 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$; $I =]-\infty ; -1[$.

41 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x - 1)$; $I =]0 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$; $I =]0 ; +\infty[$.

42 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}.$$

1. Pourquoi la droite d d'équation $y = x + 1$ est-elle asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f ?

2. Étudiez les positions relatives de $\mathscr{C}$ et d.

43 Démontrez que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentant la fonction :

$$f : x \mapsto x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

☞ **Aide.** Posez $X = \dfrac{1}{x}$.

44 f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = x^2(1 - \ln x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

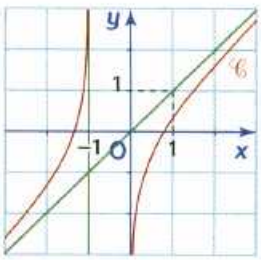
1. Calculez $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

2. Déduisez-en que la fonction f est dérivable en 0.

45 Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction :

$$f : x \mapsto x - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Justifiez l'ensemble de définition de f ainsi que la présence des trois asymptotes.

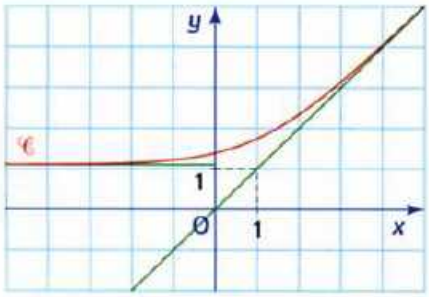


46 Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(3 + e^x).$$

1. Vérifiez que pour tout réel x :

$$f(x) = x + \ln(1 + 3e^{-x}).$$



2. Justifiez la présence de deux asymptotes et donnez pour chacune d'elles une équation.

6. Dérivée d'une fonction ln ∘ u

47 ZOOM SUR... **le théorème 8**

f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On pose $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Pourquoi le théorème 8 permet-il d'affirmer que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$?

2. f est définie en 0 par $f(0) = 0$. On se pose alors la question : f est-elle dérivable en $x = 0$?

a) Pourquoi le théorème 8 ne donne-t-il pas de réponse ?

b) On calcule alors la limite quand x tend vers zéro de $t(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Faites le calcul et concluez.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 123.

Pour les exercices 48 à 52, dans chacun des cas, vérifiez que la fonction f est dérivable en tout point de I et calculez f'.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 123.

48 **a)** $f(x) = \ln(1 + x^2)$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $I =]1 ; +\infty[$.

49 **a)** $f(x) = \ln(x-1) - \ln x$; $I =]1 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; $I =]0 ; +\infty[$.

50 **a)** $f(x) = \ln(\ln x)$; $I =]e ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$; $I =]1 ; +\infty[$.

51 **a)** $f(x) = e^{-x} \ln x$; $I =]0 ; +\infty[$.

b) $f(x) = e^{x \ln x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

52 **a)** $f(x) = \ln(1 + e^x)$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$; $I = \mathbb{R}$.

7. Études de fonctions

53 Les fonctions suivantes sont définies sur $]0 ; +\infty[$. Étudiez chacune d'elles puis tracez la courbe représentative.

a) $f(x) = x + \ln x$. **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$.

c) $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x}$. **d)** $f(x) = (\ln x)^2$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 121.

54 f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudiez les variations de f et tracez $\mathscr{C}$.

2. M_0 est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0.
Démontrez que la tangente T_0 en M à $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$y = \left(\frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}\right) x + \frac{2 \ln x_0 - 1}{x_0}.$$

3. Existe-t-il une position de M_0 sur $\mathscr{C}$ par laquelle T_0 passe par l'origine du repère ?

55 **1.** g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = xe^x + 1.$$

Démontrez que pour tout réel x, $g(x) > 0$.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de zéro par :

$$f(x) = e^x + \ln|x|.$$

a) Démontrez que pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

☞ **Aide.** Voir la remarque du théorème 8, page 122.

b) Justifiez alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	‖	↗	$+\infty$
		$-\infty$	‖	$-\infty$	

c) Déduisez de la question précédente que l'équation $f(x) = m$ admet, quel que soit le réel m, deux solutions distincte.

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus. Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

56 Série harmonique et exponentielle

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Objectifs : • prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $e^{u_n} > n+1$; • voir si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

1. Pour prouver que $e^{u_n} > n+1$, on peut penser à un raisonnement par récurrence.
Supposez donc que pour tout entier $n \geqslant 1$, $e^{u_n} \geqslant n+1$.
Il s'agit de prouver sous cette hypothèse que :

$$e^{u_{n+1}} \geqslant n+2 \quad \text{avec} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

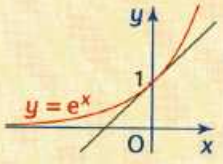
Pouvez-vous y arriver ?

2. On pense alors à transformer l'écriture de e^{u_n} en utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle.

Vérifiez que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$e^{u_n} = e^1 \times e^{\frac{1}{2}} \times \cdots \times e^{\frac{1}{n}} \quad \textbf{[1]}.$$

3. On obtient un produit de nombres $e^{\frac{1}{k}}$, k entier, $k > 0$. Pour poursuivre, on pense à trouver, pour chaque k, un nombre a_k tel que $e^{\frac{1}{k}} \geqslant a_k$, de sorte qu'en multipliant membre à membre ces inégalités, le produit des a_k soit supérieur à $n+1$. Les inégalités $e^{\frac{1}{k}} > 1$ ne permettent pas de conclure, mais $e^{\frac{1}{k}}$ est entre 1 et 2, donc c'est « 1 plus quelque chose ».
On cherche donc à comparer e^x à une fonction affine « $1 + ax$ », en particulier à la tangente à « la courbe de e^x » au point (0 ; 1).



a) En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$, démontrez que pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

b) Déduisez-en que pour tout naturel, $k \geqslant 1$,

$$e^{\frac{1}{k}} > \frac{k+1}{k}.$$

c) Déduisez-en que pour tout naturel $n \geqslant 1$,

$$e^{u_n} > n+1 \quad \textbf{[2]}.$$

4. Il reste à étudier la limite de la suite (u_n). Pour « tirer » u_n de **[2]**, il suffit de passer au logarithme.

Justifiez que **[2]** implique $u_n > \ln(n+1)$ pour tout $n \geqslant 1$.
Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Commentaire. **La suite (u_n) est appelée série harmonique. Elle tend vers l'infini très lentement puisqu'on passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant $\frac{1}{n+1}$. Mais « en ajoutant indéfiniment des termes $\frac{1}{n}$ infiniment petits », on va vers l'infini. Mais cela n'est pas toujours le cas ; on peut démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.**

57 Tangentes communes à deux courbes

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives des fonctions exp et ln dans un repère orthonormal.

Objectif : trouver, si elles existent, les tangentes communes à ces deux courbes.

1. Afin de pouvoir conjecturer la solution, on peut tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Faites-le.

2. Il semble alors qu'il existe deux tangentes communes, mais pas plus. On constate de plus, sur la figure, que les points de contact des tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ n'ont pas la même abscisse. Alors une démarche logique est celle-ci : on écrit l'équation d'une tangente T_1 à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse a et l'équation d'une tangente T_2 à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse $b > 0$ et on en déduit des conditions sur a et b pour que les tangentes soient confondues.

a) Écrivez sous la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ une équation de T_1 et une équation de T_2.

b) Prouvez alors que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

• T_1 et T_2 sont confondues.

• $b = e^{-a}$ et $e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}$.

Aide. **Voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche G, page 455.**

3. Reste à savoir s'il existe au moins un réel a tel que :

$$e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}, \text{ c'est-à-dire tel que } e^{-a} - \frac{a-1}{a+1} = 0.$$

Cette équation ne peut être résolue par l'algèbre. On pense alors à introduire la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de -1 par :

$$f(x) = e^{-x} - \frac{x-1}{x+1}.$$

a) Étudiez les variations de f.

b) Déduisez-en que $f(x) = 0$ a pour solution deux réels a_1 et a_2 seulement. Trouvez pour chacun d'eux un encadrement d'amplitude 10^{-1} et déduisez-en un encadrement de même amplitude pour les valeurs de b correspondantes. Terminez la résolution.

58 Calculer avec les logarithmes

a et b sont deux réels strictement positifs tels que :

$$\ln\left(\frac{1}{3}(a+b)\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \quad [1].$$

Objectif : calculer $\frac{a}{b}$.

1. L'énoncé affirme l'existence de tels nombres a et b (il ne demande pas de prouver cette existence). Il s'agit donc, à partir de l'égalité [1], de déduire par implications successives la valeur de $\frac{a}{b}$.

On pense donc à « éliminer » les logarithmes et pour cela, on essaie d'arriver à une égalité $\ln A = \ln B$, qui implique $A = B$.

Le premier membre de **[1]** est déjà sous la forme $\ln A$.

a) Prouvez que $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$.

b) Déduisez-en que $a + b = 3\sqrt{ab}$, puis que :

$$a^2 + b^2 - 7ab = 0 \quad [2].$$

2. Pour en déduire $\frac{a}{b}$, on peut penser à :

- dire que a est solution de l'équation $X^2 - 7bX + b^2 = 0$, ce qui permet d'exprimer a en fonction de b, puis de trouver $\frac{a}{b}$, en divisant par b ;
- poser $\frac{a}{b} = k$, $a = kb$, avec l'espoir d'obtenir une égalité qui ne contient que le nombre k.

C'est cette solution qui paraît la plus simple.

Prouvez que $k^2 - 7k + 1 = 0$ puis concluez. (N'oubliez pas que $k > 0$.)

59 Résoudre un système

Objectif : résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} xy = 4 & \textbf{(1)} \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

1. Une première étape : si $(x\,;y)$ est solution, alors $x > 0$ et $y > 0$.

Justifiez cette affirmation.

2. Aucune règle de calcul ne permet de modifier l'écriture $(\ln x)^2 + (\ln y)^2$. On peut penser à remplacer y par $\frac{4}{x}$ dans **(2)** mais le résultat n'est pas encourageant.

On pense alors à transformer **(1)** en $\ln xy = \ln 4$ pour n'avoir que 2 inconnues $\ln x$ et $\ln y$.

Supposez que $(x\,;y)$ est solution. Justifiez l'égalité

$$\ln x + \ln y = 2\ln 2.$$

3. On pose donc $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Ayant trouvé X et Y, on déduira x et y ($\ln x = X$ a pour solution $x = e^X$).

a) Prouvez que dans ces conditions :

$$Y = 2\ln 2 - X \text{ et que}$$
$$4X^2 - 8X\ln 2 + 3(\ln 2)^2 = 0.$$

b) Déduisez-en X et Y.

c) Vérifiez alors que ($x = \sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2}$) ou ($x = 2\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$).

4. Nous venons de prouver que si $(x\,;y)$ est solution, alors, nécessairement, $(x\,;y) = (\sqrt{2}\,;2\sqrt{2})$ ou $(x\,;y) = (2\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$. Mais logiquement, rien ne permet d'affirmer que ces couples sont effectivement solutions. Il faut s'en assurer (voir *Types de problèmes et raisonnements*, fiche H, page 457).

Faites cette réciproque, puis concluez.

60 Problème d'existence

Objectif : savoir s'il existe deux réels a et b strictement positifs distincts tels que $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$.

Il s'agit d'un problème d'existence (voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche K, page 461). On suppose l'existence de tels nombres.

Une idée parfois payante dans la recherche de deux nombres a et b, consiste à regrouper séparément tout ce qui dépend de a et tout ce qui dépend de b. On cherche ainsi a et b tels que $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$.

En pensant toujours à l'utilité d'introduire une fonction, on voit que le problème revient à trouver deux réels a et b distincts tels que $g(a) = g(b)$, où g est la fonction définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Étudiez la fonction g (sens de variation, limites aux bornes de l'intervalle de définition).

2. Tracez sa courbe représentative.

3. Prouvez que pour tout m dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, il existe un couple $(a\,;b)$ et un seul tel que :

$$g(a) = g(b) = m.$$

Pour progresser

Équations et inéquations

61 Dans chacun des cas, résolvez l'équation ou l'inéquation proposée.

a) $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$.

b) $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$.

c) $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$.

62 **a)** Résolvez le système :

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \text{et} \quad \ln x + \ln y = \ln 3.$$

☞ **Aide.** **Posez $x+y = X$ et $xy = Y$.**

b) Résolvez le système :

$$x + y = 1 \quad \text{et} \quad 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0.$$

63 **1.** Résolvez l'équation (E) : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$.

☞ **Méthode.** **Posez $X = \ln x$, résoudre l'équation (E_1) : $X^2 - 2X - 3 = 0$ (voir lexique, page 478).**

Pour chaque solution X_0 (s'il en existe), résoudre l'équation $\ln x = X_0$.

Les solutions trouvées sont des solutions de (E).

2. Par la même méthode, résolvez l'inéquation :

$$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geqslant 0.$$

64 Résolvez les équations suivantes :

a) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$. **b)** $e^{-2x} - 5e^{-x} + 6 = 0$.

☞ **Aide.** **Voir la méthode de l'exercice 63.**

65 Résolvez les inéquations suivantes :

a) $[\ln|x|]^2 - \ln x^2 - 3 > 0$. **b)** $3e^{2x} - 7e^x + 2 < 0$.

66 Résolvez le système $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4. \end{cases}$

☞ **Méthode.** **Posez $X = \ln x$ et $Y = \ln y$; voir l'exercice 59, *Apprendre à chercher*.**

67 Résolvez le système $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln xy = 1. \end{cases}$

☞ **Méthode.** **Posez $X = \ln x$ et $Y = \ln y$; voir l'exercice 59, *Apprendre à chercher*.**

68 Résolvez le système :

$$\begin{cases} e^x - \dfrac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e. \end{cases}$$

☞ **Méthode.** **Posez $e^x = X$ et $e^y = Y$.**

69 Pour tout réel x, on pose :

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2.$$

1. a) Vérifiez que $P(-1) = 0$.

b) Déduisez-en que l'on peut écrire, pour tout réel x,

$$P(x) = (x+1)Q(x),$$

où $Q(x)$ est un polynôme du second degré.

c) Résolvez l'inéquation $P(x) \leqslant 0$.

2. Utilisez les résultats précédents pour résoudre l'inéquation :

$$2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x).$$

Étude de fonctions

70 f est la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

1. Démontrez que f est une fonction impaire.

2. a) Justifiez que f est dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$.

b) Étudiez les variations de f sur $[0\ ;\ 1[$.

3. Tracez la courbe représentative de f.

71 f et g sont deux fonctions définies sur $I = [0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

1. Démontrez que pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant f(x)$.

☞ **Aide.** **Étudiez les variations de la fonction h : $x \mapsto f(x) - g(x)$.**

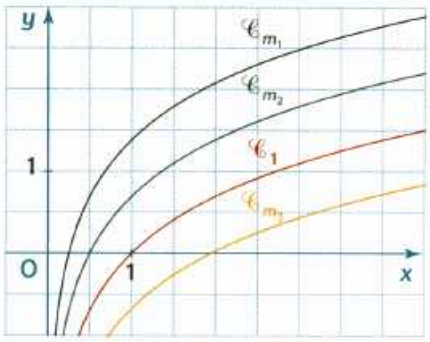
2. Démontrez que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en $x = 0$.

Tracez $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

72 **Étude d'une famille de fonctions**

m est un réel strictement positif, f_m est la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f_m(x) = \ln(mx)$.

On a tracé ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_m$ correspondant à diverses valeurs de m.



1. Démontrez que si $m_1 \neq m_2$, les courbes $\mathscr{C}_{m_1}$ et $\mathscr{C}_{m_2}$ n'ont pas de point commun.

2. On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de $f_1 : x \mapsto \ln x$, démontrez que $\mathscr{C}_m$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par une transformation simple que l'on précisera.

3. M est le point de $\mathscr{C}_m$ d'ordonnée nulle et N celui d'ordonnée 1. Démontrez que la droite (MN) passe par un point fixe lorsque m décrit l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

73 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Démontrez que f est strictement croissante sur I.

2. a) Démontrez que la droite d d'équation $y = x - 4$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au voisinage de $+\infty$.

b) Précisez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à d.

c) Construisez d, puis $\mathscr{C}$.

74 f est la fonction définie sur $I =]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

1. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

2. a) Démontrez que la droite d d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.

b) Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à d.

c) Construisez d, puis $\mathscr{C}$.

75 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. a) Étudiez les limites de f aux bornes de I.

b) Démontrez que la droite d d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c) Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à d.

2. Étudiez les variations de f et tracez $\mathscr{C}$.

76 f est la fonction définie sur $I =]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1).$$

1. Démontrez que f est strictement croissante sur I.

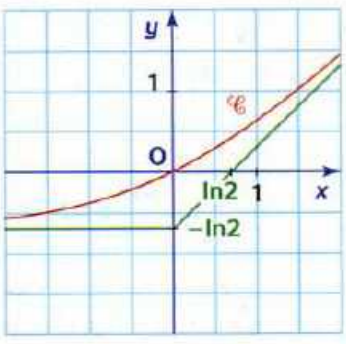
2. a) Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ a une solution α et une seule dans I.

b) Trouvez un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

77 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right).$$

La courbe ci-contre est sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$ admet deux asymptotes, l'une horizontale, l'autre oblique.
Après avoir précisé les équations de ces droites, justifiez la conjecture énoncée.



78 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. a) Vérifiez que pour tout réel x,

$$f(x) = -x + \ln(1 + e^x).$$

b) Déduisez-en que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

2. Étudiez les variations de f et tracez $\mathscr{C}$.

3. A, B, C sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0 ; 1 ; −1. Démontrez que la tangente en A à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite (BC).

79 • f est la fonction définie sur $I =]1 ; 3[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. a) Démontrez que pour tout réel x dans I, $(4 - x)$ appartient à I.

b) Calculez pour tout x dans I, $\frac{1}{2}[f(4 - x) + f(x)]$.

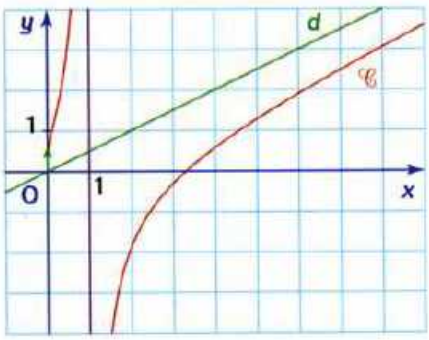
c) Déduisez-en que le point A de coordonnées $(2 ; 0)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.

☞ **Aide.** Voir lexique, page 478.

2. Étudiez les variations de f et construisez $\mathscr{C}$.

80 • f est la fonction définie sur $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{\ln x}$ si $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ et $f(0) = 0$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.



Justifiez chacune des affirmations suivantes :

- La courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.
- La droite d d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
- Pour tout réel x de $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.
- f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.
- L'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α non nulle telle que $3 < \alpha < 4$.

81 • BAC f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$,

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. **a)** Pourquoi la droite d d'équation $y = x$ est-elle asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$?

b) On note h la fonction définie sur I par $h(x) = x + \ln x$. Démontrez que l'équation $h(x) = 0$ a sur I une solution unique α telle que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

c) Déduisez-en la position relative de $\mathscr{C}$ et d.

2. **a)** Démontrez que pour tout x de I, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ où g est une fonction définie sur I que l'on précisera.

b) Démontrez que pour tout x de I, $g(x) \geqslant 1$.

c) Déduisez-en les variations de f et tracez $\mathscr{C}$.

82 • f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1. Étudiez les variations de f et construisez $\mathscr{C}$.

2. On note M_1, M_2, M_3, M_4 les points suivants de $\mathscr{C}$:
- M_1 est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses ;
- M_2 est le point en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère ;
- M_3 est le point en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses ;
- M_4 est le point en lequel la dérivée seconde de la fonction f s'annule.

a) Calculez les abscisses des points M_1, M_2, M_3, M_4.

b) Démontrez que ces abscisses sont dans cet ordre en progression géométrique.

83 • BAC f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

2. **a)** On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. Trouvez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.

b) Construisez T, puis $\mathscr{C}$.

3. M est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse u. Démontrez que la tangente T_u à la courbe $\mathscr{C}$ en M est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si :

$$u^3 - 1 + 2\ln u = 0 \quad \textbf{[1]}.$$

4. À partir de l'équation **[1]**, démontrez que A est le seul point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

84 • BAC **A. Étude d'une fonction auxiliaire**

g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$.

1. Démontrez que sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et donnez pour α un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

2. Précisez le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

B. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1. **a)** Quelle est la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ quand x tend vers 0 ?

☞ **Aide.** Posez $x^2 = X$.

b) Déduisez-en que f est dérivable en $x = 0$ et trouvez une équation de la tangente T en $x = 0$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.

2. **a)** Vérifiez que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

b) Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.

3. **a)** Démontrez que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Déduisez-en les variations de f.

c) Construisez T, puis $\mathscr{C}$.

85 • BAC f est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = x[(\ln x)^2 + 1]$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a)** Démontrez que $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

b) La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

c) Pourquoi $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente verticale au point d'abscisse 0 ?

2. Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

3. On note A le point de coordonnées $(1 ; 1)$.

a) Démontrez que la tangente en A à $\mathscr{C}$ passe par O.

b) Étudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite (OA).

4. Tracez la courbe $\mathscr{C}$.

Fonctions exp et ln et suites

86 (v_n) est une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 15$ et de raison $\frac{1}{2}$. On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln(v_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrez que la suite (w_n) est une suite arithmétique.

2. On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$.

a) Calculez S_n en fonction de n.

b) Étudiez la limite de la suite (S_n) en $+\infty$.

3. Pour tout entier n, on pose $P_n = v_0 v_1 \dots v_n$.

a) Démontrez que $P_n = e^{S_n}$.

b) Étudiez la limite de la suite (P_n) en $+\infty$.

87 • BAC (u_n) est la suite définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

On note (v_n) la suite définie pour tout n par :

$$v_n = \ln u_n - 2.$$

1. Démontrez que la suite (v_n) est géométrique et précisez v_0 et sa raison r.

2. Déduisez-en v_n, puis $\ln(u_n)$, en fonction de n.

3. **a)** Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

b) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers e^2.

88 • f et g sont deux fonctions définies sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

1. **a)** Étudiez les variations de f et g.

b) Déduisez-en que pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x} \quad [1].$$

2. On note (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

a) En utilisant la relation **[1]**, démontrez que :

$$v_n \geqslant \ln(n+1).$$

b) Déduisez-en que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

89 • **Autour de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$**

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f avec n entier $\geqslant 1$.

1. Calculez pour tout réel $x > 0$, $f^{(1)}(x)$ et $f^{(2)}(x)$.

2. **a)** Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}} \text{ pour tout réel } x > 0,$$

avec :

$$u_1 = 1 ; \quad v_1 = -1 ;$$

$$u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \text{ et } v_{n+1} = -(n+1)v_n.$$

b) Exprimez v_n en fonction de n.

c) Démontrez par récurrence que :

$$u_n = (-1)^{n+1} n! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

3. Déduisez $f^{(7)}(x)$ des résultats précédents.

Aide. On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

90 • On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{1 - \frac{n}{2}}$.

1. Démontrez que la suite (u_n) est une suite géométrique. Précisez le premier terme et la raison.

2. On note (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.
Démontrez que la suite (v_n) est une suite arithmétique. Précisez le premier terme et la raison.

3. On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.
Quelles sont les limites des suites (S_n) et (T_n) ?

91 • On note (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = \dfrac{e^n}{3^n}$.

1. Vérifiez que $u_n = e^{n(1 - \ln 3)}$.

2. Démontrez que la suite (u_n) est une suite géométrique. Précisez le premier terme et la raison.

3. Quelle est la limite de la suite S_n définie par :

$$S_n = u_0 + \dots + u_n \ ?$$

92 • BAC f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative.

2. **a)** Démontrez que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$.
On note α_n cette solution et on a donc pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b) Démontrez que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.

a) Déterminez une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ en A.

b) Démontrez que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite Δ.

4. **a)** Exploitez les résultats de la question précédente pour démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n.$$

b) Déterminez la limite de la suite (α_n).

93 ⋮ **1.** En étudiant les variations de deux fonctions convenablement choisies, démontrez que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \quad (1).$$

2. Démontrez par récurrence que pour tout entier n, $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \textbf{(2)}.$$

3. Utilisez alors les résultats des questions précédentes pour trouver la limite de la suite (u_n) avec $n \in \mathbb{N}^*$ de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

☞ **Aide.** **Intéressez-vous à la suite de terme général $\ln u_n$.**

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

94 • Étudiez et représentez graphiquement la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + x\ln x$.

95 • a et b sont deux réels donnés strictement positifs. Résolvez l'équation $\ln(x-a) - \ln x = \ln b$ et discutez suivant les valeurs de a et b.

96 • (u_n) est une suite géométrique dont tous les termes sont strictement positifs. Que pouvez-vous dire de la suite (v_n) de terme général $v_n = \ln(u_n)$?

97 • (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n - 2$.
On note (v_n) la suite définie pour tout entier n de $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = e^{u_n \ln 2}.$$

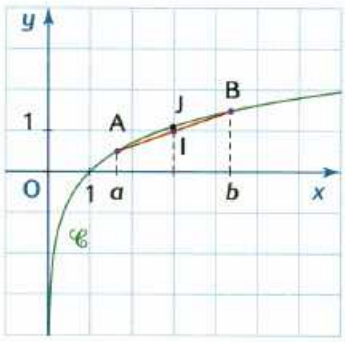
Démontrez que (v_n) est une suite géométrique et précisez son premier terme et la raison.

98 • Exploitez la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour déterminer les entiers n et p tels que $0 < n < p$ et $n^p = p^n$.

99 • f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de cette fonction.
Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}.$$

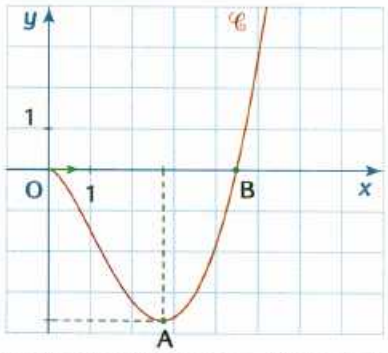
100 • On a tracé ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \ln x$. A et B sont deux points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et b $(0 < a < b)$, I est le milieu de [AB] et J le point de $\mathscr{C}$ de même abscisse que I.



Démontrez que pour tout point A et tout point B de $\mathscr{C}$, I est toujours « en dessous » de $\mathscr{C}$.

101 • On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\left[\ln x - \frac{3}{2}\right] \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$



Il semble que $\mathscr{C}$ admette en $x = 0$ une tangente horizontale, présente un minimum en A et recoupe l'axe des abscisses en B.
Justifiez les conjectures énoncées en précisant les coordonnées exactes de A et B.

102 • À tout réel non nul m, on associe l'équation $(E_m) : e^{-x} - mx = 0$.
Discutez suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation (E_m).

103 • f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$ et trouvez l'entier p tel que $p \cdot 10^{-2} \leqslant \alpha < (p+1) \cdot 10^{-2}$.

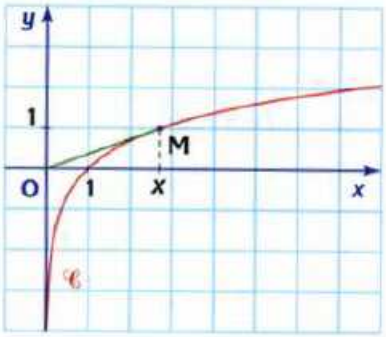
104 • a et b sont deux réels. Démontrez que les propositions :
$(P_1) : e^a - e^{-a} = 2b$ et $(P_2) : a = \ln(b + \sqrt{1+b^2})$
sont équivalentes.

105 • a est un réel donné, $a > 1$.
Démontrez que pour tout x de l'intervalle $[0 ; a[$,

$$\ln(a-x)\ln(a+x) \leqslant (\ln a)^2.$$

Problèmes

106 • *Thèmes : Étude d'une fonction. Exploitation géométrique d'un résultat*



Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln. M est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
Le but de l'exercice est de déterminer s'il existe M sur $\mathscr{C}$ tel que la distance OM soit minimale.
Pour cela, on définit la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ telle que $f(x) = OM^2$.

1. a) Démontrez que pour tout réel $x > 0$,
$$f(x) = x^2 + (\ln x)^2.$$

b) Démontrez que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{x} g(x)$ où g est une fonction que l'on déterminera.

2. Dans cette question, on étudie sur $]0 ; +\infty[$ la fonction g.

a) Étudiez les variations de g.

b) Déduisez-en l'existence d'un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$. Donnez de α un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

3. a) Dressez le tableau de variations de f.

b) Déduisez-en l'existence d'un point M_0 unique tel que OM_0 est minimale.

c) Démontrez que la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire à la droite (OM_0).

107 • BAC *Thème : Étude d'une fonction*

f est la fonction définie sur $I =]-2 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x\ln(x+2)$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x de I.

b) Précisez le signe de $f''(x)$ et déduisez-en qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $[-0{,}6 ; -0{,}5]$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

2. Étudiez les variations de f sur I et dressez le tableau de variations.

3. M_0 d'abscisse x_0 est un point de $\mathscr{C}$.
On note T_{x_0} la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.

a) Démontrez que la droite T_{x_0} passe par O si et seulement si $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$.

b) Déduisez-en qu'il existe deux tangentes T_a et T_b passant par O.
Précisez les réels a et b.

4. Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracez T_a, T_b puis la courbe $\mathscr{C}$.

108 • BAC *Thème : Établir une inégalité à l'aide d'une fonction*

a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$. Le but de l'exercice est de démontrer que :
$$a\ln\frac{1}{a} + b\ln\frac{1}{b} \leqslant \ln 2 \quad \textbf{(1)}.$$

A. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :
$f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 0$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrez que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Calculez pour tout x de $]0 ; 1[$ $f'(x)$ et précisez le signe de $f'(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0 ; 1[$.

b) Démontrez que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Que peut-on en déduire pour la tangente en $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ?

3. a) Dressez le tableau de variations de f et donnez la valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Tracez la courbe $\mathscr{C}$.

B. Démontrer l'inégalité (1)

1. Sachant que $b = 1 - a$, exploitez les résultats de la partie A pour justifier l'inégalité (1).

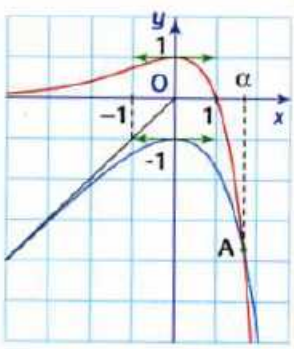
2. Pour quelles valeurs de a et b, a-t-on :
$$a\ln\frac{1}{a} + b\ln\frac{1}{b} = \ln 2 ?$$

109 • BAC *Thème : Études de fonctions et de suites*

A. f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x - e^x \text{ et } g(x) = (1-x)e^x.$$
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudiez les variations de f et g et dressez les tableaux de variations.

2. On a tracé ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Attribuez à chaque fonction sa courbe.



3. Il semble que ces courbes aient un point commun A d'abscisse α et un seul.
Pour le prouver, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = f(x) - g(x).$$

a) Prouvez que $h'(x) = 1 - g(x)$.

b) Étudiez les variations de h et déduisez-en qu'il existe un α unique. Donnez de α un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

B. On se propose dans cette partie d'exploiter les résultats de la partie **A** pour étudier la suite (S_n) définie pour tout entier n non nul, par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminez un encadrement de S_n d'amplitude 10^{-3}.

2. a) En utilisant le tableau de variations de g, démontrez que pour tout réel de l'intervalle $]0 ; 1[$, $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

b) Déduisez-en que pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$e^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{k}{k-1} \text{ puis que } \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, calculez $S_n - S_{n-1}$ et démontrez que la suite (S_n) est décroissante.

3. a) Pour $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$. Démontrez que $u_n \geqslant 0$.

b) En utilisant les variations de f de la partie **A**, démontrez que pour tout x de $]0 ; 1[$, $1 + x \leqslant e^x$.

c) Déduisez-en que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{k+1}{k} \leqslant e^{\frac{1}{k}} \text{ puis que } \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}.$$

d) Vérifiez que pour tout $n > 20$,

$$u_n = \ln\frac{n}{20} - \left(\frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

En raisonnant par récurrence démontrez que pour $n > 20$,

$$\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leqslant \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

e) En déduire que pour tout $n > 20$,

$$u_n \leqslant \ln\frac{21}{20} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \text{ puis que } u_n \leqslant 0{,}049.$$

4. On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = C$.

a) Justifiez que $S_{20} - 0{,}049 \leqslant C \leqslant S_{20}$.

b) Déduisez-en un encadrement de C d'amplitude 0,05.

110 : *Thème : Études d'une famille de fonctions*

Partie préliminaire

Les parties **A** et **B** sont indépendantes l'une de l'autre.

A. On note g la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

1. Étudiez les variations de g et ses limites aux bornes de l'intervalle I.

2. Déduisez-en que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0 ; 1[$.

B. On note h_n la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $h_n(x) = x^2 - n + n\ln x$ avec n entier naturel non nul.

1. Étudiez les variations de h_n et ses limites aux bornes de l'intervalle I.

2. Déduisez-en que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n et que cette solution est dans l'intervalle $[1 ; 3[$.

Étude d'une famille de fonctions

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n avec n entier naturel non nul, définies sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = x - n - \frac{n\ln x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

A. 1. a) Démontrez que $f_n'(x) = \frac{h_n(x)}{x^2}$ pour tout réel x dans I.

b) Déduisez-en le sens de variation de f_n.

2. a) Démontrez que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une asymptote oblique Δ_n.

b) Étudiez la position de $\mathscr{C}_n$ par rapport à Δ_n.

3. Construisez dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

B. On remarque que pour tout x dans I,

$$f_n(x) = x - n\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = x - ng(x).$$

1. En utilisant les résultats de la partie préliminaire, démontrez que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point fixe A de coordonnées $(\alpha ; \alpha)$.

2. Précisez les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

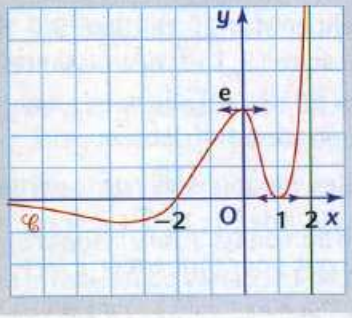
111 **1.** (u_n) est une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 2$ et sa raison $\frac{1}{3}$. On note (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.

a $u_n = \frac{2}{3^n}$.

b (v_n) est une suite arithmétique de raison $(-\ln 3)$.

c Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n) = \frac{1}{2}[\ln 12 - n\ln 3]$.

2. La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-\infty ; 2[$. La droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses sont asymptotes à $\mathscr{C}$. On note g la fonction : $x \mapsto \ln f(x)$.



a g est définie sur $]-2 ; 2[$.

b g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{e}$.

c L'équation $g(x) = 1$ a exactement deux solutions sur $]-2 ; 2[$.

d $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ g)(x) = -\infty$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre réponse.

112 **1.** Si a est un réel strictement négatif, pour tout réel b, l'équation $\ln x = ax + b$ a toujours une solution et une seule dans $]0 ; +\infty[$.

2. Il existe une infinité de couples $(x ; y)$ de réels strictement positifs tels que :

$$\ln(x + y) = \ln x + \ln y.$$

3. La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{|\ln x|}$ est dérivable en $x = 1$.

4. a et b sont deux réels strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$$

si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

113 **D'après document ministériel**

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = e^{-x}(\ln x + 1) \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x.$$

1. Démonstration de cours

Pré-requis : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ **(1)**.

Démontrez à partir de **(1)** que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et déduisez-en la limite de $e^{-x}\ln x$ en $+\infty$.

2. Application

Justifiez chacune des affirmations suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Pour tout réel x de I, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

c) Pour tout réel $x > 1$, $g(x) < 0$.

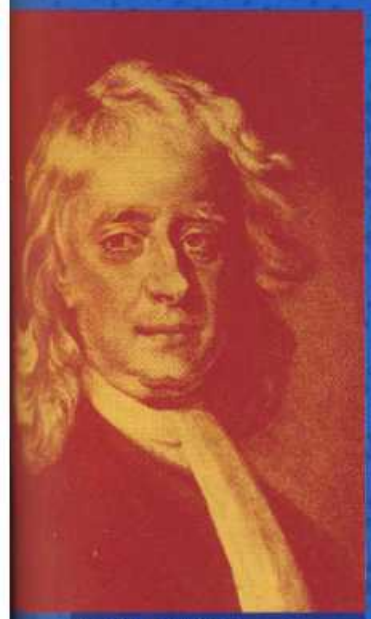
d) L'équation $f(x) = e^{-1}$ a une solution unique.

6 Les fonctions puissances Croissances comparées

1665

Les fonctions puissances sont les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, où α est un réel et x^α le nombre $e^{\alpha \ln x}$. Mais des calculs sur des nombres élevés à une puissance réelle se pratiquent avant que les fonctions exponentielle et logarithme aient leur statut définitif. Ainsi, vers 1665, Newton trouve le développement illimité de $\ln(1+x)^\alpha$ qui est la célèbre formule du binôme de Newton, car lorsque α est entier, le développement se réduit à la forme algébrique donnée au chapitre 9.

Il s'est avéré indispensable de comparer les ordres de grandeur des fonctions puissances, exponentielle et logarithme. Vous verrez que l'exponentielle « croît infiniment plus vite que n'importe quelle puissance entière x^n de x », ce qui explique sans doute pourquoi on qualifie souvent « d'exponentielle » la croissance extrêmement rapide de certains phénomènes.



Isaac Newton
1642 – 1727

À LA MÊME ÉPOQUE

FRANCE

En 1674, la Martinique et la Guadeloupe reviennent à la couronne française. Elles deviendront des départements d'Outre-Mer en 1945.

LITTÉRATURE

Dans ses comédies, Molière critique avec passion les mœurs sociales de son temps. Ses observations impitoyables des caractères humains ont conduit à la création de personnages aux traits éternels, comme Sganarelle ci-contre.

PEINTURE

Vermeer, par sa facture unique, parvient à donner un poids au geste le plus calme, à l'objet le plus banal. Ci-contre, la *Dentelière*.

1 Puissances réelles

1.1 Notation a^b, a et b réels, $a > 0$

DÉFINITION 1

Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, on note a^b le nombre $e^{b\ln a}$.

Ainsi, pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, $a^b = e^{b\ln a}$ et donc $a^b > 0$.

EXEMPLES

• $(3)^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}\ln 3}$. • $5^{\pi} = e^{\pi\ln 5}$.

• Cette définition est en accord avec celle déjà connue de a^n où n est un entier. En effet, a^n peut aussi s'écrire $e^{n\ln a}$ car $e^{n\ln a} = e^{\ln a^n} = a^n$.

• Lorsque **b est un entier**, a^b est défini pour tout réel a non nul. Mais lorsque **b est un réel non entier**, a^b n'est défini que lorsque $a > 0$.

Conséquences.

Pour tout réel $a > 0$ et tout **réel** b, $\ln a^b = b\ln a$.

En effet $\ln a^b = \ln e^{b\ln a} = b\ln a$.

On généralise ainsi l'égalité $\ln a^p = p\ln a$ établie au chapitre 5 page 118, pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif p.

EXEMPLES

• $\ln 2^{\pi} = \pi\ln 2$. • $\ln 1^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln 1 = 0$.

1.2 Propriétés des puissances réelles

Les règles de calculs connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants réels non entiers.

THÉORÈME 1

Pour tous réels $a > 0$ et $a' > 0$ et tous réels b et b',

• $1^b = 1$. • $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$. • $(aa')^b = a^b a'^b$.

• $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$. • $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$. • $\dfrac{a^b}{a'^b} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^b$.

Démonstration.

Il suffit pour chaque égalité de revenir à la définition de a^b et d'utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Par exemple, démontrer que $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ revient à démontrer que $e^{b\ln a}e^{b'\ln a} = e^{(b+b')\ln a}$.

Or $e^{b\ln a}e^{b'\ln a} = e^{b\ln a + b'\ln a} = e^{(b+b')\ln a}$.

D'où $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$.

EXEMPLES

• $10^{\sqrt{3}-1} \times 10^{-\sqrt{3}} = 10^{-1}$.

• $\dfrac{6^{0,6}}{2^{0,6}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^{0,6} = 3^{0,6}$.

• $\left(7^{\frac{4}{5}}\right)^{1,25} = 7^{\frac{4}{5}\times 1,25} = 7^1 = 7$.

• $5^{\sqrt{2}} \times 5^{\sqrt{2}+1} = 5^{2\sqrt{2}+1}$.

• Avec $a > 0$, $\dfrac{(2a)^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}} = \dfrac{2^{\sqrt{2}}a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}}$.

• $\left(11^{\frac{4}{3}}\right)^{0,75} = 11^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}} = 11$.

COMPRENDRE

Si $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

En effet, par définition, $x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln x}$ et, il a été vu au chapitre 5 page 118 que $\frac{1}{2}\ln x = \ln\sqrt{x}$, donc :

$$x^{\frac{1}{2}} = e^{\ln\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

Mise en garde

L'égalité $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ n'est pas valable pour des réels a **négatifs** lorsque b et b' sont des réels **non entiers**.

Exemple.

$[(-3)^2]^{\frac{1}{2}} \neq (-3)^{2\times\frac{1}{2}}$.

En effet, $[(-3)^2]^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ et $(-3)^{2\times\frac{1}{2}} = -3$.

Équations $a^{u(x)} = b^{v(x)}$ (avec $a > 0$ et $b > 0$)

En général, ces équations se résolvent par passage à l'exponentielle. Si u et v sont deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, alors :

$$a^{u(x)} = e^{u(x)\ln a}$$
et $b^{v(x)} = e^{v(x)\ln b}$.

Donc $a^{u(x)} = b^{v(x)}$ équivaut à

$$u(x)\ln a = v(x)\ln b.$$

Il en est de même pour les inéquations.

➜ EXERCICE RÉSOLU 2

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Simplifier des écritures

ÉNONCÉ

Simplifiez les écritures suivantes :

a) $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$. **b)** $(0{,}25)^{-1{,}5}$. **c)** $e^{2+\ln 8}$. **d)** $(a^{2x})(a^{-x})^3$, $a > 0$, x réel.

SOLUTION COMMENTÉE

a) $3^{-\frac{1}{\ln 3}} = e^{-\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln 3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

b) $(0{,}25)^{-1{,}5} = \left[\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{-\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

c) $e^{2+\ln 8} = e^2 \times e^{\ln 8} = e^2 \times 8 = 8e^2$.

d) $(a^{2x})(a^{-x})^3 = (a^{2x})(a^{-3x}) = a^{-x}$.

➜ EXERCICE 1

EXERCICE RÉSOLU 2 Résoudre des équations et des inéquations

ÉNONCÉ

1) Résolvez les équations suivantes :

a) $2^x = 3^{2x+1}$. **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$.

2) Résolvez les inéquations suivantes :

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 3$. **b)** $x^{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2}$.

POINT MÉTHODE

Pour résoudre $a^x = b$ ou $a^x \geqslant b$ ou $a^x \leqslant b$, on écrit $a^x = e^{x\ln a}$ puis on utilise les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien.

SOLUTION COMMENTÉE

1) a) L'équation $2^x = 3^{2x+1}$ équivaut à $e^{x\ln 2} = e^{(2x+1)\ln 3}$ donc, d'après les propriétés algébriques de l'exponentielle, équivaut à $x\ln 2 = (2x+1)\ln 3$. D'où $(\ln 2 - 2\ln 3)x = \ln 3$. Or $\ln 2 - 2\ln 3 = \ln 2 - \ln 9$, et $\ln 2 - \ln 9 \neq 0$, donc $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2 - \ln 9}$.

b) L'équation $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$ équivaut à $e^{-x\ln 3} = \frac{3}{2} = e^{\ln\frac{3}{2}}$.

Donc $-x\ln 3 = \ln\frac{3}{2}$. Or $\ln 3 \neq 0$, donc $x = \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3}$.

2) a) Pour tout réel x, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 3$ équivaut à $e^{-x\ln\sqrt{3}} \leqslant e^{\ln 3}$.

Donc cette inéquation équivaut à $-\frac{1}{2}x\ln 3 \leqslant \ln 3$ ou encore $\ln 3\left[-\frac{1}{2}x - 1\right] \leqslant 0$.

Or $\ln 3 > 0$ donc $-\frac{1}{2}x - 1 \leqslant 0$, soit $x \geqslant -2$.

b) L'expression $x^{\sqrt{2}}$ n'a de sens que pour $x > 0$. Dans ce cas, $x^{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2}$ équivaut à $e^{\sqrt{2}\ln x} \leqslant e^{\ln\frac{1}{2}}$ ou encore à $\sqrt{2}\ln x \leqslant -\ln 2$.

D'où $\ln x \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln 2$ donc $x \leqslant e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2}$. La solution est $\mathcal{S} = \left]0\,;\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2}\right]$.

➜ EXERCICES 2 et 3

2 Étude des fonctions $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$

Note
• Si $a = 1$, $f_1(x) = 1$ pour tout réel x.
Par la suite, nous supposerons $a \neq 1$.
• La fonction exponentielle est de base e.

La fonction $x \mapsto a^x$, avec $a > 0$, est appelée fonction **exponentielle de base a**, et elle est notée $\exp_a$. Pour alléger les écritures, nous la noterons f_a.
Ainsi, $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$. En posant, pour tout réel x, $u(x) = x \ln a$, on voit que $f_a = \exp \circ u$.

2.1 Sens de variation

THÉORÈME 2

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = a^x$ est **dérivable sur** $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_a'(x) = (\ln a)a^x$.

Démonstration.
$f_a(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln a$. Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \ln a$. Donc d'après le théorème 10 du chap. 4, il en résulte que pour tout réel x, $f_a'(x) = (\ln a)a^x$.

Or pour tout réel x, $a^x > 0$ donc le signe de $f_a'(x)$ est celui de $\ln a$. Puisque $\ln a > 0$ équivaut à $a > 1$, f_a est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 1$ et **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $0 < a < 1$.

2.2 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Note
Tous les résultats de cette étude se retrouvent facilement puisque $f_a(x) = e^{x \ln a}$. Il n'est donc pas indispensable de les retenir.

$a > 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = -\infty$

donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$.

D'où le tableau de variations.

x	$-\infty$		$+\infty$
f_a	0	↗	$+\infty$

$0 < a < 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = +\infty$

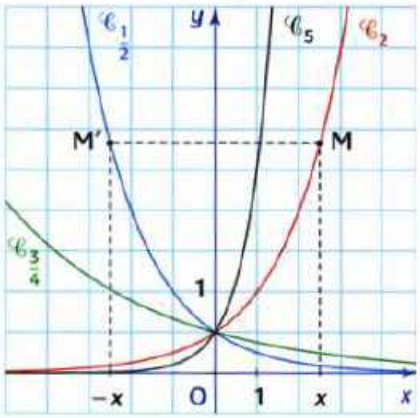
donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$.

D'où le tableau de variations.

x	$-\infty$		$+\infty$
f_a	$+\infty$	↘	0

Le graphique donne l'allure des courbes représentatives des fonctions $f_{\frac{1}{2}}$, f_2, f_5, $f_{\frac{1}{4}}$.



Remarques. Pour tout $a > 0$ et $a \neq 1$,

• L'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_a$ en $-\infty$ lorsque $a > 1$ et en $+\infty$ lorsque $0 < a < 1$.

• Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, $\left(\frac{1}{a}\right)^x = e^{x \ln \frac{1}{a}} = e^{-x \ln a}$

donc $f_{\frac{1}{a}}(-x) = f_a(x)$ et les points $M(x\,;\, f_a(x))$ et $M'\left(-x\,;\, f_{\frac{1}{a}}(-x)\right)$ sont, dans un repère orthonormal, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{a}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

COMPRENDRE

$\exp_a$ et $\log_a$, fonctions réciproques

Pour tout $a > 0$ et $a \neq 1$, on appelle **logarithme de base a**, notée $\log_a$ la fonction définie pour tout réel $x > 0$, par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

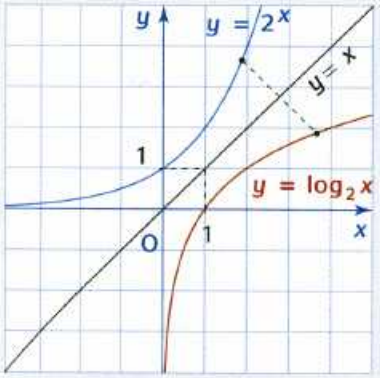
Pour tout réel $y > 0$ et tout réel x, $y = a^x$ équivaut à $\ln y = x \ln a$ ou encore à $x = \dfrac{\ln y}{\ln a} = \log_a(y)$.

Ainsi $f_a = \exp_a$ est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

En conséquence, leurs courbes représentatives sont, dans un repère orthonormal, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple.

Courbes de $x \mapsto 2^x$ et $x \mapsto \log_2 x$.



Logarithme décimal

La fonction $\log_{10}$, notée usuellement log, est appelée fonction logarithme décimal (voir chap. 5, TD 4 p. 127).

Pour tout $x > 0$, $\log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Résoudre des équations et des inéquations

ÉNONCÉ Résolvez l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$. **b)** $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 \leqslant 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

a) $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Donc l'équation $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ équivaut à $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ **(1)**. En posant $2^x = X$, on obtient l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$ **(2)** qui a pour solutions $X_1 = 2$ et $X_2 = 3$. Donc les solutions de **(1)** sont les solutions de $2^x = 2$ et $2^x = 3$. Or $2^x = 2$ équivaut à $x = 1$ car la fonction $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante.

$2^x = 3$ équivaut à $e^{x \ln 2} = e^{\ln 3}$, donc à $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ car $\ln 2 \neq 0$.

L'ensemble des solutions de **(1)** est donc $\mathcal{S} = \left\{1 ; \dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$.

b) Comme pour l'équation précédente en posant $2^x = X$, on obtient l'inéquation $X^2 - 5X + 6 \leqslant 0$ dont l'ensemble des solutions est $[2 ; 3]$.

Les solutions de l'inéquation sont les solutions des inéquations $2 \leqslant 2^x \leqslant 3$.

La fonction ln est strictement croissante donc $\ln 2 \leqslant \ln 2^x \leqslant \ln 3$, soit $\ln 2 \leqslant x \ln 2 \leqslant \ln 3$ ou $1 \leqslant x \leqslant \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ car $\ln 2 > 0$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left[1 ; \dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right]$.

➔ EXERCICES 4 à 6

EXERCICE RÉSOLU 4 Étudier une fonction

ÉNONCÉ Étudiez et représentez la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x2^x$.

SOLUTION COMMENTÉE

- Par définition, pour tout réel x, $f(x) = xe^{x \ln 2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = e^{x \ln 2} + x \ln 2 e^{x \ln 2} = (1 + x \ln 2)2^x.$$

Or, pour tout réel x, $2^x > 0$, donc $f'(x) > 0$ équivaut à $x > -\dfrac{1}{\ln 2}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

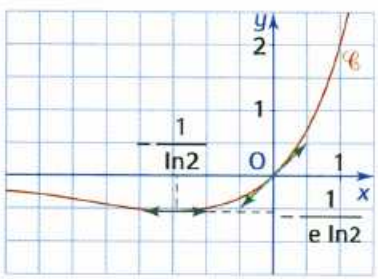
$\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, donc on est en présence d'une forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

En posant $X = x \ln 2$, $xe^{x \ln 2} = \dfrac{Xe^X}{\ln 2}$; or $\lim\limits_{x \to -\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$, donc :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\dfrac{-1}{e \ln 2}$	↗	$+\infty$



➔ EXERCICES 9 à 11

3 La fonction racine *n*-ième

3.1 Définition de la racine *n*-ième de $x > 0$

THÉORÈME 3

n est un entier, $n \geqslant 2$. Pour tout réel $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}}$ est le seul réel strictement positif dont la **puissance *n*-ième** est x.

Démonstration. D'après les propriétés des puissances réelles (§ 1, page 144), $x^{\frac{1}{n}} > 0$ et $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$.

Supposons qu'un autre réel $y > 0$ soit tel que $y^n = x$. Alors $(y^n)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}$, d'où $y = x^{\frac{1}{n}}$, et le théorème est démontré.

DÉFINITION 2

Pour tout entier $n \geqslant 2$, la **racine *n*-ième** d'un réel $x \geqslant 0$ est $x^{\frac{1}{n}}$ si $x > 0$, zéro si $x = 0$.

Note
- Poser $\sqrt[n]{0} = 0$ est cohérent puisque 0 est le seul réel dont la puissance n-ième est 0.
- $\sqrt{x}$ est la racine deuxième de x. $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Notation. La racine n-ième de x est notée $\sqrt[n]{x}$. Ainsi :

$\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ si $x > 0$. En outre, d'après ce qui précède,

- $(\sqrt[n]{x})^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.
- Pour tout réel $x \geqslant 0$, et tout réel $y \geqslant 0$, $x^n = y$ équivaut à $x = \sqrt[n]{y}$.

3.2 Étude de la fonction racine *n*-ième, $n \geqslant 2$

DÉFINITION 3

Note
Le fait que tout $x \geqslant 0$ n'a qu'une seule racine n-ième permet de définir cette fonction.

La fonction racine n-ième est la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

■ Dérivabilité

THÉORÈME 4

La fonction racine n-ième est **dérivable** sur l'intervalle **ouvert** $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Démonstration. Pour tout $x > 0$, $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{n}\ln x$.

La fonction u est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc d'après le théorème 10 du chapitre 4,

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \frac{1}{nx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Note
La fonction dérivée est strictement positive.

■ Continuité et limite en $+\infty$

Puisque la fonction racine n-ième est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, elle est continue sur cet intervalle. De plus, les notations étant celles de la démonstration ci-dessus, $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{n}\ln x} = 0 = \sqrt[n]{0}$, donc la fonction racine n-ième est **continue sur** $[0 ; +\infty[$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

■ Tableau de variations

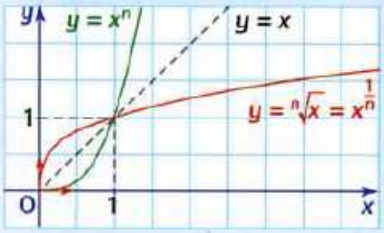
La fonction racine n-ième est **strictement croissante sur** $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt[n]{x}$	0	$+\infty$

COMPRENDRE

Réciprocité

Notons f la fonction racine n-ième et g la fonction puissance n-ième $x \mapsto x^n$, restreinte à $[0 ; +\infty[$.
Ces deux fonctions sont réciproques. En effet, $x^n = y$, c'est-à-dire $g(x) = y$, équivaut à $x = \sqrt[n]{y}$, c'est-à-dire à $x = f(y)$ (voir § **8.4** chapitre 2, page 36).
Les courbes représentatives de f et g sont donc, dans un repère orthonormal, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Non dérivable en zéro

La fonction racine n-ième **n'est pas dérivable en 0**, mais sa courbe représentative a une tangente verticale au point d'abscisse zéro.
En effet, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - 0}{x - 0} = x^{\frac{1}{n} - 1} = e^{\left(\frac{1}{n} - 1\right)\ln x}.$$

Posons $X = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\ln x$, alors

$\lim\limits_{x \to 0} X = +\infty$ (car $\frac{1}{n} - 1 < 0$) et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.

Donc le taux de variation en 0 a pour limite $+\infty$ en 0, donc il n'y a pas de nombre dérivé, mais il existe une tangente verticale à l'origine du repère.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Simplifier des expressions

ÉNONCÉ Simplifiez les expressions suivantes :

a) $\sqrt[2]{3}\sqrt[4]{3^6}$. **b)** $\frac{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$, $x > 0$. **c)** $x^{\frac{1}{3}}(\sqrt[4]{x})^{-\frac{1}{3}}$, $x > 0$.

POINT MÉTHODE

Pour calculer avec les racines n-ièmes, on utilise les règles de calculs sur les puissances réelles. En effet, on sait que :

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \text{ pour } x > 0 \text{ donc } (\sqrt[n]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p = x^{\frac{p}{n}}.$$

SOLUTION COMMENTÉE

a) $\sqrt[2]{3}\sqrt[4]{3^6} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$.

b) $\frac{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}} \times x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{12}}$.

c) $x^{\frac{1}{3}}(\sqrt[4]{x})^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{4}}$.

➔ EXERCICES 13 à 20

EXERCICE RÉSOLU 6 Résoudre une équation et une inéquation

ÉNONCÉ Résolvez dans $]0 ; +\infty[$:

a) $x^{-\frac{1}{3}} \geqslant 8$. **b)** $x^{\frac{1}{3}} - 6x^{-\frac{1}{3}} - 1 = 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

a) Pour tout réel $x > 0$, $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ donc l'inéquation est équivalente à $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \geqslant 8$ qui, par passage à l'inverse, donne $x^{\frac{1}{3}} \leqslant 8^{-1}$.
Or la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc $x^{\frac{1}{3}} \leqslant 8^{-1}$ est équivalent à $x \leqslant (8^{-1})^3$ ou à $x \leqslant 8^{-3}$.
Il en résulte que l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} =]0 ; 8^{-3}].$$

b) $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$, d'où après réduction au même dénominateur, l'équation $x^{\frac{1}{3}} - 6x^{-\frac{1}{3}} - 1 = 0$ équivaut à $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 6 = 0$ **(1)**.
En posant $x^{\frac{1}{3}} = X$, on obtient l'équation $X^2 - X - 6 = 0$ qui a pour solutions $X_1 = -2$ et $X_2 = 3$. Les solutions de **(1)** sont les solutions de $x^{\frac{1}{3}} = -2$ et $x^{\frac{1}{3}} = 3$.
Or $x^{\frac{1}{3}} > 0$ donc $x^{\frac{1}{3}} = -2$ n'a pas de solution et $x^{\frac{1}{3}} = 3$ équivaut à $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3$, donc à $x = 27$ d'où $\mathcal{S} = \{27\}$.

➔ EXERCICES 21 à 23

4 Croissances comparées

4.1 Croissances comparées au voisinage de $+\infty$

Les fonctions $x \mapsto x^n$ (n entier, $n \geqslant 1$), $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont strictement croissantes sur $]0 ; +\infty[$ et ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi, pour les grandes valeurs de x, les nombres x^n, $\ln x$, e^x sont de plus en plus grands. Le but de ce paragraphe est de comparer leurs ordres de grandeur pour les grandes valeurs de x. Pour cela, on étudie les limites en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$ et $x \mapsto \dfrac{e^x}{x^n}$.

THÉORÈME 5

Pour tout entier n, $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Démonstration.

• On se ramène à la limite connue de $\dfrac{\ln U}{U}$ par le changement de variable $U = x^n$.

Alors $\ln U = \ln x^n = n \ln x$ et $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{1}{n} \dfrac{\ln U}{U}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} U = +\infty$ et $\lim\limits_{U \to +\infty} \dfrac{\ln U}{U} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée.

• $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^x}{e^{n \ln x}} = e^{x - n \ln x}$. Or $x - n \ln x = x\left[1 - n \dfrac{\ln x}{x}\right]$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - n \ln x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$. Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$. En effet, $\dfrac{e^x}{\ln x} = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{\ln x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par valeurs positives, on en déduit par passage à l'inverse que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$.

4.2 Conséquences

THÉORÈME 6

Pour tout entier n, $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Démonstration.

• Par le changement de variable $U = \dfrac{1}{x}$, on ramène l'étude à droite en zéro à une étude en $+\infty$.

$x^n \ln x = \dfrac{1}{U^n} \ln \dfrac{1}{U} = -\dfrac{\ln U}{U^n}$; or, $\lim\limits_{x \to 0} U = +\infty$ et $\lim\limits_{U \to +\infty} -\dfrac{\ln U}{U^n} = 0$, d'où le résultat d'après la limite d'une fonction composée.

• $e^{-x} x^n = \dfrac{x^n}{e^x}$; or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

Note
Le résultat demeure lorsque l'exposant n entier naturel est remplacé par un réel $\alpha > 0$. (Voir le TD 1 p. 153)

On déduit du théorème 6 que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x x^n = 0.$$

En effet, pour obtenir ce résultat, il suffit de se ramener à la limite connue en $+\infty$ de $e^x x^n$, par le changement de variable $U = -x$. Alors, $e^x x^n = e^{-U}(-U)^n = (-1)^n e^{-U} U^n$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} U = +\infty$ et $\lim\limits_{U \to +\infty} e^{-U} U^n = 0$, d'où le résultat.

Remarque. Si P est un polynôme, $P(x) = a_p x^p + \cdots + a_1 x + a_0$, on déduit de ce qui précède que $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) e^x = 0$, car pour tout entier k entre 0 et p, $\lim\limits_{x \to -\infty} a_k x^k e^x = 0$.

COMPRENDRE

Comparer $\ln x$ et e^x avec x^α (α réel, $\alpha > 0$)

Les conclusions du théorème 5 et ses conséquences sont encore valables pour les puissances non entières de x. En effet, l'hypothèse n entier naturel non nul ne joue aucun rôle, seul compte le fait que n est strictement positif.

Donc si on remplace l'entier n par un **réel** quelconque $\alpha > 0$, les conclusions restent valables.

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ; \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} x^\alpha = 0 ; \lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0.$$

➜ EXERCICES RÉSOLUS 7 et 8

Une interprétation du théorème 5

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Pour les grandes valeurs de x, x^n « devient infiniment petit » par rapport à e^x, c'est le sens de l'expression « L'exponentielle croît indéfiniment plus vite que n'importe quelle puissance de x ».

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Pour les grandes valeurs de x, $\ln x$ est négligeable devant x^n avec n entier et $n \geqslant 1$.

Ainsi :

« À l'infini (positif), e^x l'emporte sur toute puissance de x et les puissances de x l'emportent sur $\ln x$ ».

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Lever des indéterminations en $+\infty$

ÉNONCÉ **1)** Étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-\sqrt{x}}$.

2) Étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - \ln x$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) On vérifie facilement que $\lim_{x \to +\infty} e^{-\sqrt{x}} = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Donc le théorème sur la limite d'un produit ne permet pas de conclure (forme indéterminée « $\infty \times 0$ »). On se ramène à la limite connue de $x^n e^{-x}$ en $+\infty$ en faisant le changement de variable $X = \sqrt{x}$.

Alors $x^2 e^{-\sqrt{x}} = X^4 e^{-X}$ donc $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$.

2) $\lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Le théorème sur la limite d'une somme ne permet pas de conclure (forme indéterminée « $\infty - \infty$ »). $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (voir *Comprendre*) donc mettons $\sqrt{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$. Alors $f(x) = \sqrt{x}\left(2 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, d'où l'on déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

➜ EXERCICES 31 à 35, 50 à 54

EXERCICE RÉSOLU 8 Étudier une fonction

ÉNONCÉ f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$.

Étudiez la fonction f et tracez sa courbe représentative $\mathscr{C}$.

SOLUTION COMMENTÉE

- **Limite en $+\infty$**

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\sqrt{x} e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} e^{-x}$ et $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} = 0$.

- **Sens de variation**

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} - \sqrt{x} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}(1 - 2x).$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - 2x$. Or $1 - 2x > 0$ équivaut à $x < \frac{1}{2}$.

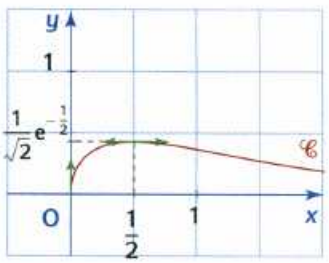
Étudions la limite en 0 de la fonction $t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$$t(x) = \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable en zéro. Cependant sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse zéro.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$	↘	0



➜ EXERCICE 58

COIN MÉMO

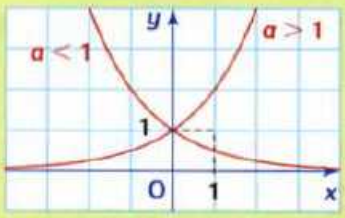
DES idées À RETENIR

Puissances réelles. Pour tout réel $a > 0$, tout **réel** b, par définition, $a^b = e^{b \ln a}$.
Les **règles de calculs** sur les puissances réelles sont les mêmes que celles sur les puissances entières.

Deux nouvelles fonctions « usuelles » du type « $e^{u(x)}$ »

Fonction $f : x \mapsto a^x$, $a > 0$

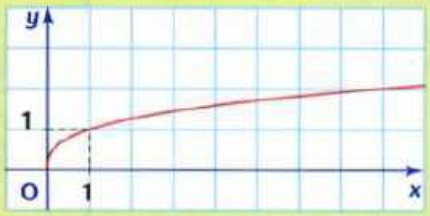
- $f(x) = e^{x \ln a}$.
- Dérivée : $f'(x) = (\ln a) \times a^x$.



- Si $a > 1$, $f(x) = a^x$ a les mêmes propriétés que $g(x) = e^x$.

Fonction racine n-ième, $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$

- $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.
- Dérivée : $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$ si $x > 0$.



- $f(x) = \sqrt[n]{x}$ a les mêmes propriétés que la fonction racine carrée.

- Mémoriser un croquis est parfois plus facile que de mémoriser une liste de propriétés.

Comparaison des ordres de grandeur pour les grandes valeurs de x.

En $+\infty$, quel que soit l'exposant n, $n > 0$, « e^x l'emporte sur x^n et x^n l'emporte sur $\ln x$ »,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

→ EXERCICES RÉSOLUS 7 et 8

Autres limites

$$n > 0, \quad \lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

DES réflexes À AVOIR

Les résultats précédents sur les limites permettent de lever des indéterminations en $+\infty$, $-\infty$, ou 0.
Deux stratégies habituelles : mise en facteur du terme dominant ou changement de variable.

Exemple 1. « $\infty - \infty$ »

- $f(x) = x^2 - 2\ln x$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

« x^2 l'emporte sur $\ln x$ »

d'où $f(x) = x^2\left[1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right]$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0$, d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 2. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

- $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, car

$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + 1}$, or

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 3. « $0 \times \infty$ »

- $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$,

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

En posant $\frac{1}{x} = X$, $f(x) = \frac{e^X}{X^2}$.

Or $\lim_{x \to 0^+} X = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$.

Donc, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Pour étudier une fonction $f(x) = u(x)^{v(x)}$, pensez à écrire que $f(x) = e^{v(x) \ln u(x)}$.

TD 1 Étude des fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x > 0$, α réel

Pour tout réel α, on note f_α la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, et pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = \alpha \ln x$.

1 Dérivabilité

Démontrez que f_α est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$. Le signe de $f'_\alpha(x)$ est celui de α.

2 Étude de f_α lorsque $\alpha > 0$

1. Démontrez que $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$. On pose alors $f_\alpha(0) = 0$, et la fonction f_α ainsi prolongée en 0 est continue en 0. Justifiez que f_α est continue sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. Démontrez que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$. Dressez le tableau de variations de f_α.

3. Démontrez que f_α est dérivable en zéro lorsque $\alpha > 1$, et qu'elle n'est pas dérivable en zéro lorsque $\alpha < 1$ mais que sa courbe représentative est tangente en O, origine du repère, à l'axe des ordonnées.

4. Tracez les courbes représentatives de $f_{\frac{1}{3}}$, $f_{\frac{3}{2}}$, f_4.

3 Étude de f_α lorsque $\alpha < 0$

1. Étudiez la limite de f_α en zéro, en $+\infty$. Précisez le sens de variation.

2. Tracez les courbes représentatives de $f_{-\frac{1}{2}}$ et f_{-2}.

TD 2 Étude guidée des fonctions $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

1 Préliminaire

Lorsque u est une fonction **strictement positive** et v une fonction quelconque, on note u^v la fonction $x \mapsto e^{v(x) \ln u(x)}$. La fonction u^v est la composée de l'exponentielle et de la fonction $v \ln u$, $u^v = \exp \circ (v \ln u)$. L'étude d'une fonction u^v se fait à partir de cette définition $\boldsymbol{u^v = e^{v \ln u}}$. Notez que u^v est à valeurs **strictement positives**.

2 Exemple : la fonction $x \mapsto x^x = e^{x \ln x}$

La fonction f est la fonction définie par $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$.

1. Vérifiez que f est définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$.

2. Étudiez la limite de f en $+\infty$ et démontrez que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

3. a) Vérifiez que f est dérivable sur I et que pour tout réel x dans I :

$$f'(x) = (1 + \ln x) f(x).$$

b) Déduisez-en le sens de variation de f sur I.

4. On définit la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x)$ lorsque $x > 0$ et $g(0) = 1$. La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, car pour tout $x > 0$, $g'(x) = f'(x)$. Il reste à voir si g est dérivable en zéro.

Pour cela, on doit étudier la limite en zéro de la fonction $t : x \mapsto \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$, $x > 0$.

a) Vérifiez que pour tout $x > 0$, $t(x) = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} \times \ln x$.

b) En effectuant le changement de variable $X = x\ln x$, calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$.

Déduisez-en que $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = -\infty$.

c) Interprétez graphiquement ce résultat, puis tracez la courbe représentant la fonction g.

TD 3 Exemples d'étude d'équations $f(x) = \lambda$

1 Équation $2^x + 3^x = 5^x$

Le **but** de l'exercice est de trouver le nombre de solutions strictement positives de l'équation $2^x + 3^x = 5^x$ **[1]**.

Il paraît ici difficile de faire « disparaître » les exposants et le passage à l'écriture $e^{x\ln 2} + e^{x\ln 3} = e^{x\ln 5}$ n'apporte pas de simplifications apparentes. Une autre idée consiste à se ramener à une équation du type $f(x) = \lambda$ avec λ constante.

1. Démontrez que l'équation **[1]** est équivalente à $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = 1$ **[2]**.

2. **a)** Vérifiez que les fonctions $x \mapsto \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ sont strictement décroissantes sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Étudiez leurs limites respectives en $+\infty$ (voir § 2, page 146).

b) Déduisez-en le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{2}{5}\right)^x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ sur $[0 ; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$.

c) Dressez le tableau de variations de la fonction f et tracez sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

3. Déduisez des questions précédentes que l'équation **[1]** a une solution strictement positive et une seule.

2 Équation $x^5 = (2{,}5)^x$

Le **but** de l'exercice est de trouver le nombre de solutions strictement positives de l'équation $x^5 = (2{,}5)^x$. Une idée, pour résoudre cette équation, est de faire « disparaître » les exposants.

1. « Résoudre l'équation $x^5 = (2{,}5)^x$ revient à résoudre l'équation $5\ln x = x\ln(2{,}5)$, et donc, puisque x est strictement positif, à résoudre l'équation $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2{,}5}{5}$. »
Justifiez ces affirmations.

2. On ramène ainsi l'équation à une équation du type $f(x) = \lambda$ avec λ constante.

a) Quelle est la fonction f introduite ?

b) Étudiez ses variations et déduisez-en l'existence de deux solutions strictement positives et deux seulement.

c) Pour chacune de ces solutions, à l'aide de votre calculatrice, donnez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. et 2. Puissances réelles et $x \mapsto a^x$, $a > 0$ et $a \neq 1$

1 Écrivez plus simplement les nombres suivants :

$a = 4^{-\frac{1}{\ln 4}}$; $b = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$; $c = (0{,}125)^{-\frac{1}{3}}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 145.

2 Résolvez les équations suivantes.

☞ **Note.** La question a) est corrigée en fin de manuel.

a) $x^{\sqrt{3}} \leqslant \frac{1}{3}$.

b) $x^{\pi} = \frac{1}{2}$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3$.

d) $7^{x-1} = 3^x$.

e) $3^x = 4^{2x+1}$.

f) $5^{1-3x} = \frac{1}{125}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 145.

3 Résolvez les inéquations suivantes.

☞ **Note.** La question e) est corrigée en fin de manuel.

a) $3^x \geqslant 4$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$.

c) $5^{-x} < 5^{2x}$.

d) $\frac{2^x}{2^x + 1} < \frac{1}{3}$.

e) $(\sqrt{x})^x > x^{\sqrt{x}}$.

f) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \leqslant 2$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 145.

Pour les exercices 4 à 6, résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations proposées.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 147.

4 **a)** $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$.

b) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leqslant 0$.

5 **a)** $2^{2x+1} - 10 \cdot 2^x + 12 = 0$.

b) $2^{2x+1} - 10 \cdot 2^x + 12 \geqslant 0$.

6 **a)** $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$.

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} \geqslant 7$.

7 Résolvez le système $\begin{cases} 3^x 3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$.

8 Est-il vrai que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $a^{\ln b} = b^{\ln a}$?

9 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cdot 2^{-x}$. Étudiez les variations de f et tracez sa courbe.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 147.

10 Étudiez et représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 147.

11 Étudiez et représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)2^x$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 147.

12 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, a-t-on $1 + 4 + \cdots + 4^n \geqslant 10^{15}$?

3. La fonction racine n-ième

Pour les exercices 13 à 15, simplifiez l'écriture de chacun des nombres proposés.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 149.

13 $A = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[3]{2^7}$; $B = \sqrt[3]{2^5}(\sqrt[4]{2^7})^2$.

14 $A = \frac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$; $B = \sqrt[10]{1\,024} - 2^{-2}\sqrt{2^6}$.

15 $A = \frac{\sqrt{9}\sqrt{27}\sqrt[3]{9^2}}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}}$; $B = 5^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{25}$.

16 En utilisant l'égalité $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, vraie pour tous réels a et b non nuls, démontrez que :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = 3^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}.$$

17 On appelle moyenne géométrique de n réels strictement positifs, la racine n-ième de leur produit. Quelle est la moyenne géométrique de 9 ; 27 et 243 ?

EXERCICES

Pour les exercices **18** à **20**, écrivez chacun des nombres proposés sous la forme $x^{\frac{p}{q}}$ où $\frac{p}{q}$ est un rationnel et x un réel strictement positif.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 149.

18 $A = \sqrt{\sqrt{x}} \times \sqrt[4]{x}$; $B = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

19 $A = \dfrac{1}{x}\left(x^{-\frac{1}{3}}x^{-1}\right)^4$; $B = x^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[4]{x}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

20 $A = x^{-2}\left(\sqrt{x}\,x^{\frac{1}{3}}\right)^5$; $B = x^{-2}\sqrt{x}\,x^{\frac{1}{3}}$.

Pour les exercices **21** à **23**, résolvez dans chaque cas l'équation ou l'inéquation proposée.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 149.

21 **a)** $x^3 = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$. **b)** $x^{\frac{4}{3}} < 4x$.

22 **a)** $x^{\frac{2}{3}} < x$. **b)** $x^{-\frac{4}{3}} \leqslant 2$.

23 **a)** $(x+1)^{\frac{5}{2}} \leqslant 1$. **b)** $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\sqrt{2}$.

Pour les exercices **24** à **26**, dans chacun des cas, la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$. Calculez $f'(x)$ pour tout x dans $]0 ; +\infty[$.

24 **a)** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}e^x$. **b)** $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\ln x$.

25 **a)** $f(x) = x - \sqrt[4]{x}$. **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

26 **a)** $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$. **b)** $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$.

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$.

1. En utilisant le théorème sur la dérivation d'une fonction composée, démontrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculez $f'(x)$ pour tout réel x.

28 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}}e^{-x}.$$

1. Démontrez que f est dérivable sur I.
2. Prouvez que le signe de $f'(x)$ sur I est celui de $\left(\dfrac{5}{3} - x\right)$.

29 f est la fonction définie sur $I =]-\infty ; 1[$ par :

$$f(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Démontrez que pour tout réel x dans I, $f'(x) < 0$.

30 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 6\sqrt[3]{x}$. Démontrez que f est dérivable sur I et que pour tout réel de $]2\sqrt{2} ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

4. Croissances comparées

Pour les exercices **31** à **35**, dans chacun des cas, étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction f.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 151.

31 **a)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}$. **b)** $f(x) = \dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{e^x}$.

c) $f(x) = x^{-\frac{2}{5}}\ln x$.

32 **a)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^{-\frac{2}{3}}}$. **b)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x\sqrt{x}}$.

33 n est un entier naturel non nul.

a) $f(x) = \dfrac{x^n}{\ln x}$. **b)** $f(x) = \dfrac{x^n}{e^x}$.

34 **a)** $f(x) = x^2 - \ln x^5$. **b)** $f(x) = x - 8\ln x^{10}$.

35 **a)** $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$. **b)** $f(x) = \dfrac{e^x}{(\ln x)^3}$.

☞ **Aide.** $\dfrac{e^x}{\ln x} = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{\ln x}$.

36 Prouvez que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2} = \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\ln x}\right)^2$$

et déduisez-en la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2}$.

37 Prouvez que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{e^{2x+3}}{x^{\frac{7}{2}}} > \dfrac{e^x}{x^{\frac{7}{2}}}$

et déduisez-en la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{e^{2x+3}}{x^{\frac{7}{2}}}$.

38 Est-il vrai que, pour x suffisamment grand, $\sqrt[50]{x}$ « dépasse » $\ln x$?

39 Dans chacun des cas, étudiez la limite en 0 de la fonction f.

a) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$. **b)** $f(x) = x^2\ln\sqrt{x}$.

c) $f(x) = (x^2 - 3x)\ln\sqrt{x}$.

Pour les exercices **40** et **41**, étudiez la limite en 0 de la fonction f. Pour cela, écrivez $f(x)$ sous la forme $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$. (Voir TD 5 Chap. 3 page 69).

40 **a)** $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$.

b) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$.

41 $f(x) = \dfrac{e^{x\ln 2} - 1}{x}$.

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

42 De $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$ à $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$

a, b, c sont des réels strictement positifs.

On note : $A = b + c - 2\sqrt{bc}$

et $B = a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}$.

Objectif : démontrer que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$.

1. Démontrer $A \geqslant 0$ revient à démontrer

$$b + c \geqslant 2\sqrt{bc}.$$

Mais les nombres $b + c$ et $2\sqrt{bc}$ sont positifs, donc démontrer que $A \geqslant 0$ équivaut à démontrer que :

$$(b + c)^2 \geqslant 4bc.$$

Prouvez cette dernière inégalité.

2. De même, démontrer que $B \geqslant 0$ équivaut à démontrer que $(a + b + c)^3 \geqslant 27abc$.
Une solution algébrique analogue au **1.** semble difficile. Il est alors fréquent, pour démontrer des égalités ou inégalités valables pour des nombres d'un même intervalle, d'introduire l'outil fonctionnel.
Nous allons donc ramener le problème à l'étude d'une inéquation $f(x) \geqslant \lambda$.

Vérifiez que le problème équivaut à démontrer que :

$$\frac{(a + b + c)^3}{abc} \geqslant 27 \quad \textbf{[1]}.$$

3. Mais il y a trois variables a, b, c. Pour disposer d'une fonction à une seule variable, fixons b et c et faisons varier a dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, c'est-à-dire considérons la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x + b + c)^3}{xbc}.$$

a) Démontrez que cette fonction a un minimum pour :

$$x = \frac{b + c}{2}$$

et que ce minimum est $\frac{27}{4}\frac{(b + c)^2}{bc}$.

b) En tenant compte du fait que $(b + c)^2 \geqslant 4bc$, déduisez-en que **[1]** est vraie. Terminez la résolution.

☞ Prolongements possibles.

1. Il est assez facile de démontrer que $b + c = 2\sqrt{bc}$ ne peut avoir lieu que pour $b = c$, puis que $a + b + c = 3\sqrt[3]{abc}$ ne peut avoir lieu que pour $a = b = c$.

2. Est-il vrai que $a + b + c + d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$?

43 Comparaison de u^v et v^u

u et v sont deux réels tels que $1 < u < v$.

Objectifs : comparer les réels u^v et v^u ; en déduire la comparaison de $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ et $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$.

1. Le problème consiste à comparer les deux réels u^v et v^u, donc à déterminer les valeurs de u et de v pour lesquelles $u^v < v^u$.
Une première idée est de « se débarrasser » des exposants, donc de passer au logarithme, puisque :

$$u^v = e^{v \ln u} \text{ et } v^u = e^{u \ln v}.$$

Vérifiez que sous les hypothèses faites :

$$u^v < v^u \text{ équivaut à } v \ln u < u \ln v \quad \textbf{[1]}.$$

2. Pour poursuivre, une deuxième idée, souvent efficace, est d'isoler ce qui est fonction de u de ce qui est fonction de v.
Le problème serait donc de savoir quand :

$$\frac{v}{\ln v} < \frac{u}{\ln u} \quad \textbf{[2]}.$$

a) Cette inégalité n'est pas toujours équivalente à **[1]**. Pourquoi ?

b) Avec les hypothèses de l'énoncé, **[1]** et **[2]** sont bien équivalentes.
Pourquoi ?

3. Pour conclure, une troisième idée consiste à introduire l'outil fonctionnel, outil puissant lorsqu'il s'agit de prouver des égalités ou des inégalités.
On ramène alors le problème à l'étude des variations d'une fonction f.

a) Quelle fonction f introduire ?

b) En étudiant son sens de variation, prouvez alors que :
- lorsque $1 < u < v \leqslant e$, $u^v < v^u$;
- lorsque $e \leqslant u < v$, $u^v > v^u$.

4. Comparez alors, suivant les valeurs de n, les nombres $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ et $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$.

☞ Remarque. **Lorsque $1 < u < e < v$, on ne peut pas conclure de façon générale.**
Toutes les situations sont possibles.
Par exemple, les couples (2 ; 3), (2 ; 4), (2 ; 5) sont des couples $(u ; v)$ tels que $1 < u < e < v$, mais le premier est tel que $u^v < v^u$, le deuxième tel que $u^v = v^u$ et le troisième tel que $u^v > v^u$.

EXERCICES

Pour progresser

Équations. Inéquations. Systèmes

Pour les exercices 44 à 49, dans chacun des cas, résolvez l'équation, l'inéquation ou le système proposé.

44 **a)** $x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} + 2 = 0$. **b)** $x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} + 2 \geqslant 0$.

45 **a)** $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2 = 0$. **b)** $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2 \leqslant 0$.

46 • $3\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x}} - 4 < 0$.

47 • $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^4 = y^8 \end{cases}$.

48 • $\begin{cases} x^{\frac{3}{4}} - 3y^{\frac{2}{3}} = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{4}{3}} = 648 \end{cases}$.

49 • $\begin{cases} x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}} = 0 \\ x^{\frac{3}{4}} - 32y^{\frac{1}{4}} = 0 \end{cases}$.

Limites

Pour les exercices 50 à 54, dans chacun des cas, étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction f.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 151.

50 **a)** $f(x) = e^{x\ln 2} - x^2$. **b)** $f(x) = \dfrac{e^{x\ln x}}{x^2}$.

51 **a)** $f(x) = e^{(3-x)\ln x}$. **b)** $f(x) = x^2e^{-x} - x$.

52 **a)** $f(x) = xe^{\sqrt{x}} - x$. **b)** $f(x) = e^{\sqrt{x}} - x^2$.

53 **a)** $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. **b)** $f(x) = x\left[e^{\frac{1}{x}\ln 2} - 1\right]$.

54 **a)** $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(x^3 - 7x + 1)$.

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right)\ln x$.

Études de fonctions

55 f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}.$$

1. a) Vérifiez que f est dérivable pour tout réel $x > 0$ et que $f'(x) = 1 - x^{-\frac{2}{3}}$.

b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

2. a) Quelle est la limite de :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

lorsque x tend vers zéro ?

b) Déduisez-en que la fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$.

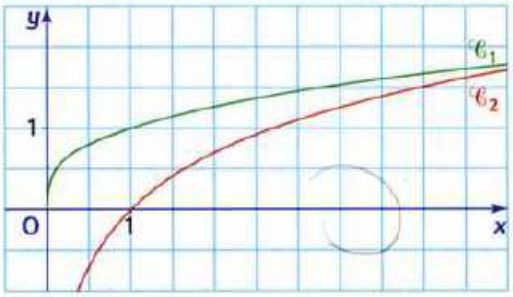
3. a) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

b) Dressez le tableau de variations de f.

4. Construisez dans un repère orthonormal la courbe représentative de f.

56 On a tracé dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x^{\frac{1}{3}} \text{ et } f_2(x) = \ln x.$$



Il semble que ces courbes aient au moins un point commun. Est-ce vrai ?
Et si oui, combien y a-t-il de points d'intersection ?
Où sont-ils situés ?
Le but de l'exercice est de répondre à ces questions.
On note f la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - \ln x.$$

1. Précisez les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

2. a) Calculez $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

b) Déduisez-en que le signe de $f'(x)$ est celui de :

$$x^{\frac{1}{3}} - 3.$$

3. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

4. a) Démontrez alors que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont deux points communs, et seulement deux, d'abscisses respectives α et β.

b) Trouvez pour α et β, à l'aide de votre calculatrice, un encadrement d'amplitude 1.

c) Étudiez alors la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

57 BAC f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en 0. Interprétez graphiquement ces résultats.

2. Étudiez les variations de f.

3. Donnez une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. Tracez T puis $\mathscr{C}$.

58 BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^3}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Étudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Interprétez graphiquement les résultats.

2. Étudiez les variations de f.

3. Donnez une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. Tracez T puis $\mathscr{C}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 151.

59 • BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x2^{-x}.$$

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^{-1}2^x$.

1. Étudiez les variations des fonctions f et g.

2. Étudiez les limites de f et g aux bornes de leur ensemble de définition (vous pourrez poser $v = x\ln 2$).

3. $\mathscr{F}$ est la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal (unité graphique : 4 cm) ;
$\mathscr{G}$ est celle de g.

a) Trouvez une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{F}$ au point A d'abscisse $\frac{2}{\ln 2}$.

b) Tracez $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ et T après avoir comparé les positions respectives de $\mathscr{F}$ et T.

60 • BAC f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. **a)** Étudiez les variations de f sur I.

b) Déterminez les limites de f aux bornes de I.
On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. On se propose dans la suite de l'exercice d'étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

2. Écrivez une équation de la droite T.

3. On note g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = x - 1 - f(x).$$

a) Vérifiez que pour tout x dans I :

$$g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}[\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)].$$

b) Calculez $g'(1)$ et étudiez le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

c) Calculez $g(1)$ et, à l'aide du sens de variation de la fonction g, étudiez le signe de $g(x)$.

d) Déduisez-en la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

4. Tracez T puis $\mathscr{C}$.

61 • À chaque entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie par $f_n(x) = \frac{x^n + 1}{4x^2}$, $x > 0$.

1. Étudiez les fonctions f_1 et f_2 puis tracez leurs courbes représentatives.

2. Étudiez, lorsque $n \geqslant 3$, la fonction f_n. On désigne par x_n la valeur de x pour laquelle f_n a un minimum.
Tracez la courbe représentant la fonction f_3.

3. Le but de cette question est d'encadrer le nombre x_n.

a) Comparez, lorsque $n \geqslant 4$, les nombres 1 et x_n.
(Discutez selon les valeurs de n.)

b) Prouvez que $x_n - \frac{1}{2}$ a le même signe que $x_n^n - \frac{1}{2^n}$.

c) On note $\mathscr{S}$ la fonction définie par :

$$\mathscr{S}(x) = 2^{x+1} - x + 2, \quad x > 0.$$

Étudiez cette fonction, déduisez-en qu'elle est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$.
Prouvez ensuite que pour tout $n > 4$, $\frac{1}{2} < x_n < 1$.

62 • **Comparaison de 2^x et x^2**

On veut représenter sur un même graphique les fonctions f et g définies par $f(x) = 2^x$ et $g(x) = x^2$, et comparer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Pour cela, on considère la fonction h définie par :

$$h(x) = x\ln 2 - 2\ln|x|.$$

1. Démontrez que pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) \geqslant g(x) \text{ équivaut à } h(x) \geqslant 0.$$

2. Étudiez les variations de h et ses limites en $-\infty$, 0, $+\infty$.

3. Démontrez que l'équation $h(x) = 0$ a trois solutions :

$$a \in \left]0 ; \frac{2}{\ln 2}\right[; \quad b \in \left]\frac{2}{\ln 2} ; +\infty\right[; \quad c \in \left]-1 ; -\frac{3}{4}\right[.$$

4. En remarquant que $2 \in \left]0 ; \frac{2}{\ln 2}\right[$ et que $4 \in \left]\frac{2}{\ln 2} ; +\infty\right[$, vérifiez que 2 et 4 sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ restreintes à $[0 ; +\infty[$.

5. Donnez une valeur approchée de c à 10^{-2} près.

6. Précisez les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et représentez ces courbes.

63 ⋮ Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = x(\ln x)^n$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$ et on note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 5 cm).

1. Démontrez que la fonction f_n est continue en 0 mais qu'elle n'est pas dérivable en $x = 0$.

2. Dans cette question, on suppose $n = 1$.
Étudiez les variations de f_1 et construisez $\mathscr{C}_1$.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 2$.

a) Étudiez les variations de f_n dans chacun des cas suivants :
• n est pair ; • n est impair.

b) Dans chacun des deux cas précédents, dressez le tableau de variations de f_n.

4. a) Démontrez que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par trois points fixes.

b) Étudiez pour tout réel x, $x \geqslant 1$, les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

5. Construisez $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$.

64 : BAC f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Démontrez que la fonction f est dérivable en 0.

Aide. Posez $\frac{1}{x} = X$.

2. Étudiez les variations de f et sa limite en $+\infty$.

3. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse x_0.

a) Écrivez une équation de la tangente T en x_0 à $\mathscr{C}$.

b) Déterminez x_0 pour que T passe par l'origine du repère orthonormal choisi.

4. Pour la valeur x_0 trouvée, tracez T puis $\mathscr{C}$ (unité graphique : 6 cm).

65 : BAC n est un entier naturel et f_n est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathscr{C}_n$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

1. Vérifiez que f_n est bien définie en 0 et en 1.

2. Démontrez que $\mathscr{C}_0$ est un demi-cercle de rayon $\frac{1}{2}$. Précisez son centre.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 1$.

a) Pour tout x dans l'intervalle $]0 ; 1[$, calculez $f_n'(x)$ et démontrez que $f_n'(x)$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x$ ont le même signe.

b) La fonction f_n est-elle dérivable en 0 ? en 1 ?

c) Donnez le tableau de variations de f_n. (On ne demande pas le calcul du maximum de f_n.)

4. a) Étudiez le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $n \geqslant 1$.

b) Déduisez-en les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

c) Tracez dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_0$.

66 : a est réel strictement supérieur à 1.
On se propose de démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$x^a - 1 \geqslant a(x-1).$$

Pour cela, on note f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{a\ln x} - ax + a - 1.$$

(On rappelle que pour tout réel $x > 0$, $e^{a\ln x} = x^a$.)

1. a) Calculez pour tout $x > 0$, $f'(x)$.

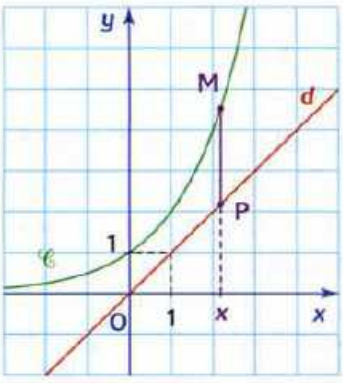
b) Déduisez-en le sens de variation de f et donnez le tableau de variations.

2. Démontrez que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 0$ et concluez.

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

67



Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on a tracé la droite d d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = 2^x$. À tout réel x, on associe le point M de $\mathscr{C}$ et le point P de d de même abscisse x. Démontrez que la distance MP est minimale si et seulement si :

$$x = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}.$$

68 • f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. De l'étude de cette fonction, déduisez-en que pour tout entier naturel n non nul, $n^{\frac{1}{n}} \leqslant 3^{\frac{1}{3}}$.

69 • f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^3e^{-x} - 1$. De l'étude de cette fonction, déduisez la position relative des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^3$ définies sur $[0 ; +\infty[$.

70 • a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
Déterminez l'ensemble des réels x pour lesquels $x^a < x^b$.

Problèmes

71 *Thèmes : Étude d'une famille de fonctions. Application à la résolution d'une équation*

Le but de ce problème est de déterminer selon les valeurs de l'entier naturel non nul n, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $x^n = e^x$.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$ et $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A. Étude d'une famille de fonctions

1. Dans cette question, $n = 1$. Étudiez les variations de $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$ et construisez $\mathscr{C}_1$.

2. Dans cette question, n est supérieur ou égal à 2.

a) Étudiez les variations de f_n ainsi que ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ lorsque :
- n est pair ;
- n est impair.

b) Dans chaque cas, dressez le tableau de variations de la fonction f_n.

3. Comparez les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$ sur $[0 ; +\infty[$ et celles de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+2}$ sur $]-\infty ; 0]$.

4. Représentez $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

B. Résolution de l'équation (E)

1. Pourquoi l'équation (E) est-elle équivalente à $f_n(x) = 1$?

2. **a)** À partir des tableaux de variations de la question A. 2. justifiez l'affirmation suivante :
« déterminer le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 1$ revient à comparer 1 et $f_n(n) = \dfrac{n^n}{e^n}$ ».

b) Vérifiez que $f_n(n) = e^{n \ln n - n}$.

3. On note g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$g(x) = e^{x \ln x - x}.$$

a) Étudiez les variations de g ainsi que ses limites en $+\infty$ et en zéro.

b) Dressez le tableau de variations de g.

4. **a)** Déterminez selon les valeurs de n, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

b) Application
Donnez à 10^{-2} près par excès, les solutions de l'équation $x^3 = e^x$.

72 *Thèmes : Étude d'une fonction. Résolution d'une équation*

a est un réel strictement supérieur à 1, x un réel de $I =]0 ; +\infty[$. Pour a donné, le but de ce problème est de trouver le nombre de solutions de l'équation
$(E_a) : a^x = x^a$ équivalente à $x \ln a - a \ln x = 0$.

A. Partie préliminaire

On note φ la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :
$$\varphi(x) = 1 - \ln x + \ln[\ln x].$$

1. Démontrez que pour tout réel $x > 1$,
$$\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x \ln x}.$$

2. Dressez le tableau de variations de φ et déduisez-en que pour tout réel $x \geqslant e$, $\varphi(x) \leqslant 0$.

B. Résolution de l'équation (E_a)

1. **Dans cette question, $a = e$ et $x \in I$.**

a) Construisez la courbe d'équation $y = \ln x$ et la tangente au point A d'abscisse e.

b) Exploitez la figure précédente pour résoudre l'équation (E_e).

2. **Dans cette question, $a > 1$ et $a \neq e$.**
f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = x \ln a - a \ln x.$$

a) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

b) Vérifiez que $f\left(\dfrac{a}{\ln a}\right) = a\varphi(a)$.

c) Déduisez-en de l'étude précédente le nombre de solution de l'équation (E_a).

3. **Application**
Étudiez les positions relatives des courbes représentatives des fonctions :
$$x \mapsto 3^x \text{ et } x \mapsto x^3 \text{ avec } x \geqslant 0.$$

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant chaque fois votre réponse.

73 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x3^{-x}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. [a] $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. [b] $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. [c] $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. [d] $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel x :

[a] $f'(x) = (1 - x\ln 3)e^{-x\ln 3}$. [b] $f'(x) = (1 - x)3^{-x}$. [c] $f'(x) = (1 - x\ln 3)3^{-x}$.

3. [a] Pour tout réel x, $f(x) \leqslant \frac{1}{3}$.

[b] L'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ a deux solutions et deux seulement.

[c] La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$.

4. g est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(f(x))$.

[a] Pour tout x de I, $g(x) < 0$. [b] $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

[c] L'équation $g(x) = -1$ a deux solutions dans I.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre réponse.

74 **1.** La fonction $f : x \mapsto 5^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) + \ln 5 f(x) = 0.$$

2. La fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln\sqrt{x})$ est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$.

3. L'inéquation $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x > 3$ a pour solution l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{-2\ln 3}{\ln 2}\right[$.

4. f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. La droite d'équation $y = \ln 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

5. a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors pour tout réel x strictement positifs :

$$x^a < x^b.$$

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

75 **1. Démonstration de cours**

Pré-requis. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Démontrez que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 0$.

2. Application

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}\ln x$.

Justifiez chacune des affirmations suivantes :

a) f a pour tableau de variations :

x	0		e^3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{3}{e}$	↘	0

b) L'équation $f(x) = 0$ a, dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, pour unique solution $x = 1$.

c) La tangente à la courbe au point d'abscisse $x = \sqrt[4]{e^3}$ passe par l'origine du repère.

7 Limites de suites

1598

Les suites sont d'abord connues pour calculer des sommes infinies de nombres, appelées séries.
Par exemple, dans la somme :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \ldots$$

si on pose $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + x$, $s_3 = 1 + x + x^2$, etc., la somme cherchée est la limite de la suite (s_n). En 1598, Viète prouve que cette somme est égale à $\frac{1}{1-x}$.

À la Renaissance, les suites sont utilisées pour calculer par approximations successives les solutions d'équations de la forme $f(x) = x$.

Puis des Bernoulli, Newton, Euler (XVIII^e s.), Fourier (XIX^e s.), cherchent à écrire des fonctions sous forme de séries. Ainsi Newton donne le développement de $\ln(1+x)$, de $(1+x)^s$ où s est un réel, de

$$e(x) = 1 + x + \frac{x}{2!} + \frac{x}{3!} + \cdots$$

Mais certains résultats obtenus sont contradictoires et font peu à peu prendre conscience que la notion intuitive de limite doit être mathématiquement définie. Cela sera fait dans les siècles suivants, en particulier par Cauchy, Abel, Dirichlet, qui veulent fonder l'Analyse sur des raisonnements aussi rigoureux que ceux de l'Arithmétique.

François Viète
1540 – 1603

À LA MÊME ÉPOQUE

COMMERCE

Les premières compagnies de commerce sont fondées. La Compagnie anglaise des Indes orientales et son homologue hollandaise stimuleront le développement des empires coloniaux européens en Asie.

CIVILISATION

Le règne du chah d'Iran Abbas I^er le Grand marque l'apogée de la dynastie séfévide. La capitale Ispahan devient un grand foyer culturel.

PEINTURE

Le peintre Velasquez naît en 1599 à Séville. Il s'imposera comme le peintre majeur du XVII^e siècle espagnol.
Ci-dessous, *Le Triomphe de Bacchus*, dit « *les Buveurs* ».

1 Limite d'une suite : rappels

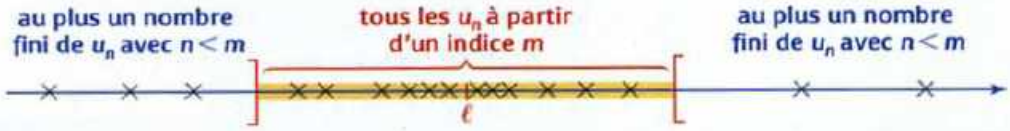
1.1 Limite réelle (ou finie)

DÉFINITION 1

Dire qu'un réel ℓ est **limite d'une suite** (u_n) signifie que **tout** intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain indice.**

Note
On peut, dans les définitions de cette page, remplacer l'expression « à partir d'un certain indice » par « sauf un nombre fini d'entre eux ».

Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n « autour » de ℓ.



On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et on dit que la suite (u_n) est **convergente de limite** ℓ, ou qu'elle **converge vers** ℓ.

Les suites définies par $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, $w_n = \dfrac{1}{n^3}$, $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0.

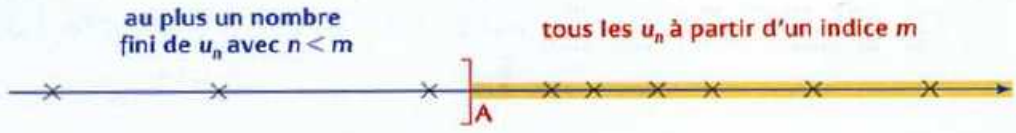
1.2 Limite infinie

DÉFINITION 2

Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ signifie que **tout** intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain indice.**

Note
L'écriture :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
signifie que tout intervalle $]-\infty ; A[$ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain indice.

Cette définition traduit l'idée que les termes u_n finissent par dépasser n'importe quel réel A aussi grand soit-il.



On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Les suites définies par $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$, $t_n = \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.

1.3 La suite géométrique $u_n = q^n$

THÉORÈME 1

Note
Si $q = 1$, (q^n) est la suite constante de valeur 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

q est un réel. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$. Si $q \leqslant -1$, alors la suite n'a pas de limite.

EXEMPLES

- La suite géométrique définie par $u_n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ a pour limite 0 car $-1 < \dfrac{4}{5} < 1$.
- La suite géométrique définie par $u_n = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ a pour limite $+\infty$ car $\dfrac{5}{4} > 1$.
- La suite géométrique $(-2)^n$ de termes successifs 1 ; −2 ; 4 ; −8 ; 16... n'a pas de limite.

COMPRENDRE

Limite d'une suite positive

Une suite convergente dont tous les termes sont positifs a une limite positive.

En effet, raisonnons par l'absurde.

Supposons que la suite (u_n), avec pour tout n, $u_n \geqslant 0$, converge vers un réel ℓ strictement négatif.

Choisissons un intervalle ouvert de centre ℓ qui ne contient pas 0.

Il ne contient aucun terme de la suite, ce qui est impossible puisque ℓ est la limite de la suite.

La limite ne peut donc être strictement négative : elle est positive.

Remarque. Une suite de réels **strictement positifs** peut avoir une limite nulle.

Exemple.

La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ a une limite nulle.

Analogie : limites de suites et de fonctions

Pour une fonction f et une suite (u_n), l'idée de limite en $+\infty$ est la même.

- **Limite en $+\infty$** : les nombres $f(x)$ et les nombres u_n finissent par dépasser n'importe quel réel M aussi grand soit-il.
- **Limite réelle ℓ** : les nombres $f(x)$ et les nombres u_n finissent par « s'accumuler » autour de ℓ.

Mais pour f, la variable x est réelle, pour (u_n) la variable n est un naturel. Ainsi, on dit $f(x) > M$ pour tout **réel** x supérieur à un certain **réel** A. Et on dit $u_n > M$ pour tout **entier** n supérieur à un certain **entier** m.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Trouver un indice

ÉNONCÉ

1) La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$ a pour limite 3.

Trouvez un indice n_0 à partir duquel, lorsque $n > n_0$, u_n est dans l'intervalle $]2{,}99\,;\,3{,}01[$.

2) La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = (1{,}1)^n$ a pour limite $+\infty$.

Trouvez un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, $u_n > 10^5$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) L'appartenance de u_n à l'intervalle $]2{,}99\,;\,3{,}01[$ se traduit par $2{,}99 < \frac{3n-1}{n+1} < 3{,}01$, soit encore par $-0{,}01 < \frac{3n-1}{n+1} - 3 < 0{,}01$, ou encore par $-\frac{1}{100} < \frac{-4}{n+1} < \frac{1}{100}$ [1].

En multipliant par le réel positif $100(n+1)$, [1] équivaut à $-(n+1) < -400 < n+1$. Or $-400 < n+1$ est vraie pour tout naturel n. La double inégalité **[1]** équivaut à $n > 399$. Il en résulte que $n_0 = 399$ (ou tout entier supérieur à 399).

L'intervalle $]2{,}99\,;\,3{,}01[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir de l'indice 400.

2) « $(1{,}1)^n > 10^5$ » équivaut à « $n \ln 1{,}1 > \ln 10^5$ » et donc à « $n > \frac{\ln 10^5}{\ln 1{,}1}$ » car $\ln 1{,}1 > 0$. La partie entière du nombre $\frac{\ln 10^5}{\ln 1{,}1} = \frac{5 \ln 10}{\ln 1{,}1}$ est 120.

Donc, pour tout $n \geqslant 121$, $(1{,}1)^n > 10^5$ (cela signifie que tous les termes de la suite dont l'indice est supérieur à 120 sont tous supérieurs à 10^5).

➔ EXERCICES 1 et 2

EXERCICE RÉSOLU 2 Prouver la convergence d'une suite

ÉNONCÉ

Démontrez que la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}$ pour tout naturel non nul n, est convergente. Précisez sa limite.

SOLUTION COMMENTÉE

$u_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$; on reconnaît, entre parenthèses, la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $u_n = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

D'où $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

➔ EXERCICE 4

2 Théorèmes sur les limites

2.1 Suites du type $u_n = f(n)$. Rappels

THÉORÈME 2

Note
Voir l'exercice résolu 3.

f est une fonction définie sur un intervalle $]b\,;+\infty[$ et (u_n) est la suite définie par $u_n = f(n)$. La lettre ℓ désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

2.2 Suites du type $u_n = f(v_n)$. Compléments

THÉORÈME 3

(théorème admis)

f est une fonction définie sur un intervalle I ; (v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à I. Les lettres b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ **et si** $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = c$.

EXEMPLE La suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$ a pour limite $\sqrt{3}$.

En effet, $u_n = \sqrt{v_n}$ avec $v_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

2.3 Opérations et théorèmes de comparaison. Rappels

Les théorèmes énoncés pour les opérations sur les limites de fonctions en $+\infty$ restent valables dans le cas des suites. En particulier pour les limites d'une **somme**, d'un **produit**, d'un **quotient** de deux suites, reportez-vous au tableau page 26.
Pour la comparaison, on dispose des théorèmes suivants :

THÉORÈME 4

Note
Ces théorèmes ont été démontrés en 1re S.

(u_n), (v_n), (w_n) sont trois suites ; ℓ est un réel. **Si**, pour tout n supérieur à un certain entier m, $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ **et si** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

EXEMPLE La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ a pour limite 0.

En effet, quel que soit n dans $\mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, d'où $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

THÉORÈME 5

ℓ est un réel. **Si**, pour tout n supérieur à un certain entier m, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, **et si** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

On admettra que :

Si pour tout $n \geqslant m$, $u_n \geqslant v_n$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si pour tout $n \geqslant m$, $u_n \leqslant v_n$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

COMPRENDRE

Application du théorème 3 aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) a une limite réelle ℓ et si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$ et donc ℓ est une solution de l'équation $x = f(x)$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et f est continue en ℓ, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$, le théorème 3 permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Par ailleurs, la suite (u_{n+1}) converge évidemment vers ℓ. (En effet, cette suite est la suite $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}, \ldots$ Excepté u_0, elle prend les mêmes valeurs que la suite (u_n)).

Puisque, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$, les suites $(f(u_n))$ et (u_{n+1}) sont égales, donc elles ont même limite, c'est-à-dire $\ell = f(\ell)$.

Théorème 4

Exemple. (u_n) est la suite définie pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n^2}{2n^2 + \sin n}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ donc

$2n^2 - 1 \leqslant 2n^2 + \sin n \leqslant 2n^2 + 1$,

c'est-à-dire

$$\frac{n^2}{2n^2+1} \leqslant \frac{n^2}{2n^2 + \sin n} \leqslant \frac{n^2}{2n^2-1}.$$

On pose :

$v_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$ et $w_n = \dfrac{n^2}{2n^2-1}$.

Les suites (v_n) et (w_n) ont pour limite $\dfrac{1}{2}$.

Donc la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Formes indéterminées

Les cas de « formes indéterminées » sont les mêmes que ceux rencontrés pour les fonctions :

« $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « $\dfrac{0}{0}$ ».

Une méthode efficace pour lever une indétermination du type « $\infty - \infty$ » ou « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » est la mise en facteur du terme dominant.

→ EXERCICE RÉSOLU 4

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Étudier la limite d'une suite $u_n = f(n)$

ÉNONCÉ

Étudiez la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2 + 5n + 1}{n^2 + n}$.

POINT MÉTHODE

Si pour tout n, $u_n = f(n)$ où f est une fonction usuelle, on peut étudier la limite de f en $+\infty$ car si f a une limite ℓ (réelle ou infinie), alors (u_n) a la même limite ℓ.

SOLUTION COMMENTÉE

Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

Or $u_n = f(n)$ où f est la fonction rationnelle :

$$x \mapsto \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x}$$

dont la limite en $+\infty$ est 2 (voir le chapitre 2, *Comprendre*, page 27).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$ (théorème 2).

→ EXERCICES 11 à 14

EXERCICE RÉSOLU 4 Étudier la limite d'une suite $u_n = f(v_n)$

ÉNONCÉ

Étudiez la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{0{,}2^n - 1}{0{,}2^n + 1}$.

SOLUTION COMMENTÉE

Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = 0{,}2^n$ (v_n est donc positif).

Alors, $u_n = f(v_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = -1$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème 3 et conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.

→ EXERCICES 17 à 19

EXERCICE RÉSOLU 5 Lever une indétermination du type « $\infty - \infty$ »

ÉNONCÉ

Étudiez la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n - \sqrt{n}$.

SOLUTION COMMENTÉE

Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Le terme dominant est n (car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n} = 0$; pour les grandes valeurs de n, $\sqrt{n}$ est « négligeable » devant n). On factorise donc par n et pour tout entier $n > 0$, $u_n = n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On obtient immédiatement les limites des deux facteurs de ce produit ($+\infty$ et 1), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

→ EXERCICE 20

3 Convergence des suites monotones

3.1 Vocabulaire

DÉFINITION 3

Dire qu'une suite (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout naturel n, $u_n \leqslant M$. Ce nombre M est appelé **majorant** de la suite (u_n).
Dire qu'une suite (v_n) est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que, pour tout naturel n, $v_n \geqslant m$. m est appelé **minorant** de la suite (v_n).
Une suite à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

Interprétation graphique

Note
Voir Le *vocabulaire de la logique*, Fiche E, « Négation d'une proposition », page 451.

Remarque. Par négation, « La suite (u_n) est **non majorée** » signifie que pour tout réel A, aussi grand soit-il, on peut trouver un terme u_N tel que $u_N > A$.

EXEMPLES

- $u_n = \cos n$, la suite (u_n) est bornée car, pour tout n, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$.
- $u_n = n^2$, la suite (u_n) est minorée par 0 et non majorée.

3.2 Étude des suites monotones

THÉORÈME 6

1. Toute suite **croissante non majorée** a pour limite $+\infty$.
2. Toute suite **décroissante non minorée** a pour limite $-\infty$.

Démonstration.
Notons (u_n) une telle suite et démontrons la première partie du théorème.
• La suite étant non majorée, quel que soit le réel A et aussi grand soit-il, on peut trouver un terme u_N de la suite strictement supérieur à A.
• La suite étant croissante, pour tout entier n supérieur à N, $u_n \geqslant u_N$, donc $u_n > A$ (car $u_N > A$).
À partir de l'indice N, tous les termes de la suite sont dans $]A ; +\infty[$.
Ceci est vrai quel que soit A, ce qui prouve que (u_n) a pour limite $+\infty$ (définition 2).

Note
La deuxième partie du théorème se démontre de façon analogue.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 105

THÉORÈME 7

Toute suite **croissante majorée** est **convergente**.

Démonstration.
Notons (u_n) une telle suite croissante majorée par un nombre M. Alors il existe un majorant A plus petit que tous les autres majorants.
Tout intervalle $]A - \alpha ; A + \alpha[$, (avec $\alpha > 0$), contient au moins un terme u_p de la suite. (S'il n'en contient pas, tous les u_n sont « à gauche » de $A - \alpha$, donc $A - \alpha$ est un majorant de (u_n), ce qui est exclu car A est le plus petit d'entre eux.)

Puisque la suite (u_n) est croissante et que tous les u_n sont inférieurs à A, $]A - \alpha ; A + \alpha[$ contient tous les termes de la suite à partir de l'indice p. Ceci est vrai quel que soit α donc pour tout intervalle centré en A, donc la suite (u_n) est convergente de limite A (définition 1).

Note
• Ce théorème ne donne pas la limite, mais seulement un majorant M de cette limite.
• Sa démonstration n'est pas exigible.

On démontre de même que **toute suite décroissante minorée est convergente**.

COMPRENDRE

Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Si la suite (u_n) est croissante et majorée (ou décroissante et minorée), alors le théorème 7 dit que (u_n) a une limite réelle ℓ.
Si ce nombre ℓ, inconnu, est situé dans un intervalle I sur lequel f est continue (et donc f est continue en ℓ), on peut conclure que ℓ **est solution de** $f(x) = x$ (voir *Comprendre* p. 167).

Exemple.

$u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$; on peut prouver par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 2. Donc (u_n) a une limite ℓ (nécessairement positive).
La fonction f, définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$, est continue en ℓ car elle est continue sur $[-1 ; +\infty[$ et $\ell > 0$. Donc ℓ est une solution positive de l'équation :

$$x = \sqrt{x+1}.$$

On trouve $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

À propos des théorèmes

Chacun des théorèmes de ce chapitre n'énonce que des conditions **suffisantes**.

Exemple.

Théorème 6.1 : **il suffit** qu'une suite soit croissante et non majorée pour qu'elle ait pour limite $+\infty$, mais **il n'est pas nécessaire** qu'une suite soit croissante pour avoir comme limite $+\infty$.

→ EXERCICE RÉSOLU 7

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 6 Majorer. Minorer

ÉNONCÉ $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

Montrez que, pour tout entier $n > 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

POINT MÉTHODE

Pour encadrer une somme de *n* termes, on peut minorer cette somme par n fois le plus petit terme et la majorer par n fois le plus grand.

SOLUTION COMMENTÉE

Pour tout n, $0 < n+1 < n+2 < \ldots < 2n$. On en déduit, par passage aux inverses, que le plus petit terme de la somme $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ est $\dfrac{1}{2n}$ et que le plus grand est $\dfrac{1}{n+1}$.

Donc, $u_n \geqslant n \times \dfrac{1}{2n}$ et $u_n \leqslant n \times \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$, d'où $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

→ EXERCICES 61 et 62

EXERCICE RÉSOLU 7 Répondre à un questionnaire vrai ou faux

ÉNONCÉ Répondez par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant votre réponse.

a) Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
b) Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
c) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
d) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

SOLUTION COMMENTÉE

a) Faux. Une suite non majorée prend une infinité de valeurs « infiniment grandes » (car si elle est non majorée, quel que soit le nombre M aussi grand soit-il, il existe au moins un terme supérieur à M). Mais si elle prend aussi une infinité de valeurs inférieures à un réel fixé, elle ne peut tendre vers $+\infty$.
D'où l'idée de proposer comme contre-exemple, la suite :
$0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots, n, 0, n+1, \ldots$ c'est-à-dire la suite (u_n) définie par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$.

b) Faux. Il existe des fonctions croissantes qui n'ont pas pour limite $+\infty$, il en est de même pour les suites.
Contre-exemple : la suite définie pour tout n non nul, par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ est croissante (strictement) et pourtant, pour tout n non nul, $u_n < 1$, ce qui confirme bien que la suite ne tend pas vers $+\infty$.

c) Vrai. Dire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. La suite ne peut donc être majorée par un réel M (ce qui signifierait que l'intervalle $]M ; +\infty[$ ne contient aucun des termes de la suite).

d) Faux. Pour construire un contre-exemple, il suffit de donner à u_n des valeurs qui « grandissent vers $+\infty$ » et ne pas les ranger en ordre croissant :
$3^2, 3, 3^4, 3^3, 3^6, 3^5, 3^8, \ldots$ c'est-à-dire la suite (u_n) définie par $u_{2n} = 3^{2n+2}$ et $u_{2n+1} = 3^{2n+1}$.

4 Suites adjacentes

Présentation

Pour déterminer une grandeur inconnue L (une longueur, une aire, un nombre), une idée forte est d'encadrer de plus en plus finement la grandeur L par des grandeurs connues.

Au départ, on obtient $u_0 < L < v_0$, puis à la première étape, $u_0 < u_1 < L < v_1 < v_0$, à la n-ième étape, on obtient finalement :

$$u_0 < u_1 < \ldots < u_n < L < v_n < \ldots < v_1 < v_0.$$

On réitère le processus indéfiniment. La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et la suite des différences $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Les intervalles $[u_0 ; v_0]$, $[u_1 ; v_1]$, $[u_2 ; v_2]$, ..., $[u_n ; v_n]$, ... sont « emboîtés » et leurs longueurs tendent vers 0, si bien que les u_n et les v_n fournissent des encadrements $u_n \leqslant L \leqslant v_n$ de plus en plus fins.

DÉFINITION 4

Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** signifie que l'une est croissante, l'autre est décroissante et que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

EXEMPLE Les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul par $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

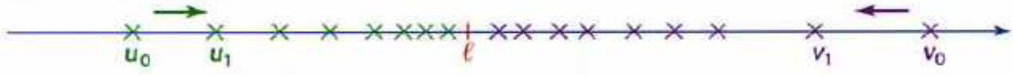
THÉORÈME 8

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**, alors :
- elles sont toutes les deux **convergentes**,
- elles ont la **même limite**.

Démonstration. Supposons la suite (u_n) croissante et donc (v_n) décroissante. Prouvons d'abord que pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$. Pour tout n, (u_n) étant croissante, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, et (v_n) étant décroissante, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. Or $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0$, et la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante. Puisqu'elle converge vers 0, tous ses termes sont positifs ou nuls et ainsi, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$ et même $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc elle converge. Soit ℓ sa limite. La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge. Soit ℓ' sa limite. Il nous reste à montrer l'égalité de ces deux limites ℓ et ℓ'. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell' - \ell$ et par hypothèse, la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0 donc $\ell = \ell'$.

Remarque. La première partie de cette démonstration prouve que si deux suites sont adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante, alors :
- pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$,
- v_0 est un majorant de la suite (u_n),
- u_0 est un minorant de la suite (v_n).



COMPRENDRE

Suites adjacentes et écritures décimales

Exemple. Écriture décimale de $\sqrt{2}$.

En utilisant le fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on obtient aisément par balayage, les encadrements successifs suivants du réel $\sqrt{2}$ (voir tableau ci-dessous).

On construit ainsi, naturellement, deux suites adjacentes de nombres décimaux :

- une suite (u_n) croissante et majorée par $\sqrt{2}$:

$u_1 = 1 ; u_2 = 1{,}4 ; u_3 = 1{,}41 ; \ldots$

- une suite (v_n) décroissante et minorée par $\sqrt{2}$:

$v_1 = 2 ; v_2 = 1{,}5 ; v_3 = 1{,}42 ; \ldots$

D'autre part, la suite des amplitudes des encadrements $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

encadrement (amplitude de l'encadrement)	
$1 < \sqrt{2} < 2$	1
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	0,1
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	0,01
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	0,001

Le nombre e

Le nombre e est la limite de deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

Pour tout entier $p > 0$,

$p! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p-1) \times p$.

➜ EXERCICE 75

VOCABULAIRE

Adjacent : qui est voisin.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 8 Étudier deux suites adjacentes

ÉNONCÉ

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} \text{ et, pour tout entier } n, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) Démontrez que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique.

Trouvez sa limite.

2) Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3) Démontrez que la suite (t_n) définie pour tout n, par $t_n = 3u_n + 8v_n$ est constante.

Que pouvez-vous en déduire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

SOLUTION COMMENTÉE

1) Pour tout entier n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3u_n + 9v_n}{12} - \frac{4u_n + 8v_n}{12} = \frac{1}{12}(v_n - u_n).$$

La suite $(v_n - u_n)$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de limite nulle puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$.

De plus, $v_0 - u_0 = 11$, donc pour tout n, $v_n - u_n > 0$.

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{3u_n}{3} = \frac{2}{3}(v_n - u_n) > 0$, donc la suite (u_n) est (strictement) croissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4} = \frac{1}{4}(u_n - v_n) < 0$, donc la suite (v_n) est (strictement) décroissante.

Puisque de plus, d'après la question **1)**, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers la même limite ℓ.

3) Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = (u_n + 2v_n) + 2(u_n + 3v_n) \\ &= 3u_n + 8v_n = t_n, \end{aligned}$$

donc la suite (t_n) est constante.

Donc, pour tout n, $t_n = t_0 = 3 \times 1 + 8 \times 12 = 99$.

Puisque les trois suites sont convergentes, les règles opératoires nous permettent d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = 3\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) + 8\left(\lim_{n \to +\infty} v_n\right),$$

soit $99 = 3 \times \ell + 8 \times \ell = 11\ell$.

Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 9.

➜ EXERCICES 39 à 45

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

- Dire qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ signifie que tout intervalle de centre ℓ, aussi petit soit-il, est un « piège » pour les termes u_n: il les contient presque tous (sauf un nombre fini d'entre eux).
- **La suite géométrique** q^n (de raison $q \neq 0$) est une **suite de référence** :
  - de limite $+\infty$, si $q > 1$,
  - de limite 0, si $-1 < q < 1$.
- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que pour tout réel M, aussi grand soit-il, l'intervalle ouvert $]M ; +\infty[$ est un « piège » pour les termes u_n : il les contient presque tous (sauf un nombre fini d'entre eux).
- **Une suite croissante** tend vers :
  - $+\infty$ si elle n'est pas majorée,
  - un réel ℓ si elle est majorée.

DES réflexes À AVOIR

- Pensez que **le calcul des premiers termes** d'une suite peut permettre de conjecturer son comportement et donc guider votre étude.

→ EXERCICE 47

- Pensez, pour étudier la limite d'une suite, à utiliser **les suites de référence** :

$$n,\ n^2,\ n^3,\ \ldots,\ \sqrt{n},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^3},\ \ldots\ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et le fait que la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, c'est respectivement la somme, le produit, le quotient des limites.

- Pensez à la possibilité d'introduire une fonction usuelle f telle que $u_n = f(n)$, car si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, ($\ell$ réel, $+\infty$ ou $-\infty$) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

→ EXERCICE RÉSOLU 3

- **Dans le cas où** $u_n = f(v_n)$ avec f une fonction usuelle :
  si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = c$.

→ EXERCICE RÉSOLU 4

- **Dans le cas où** $u_{n+1} = f(u_n)$, sous certaines conditions, la limite, si elle existe est solution de l'équation $f(x) = x$.

→ EXERCICE 46

- **Pour prouver que** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, vous pouvez :
  - encadrer (u_n) par deux suites de limite ℓ (théorème 4),
  - démontrer que $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
- **Pour prouver que** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, pensez à utiliser une suite (v_n) (de référence) de limite $+\infty$ telle qu'à partir d'un certain indice $v_n \leqslant u_n$.

DES erreurs À ÉVITER

- Ne pas conclure directement dans un cas de **forme indéterminée**. Il y en a quatre :

« $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

- Pour une suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, la croissance (ou la décroissance) de f n'entraîne pas nécessairement celle de (u_n), contrairement au cas où $u_n = f(n)$.
- Une suite convergente n'est pas nécessairement monotone.

Exemple.
La suite définie pour n non nul par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

- Une suite qui a pour limite $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

→ EXERCICE RÉSOLU 7

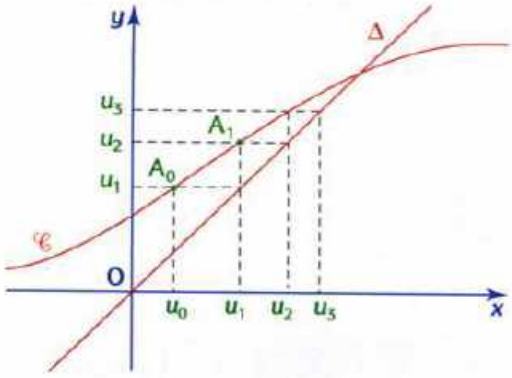
- Si une suite croissante est majorée par un réel M, elle converge, mais sa limite ℓ n'est nécessairement égale à M. Cependant $\ell \leqslant M$.

Exemple.
Pour $n > 0$, $u_n = 2 - \frac{1}{n}$. La suite est croissante, majorée par 3 (aussi par 10, par 1 000, ...) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

TD 1 Représentation graphique d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Principe

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation, dans un repère orthonormal, d'une fonction f.
Plaçons le réel u_0 sur l'axe des abscisses, puis le point A_0 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse u_0.
L'ordonnée de A_0 est $f(u_0) = u_1$.
Nous plaçons u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite Δ d'équation $y = x$: le point d'intersection de Δ et de la droite d'équation $y = u_1$ a pour abscisse u_1.
Le point A_1 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse u_1 a pour ordonnée $f(u_1) = u_2$. On « ramène » u_2 sur l'axe des abscisses, comme précédemment, à l'aide de la droite Δ, et ainsi de suite.



2 Exercice

Dans chacun des cas, représentez graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) indiquée, puis conjecturez le sens de variation et la limite éventuelle de la suite (u_n).

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

b) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$.

c) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$.

d) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

e) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + u_n$.

f) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n^2$.

TD 2 Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Étude d'un exemple

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout n, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n + 2$.

1. Nous avons, à l'aide d'un tableur, calculé les premiers termes de la suite (u_n).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	u_n	0	2	1,33333	1,55556	1,48148	1,50617	1,49794	1,50069	1,49977	1,50008	1,49997

Que pouvez-vous conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et sa convergence éventuelle ?

Note
La fonction f est monotone (décroissante) mais la suite (u_n) ne l'est pas.

2. Représentez graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x + 2$ dans un repère orthonormal et dans ce même repère, tracez la droite Δ d'équation $y = x$. À l'aide de ces deux droites, et en vous inspirant du TD 1, placez sur l'axe des abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3. Vos conjectures semblent-elles confirmées ?

3. Notons α l'abscisse du point d'intersection des deux droites tracées précédemment.

a) Calculez α puis démontrez que la suite (t_n) définie pour tout n, par $t_n = u_n - \alpha$ est géométrique.

b) Déduisez-en la limite de la suite (t_n), puis celle de la suite (u_n).

2 Étude du cas général $u_{n+1} = au_n + b$

1. Démontrez que si $a = 1$, alors la suite (u_n) est arithmétique. Précisez sa raison.

2. On suppose $a \neq 1$. Les droites $\Delta : y = x$ et $d : y = ax + b$ sont sécantes.

a) Justifiez-le et déterminez l'abscisse α de leur point commun.

b) Prouvez que la suite (t_n) définie par $t_n = u_n - \alpha$ est géométrique. Quelle est sa raison ?

3. On suppose que $a = -1$. Exprimez les six premiers termes en fonction de u_0 (supposé non nul).
Que pouvez-vous conjecturer ? Démontrez-le.

TD 3 Utilisation des suites pour approximer

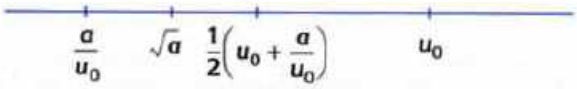
Note
Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle de notre ère) utilisait cette méthode pour calculer des racines carrées (sans parler de suites et de convergence, bien sûr).

1 Approximation de $\sqrt{a}$ par des rationnels

La méthode que l'on va suivre repose sur les remarques suivantes.

1. a est un entier naturel non nul.
Si u_0 est un entier tel que $\sqrt{a} < u_0$, alors $\dfrac{\sqrt{a}}{u_0} < 1$ et donc $\dfrac{a}{u_0} < \sqrt{a}$.
Justifiez ces affirmations.

2. En utilisant l'inégalité $(u_0 - \sqrt{a})^2 > 0$, prouvez que $\sqrt{a} < \dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{a}{u_0}\right)$.
Utilisez 1. pour établir que $\dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{a}{u_0}\right) < u_0$.
On obtient donc la disposition suivante :



Ainsi $\sqrt{a}$ est plus proche de $\dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{a}{u_0}\right)$ que de u_0. D'où l'idée de réitérer en remplaçant u_0 par $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{a}{u_0}\right)$ et ainsi de suite. On définit donc une suite (u_n) par la donnée de u_0 et par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$, pour tout naturel n.

3. On va démontrer la convergence de (u_n) vers $\sqrt{a}$. Pour cela, on pose pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Prouvez que $v_{n+1} = v_n^2$, puis déduisez-en que, pour $n \geqslant 1$:

$$v_n = (v_1)^{(2^{n-1})}.$$

Trouvez la limite de (v_n). Déduisez-en la limite de (u_n).

Aide. Introduisez la suite (w_n) définie par $w_n = \ln(v_n)$.

Note
Remarquez la rapidité de convergence.

4. **Application.** $a = 37$, $u_0 = 7$. Combien de termes de la suite (u_n) faut-il calculer pour affirmer que 6,08 est une valeur approchée de $\sqrt{37}$ à 10^{-2} près ?

2 Utilisation des suites adjacentes

a et b sont deux entiers donnés tels que $0 < a < b$. On pose $A = \sqrt{ab}$.

1. a) Montrez que A appartient à l'intervalle $[a\,;\,b]$, puis que $a < A < \dfrac{a+b}{2} < b$.

b) Montrez que $a < \dfrac{2ab}{a+b} < A$.

L'encadrement $\dfrac{2ab}{a+b} < A < \dfrac{a+b}{2}$ est donc meilleur que l'encadrement $a < A < b$.

D'où l'idée de réitérer en remplaçant a par $a_1 = \dfrac{2ab}{a+b}$ et b par $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$, et ainsi de suite. On définit donc deux suites (a_n) et (b_n) de la manière suivante :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \text{ et pour tout naturel } n,\ a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}.$$

2. a) Vérifiez que la suite (a_nb_n) est constante et que $a_n \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b_n$.

b) Déduisez-en que la suite (b_n) est décroissante, puis que la suite (a_n) est croissante.

Nous avons donc la situation suivante :

$$a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0 = b.$$

3. a) Vérifiez que $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant b_{n+1} - a_n$ et que $b_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

b) Déduisez-en que pour tout naturel n, $0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}(b_0 - a_0)$, puis que la suite $(b_{n+1} - a_{n+1})$ converge vers zéro. Que pouvez-vous en conclure pour les suites (a_n) et (b_n) ?

c) Justifiez les inégalités $0 \leqslant \sqrt{ab} - a_n \leqslant b_n - a_n$ et $0 \leqslant b_n - \sqrt{ab} \leqslant b_n - a_n$.

Aide. Utilisez **2. a.**

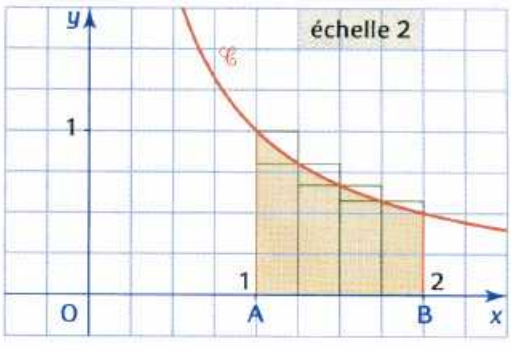
Déduisez-en que (a_n) et (b_n) convergent toutes deux vers $\sqrt{ab}$.

Note
Remarquez la rapidité de convergence.

4. Application. À l'aide d'une calculatrice programmable ou bien d'un ordinateur, fabriquez un petit programme pour calculer les valeurs successives de u_n et v_n. Utilisez ce qui précède pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-4} de $\sqrt{6}$.

TD 4 Un calcul d'aire

On se propose de calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie D du plan délimitée, dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm) par la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. D est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;y)$ telles que $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.



Sur l'axe des abscisses, on place les points A et B d'abscisses respectives 1 et 2. Un entier naturel n supérieur ou égal à 2 étant fixé, on partage le segment [AB] en n segments isométriques. À partir de chacun des n segments obtenus, on construit deux rectangles dont l'un des deux autres sommets appartient à la courbe $\mathcal{C}$. On obtient ainsi n rectangles « inférieurs » à la courbe et n rectangles « supérieurs ».

On note s_n l'aire totale des rectangles « inférieurs » et S_n l'aire totale des rectangles « supérieurs ».
On obtient ainsi deux suites de réels (s_n) et (S_n) qui encadrent l'aire $\mathcal{A}$ cherchée.

1. Démontrez que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{et que} \quad S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

2. Démontrez que la suite (s_n) est croissante et que la suite (S_n) est décroissante.

3. Démontrez que la suite $(S_n - s_n)$ tend vers 0. Que pouvez-vous en conclure pour les suites (s_n) et (S_n) ?

4. a) Déterminez un entier p tel que s_p soit une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près et un entier q tel que s_q soit une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-4} près.

b) À l'aide d'une calculatrice programmable ou d'un tableur, trouvez s_{50} et s_{500}.

Commentaire. Le nombre $\mathcal{A}$ calculé est le logarithme népérien du nombre 2, $\mathcal{A} = \ln 2$.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. et 2. Limite d'une suite

1 La suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ a pour limite 0. Trouvez un entier n_0 tel que si $n > n_0$, alors u_n est dans l'intervalle ouvert $]-10^{-3} ; 10^{-3}[$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 165.

2 La suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = n\sqrt{n}$ a pour limite $+\infty$.
Trouvez un entier n_0 tel que si $n > n_0$, alors u_n est dans l'intervalle ouvert $]10^6 ; +\infty[$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 165.

3 Déterminez, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$. **b)** $u_n = \dfrac{10^n}{10{,}1^n}$.

4 (u_n) est la suite définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Calculez u_n pour tout naturel n, puis déduisez-en la limite de la suite (u_n).

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 165.

5 La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{3}$. On sait qu'elle converge vers 0.
À partir de quel indice, obtient-on $u_n < 10^{-4}$?

6 La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2. On sait qu'elle a pour limite $+\infty$.
À partir de quel indice, obtient-on $u_n > 10^{15}$?

7 La suite (u_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

1. Calculez les six premiers termes.

2. Vérifiez, pour tout $n \geqslant 1$, que $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ puis déduisez-en la limite de la suite.

☞ **Note.** $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ lorsque $n \geqslant 1$.

8 La suite (u_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}.$$

Vérifiez, pour tout $n \geqslant 1$, que $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ puis déduisez-en la limite de la suite (u_n).

9 (u_n) est la suite définie par :

$$u_n = n + 1 - \cos n.$$

Prouvez, pour tout naturel n, que :

$$n \leqslant u_n \leqslant (n+2),$$

puis déduisez-en la limite de la suite (u_n).

10 (u_n) est la suite définie par :

$$u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Donnez des valeurs approchées des onze premiers termes.

2. Démontrez que si n est un entier supérieur à 30, alors $u_n \geqslant 2^n$, puis déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Pour les exercices 11 à 22, étudiez, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n) en précisant les théorèmes utilisés.

11 **a)** $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$. **b)** $u_n = \dfrac{5n-3}{3n-5}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 167.

12 **a)** $u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$. **b)** $u_n = \dfrac{n}{4} - 2 + \dfrac{2n}{n^2+1}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 167.

13 **a)** $u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 7}{n^2 + n + 1}$. **b)** $u_n = \dfrac{-3n^2 + 2n + 4}{2(n+1)^2}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 167.

14 **a)** $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2+1}$. **b)** $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+7}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 167.

15 **a)** $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$. **b)** $u_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n+7}}$.

16 **a)** $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi + 1}{2n+1}\right)$. **b)** $u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$.

17 **a)** $u_n = e^{1-n}$. **b)** $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 167.

18 **a)** $u_n = \frac{e^n - 1}{2e^n + 3}$. **b)** $u_n = \frac{e^{-n} + 1}{e^{-n} + 3}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 167.

19 **a)** $u_n = e^{-n}$. **b)** $u_n = \ln(2 + e^{-n})$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 167.

20 **a)** $u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$. **b)** $u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 2}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 167.

21 **a)** $u_n = n^2\left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$.

b) $u_n = \sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2}$.

☞ **Aide.** Utilisez l'expression conjuguée.

22 **a)** $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$.

b) $u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}}$.

☞ **Aide.** Utilisez l'expression conjuguée.

23 Trouvez la limite de chacune des suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies, pour n non nul, par :

$$u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}; \quad v_n = \frac{u_n}{n};$$
$$w_n = u_n - n; \quad t_n = \frac{v_n - 1}{w_n - 1}.$$

24 Trouvez la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies, pour n non nul, par :

$$u_n = \frac{3n^2 - 4}{n + 1}; \quad v_n = \frac{u_n}{n}; \quad w_n = u_n - 3n.$$

25 (u_n) et (v_n) sont les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \text{ et } v_n = \frac{1}{u_n}.$$

1. Vérifiez que pour tout entier n, $u_n > 0$.
2. **a)** Démontrez que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

b) Calculez v_n, puis u_n, en fonction de n.

3. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

26 (u_n) et (v_n) sont les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \text{ et } v_n = u_n + 3.$$

1. **a)** Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculez v_n, puis u_n, en fonction de n.

2. On note $S_n = v_0 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + \cdots + u_n$.

a) Calculez S_n et S'_n en fonction de n.

b) Déduisez-en les limites des suites (S_n) et (S'_n).

27 ZOOM SUR... **le théorème 5**

1. Pourquoi précise-t-on « pour tout n supérieur à un certain entier m » ?
2. En quoi ce théorème est-il une conséquence du théorème 4 ?
3. Rédigez une démonstration de ce théorème 5.

3. Suites monotones et convergence

28 Dans chacun des cas suivants, déterminez graphiquement les premiers termes de la suite proposée, puis conjecturez son sens de variation et sa limite éventuelle.

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

29 La suite (u_n) est définie pour tout entier $n > 0$, par $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$.

Parmi les réels 0 ; 6 ; 4,999 99 et 5, quels sont ceux qui majorent cette suite ?

30 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}.$$

1. Prouvez que 1 est un majorant de (u_n).
2. Prouvez que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n < v_n$.
3. De ces deux renseignements, lequel est le plus intéressant ?

31 ZOOM SUR... **le théorème 6**

1. **a)** Quel renseignement tire-t-on de l'hypothèse « la suite (u_n) est non majorée » ?

b) Pourquoi, à partir de ce renseignement, l'hypothèse « (u_n) est croissante » permet-elle de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$?

2. Démontrez la proposition 2. du théorème, à savoir « toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$. »

32 Pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) est définie par :

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

2. **a)** Simplifiez l'écriture de u_n.

b) Que peut-on en conclure quant à la limite de la suite (u_n) ?

Pour les exercices 33 à 36, précisez dans chacun des cas, si la suite (u_n) proposée est majorée, minorée, bornée.

33 **a)** $u_n = \sin n$. **b)** $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

c) $u_n = \frac{1}{n+2}$. **d)** $u_n = \frac{1}{1+n^2}$.

34 **a)** $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. **b)** $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$.

c) $u_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$.

35 **a)** $u_n = 2^n$. **b)** $u_n = n\sqrt{3} - 2$.

c) $u_n = n^2 + n - 1$.

36 **a)** $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$. **b)** $u_n = n + \cos n$.

c) $u_n = (-1)^n \times n^2$.

37 (u_n) est la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$.

1. La suite (u_n) est-elle majorée par $\frac{3}{2}$?

2. Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

3. Quel théorème permet de conclure que la suite (u_n) converge vers ℓ ? Déterminez ℓ.

38 La suite (u_n) est définie pour $n \geqslant 4$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}.$$

Prouvez que (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

☞ **Aide.** **Dressez d'abord le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 6$.**

4. Suites adjacentes

39 Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n > 0$, par :

$$u_n = -\frac{1}{2n+4} \text{ et } v_n = \frac{1}{n+1}$$

sont adjacentes puis trouvez leur limite commune.

☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 8, page 171.**

40 Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n > 0$, par :

$$u_n = \frac{n-1}{n} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

sont adjacentes puis trouvez leur limite commune.

☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 8, page 171.**

41 Indiquez dans chaque cas, en justifiant, si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

a) (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$ et $v_n = \frac{2n-3}{n+1}$.

b) (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = 3 - \frac{5}{n}$ et $v_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 8, page 171.**

42 Les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont-elles adjacentes ?

☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 8, page 171.**

43 Les suites (u_n) et (v_n) définies pour n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{et } v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

sont-elles adjacentes ?

☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 8, page 171.**

44 Les suites (u_n) et (v_n) définies pour n non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont-elles adjacentes ?

☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 8, page 171.**

45 (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Démontrez par récurrence que $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$.

2. Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et trouvez leur limite commune.

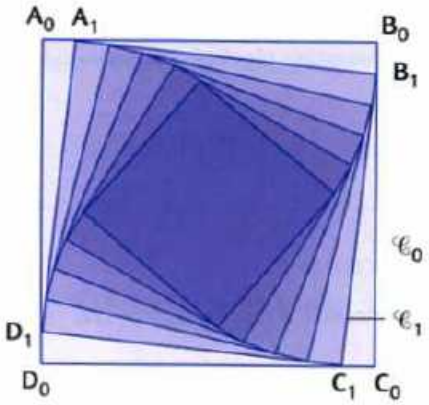
☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 8, page 171.**

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

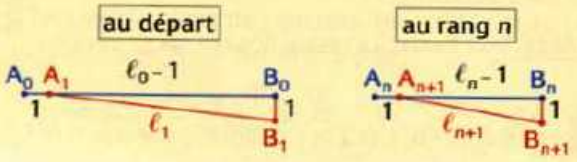
46 Étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

$\mathscr{C}_0$ est un carré $A_0B_0C_0D_0$ tel que $A_0B_0 = 10$.
On construit le carré $A_1B_1C_1D_1$ comme l'indique la figure : ses sommets A_1, B_1, C_1, D_1 sont sur les côtés de $\mathscr{C}_0$ et $A_0A_1 = 1$.
À partir de $\mathscr{C}_1$, on construit le carré $\mathscr{C}_2$ de la même façon que celle qui a permis d'obtenir $\mathscr{C}_1$ à partir de $\mathscr{C}_0$, et ainsi de suite, en admettant que le procédé puisse se poursuivre indéfiniment.
On note ℓ_n la longueur du côté du carré $\mathscr{C}_n$.



Objectif : étudier la suite (ℓ_n).

1. Comprenons comment se fait la construction : chaque carré est construit à partir du précédent. La suite (ℓ_n) est donc une suite récurrente.



a) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout entier n :

$$1 < \ell_{n+1} < \ell_n ?$$

b) Pourquoi peut-on conclure que la suite (ℓ_n) est convergente ?

c) Prouvez que $\ell_{n+1} = \sqrt{1 + (\ell_n - 1)^2}$.

2. Reste à déterminer la limite ℓ de la suite (ℓ_n). Une méthode générale est d'introduire la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Précisez cette fonction f.

b) Prouvez que ℓ est solution (positive) de l'équation $x = \sqrt{1 + (x-1)^2}$ (voir *Comprendre*, page 167).

c) Résolvez et concluez que $\ell = 1$.

☞ **Aide.** **Prouvez d'abord que l'équation équivaut à :**

$$x^2 = 1 + (x-1)^2,\ x \geqslant 0.$$

47 Étude simultanée de deux suites

a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Objectif : étudier simultanément les suites (u_n) et (v_n).

1. Pour comprendre la situation, une bonne idée consiste souvent à chercher les premiers termes.
Puisque a et b ne sont pas précisés, on prend un cas particulier, par exemple $a = 1$ et $b = 3$.

a) Calculez les premiers termes de (u_n) et (v_n).

b) Placez ces termes sur un axe gradué.

2. En effectuant les calculs précédents, on peut remarquer que tous les termes calculés sont positifs et que le produit u_nv_n est constant (égal à ab).

a) Prouvez que pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) Justifiez que pour tout n, $u_nv_n = ab$.

3. Il semble que les deux suites sont adjacentes.
Pour le prouver, une première étape est l'étude de leur monotonie.

Justifiez que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

4. Pour tout n, u_n et $u_n + v_n$ sont positifs (voir **2.**), donc les signes de $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ dépendent de celui de $(v_n - u_n)$.

Calculez $v_{n+1} - u_{n+1}$ et déduisez-en la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

5. Il nous reste à prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les calculs et la représentation faits en **1.** nous permettent d'espérer trouver une suite (w_n) telle que pour tout n, $0 < v_n - u_n < w_n$.

a) Prouvez que pour tout n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

b) Déduisez-en par récurrence que pour tout n,

$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).$$

c) Déduisez-en que les suites convergent vers la même limite ℓ.

d) En utilisant la question **2. b)**, déterminez ℓ.

Pour progresser

Convergence

48 La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

1. Démontrez, par récurrence, que pour tout n :

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

2. **a)** Démontrez que pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1).$$

b) Déduisez-en que la suite (u_n) est décroissante.

3. Est-elle convergente ?

49 La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

☞ **Note.** $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ **lorsque** $n \geqslant 1$.

1. Démontrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. Déduisez-en que la suite est majorée par 3.

3. Démontrez qu'elle est convergente.

☞ **Note.** **L'exercice 75 fournit une valeur approchée de la limite. La valeur exacte est le réel e, défini au chapitre 4.**

50 • La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1. Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

2. **a)** Démontrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Que pouvez-vous en déduire pour la suite (u_n) ?

☞ **Note.** **On démontre que la limite est** $\frac{\pi^2}{6}$.

51 • La suite (u_n) est telle que $u_0 = 1$ et il existe un réel $\ell > 0$ tel que pour tout n, $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant \frac{2}{3}(u_n - \ell)$.

Démontrez que la suite (u_n) converge vers ℓ puis déterminez un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, u_n est dans l'intervalle $]\ell - 10^{-3} ; \ell + 10^{-3}[$.

52 • Pour tout naturel p, on pose :

$$u_p = \frac{1}{(2p-1)(2p+1)}.$$

1. Trouvez deux réels a et b tels que pour tout naturel p,

$$u_p = \frac{a}{2p-1} + \frac{b}{2p+1}.$$

2. Pour tout naturel n, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Exprimez S_n en fonction de n et trouvez la limite de la suite (S_n).

53 : BAC Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}.$$

1. **a)** Prouvez que (u_n) est majorée par 4.

b) Prouvez que (u_n) est strictement croissante.

c) Déduisez-en que (u_n) converge et déterminez sa limite.

2. **a)** Prouvez que pour tout entier naturel n :

$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

b) Retrouvez le résultat du **1. c)**.

c) Étudiez la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2(4 - u_n)$.

54 : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

puis $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Étudiez la limite de la suite (S_n).

☞ **Aide.** **Utilisez la méthode de l'exercice 52.**

55 : Pour tout n non nul, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

2. **a)** Calculez $u_{2n} - u_n$.

b) Déduisez-en que $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

3. Démontrez, par récurrence, que pour tout n non nul,

$$u_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}.$$

4. La suite (u_n) a-t-elle une limite réelle ?

56 : BAC (u_n) est la suite définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

On note (v_n) la suite définie pour tout n par :

$$v_n = \ln u_n - 2.$$

1. Démontrez que la suite (v_n) est géométrique et précisez v_0 et sa raison r.

2. Déduisez-en v_n, puis $\ln(u_n)$, en fonction de n.

3. **a)** Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

b) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers e^2.

57 **A.** f est la fonction définie sur $I =]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

1. **a)** Étudiez les variations de f.

b) Déterminez les limites de f aux bornes de I.

2. Démontrez que pour tout réel $x > e$, $f(x) > e$.

B. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = a \text{ avec } a > e,$$

et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > e$.

2. Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.

3. Déduisez alors des questions précédentes que la suite (u_n) converge vers ℓ. Précisez ℓ.

Étude de limites par comparaison

Dans les exercices 58 et 59, dans chacun des cas, étudiez la limite éventuelle de la suite (u_n) en précisant les théorèmes utilisés.

58 **a)** $u_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2}$. **b)** $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2 + 1}$.

59 **a)** $u_n = \dfrac{2n + \cos n}{5n + \sin n}$. **b)** $u_n = n(2 + \cos n)$.

60 La suite (u_n) est définie pour tout entier n par :

$$u_n = \frac{2n^2}{(n^2 + 1)2^n}.$$

1. Prouvez que la suite (v_n), définie pour tout entier n, par $v_n = \dfrac{2n^2}{n^2 + 1}$ est bornée.

2. Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers 0.

61 La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}.$$

1. Démontrez que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

2. Déduisez-en la convergence de la suite (u_n).

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 169.

62 • La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 1} + \dfrac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2 + n}$.

Démontrez que (u_n) est majorée par une suite convergeant vers 0. Concluez.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 169.

63 • La suite (u_n) est définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

1. Démontrez que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. La suite (w_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$w_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{\sqrt{n}}.$$

Quelle est la limite de la suite (w_n) ?

64 • La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = 0$ et, pour tout entier n, par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Démontrez que pour tout entier naturel non nul n, u_n est un entier strictement positif.

2. Démontrez que la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Démontrez que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.

4. Que pouvez-vous en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

65 L'objectif de cet exercice est d'utiliser la convergence (et la limite éventuelle) de la suite définie pour $n > 0$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. **a)** Étudiez les variations de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et son comportement en $+\infty$. Déduisez-en que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

b) En utilisant le résultat « pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$ », prouvez que pour tout $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2. **a)** Déduisez du 1. que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$u_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n}{2n-1}\right) \leqslant u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}.$$

b) Prouvez que la suite (u_n) converge et donnez sa limite.

66 BAC 1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

a) Prouvez par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

b) Déduisez-en que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}$.

c) Prouvez que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

2. **a)** Prouvez que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\dfrac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$. (On pourra écrire $\dfrac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n - 1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b) Déduisez-en que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

Suites du type $u_{n+1} = au_n + b$

67 BAC La suite (u_n) est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1.$$

La suite (v_n) est définie pour tout entier n par :

$$v_n = u_n + 3.$$

1. Démontrez que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimez v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).
4. (S_n) est la suite définie pour tout entier n par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

a) Exprimez S_n en fonction de n.

b) Déduisez-en la limite de la suite (S_n).

68 BAC La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n :

$$2u_{n+1} = u_n - 1.$$

1. Calculez les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$.

a) Trouvez le nombre α pour lequel la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimez alors v_n et u_n en fonction de n.

c) Étudiez le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

d) Trouvez le plus petit entier n tel que u_n appartienne à l'intervalle :

$$]-1-10^{-4}\,;-1+10^{-4}[.$$

69 BAC La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}.$$

La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$, où α est un nombre réel.

1. Trouvez le nombre α pour lequel la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. La suite (v_n) est-elle convergente ?
3. Exprimez v_n en fonction de n et calculez :

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

4. Exprimez u_n en fonction de n et calculez :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Suites du type $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$

70 La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. Démontrez que pour tout entier n, $u_n > 1$.
2. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

Démontrez que (v_n) est une suite géométrique et précisez sa limite.

3. Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et trouvez sa limite.

71 • BAC La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Démontrez, par récurrence, que :

a) pour tout n, $u_n \geqslant 0$; **b)** pour tout n, $u_n < 1$.

2. Démontrez que la suite (u_n) est monotone et convergente.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Démontrez que (v_n) est une suite géométrique. Précisez la raison et le premier terme.

4. Exprimez v_n, puis u_n en fonction de n et trouvez $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
5. Trouvez un entier N tel que, pour tout $n > N$:

$$u_n > 0{,}99.$$

72 • BAC La suite (u_n) est définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}.$$

1. **a)** Représentez graphiquement la fonction f définie pour tout réel $x \neq \frac{9}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{x - 8}{2x - 9}.$$

b) Utilisez cette représentation graphique pour conjecturer le comportement de la suite (u_n).

2. Démontrez, par récurrence, que pour tout n, $u_n < 1$.
3. Démontrez que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge.
4. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

Démontrez que, pour tout n :

$$v_{n+1} < \frac{1}{7}v_n,$$

et déduisez-en la limite de la suite (v_n).

5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

6. Trouvez un entier N tel que, pour tout $n > N$, $u_n > 0{,}99$.

73 • BAC La suite (u_n) est définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Démontrez que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.

2. Démontrez que pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}.$$

Déduisez-en que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{2}$.

3. Démontrez que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Déduisez-en que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$.

☞ **Aide.** **Faites une démonstration par récurrence.**
Voir le TD 3, page 174.

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?
Si oui, calculez-la.

☞ **Note.** **Héron d'Alexandrie (Ier siècle de notre ère) utilisait cette méthode pour calculer des racines carrées (sans parler de suite et de convergence).**
Cette méthode est basée sur le fait que si :

$$a < \sqrt{2}, \text{ alors } \frac{2}{a} > \sqrt{2},$$

c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est dans l'intervalle d'extrémités a et $\frac{2}{a}$.
Le milieu de cet intervalle $a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ est certainement plus proche de $\sqrt{2}$ qu'une des extrémités. On réitère ce procédé en partant de a_1 ; on construit ainsi une suite (a_n) convergeant vers $\sqrt{2}$. Vous remarquerez la rapidité de convergence de la suite obtenue.

Suites adjacentes

74 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$\text{et } v_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Les deux suites sont-elles adjacentes ?

75 • On rappelle que $n! = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ lorsque $n \neq 0$.

1. Prouvez que les suites (u_n) et (v_n) définies pour n non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

2. Calculez u_7 et v_7 et déduisez-en une valeur approchée de la limite commune ℓ de (u_n) et (v_n) à 10^{-3} près.

3. Prouvez que la limite commune ℓ des suites (u_n) et (v_n) n'est pas un nombre rationnel.

☞ **Aide.** **Raisonnez par l'absurde en supposant que $\ell = \frac{p}{q}$ (avec p et q entiers non nuls) et utilisez l'encadrement $u_q < \ell < v_q$.**

☞ **Note.** **Cette limite ℓ est le réel e défini au chapitre 4.**

76 • On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} ; \; v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Calculez u_1, v_1, u_2, v_2.

2. On note (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a) Démontrez que la suite (w_n) est géométrique.
Précisez sa raison.

b) Calculez w_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (w_n) ?

3. Étudiez le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) et déduisez-en que ces suites sont adjacentes.

4. (t_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

a) Démontrez que la suite (t_n) est constante.

b) En notant ℓ la limite commune des suites (u_n) et (v_n), déterminez ℓ.

77 • BAC f est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
Montrez que si $x \in [1 ; 2]$ alors $f(x) \in [1 ; 2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
- $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$;
- $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Représentez sur l'écran de votre calculatrice la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Que pouvez-vous conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Prouvez à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
- pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$;
- pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$;
- pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$;
- pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$;

a) Prouvez que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

Déduisez-en que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

b) Prouvez que pour tout entier naturel n,

$$v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

c) Prouvez que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α. Déterminez la valeur exacte de α.

78 Moyennes arithmétique et géométrique

a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

☞ **Note.** u_{n+1} est la moyenne géométrique et v_{n+1} la moyenne arithmétique de u_n et de v_n.

1. Prouvez que, pour tout n, u_n et v_n sont strictement positifs.

2. Prouvez que, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$.

3. **a)** Démontrez que, pour tout n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

☞ **Aide.** Vous pouvez utiliser la majoration $\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} \leqslant 1$.

b) Déduisez-en que $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b - a)$.

4. Prouvez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5. On suppose ici que $a = 2$ et $b = 5$.
Utilisez le résultat de la question 3. pour déterminer une valeur approchée de la limite commune ℓ des suites (u_n) et (v_n) à 10^{-3} près.

79 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$u_0 = -1, \quad v_0 = 2$$

et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}.$$

1. **a)** Démontrez par récurrence que pour tout n, $u_n < v_n$.

b) Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 47, page 180.

2. Trouvez deux réels distincts a et b tels que les suites (s_n) et (t_n) définies pour tout n par :

$$s_n = u_n + av_n \quad \text{et} \quad t_n = u_n + bv_n$$

soient géométriques (éventuellement constantes).

3. Exprimez s_n et t_n en fonction de n.

4. Trouvez la limite des suites (u_n) et (v_n).

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 47, page 180.

Fonctions continues et limites de suites

Pour les exercices de cette partie, vous pouvez vous reporter à l'exercice 46, et à *Comprendre* page 167.

80 • (u_n) est la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.

2. Prouvez que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3. Que pouvez-vous en déduire ?

3. Quelle est la limite de (u_n) ? Justifiez votre réponse.

81 • (u_n) est la suite définie par :

$$u_1 = 2 \text{ et pour tout } n > 0,\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Démontrez par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 2. Que pouvez-vous en déduire ?

2. Trouvez la limite de la suite (u_n).

82 • (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

1. **a)** Vérifiez que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b) Démontrez par récurrence que pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

2. On note f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Démontrez que pour tout réel $x \geqslant \frac{3}{2}$ et tout réel $y \geqslant \frac{3}{2}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{4}{9}|x - y|$ **[1]**.

3. **a)** Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ℓ ?

b) Démontrez, en utilisant **[1]**, que pour tout $n \geqslant 1$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \ell|.$$

c) Déduisez-en par récurrence que :

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|u_1 - \ell|.$$

d) Démontrez alors que la suite (u_n) converge vers ℓ.

83 • BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{4}(x + 1)e^{-x}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra sur chaque axe 3 cm comme unité).

A. 1. a) Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduisez-en les variations de f'.

c) Démontrez que l'équation $f'(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Donnez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2. a) Déduisez de la question précédente, les variations de f et dressez son tableau de variations.

b) Démontrez que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$. Étudiez les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}$.

c) Construisez Δ puis $\mathscr{C}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

B. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. En utilisant la représentation graphique de la question **A. 2. c)**, que pouvez-vous conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. a) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$-1 < u_n < 0.$$

b) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.
Déduisez-en que cette suite a une limite ℓ (que l'on ne demande pas de calculer).

3. a) Démontrez que pour tout entier naturel n,

$$0 < u_{n+1} + 1 \leqslant \frac{3}{4}(u_n + 1).$$

b) Déduisez-en pour tout entier n, que $0 \leqslant u_n + 1 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Quelle est alors la limite de la suite (u_n) ?

84 BAC

La fonction f est définie pour $x > \frac{1}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

1. Démontrez que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$.
On peut donc définir la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer u_n en fonction de n.

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

a) Vérifiez que v_n et w_n sont bien définis pour tout entier naturel n.

b) Démontrez que la suite (w_n) est géométrique.

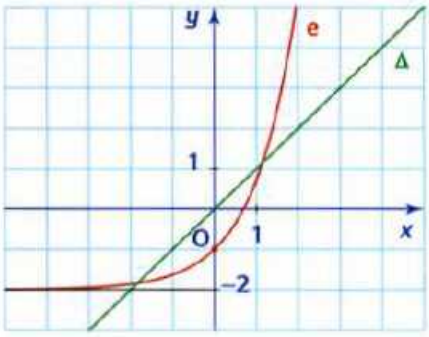
c) Exprimez, pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n et déduisez-en que :

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

85

On a tracé ci-après, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2$, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

1. Reproduisez la courbe pour conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

2. Prouvez à l'aide d'un raisonnement par récurrence et des variations de f que :

a) la suite (u_n) est décroissante ;

b) que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $-2 \leqslant u_n \leqslant 0$.
Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente.

3. Détermination de la limite ℓ de la suite (u_n)

a) Démontrez que l'équation $f(x) = x$ a deux solutions et deux seulement dans $\mathbb{R}$.

☞ **Aide. Étudiez les variations de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.**

b) Exploitez la question précédente pour trouver un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-2}.

86

(u_n) est la suite définie pour tout entier n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n^2} \text{ et par le choix de } u_0.$$

1. Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ?

2. Prouvez que pour tout n, $|u_{n+1}| \leqslant \frac{|u_n|}{2}$.

3. Déduisez-en que la suite converge et précisez sa limite.

4. Étudiez la monotonie de la suite (u_n) selon les valeurs du premier terme u_0.

87 BAC

A. Partie préliminaire

En étudiant les variations de deux fonctions convenablement choisies, démontrez que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$ **(1)**.

B. On se propose dans cette partie d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Démontrez par récurrence que $u_0 > 0$ pour tout entier n non nul.

2. Démontrez que pour tout entier n non nul :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

En utilisant **(1)**, démontrez que $S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n$.

4. a) Calculez S_n et T_n en fonction de n.

b) Déduisez-en $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n)

a) Démontrez que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Déduisez-en qu'elle est convergente.

c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant w_n$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n \leqslant \lim_{n \to +\infty} w_n.$$

Démontrez alors que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors

$$\frac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1.$$

Déduisez-en un encadrement de ℓ.

Divers

88 • **De l'écriture décimale à une fraction**

A est le nombre qui s'écrit 3,2 43 43 43 ... dans le système décimal ; les pointillés indiquent que l'écriture se poursuit par le nombre 43 réécrit indéfiniment.

On pose $u_0 = 3{,}2$; $u_1 = 3{,}2\,43$ et, de manière générale, $u_n = 3{,}2\,43\,43 \ldots 43$ (n fois le nombre 43).

1. Vérifiez que pour tout naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{10}\left(32 + \frac{43}{100} + \cdots + \frac{43}{100^n}\right).$$

2. Calculez la somme $\frac{43}{100} + \cdots + \frac{43}{100^n}$.

3. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

4. Écrivez A sous forme fractionnaire.

89 • **Attention aux conjectures trop hâtives !**

Une suite (u_n) est telle que pour tout n, $u_n > 0$.

On suppose qu'il existe un nombre k, $0 < k < 1$, et tel que pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$.

1. Démontrez par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 < u_n \leqslant k^n u_0.$$

Déduisez-en la limite de (u_n).

2. a) $u_n = \frac{10^n}{n!}$. À l'aide de la calculatrice, calculez les premiers termes de cette suite (u_n).

Quelle conjecture pourrait-on faire après ces calculs ?

Mais prouvez que (u_n) converge vers zéro.

b) Plus généralement, prouvez que lorsque $a > 1$, la suite $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ converge vers zéro.

3. Prolongement

On suppose maintenant qu'il existe un nombre k, $k > 1$, tel que pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k$ avec $u_n > 0$.

a) Démontrez par récurrence que pour tout n, $u_n \geqslant k^n u_0$, et déduisez-en que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.

b) Application. Étudiez la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1{,}1$ et $u_{n+1} = u_n^2$.

☞ **Aide.** **Prouvez que pour tout n, $u_n > (1{,}1)^n$.**

90 • La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Prouvez que pour tout n, $u_n > 0$.

2. Prouvez que la suite (u_n) est décroissante.

3. Justifiez la convergence de la suite (u_n).

4. Calculez les cinq premiers termes (valeurs exactes). Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant l'expression de u_n en fonction de n ?
Démontrez-le par récurrence.

5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

91 : La suite (u_n) est définie par $u_1 = -1$ et pour tout entier n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}.$$

1. Prouvez, en raisonnant par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 3.

2. Étudiez le sens de variation de (u_n).
Déduisez-en que (u_n) est convergente.

3. La suite (v_n) est définie pour tout naturel n non nul par $v_n = n(3 - u_n)$.

Démontrez que (v_n) est une suite géométrique.

Précisez le premier terme et la raison.

4. Exprimez v_n, puis u_n en fonction de n, puis déterminez la limite de la suite (u_n).

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

92 La suite (u_n) est telle que les suites de terme général $v_n = 1 + u_n$ et $w_n = 3 - u_n$ sont adjacentes.
Étudiez la convergence de la suite (u_n) et précisez, le cas échéant, sa limite.

93 La suite (u_n), définie pour tout entier naturel non nul n, par $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ est-elle convergente ?

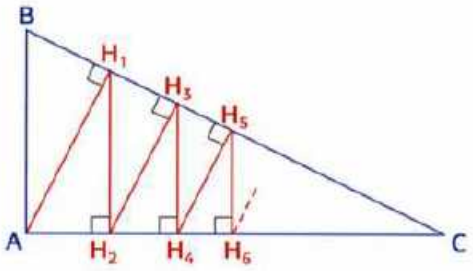
94 Prouvez que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$ est convergente, puis trouvez sa limite.

95 • Étudiez la convergence de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

96 • **Une infinité de segments de longueur totale finie**

ABC est un triangle rectangle en A. H_1 est le projeté orthogonal de A sur (BC). H_2 est le projeté orthogonal de H_1 sur (AC). H_3 est le projeté orthogonal de H_2 sur (BC), et ainsi de suite.



On pose :
$u_0 = AB$, $u_1 = AB + AH_1$, $u_2 = AB + AH_1 + H_1H_2$,
et de manière générale, pour tout naturel n :

$$u_n = AB + AH_1 + H_1H_2 + \cdots + H_{n-1}H_n.$$

Étudiez la limite de la suite ainsi définie.

97 •• Démontrez que la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$ converge vers un réel ℓ tel que $3{,}1 < \ell < 3{,}2$.

Problèmes

98 BAC

Thèmes : *Limites de suites. Encadrements. Sens de variation d'une fonction*

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n non nul par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$$

et $$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$

1. Prouvez que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. a) Prouvez que chacune des fonctions :

$$f : x \mapsto x - \sin x ;$$

$$g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x ;$$

$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (Vous pouvez utiliser les variations de chacune de ces fonctions.)

b) Justifiez que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leqslant n^4.$$

Déduisez du **a)** l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n$$

pour tout n non nul.

c) Prouvez que la suite (u_n) est convergente.
Quelle est sa limite ?

99 BAC

Thèmes : *Suites doubles. Suites arithmétiques. Suites géométriques. Systèmes*

Soit S l'ensemble des suites (u_n) possédant la propriété suivante : pour tout entier n,

$$u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n.$$

1. Existe-t-il dans S des suites constantes (à l'exception de la suite nulle) ?

2. Existe-t-il dans S des suites arithmétiques (à l'exception de la suite nulle) ?

3. Existe-t-il dans S des suites géométriques de premier terme non nul, de raison non nulle ?

4. Vérifiez que les suites (u_n) de terme général :

$$u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(-\frac{1}{5}\right)^n,$$

où α et β sont deux réels donnés, appartiennent à S.

5. Déterminez la suite de terme général :

$$u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

sachant que $u_0 = 3$ et $u_1 = -\frac{4}{35}$.

Déterminez, dans ce cas, la limite de (u_n).

100 BAC

Thèmes : *Sens de variation d'une fonction. Résolution de l'équation $f(x) = n$. Comparaison de suites*

A. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}.$$

1. Soit φ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln x + x + 1.$$

Étudiez les variations de φ. Établissez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule et que $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.

2. Pour $x > 0$, exprimez $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
Déduisez-en les variations de f.
Déterminez les limites de f en 0 et $+\infty$.

B. On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$, où n est un entier naturel non nul.

1. Montrez que, pour tout n, cette équation admet une solution α_n et une seule.

2. Comparaison de α_n à e^n

a) Établissez que $f(e^n) \leqslant n$. Déduisez-en que $\alpha_n \geqslant e^n$.

b) Prouvez que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \quad \textbf{(1)}.$$

Déduisez-en, à l'aide de **a)**, la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

3. Comparaison de α_n à $e^n + n$

On écrit α_n sous la forme :

$$\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n), \text{ où } \varepsilon_n \geqslant 0 \quad \textbf{(2)}.$$

a) À l'aide de **(1)**, exprimez $(1 + \varepsilon_n)\ln(1 + \varepsilon_n)$ en fonction de n.

b) Établissez que pour $t \geqslant 0$:

$$0 \leqslant (1+t)\ln(1+t) - t \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

c) Déduisez de **a)** et **b)** que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant n e^{-n} - \varepsilon_n \leqslant \frac{n^2}{2}e^{-2n} \quad \textbf{(3)}.$$

d) À l'aide de **(2)** et **(3)**, déterminez la limite de $e^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

101 **Concours FESIC, 2002**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On définit les suites (v_n) et (w_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

1. **a** La suite (v_n) est arithmétique. **b** La suite (v_n) est géométrique.
c La suite (w_n) est arithmétique. **d** La suite (w_n) est constante.

2. **a** $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$. **b** $w_n = 1$. **c** $v_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. **a** $u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$. **b** $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
c La suite (u_n) n'a pas de limite. **d** La suite (u_n) converge vers $\frac{3}{5}$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre réponse.

102 **1.** Si (u_n) est une suite qui converge vers le réel ℓ et si (v_n) est une suite qui n'a pas de limite réelle, alors la suite $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite réelle.

2. Si (u_n) est une suite qui converge vers le réel ℓ et si (v_n) est une suite qui n'a pas de limite réelle, alors la suite $(u_n \times v_n)$ n'a pas de limite réelle.

3. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = \ell$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

4. Une suite a toujours soit un minorant, soit un majorant.

103 On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

104 **BAC** Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

2. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

3. La suite (v_n) est majorée.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

105 **1. Démonstration de cours**

Pré-requis. Une suite (u_n) tend vers $+\infty$, si pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A.

Démontrez le théorème suivant :

« Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ ».

2. Application. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

a) Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

b) Démontrez que si la suite (u_n) a pour limite ℓ alors ℓ vérifie la relation $\ell = \ell + e^{-\ell}$.

c) Concluez quant à la convergence de la suite (u_n).

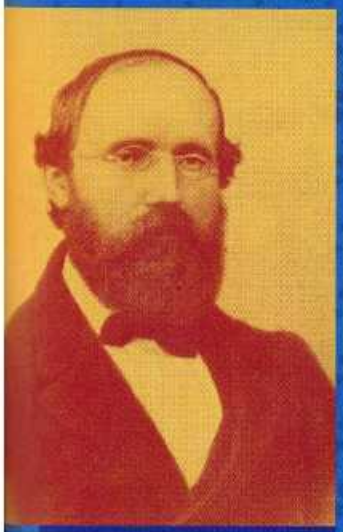
8 Intégration et primitives

1850

Le calcul intégral au sens moderne du terme est inventé indépendamment par Newton et par Leibniz, Newton montrant que le calcul d'aires (intégration) est le problème inverse de la dérivation.

Le calcul intégral de Riemann, développé vers 1850, est le point de départ de toutes les généralisations ultérieures, notamment celle de Lebesgue au XX^{e} siècle. Dépassant les calculs d'aires, de volumes, de centres de gravité, ..., elles permettront le développement considérable de la physique et des probabilités.

Le fait suivant mérite d'être souligné. Jusqu'au XVII^{e} siècle, tout est exposé géométriquement, sans doute sous l'influence des mathématiciens grecs.



Bernhard **Riemann**
1826 – 1866

L'invention du Calcul différentiel et intégral, les efforts faits pour l'asseoir sur des bases claires et l'exposer rigoureusement font qu'à partir du XIX^{e} siècle, ce n'est plus la géométrie qui fonde l'Analyse. C'est l'Analyse qui permet de définir avec précision ce qu'est la longueur d'une courbe, l'aire d'une surface...

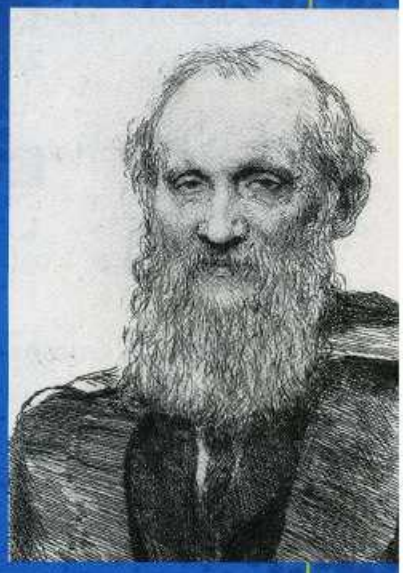
À LA MÊME ÉPOQUE

SOCIÉTÉ

La rotative est inventée par R. M. Hoe. En accélérant la vitesse d'impression, ce nouveau type de machine à imprimer autorise les grands tirages et favorise la diffusion des journaux.

SCIENCES

W. Thomson, le futur lord Kelvin, propose le concept de zéro absolu. Cette température inaccessible à laquelle toutes les molécules seraient au repos deviendra la base de l'échelle des températures thermodynamiques.

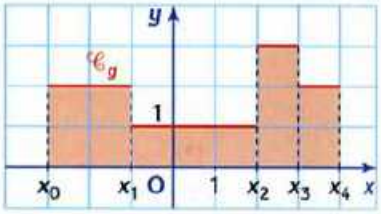


LITTÉRATURE

Alexandre Dumas publie en feuilleton *Les Trois Mousquetaires*, *Vingt ans après* et *Le Vicomte de Bragelone*. Il y campe des personnages inoubliables, entraînés dans des aventures mouvementées.

ACTIVITÉ 1 Intégrale d'une fonction en escalier

1 Définitions



• Une **fonction en escalier** est une fonction constante par « morceaux ».
La fonction g, définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, est en escalier, lorsqu'il existe des réels $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , x_{n-1}, $x_n = b$ tels que $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n$ et que g est constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}\,;\,x_i[$.
Pour l'exemple ci-dessus, g est définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ et $x_0 = -3$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$.
On n'exige pas que g soit constante sur les intervalles *fermés* $[x_{i-1}\,;\,x_i]$, c'est la raison pour laquelle on ne précise pas les valeurs $g(x_i)$.

• Notons c_i la valeur constante prise par g sur $]x_{i-1}\,;\,x_i[$.
Par définition, **l'intégrale de g sur $[a\,;\,b]$** est le nombre $\mathrm{I}(g)$ défini par :

$$\mathrm{I}(g) = (x_1 - x_0)c_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})c_n\,.$$

Ainsi dans l'exemple précédent, $\mathrm{I}(g) = 2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 3 + 1 \times 2 = 12$.

Remarques.

1. Les valeurs $g(x_i)$ n'interviennent pas dans le calcul de $\mathrm{I}(g)$.
2. Lorsque g est **positive**, $\mathrm{I}(g)$ est la somme des aires des rectangles colorés.

2 Exemples

1. f est la fonction en escalier définie sur $[-3\,;\,4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 \leqslant x < -2 \\ 3 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 & \text{si } 0 < x \leqslant 4 \end{cases}.$$

Tracez sa courbe dans un repère orthonormal puis calculez $\mathrm{I}(g)$.

2. Dans chacun des cas suivants, on a représenté une fonction en escalier g.
Calculez l'intégrale $\mathrm{I}(g)$ sur l'intervalle de définition.

fig. 1

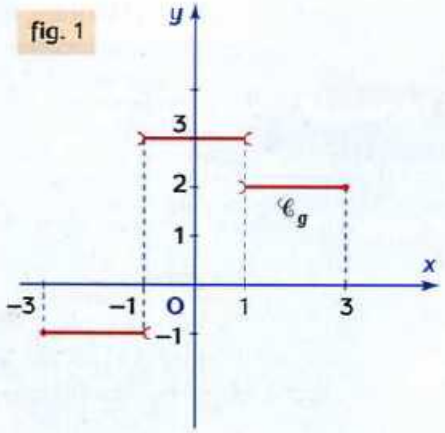
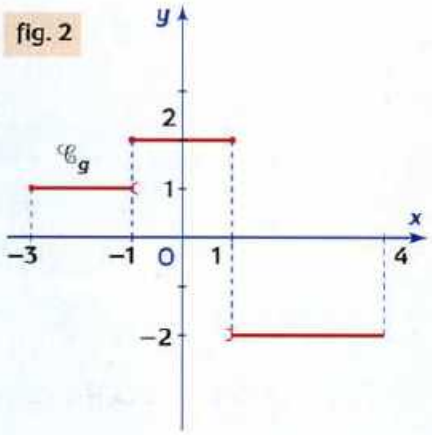


fig. 2



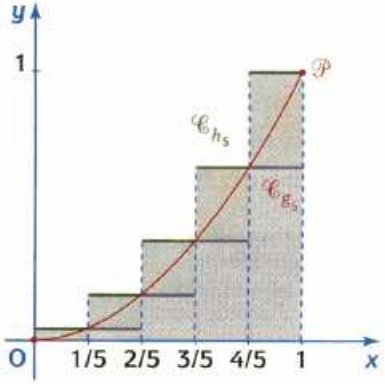
ACTIVITÉ 2 Aire « sous la parabole » et intégrale

Note
L'objectif est de montrer sur un exemple, comment on définit l'intégrale d'une fonction continue à partir d'intégrales de fonctions en escalier.

f est la fonction $x \mapsto x^2$ restreinte à l'intervalle $[0\,;1]$ et $\mathscr{P}$ sa courbe dans un repère orthonormal. Pour tout entier n, $n \geqslant 2$, on partage l'intervalle $[0\,;1]$ en n sous-intervalles de même longueur.

1. Cas $n = 5$

Sur la figure ci-contre, les fonctions en escalier g_5 et h_5 sont représentées en rouge et en vert. Il est clair que $g_5 \leqslant f \leqslant h_5$ sur $[0\,;1]$.



a) On pose :

$$s_5 = \frac{1}{5}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right] \text{ et}$$

$$S_5 = \frac{1}{5}\left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{5}{5}\right)\right].$$

Vérifiez que $I(g_5) = s_5$ et que $I(h_5) = S_5$.

b) L'unité d'aire étant celle du carré de côté 1, indiquez sur la figure l'aire associée à $I(g_5)$, celle associée à $I(h_5)$ puis celle associée à la différence $I(h_5) - I(g_5)$.
Ainsi « l'aire sous la parabole » $\mathscr{P}$ est encadrée par $I(g_5)$ et $I(h_5)$.

2. Cas général

On suppose n quelconque, $n \geqslant 2$, et on pose $s_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$.

Comme dans le cas $n = 5$, s_n est la somme des aires des rectangles inférieurs, donc s_n est l'intégrale d'une fonction en escalier g_n définie par :

$$g_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ si } x \text{ est dans l'intervalle } \left]\frac{k}{n}\,;\,\frac{k+1}{n}\right[, \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

De même, on pose $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$; S_n est la somme des aires des rectangles supérieurs, donc S_n est l'intégrale de la fonction en escalier h_n définie par :

$$h_n(x) = \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 \text{ si } x \text{ est dans l'intervalle } \left]\frac{k}{n}\,;\,\frac{k+1}{n}\right[, \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Note
On rappelle que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

a) Prouvez que $s_n = \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$ et $S_n = \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$.

b) Exprimez s_n et S_n en fonction de n. (Voir note ci-contre).
Démontrez que (s_n) est une suite croissante et (S_n) une suite décroissante.

Aide. Comparez les rapports $\frac{s_{n+1}}{s_n}$ et $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ au nombre 1.

c) Calculez $S_n - s_n$ en fonction de n puis prouvez que $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n - s_n) = 0$.

Justifiez que les suites (s_n) et (S_n) convergent vers un réel que vous préciserez.

CONCLUSION Ainsi les suites $s_n = I(g_n)$ et $S_n = I(h_n)$ sont convergentes et ont même limite ℓ. On dit que cette limite commune ℓ **est l'intégrale de f sur $[0\,;1]$.**
D'après cette étude, on conçoit que ℓ exprime **l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{P}$.**

1 Notion d'intégrale sur un intervalle

1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

■ Fonction constante sur un intervalle $[a\,;\,b]$

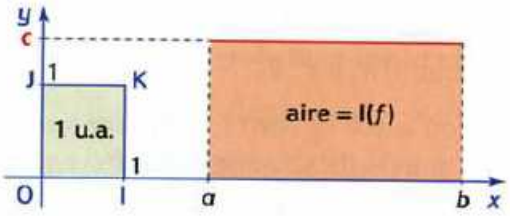
f est une fonction définie sur $[a\,;\,b]$ telle que pour tout x dans $]a\,;\,b[$, $f(x) = c$.
Les valeurs de $f(a)$ et $f(b)$ peuvent être différentes de c.
Par définition, **l'intégrale de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$** est le réel $\mathrm{I}(f)$ tel que :

$$\mathrm{I}(f) = (b-a)c\,.$$

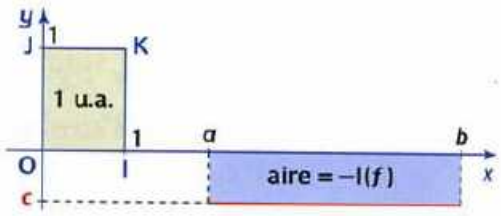
Note
L'unité est celle du rectangle OIKJ. Dans toute la suite « u.a. » signifie « unités d'aire ».

Interprétation géométrique

Si $c > 0$, l'intégrale est, dans l'unité d'aire choisie, l'aire du rectangle coloré.



Si $c < 0$, alors $(b-a)c < 0$ et l'intégrale est, dans l'unité d'aire choisie, l'opposée de l'aire du rectangle coloré.



■ Fonction en escalier sur un intervalle $[a\,;\,b]$

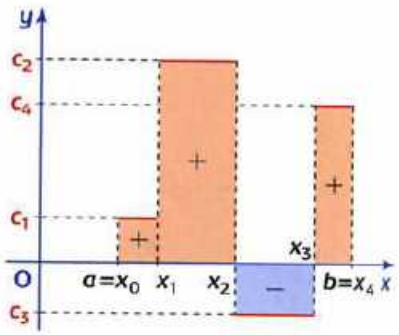
Note
$\mathrm{I}(f)$ est un nombre qui ne dépend que de f et de $[a\,;\,b]$. Il est indépendant du choix des unités sur les axes.

EXEMPLE La fonction f représentée ci-dessous est dite **en escalier** : elle est **constante par morceaux**. Par définition, son intégrale sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ est le réel :

$$\mathrm{I}(f) = (x_1-x_0)c_1 + (x_2-x_1)c_2 + (x_3-x_2)c_3 + (x_4-x_3)c_4 = \sum_{i=1}^{4}(x_i-x_{i-1})c_i.$$

Interprétation géométrique

L'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$ est la somme algébrique des aires des rectangles colorés, ces aires étant comptées :
- **positivement** s'ils sont **au-dessus** de l'axe (Ox),
- **négativement** s'ils sont **en dessous**.



Cas général

Une fonction f est en escalier sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ lorsqu'il existe $n+1$ réels x_i de $[a\,;\,b]$ tels que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et tels que f est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}\,;\,x_i[$.
Si pour tout x de $]x_{i-1}\,;\,x_i[$, on pose $f(x) = c_i$, alors **par définition,**

$$\mathrm{I}(f) = (x_1-x_0)c_1 + (x_2-x_1)c_2 + \cdots + (x_n-x_{n-1})c_n\,.$$

Notation et vocabulaire. L'intégrale $\mathrm{I}(f)$ sur $[a\,;\,b]$ est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,;\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,;\quad \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u\,;\ldots$$

Cette notation est due à Leibniz. Le symbole $\int$ est un S stylisé pour signaler que l'on effectue une somme intégrale.

1.2 Intégrale d'une fonction continue

■ Définition et exemple

f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$; on démontre et nous l'admettrons, qu'il existe deux suites de fonctions en escalier (g_n) et (h_n) telles que :

- pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[a\,;\,b]$, $g_n(t) \leqslant f(t) \leqslant h_n(t)$ **[1]**,
- les suites $\mathrm{I}(g_n)$ et $\mathrm{I}(h_n)$ sont convergentes et ont même limite ℓ **[2]**.

En outre, si (s_n) et (t_n) sont deux suites de fonctions en escalier qui encadrent f et telles que les suites $\mathrm{I}(s_n)$ et $\mathrm{I}(t_n)$ aient une limite commune ℓ' alors $\ell = \ell'$.

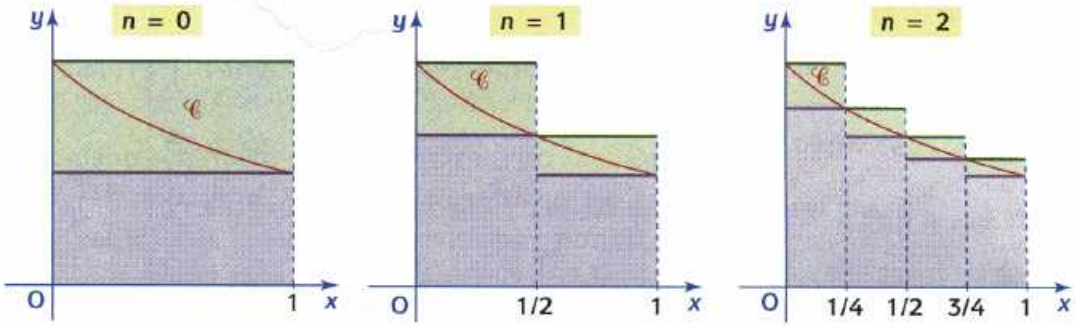
DÉFINITION 1 ➡

Cette limite ℓ est **l'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$**. On note $\ell = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

EXEMPLE **Cas d'une fonction f continue, positive et décroissante sur $[0\,;\,1]$**

Indiquons dans ce cas comment trouver des fonctions en escalier g_n et h_n. Pour tout n, on subdivise régulièrement $[0\,;\,1]$ en 2^n sous-intervalles et on considère les fonctions g_n et h_n qui encadrent f.

Les dessins ci-dessous illustrent la situation lorsque $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.



Note
g_n est dessinée en violet et h_n en vert.

Posons $u_n = \mathrm{I}(g_n)$ et $v_n = \mathrm{I}(h_n)$. Alors, d'après le § **1.1** :

- u_n = aire du domaine coloré en violet, $u_0 = f(1)$, $u_1 = \dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(1)\right]$, $u_2 = \dfrac{1}{4}\left[f\left(\dfrac{1}{4}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{3}{4}\right) + f(1)\right]$, ...
- $v_n = u_n$ + somme des aires des 2^n rectangles verts, $v_0 = f(0)$, $v_1 = \dfrac{1}{2}\left[f(0) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$, $v_2 = \dfrac{1}{4}\left[f(0) + f\left(\dfrac{1}{4}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{3}{4}\right)\right]$, ...

Les dessins laissent prévoir que :

- (u_n) est croissante.
- (v_n) est décroissante.
- $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Ces affirmations peuvent être démontrées, nous les admettrons.

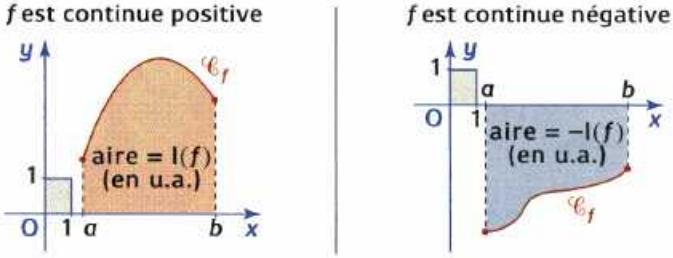
Les suites (u_n) et (v_n) sont alors adjacentes, donc ont une limite commune qui, par définition, est l'intégrale de f sur $[0\,;\,1]$. Ainsi :

$$\mathrm{I}(f) = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}\left[f\left(\frac{1}{2^n}\right) + f\left(\frac{2}{2^n}\right) + \cdots + f(1)\right].$$

Note
Si l'on divise l'intervalle $[a\,;\,b]$ en intervalles de longueur $\dfrac{b-a}{n}$, les suites $(\mathrm{I}(g_n))$ et $(\mathrm{I}(h_n))$ ne sont pas toujours adjacentes même si f est continue et monotone, mais elles ont toujours la même limite.

■ Aire et intégrale

Dans l'exemple ci-dessus, on conçoit que lorsque n augmente indéfiniment « les domaines colorés tendent à recouvrir intégralement le domaine sous la courbe ». Il est alors légitime de définir l'**aire de ce domaine comme étant $\mathrm{I}(f)$**.



2 Extension et premières propriétés

2.1 Extension de la définition à a et b quelconques

Note
Même si f est positive, lorsque $a > b$, $\int_a^b f(t)\,dt$ n'est plus l'aire sous la courbe, mais son opposée.

On a défini l'intégrale d'une fonction en escalier ou continue sur un intervalle $[a\,;b]$, ce qui suppose $a < b$. Maintenant, si f est une fonction continue sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I tels que $a \geqslant b$, on pose par définition :

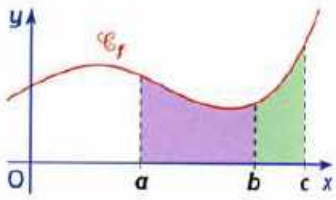
lorsque $a > b$, $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$, et lorsque $a = b$, $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

2.2 Relation de Chasles

THÉORÈME 1 (théorème admis)

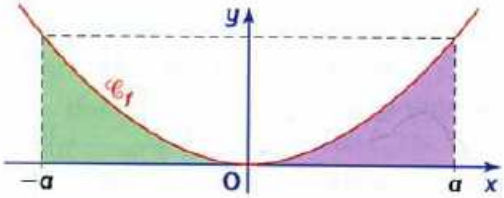
f est une fonction continue sur un intervalle I.
Quels que soient les réels a, b et c dans I, $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$.

Illustrons dans un cas particulier ce théorème, que nous admettrons.
Lorsque f **est positive** et $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires : l'aire de la réunion de deux domaines adjacents est la somme des aires de chacun d'eux. Mais avec les intégrales, la relation est vraie quels que soient les réels a, b, c.

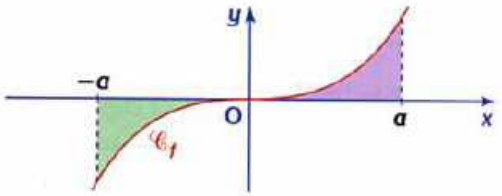


Conséquence pratique

Si f est **paire** sur $[-a\,;a]$, alors :
$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.



Si f est **impaire**, alors :
$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.



En effet, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt$. Les deux domaines colorés ont même aire. Si f est paire (resp. impaire), $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$ (resp. $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt$), d'où le résultat.

2.3 Linéarité de l'intégration

THÉORÈME 2 (théorème admis)

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, λ est un réel quelconque.
Quels que soient les réels a et b dans l'intervalle I :

$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

Donc l'intégrale de la fonction λf est λ fois l'intégrale de f et l'intégrale de la somme de deux fonctions est la somme de leurs intégrales.

COMPRENDRE

Relation de Chasles

Ainsi nommée par analogie avec la relation de Chasles pour les vecteurs : quels que soient les points A, B et C $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Elle est utilisée en particulier pour le calcul de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

➜ EXERCICE RÉSOLU 1

Linéarité de l'intégrale

Exemples.

• Si $K = \int_0^{\pi} (2t - 3\sin t)\,dt$,

on peut écrire :

$K = 2\int_0^{\pi} t\,dt - 3\int_0^{\pi} \sin t\,dt$.

• Si $L = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\,dt$,

on peut écrire :

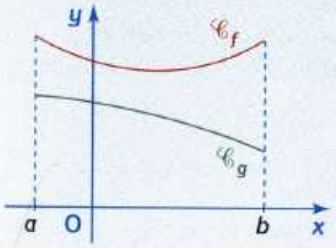
$L = \int_0^1 \frac{t+t^3}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$

$L = \int_0^1 t\,dt$.

Aire d'un domaine entre deux courbes

Si la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $[a\,;b]$, alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par les deux courbes sur $[a\,;b]$ est :

$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b (f-g)(x)\,dx$ (en u.a.)



En effet, lorsque $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$,

$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

d'où :

$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Ce résultat est vrai dans tous les cas, nous l'admettrons.

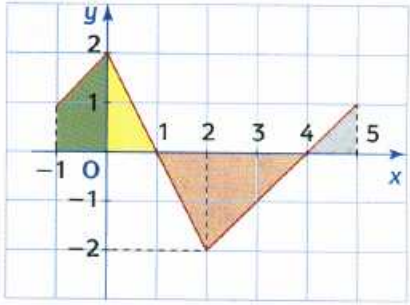
➜ EXERCICE RÉSOLU 2

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 — Calculer l'intégrale d'une fonction affine par morceaux

ÉNONCÉ La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-contre.

Calculez $I(f) = \int_{-1}^{5} f(t)\,dt$.



SOLUTION COMMENTÉE

Nous ne savons pas calculer directement $\int_{-1}^{5} f(t)\,dt$, mais grâce à la relation de Chasles, nous pouvons l'écrire comme une somme d'intégrales que nous savons calculer :

$$I(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^4 f(t)\,dt + \int_4^5 f(t)\,dt.$$

Par définition, l'aire (en u.a.) sous la courbe d'une fonction continue positive est égale à son intégrale donc $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ est l'aire du trapèze vert. De même $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_4^5 f(x)\,dx$ sont celles des triangles jaune et gris.

Mais sur $[1\,;4]$, $f < 0$, donc $\int_1^4 f(x)\,dx$ est l'opposée de l'aire du triangle rouge. Ainsi $I(f) = \frac{3}{2} + 1 - 3 + \frac{1}{2}$, soit $I(f) = 0$.

➜ EXERCICE 3

EXERCICE RÉSOLU 2 — Calculer l'aire d'un domaine entre deux courbes

ÉNONCÉ $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, des fonctions f et g définies sur $[0\,;3]$ par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ et $g(x) = \frac{-x}{x+1}$.

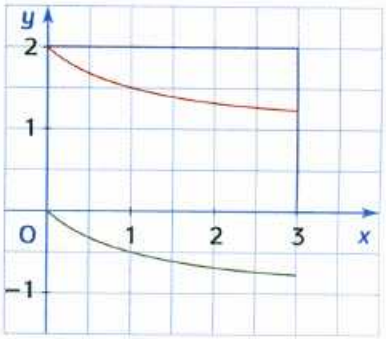
Calculez l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par ces deux courbes sur $[0\,;3]$.

SOLUTION COMMENTÉE

f et g étant continues sur $[0\,;3]$, il s'agit d'abord de connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$. Pour tout x de $[0\,;3]$,

$$f(x) - g(x) = \frac{x+2+x}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2\,;$$

ainsi $f(x) - g(x) > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.



Alors, l'aire de $\mathscr{D}$ est $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_0^3 (f-g)(x)\,dx = \int_0^3 2\,dx$; or $f-g$ est constante de valeur 2, donc $\int_0^3 2\,dx = 3 \times 2 = 6$, d'où $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = 6$ u.a.

Remarque. Pour tout x de $[0\,;3]$, $f(x) = g(x) + 2$ donc $\mathscr{C}_f$ se déduit de $\mathscr{C}_g$ par translation de vecteur $2\vec{j}$. On peut constater que l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à celle du rectangle de dimensions 3 et 2.

➜ EXERCICES 107, 136

3 Encadrement. Valeur moyenne

3.1 Signe de l'intégrale, encadrement

THÉORÈME 3

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b sont deux réels de I.

1. Si $a \leqslant b$ et si, pour tout t de $[a\,;b]$, $f(t) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

2. Si $a \leqslant b$ et si, pour tout t de $[a\,;b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Note
On traduit le résultat 2. en disant que si $a \leqslant b$, on peut intégrer l'inégalité $f \leqslant g$ sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Démonstration.

1. Nous avons vu à la page 194 que lorsque $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, le nombre $\mathrm{I}(f)$ est positif.
2. De l'hypothèse $f \leqslant g$, on déduit $g - f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, d'où $\mathrm{I}(g-f) \geqslant 0$; en utilisant la linéarité de l'intégration, $\mathrm{I}(g) - \mathrm{I}(f) \geqslant 0$, donc $\mathrm{I}(f) \leqslant \mathrm{I}(g)$.

THÉORÈME 4

f est une fonction continue sur un intervalle I ; m et M sont deux réels ; a et b sont deux réels de l'intervalle I tels que $a \leqslant b$.

Si $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$ sur $[a\,;b]$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a)$.

Note
On donne le nom **d'inégalité de la moyenne** à cet encadrement de l'intégrale de f.

Démonstration.

Pour tout t dans $[a\,;b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$ **[1]**. Les fonctions $t \mapsto m$ et $t \mapsto \mathrm{M}$ sont constantes sur $[a\,;b]$ donc $\int_a^b m\,\mathrm{d}t = (b-a)m$ et $\int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t = (b-a)\mathrm{M}$.

Puisque $a \leqslant b$, on peut intégrer [1] sur $[a\,;b]$, d'où :

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

3.2 Valeur moyenne d'une fonction

THÉORÈME 5

f est une fonction continue sur un intervalle I ; a et b sont deux réels distincts de l'intervalle I.

Alors il existe un réel c entre a et b tel que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c)$.

Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé **valeur moyenne de f entre a et b**.

Note
Ce théorème assure l'existence de c quel que soit l'ordre de a et b.

Note
La démonstration est donnée dans le cas où f est continue, monotone et nous admettrons le cas général. La preuve serait la même, car l'image de l'intervalle $[a\,;b]$ par une fonction f continue est toujours un intervalle fermé $[m\,;\mathrm{M}]$.

Démonstration.

On suppose la fonction f croissante.

1er cas : $a < b$. Puisque f est croissante, pour tout x dans $[a\,;b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

D'après le théorème 4, $f(a)(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(b)(b-a)$ et, puisque $b-a > 0$,

$f(a) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(b)$. Le réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dans l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$, donc il existe c_1 dans $[a\,;b]$ tel que $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_1)$, d'où le résultat.

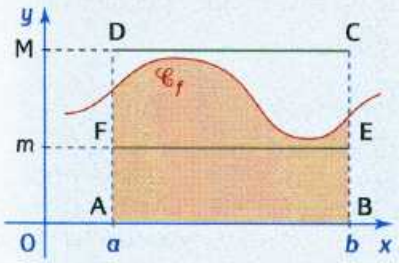
2e cas : $a > b$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$, et puisque $b < a$, d'après le cas précédent, il existe c_2 dans $[b\,;a]$ tel que $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = (a-b)f(c_2)$. On en déduit que :

$$-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c_2) \quad \text{et donc} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c_2).$$

COMPRENDRE

Interprétation du théorème 4

Lorsque f est continue telle que $0 < m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a\,;b]$, l'inégalité de la moyenne signifie alors que l'aire sous $\mathscr{C}_f$ est comprise entre celle du rectangle ABEF et celle du rectangle ABCD.



aire ABEF $= m(b-a)$.
aire ABCD $= M(b-a)$.

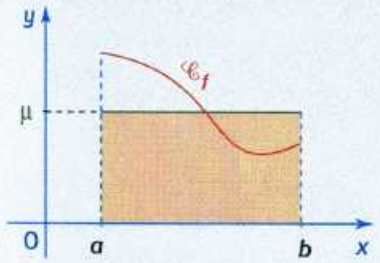
➜ EXERCICE RÉSOLU 4

Valeur moyenne et aire

Le nombre $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, si $a < b$, est appelé valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$.

D'où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \mu(b-a)$.

Ainsi dans le cas où f est continue et positive sur $[a\,;b]$ $(a < b)$, le nombre μ s'interprète comme la hauteur du rectangle construit sur $[a\,;b]$, de même aire que le domaine défini par l'axe (Ox), $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 BAC Comparer des intégrales

ÉNONCÉ On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$.

Prouvez que (u_n) est une suite décroissante à termes positifs.

SOLUTION COMMENTÉE

Pour tout naturel n, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{1+t^2}$ est positive sur $[0\,;1]$ donc d'après le théorème 3.1., $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$, soit $u_n \geqslant 0$.

Pour étudier le sens de variation de (u_n), comparons u_n et u_{n+1} c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt$.

Or pour tout t dans $[0\,;1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$ et $1+t^2 > 0$ d'où $\dfrac{t^{n+1}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2}$.

D'après le théorème 3.2., $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

Remarque. Puisqu'elle est décroissante et minorée par 0, (u_n) converge.

Autre solution. On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}-t^n}{1+t^2}\,dt$.

Puisque $0 \leqslant t \leqslant 1$, $t^{n+1} - t^n \leqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}-t^n}{1+t^2}\,dt \leqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$.

➜ EXERCICE 10

EXERCICE RÉSOLU 4 BAC Utiliser l'inégalité de la moyenne

ÉNONCÉ On admet que la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

Prouvez que pour tout naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$, puis déduisez-en que la suite (I_n) est convergente.

SOLUTION COMMENTÉE

f est décroissante sur tout intervalle $J_n = [n\,;n+1]$ donc pour tout x de J_n,

$$f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n).$$

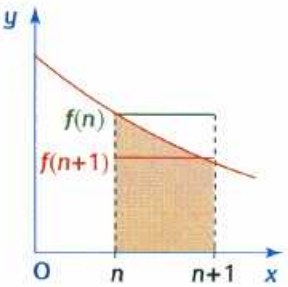
L'inégalité de la moyenne appliquée avec $a = n$, $b = n+1$, $m = f(n+1)$ et $M = f(n)$ s'écrit :

$$f(n+1) \times (n+1-n) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n) \times (n+1-n)$$

d'où $$f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n) \quad \textbf{[1]}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge vers 0.

Remarque. Une interprétation géométrique permet de retrouver l'encadrement **[1]**.
I_n représente l'aire sous la courbe ; elle est encadrée par les aires des rectangles $f(n+1)$ pour le rectangle « inférieur » et $f(n)$ pour le rectangle « supérieur ».



➜ EXERCICE 14

4 Primitives

Nous allons démontrer, grâce au calcul intégral, que toute fonction continue f sur un intervalle I est la dérivée d'une fonction F qui sera appelée primitive de f.

4.1 Définition. Lien entre deux primitives

DÉFINITION 2

f est une fonction définie sur un intervalle I. Une **primitive de f sur I** est une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout x dans I, $\mathbf{F'(x) = f(x)}$.

La connaissance d'une primitive d'une fonction f sur un intervalle I permet de les trouver toutes, c'est ce qu'affirme le théorème qui suit.

THÉORÈME 6

f est une fonction définie sur un **intervalle I. Si** F est une primitive de f sur I, **alors** f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par $\mathbf{G(x) = F(x) + k}$ où k est une constante réelle.

Note
On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration.
F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$. Donc G est une primitive de f sur I.
Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$. La dérivée de G – F est nulle sur l'intervalle I donc G – F est constante sur I : il existe un réel k tel que pour tout x dans I, $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

COROLLAIRE

x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque.
Alors il existe **une primitive et une seule G** de f sur I telle que $\mathbf{G(x_0) = y_0}$.

Note
En référence à des situations vues en physique, la condition $G(x_0) = y_0$ est appelée **condition initiale**.

En effet, si F est une primitive de f sur I, toute autre primitive G est définie par $G(x) = F(x) + k$ avec k réel. Or la condition initiale $G(x_0) = y_0$ équivaut à $k = y_0 - F(x_0)$. La valeur de k est unique, d'où le résultat.

4.2 Primitives d'une fonction continue

THÉORÈME 7

f est une fonction **continue** sur un intervalle I ; a est un réel de I.
Alors la fonction F définie sur I par $\mathbf{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ est **l'unique primitive** de f sur I telle que $\mathbf{F(a) = 0}$.

Note
Le théorème 7 affirme en particulier l'existence de primitives pour toute fonction continue sur un intervalle I.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 178

Démonstration.
Prouvons d'abord que F est dérivable en tout point x_0 de I et que $F'(x_0) = f(x_0)$.
Pour cela, étudions la limite en x_0 de la fonction T définie pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x_0 + h$ est dans I par $T(h) = \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$.

Or $F(x_0 + h) - F(x_0) = \displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$

et d'après le théorème 5, il existe c entre x_0 et $x_0 + h$ tel que :

$\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = (x_0 + h - x_0)f(c) = hf(c)$ donc $T(h) = f(c)$. Or lorsque h tend vers 0, c tend vers x_0 et puisque f est continue, $f(c)$, et donc $T(h)$, tend vers $f(x_0)$. Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = f(x_0)$ donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
L'unicité résulte ensuite du corollaire puisque $F(a) = 0$.

COMPRENDRE

Notation des primitives

En général, une fonction est notée par une lettre minuscule alors qu'une primitive (si elle existe) est notée par la lettre majuscule associée.

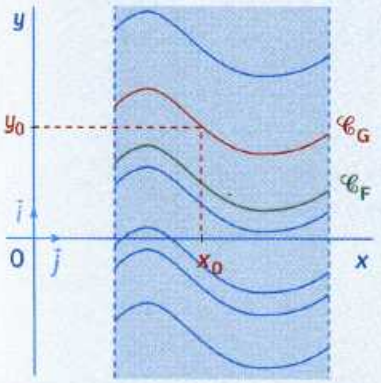
Exemple.

$F : x \mapsto \ln x$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

En effet, F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $F'(x) = f(x)$.

Représentation des primitives de *f* sur un intervalle I

Si on connaît la courbe $\mathscr{C}_F$ d'une primitive quelconque F, alors la courbe associée à une autre primitive, définie sur I par $G(x) = F(x) + k$, s'en déduit par translation de vecteur $k\vec{j}$.



Ainsi la famille des courbes obtenues pour k décrivant $\mathbb{R}$ constitue la bande colorée.

D'après le corollaire, le point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ étant donné, il existe une seule courbe $\mathscr{C}_G$ passant par ce point.

Forme intégrale d'une primitive

La fonction $x \mapsto \ln x$ est la primitive s'annulant en 1 de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Reconnaître une primitive

ÉNONCÉ

Prouvez que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

POINT MÉTHODE

Pour démontrer que F est une primitive de *f* sur un intervalle I, il suffit de prouver que F est dérivable sur I et que $F' = f$.

SOLUTION COMMENTÉE

Prouvons que F est dérivable pour tout réel $x \geqslant 0$ et que $F'(x) = \sqrt{x}$.

F est le produit de deux fonctions dérivables, l'une sur $\mathbb{R}$, l'autre (fonction racine) n'est dérivable que sur l'intervalle ouvert $]0 ; +\infty[$.

Il y a donc nécessité d'étudier à part la dérivabilité de F en 0.

- Sur $]0 ; +\infty[$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{2}{3}x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables, donc leur produit F aussi et pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x}.$$

Ainsi $F'(x) = f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

- Pour prouver la dérivabilité en 0, étudions la limite en 0 de la fonction t : $t(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$ lorsque $x > 0$. Or $t(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} t(x) = 0$.

Ainsi F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0 = f(0)$.

- Finalement, $F' = f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, donc F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

➔ EXERCICES 16 à 19

EXERCICE RÉSOLU 6 Trouver la primitive soumise à une condition initiale

ÉNONCÉ

Trouvez la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{x+1}$ telle que $F(\ln 2) = 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

La fonction $\Phi : x \mapsto e^{x+1}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

En effet, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $\Phi'(x) = 1 \times e^{x+1} = f(x)$.

Toute autre primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = \Phi(x) + k$ où k est une constante.

La condition initiale $F(\ln 2) = 0$ s'écrit $e^{\ln 2 + 1} + k = 0$, d'où $k = -e^{\ln 2 + 1}$ soit $k = -e \times e^{\ln 2} = -2e$.

Ainsi la primitive cherchée est définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x) = e^{x+1} - 2e$.

Remarque. Cette égalité s'écrit aussi $F(x) = ee^x - 2e = e(e^x - 2)$.

Sous cette forme, il est aisé de contrôler que F s'annule en $\ln 2$.

➔ EXERCICES 34 à 36

5 Calculs de primitives

5.1 Primitives des fonctions usuelles

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent immédiatement aux résultats suivants.

- **Si** F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, **alors** F + G est une **primitive de** $f + g$ sur I.
- **Si** F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, **alors** λF est une **primitive de** λf sur I.

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent « par lecture inverse » le tableau de primitives suivant :

fonction f	primitive F	sur l'intervalle I = ...
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$

Note
Veillez au choix des intervalles pour les primitives de $x \mapsto x^n$ lorsque n est un entier relatif distinct de -1.

5.2 Formules générales

Le tableau suivant résume divers cas d'exploitation de la dérivée d'une fonction composée (voir chapitre 3, page 60) pour l'expression d'une primitive.
Dans chaque cas, u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

fonction f	primitive F	remarques
$u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Lorsque $n < -1$, pour tout x dans I, $u(x) \neq 0$.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$ $\ln(-u)$	$u > 0$ sur I $u < 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b) \ (a \neq 0)$	$x \mapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$	U primitive de u sur I

Note
Une primitive de $u'u^n$ lorsque $n < -1$ n'est définie que sur un intervalle I sur lequel u est dérivable et u ne s'annule pas.

COMPRENDRE

Primitives d'un polynôme

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n+1$.

Exemple.

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$.

Une primitive F de f s'obtient en calculant la somme des primitives de chacun de ses monômes.

Puisque $x \mapsto ax^p$ $(a \in \mathbb{R}^*,\ p \in \mathbb{N})$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{a}{p+1}x^{p+1}$, F est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x.$$

Primitives de $u' \times (g' \circ u)$

La dérivée, lorsqu'elle existe, d'une fonction composée $g \circ u$ est la fonction :

$$x \mapsto u'(x) \times g'[u(x)].$$

Donc, si pour tout x d'un intervalle I, $f(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$, alors une primitive F de f sur I est définie par $F(x) = g[u(x)]$.

Exemple.

$f(x) = 2x\cos(x^2)$, $I = [0\ ;\ \pi]$.

On pose $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$ d'où $g(x) = \sin x$.

On reconnaît :

$$f(x) = u'(x) \times g'[u(x)].$$

Puisque $f = (g \circ u)'$ alors une primitive de f sur I est la fonction :

$$F = g \circ u.$$

Ainsi, pour tout x de I,

$$F(x) = \sin(x^2).$$

Remarque. Par dérivation, il est aisé de vérifier que F est une primitive de f.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Calculer des primitives

ÉNONCÉ

Pour chacune des fonctions f continues sur l'intervalle I indiqué, trouvez une primitive F sur I.

1) $f(x) = (3x-1)^6$; $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^4}$; $I = \left]\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

3) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; $I =]-1\ ;1[$.

4) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$; $I = \mathbb{R}$.

POINT MÉTHODE

On écrit f sous la forme αg, où α est un réel et g une fonction dont on connaît une primitive grâce aux tableaux. Les formes recherchées sont :

$$f = \alpha u'u^n ;\quad f = \alpha\frac{u'}{\sqrt{u}} ;\quad f = \alpha\frac{u'}{u} ;\quad f = \alpha u'e^u.$$

Un contrôle du résultat trouvé est toujours possible ; en dérivant F, on doit trouver f.

SOLUTION COMMENTÉE

1) La présence d'un exposant oriente vers la forme $\alpha u'u^n$ $(n > 0)$.

Posons $u(x) = 3x - 1$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3$.

Ainsi $f(x) = \frac{1}{3} \times 3 \times (3x-1)^6$, donc $f = \frac{1}{3}u'u^6$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7}u^7 = \frac{1}{21}u^7$, d'où $F(x) = \frac{1}{21}(3x-1)^7$.

2) L'exposant au dénominateur incite à la forme $\alpha u'u^n$ avec n négatif.

Posons $u(x) = 2x - 1$; u est dérivable sur I et $u'(x) = 2$.

Ainsi $f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2x-1)^{-4}$, donc $f = \frac{1}{2}u'u^{-4}$.

Une primitive sur I est $F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-3}u^{-3} = -\frac{1}{6u^3}$, d'où $F(x) = \frac{-1}{6(2x-1)^3}$.

3) Dans ce quotient de deux polynômes, la comparaison de leurs degrés conduit à rechercher la forme $\alpha\frac{u'}{u}$.

Posons $u(x) = x^2 - 1$; u est dérivable sur I et $u'(x) = 2x$.

Ainsi $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1}$, donc $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$. En outre, $u < 0$ sur I, donc une primitive est $F = \frac{1}{2}\ln(-u)$, d'où $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

4) La présence d'un radical incite à rechercher la forme $f = \alpha\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

Posons $u(x) = x^2 + 1$; $u > 0$ et u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$.

Ainsi $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ donc $f = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u} = 3\sqrt{u}$, d'où $F(x) = 3\sqrt{x^2+1}$.

→ EXERCICES 23 à 33

6 Calculs d'intégrales

6.1 Expression d'une intégrale à partir d'une primitive

THÉORÈME 8

f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive quelconque de *f* sur I, *a* et *b* sont deux réels de I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. D'après le théorème 7, la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de *f* sur I telle que $G(a) = 0$. Si F est une primitive quelconque de *f* sur I, alors il existe une constante réelle *k* telle que pour tout *x* de I, $G(x) = F(x) + k$. Or $G(a) = 0$ donc $k = -F(a)$ et ainsi $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$. En choisissant $x = b$, on obtient $G(x) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Remarque. On écrit souvent la différence $F(b) - F(a)$ sous la forme condensée $[F(t)]_a^b$.

Ainsi : $$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

EXEMPLE Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$ a pour primitive $x \mapsto \sin x$ d'où :

$$\int_0^{\pi} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0.$$

6.2 Intégration par parties

THÉORÈME 9

u et *v* sont deux fonctions **dérivables** sur un intervalle I, telles que leurs dérivées *u'* et *v'* sont **continues** sur I. Alors pour tous réels *a* et *b* de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt.$$

Note
La formule du théorème 9 est appelée **formule d'intégration par parties.**

Démonstration. La fonction *uv* est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$.
Ainsi $uv' = (uv)' - u'v$ **[1]**. Puisque *uv'*, $(uv)'$ et *u'v* sont continues sur I, on déduit de **[1]** que :

$$\int_a^b (uv')(t)\,dt = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]\,dt.$$

D'après la linéarité de l'intégration (théorème 2) :

$$\int_a^b (uv')(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b (u'v)(t)\,dt \quad \textbf{[2]}.$$

Or *uv* est une primitive de $(uv)'$ sur I, donc $\int_a^b (uv)'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b$.

Ainsi **[2]** s'écrit $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$.

L'IDÉE de la démonstration

On intègre, sous les bonnes hypothèses, chacune des fonctions de la formule $(uv)' = u'v + uv'$. Et *uv* est une primitive de $(uv)'$.

EXEMPLE Calcul de $\int_0^1 te^t\,dt$

$\int_0^1 te^t\,dt$ est de la forme $\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt$, avec $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$.
Alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$. (Les fonctions *u* et *v* sont dérivables sur [0 ; 1] et leurs dérivées *u'* et *v'* continues sur [0 ; 1].) D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 te^t\,dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t\,dt = [te^t]_0^1 - [e^t]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

COMPRENDRE

Intérêt du théorème 8

Grâce à ce théorème, on peut calculer facilement $\int_a^b f(t)\,dt$ lorsqu'on connaît explicitement une primitive F de f sur un intervalle contenant les bornes d'intégration.

Exemple.

On veut calculer

$$K = \int_{-2}^{1} (t^4 + 1)\,dt.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto f(t) = t^4 + 1$ est la fonction $t \mapsto F(t) = \frac{1}{5}t^5 + t$.

Ainsi $K = \left[\frac{1}{5}t^5 + t\right]_{-2}^{1}$, soit

$$K = \left(\frac{1}{5} + 1\right) - \left(-\frac{32}{5} - 2\right) = \frac{48}{5}.$$

Expression d'une primitive sous forme intégrale

Inversement, le calcul intégral permet d'exprimer des primitives sous forme d'intégrales $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (voir théorème 7).

Même si le calcul exact de l'intégrale est impossible, parfois, on peut obtenir des renseignements sur F grâce aux propriétés de l'intégration.

➜ EXERCICE RÉSOLU 9

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 8 BAC Intégrer par parties

ÉNONCÉ Calculez l'intégrale $K = \int_0^1 (1 - x)e^{-x}\,dx$.

SOLUTION COMMENTÉE

Les formules connues sur le calcul des primitives ne permettent pas d'obtenir directement une primitive de $f : x \mapsto (1 - x)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Mais f est un produit de fonctions d'où l'idée d'intégrer par parties.

K est de la forme $\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$ avec $u(x) = 1 - x$ et $v'(x) = e^{-x}$.

Posons : $u(x) = 1 - x$; $u'(x) = -1$;

$v'(x) = e^{-x}$; $v(x) = -e^{-x}$.

u et v sont deux fonctions dérivables, de dérivées u' et v' continues sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème 9 :

$$K = [-(1 - x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-1)(-e^{-x})\,dx = 1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$K = 1 - [-e^{-x}]_0^1 = 1 - (-e^{-1} + 1) \text{ donc } K = e^{-1}.$$

➜ EXERCICES 51 à 54

EXERCICE RÉSOLU 9 BAC Utiliser l'intégration par parties pour calculer une primitive

ÉNONCÉ Trouvez une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de $f : x \mapsto \ln x$.

SOLUTION COMMENTÉE

Les « formules » ne permettent pas un tel calcul ; mais puisque ln est une fonction continue sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \ln t\,dt$ est la primitive nulle en 1 de f sur $]0 ; +\infty[$.

Notons qu'on peut écrire $F(x) = \int_1^x 1 \times \ln t\,dt$ et intégrons par parties.

Posons : $u(t) = \ln t$; $u'(t) = \frac{1}{t}$;

$v'(t) = 1$; $v(t) = t$.

u et v sont dérivables, de dérivées u' et v' continues sur $]0 ; +\infty[$, donc d'après le théorème 9 :

$$F(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t\,dt = x\ln x - \int_1^x 1\,dt$$

$$F(x) = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1.$$

Ainsi la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$ est la primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ telle que $F(1) = 0$.

Remarques.

- L'écriture $\ln t = 1 \times \ln t$, qui est une trivialité, a cependant permis de calculer l'intégrale en utilisant le théorème d'intégration par parties. Ce procédé mérite d'être retenu.
- Si on ajoute la constante -1 à l'expression de $F(x)$, on obtient une autre primitive : $x \mapsto x\ln x - x$.

➜ EXERCICES 55 à 58

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

f est une fonction **continue** sur un **intervalle** I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal où l'unité d'aire est celle du rectangle de base. Les nombres a, b, c sont des réels quelconques de I.

Notion d'intégrale

• L'intégrale de f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est un nombre qui ne dépend que de f et de $[a\,;b]$.

On le note $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $\int_a^b f(x)\,dx$...

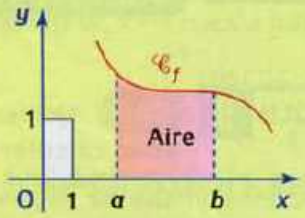
• $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$.

• $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

• On démontre que si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

• **Relation de Chasles** : quels que soient a, b et c, $\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$.

• Si $a < b$ et f **positive** sur $[a\,;b]$, son intégrale entre a et b exprime, dans l'unité d'aire choisie, « **l'aire sous $\mathscr{C}_f$** » sur $[a\,;b]$.



• La **linéarité** de l'intégration permet d'écrire :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt.$$

• Si $a \leqslant b$, on peut **intégrer l'inégalité** de fonctions continues $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$$

Primitives

• f possède des **primitives** sur l'intervalle I. Lorsqu'on connaît une primitive F de f, alors toute autre primitive s'écrit sur I, $F + k$ $(k \in \mathbb{R})$.

• Il n'existe qu'une seule primitive de f sur I qui « prend la valeur y_0 en x_0 ».

• **Dériver et chercher des primitives** (on dit aussi intégrer) sont des opérations inverses l'une de l'autre, dans le cadre des fonctions continues.

➜ EXERCICE RÉSOLU 8

• La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est **la primitive de f sur I nulle en a**. Ainsi pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$.

DES réflexes À AVOIR

Aires et intégrales

• Pour trouver une aire grâce au calcul intégral, pensez à décomposer l'intervalle d'intégration en sous-intervalles sur lesquels f est de signe constant puis tenez compte des conventions de signe.

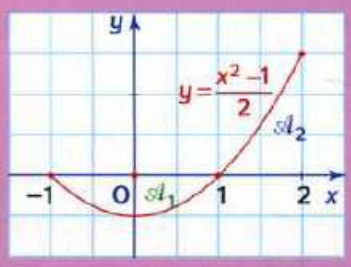
Exemple. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$

$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

$\mathscr{A}_1 = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$;

$\mathscr{A}_2 = \int_1^2 f(x)\,dx$;

d'où $\mathscr{A} = \dfrac{4}{3}$ u.a.



• Rappelez-vous que l'unité d'aire n'est pas toujours une unité usuelle.

Exemple. Si le repère est orthonormal d'unité 3 cm, alors 1 u.a. = 9 cm².

• Pensez à interpréter, si possible, une intégrale comme l'aire d'un domaine.

• Avant de calculer l'aire entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, assurez-vous de leur position, puis intégrez la fonction **différence** nécessairement **positive**.

Primitives

• N'oubliez pas que vous pouvez contrôler que l'expression d'une primitive F de f est correcte. La dérivée de F doit être f.

• Lorsque le calcul d'une primitive de f n'est pas possible par l'utilisation des formules usuelles, pensez à une intégration par parties :

$$\int_a^x u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\,dt.$$

➜ EXERCICE RÉSOLU 9

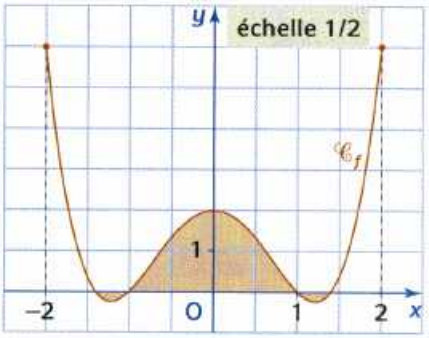
DES erreurs À ÉVITER

« $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$ » n'est vraie que si $a \leqslant b$.

TD 1 Calculs d'aires planes

1 Courbe et symétrie

La figure ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 3x^2 + 2$ sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
Les unités graphiques sont 2 cm sur l'axe (Ox) et 1 cm sur l'axe (Oy).
L'**objectif** de ce paragraphe est de calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ coloré.

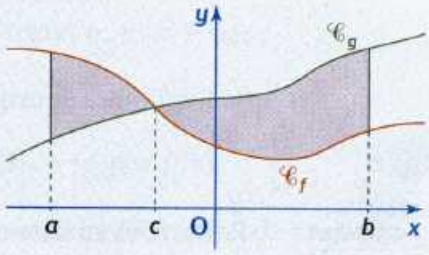


1. Prouvez que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet (Oy) comme axe de symétrie.

2. Calculez les racines de la fonction polynôme f.

3. On rappelle que lorsque f est continue et $f \geqslant 0$ sur un intervalle J, l'aire en u.a. est donnée par son intégrale $I(f)$ sur J mais que lorsque $f \leqslant 0$, cette aire est donnée par $-I(f)$.
Décomposez l'intervalle d'intégration en sous-intervalles afin d'exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide d'intégrales. Déduisez-en la valeur de $\mathcal{A}$.

CONCLUSION De façon plus générale, on admettra que pour calculer l'aire entre deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur un intervalle $[a ; b]$:
- on décompose cet intervalle en sous-intervalles sur lesquels la fonction différence est de signe constant,
- on intègre cette fonction différence en veillant au lien entre intégrale et aire suivant son signe :



$$\mathcal{A} = \int_a^c (f-g)(t)\,dt - \int_c^b (f-g)(t)\,dt.$$

2 Courbe et asymptote oblique

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 + e^{-x})$. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
L'**objectif** de ce paragraphe est d'étudier la limite de l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et son asymptote.

1. a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dressez le tableau de variations de f.

Aide. Utilisez la dérivée seconde f'' pour étudier le signe de la dérivée f'.

b) Vérifiez que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. Précisez la position de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.

c) Tracez la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. a) λ est un réel strictement positif. Calculez, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine, ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant \lambda$ et $x \leqslant y \leqslant f(x)$.

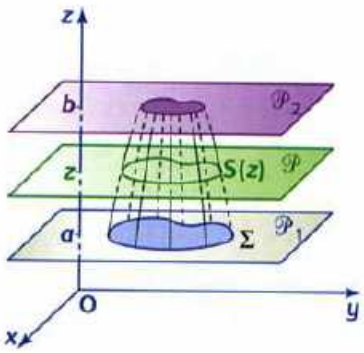
b) Quelle est la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$?

TD 2 Calculs de volumes

Un solide Σ est délimité par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ dans un repère orthonormal. On note $\mathcal{V}$ le volume de ce solide et S(z) l'aire de la section de ce solide par le plan $\mathcal{P}$, parallèle à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, de cote z ($a \leqslant z \leqslant b$).
Nous admettrons que $\mathcal{V}$ peut être calculé par la formule :

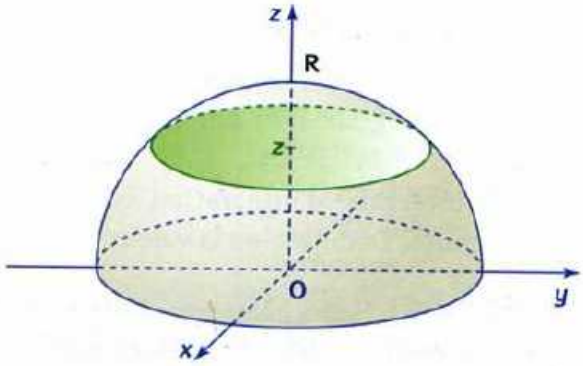
$$\mathcal{V} = \int_a^b S(z)dz \quad [1].$$

Voici quelques exemples d'utilisation de cette formule.



1 Volume d'une boule de rayon R

Il suffit de trouver le volume d'une demi-boule de rayon R et de le multiplier par 2.



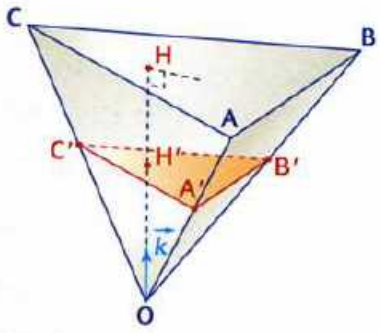
1. Expliquez pourquoi, avec les notations de la figure :

$$S(z) = \pi(R^2 - z^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz.$$

2. Retrouvez la formule $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2 Volume d'une pyramide

Considérons la pyramide triangulaire ci-contre, de hauteur [OH].
On note h = OH et S l'aire de la base ABC.
On appelle H′ un point de l'axe $(O ; \vec{k})$, intérieur à la pyramide. La section de la pyramide par un plan parallèle au plan (ABC) et passant par H′ est un triangle A′B′C′.
On pose OH′ = z.



1. Utilisez une homothétie de centre O pour prouver que l'aire S(z) de la section A′B′C′ est telle que :

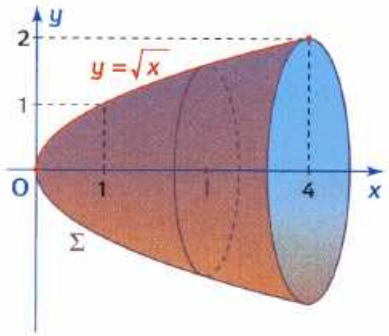
$$S(z) = S \times \frac{z^2}{h^2}.$$

2. Déduisez-en, en utilisant [1], que le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}Sh$.

Commentaire. En vous inspirant de la méthode suivie dans les deux paragraphes précédents, vous pouvez retrouver le volume d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution et d'un prisme droit.

3 Volume d'un solide de révolution

La figure ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$. Par rotation autour de l'axe (Ox), la courbe $\mathscr{C}_f$ engendre un solide de révolution Σ.



1. Quelle est la nature de la section de ce solide par un plan perpendiculaire à (Ox) passant par le point $I(x ; 0)$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$?

2. Exprimez l'aire $S(x)$ de cette section en fonction de x.

3. Déduisez-en le volume $\mathscr{V}$ du solide Σ.

TD 3 La constante d'Euler

L'**objectif** de ce TD est d'étudier le comportement d'une suite grâce à des interprétations géométriques puis d'introduire deux suites adjacentes.
On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

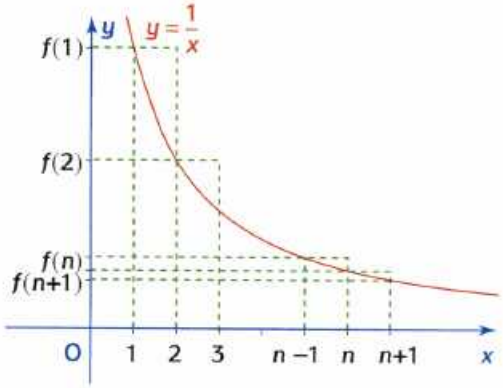
Ainsi $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ où f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturez le comportement de (S_n) (sens de variation et convergence).

2. **a)** Prouvez que la suite (S_n) est strictement croissante.

b) La figure ci-contre permet de considérer chaque terme $f(k)$ de la somme comme l'aire d'un rectangle de largeur 1 et de hauteur $f(k)$.

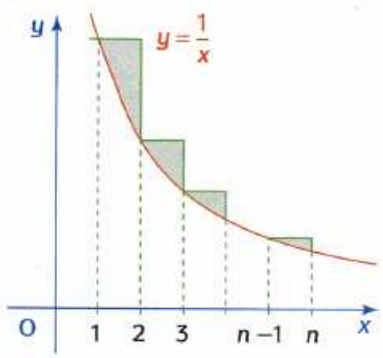
Comparez, pour tout $n \geqslant 1$, S_n et $\int_1^{n+1} f(t)\,dt$ puis déduisez-en que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.



3. On remarque que la différence de S_{n-1} avec $\ln n$ est représentée géométriquement par la somme des aires des triangles « curvilignes » colorés verts. Pour l'étudier, on pose pour tout entier n, $n \geqslant 2$, $u_n = S_{n-1} - \ln n$.

a) Prouvez que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) Déduisez-en que la suite (u_n) est croissante.



Aide. On rappelle que pour tout réel x, $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

4. On pose, pour tout entier n, $n \geqslant 2$, $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

a) Prouvez que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. Déduisez-en que la suite (v_n) est décroissante.

b) Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Déduisez-en que (u_n) et (v_n) convergent vers un réel, noté γ. Donnez, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de γ d'amplitude 10^{-2}.

CONCLUSION Ce réel γ s'appelle **constante d'Euler** :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right].$$

Par des procédés d'analyse numérique, on obtient $\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,9$. Euler a trouvé 16 décimales exactes de son écriture dès 1769. Actuellement, on ne sait toujours pas si γ est rationnel ou pas. (Voir exercice 161, page 230).

TD 4 Du calcul intégral aux primitives

L'**objectif** de ce TD est de mettre en évidence deux techniques de calcul de primitives dans le cas où les méthodes de calcul habituelles par lecture inverse de tableaux de dérivation ne peuvent pas être appliquées.

1 Utilisation de l'intégration par parties

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}\cos x$ et $g(x) = e^{2x}\sin x$.
Les fonctions F et G telles que :

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad G : x \mapsto \int_0^x g(t)\,dt.$$

sont des primitives de f et g sur $\mathbb{R}$.

1. Par intégration par parties, prouvez que pour tout réel x :

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}G(x) \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}F(x).$$

2. Déduisez-en les expressions de $F(x)$ et $G(x)$.

3. Vérifiez que f et g admettent des primitives du type $x \mapsto e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$ où A et B sont des constantes réelles.

CONCLUSION Dans le cas général, le raisonnement précédent conduit au résultat suivant, si α et ω sont deux réels non nuls, les fonctions :

$$x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\omega x) \quad \text{et} \quad x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\omega x)$$

admettent des primitives du type :

$$x \mapsto e^{\alpha x}[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]$$

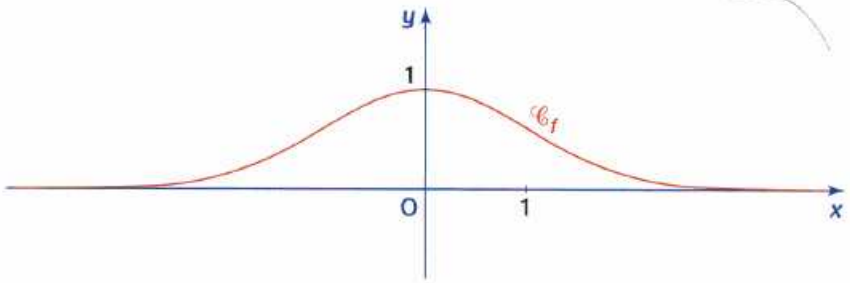
où A et B sont des réels. La donnée de formes particulières de certaines primitives permet alors de les déterminer sans avoir recours à l'intégration par parties.

4. **Application.** Utilisez la forme particulière indiquée dans le commentaire précédent, pour rechercher des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

$$x \mapsto e^{-2x}\cos(3x) \quad \text{et} \quad x \mapsto e^{-2x}\sin(3x).$$

2 Étude d'une primitive, calcul approché de ses valeurs

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous.
On admettra que l'aire sous la courbe exprimée en u.a. sur tout l'intervalle $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2\pi}$.



Le **but** de ce TD est d'étudier la primitive F de f qui s'annule en 0.

1. Étude globale de F

a) Démontrez que f est paire puis étudiez ses variations sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) La primitive F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
Prouvez que F est impaire.

Aide. Pensez à interpréter les intégrales en termes d'aires.

c) Étudiez les variations de F sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$.

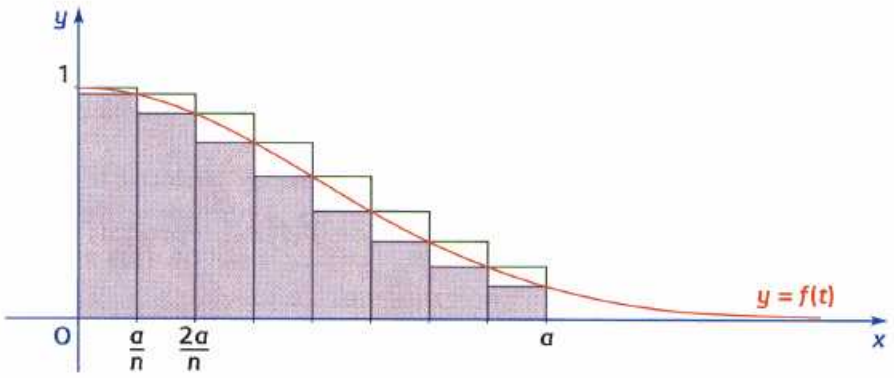
2. Programmation du calcul de la valeur approchée de $F(a)$ ($a > 0$).

Utilisons la méthode suivante, dite **méthode « des rectangles »**, pour calculer $F(a)$: on encadre l'aire sous la courbe sur $[0 ; a]$ par deux suites d'intégrales de fonctions en escalier. L'intervalle $[0 ; a]$ est divisé en n intervalles ($n \geqslant 1$) de même longueur ; les suites sont définies par :

$$u_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n} a\right)$$

et

$$v_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} a\right).$$



a) Prouvez que $u_n - v_n = \frac{a}{n}\left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right]$.

b) Trouvez un entier $n(a)$ tel que lorsque $n \geqslant n(a)$:

$$0 < u_n - v_n < 10^{-2}.$$

c) On se propose d'obtenir des encadrements d'amplitude 10^{-2} de $F(a)$ pour diverses valeurs de a, sur calculatrice, à l'aide de l'algorithme suivant.

Algorithme	Commentaires
Lire A Lire N Pour K de 1 à N faire $U \leftarrow U + A/N * f\left(\frac{K-1}{N}A\right)$ $V \leftarrow V + A/N * f\left(\frac{K}{N}A\right)$ Fin du pour Afficher U Afficher V	On donne les valeurs de A puis de N. Initialisation : on met les variables U et V à 0. Pour toutes les valeurs de K de 1 à N, • on ajoute dans U l'aire du rectangle supérieur dans l'intervalle n° K • on ajoute dans V l'aire du rectangle inférieur dans l'intervalle n° K. Affichage des résultats,

Famille CASIO	Famille TI
"A = " : ? → A "N = " : ? → N 0 → U : 0 → V For 1 → K to N $U + (A \div N) \times f\left(\frac{K-1}{N}A\right) \rightarrow U$ $V + (A \div N) \times f\left(\frac{K}{N}A\right) \rightarrow V$ Next "V = " : V ◢ "U = " : U ◢	Input "A = ", A Input "N = ", N 0 → U : 0 → V For(K,1,N) $U + (A \div N) \times f\left(\frac{K-1}{N}A\right) \rightarrow U$ $V + (A \div N) \times f\left(\frac{K}{N}A\right) \rightarrow V$ End Disp "V", V Disp "U", U

● Utilisez cette programmation pour donner des encadrements d'amplitude 10^{-2} de F(a), lorsque a prend les valeurs 0,25 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 3.

● Tracez $\mathscr{C}_F$.

Note
Il existe des méthodes plus performantes que la méthode des rectangles pour calculer des valeurs approchées d'intégrales.

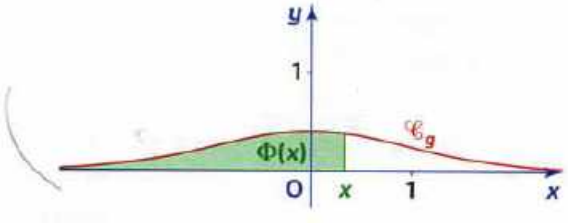
Commentaire. Par cette méthode dite « des rectangles », on peut déterminer, à une précision donnée, des valeurs approchées de F(a). L'amplitude des encadrements est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, donc cette méthode nécessite beaucoup d'itérations pour obtenir une précision importante. Elle n'est pas très performante.

La fonction F, dont les valeurs sont définies par des intégrales, est une fonction d'un nouveau type. Elle ne s'exprime pas à l'aide de fonctions usuelles mais des valeurs approchées de F(x) peuvent être calculées.

En probabilité, on utilise la fonction $g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f$ et la fonction Φ qui, à tout réel x, associe l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty ; x]$.

La figure ci-dessous et les considérations de symétrie montrent que $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F + \frac{1}{2}$.

Un extrait de la table des valeurs de $\Phi(x)$ est reproduit ci-dessous.



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0,5	0,05	0,520
0,01	0,504	0,06	0,524
0,02	0,508	0,07	0,528
0,03	0,512	0,08	0,532
0,04	0,516	0,09	0,536

TD 5 Intégrales en cinématique

L'**objectif** de ce TD est de montrer comment le calcul intégral permet de déterminer l'expression de la distance parcourue par un point mobile sur un axe à l'aide d'une intégrale, puis de relier la notion de vitesse moyenne à celle de valeur moyenne de la fonction vitesse sur un intervalle de temps.

1 Expression intégrale de la distance parcourue

M est un point mobile sur une droite d munie d'un repère $(O ; \vec{i})$.
Sa loi horaire $t \mapsto y(t)$ est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Il se déplace avec une vitesse instantanée $v(t)$ et à la date $t_0 = 0$, il est à l'origine. On suppose que la fonction vitesse v est positive et continue sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On note t_1 et t_2 deux réels positifs tels que $t_1 < t_2$.

1. Pourquoi la fonction y est-elle une primitive de v sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$?

2. Déduisez-en que la distance $\Delta(t_1, t_2)$, parcourue par M entre les dates t_1 et t_2, s'exprime par $\Delta(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$.

Application numérique. $v(t) = (t+1)\mathrm{e}^{\frac{t}{10}}$ (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$).
Calculez la distance parcourue par M entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 10$.

Commentaire. La distance parcourue est représentée par l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_v$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$. Ainsi dans le calcul est illustrée l'homogénéité des unités : $\Delta = \int_0^{10} v(t)\mathrm{d}t$ avec v exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et t exprimé en s ; l'intégrale représente une grandeur exprimée en « unité produit », c'est-à-dire en m.

2 Vitesse moyenne

On reprend les hypothèses précédentes.

1. Exprimez la vitesse moyenne $\mathrm{V_M}$ entre les dates t_1 et t_2 $(t_1 < t_2)$.

2. Démontrez que $\mathrm{V_M} = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$. Ainsi $\mathrm{V_M}$ est la valeur moyenne de la fonction v sur l'intervalle $[t_1 ; t_2]$.

Application numérique. Calculez $\mathrm{V_M}$ pour les données de l'application numérique du paragraphe précédent.

Commentaire. Si $v(t)$ est exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, t en s, nous savons que l'intégrale est exprimée en « unité produit », en m. Ainsi, la valeur moyenne de v s'exprime avec la même unité que $v(t)$, en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
En physique, la valeur moyenne d'une fonction f s'exprime dans la même unité qu'une image par f.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. et 2. Notion d'intégrale. Extensions

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel sont représentées les fonctions.

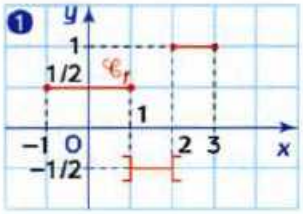
1 Représentez la fonction en escalier f indiquée puis calculez l'intégrale $I(f)$ dans chacun des cas.

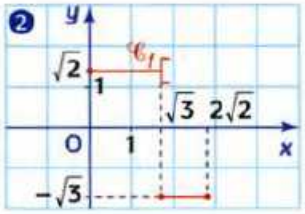
a) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{si } -3 \leqslant x < 0 \\ \frac{5}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{3} & \text{si } -\sqrt{3} \leqslant x < \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \text{si } \sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases}$.

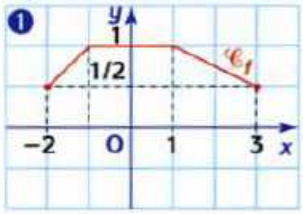
c) $f(x) = E(x)$ sur l'intervalle $[-3 ; 3]$. $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

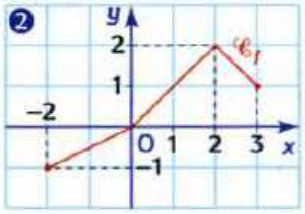
2 Chaque figure est la représentation d'une fonction en escalier f. Indiquez l'expression de $f(x)$ suivant les intervalles et calculez l'intégrale $I(f)$ sur l'intervalle de définition.





3 Pour chaque figure, la fonction affine par morceaux f est représentée par la courbe indiquée.
Calculez, en utilisant des aires, l'intégrale $I(f)$ sur l'intervalle de définition de f.



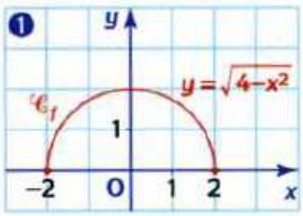


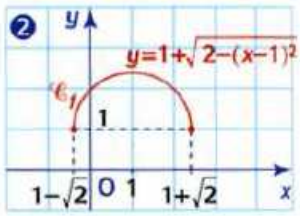
☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 1, page 197.**

4 Dans chaque cas, la fonction f est représentée par sa courbe $\mathscr{C}_f$ dont une équation est indiquée.

1. Prouvez que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle. Précisez son centre et son rayon.

2. Déduisez-en l'intégrale de f sur son intervalle de définition.





☞ **Aide.** **Le cercle de centre $A(a ; b)$ et de rayon r a pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.**

5 Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x \leqslant 3 \\ x-5 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

et $$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ -\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

1. Calculez les intégrales sur $[-1 ; 5]$ de f et g.

2. Déduisez-en les intégrales sur $[-1 ; 5]$ des fonctions $f+4g$ et $5f-2g$.

3. Encadrement. Valeur moyenne

6 Comparez, sans les calculer, les réels I et J.

a) $I = \int_1^2 xe^x dx$; $J = \int_1^2 x^2e^x dx$.

b) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$; $J = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$.

c) $I = \int_0^1 x^2 \sin x dx$; $J = \int_0^1 x \sin x dx$.

☞ **Aide.** **Comparez les fonctions sur l'intervalle.**

7 Démontrez les inégalités suivantes :

a) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t dt \geqslant -\frac{\ln 2}{2}$. **b)** $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx \leqslant \frac{1}{2}$.

c) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t^2+1)\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}$.

8 Démontrez les encadrements :

a) $\frac{9}{4} \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant 9$.

b) $\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 3$.

9 Démontrez les encadrements :

a) $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant 1$.

b) $2e^{-4} \leqslant \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \leqslant 2$.

c) $2\ln 3 \leqslant \int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$.

10 La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (1+t^n)\,dt.$$

1. Prouvez que la suite (I_n) est décroissante.

2. Est-elle convergente ?

Aide. Voir l'exercice résolu 3, page 199.

11 Calculez la valeur moyenne μ sur l'intervalle $I = [-1\,;1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Aide. Prouvez que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle.

12 Dans chacun des cas, μ désigne la valeur moyenne d'une fonction continue f sur l'intervalle I.
Calculez l'intégrale indiquée.

a) $\mu = 2$; $I = [1\,;4]$; $\int_1^4 f(x)\,dx$.

b) $\mu = \ln 2$; $I = [1\,;3]$; $\int_3^1 f(x)\,dx$.

c) $\mu = \frac{2}{\pi}$; $I = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$; f paire ; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$.

13 Trouvez un encadrement de la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle I donné.

a) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $I = [0\,;1]$.

b) $x \mapsto \ln x$, $I = [1\,;e]$.

c) $x \mapsto e^{x^2}$, $I = [1\,;\sqrt{2}]$.

Aide. Pensez à l'inégalité de la moyenne.

14 Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx.$$

1. Démontrez que $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$.

2. La suite (I_n) est-elle convergente ?

Aide. Voir l'exercice résolu 4, page 199.

15 f est la fonction définie par $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ sur $[0\,;+\infty[$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^n f(t)\,dt.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

Aide. Étudiez le signe de $u_{n+1} - u_n$.

2. Prouvez que pour tout entier n, $n \geqslant 1$, $u_n > \frac{n-1}{2}$.
La suite (u_n) converge-t-elle ?

4. et 5. Primitives

Pour les exercices 16 à 19, prouvez que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I.

Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 201.

16 **a)** $f(x) = \tan^2 x$; $F(x) = \tan x - x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

b) $f(x) = \cos x - x\sin x$; $F(x) = x\cos x$; $I = \mathbb{R}$.

17 **a)** $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$; $F(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$; $I =]0\,;+\infty[$.

b) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$; $F(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$; $I =]0\,;1[$.

18 **a)** $f(x) = \ln x$; $F(x) = x(\ln x - 1)$; $I =]0\,;+\infty[$.

b) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$; $F(x) = \ln(\ln x)$; $I =]1\,;+\infty[$.

19 **a)** $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$; $F(x) = x - \ln(1+e^x)$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{e^x}$; $F(x) = 2\sqrt{e^x}$; $I = \mathbb{R}$.

Pour les exercices 20 à 22, dites si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur l'intervalle I indiqué.

20 **a)** $F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$; $G(x) = \frac{x^2+7x-5}{x-1}$; $I =]1\,;+\infty[$.

b) $F(x) = \tan^2 x$; $G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Aide. Calculez $G(x) - F(x)$.

21 **a)** $F(x) = \frac{3}{2x-1}$; $G(x) = \frac{9-6x}{4x-2}$; $I = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

b) $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $G(x) = \frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$; $I = \mathbb{R}$.

Aide. Calculez $G(x) - F(x)$.

22 $F(x) = 2\sin 5x + 3\sin 3x + 4\sin x$;
$G(x) = \sin x - \sin^3 x + 2\sin^5 x$; $I = \mathbb{R}$.

Aide. Examinez les valeurs de $F(x)$ et de $G(x)$ pour des valeurs particulières de x.

EXERCICES

Pour les exercices 23 à 33, donnez une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 7, page 203.

23 **a)** $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3}$; I = $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; I = $]0 ; +\infty[$.

24 **a)** $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; I = $]0 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2}$; I = $]-\infty ; 0[$.

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1$; I = $]0 ; +\infty[$.

25 **a)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$; I = $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; I = $]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{\sqrt{-x^2 - 5x + 6}} - 1$; I = $]-6 ; 1[$.

26 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + \dfrac{4}{3x^2} - \sqrt{2}$; I = $]0 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; I = $]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} - 1$; I = $]-\infty ; 1[$.

27 **a)** $f(x) = (x+2)^3$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}$; I = $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = (2x-1)^3$; I = $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = 2(3x-1)^5$; I = $\mathbb{R}$.

28 **a)** $f(x) = 2x(1 + x^2)^7$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}$; I = $]-4 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$; I = $\left]-\infty ; \dfrac{1}{3}\right[$.

29 **a)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2 - x + 3)^2}$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2 - 2x - 3)^2}$; I = $]-1 ; 3[$.

c) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3 + 8)^3}$; I = $]-2 ; +\infty[$.

30 **a)** $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1$; I = $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$; I = $\mathbb{R}$.

31 **a)** $f(x) = \sin x \cos x$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos x(\sin^2 x - 3\sin x + 8)$; I = $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1$; I = $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

32 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$; I = $]4 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$; I = $]-\infty ; 4[$.

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x}$; I = $]0 ; 1[$.

☞ Aide. Pensez à examiner le signe du dénominateur.

33 **a)** $f(x) = e^{-x+1}$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = 2e^{3x-2}$; I = $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; I = $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}$; I = $\mathbb{R}$.

Pour les exercices 34 à 36, trouvez la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 6, page 201.

34 **a)** $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1$; F(2) = 0.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x$; F(1) = 0.

c) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$; F(0) = 0.

35 **a)** $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) $f(x) = \cos x \sin^2 x$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

c) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2}$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

36 **a)** $f(x) = \dfrac{2}{(2x+1)^2}$; F(−1) = 0.

b) $f(x) = \dfrac{-1}{3-x}$; F(1) = 1.

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$; F(0) = 0.

37 Trouvez la primitive F, sur un intervalle I à préciser, de la fonction f telle que la courbe $\mathscr{C}_F$ passe par le point A indiqué.

a) $f(x) = e^{3x+1}$; A(−1 ; 0).

b) $f(x) = xe^{-x^2}$; $A(\sqrt{\ln 2} ; 1)$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$; A(2 ; 0).

6. Calculs d'intégrales

Pour les exercices 38 à 43, calculez les intégrales I indiquées à l'aide d'une primitive.

38 **a)** $I = \int_0^4 (x-3)\,dx$. **b)** $I = \int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3)\,dt$.

c) $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \dfrac{1}{t}\right) dt$. **d)** $I = \int_1^4 \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}\right) dx$.

39 **a)** $I = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\,dx$. **b)** $I = \int_1^9 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

c) $I = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$. **d)** $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$.

40 **a)** $I = \int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^3\,dx$.

b) $I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$. **c)** $I = \int_1^2 \frac{t^3}{t^4+2}\,dt$.

41 **a)** $I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$. **b)** $I = \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$.

c) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$. **d)** $I = \int_0^{\pi} \sin(2t)\,dt$.

42 **a)** $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+5}}\,dx$. **b)** $I = \int_0^{\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

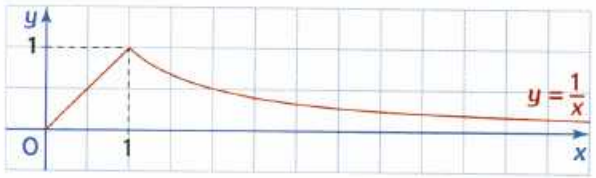
c) $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,dx$. **d)** $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-4}\,dx$.

43 **a)** $I = \int_1^2 \frac{1}{3x+2}\,dx$. **b)** $I = \int_0^1 5e^{3x}\,dx$.

c) $I = \int_{-1}^{1} e^{3t+4}\,dt$. **d)** $I = \int_0^1 te^{t^2-1}\,dt$.

44 La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous. Utilisez la relation de Chasles pour calculer les intégrales :

$$I = \int_0^3 f(t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_2^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt.$$



45 Calculez l'intégrale en utilisant les propriétés de l'intégration (relation de Chasles, linéarité).

a) $I = \int_1^e \ln t\,dt + \int_1^e \left(t + \ln\frac{1}{t}\right)dt$.

b) $J = \int_1^e \ln(1+t^2)\,dt + \int_e^1 \ln(1+t^2)\,dt$.

c) $K = \int_1^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t\,dt - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} \cos 2t\,dt$.

46 **1.** Trouvez deux réels a et b tels que, pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\{-3\,;3\}$, $\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$.

2. Déduisez-en $I = \int_4^5 \frac{1}{x^2-9}\,dx$.

47 **1.** Trouvez trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\{-3\}$, $\frac{4x^2-5x+1}{x+3} = ax+b+\frac{c}{x+3}$.

2. Déduisez-en $I = \int_2^0 \frac{4x^2-5x+1}{x+3}\,dx$.

48 **1.** Trouvez trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{x^2}{(x-1)^2} = a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$.

2. Déduisez-en $I = \int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx$.

49 **1.** Prouvez que pour tout réel x,

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

2. Déduisez-en $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

50 **ZOOM SUR... le théorème 9**

1. À quoi sert l'hypothèse « u et v sont dérivables sur l'intervalle I d'intégration et u' et v' sont continues sur cet intervalle » ?

2. f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ $f(0) = 0$ et pour tout $t > 0$, $f(t) = t\ln t$. La fonction f est dérivable donc continue sur $]0\,;+\infty[$ et puisque $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0 = f(0)$, f est aussi continue en 0. Donc f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et l'intégrale $\int_0^1 t\ln t\,dt$ existe.

a) Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème 9 pour calculer cette intégrale ?

b) Pourquoi peut-on utiliser ce théorème pour calculer $\int_\alpha^1 t\ln t\,dt$ pour tout réel $\alpha > 0$?

Pour les exercices 51 à 54, calculez les intégrales I et J à l'aide d'une intégration par parties.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 205.

51 **a)** $I = \int_1^e x\ln x\,dx$. **b)** $J = \int_1^{e^2} \ln t\,dt$.

52 **a)** $I = \int_0^{\pi} (x-1)\cos x\,dx$. **b)** $J = \int_0^1 (x+2)e^x\,dx$.

53 **a)** $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x\sin(3x)\,dx$. **b)** $J = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx$.

54 **a)** $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t}\,dt$. **b)** $J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

☞ **Aide.** Pour J, prenez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Pour les exercices 55 à 58, f est une fonction continue sur l'intervalle I contenant le réel a. Trouvez à l'aide d'une intégration par parties, la primitive F de f sur I telle que $F(a) = 0$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 9, page 205.

55 $I = \mathbb{R}$; $a = \pi$; $f(t) = t\cos t$.

56 $I =]0\,;+\infty[$; $a = 1$; $f(t) = t^2\ln t$.

57 $I =]0\,;+\infty[$; $a = 1$; $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$.

58 $I = \mathbb{R}$; $a = 0$; $f(t) = 2te^{-\frac{t}{2}}$.

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

59 Rechercher une primitive

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \sin(2x).$$

Objectif : trouver une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

1. L'existence d'une primitive est assurée car f est continue sur $\mathbb{R}$, mais on ne reconnaît pas dans l'expression de $f(x)$ une des « formes usuelles » qui permet le calcul de primitives. D'où l'idée d'exprimer F « sous la forme intégrale », en espérant que le théorème d'intégration par parties permettra de donner une expression explicite de $F(x)$.

a) Justifiez que la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

est la primitive de f s'annulant en zéro.

b) Vérifiez qu'une première intégration par parties conduit à :

$$F(x) = e^x \sin(2x) - 2\int_0^x e^t \cos(2t)\,dt.$$

2. L'intégrale du second membre est du même type que l'intégrale initiale, mais avec une fonction cosinus, d'où l'idée d'utiliser une seconde fois l'intégration par parties.
On peut prévoir après cette double intégration, la réapparition de :

$$\int_0^x e^t \sin(2t)\,dt = F(x).$$

a) Calculez $\int_0^x e^t \cos(2t)\,dt$.

b) Déduisez-en l'expression de $F(x)$.

3. Une autre solution
Au lieu d'intégrer, on peut penser à examiner les dérivées successives de f.
En effet lors d'une première dérivation, vont apparaître des termes du type $e^x \cos(2x)$ et donc, lors de la seconde, des termes du type $e^x \sin(2x)$, d'où la possibilité d'obtenir une relation entre $f''(x)$, $f'(x)$ et $f(x)$.

a) Pour tout réel x, calculez $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Exprimez $f(x)$ comme une combinaison de $f'(x)$ et $f''(x)$ du type $f(x) = af''(x) + bf'(x)$.

c) Déduisez-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

☞ **Commentaire.** **Les fonctions trigonométriques $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ et la fonction $x \mapsto e^x$ se prêtent bien à ces méthodes. Dans le second cas, la fonction f est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' = y$ sur $\mathbb{R}$.**

60 Primitives de $x \mapsto P(x)e^{-x}$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{-x}.$$

Objectif : savoir s'il existe un polynôme P tel que la fonction F définie par $F(x) = P(x)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Le problème à résoudre est un problème d'existence (voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche K, page 461).
Supposons donc l'existence d'un tel polynôme P et voyons ce qu'il en découle.
Puisque F est une primitive de f, pour tout réel x,

$$F'(x) = f(x).$$

Déduisez-en que $P'(x) - P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ **[1]**.

2. Pour poursuivre, il faut déduire d'autres renseignements sur P ; il serait déjà intéressant d'avoir une idée de son degré.

Prouvez que ce degré est inférieur ou égal à 3.

3. On peut alors poser, pour tout réel x :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Déduisez-en a, b, c, d.

☞ **Aide.** **Dire que deux polynômes non nuls sont égaux équivaut à dire que leurs coefficients respectifs sont égaux.**

4. Nous venons de prouver que si P existe, alors, nécessairement, sa forme est celle obtenue à la question 3.
Mais nous n'avons pas démontré que P existe ; il s'agit donc de prouver que P est bien solution du problème posé.

Faites cette preuve.
Concluez.

5. Une autre solution
Une autre idée est de penser à utiliser la forme intégrale d'une primitive. Ainsi par exemple, une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x (t^3 + t^2 + t + 1)e^{-t}\,dt.$$

Dès lors, on pense à une intégration par parties. Mais le polynôme est de degré 3 et à la première intégration par parties apparaîtra un polynôme de degré 2, obtenu par dérivation du polynôme initial.
On conçoit dès lors que trois intégrations par parties seront nécessaires.

Réalisez ces trois intégrations par parties successives et vérifiez que la fonction F est bien du type $x \mapsto P(x)e^{-x}$ avec P polynôme de degré 3.

☞ **Commentaire.** **Cette méthode est généralisable. Ainsi toute fonction du type $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$, où α est un réel donné et Q un polynôme de degré n, admet une primitive du type $P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme, lui aussi, de degré n.**
Ainsi la recherche d'une primitive d'une fonction de ce type, dite « *exponentielle polynôme* », peut être faite en cherchant *a priori* une primitive du type $P(x)e^{\alpha x}$ avec P de même degré que Q. Cette démarche permet d'éviter de nombreuses intégrations par parties successives.
En effet, il est en général plus simple de dériver une expression du type $P(x)e^{\alpha x}$ et d'identifier les coefficients de deux polynômes que de réaliser n intégrations par parties successives, surtout lorsque $n > 2$.

61 Expression d'une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier naturel n, par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

Objectif : calculer I_n pour tout entier n.

1. Le calcul des premiers termes semble aisé : lorsque $n = 0$ et $n = 1$, les fonctions à intégrer sont $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \sin t$.

Calculez I_0 et I_1.

2. On peut bien sûr tenter de calculer les termes suivants, mais on conçoit aisément que les calculs seront de plus en plus difficiles, d'où l'idée de chercher une formule permettant le calcul de « proche en proche » : on essaie d'établir une relation entre I_n et I_{n-1} ou I_{n-2} ...
Nous savons que la fonction sinus se prête à l'intégration par parties et, puisque $\sin^n t = \sin t \times \sin^{n-1} t$, on peut espérer en déduire une relation entre I_n et I_{n-1} ou I_n et I_{n-2} ou ...
Pour intégrer par parties, nous prendrons une primitive de la fonction $t \mapsto \sin t$.

a) Pour tout $n \geqslant 2$, prouvez par une intégration par parties que $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$.

b) Exprimez I_n en fonction de I_{n-2}.

3. Cette égalité, valable pour tout $n \geqslant 2$, permet donc de calculer I_2 à partir de I_0, puis I_4 à partir de I_2 ...
De même, elle permet de calculer I_3 à partir de I_1, I_5 à partir de I_3 ...
On peut donc calculer I_{2k} et I_{2k+1} pour tout $k \geqslant 0$.
Cherchons cependant à faire mieux et obtenir une expression explicite de I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.

En utilisant l'expression du **2. b)**, écrivez les égalités obtenues en remplaçant successivement n par $2k$, $2k-2$, ... 2.

4. Vous obtenez :

$$I_{2k} = \ldots$$
$$I_{2k-2} = \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_2 = \ldots I_0$$

La vue de ces égalités invite à multiplier membre à membre puisqu'on pressent des simplifications possibles. Mais pour cela, il faut s'assurer que chacun des facteurs est non nul.

a) Prouvez que chacune de ces intégrales est non nulle.

b) Déduisez-en I_{2k}.

c) Calculez de même I_{2k+1}.

☞ **Prolongement : Formule de Wallis.**

1. a) Prouvez que pour tout $n \geqslant 1$ et tout x dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$0 \leqslant \sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x.$$

b) Déduisez-en que :

$$1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{2n} \quad \text{et que} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

2. (u_n) est la suite définie par :

$$u_n = \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{1 \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\right]^2 (2n+1).$$

Démontrez que la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{\pi}$.

Ce résultat est connu sous le nom de formule de Wallis, du nom du mathématicien anglais John Wallis (1616-1703). Il a permis le calcul de valeurs approchées du nombre π.

EXERCICES

Pour progresser

Calcul de primitives

Pour les exercices 62 à 67, trouvez une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué par les méthodes usuelles.

62 **a)** $f: x \mapsto (x+1)(x^2+2x-1)^4$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f: x \mapsto \dfrac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f: x \mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; $I = \mathbb{R}$.

d) $f: x \mapsto (-2x+1)^5$; $I = \mathbb{R}$.

63 **a)** $f: x \mapsto \dfrac{2}{3x+1}$; $I = \left]-\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$.

b) $f: x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f: x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$; $I =]-\infty ; 1[$.

d) $f: x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $I =]-\pi ; 0[$.

64 **a)** $f: x \mapsto e^{2x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f: x \mapsto 2e^{-3x+2}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

d) $f: x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{2x+1}{x+1}}$; $I =]-1 ; +\infty[$.

65 • **a)** $f: x \mapsto \sin x + x\cos x$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f: x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$.

c) $f: x \mapsto \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$.

d) $f: x \mapsto \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$; $I =]-1 ; +\infty[$.

Aide. Pensez aux formules de dérivation d'un produit ou d'un quotient.

66 • **a)** $f: x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

b) $f: x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f: x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $I = \mathbb{R}$.

67 • **a)** $f: x \mapsto \tan x + \tan^3 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) $f: x \mapsto \tan^2 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) $f: x \mapsto 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$; $I = \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Aide. La dérivée de la fonction $x \mapsto \tan x$ est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$.

68 • BAC u et v sont les fonctions définies sur $I = \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $u(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$.

1. Vérifiez que pour tout x de I, $u'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

2. Trouvez la primitive de v, sur I, nulle en 0.

Aide. La dérivée de la fonction $x \mapsto \tan x$ est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Pour les exercices 69 à 78, f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Le cas échéant, prouvez que $f(x)$ s'écrit sous la forme indiquée, puis trouvez une primitive de f sur I.

69 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $I =]1 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-1}$.

70 $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}$; $I = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{2x+1}$.

Aide. Pensez au signe de $2x+1$ sur l'intervalle I.

71 $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$; $I =]2 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.

72 $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$.

a) $I =]3 ; +\infty[$. **b)** $I =]-3 ; 3[$. **c)** $I =]-\infty ; -3[$.

Aide. Pensez aux signes des dénominateurs sur l'intervalle I.

73 $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{(x+2)^2}$; $I =]-\infty ; -2[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$.

74 $f(x) = \dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$; $I =]-3 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{(x+3)^2}$.

75 • $f(x) = \dfrac{8x^2-4}{4x^2-1}$; $I = \left]-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{2x+1} + \dfrac{c}{2x-1}$.

76 • $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$; $I =]1 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

77 • $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$; $I =]1 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.

78 • $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^4}$; $I =]-\infty ; -1[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{(x+1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^4}$.

Pour les exercices 79 à 82, f désigne une fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$.

79 $f(x) = \cos^3 x$. Vérifiez que $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$. Trouvez une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

80 $f(x) = \sin x + \sin^3 x$.
Vérifiez que $f(x) = 2\sin x - \sin x \cos^2 x$. Trouvez une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

81 $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$. Trouvez des réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = \sin x(a\cos^2 x + b\cos^4 x)$.
Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

82 • $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$; en remarquant que $f(x) = \cos x(\sin^4 x \cos^4 x)$, écrivez $f(x)$ sous la forme $f(x) = \cos x(a\sin^4 x + b\sin^6 x + c\sin^8 x)$.
Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Pour les exercices 83 à 85, f désigne une fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$.
Linéarisez $f(x)$ (voir TD 3, chapitre 12, page 332) puis indiquez une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

83 $f(x) = \sin^4 x$.

84 $f(x) = \cos^4 x$.

85 • $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$.

☞ **Commentaire.** **Une primitive F sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f du type $x \mapsto a\cos^n x \sin^p x$ (a réel, n et p entiers naturels) peut être obtenue en utilisant l'une des méthodes précédentes.**
• Lorsque l'un des exposants est impair, par exemple p, la mise en facteur de $\sin x$ et l'utilisation de l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ permet d'écrire $f(x) = \sin x \times Q(\cos x)$ où Q est un polynôme. Ainsi, on sait trouver $F(x)$.
C'est le cas des exercices 81 et 82.
• Lorsque les deux exposants sont pairs, la méthode de linéarisation (voir TD 3, chapitre 12, page 332) permet d'écrire $f(x)$ sous forme d'une somme de termes de type $\lambda\cos(\alpha x)$ ou $\mu\sin(\beta x)$ dont on sait calculer une primitive.
C'est le cas des exercices 83 à 85.

86 • On se propose de trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin^4 x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Exprimez $f(x)$ en fonction de $f''(x)$ et $\cos(2x)$.
3. Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

87 • On se propose de trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^{2x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Trouvez des réels a et b tels que pour tout réel x,
$$f(x) = af''(x) + bf'(x).$$
3. Déduisez-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

88 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3e^{2x}$.
Trouvez une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(x) = P(x)e^{2x}$ où P est un polynôme de degré 3.

☞ **Aide.** **Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 60, page 218.**

Calcul d'intégrales

Pour les exercices 89 à 98, calculez les intégrales I et J indiquées.

89 $I = \displaystyle\int_0^1 2t(t^2+1)^3\,dt$; $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{(t^2+2t)^2}\,dt$.

90 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\,dt$; $J = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)dt$.

91 $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2u+1}\,du$; $J = \displaystyle\int_2^1 \frac{u+1}{u^2+2u}\,du$.

92 $I = \displaystyle\int_0^{-1} \frac{2}{\sqrt{1-3x}}\,dx$; $J = \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

93 $I = \displaystyle\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,dx$; $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - x\sin x)\,dx$.

94 $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1 e^{3x+4}\,dx$; $J = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 e^{\cos x}\sin x\,dx$.

95 • $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt$; $J = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt$.

96 • $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$; $J = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{x+2}\,dx$.

☞ **Aide.** $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$;
$\dfrac{x^2-1}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

97 • $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t\,dt$; $J = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$.

98 : $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x-1)(x+2)}\,dx$;
$J = \displaystyle\int_0^3 \frac{x^2+3x+1}{2x+3}\,dx$.

Pour les exercices 99 et 100, utilisez la parité des fonctions pour évaluer les intégrales proposées.

99 **a)** $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - x)\,dx$. **b)** $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$.

100 **a)** $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$.

b) $I = \int_{-2}^{2} \frac{t}{1+t^2+t^4} dt$.

101 **1.** Calculez $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.

2. On se propose de calculer $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

Calculez $I_1 + I_2$ et déduisez-en la valeur de I_2.

102 • On souhaite calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$.

1. Calculez $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$.

2. Calculez $I + J$ et déduisez-en la valeur de I.

103 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-x)e^x.$$

Prouvez que pour tout réel x, $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$.

Déduisez-en la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 59, page 218.

☞ **Note.** I peut aussi se calculer par intégration par parties.

104 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin x$.

Calculez $f(x) + f''(x)$ et déduisez-en la valeur de :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx.$$

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 59, page 218.

☞ **Note.** I peut aussi se calculer par intégration par parties.

Calcul à l'aide des aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel sont représentées les fonctions.

105 Dans chaque cas, f est une fonction en escalier ou une fonction affine par morceaux définie sur un intervalle $[a ; b]$ que vous préciserez.

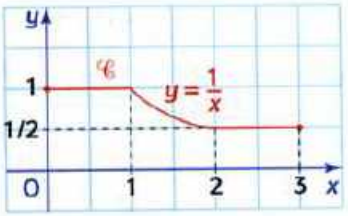
Représentez f puis calculez $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$.

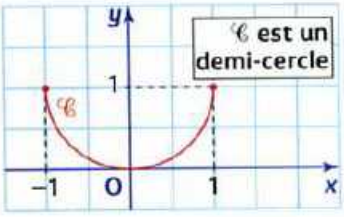
a) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -2 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$.

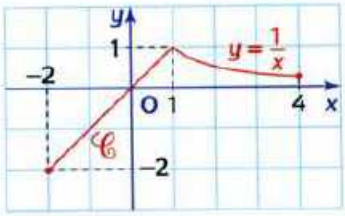
b) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$.

106 Les figures ci-après donnent la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f continue sur un intervalle $[a ; b]$.

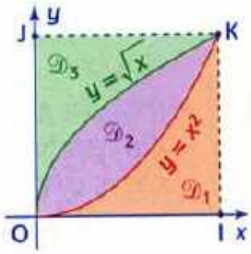
Pour chacune d'elles, calculez $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$.







107 Sur la figure ci-contre sont représentées les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Ces courbes partagent le carré unité OIKJ en trois domaines.



1. Calculez l'aire de $\mathscr{D}_1$.

2. Déduisez-en celles de $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_2$.

3. Quelle est la valeur de $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$?

108 On note r un réel strictement positif. $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

1. Précisez l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant r$ et $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2 - x^2}$.

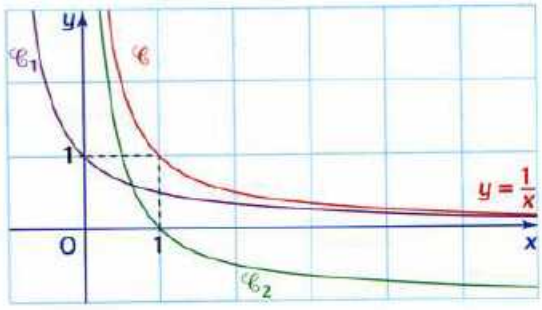
2. Déduisez-en $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ et $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

109 Sur la figure ci-dessous les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont telles que $\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$ et $\mathscr{C}_2$ celle de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.

1. Quelles sont les fonctions f_1 et f_2 associées à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$?

2. Indiquez les valeurs des intégrales

$$I_1 = \int_0^{e-1} f_1(x)\,dx \text{ et } I_2 = \int_1^e f_2(x)\,dx.$$



110 • **Méthode « des rectangles »**

1. Représentez la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle [0 ; 1] (unité graphique : 8 cm). Réalisez une subdivision de [0 ; 1] en huit intervalles de même longueur.

2. **a)** Par la méthode « des rectangles », encadrez l'aire sous la courbe.

☞ **Aide.** Voir le TD 4, § 2, page 211.

b) Quelle est l'amplitude de l'encadrement ?

3. Déduisez-en un encadrement de $I = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$.

☞ **Commentaire.** La valeur exacte de I est $\dfrac{\pi}{4}$.

111 • **Méthode « des rectangles »**

On se propose d'encadrer l'intégrale $J = \int_0^3 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ à l'aide de la méthode « des rectangles ». (On remarquera que la fonction à intégrer est positive et décroissante sur l'intervalle [0 ; 3].) On choisit une subdivision de n intervalles de même longueur.

☞ **Aide.** Voir le TD 4, § 2, page 211.

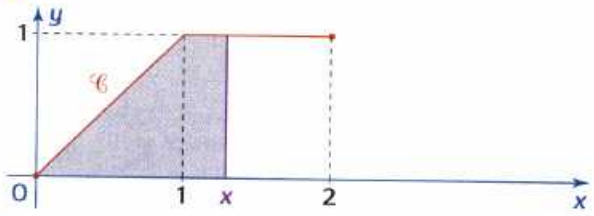
1. Prouvez que l'amplitude A de l'encadrement est telle que $A < \dfrac{21}{10n}$.

2. Déduisez-en une valeur de n qui assure un encadrement de J d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

3. À l'aide de la calculatrice, trouvez l'encadrement correspondant.

Pour les exercices 112 et 113, la courbe $\mathscr{C}$ donnée représente une fonction f continue sur un intervalle [a ; b]. L'objet est l'étude d'une fonction aire F.

112 •



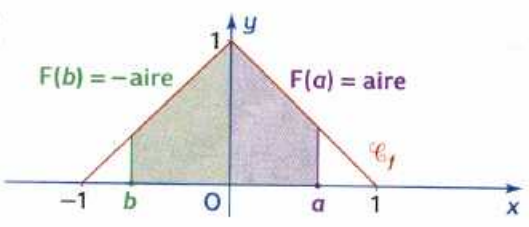
1. Définissez la fonction affine par morceaux f.

2. $F(x)$ désigne l'aire du domaine coloré lorsque x est un réel de l'intervalle [0 ; 2].
Exprimez $F(x)$ suivant que $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $1 < x \leqslant 2$.

3. Vérifiez que F est la primitive de f sur l'intervalle [0 ; 2], nulle en 0.

☞ **Aide.** N'oubliez pas de vérifier que F est dérivable en 1 avec $F'(1) = f(1)$.

113 :



1. Définissez la fonction affine par morceaux f.

2. À tout réel x de l'intervalle [−1 ; 1], on associe le réel $F(x)$ tel que :

• lorsque $x \geqslant 0$, $F(x)$ est l'aire du domaine violet (exemple avec $a \geqslant 0$) ;

• lorsque $x < 0$, $F(x)$ est l'opposé de l'aire du domaine vert (exemple avec $b < 0$).
Vérifiez que F est la primitive de f sur l'intervalle [−1 ; 1], nulle en 0.

☞ **Aide.** N'oubliez pas de vérifier que F est dérivable en 0 avec $F'(0) = f(0)$.

Intégration par parties

Pour les exercices 114 à 119, f est une fonction définie sur un intervalle I.
Trouvez la primitive F de f sur I, nulle pour la valeur de a indiquée.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 59, page 218.

114 $f(t) = \ln(t^2)$, $I =]0 ; +\infty[$, $a = 1$.

115 $f(t) = (2t+1)\sin t$, $I = \mathbb{R}$, $a = 0$.

116 • $f(t) = \ln(t+2\,006)$, $I =]-2\,006 ; +\infty[$, $a = 0$.

☞ **Aide.** La fonction $t \mapsto t + 2\,006$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto 1$.

117 • $f(t) = (t+1)^2 e^{2t}$, $I = \mathbb{R}$, $a = -1$.

☞ **Aide.** Faites une double intégration par parties.

118 • $f(t) = e^{-2t}\cos t$, $I = \mathbb{R}$, $a = 0$.

☞ **Aide.** Faites une double intégration par parties.

119 • $f(t) = (\ln t)^2$, $I =]0 ; +\infty[$, $a = 1$.

☞ **Aide.** Faites une double intégration par parties.

120 • **Calcul de primitives par combinaisons**

F et G sont les primitives sur $]0 ; +\infty[$ des fonctions $t \mapsto \cos(\ln t)$ et $t \mapsto \sin(\ln t)$, nulles en 1.
Le but de l'exercice est de les expliciter à partir de leurs formes intégrales :

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt.$$

1. Prouvez à l'aide d'intégrations par parties que :

a) $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$.

b) $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$.

2. Déduisez-en les expressions de $F(x)$ et $G(x)$.

121 • On pose $I = \int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t}\sin t\,dt$.

1. Prouvez que $I = -\cos 1 + e - J$ et $J = -\sin 1 + I$.
2. Déduisez-en les valeurs de I et J.

122 • BAC f est la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

1. Calculez $f'(x)$ puis déduisez-en $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
2. On pose $J = \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$.

À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I + J$ en fonction de J.
Déduisez-en la valeur de J.

123 • BAC On note $K = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\, dx$,

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx \text{ et } J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx.$$

1. À l'aide d'une double intégration par parties, prouvez que $K = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$.
2. Calculez $I + J$ et $I - J$.
Déduisez-en les valeurs de I et J.
3. En exprimant $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ à l'aide de $\cos 2x$, retrouvez à l'aide de K les valeurs de I et J.

124 • BAC L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx, \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2}\, dx.$$

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}).$$

a) Calculez la dérivée f' de f.

b) Déduisez-en la valeur de I.

2. **a)** Sans calculer explicitement J et K, vérifiez que :

$$J + 2I = K.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, prouvez que $K = \sqrt{3} - J$.

c) Déduisez-en les valeurs de J et K.

125 • BAC 1. g est la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$.

a) Trouvez des réels a, b, c tels que pour tout $x > 1$,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 1}.$$

b) Déduisez-en une primitive G de g sur $]1 ; +\infty[$.

2. f est la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Trouvez une primitive F de f sur $]1 ; +\infty[$.

3. Utilisez les résultats précédents pour calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x\, dx.$$

Donnez le résultat sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q rationnels.

Encadrement. Théorème de la moyenne

126 Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin(2x)\, dx.$$

Prouvez que $0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

127 On se propose de démontrer que, pour tout réel x, de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $x \leqslant \tan x \leqslant 2x$ [1].

1. Justifiez que $\tan x = \int_0^x (1 + \tan^2 t)\, dt$.
2. **a)** Prouvez que pour tout réel t dans $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$:

$$1 \leqslant 1 + \tan^2 t \leqslant 2.$$

b) Déduisez-en l'encadrement **[1]**.

☞ **Commentaire.** **Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors f est une primitive de f' sur I.**

Ainsi lorsque a est dans I, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$; pour tout réel $x > a$, l'inégalité de la moyenne permet alors d'obtenir des encadrements de $f(x) - f(a)$.

128 • Démontrez que pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x + 1}} \leqslant \sqrt{x + 1} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

☞ **Aide.** **Utilisez la méthode de l'exercice 127.**

129 • BAC On se propose d'encadrer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1 + x} dx.$$

1. En étudiant les variations des fonctions u et v définies sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$u(x) = e^{-x} + x - 1 \text{ et } v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x},$$

prouvez que pour tout réel x dans $[0 ; 1]$,

$$1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad [1].$$

2. Déduisez-en un encadrement de e^{-x^2} lorsque x est dans l'intervalle $[0 ; 1]$ puis prouvez que pour tout x dans l'intervalle $[0 ; 1]$:

$$1 - x \leqslant \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leqslant 1 - x + \frac{x^4}{2(1 + x)} \quad [2].$$

3. **a)** Vérifiez que pour tout x dans l'intervalle $[0 ; 1]$,

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

b) Déduisez alors de **[2]** que :

$$\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{5}{24} + \frac{1}{2}\ln 2,$$

puis donnez une valeur approchée de I à 3×10^{-2} près.

130 • **BAC** On se propose d'encadrer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{xe^x}{1+e^x}\,dx.$$

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $g(x) = \ln(1+e^x)$.
Γ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; A est le point de Γ d'abscisse 0 et B celui d'abscisse 1.

a) Étudiez les variations de g et indiquez une équation de la tangente en A à Γ.

b) P désigne le point d'intersection de cette tangente avec le segment [IB]. Calculez les aires des trapèzes OIPA et OIBA.

2. On admet que la courbe Γ est située entre les segments [AP] et [AB].
Prouvez alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \ln(\sqrt{2(1+e)}).$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez I en fonction de $\int_0^1 g(x)\,dx$ puis déduisez-en un encadrement de I.

131 • La suite (I_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx.$$

1. **a)** Calculez I_1, puis $I_0 + I_1$.
Déduisez-en I_0.

b) Pour tout naturel n, calculez $I_n + I_{n+1}$.

2. Prouvez que pour tout x dans l'intervalle $[0 ; 1]$:

$$\frac{e^{nx}}{1+e} \leqslant \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{nx}}{2},$$

puis donnez un encadrement de I_n.

3. Déduisez-en les limites des suites (I_n) et $\left(\frac{I_n}{e^n}\right)$.

132 • Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x\,dx.$$

1. Calculez I_1.

2. Prouvez que pour tout naturel n, $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1) \quad (1).$$

3. Démontrez que pour tout entier n, $n \geqslant 1$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. Prouvez que :

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2.$$

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

a) Calculez $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis prouvez que pour tout entier n, $n \geqslant 3$: $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$.

b) Prouvez alors que, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. **a)** Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
Déduisez-en celle de la suite (I_n) à partir de **(1)**.

b) Justifiez alors que :

$$e^2 = \lim_{n \to +\infty}\left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right].$$

Calculs d'aires et de volumes

Pour les exercices de cette partie, reportez-vous aux TD 1 et 2, pages 207 et 208 qui illustrent les calculs d'aires et de volumes à l'aide d'intégrales.

Pour les exercices 133 à 135, tracez la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal (unité : 2 cm), puis calculez l'aire en cm² du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

133 **1.** $f(x) = 2 + x - x^2$; $a = 0$; $b = 1$.

2. $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$; $a = 1$; $b = 4$.

134 **1.** $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; $a = 0$; $b = \frac{\pi}{4}$.

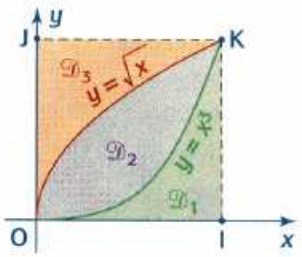
2. $f(x) = e^{x+1} - 3$; $a = -2$; $b = 0$.

135 **1.** $f(x) = \ln(x+1)$; $a = -\frac{1}{2}$ $b = 0$.

2. $f(x) = (x+1)e^{-x}$; $a = -1$, $b = \ln 2$.

☞ **Aide.** **Utilisez une intégration par parties.**

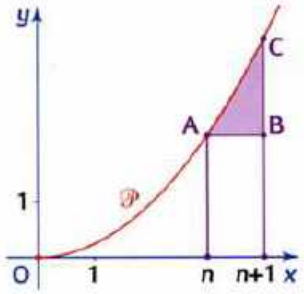
136 Les courbes d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = x^3$ déterminent à l'intérieur du carré unité OIKJ trois domaines $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$.
Calculez, en u.a., l'aire de chacun d'eux.



☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 2, page 197.**

137 • $\mathcal{P}$ est la demi-parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ avec x dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$; n est un entier naturel. On note u_n l'aire du domaine limité par $\mathcal{P}$ et les droites d'équation :

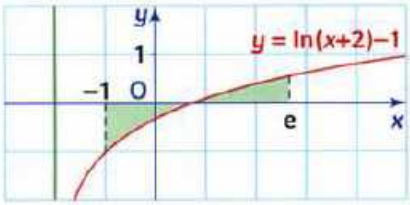
$x = n+1$ et $y = \frac{1}{4}n^2$.



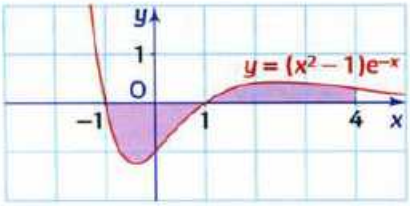
Démontrez que la suite (u_n) est une suite arithmétique. Précisez sa raison.

Pour les exercices 138 et 139, calculez, en u.a., les aires des domaines colorés.

138



139 •



140 • Tracez dans un repère orthogonal les représentations graphiques des fonctions :

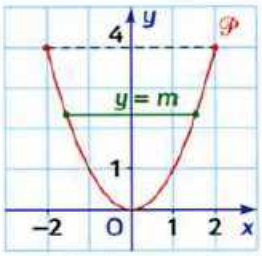
$x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x\sin x$

sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Quelle est, en u.a., l'aire du domaine limité par les deux courbes sur cet intervalle ?

141 • $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ représentée sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
La droite d_m d'équation :

$y = m$ $(0 \leqslant m \leqslant 4)$

partage l'intérieur de la parabole en deux domaines.



Pour quelle valeur de m, ces deux domaines ont-ils la même aire ?

142 • BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$ et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Prouvez que la droite d d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et précisez la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d.

2. λ désigne un réel strictement positif. On considère le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, son asymptote d et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.
Exprimez l'aire S_1 (en u.a.) de ce domaine en fonction de λ.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{1-x}$; A est le point de coordonnées $(\lambda ; 0)$, et B le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse λ.
La tangente à $\mathcal{C}_g$ en B coupe l'axe des abscisses au point C.
Calculez les coordonnées de C, puis l'aire S_2 (en u.a.) du triangle ABC.
Prouvez que $S_1 + 2S_2$ ne dépend pas de λ.

143 • BAC On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = e^x - 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifiez que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune Δ au point O. Précisez la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

2. Prouvez que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Soit a un réel, $a > 0$. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre :

$$I(a) = \int_0^a \ln(x+1)\,dx.$$

a) Tracez $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et Δ.

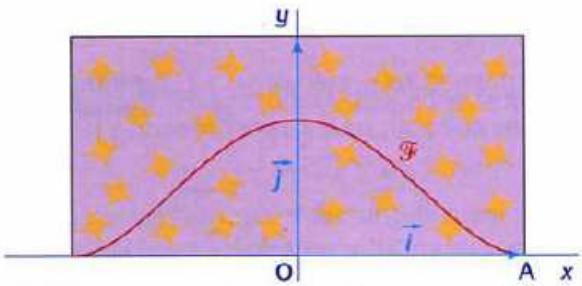
b) Par des considérations sur les aires justifiez que :

$$I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)\,dx.$$

Déduisez-en $I(a)$.

c) Retrouvez la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.

144 • Sur un panneau mural rectangulaire, on veut réaliser une décoration dont la forme approximative est représentée sur la figure suivante.
L'aire de la décoration (région sous la courbe) doit mesurer le tiers de l'aire totale du panneau.



On décide, en particulier, pour des raisons de symétrie de définir la courbe frontière $\mathcal{F}$ de la décoration comme la représentation graphique dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.
$\mathcal{F}$ est tangente à l'axe des abscisses en A(1 ; 0).
Calculez les nombres a, b, c.

145 • BAC La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

1. Prouvez que $\mathscr{C}$ admet le point I(1 ; 0) comme centre de symétrie.

2. Démontrez que $\mathscr{C}$ admet une asymptote d en $+\infty$ et précisez leur position relative.

3. Pour tout réel λ, $\lambda \geqslant 0$, $\mathscr{A}(\lambda)$ désigne l'aire, exprimée en cm^2, du domaine défini par $\mathscr{C}$, d et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

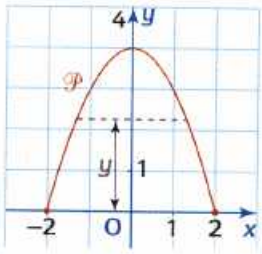
a) Exprimez $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

b) Quelle est la limite $\mathscr{A}$ de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$?

c) Déterminez un réel λ_0 tel que, lorsque $\lambda \geqslant \lambda_0$, alors :

$$|\mathscr{A} - \mathscr{A}(\lambda)| \leqslant 10^{-2}.$$

146 • Dans un repère orthonormal, $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = 4 - x^2$ représentée sur l'intervalle $[-2 ; 2]$. Elle engendre par rotation autour de l'axe (Oy) un solide de révolution (paraboloïde) Σ.

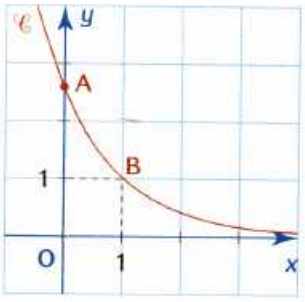


1. Quelle est la nature de la section de Σ par un plan perpendiculaire à (Oy) ?

2. Exprimez en fonction de y, $0 \leqslant y \leqslant 4$, son aire $S(y)$, puis calculez le volume de Σ.

☞ **Aide.** Voir le TD 2, page 208.

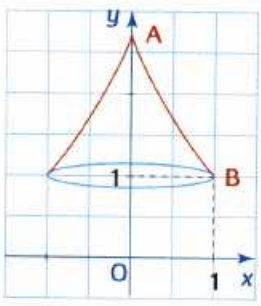
147 • BAC La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 0$ avec $f(0) = e$.



1. Exprimez $f(x)$ pour tout réel x.

2. Soit t un réel de l'intervalle $[1 ; e]$.
Résolvez dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.

3. A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0 et 1. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$. On note $\mathscr{V}$ son volume.



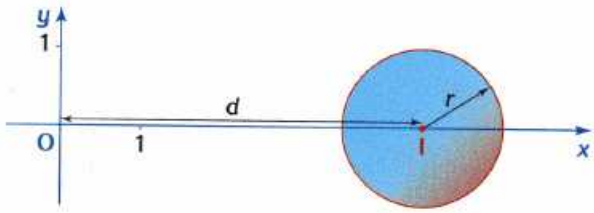
a) Justifiez que :

$$\mathscr{V} = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 \, dt.$$

b) Calculez $\mathscr{V}$ à l'aide d'une double intégration par parties.

148 • **Volume d'un tore**

Un tore T est obtenu par rotation autour de l'axe (Oy) d'un disque de rayon r centré sur l'axe (Ox). On note d la distance OI. On se propose de calculer son volume.



1. Précisez la nature de la section du tore par un plan perpendiculaire à (Oy) et prouvez que l'aire de cette section est $S(y) = 4\pi d\sqrt{r^2 - y^2}$.

2. Déduisez-en le volume de T.

☞ **Aide.** Pour le calcul de l'intégrale, utilisez les résultats de l'exercice 108.

149 • BAC f est la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

et $\mathscr{C}$ est sa courbe dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étudiez les variations de f puis tracez $\mathscr{C}$.

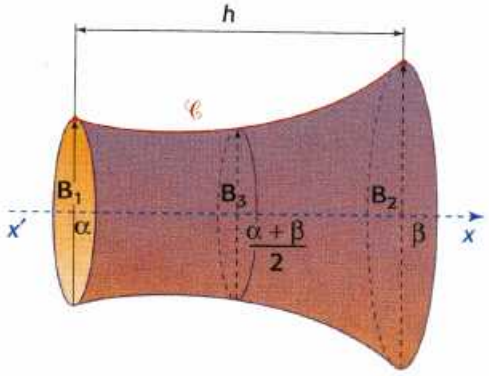
2. S est la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses. Calculez la valeur exacte de l'aire de S, puis donnez-en une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. En tournant autour de l'axe $(O ; \vec{i})$, S engendre un solide de révolution de volume $\mathscr{V}$.

a) Trouvez des réels a, b et c tels que la fonction G définie par $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction f^2 sur $\mathbb{R}$.

b) Déduisez-en la valeur exacte de $\mathscr{V}$, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

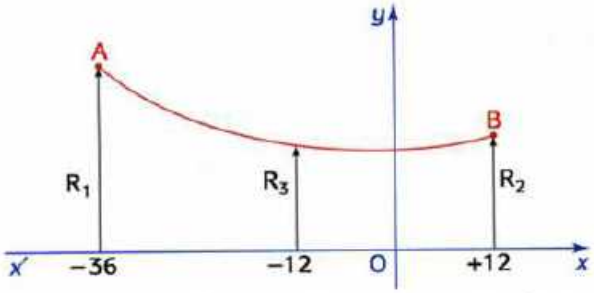
150 • BAC $\mathscr{C}$ est l'arc de courbe représentant, pour x appartenant à l'intervalle $[\alpha ; \beta]$, $\alpha < \beta$, une fonction f de la forme $f(x) = \sqrt{P(x)}$, où P désigne une fonction polynôme du second degré, strictement positive sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.
La rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Ox) engendre un solide de révolution dont on désire calculer le volume $\mathscr{V}$.
On note B_1 et B_2 les aires des bases du solide, et B_3 l'aire de la section du solide par le plan équidistant des plans des bases. On note h le réel $\beta - \alpha$.



EXERCICES

1. Démontrez que $\mathcal{V} = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B_3)$.

2. Une tour a une hauteur H = 48 m. Sa base circulaire a un rayon R_1, son orifice supérieur a un rayon R_2.



Son volume peut être considéré comme le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour d'un axe $(x'Ox)$ du domaine plan délimité par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ d'équation :

$$y = 12\sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}},$$

les droites d'équations $x = -36$, $x = 12$ et l'axe $(x'x)$. Calculez le volume $\mathcal{V}$ à 1 m³ près.

Calcul intégral dans d'autres sciences

151 Intensité efficace

L'intensité à l'instant t, $t \geqslant 0$, d'un courant alternatif de période T s'exprime sous la forme :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t).$$

I_m représente l'intensité maximale du courant et ω sa pulsation avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On appelle intensité efficace du courant, notée I_e, l'intensité du courant continu qui produit en une période le même effet calorifique à travers une résistance R. Ainsi l'énergie W fournie dans l'intervalle $[0 ; T]$ est $W = R\int_0^T i^2(t)\,dt$ en courant alternatif et $W = RI_e^2T$ en courant continu.

1. Prouvez que I_e^2 est la valeur moyenne de la fonction i^2 sur $[0 ; T]$.

2. Exprimez I_e en fonction de I_m.

☞ **Aide.** Utilisez la formule de linéarisation de $\sin^2 t$.

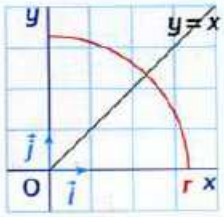
152 • Centre d'inertie d'une plaque homogène

Une plaque de masse M a la forme d'un quart de disque homogène de centre O et de rayon r.

Sa masse surfacique est notée m.

☞ **Rappel.** $M = mS$ où S est l'aire de la plaque.

On choisit un repère orthonormal comme indiqué.



En raison de la symétrie, le centre d'inertie G est sur la droite d'équation $y = x$.

On admet que son abscisse est donnée par :

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^r mx\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Déterminez la position de G.

153 • BAC Indice de Gini

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées, définies sur $[0 ; 1]$, doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;

(2) f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$;

(3) pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f(x) \leqslant x$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 10 cm).

A. Étude d'un modèle

Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = xe^{x-1}$.

1. Prouvez que g vérifie **(1)** et **(2)**.

2. Prouvez que :

$$g(x) - x = \frac{x}{e}(e^x - e)$$

puis déduisez-en que g vérifie **(3)**.

3. Tracez les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ puis la courbe représentative de g.

B. Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant **(1)**, **(2)**, **(3)**, on définit un indice I égal à l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe de f.

1. Justifiez que $I = \int_0^1 (x - f(x))\,dx$.

2. Calculez l'indice I_g associé à g.

3. On s'intéresse aux fonctions f_n définies sur $[0 ; 1]$ par $f_n(x) = \frac{2x^n}{1 + x}$ où n est un entier naturel, $n \geqslant 2$.

a) Prouvez que les fonctions f_n vérifient les conditions **(1)**, **(2)**, **(3)**.

On se propose alors d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) On pose $I_n = \int_0^1 (x - f_n(x))\,dx$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Prouvez que $I_n = \frac{1}{2} - u_n$.

c) Comparez $\frac{t^{n+1}}{1 + t}$ et $\frac{t^n}{1 + t}$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$; déduisez-en que la suite (u_n) est décroissante.

d) Prouvez que pour tout réel t de $[0 ; 1]$:

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1 + t} \leqslant t^n.$$

e) Déduisez-en que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n + 1}$.

Quelle est alors la limite de la suite (I_n) ?

Suites et intégrales

154 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f_n(t) = \dfrac{t^n}{t+1}$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n).

1. **a)** Démontrez que pour tout t de $[0\,;1]$, $f_{n+1}(t) + f_n(t) = t^n$.

b) Déduisez-en que $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2. **a)** Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est positif.

b) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.

3. **a)** Démontrez que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) Déduisez des questions précédentes que (u_n) est une suite convergente et trouvez sa limite.

155 • La figure ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}\,dx.$$

1. **a)** Interprétez u_n géométriquement.

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculez u_n en fonction de n.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Calculez $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

156 • BAC 1. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx.$$

☞ **Note.** $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

a) Calculez I_1 par intégration par parties.

b) Prouvez que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$.

Déduisez-en $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

c) Démontrez à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - I_n$.

2. On considère la suite réelle (a_n) définie par $a_1 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b) Déduisez-en $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

157 • BAC Pour tout entier naturel n, on considère les réels $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$.

1. Calculez I_0 et J_0.

2. On suppose $n \geqslant 1$.

a) En intégrant par parties I_n, puis J_n, prouvez que :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

b) Déduisez-en les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3. Calculez $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

158 • BAC (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}\,dt.$$

1. **a)** φ est la fonction définie sur $[0\,;2]$ par :

$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}.$$

Étudiez les variations de φ.

b) Déduisez-en que $\dfrac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$.

c) On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$. Prouvez que si (u_n) admet une limite ℓ, alors $3 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{7}{2}$.

2. **a)** Vérifiez que pour tout réel t dans $[0\,;2]$:

$$\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}.$$

Déduisez-en $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$.

b) Prouvez que pour tout t dans $[0\,;2]$, $1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$.

Déduisez-en que $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}} I$.

c) Prouvez que la suite (u_n) est convergente et précisez sa limite ℓ.

159 • BAC Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,dx$.

1. **a)** Démontrez que pour tout réel x dans $]1\,;e[$ et pour tout entier naturel n, $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b) Déduisez-en que la suite (I_n) est décroissante.

c) Prouvez que pour tout entier n non nul, $I_n \geqslant 0$, puis déduisez-en que la suite (I_n) est convergente.

2. a) Calculez I_1.

b) Démontrez à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n non nul, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) Déduisez-en les valeurs exactes de I_2, I_3, I_4. Donnez-en les valeurs approchées par défaut à 10^{-3} près.

3. a) Démontrez que pour tout naturel n non nul, $(n+1)I_n \leqslant e$ et déduisez-en la limite de la suite (I_n).

b) Quelle est la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$? Déduisez-en la limite de la suite (nI_n).

160 **1.** Calculez l'intégrale $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n^2}e^{-\frac{1}{n}} + \frac{2}{n^2}e^{-\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2}e^{-\frac{n}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}e^{-\frac{k}{n}}.$$

a) Exprimez S_n à l'aide de la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$.

b) Pourquoi la suite (S_n) est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?

161 **1.** Prouvez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0 ; 1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. a) Calculez $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$.

b) Déduisez-en que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Démontrez que U est décroissante.

4. On désigne par V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Démontrez que V est croissante.

5. Prouvez que U et V convergent vers une limite commune notée γ. Déterminez une valeur approchée de γ à 10^{-2} près, par une méthode de votre choix.

☞ **Aide.** Voir le TD 3, page 209.

162 BAC f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Étudiez les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

2. α est un réel, $\alpha > 0$; à l'aide d'une intégration par parties, calculez $\int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$, puis $\int_1^\alpha f(t)\,dt$.

3. k est un entier naturel non nul.

a) Prouvez que $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{k}$.

b) Démontrez que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$ et déduisez-en que $0 \leqslant f(k) \leqslant \frac{1}{k(k+1)}$.

4. a) Vérifiez que pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{0 ; -1\}$:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad [1].$$

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

À l'aide de **[1]**, simplifiez l'écriture de S_n, puis prouvez que la suite (S_n) converge et précisez sa limite.

c) Démontrez que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n ;$$

déduisez-en $\lim\limits_{n \to +\infty} [f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)]$.

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

a) Vérifiez à l'aide de la question **3. b)** que :

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

b) Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et précisez sa limite.

163 BAC Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt.$$

1. Étudiez le sens de variation de F.

2. On désigne par a un réel strictement positif. Prouvez que pour tout t dans $[1 ; 1 + a]$:

$$\frac{1}{1+a} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1,$$

et déduisez-en que $\frac{a}{1+a} \leqslant \ln(1+a) \leqslant a$.

3. x désigne un réel strictement positif ; déduisez de la question **2.** que $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x e^{-2t} dt$, puis que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

4. On admet que, lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $F(x)$ est un nombre réel noté ℓ. Prouvez que $\frac{1}{2}\ln 2 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})\,dt.$$

a) Démontrez que $0 \leqslant u_n \leqslant \ln(1 + e^{-2n})$.

b) Déduisez-en la convergence de la suite (u_n) et précisez sa limite.

6. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exprimez S_n à l'aide de F et de n. Prouvez que la suite (S_n) est convergente et précisez sa limite.

164 On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Construisez $\mathscr{C}$ et exploitez la notion d'aire pour prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\int_1^n \ln t\,dt \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln t\,dt.$$

2. Déduisez-en que la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, par $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$ converge et précisez sa limite.

Prendre toutes les initiatives

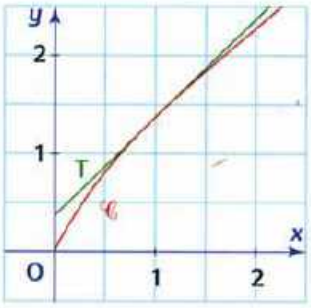
Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

165 Partage d'un domaine

Dans un repère orthonormal, $\mathscr{D}$ est le domaine défini par l'axe des abscisses et l'arc de parabole d'équation $y = -x^2 + 4x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Pour quelle valeur de k, la parabole $\mathscr{P}'$ d'équation $y = kx(4 - x)$ partage-t-elle $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire ?

166 Aire entre tangente et courbe



Sur la figure, $\mathscr{C}$ représente la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(1 + e^{-x})$.

T est la tangente à $\mathscr{C}$ de coefficient directeur 1.

L'aire exprimée en u.a. du domaine défini par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T dépasse-t-elle un dixième ?

167 • Calcul d'intégrale

Prouvez que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} = \frac{\pi}{8}$.

168 • Condition sur une aire

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ désigne la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0 ; 1]$.

Pour tout réel α de $]0 ; 1]$, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\alpha \leqslant x \leqslant 1$ et $\ln\alpha \leqslant y \leqslant 0$.

On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire en u.a. du domaine $\mathscr{D}$.

Existe-t-il une valeur de α telle que $\mathscr{A}(\alpha) = 2$?

169 • Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{-t}\,dt.$$

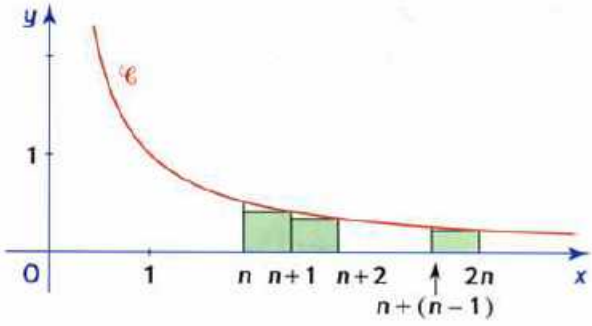
La suite (u_n) est-elle convergente ?

170 Une somme d'aires

Dans un repère orthonormal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout entier n, $n \geqslant 1$, on définit S_n par :

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

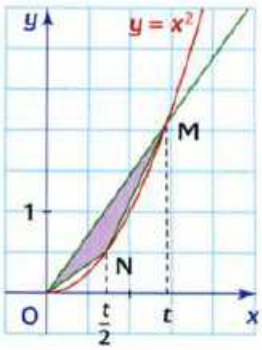


Prouvez que la suite (S_n) converge vers ln2.

171 Un rapport constant

Sur la figure, M et N sont des points de la demi-parabole d'équation $y = x^2$ avec $x \geqslant 0$.

M et N ont pour abscisses respectives t et $\dfrac{t}{2}$ $(t > 0)$.



On note $\mathscr{A}$ l'aire en u.a. du triangle OMN et $\mathscr{B}$ celle du « triangle curviligne » [OMN].

Prouvez que pour tout t, le rapport $\dfrac{\mathscr{B}}{\mathscr{A}}$ est constant.

Problèmes

172 • *Thèmes : Famille de fonctions. Équation différentielle. Primitive*

1. Pour tout réel k ($k \geqslant 0$), on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$, par $f_k(x) = x + \dfrac{1 - ke^x}{1 + ke^x}$.

a) Justifiez que, pour tout réel k, $k \geqslant 0$, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

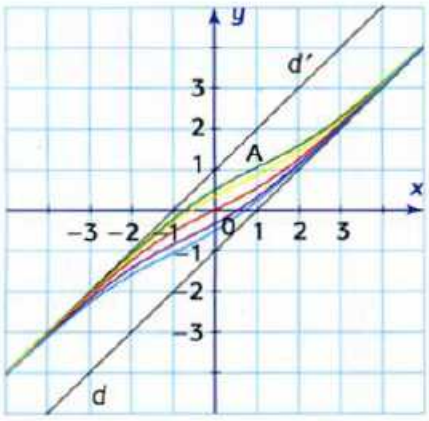
$$(E) : 2y' = (y - x)^2 + 1$$

b) Déduisez-en le sens de variation de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Ci-dessous, on a représenté les droites d et d' d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = x + 1$, ainsi que plusieurs courbes $\mathscr{C}_k$ correspondant à des valeurs particulières de k.

Déterminez le réel k, associé à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O, puis celui associé à la courbe $\mathscr{C}'$ passant par le point A(1 ; 1).



3. a) Prouvez que pour tout réel x :

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + ke^x} \quad [1]$$

et $$f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1 + ke^x} \quad [2].$$

b) Pour tout réel k, $k > 0$, déduisez-en :

- la position de la courbe $\mathscr{C}_k$ par rapport à d et d' ;
- les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_k$.

4. Cas particulier : $k = 1$.

a) Justifiez que f_1 est impaire.

b) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt.$$

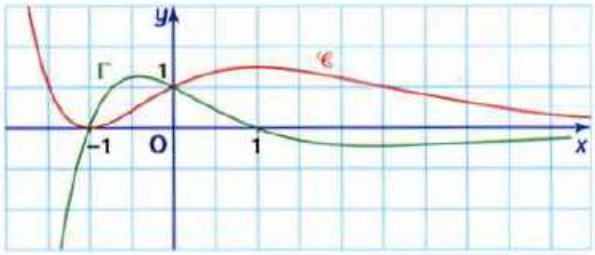
Interprétez graphiquement le réel $F(x)$ dans les deux cas, $x > 0$ et $x < 0$. Déterminez alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

c) Dressez le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

d) Calculez explicitement $F(x)$ en utilisant la forme de $f(x)$ la mieux adaptée parmi les trois dont vous disposez.

173 • BAC *Thèmes : Fonctions et primitives. Équations différentielles. Calcul intégral*

A. Lectures graphiques



Dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ représentent deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces deux fonctions est une primitive de l'autre, on peut donc les noter g et g'.

1. Associez à chaque fonction sa courbe. Justifiez.

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ?

B. Équation différentielle

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : y' + y = 2(x + 1)e^{-x}.$$

1. Prouvez que la fonction $f_0 : x \mapsto (x^2 + 2x)e^{-x}$ est une solution de (E).

2. On désigne par (E') l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(E') : y' + y = 0.$$

a) Démontrez que :

« f est une solution de (E) » équivaut à « $u = f - f_0$ est une solution de (E') ».

b) Résolvez l'équation (E') et déduisez-en l'expression de $f(x)$ lorsque f est une solution de (E).

3. Sachant que la fonction g de la partie **A** est solution de (E), exprimez $g(x)$ pour tout réel x.

4. Trouvez la solution h de l'équation (E) dont la courbe associée admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

C. Étude d'une solution

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

1. Étudiez la fonction f et dressez son tableau de variations en précisant les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm), $\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de f. Trouvez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}'$ au point Ω d'abscisse -1. Tracez $\mathscr{C}'$ et T.

3. a) Trouvez trois réels a, b et c tels que la fonction $F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) α est un réel positif.
Calculez en cm², l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la zone du plan délimitée par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

174 BAC

Thèmes : *Étude de fonction. Étude de primitive. Comportement asymptotique*

A. Étude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1).$$

1. Étudiez ses variations et précisez sa limite en $+\infty$.
Déduisez-en que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
Prouvez que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. Γ est sa courbe dans un repère orthonormal.

a) Écrivez une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 2.

b) T coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse x_0. Calculez la valeur exacte de x_0.
v_1 et v_2 sont les valeurs approchées par défaut et par excès à 10^{-3} près de x_0.
Des signes de $g(v_1)$ et $g(v_2)$, déduisez un encadrement de α à 10^{-3} près.

c) Précisez le signe de g sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

B. Étude de la fonction principale

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_f$ est sa courbe dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Démontrez que f est dérivable en 0.
Étudiez ses variations et précisez sa limite en $+\infty$.

2. Prouvez que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
Déduisez-en la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente en O. Tracez $\mathcal{C}_f$.

C. Étude d'une primitive

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$.

1. r désigne un réel strictement positif fixé ; prouvez que $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan. Déduisez-en la parité de F.
Indiquez les variations de F sur $[0 ; +\infty[$.

2. Utilisez la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en O pour prouver que $0 \leqslant F(1) \leqslant \frac{1}{2}$.

3. Démontrez que pour tout réel $t \geqslant 1$:

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leqslant \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leqslant \frac{\ln(2t^2)}{t}.$$

4. Lorsque $x \geqslant 1$, calculez $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$ puis déduisez-en les limites de $F(x)$ et $\frac{F(x)}{x}$ en $+\infty$.

5. Donnez l'allure de la courbe de F. (Prenez $F(1) \approx 0{,}4$.)

175 BAC

Thèmes : *Exponentielle. Calcul intégral. Irrationalité de e*

Le but du problème est de démontrer que le nombre e n'est pas un nombre rationnel.

A. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1. Étudiez la fonction f. Construisez $\mathcal{C}_f$.

2. Calculez $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

B. Pour tout naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

1. a) Prouvez que pour tout réel x dans $[0 ; 1]$,

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n.$$

b) Calculez $J_n = \int_0^1 x^n dx$.

c) Déduisez de **a)** et **b)** que pour tout naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

2. Utilisez une intégration par parties pour prouver que pour tout naturel $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

3. Pour tout naturel $n \geqslant 1$, on pose $k_n = n!e - I_n$.

a) Exprimez k_{n+1} en fonction de k_n.

b) Calculez k_1. Déduisez-en par récurrence que k_n est un entier naturel pour tout $n \geqslant 1$.

c) Utilisez les questions **3. b)** et **1. c)** pour prouver que, quel que soit l'entier naturel $n \geqslant 2$, le nombre $n!e = k_n + I_n$ n'est pas un naturel.

4. a) p et q sont deux entiers naturels non nuls.
Prouvez que pour tout entier naturel $n \geqslant q$, le nombre $\frac{n!p}{q}$ est un naturel.

b) À l'aide des questions **4. a)** et **3. c)**, déduisez-en que e n'est pas un nombre rationnel.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

176 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal.

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. **b** F est une fonction paire. **c** $F(0) = 1$.

2. On considère la fonction G définie pour tout x de l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F(\tan x)$.

a Pour tout réel x de I, $G'(x) = 1$. **b** Pour tout x de I, $G(x) = x$. **c** $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. On considère la fonction H définie pour tout réel x, $x \geqslant 0$, par $H(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.

a Pour tout réel positif x, $H'(x) = 0$. **b** $H(0) = \dfrac{\pi}{4}$. **c** $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

177 1. La fonction f définie sur $]-\infty; 0[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de primitives sur $]-\infty; 0[$.

2. Les primitives du produit de deux fonctions est le produit des primitives de ces fonctions.

3. Si F est une primitive d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto F(2x-1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(2x-1)$.

4. f est une fonction dérivable sur un intervalle I et f' est continue sur I. De plus, f s'annule en a et b de I alors :

$$\int_a^b tf'(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

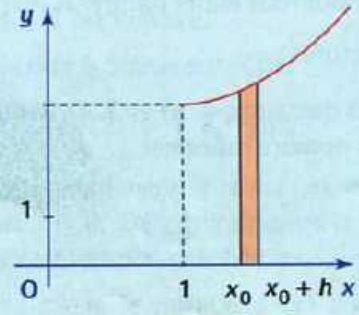
178 • BAC On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$.

1. **a)** Justifiez la continuité de f sur $[1; +\infty[$.

b) Prouvez que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

2. **Démonstration de cours**

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique.



Pour tout réel x_0 de $[1; +\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1; +\infty[$ est une primitive de f.

a) Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

b) Soit x_0 un réel quelconque de $[1; +\infty[$ et h un réel, $h > 0$. Justifiez l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h).$$

c) Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement pouvez-vous obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

d) Déduisez-en la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$, ainsi que le nombre dérivé en x_0. Concluez.

9 Éléments de combinatoire

1150

La recherche de moyens systématiques pour dénombrer des objets a donné naissance à l'Analyse combinatoire. Laquelle nous apprend dès l'abord que le nombre de façons de choisir p objets parmi n, est égal au quotient de $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ par $p(p-1)(p-2)\ldots 1$. L'expression de ce nombre, noté aujourd'hui $\binom{n}{p}$ ou parfois C_n^p, se trouve déjà dans un livre hindou de 1150.

En 1665, Pascal systématise le calcul des $\binom{n}{p}$ par une présentation en triangle. Ce « triangle » est connu en Occident depuis 100 ans au moins et depuis plus longtemps encore en Orient. Le mérite de Pascal est d'avoir mis les nombres $\binom{n}{p}$ en relation avec le calcul des probabilités.

Constellation d'Andromède
Manuscrit (Inde)

Les nombres $\binom{n}{p}$ interviennent également dans la formule du binôme de Newton qui donne le développement de la puissance $(a+b)^m$. Cette formule du binôme est connue au x^e siècle pour des petites valeurs de n et est donnée par Al-Kashi en 1427 et Cardan en 1570. Elle est dite de Newton car elle est un cas particulier d'une formule trouvée par Newton, qui donne le développement illimité de $(1+x)^s$ avec s réel.

À LA MÊME ÉPOQUE

EUROPE

En Europe occidentale, la population ne cesse d'augmenter et les paysans doivent conquérir de nouvelles terres : c'est le début des grands défrichements.

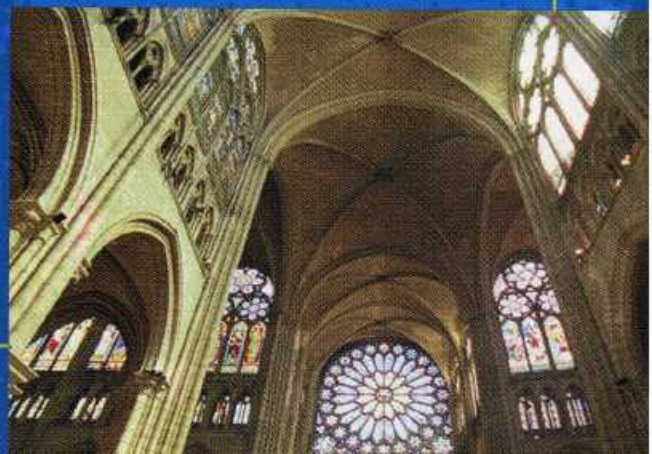
IDÉES

Averroès soutient qu'il faut concilier la philosophie d'Aristote avec le Dieu du Coran. Ses œuvres feront autorité à la Sorbonne et contribueront à animer la pensée occidentale pendant quatre siècles.

Ci-dessus, Conversation entre Averroès et Porphyre.

ARCHITECTURE

L'art gothique naît en région parisienne en la basilique de Saint-Denis. Premier chef-d'œuvre de cet art nouveau, elle fait un usage systématique du voûtement sur croisée d'ogives.



ACTIVITÉS

ACTIVITÉ 1 Dénombrer des listes : arbres et cases

1 Des problèmes de dénombrement

Note
Une liste respecte un ordre : il y a un premier, un deuxième, ...
Ainsi *a*, *b*, *c* et *a*, *c*, *b*, sont distinctes bien qu'elles aient les mêmes éléments.
Dans une liste, le même élément peut figurer plusieurs fois : ainsi PFF est une liste.

Pour résoudre certains problèmes de dénombrement, on est souvent ramené à répondre à la question suivante : si E est un ensemble de n éléments et p un naturel donné, combien peut-on faire de listes constituées de p éléments de E ?

Exemple 1 : Pile ou face.
On lance trois fois de suite une pièce de monnaie : à chaque lancer, on note dans l'ordre P, pour « pile », ou F, pour « face », le côté visible. Le résultat peut alors être représenté par un « mot », par exemple, PFF : « pile » est sorti au premier lancer, « face » aux deuxième et troisième lancers. Quels sont tous les résultats possibles ?
Voyez que, si l'on note E l'ensemble {P ; F}, répondre à cette question revient à écrire toutes les listes de trois éléments pris parmi les deux éléments P et F de E. Ici $n = 2$, $p = 3$.

Exemple 2 : Classement.
On doit classer cinq concurrents sans ex-æquo. Combien y a-t-il de classements possibles ?
Notons A, B, C, D, E ces concurrents et $\mathscr{E}$ leur ensemble, $\mathscr{E} = \{A ; B ; C ; D ; E\}$. Le nombre de tels classements est le nombre de listes constituées de tous les éléments de $\mathscr{E}$; une telle liste est appelée aussi une **permutation**. Ici $n = 5$, $p = 5$.

Note
Lorsque dans une liste, les éléments sont deux à deux distincts, on dit que cette liste est **sans répétitions**.

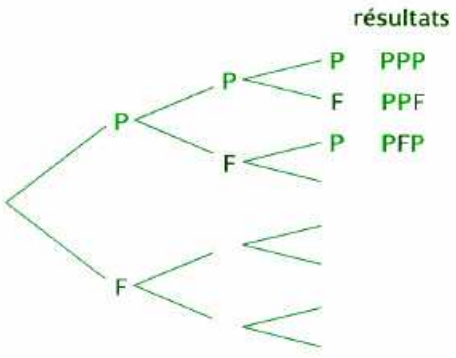
Exemple 3 : Tirage sans remise.
Une urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5. On tire successivement trois boules de l'urne mais sans remise (la boule tirée n'est pas remise dans l'urne) et on note, dans l'ordre, les numéros tirés. Combien y a-t-il de tirages possibles ? (Exemple d'un tirage : 2, 5, 4.)
Le nombre de ces tirages est le nombre de listes de trois éléments pris dans l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$, et deux à deux distincts, puisque la boule tirée n'est pas remise dans l'urne. Ici, $n = 5$, $p = 3$.

2 Des techniques pour dénombrer

Reprenez l'exemple 1 ci-dessus.

1. Utilisation d'un arbre

Pour trouver tous les résultats possibles, on peut s'aider de l'arbre ci-contre que vous compléterez.



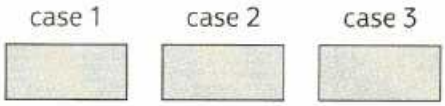
- Quels sont les résultats possibles ? Combien y en a-t-il ?

Il est facile de dénombrer les branches terminales d'un arbre tel que celui-ci, selon le « **principe de la multiplication** » :
si chaque branche principale de l'arbre se ramifie en un même nombre de branches et si chacune de celle-ci se ramifie en un même nombre de branches, et ainsi de suite, alors le nombre de branches terminales est égal au produit de ces différents nombres.

- Retrouvez ainsi le résultat précédent.

2. Utilisation de cases

Au lieu d'utiliser un arbre, on peut utiliser la technique du « **remplissage des cases** » selon le principe de la multiplication mis en évidence par l'arbre précédent.
Ainsi dans l'exemple 1 du pile ou face, on peut dire que l'on obtiendra tous les tirages possibles en remplissant chacune des cases numérotées de 1 à 3 (pour respecter l'ordre) par une lettre P ou F.



Note
« Pour chacun de ces choix » est l'expression qui met en route le principe multiplicatif utilisé pour calculer le nombre total de choix possibles.

a) Combien y a-t-il de choix possibles pour remplir la première case ? Pour chacun de ces choix, combien y a-t-il de façons de remplir la deuxième case ? Donc, combien y a-t-il de façons de remplir les deux premières cases ? Pour chacune de ces façons, combien y a-t-il de façons de remplir la troisième case ?

b) Déduisez-en finalement le nombre de façons de remplir les trois cases.

3. Exercices

a) En utilisant la technique du remplissage des cases, répondez aux questions des exemples 2 et 3 du paragraphe **1**.

b) E est l'ensemble des neuf chiffres de 1 à 9 (0 est exclu). Combien peut-on écrire de nombres entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est 2 ?

ACTIVITÉ 2 Combinaisons

Note
L'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble n'a pas d'importance. Ainsi $\{a\ ;\ b\}$ et $\{b\ ;\ a\}$ désignent le même ensemble.

• Dire que F est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) d'un ensemble E signifie que tout élément de F est un élément de E. (On dit aussi que l'ensemble F est **inclus** dans l'ensemble E.)

• On appelle **combinaison de p éléments** d'un ensemble E tout **sous-ensemble de E qui contient p éléments**. Supposons que E contienne n éléments, le problème est de calculer le nombre de combinaisons de p éléments de E ($0 \leqslant p \leqslant n$).

Exemple : E est un ensemble à cinq éléments. On note $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\}$.
Le but est de calculer le nombre de combinaisons à trois éléments de E. On note $\binom{5}{3}$ ce nombre.

1. D'après l'activité 1, on sait calculer le nombre n_1 de listes sans répétitions de trois éléments de E.
Quel est ce nombre n_1 ?

2. Il s'agit maintenant de comprendre comment on obtient ces listes à partir des combinaisons à trois éléments de E.

a) Avec les éléments de la combinaison (ou sous-ensemble) $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$, par exemple, combien de listes de trois éléments sans répétitions peut-on obtenir ? On note n_2 ce nombre.

b) Justifiez alors l'égalité $n_1 = n_2 \times \binom{5}{3}$, puis déduisez-en la valeur de $\binom{5}{3}$.

1 Dénombrer des listes

Dans tout ce paragraphe, E désigne un ensemble non vide qui contient n éléments.

1.1 Permutation d'un ensemble

Une **permutation de E** est une liste **des n éléments** de E.

Note
Une liste est une énumération qui suit un **ordre** : il y a un premier élément, un deuxième, ... Ainsi a, b, c et b, a, c sont deux listes distinctes.

■ **Exemple.** E = {a; b; c; d} ; (a; b; c; d) et (a; c; d; b) sont deux permutations de E. Écrire une permutation de E revient à remplir quatre cases numérotées de façon qu'au final, chaque case contienne une seule lettre et que les lettres figurant dans les cases soient deux à deux distinctes. Il y a quatre choix possibles pour la case 1, et pour chacun de ces choix, il reste trois choix possibles pour la case 2. Donc 4×3 façons de remplir les deux premières cases.

Pour chacune, il reste deux choix pour la case 3, donc $4 \times 3 \times 2$ façons de remplir les trois premières cases, et pour chacune, un seul choix pour la case 4. Donc au total, $4 \times 3 \times 2 \times 1$ permutations.

case 1	case 2	case 3	case 4
4 choix	3 choix	2 choix	1 choix

Note
Tous les résultats de ce paragraphe 1 se retrouvent facilement en utilisant la technique du « remplissage des cases ». Il n'est pas indispensable de les retenir.

■ **Cas général.** Il se traite de la même façon : il y a n choix pour la case 1, $(n-1)$ choix pour la case 2, et ainsi de suite jusqu'à 1 choix pour la case n.
Donc, au total, $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ permutations.

Le nombre de **permutations** d'un ensemble de n éléments, $n \geqslant 1$, est égal à :
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 .$$
On note ce nombre $n!$ et on lit « factorielle n ». On convient que $0! = 1$.

1.2 Liste sans répétitions de p éléments de E

Une **liste sans répétitions de p éléments de** E est une liste de p éléments de E **deux à deux distincts** ($1 \leqslant p \leqslant n$).

Note
Un modèle d'obtention de telles listes est le tirage successif sans remise de p objets, notés dans l'ordre, dans une urne en contenant n.

EXEMPLE E = {a; b; c; d; e}. Alors (a; e; d) est une liste sans répétitions de trois éléments de E. Remarquez que c'est une permutation du sous-ensemble F = {a; d; e}.

Pour obtenir une telle liste, on peut remplir trois cases numérotées de 1 à 3, et en raisonnant comme dans le § **1.1**, on obtient $5 \times 4 \times 3$ listes possibles.

case 1	case 2	case 3
5 choix	4 choix	3 choix

Le **cas général** se traite de la même façon, d'où :

Si un ensemble E contient n éléments $n \geqslant 1$, le nombre de listes sans répétitions de p éléments de E, $1 \leqslant p \leqslant n$, est $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1))$.

1.3 Liste avec répétitions de p éléments de E

Exemple
$E = \{a; b\}$, $p = 3$.
Les listes sont :
(a ; a ; a), (a ; a ; b),
(a ; b ; a), (a ; b ; b),
(b ; b ; b), (b ; a ; b),
(b ; a ; a), (b ; b ; a).

p étant un entier quelconque, $p \geqslant 1$, le nombre de ces listes est n^p.

En effet, puisque les répétitions sont possibles, pour chaque case de 1 à p, il y a n choix possibles, d'où le résultat.

case 1	case 2	...	case p
n choix	n choix	...	n choix

Remarque. Un modèle d'obtention de telles listes est le tirage successif avec remise de p objets notés dans l'ordre dans une urne en contenant n (voir le TD 1 p. 245).

COMPRENDRE

Dénombrer avec *n*!

$n!$ est le nombre de listes ordonnées que l'on peut faire avec n objets deux à deux distincts (c'est-à-dire le nombre de façons de les ordonner).

Exemple.

6 chevaux participent à une course sans ex-æquo.

Combien y a-t-il de classements possibles ?

Un tel classement est une liste ordonnée de 6 chevaux donc 6! classements possibles.

Et

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$

Calculer avec des factorielles

Exemple.

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

Notez que

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2!$

De manière générale :

$n! = n \times (n-1)!$

$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p)!,$

donc

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1).$$

Ainsi, $\frac{6!}{4!} = 6 \times 5$;

$8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{5!}$.

VOCABULAIRE

Permuter : changer deux choses de place.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Dénombrer des objets ordonnés sans répétitions

ÉNONCÉ

Une urne contient dix boules sur lesquelles ont été marquées les dix lettres de l'alphabet de A à J. On tire successivement quatre boules sans remise et on inscrit dans l'ordre les lettres portées par les boules tirées.

Combien de mots de quatre lettres ayant un sens ou non, peut-on former ?

SOLUTION COMMENTÉE

Former un mot revient à remplir quatre cases numérotées de 1 à 4.

Pour remplir la première, il y a dix choix possibles. Pour chacun de ces choix, pour remplir la deuxième, il y a neuf choix possibles puisque l'urne ne contient plus maintenant que neuf boules.

case 1	case 2	case 3	case 4
10 choix	9 choix	8 choix	7 choix

Donc pour remplir les deux premières cases, il y a 10×9, soit 90 choix possibles, et ainsi de suite jusqu'à la quatrième case.

On voit que l'on peut obtenir $10 \times 9 \times 8 \times 7$, soit 5 040 mots différents.

Remarque.

Former un mot selon les conditions de l'énoncé revient à dresser une liste sans répétitions de 4 éléments pris parmi 10.

Le résultat trouvé est en accord avec l'encadré du § **1.2**, lorsque $n = 10$ et $p = 4$.

→ EXERCICES 7 et 8, 11 à 14

EXERCICE RÉSOLU 2 Dénombrer des objets ordonnés avec répétitions

ÉNONCÉ

Combien de mots de trois lettres peut-on former en utilisant les lettres du mot « Paris » et uniquement celles-là ?

Ce mot peut contenir plusieurs fois la même lettre.

SOLUTION COMMENTÉE

On peut imaginer trois cases à remplir. Le mot « Paris » a cinq lettres différentes donc pour la première case, il y a cinq choix. Il n'est pas interdit que les lettres puissent se répéter, donc il y a encore cinq choix pour la deuxième case, et de même cinq choix pour la troisième. Il y a donc au total $5 \times 5 \times 5$, soit 125 choix possibles, donc finalement 125 mots de trois lettres.

Remarque.

Former un mot selon les conditions de l'énoncé revient à dresser une liste avec répétitions possibles de 3 éléments parmi 5.

Le résultat trouvé est en accord avec l'énoncé du § **1.3**, lorsque $n = 5$ et $p = 3$.

→ EXERCICES 9 à 14

2 Combinaisons

2.1 Définition

DÉFINITION 1

E est un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une **combinaison de p éléments de** E est un sous-ensemble (ou partie) de E qui contient p éléments.

Note
L'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble n'a pas d'importance. Ainsi $\{a\,;\,b\}$ et $\{b\,;\,a\}$ désignent le même ensemble.

EXEMPLE $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$ et $p = 2$.
Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{a\,;\,b\}$, $\{a\,;\,c\}$, $\{b\,;\,c\}$.

NOTATION

Le **nombre de parties** (i.e. de combinaisons) de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n ». On note aussi C_n^p.

EXEMPLE De l'exemple ci-dessus, on déduit que $\binom{3}{2} = 3$.

2.2 Nombre de combinaisons

THÉORÈME 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier p tel que $0 < p \leqslant n$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

L'IDÉE de la démonstration

On connaît le nombre n_1 des parties ordonnées de p éléments (§ 1.2). Or chaque partie de p éléments engendre $p!$ parties ordonnées (§ 1.1).
Donc $n_1 = \binom{n}{p} \times p!$.

Démonstration.

• Si $p > 0$, choisissons une partie F de p éléments de E. Écrivons toutes les permutations de F, (i.e. toutes les listes sans répétitions des éléments de F). Leur nombre est $p!$ (voir § 1.1 page 238). En faisant de même avec toutes les parties de E contenant p éléments, on obtient toutes les listes sans répétitions formées de p éléments de E et, chacune de ces listes n'est obtenue qu'une seule fois. En effet, deux parties distinctes F et G n'ayant pas les mêmes éléments, les listes formées à partir de ces parties sont distinctes.
Donc :
(nombre de parties à p éléments de E) $\times\, p!$ = nombre de listes sans répétitions de p éléments
c'est-à-dire $\binom{n}{p} \times p! = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ d'où l'égalité donnée par le théorème.

• Si $p = 0$, il n'existe qu'une seule partie qui n'a pas d'éléments : la partie vide.
Donc $\binom{n}{0} = 1$. La formule du théorème donne bien $\binom{n}{0} = 1$, car $0! = 1$.

EXEMPLE Le nombre des parties à 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments est

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{(32-5)!5!} = \frac{32!}{27!5!} = 201\,376.$$

Avec les calculatrices. Les calculatrices scientifiques disposent de fonctions permettant de calculer $\binom{n}{p}$.

EXEMPLE Calculer $\binom{10}{4}$.

• avec « TI » :
10 MATH (▶) (PRB) (nCr) 3 ENTER 4 ENTER
• avec « casio » :
10 OPTN F6 (▶) F3 (PROB) F3 (nCr) 4 EXE

COMPRENDRE

Dénombrer avec $\binom{n}{p}$

On utilise $\binom{n}{p}$ dès qu'il s'agit de choisir p objets distincts parmi n objets deux à deux distincts.

➜ EXERCICE RÉSOLU 3

« il existe au moins ... »

Exemple.

Une urne contient 6 boules noires et 4 blanches. On tire trois boules simultanément. Le nombre total de tirages est $N = \binom{10}{3}$.

On cherche le nombre N_1 de tirages contenant **au moins** une boule noire. Plutôt que de dénombrer les tirages contenant exactement 1 noire, puis 2 noires, puis 3 noires, il est préférable de dénombrer le nombre N_2 de tirages qui ne contiennent aucune noire.

On obtient $N_2 = \binom{4}{3}$

et $N_1 = N - N_2$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 3

Valeurs remarquables

E est un ensemble de n éléments.

- $\binom{n}{0} = 1$, car une seule partie de E ne contient pas d'éléments, la partie vide.
- $\binom{n}{1} = n$ car il y a autant de parties contenant un seul élément que d'éléments.
- $\binom{n}{n} = 1$ car une seule partie contient n éléments, c'est E.
- $\binom{n}{n-1} = n$ car, à toute partie F de $n-1$ éléments, correspond une partie de 1 élément, celui qui n'est pas dans F.

Donc il y a autant de parties de $n-1$ éléments que de parties réduites à un seul. Ainsi $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Dénombrer des objets non ordonnés

ÉNONCÉ

On tire cinq cartes d'un jeu de trente-deux cartes et on appelle une « main » l'ensemble ainsi obtenu. Combien y a-t-il de mains de cinq cartes contenant :

1) le valet de trèfle ?

2) exactement deux cœurs ? (Il y a huit cœurs dans le jeu).

3) au moins un roi ? (Il y a quatre rois dans le jeu).

4) ni le roi de trèfle, ni un pique ?

SOLUTION COMMENTÉE

1) Pratiquement, pour obtenir une main de cinq cartes contenant le valet de trèfle, on prend le valet de trèfle puis on choisit quatre cartes parmi les trente et une restantes.

Donc le nombre cherché est $\binom{31}{4} = 31\,465$.

2) Pratiquement, pour obtenir un paquet de cinq cartes contenant exactement deux cœurs, on peut procéder ainsi : on choisit d'abord deux cartes parmi les huit cœurs, puis trois cartes parmi les vingt-quatre restantes.

Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir deux cœurs parmi huit, et pour chacun de ces choix, $\binom{24}{3}$ façons de choisir les trois cartes parmi les vingt-quatre restantes.

Donc le nombre cherché est égal à $\binom{8}{2} \times \binom{24}{3}$, c'est-à-dire 56 672.

3) Notons A l'ensemble de mains de cinq cartes contenant au moins un roi. Pour dénombrer ses éléments, il est plus simple de dénombrer ceux de son complémentaire $\bar{A}$, c'est-à-dire le nombre de mains de cinq cartes ne contenant aucun roi.

Constituer une main de cinq cartes ne contenant aucun roi revient à choisir cinq cartes parmi les vingt-huit cartes qui ne sont pas des rois, donc le nombre de mains de $\bar{A}$ est $\binom{28}{5}$.

Or le nombre total de mains de cinq cartes est $\binom{32}{5}$, donc le nombre de mains de cinq cartes contenant au moins un roi est $\binom{32}{5} - \binom{28}{5}$, c'est-à-dire 103 096.

4) Une telle main s'obtient ainsi. On enlève du jeu le roi de trèfle et les huit piques puis on tire les 5 cartes des 23 restantes. On obtient donc $\binom{23}{5}$ mains, c'est-à-dire 33 649.

Remarque.

- Pour éviter une erreur fréquente dans ce genre de problèmes, voir le TD 2 p. 246.
- Un modèle d'obtention de listes d'objets non ordonnées est le tirage simultané d'objets dans une urne (voir le TD 1 p. 245).

➜ EXERCICES 19 et 20, 22 et 23, 34

3 Formules

3.1 Formules relatives aux combinaisons

THÉORÈME 2

1. Pour tous naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

2. Pour tous naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 55

Démonstration. **1.** $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$.

2. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$; mais $p! = p \times (p-1)!$ et $(n-p)! = (n-p) \times (n-p-1)!$, donc un dénominateur commun est $p!(n-p)!$, d'où :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)![p+(n-p)]}{p!(n-p)!}$$
$$= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

■ Triangle de Pascal

Note
Le tableau permet de calculer $\binom{n}{p}$ de proche en proche grâce à l'égalité :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Le tableau ci-dessous est appelé triangle de Pascal.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1		$\binom{4}{2}$					
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		

3.2 Formule du binôme

THÉORÈME 3

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout naturel $n \geqslant 1$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Note
À la vue de cette formule, on comprend pourquoi les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés coefficients binomiaux.

Note
On parle aussi de la formule du binôme de Newton.

Démonstration. L'égalité est vraie lorsque $n = 1$, car $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$.

Supposons-la vraie pour un entier $n \geqslant 1$, et calculons $(a+b)^{n+1}$.

Écrivons $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b$. Nous obtenons :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p+1}b^p + \cdots + \binom{n}{n}ab^n$$
$$+ \binom{n}{0}a^n b + \cdots + \binom{n}{p-1}a^{n-p+1}b^p + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Or pour tout entier q, $1 \leqslant q \leqslant n$, $\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1} = \binom{n}{q}$, d'où :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{p}a^{n-p+1}b^p + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1},$$

ce qui est bien l'égalité de l'énoncé lorsque l'exposant est $n+1$, car :

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

Donc si l'égalité est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$, donc elle est vraie pour tout entier n.

COMPRENDRE

Autre preuve de l'égalité 2 du théorème 2

Cette démonstration utilise seulement la définition 1 page 240.

E est un ensemble de n éléments, $n \geqslant 2$.

Notons a un élément de E. Parmi les $\binom{n}{p}$ parties à p éléments de E, distinguons celles qui contiennent a, notons x leur nombre, et celles qui ne contiennent pas a, notons y leur nombre.

Il est clair que $x + y = \binom{n}{p}$.

Calculons x. Une partie à p éléments qui contient a contient aussi $(p-1)$ éléments à prendre parmi les $(n-1)$ éléments de E autres que a (car a ne peut pas être répété).

Donc $x = \binom{n-1}{p-1}$.

Calculons y. Une partie de p éléments ne contenant pas a contient aussi p éléments pris parmi les $(n-1)$ éléments de E autres que a.

Donc $y = \binom{n-1}{p}$

d'où

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Utilisation du symbole Σ

La formule du théorème 3 s'écrit aussi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

La somme des exposants de a et b est toujours n.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 4 Appliquer la formule du binôme

ÉNONCÉ

1) a et b sont deux réels, développez $(a+b)^6$ et $(a-b)^5$.

2) Développez $(1+i)^6$ et $(2i-3)^4$, i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) ● On applique la formule du binôme pour $n = 6$.

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6$$

donc $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

● On applique la formule du binôme pour $n = 5$ en substituant $-b$ à b.

$$(a-b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4(-b) + \binom{5}{2}a^3(-b)^2 + \binom{5}{3}a^2(-b)^3 + \binom{5}{4}a(-b)^4 + \binom{5}{5}(-b)^5$$

donc $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

2) $(1+i)^6 = 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6$

$= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i.$

$$(2i-3)^4 = \binom{4}{0}(2i)^4 + \binom{4}{1}(2i)^3(-3) + \binom{4}{2}(2i)^2(-3)^2 + \binom{4}{3}2i(-3)^3 + \binom{4}{4}(-3)^4$$

$= 2^4i^4 - 4 \times 2^3i^3 \times 3 + 6 \times 2^2i^2 \times 9 - 4 \times 2i \times 27 + 81$

$= 16 + 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 120i.$

EXERCICES 27 et 28, 46

EXERCICE RÉSOLU 5 Utiliser la formule du binôme

ÉNONCÉ

1) Développez $(1+1)^n$ à l'aide de la formule du binôme et déduisez-en le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments.

2) Développez $(1+2x)^n$. Déduisez-en, en fonction de n, la valeur de la somme

$$S_n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}.$$

SOLUTION COMMENTÉE

1) Lorsque $a = b = 1$, la formule du binôme s'écrit :

$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$. Or, si E a n éléments et si $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p}$ est le nombre de sous-ensembles de E de p éléments.

Donc $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$ est le nombre de sous-ensembles de E.

Conclusion. Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de n éléments est 2^n.

2) $(1+2x)^n = 1 + \binom{n}{1}(2x) + \binom{n}{2}(2x)^2 + \cdots + 2^nx^n\binom{n}{n}$.

La somme S_n est égale au second membre de l'égalité précédente avec $x = 1$.

Donc $S_n = 3^n$.

EXERCICES 29, 47, 51

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

Par définition

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ et $0! = 1$.

$n!$ est le nombre de façons d'ordonner n objets deux à deux distincts.

$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Quand utilise-t-on les $\binom{n}{p}$?

Lorsque l'on doit choisir p objets **(non ordonnés)** parmi n, il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles.

→ EXERCICE RÉSOLU 3

Formule du binôme

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a+b)^n$ est la somme de **tous les termes** $\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ lorsque k varie de 0 à n.

Dans chacun de ces termes, la somme des exposants de a et b est **toujours égale à n.**

→ EXERCICES RÉSOLUS 4 et 5

Technique du remplissage de cases

Remplir des cases numérotées est un moyen commode pour dénombrer.

Exemples. Pour calculer

- le nombre de façons d'ordonner p objets pris parmi n objets deux à deux distincts (c'est-à-dire le nombre de listes possibles de ces p objets sans répétitions). Ce nombre est : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))$.

→ EXERCICE RÉSOLU 1

- le nombre de listes possibles de p de ces objets lorsqu'on s'autorise à écrire plusieurs fois un même objet dans la liste (listes avec répétitions). Ce nombre est n^p.

→ EXERCICE RÉSOLU 2

DES réflexes À AVOIR

Pour résoudre un problème de dénombrement,

- pensez à imaginer un procédé de construction des objets à dénombrer ;
- pensez à regarder si dans cette construction, un ordre est nécessaire ou pas.

Si un ordre est nécessaire, pensez à la technique du remplissage de cases ; sinon pensez aux $\binom{n}{p}$ ou à des techniques plus spécifiques de la situation : arbres, tableaux, langage des ensembles, ...

Exemples. **1.** Combien peut-on écrire d'entiers à quatre chiffres tous distincts, pris parmi 1, 3, 5, 7, 9 ? Pour « construire » un tel nombre, on doit choisir quatre chiffres distincts parmi 1, 3, 5, 7, 9, mais on doit les ordonner car, par exemple, $3\,157 \neq 1\,357$. Donc, on doit remplir quatre cases :

case 1	case 2	case 3	case 4
5 choix	4 choix	3 choix	2 choix

Au total, $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ choix.

2. Si l'on veut maintenant que le troisième chiffre soit le chiffre 7, alors :

case 1	case 2	case 3	case 4
4 choix	3 choix	1 choix	2 choix

Au total, $4 \times 3 \times 2 = 24$ choix.

3. Dans un jeu de trente-deux cartes, combien y a-t-il de mains de six cartes contenant exactement deux valets ?

Pour « construire » une telle main, on choisit d'abord deux valets parmi quatre, donc $\binom{4}{2}$ choix ; on choisit ensuite quatre cartes parmi vingt-huit cartes [32 – 4 valets], donc $\binom{28}{4}$. Au total, $\binom{4}{2} \times \binom{28}{4}$.

DES erreurs À ÉVITER

Ne comptez pas plusieurs fois un même objet.

→ TD2, page 246

TD 1 Les différents types de tirages

Une urne contient quatre boules numérotées : 10, 20, 30, 40.

1 Tirages successifs avec remise

Note
Tirer **successivement avec remise**, p objets parmi n, c'est choisir un ***p*-uplet**.

Une expérience est définie par le protocole suivant :
• on effectue trois **tirages successifs avec remise**, c'est-à-dire qu'après chaque tirage, on replace la boule tirée dans l'urne ;
• on note le numéro de chaque boule tirée suivant **l'ordre** dans lequel elle a été tirée.
Le résultat d'une expérience peut alors être représenté par un **triplet**, ou une liste ordonnée de trois éléments de l'ensemble $E = \{10 ; 20 ; 30 ; 40\}$.
Ainsi le triplet (40 ; 30 ; 30) correspond au tirage suivant : la première boule tirée porte le numéro 40, la deuxième le numéro 30, la troisième le numéro 30.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2. Combien y a-t-il de résultats possibles dans chacun des cas suivants :

a) La première boule tirée porte le numéro 10, la deuxième le numéro 40, la troisième le numéro 20 ?

b) La première boule tirée porte le numéro 30 et la deuxième le numéro 20 ?

c) La deuxième boule tirée porte le numéro 40 et la troisième le numéro 30 ?

d) La deuxième boule porte le numéro 20 ?

Aide. Utilisez la technique du remplissage des cases.

2 Tirages successifs sans remise

Note
De manière générale, on appelle **arrangement** de p objets pris parmi n, toute liste ordonnée de p objets, sans répétitions et deux à deux distincts, pris parmi ces n objets. Lorsque $p = n$, une telle liste est appelée une **permutation** des n objets.

Une expérience est définie par le protocole suivant :
• on effectue trois **tirages successifs sans remise**, c'est-à-dire que l'on ne replace pas la boule tirée dans l'urne ;
• on note le numéro de chaque boule tirée suivant **l'ordre** dans lequel elle a été tirée.
Le résultat d'une expérience peut alors être aussi représenté par un **triplet**, mais cette fois les éléments de ce triplet sont nécessairement **deux à deux distincts**, c'est donc une partie de E contenant trois éléments et ordonnée (arrangement).

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2. Répondez à la question 2. du § 1 pour ce deuxième type d'expérience.

3 Tirage simultané

Note
Tirer **simultanément** p objets parmi n, c'est choisir une **partie** constituée de p éléments sans relation d'ordre. Le nombre de tels tirages est donc $\binom{n}{p}$.

Une expérience est définie par le protocole suivant :
• on tire simultanément trois boules de l'urne ;
• on note les trois numéros inscrits sur les boules tirées.
Le résultat d'une expérience peut alors être représenté par une **partie** à trois éléments de l'ensemble $E = \{10 ; 20 ; 30 ; 40\}$.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2. Combien y a-t-il de résultats dans lesquels figure le nombre 20 ? dans lesquels figurent le nombre 30 et le nombre 40 ?

TD 2 Deux types de dénombrement

1 À propos d'une erreur fréquente

1. Exemple

Dans la résolution d'un problème de dénombrement, il faut s'assurer qu'on compte bien tous les objets que l'on doit dénombrer, et qu'un même objet n'est pas compté plusieurs fois. Voici un type d'erreur assez fréquente.

● Trouvez l'erreur dans le texte suivant, expliquez son origine, et proposez une réponse correcte (voir l'exercice résolu 3, page 241).

« Un jeu de trente-deux cartes étant donné, pour constituer une main de cinq cartes contenant au moins un roi, on peut procéder ainsi :

• on choisit d'abord un roi : il y a quatre choix possibles ;

• puis on choisit quatre cartes parmi les trente-et-une cartes restantes (31 et non 28, car la main peut contenir d'autres rois) : il y a $\binom{31}{4}$ choix possibles.

• Le nombre de mains de cinq cartes contenant au moins un roi est donc égal à :

$$4 \times \binom{31}{4} = 125\,860. \text{ »}$$

Aide. Donnez une main de cinq cartes obtenue au moins deux fois par ce procédé.

2. Application

a) Combien y a-t-il de mains contenant exactement deux as et un cœur ?

b) Combien y a-t-il de mains contenant trois piques et deux rois ?

2 L'antivol

Le code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ..., 9.

1. a) Quel est le nombre de codes possibles ?

L'alarme se déclenche lorsqu'aucun des quatre chiffres sélectionnés par l'utilisateur ne figure dans le code.

Combien de codes déclenchent l'alarme ?

b) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?

2. Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio. Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9, 5 mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.

a) Combien de codes différents peut-il composer avec ces quatre chiffres ?

b) Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre deux minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de quatre minutes, etc. (Le délai d'attente double entre deux essais successifs.)

Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. Listes d'éléments d'un ensemble

Pour les exercices 1 à 4, simplifiez les écritures des nombres donnés sans utiliser la calculatrice.

1 a) $\frac{21!}{20!}$. b) $\frac{17!}{15!}$. c) $\frac{6!-5!}{5!}$.

2 a) $\frac{6\times 4!}{5!}$. b) $\frac{7!\times 5!}{10!}$. c) $\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!}$.

3 a) $\frac{6!}{3!\times 3!}$. b) $\frac{9!}{5!\times 4!}$. c) $\frac{9!}{6!\times 3!}$.

4 a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$. b) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$.
c) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$. d) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$.

5 En utilisant la notation factorielle, donnez une autre écriture des nombres suivants :

$A = 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10$; $B = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5}{3\times 2}$;

$C = (n+2)(n+1)n$.

6 Écrivez toutes les permutations de l'ensemble :

$E = \{a ; b ; c ; d\}$.

7 Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire.
Combien de comités différents peut-on élire ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 239.

8 1. Dans un meeting d'athlétisme, la finale de saut en longueur met aux prises douze athlètes ; il n'y a pas d'ex-aequo. Combien existe-t-il de classements possibles ?

2. La finale du 100 m plat met aux prises huit athlètes ; tous arrivent et il n'y a pas d'ex-aequo.
Combien existe-t-il d'arrivées dans l'ordre des trois premiers ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 239.

9 1. Combien peut-on former d'anagrammes du mot « LAINE » ?

2. Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?

3. Reprenez les deux questions précédentes avec le mot « BALEINE ».

☞ **Aide.** On appelle anagramme d'un mot, tout assemblage ordonné formé de toutes les lettres du mot.
Voir l'exercice résolu 2, page 239.

10 1. Combien existe-t-il de codes, de quatre chiffres, possibles pour une carte bancaire ?

2. Combien existe-t-il de numéros de téléphone commençant par 0605 ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 239.

11 L'entrée d'un immeuble est commandée par un appareil à digicodes. Un digicode comporte cinq éléments : trois chiffres puis deux lettres.

1. Combien y a-t-il de digicodes possibles ?

2. Combien d'entre eux commencent par le chiffre 0 ?

3. Combien d'entre eux commencent par trois chiffres identiques ?

4. Combien d'entre eux ont deux lettres identiques ?

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 1 et 2, page 239.

12 On jette un dé à 6 faces, trois fois de suite et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?

2. Quel est le nombre de résultats :

a) comportant 3 chiffres identiques ;

b) comportant 3 chiffres distincts deux à deux ;

c) comportant 2 (et 2 seulement) chiffres identiques.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 1 et 2, page 239.

13 On place trois objets différents a, b et c dans trois tiroirs T_1, T_2 et T_3.

1. On décide de ne mettre qu'un objet par tiroir.
De combien de façons peut-on placer ces objets ?

2. On décide de ranger ces objets « n'importe comment », c'est-à-dire que l'on peut mettre dans chaque tiroir

le nombre d'objets que l'on veut. De combien de façons peut-on alors placer ces objets ?

☞ Aide. Voir les exercices résolus 1 et 2, page 239.

14 Répondez aux questions de l'exercice précédent avec quatre objets et cinq tiroirs.

2. Combinaisons

15 Sans calculatrice, exprimez sous forme d'entiers ou de fractions les nombres suivants :

$$A = \binom{6}{2}; \quad B = \binom{12}{8}; \quad C = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}}; \quad D = \frac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}.$$

16 Prouvez que $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$, pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

17 Trouvez l'entier n satisfaisant la condition indiquée.

a) $\binom{n}{2} = 36$. **b)** $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$.

18 1. Combien y a-t-il de sous-ensembles contenant trois éléments de l'ensemble $E = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$?

2. Écrivez tous ces sous-ensembles.

19 Combien de comités de trois membres peut-on élire parmi une assemblée de vingt personnes ?

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 3, page 241.

20 Dix-huit personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres.
Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 3, page 241.

21 Douze points sont disposés de manière que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

1. Combien de droites peut-on tracer en joignant ces points deux à deux ?

2. Combien existe-t-il de vecteurs qui ont pour origine et pour extrémité deux points distincts parmi ces douze ?

☞ Rappel. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est différent du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

3. Combien existe-t-il de triangles qui ont pour sommets trois de ces douze points ?

22 Sur un damier « 4 × 4 » de seize cases, on place quatre jetons sur quatre cases différentes.

1. Les jetons sont de quatre couleurs différentes.
De combien de façons peut-on les disposer ?

2. Les jetons sont identiques.
De combien de façons peut-on les disposer ?

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 3, page 241.

23 On veut choisir une délégation de quatre personnes prises parmi quinze hommes et quatorze femmes.

1. De combien de façons peut-on faire ce choix ?

2. On veut que la délégation soit constituée de deux hommes et de deux femmes.
De combien de façons peut-on faire ce choix ?

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 3, page 241.

24 Loto

Chaque semaine, le jeu « Loto. Foot 7 et 15 » propose une grille avec 15 rencontres de football. Le jeu consiste à pronostiquer les résultats des 7 premiers matchs de la liste (jeu à 7) ou des 15 matchs (jeu à 15). Pour chaque match, trois réponses sont possibles : l'équipe 1 est annoncée comme gagnante (réponse « 1 »), le résultat prévu est un match nul (réponse « N »), l'équipe 2 est annoncée comme gagnante (réponse « 2 »).
Le parieur coche une et une seule des trois cases 1 N 2 correspondant au résultat prévu.

1. De combien de façons différentes, peut-on remplir une grille :

a) pour le jeu à 7 ? **b)** pour le jeu à 15 ?

2. Pour le jeu à 7, on « gagne » à partir de 6 réponses exactes et pour le jeu à 15 à partir de 12 réponses exactes.
Combien y a-t-il de grilles gagnantes :

a) pour le jeu à 7 ? **b)** pour le jeu à 15 ?

3. Formules

25 Mots croisés

On s'intéresse aux grilles de mots croisés de vingt-cinq cases (grilles « 5 × 5 »).
Pourquoi peut-on dire, sans calculs, que le nombre de grilles contenant cinq cases noires est égal au nombre de grilles contenant vingt cases noires ?

26 Résolvez dans l'ensemble des entiers strictement supérieurs à 2, $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = 3n(n-1)$.

Pour les exercices 27 et 28, développez les expressions données.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 4, page 243.

27 **a)** $(2+x)^4$. **b)** $(1-2x)^7$. **c)** $(2x+y)^5$.

28 **a)** $(1+2i)^5$. **b)** $(3-4i)^5$.

c) $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4$, θ réel.

29 En utilisant la formule du binôme, démontrez que pour tout entier naturel n, 5^n est la somme de 1 et d'un multiple de 4.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 243.

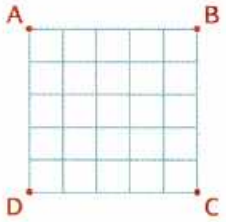
Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

30 Dénombrer sur un quadrillage

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré, régulièrement quadrillé.

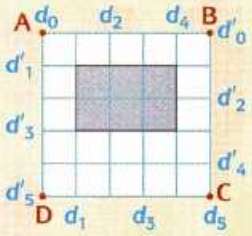
Objectif : trouver le nombre de rectangles contenus dans la figure. (Un carré est un rectangle.)



1. Il est souvent efficace pour dénombrer, de trouver un moyen qui permet concrètement d'obtenir les objets que l'on doit dénombrer. Voici un moyen possible.

Vérifiez que si l'on coupe deux droites verticales par deux droites horizontales, on obtient des rectangles.

2. Mais il faut être sûr de compter les objets (ici les rectangles) sans omission et sans répétition. Pour ce faire, on peut nommer les droites.
On note par exemple d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 les droites verticales de gauche à droite. (Ainsi d_0 est la droite (AD) et d_5 la droite (BC).) De même, on note d'_0, d'_1, d'_2, d'_3, d'_4, d'_5, les droites horizontales de haut en bas. (Ainsi d'_0 est la droite (AB) et d'_5 la droite (DC)).



Tout rectangle peut alors être noté :

$$d_i, d_j ; d'_k, d'_\ell \quad (i \neq j,\ k \neq \ell).$$

Observez que l'ordre entre d_i et d_j, entre d'_k et d'_ℓ n'a pas d'importance.
Ainsi le rectangle de la figure peut être noté d_1, d_4 ; d'_1, d'_3, mais aussi d_4, d_1 ; d'_1, d'_3 ou d_4, d_1 ; d'_3, d'_1, ou ...

a) Justifiez alors qu'il y a autant de rectangles que de façons de choisir deux droites verticales, puis deux droites horizontales.

b) Combien y a-t-il de façons de choisir deux droites verticales distinctes ? deux droites horizontales distinctes ?

c) Quel est alors le nombre de rectangles contenus dans le carré ABCD ?

3. Voyez-vous une autre façon d'arriver au résultat ? (Par exemple, on peut considérer qu'un rectangle est connu dès que l'on connaît deux de ses sommets opposés.)

31 Démontrer une formule

a et b sont des entiers naturels strictement positifs ; p est un entier tel que :

$$0 \leqslant p \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant p \leqslant b.$$

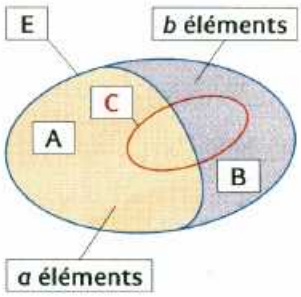
Objectif : démontrer que :

$$\binom{a}{0}\times\binom{b}{p}+\binom{a}{1}\times\binom{b}{p-1}+\binom{a}{2}\times\binom{b}{p-2}+\cdots+\binom{a}{p}\times\binom{b}{0}=\binom{a+b}{p}.$$

1. Première solution

Une idée est de remplacer chaque $\binom{n}{p}$ par sa valeur, mais on réalise vite que les calculs vont être « impossibles ».
L'idée alors est de rechercher une solution « ensembliste », c'est-à-dire de traduire $\binom{a+b}{p}$, par exemple, par le nombre d'ensembles à p éléments pris parmi les $a+b$ éléments d'un ensemble E.
Pour faire apparaître $\binom{a}{k}$ ou $\binom{b}{p-k}$, on peut partager E en deux parties disjointes, l'une A qui contient a éléments, l'autre B qui contient b éléments.

a) Vérifiez que chaque partie C de E à p éléments est la réunion d'une partie de A à k éléments $(0 \leqslant k \leqslant p)$ et d'une partie de B à $(p-k)$ éléments.
Combien y a-t-il de parties de E qui contiennent k éléments de A et $(n-k)$ éléments de B ?



b) Prouvez alors l'égalité souhaitée.

c) Rédigez une solution.

2. Deuxième solution

L'idée consiste, pour obtenir des produits de coefficients binomiaux, à multiplier membre à membre deux « formules du binôme ».

a) Trouvez le coefficient de x^p dans chacun des deux membres de l'égalité :

$$(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}.$$

b) Déduisez-en l'égalité souhaitée.

Pour progresser

Dénombrements

32 Une enquête sur la lecture de trois revues X, Y, Z, portant sur un échantillon de 1 000 personnes donne les résultats suivants :

- 60 % lisent X, 50 % lisent Y et 50 % lisent Z ;
- 20 % lisent Y et Z, 30 % lisent X et Z et 30 % lisent X et Y ;
- 10 % lisent les trois revues.

Parmi ces 1 000 personnes :

1. combien lisent deux de ces revues exactement ?
2. combien ne lisent aucune de ces revues ?

☞ **Une méthode.** **Pour bien démarrer la recherche d'un problème de dénombrement, il faut concevoir la réalisation des objets à dénombrer.**

33 Le jeu de « Master Mind » se joue à deux joueurs. L'un dispose cinq fiches dans cinq trous, les fiches sont choisies parmi huit couleurs, et le joueur dispose de cinq fiches de chaque couleur. L'autre joueur doit deviner la disposition choisie par l'autre.

1. Combien de dispositions peut-on constituer ?
2. On place au plus cinq fiches dans les cinq trous (certains trous peuvent rester vides).
Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
3. Le constructeur annonce 59 049 combinaisons possibles. Est-ce justifié ?

34 Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

1. exactement un roi, une dame et 2 valets ?
2. l'as de pique et au moins 2 trèfles ?
3. exactement un roi et deux carreaux ?

☞ **Aide.** **Voir l'exercice résolu 3, page 241.**

35 • n est un entier naturel, $n \geqslant 3$ et P_n un polygone régulier convexe à n côtés.

1. **a)** Déterminez le nombre de segments reliant deux sommets distincts de P_n.

b) Déduisez-en le nombre de diagonales de P_n.

2. Existe-t-il un polygone régulier qui a autant de côtés que de diagonales ? Si oui, lequel.

36 • **Informatique**

En informatique, on appelle octet une liste de huit éléments pris dans l'ensemble {0 ; 1}.

Exemples d'octets : 01001100 ; 11100101 ; 00011111.

1. Combien y a-t-il d'octets possibles ?
2. Combien y a-t-il d'octets commençant par un 0 et se terminant par un 0 ?
3. Combien y a-t-il d'octets contenant exactement quatre 1 ?

37 • **Coups de poker**

On appelle main un ensemble de cinq cartes prises parmi cinquante-deux cartes.

Un jeu de cinquante-deux cartes est formé de quatre couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) contenant chacune treize valeurs classées dans l'ordre : 2, 3, ..., 10, valet, dame, roi, as.

Chaque main peut contenir certains sous-ensembles qui constituent des annonces.

Parmi ces annonces, qui sont classées de la plus forte à la plus faible suivant la règle du jeu, on trouve :

- la quinte flush : cinq cartes consécutives (par ordre de valeurs) d'une même couleur ;
- le carré : quatre cartes de la même valeur ;
- le full : trois cartes de la même valeur d'une part et deux cartes de la même valeur d'autre part ;
- la quinte : cinq cartes de valeurs consécutives de différentes couleurs ;
- le brelan : trois cartes de la même valeur qui ne forment pas avec les autres un carré ou un full.

1. Déterminez, pour chaque annonce, le nombre de mains qui permettent cette annonce.
2. En toute logique, une annonce devrait être d'autant plus forte qu'elle est plus rare.
Cette « règle » est-elle respectée ?

Photographie du film *Maverick* (1994) de Richard Donner.

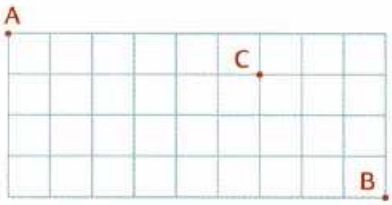
38 • **Q.C.M.**

Un Q.C.M. est composé de cinq items.

Pour chacun d'eux, trois réponses sont proposées, une seule est vraie.

1. De combien de façons peut-on répondre au Q.C.M. ?
2. De combien de façons peut-on répondre correctement aux cinq items ?
3. De combien de façons peut-on répondre correctement à quatre items exactement ?

39 • Sur le réseau quadrillé ci-contre de côtés 9 et 4, on peut se déplacer uniquement en se dirigeant vers la droite ou vers le bas.

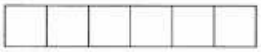


1. Combien de chemins joignent A à B.
2. Parmi ces chemins combien passent par C ?

40 • Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes, 2 boules vertes. On tire au hasard trois boules simultanément.
Déterminez le nombre de tirages comportant :
1. 3 boules de la même couleur ?
2. 1 boule de chaque couleur ?
3. 3 boules de deux couleurs différentes seulement ?

41 : Une urne A contient 2 boules blanches, 3 boules bleues et 5 boules rouges.
Une urne B contient 4 boules bleues.
On tire simultanément deux boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B puis on tire trois boules simultanément de l'urne B.
Quel est le nombre de tirages tricolores possibles ?

42 : On dispose de trois couleurs pour colorier le motif ci-dessous, composé de six cases.



Deux cases voisines ne doivent pas être de la même couleur. Déterminez :
1. le nombre de coloriages possibles ;
2. le nombre de coloriages utilisant exactement deux des trois couleurs disponibles ;
3. le nombre de coloriages utilisant au moins une fois chacune des trois couleurs disponibles.

43 : $2n$ joueurs sont engagés à un tournoi de tennis. Le premier tour de ce tournoi va mettre aux prises ces joueurs au cours de n rencontres.
Démontrez qu'il y a $\dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}$ façons d'organiser ce premier tour.

44 : Combien y a-t-il d'entiers naturels dont l'écriture décimale comporte exactement n chiffres ($n \geqslant 3$) dont deux chiffres 8 exactement ?

45 : Démontrez que la somme S de tous les nombres de trois chiffres obtenus en permutant les 3 chiffres a, b et c est $S = 222(a + b + c)$.

Formules

46 • n est un entier naturel ;

$$A_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n.$$

1. Vérifiez que A_3 et A_4 sont des entiers naturels.
2. Démontrez que pour tout n, A_n est un entier naturel.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 243.

47 • 1. **a)** Développez $f(x) = (1 + x)^n$.
b) Déduisez-en que pour tout réel x :

$$n(1 + x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

2. Calculez $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 31, page 249.

48 • Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. On en tire simultanément trois.
1. Combien y a-t-il de tirages faisant apparaître trois boules dont le plus grand numéro est 3 ? dont le plus grand numéro est 4 ?
2. Plus généralement, k est un entier tel que $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages faisant apparaître trois boules dont le plus grand numéro est k ?
3. **a)** Déduisez-en deux entiers n et p tels que :

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{n}{p}.$$

b) Comment retrouver cette formule avec le triangle de Pascal ?

49 : Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On extrait n boules simultanément.
1. Combien peut-on obtenir de résultats ?
2. p est un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. Démontrez que $\binom{n}{p}^2$ résultats contiennent exactement p boules blanches.
3. Déduisez-en la somme $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 31, page 249.

50 : Une association compte n membres. On constitue au sein de cette association un comité de p membres, puis au sein du comité, un bureau de q membres. Enfin, on forme au sein du bureau un secrétariat de r membres.
En effectuant les groupements de façons différentes, prouvez que :

$$\binom{n}{p} \times \binom{p}{q} \times \binom{q}{r} = \binom{n}{r} \times \binom{n-r}{q-r} \times \binom{n-q}{p-q}.$$

51 : n, p, k sont des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$.
Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 243.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes.
Dites lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

52 E est l'ensemble des figures d'un jeu de 32 cartes (4 rois, 4 dames, 4 valets). Dans l'ensemble E :

a on peut extraire 732 mains de 5 cartes ;

b il y a $\binom{12}{3}$ mains de 5 cartes contenant le roi et la dame de cœur ;

c il y a 7 fois plus de mains de 7 cartes contenant un carré que de mains de 5 cartes contenant un carré.

53 E est l'ensemble des nombres de 3 chiffres distincts formés à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Le nombre d'éléments de E est :

a 6 ! **b** 6^3. **c** 120. **d** 240.

2. L'ensemble E contient :

a 80 nombres inférieurs à 500. **b** 60 nombres pairs. **c** 50 multiples de 5.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

54 **1.** Lorsqu'on prend trois cartes dans un jeu de 32 cartes, il y a $4 \times \binom{31}{2}$ façons d'obtenir au moins un as.

2. Lorsque, pour une compétition sportive, on répartit 30 équipes en 6 poules de 5, il y a 6×5 répartitions possibles.

3. On dispose d'un clavier ayant 8 touches :
3 lettres I, J, K et 5 chiffres 1, 2, 3, 4, 5.
Un code est composé d'une lettre suivie de 3 chiffres qui ne sont pas nécessairement distincts.
Avec ce clavier, on peut créer exactement :

a) 5^3 codes commençant par I.

b) $\binom{5}{3}$ codes commençant par I et dont tous les chiffres sont distincts.

c) 72 codes contenant les chiffres 1 et 2.

d) 15 codes se terminant par 12.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

55 **D'après un document ministériel**

1. Démonstration de cours

a) Démontrez que pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

b) Déduisez-en que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k \leqslant n-2$,

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$

2. Application

Une urne contient n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches. On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne (avec $2 \leqslant k < n-1$).

a) Déterminez, en fonction de n et de k, le nombre de tirages ne contenant que des boules blanches.

b) Déduisez-en le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge.

c) Déterminez d'une autre manière, le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge et, à l'aide de la formule de la question **1. b)** justifiez que l'on retrouve le même résultat.

10 Probabilités

1713

Les épreuves aléatoires indépendantes ayant une probabilité p de succès ont été étudiées pour la première fois par le mathématicien suisse Jacques Bernoulli. Dans son livre *Ars Conjectandi* (l'Art de la conjoncture), publié en 1713 par son neveu Nicolas huit ans après sa mort, Bernoulli montre le résultat suivant :

la fréquence moyenne d'apparition d'un résultat dans une répétition d'épreuves tend vers la probabilité d'observer cette apparition dans une seule épreuve.

Par exemple, si on lance un dé parfait, la probabilité de sortie du 2 est $\frac{1}{6}$. Si on répète cette expérience un très grand nombre n de fois, il est presque sûr que le nombre m de fois où la sortie du 2 a été réalisée est tel que $\frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

Cet énoncé est appelé la loi des grands nombres.

Jacques Bernoulli fait partie de la première génération de la famille de mathématiciens la plus célèbre. Entre huit et douze Bernoulli, répartis sur trois générations, apportèrent des contributions importantes aux probabilités, aux statistiques, aux mathématiques.

Jacques Bernoulli
1654 – 1705

À LA MÊME ÉPOQUE

FRANCE

L'avènement au trône d'Espagne de Philippe V, petit-fils de Louis XIV, provoque la guerre de Succession d'Espagne qui l'oppose avec la France à une coalition européenne jusqu'en 1714.

LITTÉRATURE

Racine meurt en 1699. Privilégiant l'étude psychologique des personnages, Racine a participé, avec Corneille, à restituer à la scène tragique la dimension que lui avaient conférée les Grecs.

PEINTURE

Dans ses scènes galantes, Antoine Watteau exprime le caractère éphémère des choses, les subtilités du sentiment amoureux. Il révèle ainsi une sensibilité d'un caractère nouveau, intime et mélancolique.

1 Rappels

1.1 Probabilités d'événements

■ Définitions

● L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. En général, on le note Ω, et les issues sont notées $e_1, e_2, \dots, e_n$; $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$.

● Un **événement** est une partie, ou sous-ensemble, de Ω. Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue, par exemple $\{e_1\}$.

● L'événement $A \cap B$ est l'événement « **A et B** ».

● L'événement $A \cup B$ est l'événement « **A ou B** ».

● L'événement $\overline{A}$ est l'événement « **non A** » ou « **contraire de A** ».

● Deux événements **incompatibles** sont deux événements tels que $A \cap B = \varnothing$. (Ils ne peuvent pas se réaliser en même temps).

■ Probabilités et leurs propriétés

● Chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ est affecté d'une probabilité qui est un nombre, noté $p(e_i)$, tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$.
En outre, $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$.

Note
On dit aussi que la loi p est **équirépartie.**

● Lorsque pour tout i, tout j, $p(e_i) = p(e_j)$, on dit que les issues sont **équiprobables**, et dans ce cas, pour tout i, $p(e_i) = \dfrac{1}{n}$.

Note
$p(\Omega) = 1$.
$p(\varnothing) = 0$.

● La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$ est la somme des probabilités de tous les événements élémentaires inclus dans A. **Dans le cas d'équiprobabilité :**

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Note
L'équiprobabilité permet de ramener les calculs de probabilité à des problèmes de dénombrement.

● Quels que soient les événements A et B :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) ; \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Dans le cas où A et B sont **incompatibles** ($A \cap B = \varnothing$), on obtient :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

1.2 Variable aléatoire définie sur Ω

■ Définitions

● Une variable aléatoire est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

● Définir la **loi de probabilité de X,** c'est trouver l'ensemble I, $I = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_k\}$, des valeurs prises par X puis associer à chaque élément x_i de I la probabilité de l'événement « X prend la valeur x_i », probabilité notée $p(X = x_i)$.

■ Paramètres

Les paramètres d'une variable aléatoire X sont :

Note
Aussi :
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

● **l'espérance :** $E(X) = x_1 p(X = x_1) + \cdots + x_k p(X = x_k)$;

● **la variance :** $V(X) = [x_1 - E(X)]^2 p(X = x_1) + \cdots + [x_k - E(X)]^2 p(X = x_k)$;

● **l'écart type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

COMPRENDRE

Avec des pourcentages

Si le nombre n_1 d'issues d'un événement A est égal à t% du nombre total n des issues de Ω, et s'il y a équiprobabilité, alors $p(A) = \frac{t}{100}$.

En effet, $n_1 = \frac{t}{100} \times n$, donc $p(A) = \frac{n_1}{n} = \frac{t}{100}$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 1

Modèles d'équiprobabilité

L'équiprobabilité ne se devine pas, elle est admise sous une hypothèse et un univers Ω bien précis.

Exemples.

- Lancer d'un dé **parfait** : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- Lancer de **deux** pièces **équilibrées**. Les pièces sont supposées discernables et numérotées. On note pour chacune la face apparue, $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$.
- Lancer de trois dés **parfaits**. Les dés sont supposés discernables et numérotés. Ω est l'ensemble des 216 triplets formé des numéros respectifs de chaque dé.
- Tirage **simultané**, **au hasard**, de p jetons dans une urne contenant n jetons identiques. Ω est l'ensemble des combinaisons de p jetons parmi n.

➜ EXERCICE RÉSOLU 2

E(X) et jeux

X est une variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.
Si le jeu est répété un très grand nombre de fois, le gain moyen du joueur se rapproche de E(X).
Si $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable** au joueur. Si $E(X) > 0$, il est **favorable**. Il est **équitable** si $E(X) = 0$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 2

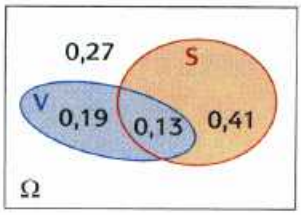
SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Utiliser les représentations d'ensembles

ÉNONCÉ Parmi les élèves d'un lycée, 54 % ont pratiqué le ski, 32 % ont pratiqué la voile et 13 % ont pratiqué ces deux sports.
On interroge un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais pratiqué le ski et jamais pratiqué la voile ?

SOLUTION COMMENTÉE

L'univers est l'ensemble des élèves et avec ce choix d'univers, l'expression « au hasard » signifie, selon l'usage, que les issues sont supposées équiprobables.
Notons S l'événement « l'élève a pratiqué le ski » et V l'événement « l'élève a pratiqué la voile ». Par hypothèse et puisqu'il y a équiprobabilité :
$p(S) = 0{,}54$; $p(V) = 0{,}32$; $p(S \cap V) = 0{,}13$.
Notons R l'événement « l'élève n'a jamais pratiqué le ski et jamais pratiqué la voile ».
Le schéma montre clairement que les issues de R sont toutes les issues en dehors de $S \cup V$ car un élève dans $S \cup V$ a pratiqué au moins l'un des sports. Donc R est l'événement « non $S \cup V$ », $R = \overline{S \cup V}$.

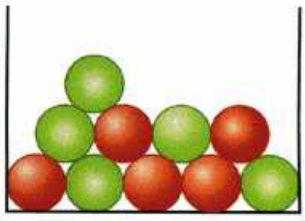


Or, $p(S \cup V) = p(S) + p(V) - p(S \cap V) = 0{,}54 + 0{,}32 - 0{,}13 = 0{,}73$.
Donc $p(\overline{S \cup V}) = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$ et $p(R) = 0{,}27$.

➜ EXERCICE 1

EXERCICE RÉSOLU 2 Définir une loi d'une variable aléatoire

ÉNONCÉ Un joueur extrait, au hasard et simultanément, trois boules de l'urne ci-contre.
S'il tire trois boules rouges, il gagne 100 €, deux rouges et une verte, 40 €, sinon il perd 70 €.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur. Quelle est la loi de X ?



SOLUTION COMMENTÉE

L'univers est l'ensemble des combinaisons de trois boules parmi dix, le nombre des issues est donc $\binom{10}{3} = 120$. L'équiprobabilité est admise.

- X prend les valeurs 100, 40, −70.
- « $X = 40$ » est l'événement « tirage de deux boules rouges et une verte » il contient donc $\binom{5}{2} \times \binom{5}{1}$ issues soit 50 issues. Donc $p(X = 40) = \frac{5}{12}$.

« $X = 100$ » contient $\binom{5}{3}$ issues soit 10 issues, donc $p(X = 100) = \frac{1}{12}$, et puisque la somme des probabilités est 1, $p(X = -70) = \frac{1}{2}$.

Le tableau résumant la loi de X est :

x_k	−70	40	100
$p(X = x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

➜ EXERCICES 8 à 10

2 Probabilités conditionnelles

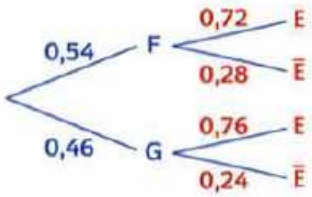
2.1 Exemple : arbre pondéré. Définition

Note
L'univers Ω est l'ensemble des élèves du lycée et l'équiprobabilité est admise.

Dans un lycée, 54 % des élèves sont des filles (F). Parmi les filles, 72 % sont externes (E) ; parmi les garçons (G), ce pourcentage est de 76 %. On interroge, au hasard, un élève et on s'intéresse aux deux critères : sexe et externe ou non.
La situation peut être illustrée par le graphique ci-dessous appelé **arbre pondéré**.

■ Dessin des branches

- Au départ, il y a deux possibilités, F ou G, représentées par deux branches.
- Au nœud F, il y a deux cas, E ou $\overline{E}$, selon que la fille est externe ou non. De même, à partir du nœud G.



■ Inscriptions sur les branches

- Sur la branche — F, on inscrit $p(F)$. Ici $p(F) = 0{,}54$. (Voir *Comprendre* p. 255)
- Sur la branche F — E, on inscrit la probabilité qu'a la fille choisie d'être externe, cette probabilité est 0,72.

On la note $p_F(E)$, ce qui se lit : « probabilité de E sachant F ».
Or parmi les filles, 28 % sont internes donc $p_F(\overline{E}) = 0{,}28$. $p_F(E) + p_F(\overline{E}) = 1$.

- On complète de même l'arbre à partir de G.

Note
$p_F(E)$ est appelée **probabilité conditionnelle** c'est la probabilité de réaliser E lorsqu'on sait avec certitude que F est réalisé.

■ Événement représenté par un chemin

Le chemin $\overset{0,54}{\text{—}}$ F $\overset{0,72}{\text{—}}$ E représente l'événement :
« l'élève est une fille **et** elle est externe ». Cet événement est $F \cap E$.
Calculons sa probabilité. Notons N l'effectif du lycée, alors le nombre des filles est $0{,}54\,N$ et le nombre de filles externes est donc $0{,}54 \times 0{,}72 \times N$. Puisqu'il y a équiprobabilité, $p(F \cap E) = \dfrac{0{,}54 \times 0{,}72 \times N}{N} = p(F) \times p_F(E)$.
D'où $p(F \cap E)$ est le produit des probabilités inscrites sur — F — E et $p_F(E) = \dfrac{p(F \cap E)}{p(F)}$. De manière générale, on pose la définition suivante.

DÉFINITION 1

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité que B **se réalise sachant que A est réalisé**, est le nombre noté $p_A(B)$ défini par $\boldsymbol{p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}}$.

2.2 Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

Note
Conformément au **programme**, l'utilisation des règles 1, 2 et 3 (p. 258) ne nécessitera pas de justifications supplémentaires.

Un chemin va du départ à une extrémité de l'arbre. Il représente **l'intersection** de tous les événements rencontrés sur ce chemin.

Règle 1 **Loi des nœuds. La somme des probabilités** inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 2 La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale **au produit des probabilités** inscrites sur les branches de ce chemin.

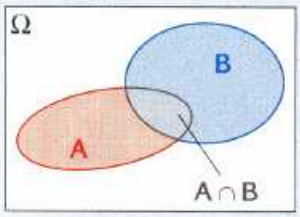
COMPRENDRE

Arbre pondéré

Chaque nœud de l'arbre correspond à un état de l'expérience.
Pour chacun, on connaît la probabilité d'accéder à chacun des états possibles qui suivent.
Sur un chemin — A — B — C par exemple, on inscrit successivement $p(A)$, $p_A(B)$, $p_{A\cap B}(C)$.
Ce chemin représente l'événement $A \cap B \cap C$.

➔ EXERCICE RÉSOLU 3

Interprétation de $p_A(B)$



Lorsque A est réalisé, les seules issues qui réaliseront B sont celles de « A et B ». Mais puisque A est réalisé, A devient l'univers pour $A \cap B$.
Ainsi $p_A(B)$ est obtenue par comparaison de la probabilité **non** conditionnelle de $A \cap B$ avec la probabilité **non** conditionnelle de A :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Utilité de $p_A(B)$

Souvent la probabilité $p(A \cap B)$ est difficile à trouver.
La connaissance de $p_A(B)$ ou de $p_B(A)$ permet alors de la calculer :
$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$.

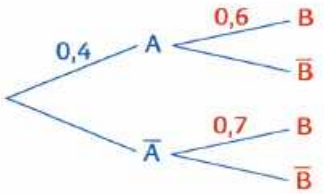
➔ EXERCICE RÉSOLU 4

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Lire et utiliser un arbre

ÉNONCÉ

On donne l'arbre pondéré suivant.



1) Indiquez les probabilités manquantes.
2) Calculez $p(A \cap B)$, $p(A \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cap B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) L'arbre indique $p(A) = 0{,}4$ et $p_A(B) = 0{,}6$, $p_{\overline{A}}(B) = 0{,}7$.
Sur la branche — $\overline{A}$, il faut inscrire $p(\overline{A})$, sur A — $\overline{B}$, il faut inscrire $p_A(\overline{B})$, et sur $\overline{A}$ — $\overline{B}$, il faut inscrire $p_{\overline{A}}(\overline{B})$.
Pour cela, utilisons la loi des nœuds. D'où $p(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ (qui ici traduit l'égalité $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$).
Et $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$ d'où $p_A(\overline{B}) = 0{,}4$ et de même, $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
2) D'après la règle 2, $p(A \cap B)$ s'obtient comme le produit des nombres inscrits sur le chemin — A — B.
D'où $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0{,}24$.
De même, $p(A \cap \overline{B}) = 0{,}16$, $p(\overline{A} \cap B) = 0{,}42$, $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}18$.

➔ EXERCICES 11 à 15

EXERCICE RÉSOLU 4 Calculer la probabilité d'une intersection

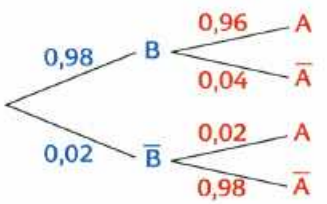
ÉNONCÉ

Dans un atelier, 2 % des pièces fabriquées étant défectueuses, on décide de procéder au contrôle suivant :
– si la pièce est bonne, la probabilité d'être acceptée est 0,96 ;
– si elle est défectueuse, la probabilité d'être refusée est 0,98.
On choisit une pièce et on admet que ces choix sont équiprobables. On note E l'événement « la pièce est bonne et refusée ». Quelle est la probabilité de E ?

SOLUTION COMMENTÉE

Notons B l'événement « la pièce est bonne » et A l'événement « la pièce est acceptée », donc $\overline{B}$ est l'événement « la pièce est défectueuse » et $\overline{A}$ « la pièce est refusée ».

● L'événement E est l'événement $B \cap \overline{A}$. Illustrons l'expérience par un arbre pondéré.
Au départ, 2 branches :
la pièce est bonne (B) ou ne l'est pas ($\overline{B}$).
Au nœud B, deux branches : la pièce que l'on sait bonne est acceptée (A) ou ne l'est pas ($\overline{A}$).
De même, au nœud $\overline{B}$.



● **Inscription des probabilités :** L'événement $B \cap \overline{A}$ est représenté par le chemin — B — $\overline{A}$. Il suffit d'inscrire les probabilités sur ces branches. Or 2 % des pièces sont défectueuses d'où $p(\overline{B}) = 0{,}02$ donc $p(B) = 0{,}98$. De plus, la pièce bonne est acceptée avec la probabilité 0,96 donc $p_B(A) = 0{,}96$ et, d'après la loi des nœuds $p_B(\overline{A}) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$. Il en résulte que $p(B \cap \overline{A}) = p(B) \times p_B(\overline{A}) = 0{,}98 \times 0{,}04 = 0{,}039\,2$.

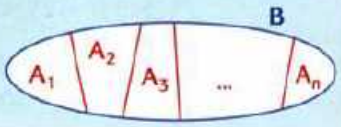
➔ EXERCICE 19

3 Probabilités totales

3.1 Réunion d'événements incompatibles

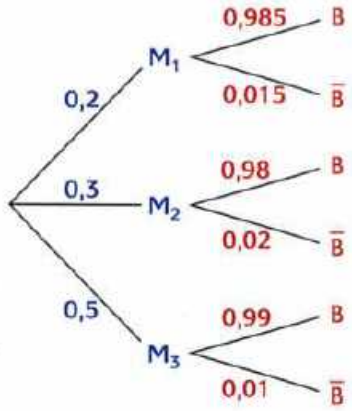
Note
Nous savons que si $E \cap F = \varnothing$ alors $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$. L'énoncé généralise cette formule au cas d'une réunion de n événements deux à deux incompatibles.

Si un événement B est **la réunion des événements** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, **incompatibles deux à deux**, alors
$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n).$$



3.2 Formule des probabilités totales

EXEMPLE Trois machines M_1, M_2, M_3 réalisent 20 %, 30 % et 50 % de la production d'une entreprise. On estime que respectivement 1,5 %, 2 % et 1 % des pièces produites par ces machines sont défectueuses.
Une pièce est choisie au hasard dans la production.
L'objectif est de **calculer la probabilité de l'événement B : « la pièce est bonne »**.
Pour tout i de 1 à 3, on note M_i l'événement « la pièce est produite par M_i ».
Illustrons la situation par un arbre pondéré.



• On peut distinguer deux phases : la production d'une pièce, d'où les branches initiales menant à M_1, M_2, M_3. Puis, à partir de chaque nœud M_i, savoir si la pièce est bonne (B) ou ne l'est pas ($\overline{B}$).
Plaçons-nous au nœud M_1. La probabilité à écrire sur M_1 — B est $p_{M_1}(B)$.
On connaît $p_{M_1}(\overline{B}) = 0{,}015$ donc, d'après la loi des nœuds, $p_{M_1}(B) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.
Pour les autres branches, on fait de même.

Note
Deux événements représentés par deux chemins différents sont toujours incompatibles.

• Trois chemins contribuent à la réalisation de l'événement B : — M_1 — B ; — M_2 — B ; — M_3 — B qui représentent $M_1 \cap B$, $M_2 \cap B$, $M_3 \cap B$.
Ainsi B est la réunion de $M_1 \cap B$, $M_2 \cap B$ et $M_3 \cap B$, événements deux à deux incompatibles, d'où d'après § **3.1**, $p(B) = p(M_1 \cap B) + p(M_2 \cap B) + p(M_3 \cap B)$.
De plus d'après la règle 2, $p(M_i \cap B) = p(M_i) \times p_{M_i}(B)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, donc
$p(B) = 0{,}2 \times 0{,}985 + 0{,}3 \times 0{,}98 + 0{,}5 \times 0{,}99 = 0{,}986$.

■ Cas général : formule dite des probabilités totales

Note
On dit alors que $\{A_1; A_2; \ldots; A_n\}$ est une partition de Ω.

Si l'univers Ω d'une expérience aléatoire est la réunion d'événements, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, deux à deux incompatibles, alors pour tout événement B,
$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n)$$
avec, pour tout entier i de 1 à n, $p(B \cap A_i) = p(A_i) \times p_{A_i}(B)$.

■ Conséquence : utilisation d'arbres pondérés

Cette formule se traduit, sur un arbre pondéré, par la règle suivante :

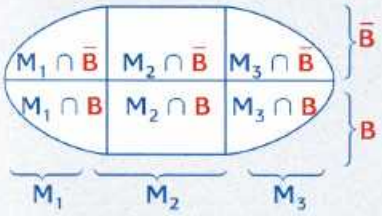
Règle 3 ➡ La probabilité d'un événement E est **la somme des probabilités** des chemins qui aboutissent à E.

COMPRENDRE

Illustration des probabilités totales

Dans l'exemple du cours, l'événement B peut se représenter ainsi :

$(B \cup \overline{B} = \Omega)$



Les événements $M_1 \cap B$, $M_2 \cap B$, $M_3 \cap B$ sont deux à deux incompatibles (une pièce fabriquée par une machine ne peut être fabriquée par une autre) et leur réunion est B.

(On dit que ces événements forment une **partition** de B).

Ainsi, $p(B) = p(M_1 \cap B) + p(M_2 \cap B) + p(M_3 \cap B)$.

Choisir les bons chemins

Il n'est pas toujours nécessaire de construire un arbre.

Souvent, on peut connaître *a priori* tous les chemins qui mènent à l'événement dont on cherche la probabilité.

Ainsi dans l'exemple du cours, l'événement B est la réunion des seuls événements représentés par les chemins — M_1 — B, — M_2 — B, — M_3 — B.

D'où la possibilité de calculer directement $p(B)$ d'après la règle 3.

→ EXERCICE RÉSOLU 6

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Utiliser les règles des arbres pondérés

ÉNONCÉ Dans une population, la probabilité de naissance d'un garçon est estimée à 0,52. On sait que 2 % des filles et 1 % des garçons présentent à la naissance une luxation congénitale de la hanche. On choisit au hasard un nouveau-né.

1) Quelle est la probabilité qu'il souffre de cette luxation ?

2) Quelle est la probabilité qu'un bébé atteint soit une fille ?

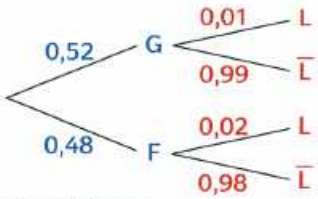
SOLUTION COMMENTÉE

Considérons les événements, G « naissance d'un garçon », F « naissance d'une fille », L « le nouveau-né a une luxation de la hanche » et $\overline{L}$.

Par hypothèse, les choix étant équiprobables :

$p(G) = 0{,}52$, $p(F) = 0{,}48$.

Et « 2 % des filles présentent à la naissance une luxation » signifie que la probabilité que le nouveau-né ait une luxation sachant que c'est une fille est 0,02, donc $p_F(L) = 0{,}02$.



De même, $p_G(L) = 0{,}01$. L'arbre dessiné résume l'expérience.

1) Il s'agit de calculer $p(L)$.

L est la réunion des événements représentés par les chemins — G — L et — F — L.

D'après la règle 3, $p(L) = (0{,}52 \times 0{,}01) + (0{,}48 \times 0{,}02) = 0{,}0148$.

Remarque. Si on ne cite pas la règle 3, on écrit :

$p(L) = p(G \cap L) + p(F \cap L) = p(G) \times p_G(L) + p(F) \times p_F(L)$.

2) La question se traduit ainsi : sachant que L est réalisé, quelle est la probabilité de F ? Il s'agit donc de calculer $p_L(F)$.

Par définition, $p_L(F) = \dfrac{p(L \cap F)}{p(L)}$.

Or $p(L \cap F) = 0{,}48 \times 0{,}02$ et $p(L) = 0{,}0148$, donc $p_L(F) = \dfrac{0{,}0096}{0{,}0148} = \dfrac{24}{37}$.

→ EXERCICES 22 à 24

EXERCICE RÉSOLU 6 Utiliser les règles des arbres pondérés

ÉNONCÉ Une urne contient trois boules blanches et cinq noires.

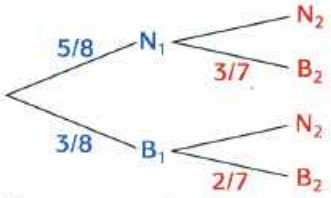
On effectue deux tirages successifs sans remise, au hasard.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage ?

SOLUTION COMMENTÉE

Les branches initiales de l'arbre correspondent aux résultats du premier tirage : obtention d'un boule noire (N_1) ou d'une blanche (B_1).

De chacun de ces nœuds partent deux branches donnant les résultats du 2e tirage. Il est clair que l'événement « obtenir une blanche au 2e tirage » est la réunion des événements représentés par les chemins — N_1 — B_2 et — B_1 — B_2.



Or $p(N_1) = \dfrac{5}{8}$ et $p_{N_1}(B_2) = \dfrac{3}{7}$ (si N_1 est réalisé, il reste 7 boules dont 3 blanches). De même, $p(B_1) = \dfrac{3}{8}$ et $p_{B_1}(B_2) = \dfrac{2}{7}$.

Donc d'après les règles 2 et 3, $p(B_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{8}$.

→ EXERCICE 20

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Les deux événements A et B considérés sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire et tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
Dans certains cas, le fait de savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité d'obtenir B, ce qui se traduit par $p_A(B) = p(B)$ **[1]**. On dit alors que B est **indépendant** de A.
Or $p_A(B) \times p(A) = p(A \cap B)$, donc d'après **[1]**, $p(B) \times p(A) = p(A \cap B)$.
Comme cette égalité ne change pas en remplaçant A par B et B par A, il en résulte que si B est indépendant de A, alors A est indépendant de B. On pose alors la définition suivante :

DÉFINITION 2

Dire que deux événements A et B tels que $p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0$ sont **indépendants** signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

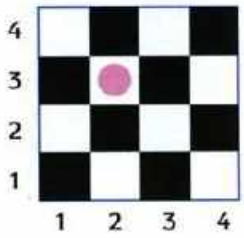
4.2 Indépendance de deux variables aléatoires

DÉFINITION 3

X et Y sont deux variables aléatoires sur un univers Ω prenant respectivement les valeurs x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et y_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$.
Dire que X et Y sont **indépendantes** signifie que, pour tout i et tout j, les événements « $X = x_i$ » et « $Y = y_j$ » sont **indépendants**.

Note
De façon intuitive, la loi de X n'influence pas celle de Y.

EXEMPLE On considère un damier de type 4×4 dont les cases sont repérées par les couples $(x\,;y)$ où x est le numéro de la ligne et y celui de la colonne.
On place, au hasard, un jeton sur une case.
L'univers Ω est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ avec $1 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant 4$, chacun d'eux étant équiprobable.



X est la variable aléatoire définie par $\begin{cases} X = 0 \text{ si } x+y \text{ est pair} \\ X = 1 \text{ si } x+y \text{ est impair} \end{cases}$

Y est la variable aléatoire donnant le numéro y de la colonne.
Définir la loi du couple (X ; Y), c'est donner la probabilité de chaque événement du type : « $X = x_i$ » $\cap$ « $Y = y_j$ », $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $1 \leqslant j \leqslant 4$.

Un tableau résume les résultats.

X \ Y	1	2	3	4	loi de X
0	1/8	1/8	1/8	1/8	1/2
1	1/8	1/8	1/8	1/8	1/2
loi de Y	1/4	1/4	1/4	1/4	1

Note
On complète les marges en sommant les résultats des lignes pour obtenir la loi de X et ceux des colonnes pour obtenir la loi de Y. Les lois de X et Y sont dites **marginales.**

• « X = 0 » $\cap$ « Y = 1 » signifie que le jeton est sur une case $(x\,;y)$, avec $y = 1$ et $x+y$ pair.
Les cases favorables sont (1 ; 1) et (3 ; 1) d'où la probabilité $p[\text{« X = 0 »} \cap \text{« Y = 1 »}] = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.
On obtient de même les autres probabilités (en rouge).

• On constate que, dans tous les cas,
$p[\text{« X = } x \text{ »} \cap \text{« Y = } y \text{ »}] = p[X = x] \times p[Y = y]$;
donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

COMPRENDRE

Incompatibles donc dépendants

Deux événements A et B incompatibles et tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ sont nécessairement dépendants car alors $p(A \cap B) = 0$
et $p(A) \times p(B) \neq 0$
donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ est impossible.

Intérêt de l'indépendance de X et de Y

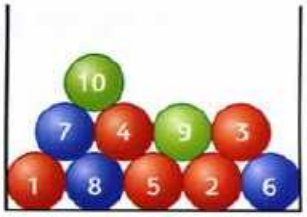
Lorsque les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes**, la connaissance des lois de X et Y permet d'obtenir la loi du couple (X ; Y). Ceci n'est plus vrai dans le cas où les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

→ EXERCICE RÉSOLU 8

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Démontrer l'indépendance de deux événements

ÉNONCÉ La composition d'une urne est indiquée par le schéma ci-dessous.
On tire simultanément deux boules au hasard.
On considère les événements :
A « les deux boules ont la même couleur »,
B « les deux boules ont des numéros impairs ».
A et B sont-ils indépendants ?



SOLUTION COMMENTÉE

L'univers est l'ensemble des combinaisons de deux boules parmi dix donc le nombre de tirages possibles est $\binom{10}{2} = 45$.
Il s'agit de comparer $p(A \cap B)$ avec $p(A) \times p(B)$.

- A est réalisé avec tout tirage de deux boules qui sont soit rouges, soit bleues, soit vertes, donc l'équiprobabilité étant admise le nombre d'issues favorables est :

$$\binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 14. \text{ D'où } p(A) = \frac{14}{45}.$$

- B est réalisé avec tout tirage de deux boules dont les numéros sont parmi les cinq impairs, donc le nombre d'issues favorables est $\binom{5}{2} = 10$. D'où $p(B) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$, puis $p(A) \times p(B) = \frac{28}{405}$.

- Une issue réalise $A \cap B$ lorsque les deux boules ont même couleur et des numéros impairs, ce qui nécessite qu'elles soient prises parmi les trois rouges à numéros impairs. Le nombre d'issues favorables est $\binom{3}{2} = 3$.

D'où $p(A \cap B) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.
Ainsi $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

→ EXERCICES 28 et 29

EXERCICE RÉSOLU 8 Trouver la loi du couple (X ; Y)

ÉNONCÉ X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur un univers Ω, dont les lois sont données ci-dessous.

x_i	x_1	x_2	x_3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4
$p(Y = y_j)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

Donnez la loi du couple (X ; Y).

SOLUTION COMMENTÉE

Il s'agit de trouver les probabilités notées p_{ij} des événements « $X = x_i$ » $\cap$ « $Y = y_j$ ».
Or X et Y sont indépendantes donc $p_{ij} = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.
D'où le tableau de la loi du couple (X ; Y).

X \ Y	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	

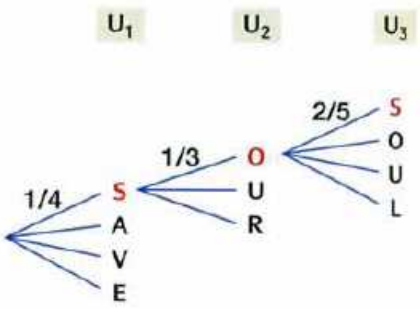
→ EXERCICE 30

5 Expériences indépendantes

Parfois, une expérience consiste à effectuer une suite d'expériences partielles. Dans bien des cas, on peut considérer, *a priori*, que l'issue d'une expérience partielle ne dépend pas des issues de toutes les expériences qui l'ont précédée.
On dit alors que ces expériences partielles sont **indépendantes**.

5.1 Exemple

Trois urnes U_1, U_2, U_3 contiennent respectivement les lettres des mots SAVE, OUR et SOULS. On tire au hasard une lettre d'abord dans U_1, puis dans U_2, enfin dans U_3. On désire calculer la probabilité de l'événement « obtenir SOS. »
L'expérience $\mathscr{E}$ est la succession de trois expériences partielles $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, chacune d'elles étant le tirage au hasard d'une lettre dans l'urne de même indice. Une issue de $\mathscr{E}$ est donc une liste $(e_1 ; e_2 ; e_3)$, où e_1 désigne une lettre de U_1, e_2 une lettre de U_2, e_3 une de U_3. On fait l'**hypothèse** que ces trois **expériences** sont **indépendantes**. On peut représenter $\mathscr{E}$ par un arbre. Le schéma donne le début de l'arbre.



- D'abord, le tirage dans U_1 donne les issues possibles S, A, V, E, toutes de probabilité $\frac{1}{4}$.
- À partir du nœud S, suite au tirage dans U_2, trois issues sont possibles O, U, R.
Sur la branche S — O, on doit inscrire la probabilité de « tirer O de U_2 sachant que S est réalisé ». En raison de l'hypothèse d'indépendance, cette probabilité est celle de « tirer O de U_2 » que S soit réalisé ou non, donc $\frac{1}{3}$.

Note
L'univers choisi pour $\mathscr{E}_3$ est {S ; O ; U ; L}.
Les issues ne sont pas équiprobables.
$p_3(S) = \frac{2}{5}$;
$p_3(O) = p_3(U) = p_3(L) = \frac{1}{5}$.

- À partir du nœud O, suite au tirage dans U_3, quatre possibilités : tirage de S, ou de O, ou de U, ou de L. Mais S étant deux fois dans U_3, la probabilité d'obtenir S dans U_3 est $\frac{2}{5}$. Sous l'hypothèse d'indépendance des expériences partielles, la branche O— S reçoit la probabilité $\frac{2}{5}$.

Ce raisonnement vaut pour toutes les autres branches de l'arbre.
L'événement « SOS » est représenté par le seul chemin $\xrightarrow{1/4}$ S $\xrightarrow{1/3}$ O $\xrightarrow{2/5}$ S.
Ainsi d'après la règle 2, $p(\text{SOS}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$.

5.2 Cas général

$\mathscr{E}$ est l'expérience consistant à réaliser successivement n expériences partielles $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ..., $\mathscr{E}_n$. Une issue de $\mathscr{E}$ est une liste ordonnée $(e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n)$ de résultats des $\mathscr{E}_i$.
Notons p_1, p_2, ..., p_n les lois de probabilités sur les univers respectifs des $\mathscr{E}_i$.

On admettra que $p(e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n) = p_1(e_1) \times p_2(e_2) \times \ldots \times p_n(e_n)$.

Note
Ceci sera développé au chapitre 11 (voir page 288).

Lorsque toutes ces expériences partielles $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ..., $\mathscr{E}_n$ sont identiques, c'est-à-dire définies sur le même univers et affectées de la même loi de probabilité, alors elles sont appelées **épreuves**.

COMPRENDRE

Modèles de référence

L'indépendance des expériences partielles est une hypothèse du modèle, elle devrait donc être annoncée.
Mais l'usage veut que cette hypothèse soit implicite dans certaines situations de référence telles que :

- tirages avec remise,
- tirages sans conditionnement dans des urnes différentes,
- lancers successifs d'une même pièce, ou d'un même dé,

→ EXERCICE RÉSOLU 10

- lancers successifs de plusieurs pièces,

→ EXERCICE RÉSOLU 9

- lancer simultané de n dés ou pièces, assimilé à n lancers successifs du dé ou de la pièce.

Intérêt d'un arbre

Lors d'une expérience définie comme une succession d'expériences partielles, puisque
$p(e_1 ; \dots ; e_n) = p_1(e_1) \times \dots \times p_n(e_n)$,
la probabilité d'une liste se calcule en faisant le produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin associé.
Il en découle une utilisation des arbres selon les règles 1, 2 et 3.

→ EXERCICES RÉSOLUS 5 et 6

SAVOIR FAIRE

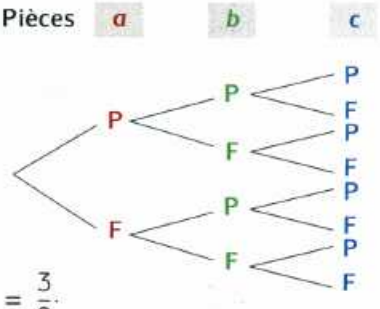
EXERCICE RÉSOLU 9 Calculer une probabilité lors du lancer de trois pièces

ÉNONCÉ On dispose de trois pièces notées a, b, c. La pièce a est équilibrée alors que b et c sont truquées.
Pour la pièce b, « Pile » a deux fois moins de chance de sortir que « Face » alors que pour la pièce c, « Pile » en a trois fois plus.
On lance successivement a, b, c (les lancers sont indépendants).
Quelle est la probabilité de l'événement A « obtenir exactement une fois Pile » ?

SOLUTION COMMENTÉE
L'expérience est la succession de trois lancers indépendants.
Il faut d'abord préciser, pour chacun d'eux, l'univers et la probabilité de chaque issue. Pour chacun, l'univers sera $\{P ; F\}$.

- **Lancer de a** : il y a équiprobabilité donc $p_1(F) = p_1(P) = \frac{1}{2}$.
- **Lancer de b** : pour cette pièce truquée, $p_2(P) = \frac{1}{3}$ et $p_2(F) = \frac{2}{3}$.
- **Lancer de c** : de même, on obtient $p_3(P) = \frac{3}{4}$ et $p_3(F) = \frac{1}{4}$.

L'arbre associé à l'expérience est dessiné ci-contre.



Ainsi A est la réunion des événements représentés par les trois chemins :
$\xrightarrow{1/2} P \xrightarrow{2/3} F \xrightarrow{1/4} F$, $\xrightarrow{1/2} F \xrightarrow{1/3} P \xrightarrow{1/4} F$,
$\xrightarrow{1/2} F \xrightarrow{2/3} F \xrightarrow{3/4} P$.
D'où d'après les règles 2 et 3,
$p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

→ EXERCICE 34

EXERCICE RÉSOLU 10 Calculer une probabilité lors de n lancers successifs

ÉNONCÉ On lance n fois de suite une pièce équilibrée.
Calculez en fonction de n, la probabilité, notée p_n, de l'événement A « obtenir au moins un Pile ».

SOLUTION COMMENTÉE
L'expérience est la répétition de n fois la même épreuve qui est le lancer d'une pièce. Une issue est une liste de n lettres P ou F.
Les dénombrer peut prendre du temps. Il est plus avantageux alors de calculer $p(\bar{A})$, $\bar{A}$ étant l'événement « aucun Pile n'est apparu » c'est-à-dire « obtenir Face à chaque lancer ».
Les lancers sont indépendants donc $\bar{A}$ est représenté par le chemin :
$\xrightarrow{0,5} F_1 \xrightarrow{0,5} F_2 \dots \xrightarrow{0,5} F_n$ avec F_i, l'événement « obtenir Face au i^e lancer ».
Ainsi $p(\bar{A}) = (0,5)^n$ d'où $p_n = p(A) = 1 - (0,5)^n$.

Remarque. Lorsque la définition d'un événement contient la locution « au moins », il est souvent avantageux de considérer l'événement contraire.

→ EXERCICES 40 et 41, 43

COIN MÉMO

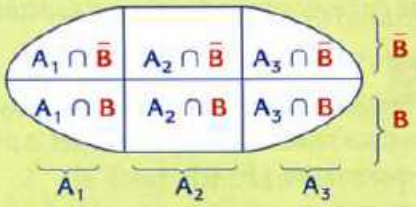
DES idées À RETENIR

Le conditionnement

• Si l'événement A est tel que $p(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de « B sachant A », notée $p_A(B)$, est telle que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

• La formule des probabilités totales se retrouve à partir d'un schéma comme celui ci-dessous. $B \cup \overline{B} = \Omega$.



Si $\{A_1 ; A_2 ; A_3\}$ est une partition de l'univers, $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B)$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 5

Expérience définie comme une succession d'expériences partielles indépendantes

Alors la probabilité d'une liste est :

$$p(e_1 ; \ldots ; e_n) = p_1(e_1) \times \cdots \times p_n(e_n).$$

➜ EXERCICE RÉSOLU 10

L'indépendance

• L'indépendance de deux événements A et B d'un même univers se traduit par :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) ;$$

ou bien :

$$p_A(B) = p(B) \text{ ou } p_B(A) = p(A).$$

➜ EXERCICE RÉSOLU 7

• L'indépendance de deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même univers, est assurée dans le seul cas où tous les événements du type « $X = x_i$ » et « $Y = y_j$ » **sont indépendants.**

➜ EXERCICE RÉSOLU 8

Utilisation d'arbres pondérés

Elle est recommandée pour traduire le conditionnement ou bien une succession d'expériences indépendantes.
Le produit des probabilités sur un chemin donne la probabilité de l'événement représenté par ce chemin.

➜ EXERCICES RÉSOLUS 5, 6 et 9

DES réflexes À AVOIR

Calcul de $p(A \cap B)$

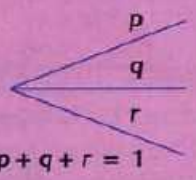
Pensez que suivant la situation, vous pouvez utiliser plusieurs formules :

• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ **(si $p(A) \neq 0$),**
• $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$ **(si $p(B) \neq 0$),**
• $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (si A et B sont indépendants).

➜ EXERCICE RÉSOLU 3

Réalisation d'un arbre pondéré

• N'oubliez pas la **loi des nœuds** : la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud vaut 1.



• Sur une branche au départ —— A, on inscrit $p(A)$.
• Sur une branche —— A —— B, on inscrit dans l'ordre $p(A)$ et $p_A(B)$.
• Sur une branche —— A —— B —— C dans l'ordre, $p(A)$, $p_A(B)$ et $p_{A \cap B}(C)$ ...
• Un chemin va du départ à l'extrémité de l'arbre et représente l'intersection de tous les événements qui se trouvent sur les nœuds du chemin.

➜ EXERCICES RÉSOLUS 3, 4, 5 et 6

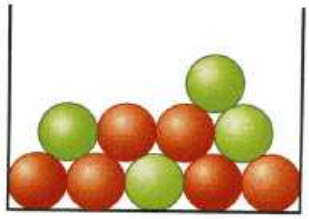
DES erreurs À ÉVITER

Ne pas écrire :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
sans s'assurer que les événements A et B sont incompatibles et donc que $p(A \cap B) = 0$.

Ne pas confondre $p_{\overline{A}}(B)$ et $1 - p_A(B)$ car les lois de probabilité $p_{\overline{A}}$ et p_A sont différentes.
Par contre, $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$ puisqu'il s'agit du calcul de la probabilité de l'événement contraire de B pour la loi p_A (loi des nœuds).

TD 1 Construction et utilisation d'arbres pondérés

1 Modèles de référence

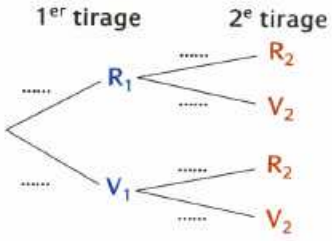


Une urne contient dix boules indiscernables : six rouges et quatre vertes.

1. Tirages avec remise

On tire successivement deux boules en remettant, après chaque tirage, la boule dans l'urne.
On note la couleur de chaque boule sortie.
On répète ainsi deux fois la même expérience. Par hypothèse, les tirages sont indépendants.

a) Complétez l'arbre associé à l'expérience.
On note les événements :
R_i « obtention d'une boule rouge au i^e tirage » ;
V_i « obtention d'une boule verte au i^e tirage ».



b) Déduisez-en les probabilités des événements :
B « obtention de deux boules de même couleur » ;
D « obtention de deux boules de couleurs différentes ».

2. Tirages sans remise

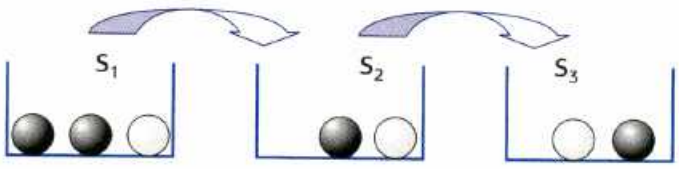
On tire successivement deux boules sans remettre la boule dans l'urne, après chaque tirage.
On note la couleur de chaque boule sortie.
Le second tirage est alors conditionné par le résultat du premier.

a) Dressez l'arbre associé à l'expérience.

b) Calculez les probabilités des événements B′ « obtention de deux boules de même couleur » et D′ « obtention de deux boules de couleurs différentes ».

2 Succession d'expériences

On dispose de n sacs de jetons notés S_1, S_2, ..., S_n ($n \geqslant 2$).
S_1 contient deux jetons noirs et un blanc et chacun des autres sacs, un noir et un blanc.
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton selon le protocole :
- on tire un jeton de S_1 ;
- on le place dans S_2 et on tire alors un jeton de S_2 ;
- on place ce jeton dans S_3, ... et ainsi de suite...



Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'événement « le jeton sorti de S_k est blanc » et $\overline{E_k}$ son événement contraire. La probabilité de E_k est notée p_k.

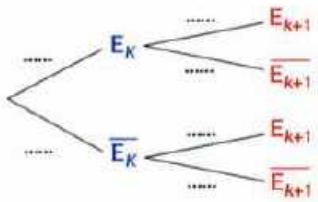
1. Démarrage du processus

a) Représentez par un arbre le tirage dans S_1, puis dans S_2.

b) Indiquez la valeur de p_1 puis calculez p_2.

2. Relation entre p_k et p_{k+1}

a) Complétez l'arbre ci-contre qui illustre les tirages dans les sacs S_k et S_{k+1} $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.



Aide. Déterminez d'abord $P_{E_k}(E_{k+1})$ et $P_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$.

b) Déduisez-en que $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

3. Étude de la suite (p_n)

a) Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n, $p_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.

b) Déduisez-en la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Quelle interprétation pratique pouvez-vous faire de ce résultat ?

TD 2 Test de dépistage

Une maladie atteint 10 % d'une population. Un test de dépistage permet de détecter si un individu est malade. Ce test doit être positif si l'individu est malade et négatif sinon.
La probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est sain est de 0,008.
La probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est malade est de 0,02.
On choisit au hasard un individu de cette population. On note les événements :
M « l'individu est atteint de la maladie » et T « le test est positif ».

1. Construisez un arbre pondéré résumant la situation.

2. Valeur diagnostique

On appelle valeur diagnostique d'un test, la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade.

a) Calculez $p(M \cap T)$ puis $p(T)$.

b) Déduisez-en la valeur diagnostique $p_T(M)$.

3. Fiabilité du test

Une erreur de test survient lorsque :
« l'individu est sain et le test positif » ou « l'individu est malade et le test négatif ».

a) Calculez $p(\overline{M} \cap T)$. (Un individu de $\overline{M} \cap T$ est dit « faux positif »).

b) Calculez $p(M \cap \overline{T})$. (Un individu de $M \cap \overline{T}$ est dit « faux négatif »).

c) Calculez la probabilité d'une erreur de test.

4. Influence de la proportion d'individus malades

On généralise l'étude précédente dans le cas où la proportion d'individus malades dans la population est x avec $0 < x < 1$.

a) Exprimez en fonction de x la valeur diagnostique.

b) Que dire de la valeur diagnostique lorsque x est proche de 0 ? À partir de quelle valeur de x la valeur diagnostique dépasse-t-elle 0,9 ?

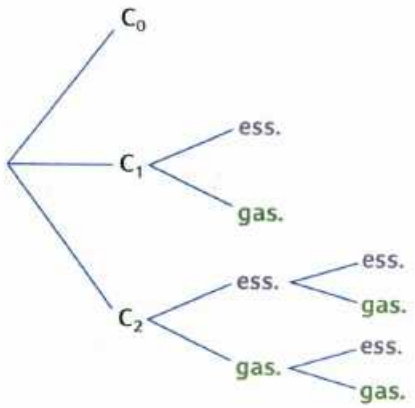
Commentaire. La valeur diagnostique mais aussi la fiabilité du test sur la population étudiée dépend de la proportion de gens malades.
Pour une maladie rare, un cas de test positif n'assure pas le diagnostic aussi convient-il d'effectuer d'autres tests indépendants. En outre, un dépistage systématique de toute la population a l'inconvénient de produire une quantité non négligeable de faux positifs, ce qui pose des problèmes éthiques.

TD 3 Variables aléatoires et probabilités conditionnelles

Le nombre de clients se présentant en cinq minutes à une pompe dans une station service est une variable aléatoire X. On suppose que le nombre de clients X ne dépasse jamais deux.
La loi de X est donnée par le tableau suivant :

Nombre de clients i	0	1	2
$p(X = i)$	0,1	0,5	0,4

Chaque client achète de l'essence ou du gasoil. La probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,4.
La probabilité qu'il achète du gasoil est 0,6.
Le choix d'un client est indépendant de celui des autres et du nombre de clients. On notera C_i l'événement $(X = i)$, c'est-à-dire l'événement « il se présente i clients à la pompe » pour i de 0 à 2.
Les différents cas peuvent se résumer par l'arbre ci-contre.
On note E l'événement « un seul client achète de l'essence ».



1. **a)** Complétez l'arbre en mettant sur chaque branche la probabilité qui convient.

b) Calculez $p(C_1 \cap E)$.

c) Justifiez que $p_{C_2}(E) = 0{,}48$. Calculez $p(C_2 \cap E)$.

d) Déduisez des questions précédentes la valeur de $p(E)$ (probabilité de l'événement « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence »).

2. Y est la variable aléatoire égale au nombre de clients qui achètent de l'essence en cinq minutes.

a) Quelles sont les valeurs de Y ?

b) Déterminez la loi de probabilité de Y.

c) Faites le tableau donnant la loi du couple (X ; Y).

d) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

TD 4 Loi d'équilibre génétique

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est *homozygote* lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa. Une plante est *hétérozygote* lorsqu'elle est de génotype Aa.
Certaines plantes, le lupin par exemple, se reproduisent par autogamie (ou autofécondation) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard. L'**objectif** de ce TD est l'étude de la descendance par autogamie d'une plante hétérozygote.

1 Première génération

Une plante de génotype AA donne par autogamie une plante de génotype AA. De même, une plante de génotype aa donne une plante aa.

● Déterminez les probabilités que la descendance de première génération d'une plante de génotype Aa soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.

Aide. Construisez un arbre.

2 Générations successives

Partant d'une plante hétérozygote (Aa à la génération 0), on constitue par autogamie des générations successives. On utilise les notations suivantes :

- $(AA)_n$ est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype AA » ;
- $(Aa)_n$ est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype Aa » ;
- $(aa)_n$ est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype aa ».

On appelle x_n la probabilité de $(AA)_n$, y_n la probabilité de $(Aa)_n$ et z_n celle de $(aa)_n$.

1. Évaluez x_0, y_0 et z_0.

2. Calculez x_1, y_1 et z_1.

3. Exprimez la probabilité conditionnelle de $(AA)_{n+1}$ sachant $(AA)_n$, puis celle de $(AA)_{n+1}$ sachant $(Aa)_n$ et enfin de $(Aa)_{n+1}$ sachant $(Aa)_n$.

En utilisant les résultats précédents, démontrez que pour tout entier n :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n.$$

Donnez l'expression de z_{n+1}.

3 Études des suites (x_n), (y_n) et (z_n)

1. Calculez les valeurs de x_n, y_n et z_n de $n = 0$ à 10 à l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice. Que pouvez-vous conjecturer sur les trois suites ?

2. Quelle est la nature de la suite (y_n) ? Exprimez y_n en fonction de n.

3. En remarquant que :

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) \\ &= \frac{1}{4}(y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0), \end{aligned}$$

exprimez x_n en fonction de n.

4 Évolution dans le temps

Déterminez les limites des suites (x_n), (y_n) et (z_n).

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. Rappels sur les probabilités

Dans les exercices de cette rubrique, utilisez les modèles de référence qui assurent l'équiprobabilité et les techniques de dénombrement.

1 Trois revues scientifiques *a*, *b*, *c* mises à la disposition des élèves de TS d'un lycée sont telles que :
52 % ont lu *a*, 43 % *b*, 37 % *c* ;
22 % ont lu *a* et *b*, 15 % *a* et *c*, 13 % *b* et *c* ;
8 % les trois revues. On interroge un élève de TS au hasard.
Quelle est la probabilité :

a) qu'il ait lu exactement une revue ?

b) qu'il n'ait lu aucune de ces revues ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 255.

2 On remplit d'une manière aléatoire les quatre cases du tableau avec les nombres +1 ou −1.

Calculez les probabilités que :

a) la somme des nombres soit nulle ;

b) le même nombre n'apparaisse pas deux fois de suite.

3 Une urne contient deux boules blanches (b) et quatre noires (n), toutes indiscernables au toucher.

1. On tire successivement, au hasard quatre boules sans remise. Calculez la probabilité des événements suivants :
A « tirage alterné du type bnbn » ;
B « tirage d'une seule boule blanche ».

2. Même question que 1. dans le cas de quatre tirages successifs avec remise.

4 Une urne contient 9 boules : 4 rouges, 2 bleues et 3 vertes.

1. On tire simultanément, et au hasard, deux boules de l'urne et on note sa couleur.
Calculez la probabilité des événements suivants :
R « tirer deux boules rouges » ;
C « tirer deux boules de la même couleur ».

2. Même question que 1. dans le cas du tirage successif des deux boules avec remise.

5 On tire simultanément, et au hasard, deux cartes d'un jeu de trente-deux.
Quelles sont les probabilités d'obtenir :

a) deux piques ?

b) un seul pique ?

c) aucun pique ?

d) un pique et un cœur ?

6 On prend simultanément, et au hasard, trois cartes d'un jeu de trente-deux.
Calculez les probabilités de prendre :

a) trois cartes de la même couleur ;

b) trois cartes de la même valeur (c'est un brelan).

7 À la course du tiercé, il y a vingt chevaux au départ. À l'arrivée, il n'y a pas d'ex-æquo.
On mise sur trois numéros.

1. Calculez la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre. (Il s'agit d'avoir les numéros des trois premiers dans l'ordre d'arrivée.)

2. Calculez la probabilité de gagner le tiercé dans le désordre. (Il s'agit d'avoir les numéros des trois premiers, mais pas dans l'ordre d'arrivée.)

Les exercices 8 à 10 concernent la notion de variable aléatoire. Vous pouvez vous reporter à la partie *Comprendre* et à l'exercice résolu 2, page 255.

8 Un jeu de hasard est constitué d'un dispositif allumant de façon aléatoire une case et une seule d'un tableau lumineux dont les ampoules sont rouges (R), vertes (V), bleues (B) ou marron (M).

B	B	B	B	B	B
M	V	B	B	V	M
M	B	R	R	B	M
M	V	B	B	V	M
B	B	B	B	B	B

L'exploitant donne au client un jeton servant à actionner le mécanisme dont il peut fixer à sa guise la valeur a en euros.
Le joueur gagne 80 € si le rouge clignote, 50 € pour le vert, rien du tout pour le marron et perd 10 fois la valeur du jeton pour le bleu.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros du joueur.

1. Trouvez la loi de probabilité de X.

2. **a)** Calculez a pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire $E(x) = 0$.)

b) Comment l'exploitant a-t-il intérêt à fixer la valeur de a ?

9 Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre aléatoire de six chiffres ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1 (par exemple : 011010).
N est la variable aléatoire donnant le nombre de 1.

1. Indiquez la loi de probabilité de N.

2. Calculez son espérance et son écart type.

10 Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément trois boules.

1. Calculez les probabilités des événements :
A « les boules ont la même couleur » ;
B « les boules sont toutes de couleurs différentes ».

2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de couleurs obtenues.

a) Trouvez la loi de probabilité de X.

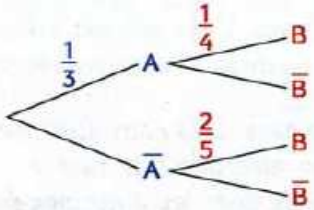
b) Calculez E(X).

2. et 3. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales

Pour les exercices 11 à 15, A et B désignent deux événements d'un même univers.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 3, page 257.

11 1. Complétez l'arbre pondéré suivant :



2. Calculez $p(A \cap B)$, $p(A \cap \bar{B})$, $p(\bar{A} \cap B)$, $p(\bar{A} \cap \bar{B})$.

12 A et B sont tels que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Calculez $p_A(B)$ et $p_B(A)$.

13 A et B sont tels que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ et $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Calculez $p(A \cap B)$, $p_A(B)$ et $p_B(A)$.

14 A et B sont tels que $p(A) = \frac{1}{3}$, $p_A(B) = \frac{1}{4}$ et $p_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{2}$. Calculez $p(B)$.

15 A et B sont tels que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{3}{4}$ et $p(A \cap B) = \frac{2}{5}$.

1. Calculez $p_A(B)$ et $p_B(A)$.

2. Calculez $p(\bar{A} \cap \bar{B})$. Déduisez-en $p_{\bar{A}}(\bar{B})$.

16 Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 1 200 et B en a produit 800.
L'atelier A produit 4 % de puces défectueuses et B en produit 3 %. On prend une puce au hasard dans la commande.
On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1. Complétez le tableau qui décrit la composition de la commande :

	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	total
nombre de puces produites par A			
nombre de puces produites par B			
total			

2. Calculez les probabilités suivantes :

a) $p(D)$, $p(A \cap D)$ et $p_D(A)$.

b) $p(\bar{D})$, $p(\bar{D} \cap B)$ et $p_{\bar{D}}(B)$.

17 **Du tableau aux arbres**

Le tableau suivant indique les résultats d'un sondage sur l'installation d'un parc d'horodateurs auprès d'un échantillon de personnes fréquentant une ville.

	H	$\bar{H}$
A	125	175
$\bar{A}$	150	50

On choisit au hasard une personne de l'échantillon.
On note A et H les événements :
A « elle a une opinion positive » ;
H « elle habite dans la ville ».

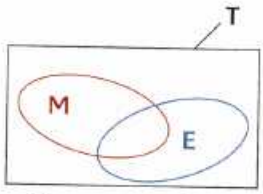
1. Calculez $p(A)$, $p(H)$, $p_A(H)$, $p_H(A)$.

2. Représentez par un arbre la situation en commençant par les événements A et $\overline{A}$.

3. Faites de même mais en commençant par les événements H et $\overline{H}$.

18 Avec un diagramme ensembliste

Parmi les élèves de terminale scientifique (T) d'un lycée, 42 % ont choisi la spécialité maths (M) et 55 % étudient l'espagnol (E) en langue 2 ; de plus, 27 % ne font ni espagnol, ni spécialité maths.
On interroge un élève au hasard.



1. Complétez le diagramme ci-contre en inscrivant les probabilités déduites de l'énoncé.

2. **a)** Calculez la probabilité qu'un élève suivant la spécialité maths étudie l'espagnol.

b) Calculez la probabilité qu'un élève apprenant l'espagnol suive la spécialité maths.

19 À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65 % de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20 % sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1. Calculez la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.

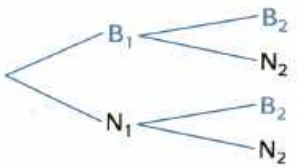
2. Calculez la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée et soit écologiste.

3. Déduisez-en la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Aide. Voir l'exercice résolu 4, page 257.

20 Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires.
On tire au hasard et successivement deux boules sans remise (la boule tirée n'est pas remise dans l'urne).

1. Vérifiez que l'expérience peut être décrite par l'arbre ci-contre. (B_1 signifie que la boule tirée au premier tirage est blanche, ...).



2. Inscrivez sur chaque branche les probabilités convenables.

3. Calculez la probabilité d'obtenir :

a) deux boules blanches ;

b) deux boules noires ;

c) une boule noire et une boule blanche.

Aide. Voir l'exercice résolu 6, page 259.

21 Une urne contient cinq boules : trois noires numérotées 1, 2, 3 et deux blanches numérotées 1, 2.
On tire au hasard et simultanément deux boules.

1. Calculez les probabilités des événements :
A « les boules ont la même couleur » ;
B « la somme des numéros des boules est 3 ».

2. Calculez $p_B(A)$.

22 Un lot de bulbes de tulipes est composé de deux variétés :

- 60 % de la variété A dont 95 % donnera une fleur,
- 40 % de la variété B dont 90 % donnera une fleur.

On prend un bulbe au hasard.
Calculez la probabilité qu'il donne une fleur.

Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 259.

23 Un tiroir T_1 contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir T_2 en contient quatre d'or et six d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

1. Construisez l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or :

a) du tiroir T_1 ; **b)** du tiroir T_2.

3. Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.

4. On a extrait une pièce d'or.
Quelle est alors la probabilité qu'elle provienne du tiroir T_1 ?

Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 259.

24 Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : médecins, soignants (non médecins) et personnel AT (administratif ou technique).
12 % sont des médecins et 71 % des soignants.
67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.
On interroge au hasard un membre du personnel.

1. Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? une femme médecin ?

2. On sait que 80 % du personnel est féminin.

a) Calculez la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.

b) Déduisez-en la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.

Aide. Voir l'exercice résolu 5, page 259.

25 Dans une association sportive, 30 % des membres pratiquent le tennis, 60 % sont des hommes et parmi eux, 55 % ne jouent pas au tennis.
Quelle est la probabilité pour qu'une femme choisie au hasard ne pratique pas le tennis ?

4. Indépendance

26 On tire au hasard une carte d'un jeu de trente-deux. On note A l'événement « la carte est une dame » et B l'événement « obtenir un cœur ».

1. Calculez $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

27 On lance un dé parfait. A est l'événement « le numéro est pair » et B « le numéro est un nombre premier ». A et B sont-ils indépendants ?

28 Une association de quatre-vingt-seize membres propose différentes activités à ses adhérents dont l'aviron et le badminton. Douze membres s'inscrivent pour l'aviron, trente-deux pour le badminton dont quatre pour les deux. On prend au hasard la fiche d'un adhérent.
On note A et B les événements :
A « l'adhérent est inscrit pour l'aviron » ;
B « l'adhérent est inscrit pour le badminton ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
En est-il de même pour A et $\overline{B}$? $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 261.

29 Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k.
On lance ce dé et on considère les événements :
A « le numéro est pair » ;
B « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;
C « le numéro obtenu est 3 ou 4 ».

1. **a)** Calculez les probabilités de A, B, C.
   b) Calculez la probabilité conditionnelle $p_A(B)$.
2. A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 261.

30 Complétez le tableau suivant sachant que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

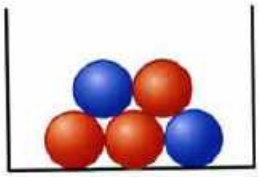
X \ Y	0	1	2	loi de X
0		0,2		0,4
1			0,04	
2				0,4
loi de Y	0,3			

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 261.

31 On tire une carte au hasard dans un jeu de trente-deux cartes.
X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la carte tirée est une dame, 0 dans le cas contraire.
Y est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la carte tirée est un cœur, 0 dans le cas contraire.

1. Déterminez la loi de X, puis la loi de Y.
2. Calculez les probabilités des événements suivants :
   a) « la carte est la dame de cœur » ;
   b) « la carte est une dame qui n'est pas de cœur » ;
   c) « la carte est un cœur qui n'est pas une dame ».
3. Déduisez-en la loi conjointe du couple (X ; Y). Présentez les résultats sous la forme d'un tableau.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

32 Dans l'urne décrite ci-contre, on tire une à une les cinq boules sans remise. Tous les tirages sont équiprobables. X est la variable aléatoire qui, à tout tirage, associe le rang de la première boule rouge.



Y est la variable aléatoire qui, à tout tirage, associe le rang de la dernière boule bleue.

1. Déterminez les lois de probabilité de X puis de Y.
2. X et Y sont-elles deux variables aléatoires indépendantes ?

5. Expériences indépendantes

33 Deux archers A et B tirent simultanément sur une même cible de façon indépendante.
A touche la cible avec une probabilité de 0,9 alors que B la touche avec une probabilité de 0,7.
Quelle est la probabilité que l'un au moins touche la cible ?

34 On extrait successivement avec remise trois cartes d'un jeu de trente-deux. On définit les événements :
A « le tirage donne un carreau, un pique, un trèfle » ;
B « le tirage donne un as, un roi, une dame » ;
C « le tirage contient une dame et deux rois ».
Calculez les probabilités de A, B, C.

☞ **Aide.** Voir exercice résolu 9, page 263.

35 En observant les ventes de machines, un chef d'entreprise a établi que chaque mois, le nombre N de machines vendues suit la loi de probabilité suivante :

N	0	1	2	3	4	5
probabilité	0,05	0,15	0,4	0,3	0,06	0,04

On admet que les ventes de chaque mois sont indépendantes.
Calculez les probabilités des événements suivants.
a) « Il vend deux machines en janvier et trois en février. »
b) « Il vend une machine en janvier, deux en février et trois en mars. »
c) « Il vend cinq machines au cours du premier trimestre. »

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

36 Conditionnement : bien choisir l'arbre

Une étude statistique sur un groupe de sportifs a permis d'estimer qu'en période de compétition, pour un sportif pris au hasard dans ce groupe, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est 0,02.
La prise d'un médicament peut influencer le résultat du contrôle. Ce médicament est pris par 25 % des sportifs du groupe. Pour un sportif qui utilise ce médicament, la probabilité d'être déclaré positif est 0,05.
On note M l'événement « utiliser le médicament » et D l'événement « être déclaré positif ».

Objectifs : pour un sportif du groupe pris au hasard, calculer la probabilité :

- qu'il utilise le médicament et qu'il soit déclaré positif,
- qu'il soit déclaré positif sachant qu'il n'utilise pas le médicament.

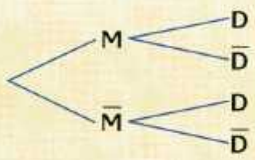
1. Traduire les données et les questions dans le langage des événements. L'univers de l'expérience est le groupe de sportifs, une issue est l'un d'eux. Il y a équiprobabilité (choix au hasard). Le texte donne $p(D) = 0{,}02$ et $p(M) = 0{,}25$.
(Si n est le nombre de sportifs, alors le nombre d'éléments de M est $n \times 0{,}25$ et donc, puisqu'il y a équiprobabilité, $p(M) = \dfrac{n \times 0{,}25}{n} = 0{,}25$.) Le texte donne aussi $p_M(D) = 0{,}05$.
Il s'agit de calculer $p(M \cap D)$ et $p_{\overline{M}}(D)$.

2. Calcul de $p(M \cap D)$. Puisqu'on connaît $p_M(D)$ et $p(M)$, on sait calculer $p(M \cap D)$.

Justifiez que $p(M \cap D) = 0{,}25 \times 0{,}05 = 125 \times 10^{-4}$.

3. Calcul de $p_{\overline{M}}(D)$.

Les données ne permettent pas un calcul direct. On pense alors à construire un arbre.



Inscrivez sur les branches les probabilités connues.

4. Une hypothèse n'a pas encore été utilisée, $p(D) = 0{,}02$. Or l'arbre montre que D peut être réalisé par deux chemins.
Quels sont ces chemins ? Pourquoi obtient-on :

$$p(D) = 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}75 \times p_{\overline{M}}(D) ?$$

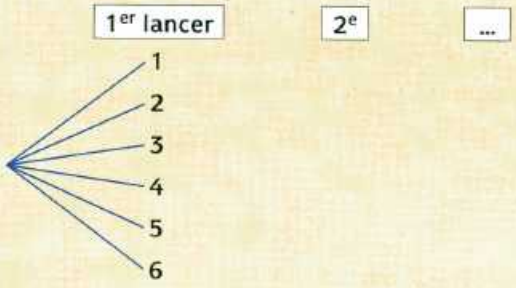
Déduisez-en $p_{\overline{M}}(D)$.

37 Plusieurs lancers d'un dé

On lance un dé parfait huit fois de suite.

Objectif : calculer la probabilité de l'événement « obtenir un six pour la première fois au huitième lancer ».

1. On peut penser à construire un arbre.



On prévoit qu'il va être immense. Pour le « raccourcir », on peut se demander s'il est utile de placer toutes les branches. Après tout, seule la sortie du six intéresse et donc sa non sortie. D'où l'idée de noter A l'événement « sortie du six ».

Justifiez que l'arbre peut commencer par

2. Pour le poursuivre, il faut pouvoir inscrire les probabilités sur les nouvelles branches :

Sans autre indication fournie par le texte, il est légitime de supposer que le résultat d'un lancer ne dépend pas des lancers précédents.

a) Pourquoi, sans construire l'arbre entier, peut-on dire qu'un seul chemin aboutit à l'événement « on obtient un six pour la première fois au huitième lancer » ?

b) Quel est ce chemin ?

c) Justifiez que la probabilité cherchée est $\dfrac{5^7}{6^8}$.

Pour progresser

Rappels sur les probabilités

38 On tire au hasard, simultanément, quatre cartes d'un jeu de cinquante-deux.
Calculez les probabilités de prendre quatre cartes :

a) de la même couleur ;

b) de la même valeur (carré) ;

c) dont trois ont la même valeur (brelan) ;

d) deux rois et deux dames.

39 **Le loto**
On choisit au hasard six numéros de 1 à 49, l'ordre n'intervient pas. Le résultat d'un tirage est formé de six numéros suivis d'un complémentaire. Calculez les probabilités d'avoir :

a) les six bons numéros ;

b) cinq bons numéros et le complémentaire ;

c) cinq bons numéros mais pas le complémentaire ;

d) exactement quatre bons numéros et le complémentaire.

40 On dispose de trois dés tétraédriques équilibrés tels que chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge. On lance les trois dés simultanément.
(On notera que lorsqu'on lance un tel dé, une seule face est cachée et les trois autres visibles.)
Calculez les probabilités des événements suivants :
A « au moins trois faces rouges sont visibles » ;
B « la couleur bleue n'est visible sur aucun dé » ;
C « les six faces rouges sont visibles ».

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 10, page 263.

41 Le programme d'une épreuve d'examen comporte soixante sujets. Trois de ces sujets sont tirés au sort et sont proposés aux candidats. Chaque candidat doit traiter l'un des trois sujets.

1. Un candidat n'ayant étudié que le quart des sujets passe l'épreuve.

a) Calculez la probabilité que ce candidat n'ait étudié aucun des trois sujets.

b) Déduisez-en la probabilité qu'il connaisse au moins l'un des trois sujets proposés.

2. Répondez aux mêmes questions en supposant que le candidat a étudié la moitié des sujets.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 10, page 263.

42 Dans un sac, on place sept cartons sur lesquels sont écrits successivement les lettres du mot « RAYMOND ».
On tire au hasard successivement trois cartons que l'on dispose sur une ligne de gauche à droite.
On définit ainsi un mot de trois lettres.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « DON » ?

2. Quelle est la probabilité que le mot se termine par l'une des trois voyelles a, y ou o ?

3. Quelle est la probabilité que les trois lettres obtenues soient dans l'ordre alphabétique croissant ?

43 Un tiroir contient dix paires de gants toutes différentes. On prend quatre gants au hasard.
Calculez les probabilités de prendre :

a) deux paires complètes ;

b) au moins une paire.

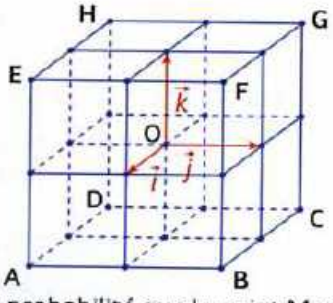
☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 10, page 263.

44 **Variable aléatoire**
Un dé pipé est tel que :
$p(6) = 0{,}2$; $p(1) = 0{,}1$;
$p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0{,}175$.
On lance le dé deux fois consécutives ; on lit chaque fois le nombre de points sur la face supérieure.
X est la variable aléatoire qui donne la somme des points marqués.

1. Donnez la loi de probabilité de X.

2. Calculez E(X), V(X), σ(X).

45 • BAC **Sur un réseau à mailles cubiques**
Un sac contient quatre jetons numérotés respectivement -1 ; 0 ; 0 ; 1 et indiscernables au toucher. On tire successivement au hasard et avec remise trois jetons.
À chaque tirage $(x\,;\,y\,;\,z)$, on associe dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
Le graphique représente les positions possibles du point M.
Le cube ABCDEFGH est noté $\mathscr{C}$.



1. Calculez la probabilité que le point M soit en A.

2. On note E_1 l'événement « M appartient à l'axe des abscisses ». Calculez $p(E_1)$.

3. $\mathscr{P}$ désigne le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;\,1\,;\,1)$.

a) Trouvez une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

☞ **Aide.** Voir chapitre 14, page 384.

b) Tracez la section du cube $\mathscr{C}$ par $\mathscr{P}$.

c) On note E_2 l'événement « M appartient à $\mathscr{P}$ ».
Calculez $p(E_2)$.

4. On note $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 et E_3 l'événement « M appartient à la boule $\mathscr{B}$ ».
Calculez $p(E_3)$.

Conditionnement. Indépendance

46 Un sac contient trois jetons. L'un de ces jetons a deux faces noires, le deuxième a deux faces blanches et le troisième a une face noire et une face blanche. On tire un jeton au hasard et on le pose sur la table. La face visible est noire.
Quelle est la probabilité que l'autre face soit noire ?

47 Un lot de cent dés contient vingt dés pipés. Pour un tel dé, la probabilité d'apparition du 6 est égale à $\frac{1}{2}$. Les autres dés sont parfaits.

1. On prend au hasard un dé, on le lance. Calculez la probabilité de l'événement S « on obtient 6 ».

2. On prend au hasard un dé, on le lance, on obtient 6. Calculez la probabilité que le dé soit pipé.

48 Les individus d'une population peuvent être atteints de deux maladies M_1 et M_2. On choisit au hasard un individu dans cette population. A est l'événement « l'individu est atteint de la maladie M_1 », B « il est atteint de la maladie M_2 ».
On admet que $p(A) = 0{,}03$ et que $p(B) = 0{,}05$.
D'autre part, la probabilité qu'un individu atteint de la maladie M_1 soit atteint de la maladie M_2 est 0,60.

1. Calculez la probabilité que l'individu soit atteint de la maladie M_1 et de la maladie M_2.

2. Calculez la probabilité que l'individu soit atteint de la maladie M_1 sachant qu'il est atteint de la maladie M_2.

3. Calculez la probabilité que l'individu soit atteint de la maladie M_1 ou de la maladie M_2.

49 La proportion de pièces défectueuses dans un lot est de 0,04. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité de 0,97 ;
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité de 0,98.

On prend au hasard une pièce et on la contrôle.

1. Calculez la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

2. Calculez la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise.

50 Des études statistiques ont permis d'estimer que s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est de 0,7.
En revanche, s'il ne fait pas beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain n'est que de 0,4.

1. Mercredi, il fait beau. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau vendredi ?

2. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau vendredi s'il ne fait pas beau mercredi ?

51 On dispose de quatre urnes U_1, U_2, U_3 et U_4 contenant chacune quatre boules. Pour $1 \leqslant k \leqslant 4$, U_k contient k boules blanches, les autres étant noires. On choisit une urne au hasard, puis une boule dans chaque urne.
On note B l'événement « la boule est blanche ».

1. Calculez la probabilité de B.

2. Quelle est la probabilité que la boule provienne de U_2 sachant qu'elle est blanche ?

52 • Le quart de la population d'un pays a été vacciné.
Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades.
Parmi les malades, $\frac{1}{5}$ n'est pas vacciné.
Calculez la probabilité qu'une personne non-vaccinée tombe malade.

53 • **Évolution d'une épidémie**

Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant deux enfants de moins de dix ans : une fille et un garçon. On a constaté que 20 % des filles et 50 % des garçons sont touchés par la maladie. Par ailleurs, dans les familles dont la fille est malade, le garçon l'est aussi dans 70 % des cas. On choisit au hasard une famille ayant fait l'objet de cette étude.
Quelle est la probabilité que :
A « les deux enfants soient atteints par la maladie » ;
B « au moins l'un des deux enfants soit atteint » ;
C « aucun des deux enfants ne soit atteint » ;
D « la fille soit atteinte sachant que le garçon l'est » ;
E « la fille soit atteinte sachant que le garçon n'est pas atteint. »

Pour la rédaction, on notera :
F l'événement « la fille de la famille est atteinte par la maladie » ;
G l'événement « le garçon de la famille est atteint par la maladie. »

Aide. Commencez par représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 36, page 273.

54 • BAC Dans un village de montagne, deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5.

A. Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, l'un des cinq circuits.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?

2. Quelle est la probabilité qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?

3. Quelle est la probabilité que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit ?

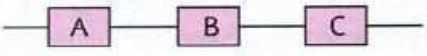
4. Déterminez la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

B. On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour, chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille.
Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles.
On note E l'événement « les deux familles font le même circuit le premier jour » et F l'événement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».
Calculez les probabilités suivantes :

$p(E)$, $p_E(F)$, $p_{\bar{E}}(F)$ puis $p(F \cap E)$ et $p(F \cap \bar{E})$.

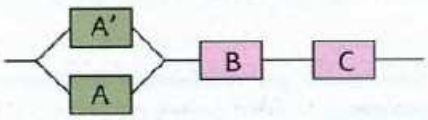
Déduisez-en $p(F)$.

55 • Un appareillage électronique tombe en panne dès qu'au moins un de ses trois composants A, B ou C tombe en panne. La probabilité que A tombe en panne est 0,1, celle que B tombe en panne est 0,05 et celle de C est 0,03. Ces pannes se produisent indépendamment les unes des autres.



1. Calculez la probabilité que l'appareil tombe en panne.

2. Pour réduire ce risque, on double l'élément A par un élément A′ de même type qui relaie A dès que celui-ci tombe en panne.



Calculez la probabilité que l'appareil tombe en panne.

56 • BAC **Condition d'indépendance**

Une urne contient cinq boules blanches et cinq noires.
On en prélève n ($n \geqslant 2$) successivement et avec remise.
On note A et B les événements :
A « on obtient des boules des deux couleurs » ;
B « on obtient au plus une boule blanche ».

1. **a)** Calculez les probabilités des événements :
- « toutes les boules tirées sont de même couleur » ;
- « on obtient exactement une boule blanche ».

a) Déduisez-en les probabilités suivantes :

$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$, $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$.

2. Prouvez que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ équivaut à $2^{n-1} = n+1$.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n ($n \geqslant 2$), par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$.

a) Calculez u_2, u_3, u_4.

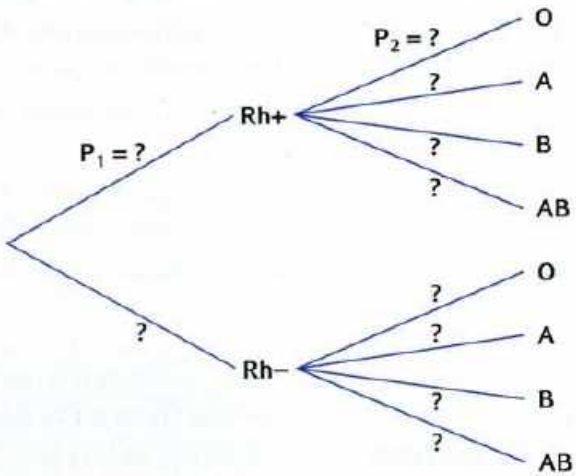
b) Prouvez que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. Déduisez-en la valeur de l'entier n tel que les événements A et B sont indépendants.

57 • BAC Le tableau suivant donne la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de la France.
Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à trois décimales.

	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus –	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

1. L'objectif de cette question est de compléter, à l'aide de données de ce tableau, l'arbre suivant.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).
On note Rh+ l'événement « la personne a le facteur Rh+ ».
On note O l'événement « la personne appartient au groupe O ».

a) Déterminez la probabilité P_1, c'est-à-dire $p(Rh+)$.

(Détaillez le calcul effectué puis reportez ce résultat dans l'arbre.) Déterminez de même la probabilité P_2 (en détaillant les calculs).

b) Complétez le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs).

2. a) Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ? Vérifiez ce résultat à partir du tableau.

b) Quelle est la probabilité qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

3. a) On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants de la France). Calculez, en fonction de n, la probabilité p qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.

b) Calculez la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p \geqslant 0{,}999$.

58 • BAC Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.

Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :

• A_1 l'événement « la personne est absente lors du premier appel » ;

• R_1 l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité qu'elle soit absente est 0,3, et sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter. On note :

• A_2 l'événement « la personne est absente lors du second appel » ;

• R_2 l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;

• R l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Démontrez que la probabilité de R est 0,176. (Vous pouvez utiliser un arbre.)

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de vingt personnes à contacter.

Quelle est la probabilité qu'une au moins des vingt personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

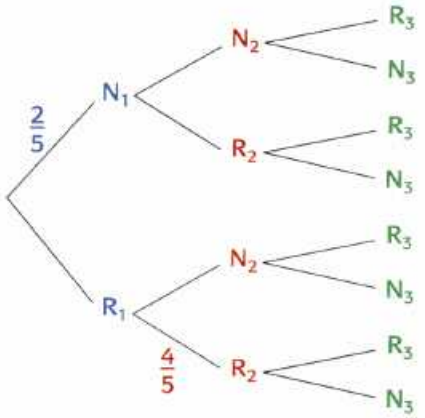
59 • BAC On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.

Pour i prenant les valeurs 1, 2, 3, on désigne par N_i (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduisez et complétez l'arbre de probabilités suivant :



2. a) Calculez la probabilité des événements :

$N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

b) Déduisez-en la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.

c) Calculez de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduisez de la question précédente la probabilité de l'événement N_3.

4. Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

60 • BAC **Un mélange de pièces**

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées soixante pièces équilibrées avec quarante pièces truquées.

La probabilité de « Pile » lors du jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$ alors qu'elle est de $\frac{1}{2}$ pour une pièce équilibrée.

On suppose que les différents lancers utilisés dans la suite sont indépendants les uns des autres.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance.

On note T et P les événements suivants :

T « la pièce est truquée », P « on obtient Pile ».

a) Calculez la probabilité d'obtenir « Pile ».

b) Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « Pile » ?

2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois de suite.
Si au cours des quatre lancers, on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce ; dans le cas contraire, on la conserve.
On note E l'événement « la pièce est éliminée ».

a) Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?

b) Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?

c) Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?

61 • BAC Gestion des risques

Une compagnie d'assurance fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents :
85 % des dossiers entraînent des frais de réparation, 20 % des frais de dommages corporels. En outre, 12 % des dossiers entraînant des frais de réparation, entraînent aussi des frais de dommages corporels. On choisit un dossier au hasard.
On note R « le dossier traité entraîne des frais de réparation » et D « le dossier entraîne des frais de dommages corporels ».

1. Calculez les probabilités suivantes :
$$p(R \cap D), \quad p(R), \quad p(D).$$

2. Calculez la probabilité qu'un dossier :

a) n'entraîne ni frais de réparation, ni frais de dommages corporels ;

b) entraîne des frais de réparation, sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

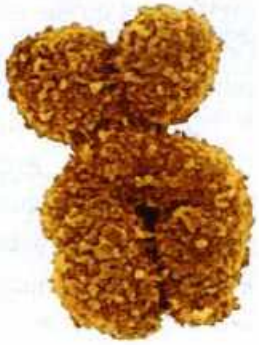
3. On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et, parmi ces derniers, 60 % entraînent des frais de dommages corporels.

a) On choisit un dossier. Quelle est la probabilité que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

b) On choisit cinq dossiers, de façon indépendante. Quelle est la probabilité qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

62 BAC Génétique

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est homozygote lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa.
Une plante est hétérozygote lorsqu'elle est de génotype Aa.



Une population (génération 0) est composée d'individus de génotypes AA, Aa et aa dans des proportions respectives p_0, q_0 et r_0.
Un couple d'individus de cette population donne naissance à un individu dont le génotype est constitué d'un gène pris au hasard dans le génotype de chacun des parents (par exemple, si les parents sont de génotype AA et aa, les descendants auront pour génotype Aa).

1. Étudiez le génotype de la descendance (à la première génération) de tous les couples de parents possibles.

☞ **Conseil.** Un tableau peut être une bonne aide.

2. Les couples se forment au hasard. On appelle p_1, q_1 et r_1 les proportions d'individus de génotypes AA, Aa et aa dans la première génération.

a) Vérifiez que $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$ et $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$.

b) Vérifiez que $p_1 - r_1 = p_0 - r_0 = \alpha$.

c) Calculez p_1, q_1 et r_1 en fonction de α. Déduisez-en p_2, q_2 et r_2. Concluez.

☞ **Note.** À l'aide d'Excel (ou des listes de votre calculatrice), vous pouvez simuler les calculs en partant de différentes valeurs de p_0, q_0 et r_0.

☞ **Commentaires.** Lors d'un appariement aléatoire, il y a stabilité des génotypes à partir de la génération 1. (C'est la loi de Hardy Weinberg !)

Variables aléatoires. Indépendance

63 Notation d'un QCM

1. Dans un questionnaire à choix multiples (QCM), pour une question donnée, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat décide de répondre au hasard à cette question. La réponse exacte rapporte n point(s) et une fausse fait perdre r point(s).
N est la variable aléatoire qui associe, à la réponse du candidat à cette question, sa note algébrique.

a) Donnez la loi de probabilité de N.

b) Quelle relation doit-il exister entre n et r afin que $E(N) = 0$?

2. Lors d'un concours, un élève doit répondre à un QCM de cinq questions selon les modalités du 1.
Chaque question a la même valeur en points. On suppose qu'il répond à chaque question au hasard.

a) Calculez la probabilité qu'il réponde exactement à quatre questions.

b) Quelle note sur dix obtient-il alors, si la modalité du 1. **b)** est respectée ?

64 Les jumeaux

La naissance de jumeaux se produit dans 3 % des grossesses.
Ces jumeaux peuvent être de « vrais jumeaux » avec la probabilité de $\frac{1}{3}$, ou de « faux jumeaux » avec la probabilité de $\frac{2}{3}$. De vrais jumeaux sont de même sexe, il y a équiprobabilité entre deux filles et deux garçons. Pour de faux jumeaux, le sexe de chacun est indépendant de l'autre, il y a équiprobabilité entre fille ou garçon.
X est la variable aléatoire égale au nombre de filles présentes pour la naissance de jumeaux.
Déterminez la loi de X.

65 Contrôles à la chaîne

Un fabricant d'écrans teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif, il expédie l'écran chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si le second test est positif, il est expédié chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement de la chaîne mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 et C les événements « le premier test est positif » et « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie des chaînes de fabrication.
Calculez les probabilités des événements T_1 et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € si l'écran n'est testé qu'une seule fois. Cela coûte 50 € de plus si l'écran doit subir un second test.
Un écran est facturé a euros ($a > 0$) au client.
X est la variable aléatoire qui, à chaque écran fabriqué, associe le gain algébrique du fabricant.

a) Donnez la loi de probabilité de X et déduisez-en E(X) en fonction de a.

b) À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

66 • Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne en contenant six blanches et quatre rouges. Si lors du tirage, le joueur obtient trois boules rouges, il gagne 100 € ; exactement deux rouges, il gagne 15 € ; une seule rouge, il gagne 4 €. Dans les autres cas, il ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire donnant le gain en euros du joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, l'organisateur envisage deux solutions :
- soit augmenter la mise de 1 € ;
- soit diminuer chaque gain d'un euro (y compris 0).

Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

67 • BAC On tire trois boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, trois noires, trois vertes et trois rouges. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. X est la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.
Déterminez la loi de probabilité de X.

2. Pour gagner, il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estime qu'un joueur sur dix est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.
On note :
- T l'événement « être un tricheur » ;
- $\overline{T}$ l'événement contraire de T ;
- G l'événement « gagner au jeu ».

a) Calculez la probabilité de l'événement « gagner pour un non-tricheur », c'est-à-dire $p_{\overline{T}}(G)$.
Déduisez-en la probabilité de l'événement $G \cap \overline{T}$.

b) Calculez $p(T \cap G)$.

c) Démontrez que la probabilité de l'événement G est $\frac{181}{1\,100}$.

d) Calculez la probabilité qu'une personne qui a gagné soit un tricheur.

68 • BAC Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 1 euro un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.
Il gratte une case sur le billet.
Il peut alors gagner 10 euros avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.
G désigne l'événement « le joueur gagne au grattage ».
Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 10 euros, ou 20 euros, ou bien ne rien gagner.

L_1 désigne l'événement « le joueur gagne 10 euros à la loterie ».
L_2 désigne l'événement « le joueur gagne 20 euros à la loterie ».
P désigne l'événement « le joueur ne gagne rien à la loterie ».
Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 10 euros à la loterie est $\frac{1}{70}$ et la probabilité qu'il gagne 20 euros à la loterie est $\frac{1}{490}$.

1. a) Faites un arbre. Indiquez dessus les renseignements qui précèdent.

b) Calculez la probabilité pour que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Complétez l'arbre obtenu avec cette valeur.

c) Au bout de chaque branche, indiquez le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
La probabilité de l'événement «X = 9» est $\frac{2}{125}$.
La probabilité de l'événement «X = 19» est $\frac{1}{250}$.

a) Démontrez que la probabilité que le joueur gagne 10 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 10 euros au grattage, est égale à $\frac{1}{10}$.

b) Calculez la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie sachant qu'il a gagné 10 € au grattage.

c) Déterminez la loi de probabilité de X et calculez l'espérance de X.

69 Culture de bactéries

On étudie une culture de bactéries. Le comportement de chaque bactérie est le suivant.
Si à l'instant t, une bactérie vit, à l'instant $t+1$, cette bactérie peut :
- mourir avec une probabilité p_1,
- continuer à vivre avec une probabilité p_2,
- se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité p_3.

De plus, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
On suppose que les bactéries présentes dans le milieu de culture se comportent indépendamment les unes des autres.

1. À l'instant t, deux bactéries b_1 et b_2 sont présentes dans le milieu de culture. On appelle X le nombre total de bactéries à l'instant $t+1$.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminez la loi de X.

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, une seule bactérie est présente dans le milieu de culture.

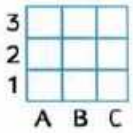
a) À l'aide d'un arbre, donnez les nombres de bactéries possibles aux instants $t = 1$ et $t = 2$.

b) On désigne par :
- A_1 l'événement « à l'instant $t = 1$, il y a une bactérie »,
- B_2 l'événement « à l'instant $t = 2$, il y a deux bactéries ».

Calculez la probabilité de B_2 sachant A_1.
Calculez la probabilité de $A_1 \cap B_2$, puis déduisez-en la probabilité de B_2.

c) On appelle Y le nombre de bactéries vivantes dans la solution à l'instant $t = 2$.
Déterminez la loi de probabilité de Y.

70 BAC Jeu sur une grille



Sur une grille de type 3×3, trois machines M_1, M_2, M_3 opèrent de la façon suivante :
M_1 place au hasard un jeton sur une des cases, puis successivement M_2 et M_3 font de même sur des cases libres.
On note les événements suivants :
H « les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
V « les trois jetons sont alignés verticalement » ;
D « les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
N « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Calculez les probabilités des événements H, V, D puis déduisez-en que $p(N) = \frac{19}{21}$.

2. On considère la variable aléatoire X définie par :

$$\begin{cases} X = 20 & \text{si H ou V est réalisé} \\ X = \alpha & \text{si D est réalisé} \\ X = -2 & \text{si N est réalisé.} \end{cases}$$

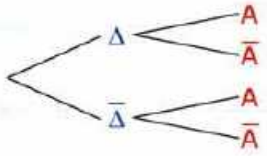
Trouvez α afin que $E(X) = 0$.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.
On note Δ l'événement « la machine est déréglée ».

a) Calculez $p_\Delta(H)$, $p_\Delta(V)$, $p_\Delta(D)$.

b) Déduisez-en que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal est $\frac{3}{28}$.

4. A désigne l'événement « les trois jetons sont alignés horizontalement, ou verticalement ou en diagonale ».
On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$.
Complétez l'arbre pondéré et déduisez-en $p(A)$.



5. On ne sait pas lorsqu'on joue, si la machine M_1 est en bon état de marche. On joue une partie et on constate que les trois jetons sont alignés.
Quelle est la probabilité que M_1 soit déréglée ?

Suites et probabilités

71 • BAC Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les événements suivants :
A_n « Alice atteint la cible au n-ième coup » ;
B_n « Alice rate la cible au n-ième coup ».
On pose $p_n = p(A_n)$.
Pour les questions **1.** et **2.**, on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminez p_1 et démontrez que $p_2 = \frac{4}{15}$.

2. Démontrez que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$.
Démontrez que la suite (u_n) est une suite géométrique.
Précisez son premier terme u_1 et sa raison q.

4. Écrivez u_n, puis p_n en fonction de n.

5. Déterminez $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

72 • BAC **1.** a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}u_n$$

et par la condition initiale $u_1 = a$.

a) (v_n) est la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$v_n = 13u_n - 4.$$

Démontrez que (v_n) est une suite géométrique et déterminez sa raison k.
Exprimez v_n en fonction de n et a.

b) Prouvez que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

c) Déterminez la limite de la suite (u_n).

2. Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement « le professeur oublie ses clés le jour n » et $\overline{E}_n$ l'événement contraire de E_n.
p_n est la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E}_n$. On pose $p_1 = a$, la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour. On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :
• si le jour n, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant $n+1$ est $\frac{1}{10}$.
• si le jour n, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est $\frac{4}{10}$.

a) Démontrez que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n.$$

☞ **Aide.** Calculez d'abord les probabilités conditionnelles $p_{E_n}(E_{n+1})$ et $p_{\overline{E}_n}(E_{n+1})$.

b) Déduisez-en l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

c) À l'aide des résultats de la question **1.**, donnez l'expression de p_n en fonction de a et n.
La limite p de la suite (p_n) dépend-elle de la condition initiale a ?

73 • On dispose de n urnes U_1, U_2, ..., U_n telles que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, l'urne U_k contienne une boule blanche et k boules noires. On prélève successivement, au hasard, une boule de chaque urne.

1. a) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir « que des boules blanches » ?

b) Pour quelles valeurs de n, a-t-on $p_n \leqslant 10^{-3}$?

2. a) Quelle est la probabilité q_n d'obtenir « au moins une boule blanche » ?

b) Quelle est la limite de q_n si n tend vers $+\infty$?

74 • Laura débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie.
On admet que :
• si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est 0,6 ;
• si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est 0,7.
Pour tout entier naturel n ($n \geqslant 1$) on note :
G_n l'événement « Laura gagne la n-ième partie » et $\overline{G_n}$ son événement contraire.

1. Calculez les probabilités $p(G_2)$ et $p(\overline{G_2})$.

2. On pose $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(\overline{G_n})$.
Prouvez que pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3y_n \\ y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}7y_n \end{cases}$$

3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = x_n + y_n \quad \text{et} \quad w_n = 4x_n - 3y_n.$$

a) Prouvez que la suite (v_n) est constante.

b) Prouvez que la suite (w_n) est géométrique et exprimez w_n en fonction de n.

4. Exprimez x_n en fonction de n puis prouvez que la suite (x_n) converge vers un réel que vous préciserez. Quelle interprétation pouvez-vous faire ?

75 • BAC Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. On répète n $(n \geqslant 2)$ fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculez les probabilités p_2, p_3, p_4.

2. On considère les événements suivants :

B_n « on tire une boule blanche lors du n-ième tirage » ;

U_n « on tire une unique boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages ».

a) Calculez la probabilité de l'événement B_n.

b) Exprimez la probabilité de U_n en fonction de n.

c) Déduisez-en l'expression de p_n et vérifiez que :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

a) Démontrez que pour tout entier n, $n \geqslant 2$:

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

76 Quel arbre ?

Un club municipal propose à ses trois cents adhérents plusieurs activités sportives : aviron (A), natation (N) et triathlon (T). Chaque membre s'inscrit pour une et une seule activité.

La répartition des adhérents suivant le sexe et l'activité est donnée ci-contre.

	A	N	T
F	18	90	12
G	30	126	24

On choisit un adhérent au hasard.

Représentez la situation par un arbre pondéré.

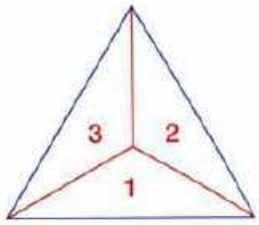
77 • **Chez le docteur**

Trois médecins exercent dans un village. Quatre habitants malades appellent un médecin au téléphone après avoir choisi l'un d'eux au hasard dans l'annuaire. Une issue est une liste d'appels du type $(x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4)$ où x_i représente le médecin M_1, M_2 ou M_3 appelé par le i-ème malade.

On suppose les listes d'appels équiprobables.

L'appel d'exactement deux médecins est-il plus probable que celui de son événement contraire ?

78 • **Sur une cible triangulaire**



Une cible ayant la forme d'un triangle équilatéral est partagé en trois triangles isométriques qui définissent trois zones.

L'expérience consiste à envoyer successivement cinq fléchettes sur la cible. On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur ne rate jamais sa cible.

Quelle est la probabilité qu'une zone au moins ne soit jamais atteinte ?

79 : **La meilleure stratégie**

Une tombola se déroule une fois par semaine.

Sur cent billets, k $(k \leqslant 90)$ sont gagnants.

Chaque billet coûte 1 €. On dispose de 10 €.

Deux stratégies sont possibles :

- A : on achète dix billets en une seule fois ;
- B : on achète un billet à la fois pendant dix semaines.

Quelle est la meilleure stratégie pour obtenir au moins un billet gagnant ?

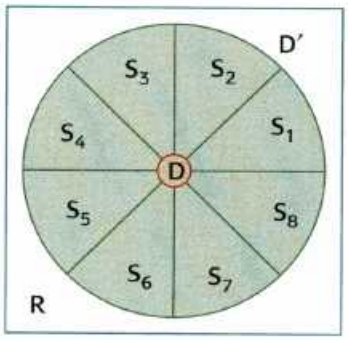
Problèmes

80 • BAC

Thèmes : *Probabilités. Variables aléatoires indépendantes. Répétition*

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les dix zones suivantes :

- un disque D de rayon 1 cm ;
- huit secteurs $S_1, S_2, ..., S_8$ de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm ;
- une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.



On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. a) Calculez la probabilité $p(D)$ que le point soit placé dans le disque D.

b) Quelle est la probabilité $p(S_1)$ que le point soit placé dans le secteur S_1 ?

2. À cette situation aléatoire, est associé le jeu suivant :

- un point placé dans la zone D fait gagner 10 euros ;
- un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros ;
- un point placé dans la zone R fait perdre quatre euros.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu.

a) Calculez la probabilité $p(R)$ que le point soit placé dans la zone R.

Calculez l'espérance de X.

b) On joue deux fois de suite, donc on a placé deux points de manière indépendante dans le carré.

Calculez la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

c) Soit n un entier ($n \geqslant 2$). On joue n fois de suite.

On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.

Calculez la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.

Quelle est la plus petite valeur de n telle que $p_n \geqslant 0{,}9$?

81 • BAC

Thèmes : *Probabilités. Logarithme. Optimisation*

Une proportion q d'une population est atteinte d'une maladie détectable par une analyse de sang. La proportion $p = 1 - q$ est donc indemne.

On souhaite analyser le sang de chaque personne de la population afin de détecter les individus atteints par cette maladie.

On envisage deux méthodes :

A : une analyse individuelle ;

B : on mélange le sang de r personnes. Si l'analyse est négative, on arrête, et si elle est positive, on procède alors à une analyse individuelle des r personnes, ce qui au total, nécessitera donc $r+1$ analyses.

On veut déterminer en fonction de p la taille optimale des groupes de r personnes.

1. On note X_r le nombre d'analyses nécessaires pour un groupe de r personnes avec la méthode **B**.

Prouvez que $E(X_r) = r + 1 - rp^r$.

2. Prouvez que l'économie (algébrique) réalisée en regroupant les gens est, par personne, $p^r - \frac{1}{r}$.

Le problème qui nous occupe peut alors s'énoncer ainsi : déterminer r de telle sorte que $p^r - \frac{1}{r}$ soit positif et maximal.

3. a) Prouvez que lorsque p est dans l'intervalle [0 ; 1], la proposition « $p^x - \frac{1}{x} > 0$ et $x > 0$ » équivaut à la proposition :

$$\text{« } \frac{\ln x}{x} > \ln\left(\frac{1}{p}\right) \text{ ».}$$

☞ **Note.** Voir la partie ***Types de problèmes et raisonnements***, **Fiche G, page 455.**

b) Étudiez les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, puis prouvez que si $p < 0{,}69$, il n'y a pas de solution, et que si $p \geqslant 0{,}7$, l'ensemble des solutions est un intervalle borné I.

4. Déterminez, par un calcul approché, l'intervalle I et l'entier r maximal lorsque $p = 0{,}9$, puis lorsque $p = 0{,}99$.

(D'après *Les certitudes du hasard*, A. Engel. Aléas Éditeur)

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

82 • Une urne contient 3 boules blanches et deux noires. On tire successivement au hasard trois boules suivant le protocole : on remet la boule si elle est noire, on ne la remet pas si elle est blanche.

1. La probabilité d'obtenir aucune boule blanche est :

a $1-(0{,}6)^3$. **b** $(0{,}4)^3$. **c** $(0{,}6)^3$.

2. La probabilité d'obtenir trois boules blanches est :

a $(0{,}6)^3$. **b** 0,1. **c** 0,15.

3. La probabilité d'obtenir exactement une boule blanche est :

a $3\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2$. **b** $\frac{27}{125}$. **c** 0,366.

4. La probabilité d'obtenir au plus une boule blanche est :

a $1-(0{,}4)^3$. **b** $\frac{183}{500}$. **c** 0,43.

5. La variable aléatoire X qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches sorties est telle que :

a $E(X)=\frac{8}{5}$. **b** $0{,}75 < \sigma(X) < 0{,}76$. **c** $\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

83 **1.** Deux événements incompatibles sont indépendants.

2. Deux événements contraires sont indépendants.

3. Si l'événement B tel que $p(B) \neq 0$ est contenu dans l'événement A, alors $p_B(A) = 1$.

4. Si A et B sont deux événements tels que $p(B) = 1 - p(A)$, alors $B = \overline{A}$.

5. Si A et B sont deux événements tels que $p_{\overline{B}}(A) = 0{,}4$, $p_B(A) = 0{,}3$ et $p(B) = 0{,}2$ alors $p(A \cup B) = 0{,}52$.

6. On lance deux fois de suite un dé parfait. Si la somme est 10 alors la probabilité d'un « double 5 » est $\frac{1}{3}$.

7. On lance 10 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'avoir au moins une fois pile dépasse 0,999.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

84 • **1.** A et B sont deux événements de probabilités non nulles d'un univers Ω.

Pré-requis. On suppose A et B indépendants, c'est-à-dire que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Démonstration de cours

a) Prouvez que $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A) \times p(B)$.

b) Déduisez-en que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2. Application

On lance trois fois de suite un dé cubique équilibré. On note A et B les événements suivants :

A « obtenir au moins un 6 »,

B « au moins deux des nombres affichés sont identiques ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

11 Lois de probabilités

1837

Tous les fondateurs historiques du calcul des probabilités (Cardan, Pascal, Fermat, Bernouilli) ont élaboré ce calcul pour des expériences dont les issues sont dénombrables. Par la suite, l'intérêt s'est porté sur des variables aléatoires qui peuvent prendre *a priori* une infinité de valeurs ou même toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

La création de modèles théoriques adaptés à ces nouvelles situations est abordée dès le XVIII^{e} siècle, mais c'est la théorie de l'intégrale, surtout celle de Lebesgue présentée dans sa thèse en 1902, qui permet leur développement sur des bases logiques solides.

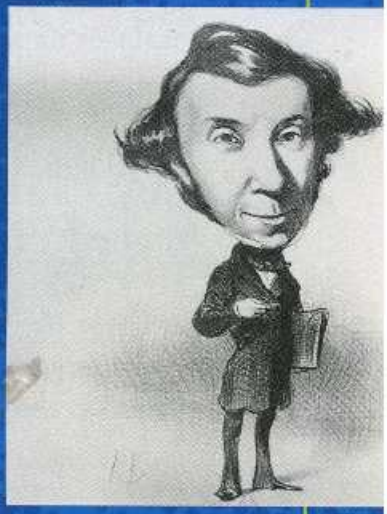
Ces nouvelles lois du calcul des probabilités ont des applications dans de nombreux domaines, scientifiques ou autres. Ainsi la loi de Poisson, introduite en 1837, dans son livre *Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, est par exemple une loi bien adaptée à l'étude du nombre de particules α émises par un matériau radioactif pendant un certain laps de temps.

Siméon Denis Poisson
1781 – 1840

À LA MÊME ÉPOQUE

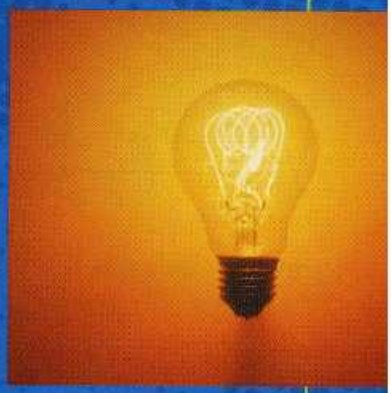
PHILOSOPHIE

De la démocratie en Amérique (1835 – 1840) de Tocqueville est le texte fondateur du libéralisme politique. Selon lui, de la démocratie peut découler un danger : celui de voir l'État brimer la liberté au nom de la volonté populaire.



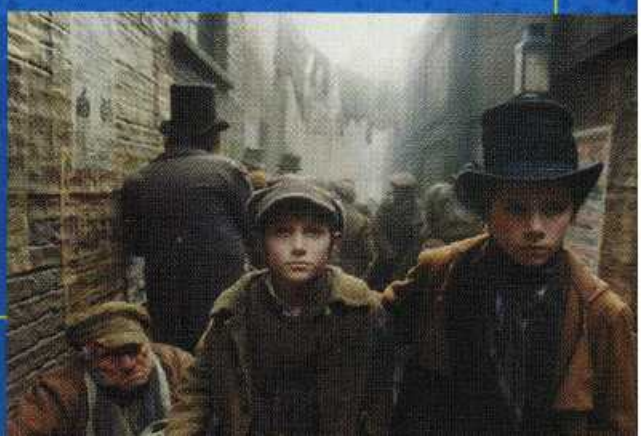
SCIENCES

En 1841, J. P. Joule énonce la loi sur le dégagement de chaleur produit par le passage d'un courant électrique dans un conducteur (effet Joule).



LITTÉRATURE

Charles Dickens dépeint avec sévérité l'ère victorienne et la révolution industrielle. Son jeune héros *Oliver Twist* est contraint, dans son roman éponyme, de faire l'apprentissage d'une vie difficile.

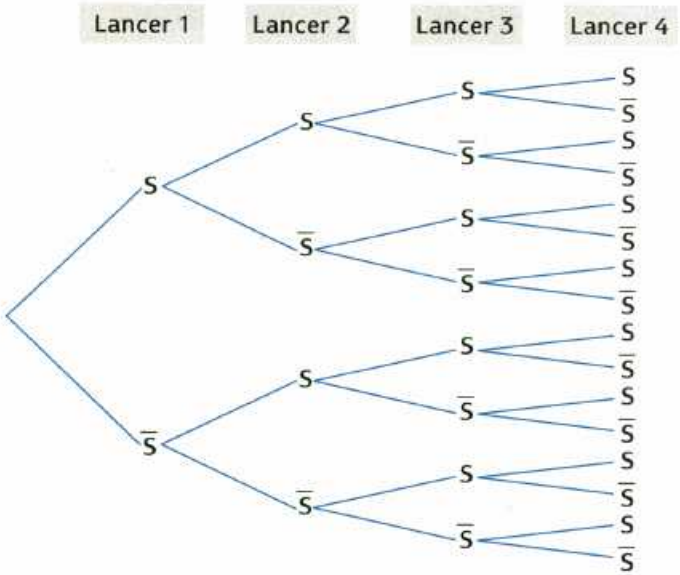


ACTIVITÉ 1 Lancers successifs d'un dé

• **Protocole de l'expérience.** On lance un dé parfait, quatre fois de suite et on s'intéresse au nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des quatre lancers.
Il s'agit donc de répéter quatre fois la même épreuve : lancer d'un dé. Pour cette épreuve, seules deux issues nous importent :
– « sortie du numéro 6 », appelé « succès », que nous noterons S,
– son événement contraire $\overline{S}$, appelé « échec ».
On suppose les lancers indépendants et l'expérience peut alors être représentée par un arbre pondéré dessiné ci-dessous.

• **Issues de l'expérience.** Une issue est une liste de quatre lettres prises dans l'ensemble $\{S ; \overline{S}\}$, par exemple $(S ; \overline{S} ; \overline{S} ; S)$, est représentée par un chemin.

• **Variable aléatoire.** On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de réalisations de S durant les quatre épreuves successives.



L'objectif de cette activité est de définir la loi de probabilité de X.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. Complétez l'arbre en indiquant les probabilités sur chacune des branches.

3. En utilisant l'arbre, répondez aux questions suivantes :

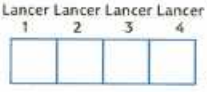
a) Calculez $P(X = 0)$ puis $P(X = 4)$.

b) Calculez $P(X = 1)$ puis $P(X = 3)$.

c) Calculez enfin $P(X = 2)$.

d) Dressez le tableau de la loi de X.

4. On se propose de retrouver ces résultats en utilisant les techniques de dénombrement.

Une issue est obtenue en remplissant les cases 

avec S ou $\overline{S}$.

a) Dénombrez à l'aide de combinaisons, les listes contenant aucun S, un seul S, deux S, trois S, quatre S.

b) Justifiez que chaque issue de l'événement « $X = k$ » $(0 \leqslant k \leqslant 4)$ a la même probabilité. Retrouvez alors la loi de X.

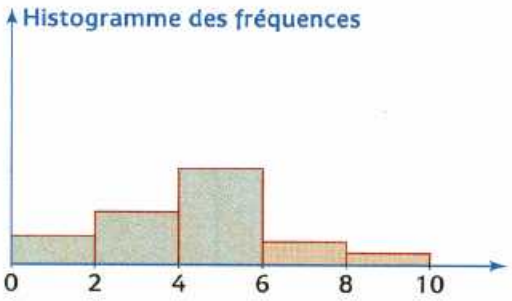
c) Vérifiez en utilisant la formule du binôme que $\sum_{k=0}^{k=4} P(X = k) = 1$.

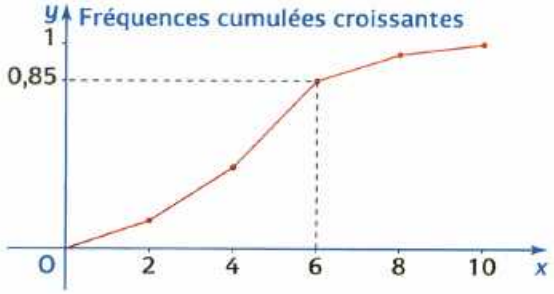
ACTIVITÉ 2 Du discret au continu

L'étude d'un caractère statistique dans une population a conduit au résultat suivant.

Classe	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Fréquence	0,15	0,25	0,45	0,10	0,05
Valeur supérieure	2	4	6	8	10
Fréquence cumulée croissante (f.c.c.)	0,15	0,40	0,85	0,95	1

On lit les cases colorées ainsi : 40 % de la population a un caractère inférieur à 4.
L'histogramme des fréquences et le polygone des f.c.c. sont donnés ci-dessous.





Choisissons **au hasard** un individu dans cette population, notons X la valeur de son caractère. Les valeurs possibles de X appartiennent à l'intervalle [0 ; 10[.
Les fréquences statistiques s'interprètent en termes de probabilités. Ainsi « 40 % de la population possède un caractère inférieur à 4 » se traduira par $P(X < 4) = 0{,}4$.

1. Quelle est la probabilité que la valeur de X soit inférieure à 6 ?
Cette probabilité correspond à la fréquence des individus ayant une valeur du caractère inférieure à 6. La courbe des f.c.c. donne la valeur 0,85. C'est aussi l'aire de la partie de l'histogramme à gauche de la droite d'équation $x = 6$ (l'aire totale étant prise pour unité).

2. Quelle est la probabilité que X soit compris entre 3 et 5 ?

3. Quelle est la probabilité que X soit supérieur à 7 ?

De manière générale, si x est un réel de l'intervalle [0 ; 10[, on peut déterminer la probabilité $P(X < x)$. Cette probabilité est la valeur de l'aire de la partie de l'histogramme située avant la valeur x (l'aire totale étant 1 unité), ou encore la valeur de la fréquence cumulée croissante correspondant à x.
Si on restreint l'histogramme à sa partie supérieure, on obtient la représentation d'une fonction f en escalier, et par définition de l'intégrale de f sur [0 ; x] :
$P(X < x) = \int_0^x f(t)\,dt$. La fonction f est appelée **densité de probabilité de X**.

1 Loi binomiale

1.1 Épreuve de Bernoulli. Expérience de Bernoulli

● Si lors d'une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement, on dit que cette expérience est une **épreuve de Bernoulli**.

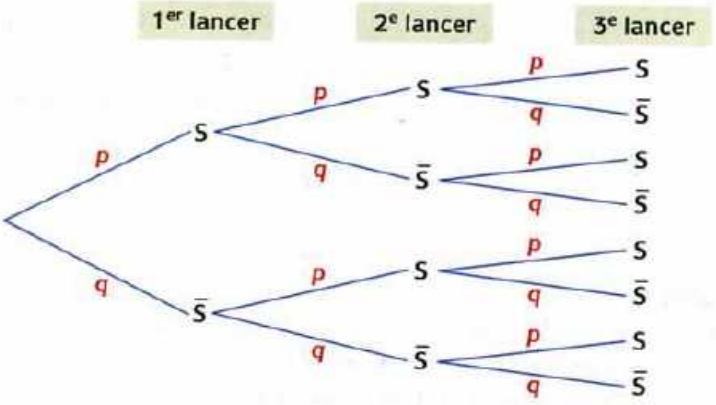
EXEMPLE On lance un dé et on s'intéresse à la sortie du numéro 6.
On considère que l'épreuve de Bernoulli a deux issues, en général notées S et $\overline{S}$, S est l'événement « sortie du 6 » (succès), $\overline{S}$ son événement contraire. La probabilité de S est notée p, celle de $\overline{S}$ est notée q, et donc $q = 1 - p$.

● Une **expérience de Bernoulli** d'ordre n est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (chapitre 10, p. 262).

1.2 Exemple d'une loi binomiale

Note
Les conditions d'indépendance font que la probabilité d'obtenir S lors de n'importe qu'elle étape est p (de même q pour $\overline{S}$).

Expérience de Bernoulli : on lance un dé trois fois de suite et, pour chaque lancer, on s'intéresse à l'événement « sortie du 6 ».



issue	probabilité
SSS	p^3
SS$\overline{S}$	p^2q
S$\overline{S}$S	p^2q
S$\overline{S}\,\overline{S}$	pq^2
$\overline{S}$SS	p^2q
$\overline{S}$S$\overline{S}$	pq^2
$\overline{S}\,\overline{S}$S	pq^2
$\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$	q^3

● Une issue de cette expérience est une liste ou un « mot » formée de trois lettres prises dans l'ensemble $\{S ; \overline{S}\}$. Les probabilités de chacune, obtenues d'après la règle 2 sur les arbres pondérés (chapitre 10, p. 256) sont indiquées.

● Notons X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès au terme des 3 lancers, donc le nombre de lettres S dans le mot qui désigne l'issue. L'événement «X = 2», par exemple, est l'événement « obtenir deux 6 », c'est donc l'événement $\{SS\overline{S} ; S\overline{S}S ; \overline{S}SS\}$. Ces trois issues ont chacune la probabilité p^2q, car chaque mot qui les désigne contient 2 fois S (et une fois $\overline{S}$). Donc, $P(X = 2) = 3 \times p^2q$. De même, on voit que $P(X = 0) = q^3$, $P(X = 1) = 3pq^2$, $P(X = 3) = p^3$. D'où la loi de X :

Note
Par la formule du binôme :
$(p + q)^3 = p^3 + 3pq^2 + 3p^2q + q^3$.

nombre de succès	0	1	2	3
probabilité	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

La loi de X est appelée **loi binomiale de paramètres 3 et p**.
Remarque. Le nombre d'issues de « X = 2 » est 3, car les mots constitués de deux lettres S et d'une lettre $\overline{S}$ s'obtiennent en plaçant dans 3 cases numérotées 2 lettres S dans deux cases choisies. Le nombre de choix possibles est donc $\binom{3}{2} = 3$.

COMPRENDRE

Loi de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli, notons Y la variable aléatoire définie par $Y(S) = 1$, $Y(\bar{S}) = 0$.
La loi de Y est appelée loi de Bernoulli.

k	0	1
$P(Y = k)$	q	p

Alors espérance et variance sont :
- $E(Y) = 0 \times q + 1 \times p = \boldsymbol{p}$;
- $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$ d'où $V(Y) = p - p^2 = p(1-p) = \boldsymbol{pq}$.

Modèles d'expériences de Bernoulli

Exemples.
- Lancers successifs d'un dé (ou d'une pièce).

➜ EXERCICE RÉSOLU 2

- Tirages successifs avec remise dans une urne.

➜ EXERCICE RÉSOLU 1

- Lancer simultané de n dés (ou pièces).

On admet que le résultat obtenu lors du lancer simultané peut être obtenu par répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, l'épreuve étant ici, le lancer d'un seul dé.

VOCABULAIRE

Épreuve : essai pour éprouver la qualité d'une chose.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 — Calculer des probabilités lors de tirages avec remise

ÉNONCÉ

Une urne contient cent boules : 10 blanches, 30 vertes, 40 rouges, 20 jaunes. On effectue trois tirages successifs, au hasard, avec remise. Lors d'un tirage, on appelle S l'événement « tirer une boule blanche ».

1) On note A l'événement « obtenir une seule boule blanche lors des trois tirages ». Calculez $P(A)$.

2) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès au cours des trois tirages. Donnez la loi de X.

SOLUTION COMMENTÉE

1) Le modèle théorique de l'expérience est une expérience de Bernoulli d'ordre 3 dont chaque épreuve est le tirage d'une boule. Pour chaque épreuve, le succès S est « tirage d'une boule blanche » avec pour probabilité 0,1 car les tirages au hasard sont équiprobables (il y a 10 boules blanches parmi 100). Donc $p = 0{,}1$ et $q = 1 - p = 0{,}9$.

Les issues de A sont $S\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}S$ avec $\overset{0,1}{\frown} S \overset{0,9}{\frown} \bar{S} \overset{0,9}{\frown} \bar{S}$, $\overset{0,9}{\frown} \bar{S} \overset{0,1}{\frown} S \overset{0,9}{\frown} \bar{S}$, $\overset{0,9}{\frown} \bar{S} \overset{0,9}{\frown} \bar{S} \overset{0,1}{\frown} S$.

Toutes ont la même probabilité $0{,}1 \times (0{,}9)^2$, d'où $P(A) = 3 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2$.

2) X est la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de lettres S dans le mot qui désigne l'issue. X prend donc les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3.

Remarquons que A n'est autre que l'événement $(X = 1)$.

De même, $P(X = 0) = 0{,}9^3$, $P(X = 2) = 3 \times 0{,}1^2 \times 0{,}9$, $P(X = 3) = 0{,}1^3$.

D'où la loi de X :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,729	0,243	0,027	0,001

➜ EXERCICE 1

EXERCICE RÉSOLU 2 — Utiliser les propriétés des combinaisons

ÉNONCÉ

On lance huit fois une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de « Face » au cours des huit lancers.

Prouvez que pour tout entier k $(0 \leqslant k \leqslant 8)$, $P(X = k) = P(X = 8 - k)$.

SOLUTION COMMENTÉE

Le modèle théorique de l'expérience est une expérience de Bernoulli d'ordre 8, dont chaque épreuve est le lancer d'une pièce. Pour chaque épreuve, le succès S est « sortie de Face » avec la probabilité 0,5.

Ainsi $p = P(S) = 0{,}5$ et $q = P(\bar{S}) = 0{,}5$.

- L'événement $(X = k)$ est l'ensemble des mots de huit lettres avec k lettres S et $8 - k$ lettres $\bar{S}$, tous de probabilités $0{,}5^k \times 0{,}5^{8-k} = 0{,}5^8$.

Ainsi les issues de $(X = k)$ s'obtiennent en choisissant, parmi 8 cases numérotées, k cases pour placer S. Leur nombre est donc $\binom{8}{k}$.

D'où $P(X = k) = \binom{8}{k} \times 0{,}5^8$.

- De même, $P(X = 8 - k) = \binom{8}{8-k} \times 0{,}5^8$. Or $\binom{8}{k} = \binom{8}{8-k}$, d'où l'égalité.

➜ EXERCICE 6

1 Loi binomiale (suite)

1.3 Loi binomiale de paramètres n et p

■ Cas d'une expérience de Bernoulli d'ordre n

● Rappelons qu'une telle expérience est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Chacune de ces épreuves a pour seules issues S et $\overline{S}$, la probabilité de S est notée p, celle de $\overline{S}$ est notée q, et $q = 1 - p$.

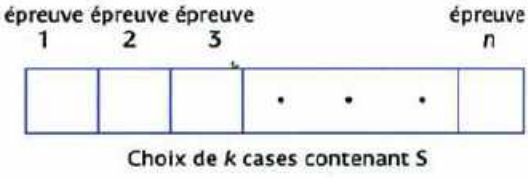
● Notons **X la variable aléatoire** qui donne le nombre de succès S au terme des n épreuves. X prend les valeurs $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$.

THÉORÈME 1

Dans une telle expérience, la loi de X est définie par $\mathbf{P(X = k)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$.
Ainsi la probabilité d'obtenir k succès au terme des n épreuves est égale à :

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Démonstration.
Une issue de l'expérience est un « mot » de n lettres prises dans l'ensemble $\{S ; \overline{S}\}$.
Le nombre de succès au terme des n épreuves est donc le nombre de lettres S écrites dans le mot qui désigne l'issue.
Calculons la probabilité de l'événement « $X = k$ » qui est l'événement « obtenir k succès ».
Les issues qui réalisent cet événement sont les mots écrits avec k lettres S et $n - k$ lettres $\overline{S}$. Pour les obtenir, on peut numéroter n cases et choisir parmi elles k cases pour placer la lettre S (et mettre dans les autres $\overline{S}$).



Il existe donc $\binom{n}{k}$ issues dans l'événement $(X = k)$.
Or la probabilité de chacune de ces issues est $p^k q^{n-k}$. En effet, sur l'arbre pondéré qui décrit l'expérience, le chemin qui aboutit à chacune de ces issues est fait de k branches qui portent la probabilité p et de $n - k$ branches qui portent la probabilité q. Donc la probabilité de chacune de ces issues est $p^k q^{n-k}$. (règle 2, chapitre 10, p. 256).
Donc, $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k q^{n-k}$.

On dit, en accord avec la définition qui suit, que **la loi de X est une loi binomiale de paramètres n et p.**

■ Cas général

DÉFINITION 1

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :
● X prend les valeurs 0, 1, ..., n ;
● et, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbf{P(X = k)} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Note
Cette loi est parfois notée $\mathcal{B}(n ; p)$.

On démontre et nous l'admettrons que l'espérance mathématique et la variance de X sont :

$$\mathbf{E(X) = np} \quad \text{et} \quad \mathbf{V(X) = npq}.$$

Remarque. La loi de Bernoulli qui est la loi de la variable aléatoire associée à une épreuve (voir *Comprendre*, page suivante) est une loi binomiale de paramètres 1 et p.

COMPRENDRE

Pourquoi « loi binomiale » ?

Si la loi de la variable aléatoire X est une loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout k de 0 à n,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Vérifions que la somme de ces probabilités est bien égale à 1.

D'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (q+p)^n = 1^n = 1.$$

L'appellation « loi binomiale » se trouve ainsi justifiée.

E(X) = np

- Dans le cas d'une épreuve de Bernoulli, l'espérance de la loi qui donne le nombre de succès est p.
(Voir *Comprendre*, page 289)
- Dans le cas d'une expérience de Bernoulli d'ordre n, qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, on peut concevoir que cette espérance est np, ce que les calculs confirmeront.

➜ EXERCICE 42 p. 308

Utilisation de la loi binomiale

On rencontre cette loi **chaque fois** qu'il s'agit de déterminer la probabilité de réaliser k fois un événement S dans une répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes, caractérisées chacune par deux issues de probabilités p et q telles que $p + q = 1$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 3

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Utiliser la loi binomiale

ÉNONCÉ

Une urne contient dix boules indiscernables, trois blanches et sept rouges. On effectue quatre tirages successifs avec remise.
Quelle est la probabilité de chacun des événements :
A « tirer deux boules blanches » ?
B « tirer une seule boule blanche » ?

SOLUTION COMMENTÉE

On peut prendre pour modèle théorique une expérience de Bernoulli d'ordre 4 dont chaque épreuve est le tirage d'une boule. Pour chaque épreuve, le succès S est « tirage d'une boule blanche » avec la probabilité $p = 0{,}3$.
La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}3$.

- L'événement A est l'événement « $X = 2$ », donc, d'après le théorème 1,
$P(X = 2) = \binom{4}{2} p^2(1-p)^2$ donc $P(A) = 6 \times (0{,}3)^2 \times (0{,}7)^2 = 0{,}264\,6$.
- L'événement B est l'événement « $X = 1$ », donc :

$$P(B) = \binom{4}{1} p^1(1-p)^3 = 4 \times 0{,}3 \times (0{,}7)^3 = 0{,}411\,6.$$

➜ EXERCICES 2 et 4

EXERCICE RÉSOLU 4 Calculer une probabilité lors du lancer simultané de pièces

ÉNONCÉ

On lance simultanément six pièces équilibrées. On note A l'événement « obtenir au moins deux Pile ».
Calculez la probabilité de A.

SOLUTION COMMENTÉE

Le modèle théorique est celui d'une expérience de Bernoulli. Les résultats sont les mêmes que ceux obtenus lors de six lancers successifs et indépendants d'une même pièce.
Ici, l'épreuve est le lancer d'une pièce équilibrée avec pour succès S « obtenir Pile », de probabilité $p = 0{,}5$.
La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès durant les six épreuves suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}5$.

Remarque. Quand la définition d'un événement A contient la locution « au moins », il est très souvent préférable de calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$. Ici, $\overline{A}$ est l'événement « obtenir zéro Pile ou un Pile », soit $(X = 0)$ ou $(X = 1)$ (réunion de deux événements incompatibles).

Or $P(X = 0) = \binom{6}{0} 0{,}5^0 \times 0{,}5^6$ et $P(X = 1) = \binom{6}{1} 0{,}5^1 \times 0{,}5^5$

donc $P(\overline{A}) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}5^6 + 6 \times 0{,}5^6 = 7 \times 0{,}5^6$.

Ainsi $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, soit $P(A) = 1 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{57}{64}$.

➜ EXERCICES 5 et 10

2 Lois de probabilités continues. Généralités

2.1 Exemples

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$. On dit alors que X est **discrète**.
Cependant, il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non).

EXEMPLE 1 On tire sur une cible de 1 m de rayon, sans jamais la manquer. La variable aléatoire qui donne la distance du point d'impact au centre prend toutes les valeurs de l'intervalle [0 ; 1].

EXEMPLE 2 La durée de vie d'un transistor, le temps d'attente à un guichet sont des variables aléatoires non discrètes.

Il n'est plus possible alors de définir la loi de X en énumérant les probabilités des événements $(X = x_i)$, puisque dans ce cas, ces événements sont en nombre infini. Une autre approche est alors nécessaire.
Approche qui tiendra compte des questions que l'on peut se poser. Car avec une variable aléatoire non discrète, on s'intéresse à des événements du type « X ***prend des valeurs dans un intervalle*** J », événement que, par abus de notation car X n'est pas un nombre, l'on note $(X \in J)$.

Note
L'écriture $(X \in J)$ est une notation abusive car X n'est pas un nombre. Elle prolonge la notation $(X = a)$ déjà utilisée pour des variables discrètes.

EXEMPLE 3 Si X est la variable qui mesure la durée de vie d'un transistor, savoir si X prend la valeur a = 731 jours 12 h 53 mn 45 s par exemple n'a aucun intérêt (nous verrons d'ailleurs que $P(X = a) = 0$). En revanche, savoir si X prend des valeurs entre 300 et 400 jours peut être intéressant.

2.2 Variable définie par une fonction de densité

Nous dirons qu'une **variable aléatoire X** est **continue** (ou **absolument continue**) s'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en quelques points, **positive**, et telle que, quel que soit l'intervalle I de $\mathbb{R}$, $P(X \in I)$ est égale à l'intégrale de f sur I, notée $\int_I f(x)\,dx$.

La fonction f est appelée **densité de probabilité** de la variable aléatoire X.

Conséquences.

- Si $I = [a ; b]$, $\mathbf{P(X \in I) = \int_a^b f(x)\,dx}$.

- Lorsque $a = b$, $I = \{a\}$, $P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$. **La probabilité que X prenne une valeur isolée fixe est nulle.** D'où $\mathbf{P(X < a) = P(X \leqslant a)}$. En effet, $(X \leqslant a)$ est la réunion des événements incompatibles $(X < a)$ et $(X = a)$, donc $P(X \leqslant a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a)$ puisque $P(X = a) = 0$.

- Puisque $(X \in \mathbb{R})$ est l'événement certain, $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ et donc :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$$

Note
- Lorsque $I = [a ; b]$, l'événement $(X \in I)$ s'écrit aussi $(a \leqslant X \leqslant b)$.
- L'événement $(X > a)$ est l'événement $(X \in]a ; +\infty[)$. De même, $(X < a)$ est $(X \in]-\infty ; a[)$.

COMPRENDRE

Signification de $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

Cette écriture signifie que la fonction $b \mapsto \int_0^b f(x)dx$ a une limite ℓ en $+\infty$, que la fonction $a \mapsto \int_a^0 f(x)dx$ a une limite ℓ' en $-\infty$ et que $\ell + \ell' = 1$.
Il en résulte que lorsque f est une fonction de densité $\int_J f(x)dx$ est bien définie que J soit borné ou non.

Interprétation de P(X ∈ I)

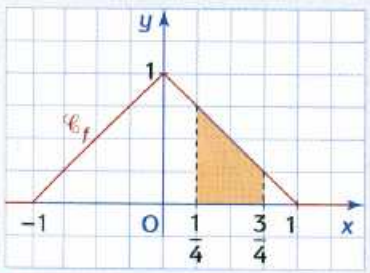
Exemple.
La fonction f représentée ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}$, positive et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.
En effet, f est nulle en dehors de l'intervalle $[-1 ; 1]$, donc :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (1+x)dx + \int_{0}^{1} (1-x)dx = 1.$$

Ainsi f définit une densité de probabilité.
Si X est une variable aléatoire de densité f alors :

$$P\left(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (1-x)dx = \frac{1}{4}.$$

Géométriquement, cette probabilité est l'aire du trapèze coloré.



➔ EXERCICE RÉSOLU 6

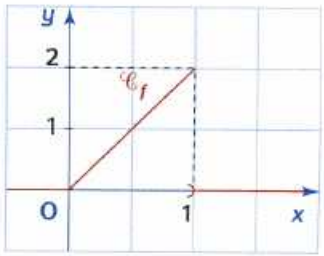
SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Calculer des probabilités

ÉNONCÉ

On tire au hasard sur une cible de rayon 1 m, sans jamais la manquer.
X est la variable aléatoire qui donne la distance de l'impact au centre.
On admet que X a pour densité, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x$ lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) = 0$ sinon.
1) Calculez $P(X \leqslant 0{,}5)$, $P(X > 0{,}5)$, $P(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.
2) Vérifiez que si $0 \leqslant a < b < 1$, alors $P(a \leqslant X \leqslant b)$ est égale au rapport de l'aire de la couronne, définie par a et b, à celle de la cible.

SOLUTION COMMENTÉE



1) La fonction f est représentée ci-contre.
Posons $J =]-\infty ; 0{,}5]$. Par définition,

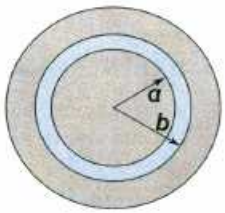
$$P(X \leqslant 0{,}5) = \int_J f(x)\,dx.$$

Or f est nulle sur $]-\infty ; 0[$, donc :

$$P(X \leqslant 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} 2x\,dx = 0{,}25.$$

Les événements $(X > 0{,}5)$ et $(X \leqslant 0{,}5)$ sont contraires, donc
$P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leqslant 0{,}5) = 0{,}75$.
Enfin,

$$P(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = \int_{0{,}25}^{0{,}75} 2x\,dx = [x^2]_{0{,}25}^{0{,}75} = 0{,}5.$$



2) Par définition, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2$

et $\dfrac{\text{aire(couronne)}}{\text{aire(cible)}} = \dfrac{\pi b^2 - \pi a^2}{\pi} = b^2 - a^2$,

donc $P(a \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{\text{aire(couronne)}}{\text{aire(cible)}}$.

Commentaire. On trouve le résultat du modèle théorique (conforme à l'intuition) qui définit la probabilité comme le rapport des aires.

➔ EXERCICE 13

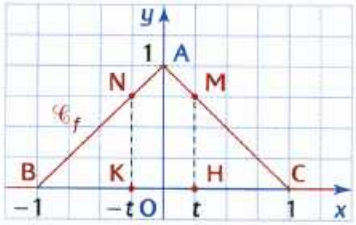
EXERCICE RÉSOLU 6 Calculer des probabilités

ÉNONCÉ

On considère une variable aléatoire X de densité f où f est définie dans l'exemple ci-contre (voir *Comprendre*).
Utilisez la courbe de f pour prouver que, pour tout t de $[0 ; 1]$,

$$P(X \leqslant -t) = 1 - P(X \leqslant t).$$

SOLUTION COMMENTÉE



Les probabilités sont des intégrales que l'on peut ici interpréter géométriquement comme des aires.
$P(X \leqslant -t) = \text{aire(BKN)}$,
$P(X \geqslant t) = \text{aire(CHM)}$.
Or les triangles BKN et CHM sont symétriques par rapport à l'axe (Oy) donc ces aires sont égales, d'où $P(X \leqslant -t) = P(X \geqslant t) = 1 - P(X \leqslant t)$.

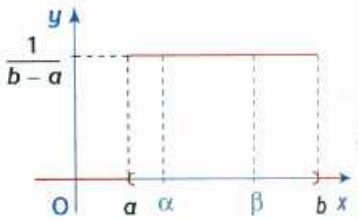
➔ EXERCICE 15

3 Deux lois particulières

3.1 Loi uniforme

DÉFINITION 2

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a\,;b]$ $(a<b)$ lorsque sa densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) = 0$ pour tout x non élément de $[a\,;b]$.



● Vérifions que f est une densité de probabilité.
f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a et b et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = 1.$$

● Précisons pour tout sous-intervalle $J = [\alpha\,;\beta]$ la probabilité $P(X \in J)$:

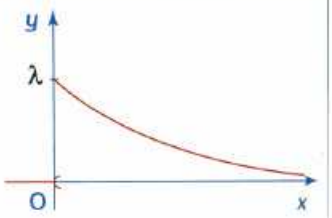
$$P(X \in J) = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}.$$

3.2 Loi exponentielle

DÉFINITION 3

Une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de **paramètre** le réel λ $(\lambda > 0)$ lorsque sa densité est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$



● On peut vérifier que f est bien une densité de probabilité : f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, f est positive. Enfin, prouvons que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

f est nulle sur $]-\infty\,;0[$ donc en posant $I = [0\,;+\infty[$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$ et, sous réserve d'existence de la limite, $\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Or $\int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = [-e^{-\lambda x}]_0^b = 1 - e^{-\lambda b}$ et $\lim\limits_{b\to+\infty}(1-e^{-\lambda b}) = 1$ donc $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Note
On peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges, puisque $P(X \leqslant a) = P(X < a)$, etc.

● Précisons les probabilités $P(X \in J)$ où J est un sous-intervalle de $[0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = [-e^{-\lambda x}]_0^a$ d'où :

$$\boxed{P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}}.$$

De plus, $(X > a)$ et $(X \leqslant a)$ sont des événements contraires donc :

$$\boxed{P(X > a) = e^{-\lambda a}}.$$

Enfin si $J = [a\,;b]$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ d'où :

$$\boxed{P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}.$$

COMPRENDRE

Loi uniforme

• Si J et K sont deux sous-intervalles de I de même longueur, alors, d'après la formule du § **3.1** :

$$P(X \in J) = P(X \in K).$$

D'où le nom de loi uniforme.

• La probabilité $P(X \in J)$ est définie comme le rapport des longueurs de J et I.

D'où l'analogie avec la formule

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

vue dans le cas d'équiprobabilité des issues en nombre fini.

La loi uniforme sert à modéliser le choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

➜ EXERCICE RÉSOLU 7

Loi exponentielle

Dans la pratique, on rencontre souvent la loi exponentielle lorsqu'il s'agit de représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.

Par exemple, le temps qui nous sépare d'un prochain tremblement de terre ...

➜ EXERCICE RÉSOLU 8

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Utiliser la loi uniforme

ÉNONCÉ

À partir de 7 heures, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt A.
Un usager se présente en A entre 7 h et 7 h 30.
On fait l'hypothèse que la durée de 7 h à l'heure de son arrivée en A est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 30].
Quelle est la probabilité qu'il attende le prochain bus :
1) moins de cinq minutes ?
2) plus de dix minutes ?

SOLUTION COMMENTÉE

Notons X le temps écoulé, en minutes, entre 7 h et l'heure d'arrivée de l'usager.
Par hypothèse, X suit une loi uniforme sur [0 ; 30].

1) Notons E l'événement « l'usager attend moins de cinq minutes ».
E signifie qu'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15, ou entre 7 h 25 et 7 h 30.
Ainsi E est la réunion des événements $(10 < X < 15)$ et $(25 < X < 30)$, qui sont incompatibles. Donc $P(E) = P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30)$.

$$\text{Or } P(10 < X < 15) = \frac{\text{longueur de }]10\,;\,15[}{\text{longueur de } [0\,;\,30]} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$\text{et } P(25 < X < 30) = \frac{1}{6} \text{ donc } P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

2) Notons F l'événement « l'usager attend plus de dix minutes ».
F signifie qu'il arrive entre 7 h et 7 h 05 ou entre 7 h 15 et 7 h 20.

$$\text{D'où } P(F) = P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20) \text{ soit } P(F) = \frac{1}{3}.$$

Remarque. Le calcul détaillé est inutile puisque les intervalles utilisés ont la même longueur que ceux du **1)**.

➜ EXERCICE 18

EXERCICE RÉSOLU 8 Utiliser la loi exponentielle

ÉNONCÉ

La durée, en minutes, d'une conversation téléphonique est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$.
Vous arrivez à une cabine et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous. Quelle est la probabilité que vous attendiez :
1) plus de dix minutes ?
2) entre dix et vingt minutes ?

SOLUTION COMMENTÉE

Notons X la variable aléatoire qui désigne la durée de conversation de votre prédécesseur. X suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

1) L'événement « attendre plus de dix minutes » signifie $(X > 10)$.
D'après les résultats du § **3.2**, $P(X > 10) = e^{-0{,}1 \times 10} = e^{-1} \approx 0{,}368$.

2) « Attendre entre dix et vingt minutes » signifie $(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

$$\text{Or } P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \int_{10}^{20} 0{,}1e^{-0{,}1x}dx = [-e^{-0{,}1x}]_{10}^{20} = -e^{-2} + e^{-1}$$

d'où $P(10 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0{,}233$.

➜ EXERCICE 19

4 Variables sans mémoire

4.1 Exemple, définition

Prenons un exemple. Appelons X la variable aléatoire qui donne la durée de vie en années d'un composant électronique. *A priori*, X prend ses valeurs dans $[0 ; +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$, l'événement $(X \geqslant t)$ signifie que « la durée de vie dépasse t années ».

● On dit que la durée de vie est **sans mémoire** (ou **sans vieillissement**) lorsque la probabilité que le composant fonctionne encore h années supplémentaires, sachant qu'il fonctionne à l'instant t, **ne dépend pas de t**.

Note
Dans ce paragraphe, la probabilité de B sachant A, notée habituellement, $P_A(B)$ sera notée $P(B/A)$.

● Traduisons cette propriété $P(X \geqslant t+h/X \geqslant t)$ est indépendante de t (**H**).
En particulier, cette probabilité est aussi celle obtenue pour $t = 0$, $P(X \geqslant h/X \geqslant 0)$.

Par définition, $P(X \geqslant h/X \geqslant 0) = \dfrac{P((X \geqslant h) \cap (X \geqslant 0))}{P(X \geqslant 0)}$. Or l'événement $(X \geqslant 0)$ est certain donc $P(X \geqslant 0) = 1$ et l'événement $(X \geqslant h) \cap (X \geqslant 0)$ n'est autre que $(X \geqslant h)$ donc $P(X \geqslant h/X \geqslant 0) = P(X \geqslant h)$. Ainsi la proposition **(H)** se traduit par : pour tous $t \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, $P(X \geqslant t+h/X \geqslant t) = P(X \geqslant h)$.
Nous dirons par définition :

DÉFINITION 4

Une variable aléatoire positive X est **sans mémoire** (ou **sans vieillissement**) lorsque : pour tous $t \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$, $\mathbf{P(X \geqslant t+h/X \geqslant t) = P(X \geqslant h)}$ [1].

EXEMPLE Dans l'exemple ci-dessus, si X est sans mémoire, alors la probabilité que la durée de vie dépasse 10 ans, sachant que ce composant a déjà fonctionné 7 ans, est $P(X \geqslant 10/X \geqslant 7)$, soit d'après [1], avec $t = 7$ et $h = 3$,

$$P(X \geqslant 7+3/X \geqslant 7) = P(X \geqslant 3).$$

Le composant fonctionne sans mémoire des sept années passées.

4.2 Caractérisation des lois exponentielles

THÉORÈME 2

Une variable aléatoire X qui suit une **loi exponentielle** est **sans mémoire**. Réciproquement, si X est **sans mémoire**, alors sa loi est **exponentielle**.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 73

Démonstration. Prouvons que si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors elle est sans mémoire. Pour cela, vérifions l'égalité [1].

Pour tous réels positifs t et h, $P(X \geqslant t+h/X \geqslant t) = \dfrac{P((X \geqslant t+h) \cap (X \geqslant t))}{P(X \geqslant t)}$.

L'événement $(X \geqslant t+h) \cap (X \geqslant t)$ est l'événement $(X \geqslant t+h)$ et $(X \geqslant t)$, soit $(X \geqslant t+h)$ donc $P(X \geqslant t+h/X \geqslant t) = \dfrac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)}$. Or $P(X \geqslant t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(X \geqslant t) = e^{-\lambda t}$ (voir § **3.2**) donc $P(X \geqslant t+h/X \geqslant t) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)$. Ainsi X suit une loi sans mémoire. Nous admettrons la réciproque.

Note
Ainsi seules les variables aléatoires de type exponentiel sont sans mémoire.

■ Demi-vie

Note
Pour une loi exponentielle, la demi-vie est l'analogue de la médiane d'une série statistique.

Pour une variable aléatoire X qui suit une loi de durée de vie sans mémoire, donc exponentielle, on appelle **demi-vie** la durée τ telle que $\mathbf{P(X < \tau) = 0{,}5}$.

Si λ est le paramètre, $P(X < \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$, d'où $1 - e^{-\lambda\tau} = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $e^{-\lambda\tau} = \dfrac{1}{2}$ **donc** $\boldsymbol{\tau = \dfrac{\ln 2}{\lambda}}$.

DES idées À RETENIR

Épreuve de Bernoulli. C'est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues S et $\bar{S}$. On note $p = P(S)$ et $q = 1 - p = P(\bar{S})$.

Exemple. Lancer d'un dé équilibré.
S est l'événement « sortie du 6 » ; alors $p = \frac{1}{6}$ et $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

Expérience de Bernoulli d'ordre n. C'est n fois la **répétition** d'une **même épreuve** de Bernoulli, de façon **indépendante.**
On s'intéresse à la variable aléatoire X donnant le nombre de « succès » (réalisations de S). Alors X suit une **loi binomiale** $\mathcal{B}(n ; p)$.

Loi binomiale. Dire que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres n et p,** notée $\mathcal{B}(n ; p)$, signifie que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Son espérance mathématique est $E(X) = np$, sa variance $V(X) = npq$.

Exemple. Lancer d'un dé équilibré six fois de suite. S est l'événement « sortie du 6 » et X la variable aléatoire donnant le nombre de succès ; alors $P(X = 2) = \binom{6}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

Lois continues
Une variable aléatoire X suit une loi continue lorsque pour tout intervalle I, on a :

$$P(X \in I) = \int_I f(x)\,dx.$$

La fonction f, **positive, continue** sur I (sauf éventuellement en quelques points) et telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ est appelée **densité** de probabilité de X.

→ EXERCICE RÉSOLU 5

Loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$
Sa densité est **constante** sur I, nulle en dehors. Pour tout intervalle J contenu dans I,

$$P(X \in J) = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}.$$

Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Sa densité est définie par :
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Pour tout réel positif t, $P(X \in [0 ; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$.

Lorsqu'une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle,** cette **loi est sans vieillissement** (ou **sans mémoire**) et réciproquement.
Ainsi pour tous réels positifs t et h, $P(X \geqslant t + h / X \geqslant t) = P(X \geqslant h)$.

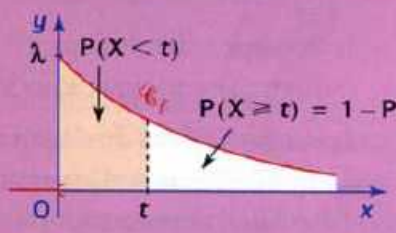
DES réflexes À AVOIR

Lorsqu'une épreuve à deux issues est **répétée** dans les **mêmes conditions** (d'où l'indépendance des épreuves), pensez à une expérience de Bernoulli.

→ EXERCICES RÉSOLUS 1 et 4

N'oubliez pas que, dans le cas d'une variable aléatoire X qui suit une loi continue, **la probabilité** de l'événement $(X \in I)$ est l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$, où f est la fonction de densité. Le calcul des probabilités est alors un calcul d'intégrales. Parfois cette probabilité peut s'interpréter graphiquement comme une aire.

Exemple. Cas d'une loi exponentielle.



→ EXERCICE RÉSOLU 6

TRAVAUX DIRIGÉS

TD 1 Tirages avec remise pour simplifier

Lorsqu'on effectue dans une urne, plusieurs tirages successifs sans remise, le nombre total de boules diminue d'une unité à chaque tirage. Dans le cas d'un tirage avec remise, le nombre total de boules reste inchangé. Si le nombre de boules dans l'urne est important, on conçoit alors, que la différence entre les deux types de tirage soit « faible ». Illustrons ceci par deux exemples.

1 Une urne contient trente boules, vingt noires et dix blanches

1. On tire trois boules au hasard **sans remise.**
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues.
Donnez la loi de probabilité de X.

2. On tire à présent dans l'urne initiale trois boules au hasard **avec remise.**
On note Y la variable aléatoire indiquant le nombre de boules blanches obtenues.

Justifiez que Y suit une loi $\mathcal{B}\left(3\,;\,\frac{1}{3}\right)$. Dressez le tableau de la loi de Y.

3. Calculez les différences $P(X = k) - P(Y = k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.

2 Une urne contient trois cents boules, deux cents noires et cent blanches

Reprenez les questions **1., 2., 3.** précédentes.

CONCLUSION Dans la pratique, lorsqu'une population est importante et que le nombre de tirages est « peu élevé » par rapport à l'effectif total, on assimile un tirage sans remise à un tirage avec remise. On peut alors utiliser la loi binomiale.

TD 2 Échantillonnage

Une boulangerie fabrique des pains de campagne qui, en théorie, pèsent 600 grammes. Des études statistiques donnent la répartition des pains produits suivant leurs masses :

classe	[575 ; 585[	[585 ; 595[	[595 ; 605[	[605 ; 615[	[615 ; 625[
fréquence	0,12	0,25	0,45	0,13	0,05

1. En supposant la répartition uniforme à l'intérieur de chaque classe, calculez l'espérance mathématique et la variance de cette série statistique.

2. Un contrôleur du Service de la répression des fraudes prélève, au hasard, dix pains de campagne afin d'en contrôler la masse. On admettra que la production journalière est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de dix pains.

a) Calculez la probabilité d'avoir dix pains dont la masse est entre 595 et 605 g.

b) Calculez la probabilité d'obtenir au plus deux pains de masse inférieure à 585 g.

CONCLUSION Dans une population de taille N, une proportion $p = \frac{n}{N}$ possède un caractère A.
La probabilité qu'un individu pris au hasard possède le caractère A est p. Si on choisit au hasard un second individu, la probabilité qu'il possède le caractère A n'est plus que $p' = \frac{n-1}{N-1}$ ou $p' = \frac{n}{N-1}$ selon le choix du premier individu. Émettre l'hypothèse que N est grand par rapport à n, implique que les nombres $\frac{n}{N}$, $\frac{n}{N-1}$, $\frac{n-1}{N-1}$, etc. sont très proches de p. Ainsi lorsqu'on choisit k éléments dans une telle population, la probabilité pour un individu quelconque de posséder le caractère A peut être considérée comme constante et égale à p.

TD 3 Adéquation avec la loi équirépartie

Dans ce TD, on veut comparer les résultats observés à partir d'expériences avec les valeurs théoriques attendues données par une loi de probabilité, ici la loi équirépartie.

1 Exemple 1

1. Les données

On lance 100 fois une pièce de monnaie, on obtient 55 fois « Face » et 45 fois « Pile ». Ce sont les résultats observés. Si l'on considère la pièce équilibrée, 50 fois « Face » et 50 fois « Pile » sont les valeurs attendues.

2. La mesure de l'écart entre les deux distributions

Appelons f_i les fréquences observées et p_i les probabilités des différents événements élémentaires. Pour « mesurer » l'écart entre la distribution observée des fréquences f_i avec celle des p_i liées à la loi équirépartie, on calcule le nombre obtenu en ajoutant toutes les valeurs $\frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}$. Notons d^2 cette somme.

- Remplissez la dernière colonne du tableau suivant et calculez alors le nombre d^2.

	fréquence observée (f_i)	probabilité (p_i)	$\frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}$
Pile	0,45	0,5	
Face	0,55	0,5	

Si les valeurs théoriques et observées sont proches les unes des autres, d^2 sera petit et on considérera qu'il y a adéquation entre l'expérience et la loi équirépartie.
Le problème est de savoir à partir de quelle borne, les valeurs de d^2 peuvent être considérées comme assez petites pour que le test soit jugé positif. (Dire que le test est positif signifie que « l'expérience ne permet pas de dire que la pièce n'est pas équilibrée ».)

Note
Cette simulation peut se faire à l'aide de la calculatrice ou d'un ordinateur.

3. Étude d'un échantillonnage de valeurs de d^2

Une simulation de **100 lancers de pièces** suivant **la loi équirépartie** donne une autre valeur pour d^2. En recommençant N fois cette simulation, on obtient un échantillonnage de valeurs de d^2 de taille N.
Les résultats obtenus pour différentes valeurs de N sont les suivants :

N	100	500	1 000	2 000
minimum	0	0	0	0
Q_1	0,001 6	0,001 6	0,001 6	0,001 6
m_e	0,006 4	0,003 6	0,003 6	0,003 6
Q_3	0,015 7	0,014 4	0,014 4	0,014 4
d_9	0,032 4	0,025 6	0,025 6	0,025 6
maximum	0,129 6	0,211 6	0,078 4	0,221 6

Note
d_9 est le neuvième décile.

● Faites un diagramme en boîtes superposées de ces quatre séries de valeurs de d^2 (vous pouvez représenter les valeurs $1\,000\,d^2$).

4. Adéquation à la loi équirépartie

Note
On pourrait se demander si le générateur de nombres utilisé génère bien des nombres au hasard.

Les résultats permettent de constater que pour N = 500, N = 1 000 et N = 2 000, les paramètres des séries sont égaux à 10^{-4} près (sauf les maximums). En faisant d'autres simulations, on trouverait les mêmes résultats. C'est pourquoi, on peut les prendre comme « étalon ».

Note
L'intérêt réside dans ce que lorsque N est « assez grand », le neuvième décile est constant et indépendant des séries.

On convient qu'il n'y a pas adéquation entre l'observation et la théorie, au risque 10 %, **si** $d^2 > d_9$, avec $d_9 = 0{,}025\,6$.
Plus précisément, si la théorie est vraie (pièce équilibrée), il y aura 10 chances sur 100 de refuser une adéquation valide.
Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $d^2 \leqslant d_9$, l'expérience n'aura pas montré d'inadaptation avec la théorie. On acceptera donc cette théorie comme modèle de l'expérience, ce qui ne signifie pas qu'elle est vraie.
On **l'accepte** au niveau de l'expérience.

Commentaire. Avec les mêmes valeurs expérimentales, on pourrait tester plusieurs hypothèses et les accepter toutes.
Par exemple, on peut tester l'hypothèse « 51 Faces » et « 49 Piles ». Comme cette hypothèse est encore plus proche des résultats expérimentaux, le calcul de d^2 va conduire à l'accepter aussi.

5. Application

Trois expériences de 100 lancers de trois pièces ont donné les résultats suivants :

pièce	A	B	C
nombre de « Face »	43	47	40
nombre de « Pile »	57	53	60

En utilisant les échantillons précédents, dites si les pièces A, B et C sont équilibrées au seuil de risque de 10 %.

2 Expérience sur un plus grand nombre de lancers

On lance 1 000 fois une pièce, on obtient 550 fois « Pile » et 450 fois « Face ».
Voici les résultats de simulations des 1 000 lancers selon la loi équirépartie :

N	1 000	2 000
minimum	0	0
Q_1	0,000 1	0,000 1
m_e	0,000 484	0,000 484
Q_3	0,001 296	0,001 296
d_9	0,002 704	0,002 704
maximum	0,012 544	0,011 236

a) La pièce est-elle équilibrée au seuil de risque 10 % (procédez comme dans l'exemple 1) ?

b) Recommencez avec une pièce pour laquelle on a obtenu 530 « Pile » et 470 « Face ».

TD 4 Loi binomiale

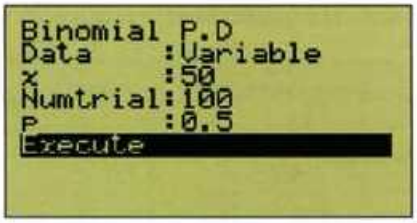
Une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n (nombre d'épreuves) et p (probabilité de « succès ») est telle que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour k entier naturel inférieur ou égal à n. Le calcul de cette probabilité est aisé dès que n n'est pas trop grand ou k petit ou proche de n. Pour n élevé, le calcul peut dépasser les possibilités de votre calculatrice ou de votre ordinateur. C'est pour cela que des fonctions spécifiques de calcul de loi de probabilité de variable aléatoire suivant une loi binomiale existent sur les calculatrices ou dans les tableurs courants.
D'autre part, certains problèmes nécessitent le calcul de $P(X \leqslant k)$, c'est-à-dire, la somme $P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k)$. Là encore, les calculatrices et les tableurs courants permettent ce calcul.

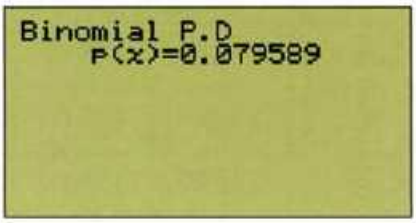
1 Avec la calculatrice

Famille Casio	Famille TI
• Sélectionnez les menus : STAT, DIST puis BINM. • Choisissez : Bpd pour le calcul de $P(X = k)$ ou Bcd pour le calcul de $P(X \leqslant k)$. • Sélectionnez VAR. • Dans l'écran qui apparaît : – entrez la valeur de k à la ligne x : – entrez la valeur de n à la ligne Numtrial : – entrez la valeur de p à la ligne p : • Appuyez alors sur EXE, le résultat s'affiche.	• Sélectionnez le menu : DISTR (2nd VARS). • Dans les lignes affichées, choisissez : Binom pdf pour le calcul de $P(X = k)$ ou Binom cdf pour le calcul de $P(X \leqslant k)$. Puis dans la parenthèse, entrez les valeurs ainsi : $(n ; p ; \{k\})$; n'oubliez pas que la valeur de k doit être entre accolades. Vous avez aussi la possibilité de rentrer plusieurs valeurs de k, séparées par des virgules. • Appuyez alors sur ENTER, le résultat s'affiche.

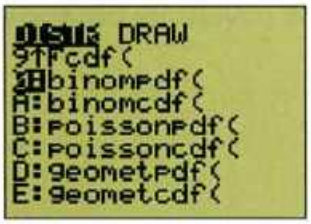
Exemple.

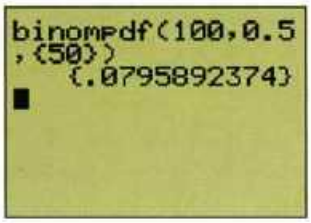
Avec la Casio Graph 65





Avec la TI 83-plus





2 Avec le tableur Excel

On utilise l'instruction LOI.BINOMIALE(). Cette fonction a quatre arguments : les trois premiers sont des entiers et le quatrième argument est une valeur logique (soit « VRAI », soit « FAUX »).

Ainsi, on écrit dans la cellule concernée (on remplace k, n et p par les valeurs numériques) :

• Pour $P(X = k)$: | = LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; FAUX) |

• pour $P(X \leqslant k)$: | = LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; VRAI) |

Si on veut calculer la probabilité $P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2)$, il suffit de calculer :

$$P(X \leqslant k_2) - P(X < k_1),$$

et pour calculer $P(X < k_1)$, on calcule $P(X \leqslant k_1 - 1)$.

3 Applications

1. Calculez, pour la loi $\mathcal{B}(100 ; 0{,}5)$, les probabilités suivantes :

$$P(X = 50) ; \quad P(X \leqslant 40) ; \quad P(X > 70) \quad \text{et} \quad P(45 \leqslant X \leqslant 55).$$

2. D'une urne qui contient dix billes, cinq blanches et cinq noires, on prélève, successivement, avec remise, mille billes dont on note la couleur.

On appelle X le nombre de billes blanches.

a) Calculez la probabilité de $(470 \leqslant X \leqslant 530)$.

b) Que peut-on penser d'un résultat qui donnerait 450 billes blanches ?

3. Lors d'un référendum, on a extrait d'une urne électorale 400 bulletins « NON » en 1 000 tirages avec remise.

Peut-on penser, malgré cela, que le « NON » est majoritaire dans cette urne ?

Aide. X est la variable aléatoire égale au nombre de « NON » en 1 000 tirages avec remise. Si le OUI et le NON étaient à égalité, X suivrait la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}5$ ($\mathcal{B}(1\,000 ; 0{,}5)$, avec $E(X) = 500$).

On cherche à apprécier si la valeur observée, 400, s'éloigne beaucoup de la valeur théorique 500. Pour cela, on cherche à calculer $P(X \leqslant 400)$ en mesurant le risque d'obtenir une valeur aussi éloignée que celle qui fut observée.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. et 2. Expérience de Bernoulli. Loi binomiale

1 Une urne contient des boules noires et des boules blanches. Le nombre de boules noires est le triple du nombre de boules blanches.

1. On tire au hasard une boule.
Quelle est la probabilité que cette boule soit noire ?

2. On tire à présent trois boules successivement avec remise. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires tirées sur l'ensemble de ces trois tirages. Donnez la loi de probabilité de X.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 289.

2 Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois 6 en lançant six dés parfaits ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 291.

3 Pour un tireur, la probabilité d'atteindre la cible est 0,5. Les tirs sont indépendants. Quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible exactement trois fois en dix coups ?

4 On tire successivement avec remise huit cartes d'un jeu de trente-deux cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement cinq rois ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 291.

5 On lance simultanément six pièces de monnaie équilibrées. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) au plus deux « Pile » ? **b)** au moins un « Pile » ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 291.

6 Un QCM comprend dix questions auxquelles on répond par « Vrai » ou « Faux ». Un élève répond au hasard à toutes les questions. A-t-il autant de chances de répondre exactement à trois questions que de répondre exactement à sept ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 289.

Pour les exercices 7 à 9, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

7 $n = 6$, $p = 0{,}4$. Donnez le tableau de la loi de X.

8 $n = 10$, $E(X) = 3$. Calculez $P(X \leqslant 3)$, $P(X \geqslant 7)$.

9 $p = 0{,}2$, $\sigma(X) = 2$. Calculez $P(X \leqslant 2)$, $P(X > 2)$.

10 On lance huit fois de suite un dé parfait.
Quelle est la probabilité de l'événement A « obtenir au moins trois fois un nombre pair » ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 291.

11 La probabilité qu'une machine tombe en panne un jour, indépendamment du jour, est de 0,05.

1. Calculez la probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne.

2. Calculez la probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne plus d'une journée.

12 Un démarcheur rencontre vingt personnes par jour. La probabilité qu'une de ces personnes achète ce que le démarcheur lui propose est de 0,1.

1. Calculez la probabilité qu'au cours d'une journée, le démarcheur ne rencontre aucun acheteur.

2. Calculez la probabilité qu'il rencontre au moins deux acheteurs.

3. Lois de probabilités continues

13 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Prouvez que f est une densité de probabilité.

2. X est une variable aléatoire de densité f.
Calculez $P(X \geqslant 0{,}5)$, $P(X < 0{,}1)$, $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 293.

14 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

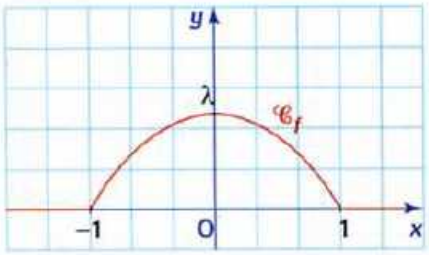
1. Pour tout a positif, on pose $I(a) = \int_0^a f(x)\,dx$.
Calculez $I(a)$ puis déduisez-en $\lim\limits_{a \to +\infty} I(a)$.

2. Justifiez que f est une densité de probabilité.

3. X est une variable aléatoire de densité f.

Trouvez le réel m tel que $P(X \leqslant m) = \frac{1}{2}$.

15 La fonction f représentée ci-dessous définit une densité de probabilité. Pour tout x de $[-1 ; 1]$, $f(x) = \lambda(1 - x^2)$ où λ est un réel positif.



1. Quelle est la valeur de λ ?

2. X est une variable aléatoire de densité f.
Prouvez que pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$,

a) $P(X \geqslant t) = P(X \leqslant -t)$.

b) $P(0 \leqslant X \leqslant t) = \frac{1}{2} - P(X \geqslant t)$.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 6, page 293.

4. Lois uniforme et exponentielle

16 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [0 ; 10].
Calculez les probabilités suivantes :

a) $P(X < 3)$;

b) $P(X > 6)$;

c) $P(3 < X < 8)$.

17 Une usine fabrique des tubes de diamètre théorique 200 mm. Après une étude statistique, on estime que le diamètre des pièces produites est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [198 ; 202]. Après contrôle, les tubes de diamètre d tel que $d \leqslant 198{,}1$ ou $d \geqslant 201{,}9$ sont rejetés.
Quelle est la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit rejetée ?

18 Alain et Bruno se donnent rendez-vous au café entre 12 h et 13 h. Alain arrive à 12 h 20.
Sous l'hypothèse que la durée entre midi et l'heure d'arrivée de Bruno est une variable aléatoire uniformément répartie sur [0 ; 60] (en min), calculez les probabilités :

a) Bruno arrive avant Alain ;

b) Alain attend Bruno plus de vingt minutes ;

c) Alain attend Bruno moins de cinq minutes.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 7, page 295.

19 La durée de vie d'un composant est une variable aléatoire T (exprimée en jours) qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,005.
Calculez les probabilités des événements suivants :

a) la durée de vie excède 300 jours ;

b) la durée de vie est au plus une année ;

c) la durée de vie est entre un et deux ans.

☞ Aide. Voir l'exercice résolu 8, page 295.

20 La durée d'attente X, en secondes, à un distributeur est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité que l'attente dépasse une minute est 0,942.

1. Quelle est la valeur de λ à 10^{-3} près ?

2. Calculez la probabilité que l'attente dure entre quatre et cinq minutes.

5. Lois sans mémoire

21 Le temps de réponse (en secondes) à un terminal commandé par ordinateur est une variable aléatoire sans mémoire telle que $P(X \geqslant 3) = 0{,}452$.

1. Le temps de réponse dépasse 2 secondes.
Quelle est la probabilité qu'il dépasse 5 secondes ?

2. Calculez la probabilité $P(X \leqslant 5)$.

22 La durée de vie T en heures d'un transistor suit une loi sans mémoire telle que $P(T \leqslant 1\,000) = 0{,}095$.

1. Calculez $P(X \geqslant 2\,000 / X \geqslant 1\,000)$.

2. Trouvez la valeur τ de la demi-vie.

23 X est une variable aléatoire qui suit une loi sans mémoire, sa demi-vie est $\tau = 99$.
Calculez $P(100 \leqslant X \leqslant 200)$.

24 Un système électronique est constitué de trois composants montés en série.

Les durées de vie (en heures) de chaque élément sont indépendantes et suivent une loi sans mémoire de paramètre $\lambda = 10^{-4}$.
Quelle est la probabilité que le système fonctionne au moins 1 000 heures ?

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus. Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

25 Plusieurs lancers de deux pièces de monnaie

On lance dix fois de suite deux pièces de monnaie en notant après chaque lancer les deux côtés visibles.

Objectif : calculer la probabilité des deux événements :
A « obtenir trois fois la sortie de deux Pile ».
B « obtenir deux Pile au moins une fois ».

1. La répétition d'une même épreuve doit faire penser à une expérience de Bernoulli. (Sans autre précision de l'énoncé, le modèle théorique de l'expérience prend pour hypothèse l'indépendance des épreuves, et en outre ici, pour chacune des pièces, l'équiprobabilité de sortir « Pile » ou « Face ».)
L'épreuve consiste à lancer deux pièces et à noter les côtés visibles.

a) Les issues de cette épreuve sont au nombre de quatre. Écrivez ces issues. (Notez P pour Pile et F pour Face.)

b) Quelle est la probabilité de chaque issue ?

c) Quelle est la probabilité p du succès, c'est-à-dire de « obtenir deux Pile lors de cette épreuve » ?

2. Il reste à introduire la variable aléatoire X (qui suit une loi binomiale), celle qui donne le nombre de réalisations de A sur l'ensemble des dix lancers.

a) Justifiez que A est l'événement $(X = 3)$.

b) Calculez $P(A)$.

3. La présence de « au moins » dans la définition de B invite à calculer d'abord $P(\overline{B})$, en général bien plus facile que le calcul de $P(B)$.

Précisez la définition de $\overline{B}$, justifiez que $\overline{B}$ est $(X = 0)$. Calculez $P(\overline{B})$, puis $P(B)$.

26 La roue de la fortune

Un joueur parie sur un chiffre compris entre 1 et 6. On notera ce chiffre c. On jette ensuite trois dés simultanément. Si le chiffre c apparaît i fois ($i = 1$ ou 2 ou 3), le joueur gagne i jetons (la valeur en espèces d'un jeton peut varier selon les conventions prises initialement). Dans le cas contraire, le joueur perd un jeton.

Objectif : savoir si ce jeu est équitable.

1. Organiser les données.
Il y a un lancer simultané de trois dés. Sans autre information sur les conditions de ce lancer, on sait que le modèle théorique de cette expérience est le lancer trois fois de suite d'un même dé.

Donc nous sommes dans le cas d'une « expérience de Bernoulli ». Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de succès de l'événement « c est sorti » au cours des trois épreuves. Mais il y a une autre variable aléatoire, classique dans un jeu d'argent, celle qui à une issue associe le gain algébrique du joueur. Notons-la Y.

Quelles sont les valeurs prises par Y ?

2. Traduire la question pour la résoudre.
Pour savoir si le jeu est équitable, il s'agit de comparer l'espérance mathématique de Y à 0.
Pour cela, il s'agit d'abord de trouver la loi de Y.
Vu le protocole de l'expérience, il y a sûrement un lien entre les issues des événements $(Y = k)$ et celles de l'expérience de Bernoulli du **1.**.

a) Justifiez que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3 ; \frac{1}{6}\right)$.

b) Prouvez que l'événement $(Y = -1)$ n'est autre que l'événement $(X = 0)$. De même, comparez les événements $(Y = k)$ et $(X = k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 3$.

c) Donnez alors la loi de Y puis déduisez-en $E(Y)$.
(Voir chapitre 10 § 1, p. 254)

d) Commentez le résultat puis concluez.

27 Fonctionnement d'un système de communication

Un système de communication comporte n composants. Chacun d'eux fonctionne indépendamment des autres, avec une probabilité p. Le système total peut effectivement fonctionner si au moins la moitié de ses composants sont opérationnels.

Objectif : trouver pour quelles valeurs de p un système à cinq composants est plus souvent en état de fonctionner qu'un système à trois composants.

1. Organiser les données.
Le problème ne décrit pas une expérience aléatoire. Or, on y parle de probabilité et il est donc assuré que la solution passe par l'introduction d'une telle expérience.
Des passages de l'énoncé nous guident : « n composants fonctionnent simultanément mais de façon indépendante », « chacun a la même probabilité p de fonctionner ».
Cela amène à introduire la variable aléatoire qui associe le nombre de composants en état de fonctionner. Elle est donc binomiale de paramètres $(n ; p)$.
Notons-la X_5 lorsque $n = 5$, X_3 lorsque $n = 3$.

2. Traduire la question posée en termes de probabilités.
Notons p_5 (resp. p_3) la probabilité qu'un système à cinq composants (resp. trois composants) fonctionne. Il s'agit de trouver les nombres p tels que $p_5 > p_3$.

a) Justifiez l'égalité :

$$p_5 = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + p^5.$$

☞ **Aide.** **Le système fonctionne lorsque au moins trois composants fonctionnent.**

b) Justifiez l'égalité $p_3 = \binom{3}{2}p^2(1-p) + p^3$.

c) Prouvez que « $p_5 > p_3$ » équivaut à :
« $3p^2(p-1)^2(2p-1) > 0$ ».

d) Déduisez-en p et concluez.

☞ **Prolongement.** **Prouvez qu'un système à $2k+1$ composants est préférable à un système à $2k-1$ composants lorsque $p > \frac{1}{2}$ (et seulement lorsque $p > \frac{1}{2}$).**

☞ **Aide.** **Dans les calculs, utilisez $\binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k}$.**

28 Combien d'enfants pour avoir une fille ?

On s'intéresse au nombre d'enfants d'une famille. On suppose qu'il n'y a pas de naissances multiples et qu'il y a équiprobabilité pour la naissance d'un garçon ou d'une fille.

Objectif : trouver le nombre minimum d'enfants pour que la probabilité d'avoir au moins une fille soit supérieure à 0,99.

1. L'énoncé ne décrit pas une expérience aléatoire, mais ici, elle est « visible en filigrane ». On peut considérer la naissance d'un enfant comme une épreuve à deux éventualités : F ou G. La naissance de n enfants peut-être considérée comme la répétition de n épreuves identiques et indépendantes.
La variable aléatoire qui donne le nombre de naissances F sur l'ensemble de n naissances est donc binomiale de paramètres $\left(n ; \frac{1}{2}\right)$.

2. On s'intéresse à l'événement A « avoir au moins une fille parmi n enfants ». La définition de A contient l'expression « au moins ».
En général, il est alors plus facile de calculer $P(\overline{A})$.

a) Prouvez que $P(\overline{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc que :

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

b) Pour trouver le plus petit entier n tel que $P(A) \geqslant 0{,}99$, il faut résoudre l'inéquation :

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0{,}99.$$

Faites-le. Concluez.

☞ **Commentaire.** **Pourquoi avoir supposé qu'il n'y a pas de naissances multiples ?**
Pour pouvoir appliquer la loi binomiale car les expériences doivent être indépendantes et *identiques*.

29 Fonctionnement d'un feu tricolore

Un feu tricolore reste cinquante-cinq secondes au vert, cinq secondes à l'orange puis soixante secondes au rouge. Un piéton ne peut traverser que lorsque le feu est rouge. On s'intéresse aux seuls piétons qui se présentent entre 8 h et 8 h 05.
À 8 h, le feu passe au rouge. T est la variable aléatoire qui donne, en secondes, le temps écoulé de 8 h jusqu'à l'heure d'arrivée devant le feu d'un piéton désirant traverser.
On fait l'hypothèse que T suit une loi uniformément répartie sur [0 ; 300].

Objectif : calculer les probabilités qu'un piéton attende moins de dix secondes ; plus de vingt secondes.

1. L'énoncé décrit le protocole qui définit l'expérience (traversée au feu rouge) et incite à choisir la seconde comme unité de temps. La variable aléatoire T suit une loi uniforme et on sait alors calculer la probabilité de l'événement $(T \in I)$ où I est un sous-intervalle de [0 ; 300] par un rapport de longueurs.
D'où l'idée de représenter la situation sur un axe muni d'une échelle des temps de 0 à 300.

Réalisez ce schéma en distinguant bien les couleurs des feux successifs.

2. Pour calculer les probabilités demandées, il s'agit de définir les événements à l'aide de sous-intervalles de [0 ; 300]. Pour cela, l'exploitation du schéma facilite la tâche.

a) Pour une attente de moins de 10 secondes, dans quels intervalles de temps doit se situer T ?

b) Déduisez-en la probabilité que l'attente dure moins de dix secondes.

c) De même, calculez la probabilité que l'attente dure plus de vingt secondes.

Pour progresser

Loi binomiale

30 Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient dix objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

1. Calculez la probabilité que, dans le carton, les dix objets soient sans défaut.

2. Calculez la probabilité que, dans le carton, au moins sept objets soient sans défaut.

31 Deux joueurs A et B s'affrontent dans un tournoi de tennis de table. La probabilité que A gagne une partie est 0,6. On joue neuf parties, le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties.
Quelle est la probabilité que B gagne le tournoi ?

☞ **Commentaire.** **Notez le rôle du hasard. Alors que A est manifestement plus fort que B, la probabilité que B gagne en neuf parties est encore supérieure à $\frac{1}{4}$.**

32 On vous propose le jeu suivant : on lance vingt fois une pièce de monnaie équilibrée.
Si « Pile » sort neuf, ou dix, ou onze fois, vous gagnez 1 €, sinon vous perdez 1 €.
Le jeu est-il équitable pour vous ?

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 25, page 305.

33 Vente à domicile
Un vendeur propose des encyclopédies à domicile. Il visite dix clients par jour.
On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des clients sont indépendantes.
X est le nombre d'encyclopédies vendues en une journée.

1. Expliquez pourquoi la loi de X est une loi binomiale ; précisez les valeurs des paramètres n et p.

2. Exprimez $P(X = k)$ pour k entier de 0 à n.
Calculez, à 10^{-4} près :
$P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 5)$.

3. Calculez E(X).

4. Le vendeur gagne 100 € par encyclopédie vendue.

5. Quel gain moyen le vendeur peut-il espérer ?

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 26, page 305.

34 Une usine fabrique une grande quantité de puces pour ordinateurs. Des études sur la qualité de la fabrication ont permis de montrer que 2 % des puces fabriquées présentent un défaut.
On commande 100 puces et on note X le nombre de puces défectueuses trouvées dans ce lot.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. Calculez $P(X = k)$ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$.

35 La probabilité qu'un tireur atteigne une cible est $\frac{1}{3}$.

1. Sur cinq tirs, indépendants les uns des autres, quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible au moins deux fois ?

2. Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible soit supérieure à 0,9 ?

36 QCM
Un QCM est constitué de six questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est vraie.

1. Un candidat répond au hasard aux six questions.
Quelle est la probabilité qu'il réponde juste au moins à la moitié des questions ?

2. Un candidat avisé élimine à coup sûr une des réponses qu'il connaît comme fausse, et répond ensuite au hasard en choisissant une des trois réponses.
Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à la moitié des questions ?

37 Avec un tableur
Une entreprise fabrique une grande quantité de microprocesseurs d'un type déterminé. La probabilité qu'un microprocesseur soit défectueux est de 0,05. Ces microprocesseurs sont vendus par lots de cinquante pièces.
On appelle X le nombre de microprocesseurs défectueux trouvés dans un lot déterminé.

1. Justifiez pourquoi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0,05)$.

2. Dans un tableur (Excel ou le tableur de Star Office), on souhaite faire apparaître les valeurs de $P(X = k)$ et de $P(X \leqslant k)$ pour k entier de 0 à 15.
La vue d'écran ci-après montre les formules à utiliser (voir le TD 4, § 2, page 302).

	A	B
1	k	0
2	p (X=k)	=LOI.BINOMIALE(B1;50;0,05;FAUX)
3	p (X<=k)	=LOI.BINOMIALE(B1;50;0,05;VRAI)

En recopiant par glisser/copier jusqu'à la colonne contenant $k = 15$, complétez le tableau.

3. Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois pièces défectueuses dans un lot de cinquante ?
Donnez une valeur approchée à l'aide du tableau précédent.

4. Utilisez le tableau de la question **2.** pour donner la valeur minimale de k pour laquelle :

$$P(X \geqslant k) > 0{,}999.$$

38 • On a lancé dix fois une pièce truquée qui donne « Face » avec une probabilité p. On a obtenu six fois « Face ».

1. Trouvez la probabilité conditionnelle que les trois premiers tirages soient F, P, F.

2. Même question avec P, F, P.

39 • On sait que les objets produits par une certaine machine sont défectueux avec une probabilité de 0,008, indépendamment les uns des autres.
Le fabriquant vend ces objets par lots de douze et garantit le remboursement d'un lot qui contiendrait plus d'un objet défectueux. Un client achète trois lots.
Quelle est la probabilité qu'un lot et un seul soit remboursable ?

40 • Les moteurs d'un avion ont une probabilité de défaillance de $1 - p$ en cours de vol, et ce, indépendamment les uns des autres.
Un avion a besoin d'une majorité de ses moteurs pour pouvoir terminer son vol.
Pour quelles valeurs de p un avion à cinq moteurs est-il préférable à un trimoteur ?

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 27, page 305.

41 • Une personne appelle successivement trois correspondants. On admet que chaque appel est indépendant du précédent et que, quel que soit le correspondant appelé, la probabilité de l'obtenir est p, $(0 < p < 1)$, et celle de ne pas l'obtenir est $q = 1 - p$.

1. X est la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de correspondants obtenus au cours de ces trois appels.
Déterminez la loi de X.

2. Après ces trois appels, la personne procède dans les mêmes conditions à un second appel des correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On désigne par Y le nombre de correspondants obtenus dans cette seconde série d'appels.
Déterminez la loi de Y.

3. On désigne par Z le nombre total de correspondants obtenus après ces deux séries d'appels.
Alors $Z = X + Y$.

a) Démontrez que Z suit une loi binomiale de paramètres 3, $1 - q^2$.

b) On suppose que $p = \frac{1}{3}$. Calculez E(X), E(Y), E(Z).

c) Déterminez une valeur approchée, à 10^{-2} près par excès, de la valeur minimale de p telle que :

$$P(Z = 3) > 0{,}5.$$

42 • **Espérance de la loi binomiale**

Considérons une expérience de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, dont les deux issues sont S de probabilité p et $\bar{S}$ de probabilité $q = 1 - p$.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisée à la $i^{\text{ème}}$ épreuve, 0 sinon.
Donnez la loi de X_i et indiquez $E(X_i)$.

2. On pose $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Justifiez que X indique le nombre de réalisations de S durant les n épreuves.

c) Quelle est la loi de X ? Déduisez du **1.** l'expression de $E(X)$ en fonction n et p.

43 • **Avec un tableur**

Lors du lancer d'un dé bien équilibré, on note A l'événement « obtenir un 5 ou un 6 ».
On lance ce dé trente fois et on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès de l'événement A au cours des trente lancers.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
Utilisez la méthode vue dans l'exercice 37 (voir aussi le TD 4, § 2, page 302) pour obtenir un tableau donnant les valeurs de :

$$P(X = k) \quad \text{et} \quad P(X \leqslant k),$$

pour k entier de 0 à 30.

2. Quelle est l'espérance mathématique m de X ?

3. Utilisez le tableau de la question **1.** pour trouver pour quelle valeur de k, la probabilité $P(X = k)$ est maximale.

44 • BAC Un dé cubique a quatre faces noires et deux faces blanches. Quand on lance ce dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. On lance ce dé cinq fois de suite.

1. Quelle est la probabilité qu'une face blanche apparaisse pour la première fois au cinquième lancer ?

2. Quelle est la probabilité qu'une face blanche apparaisse au moins une fois ?

3. X est la variable aléatoire comptant le nombre de faces noires obtenues.
Quelle est la loi de probabilité de X ?

45 • BAC **Feux verts**

Sur une route, deux carrefours sont munis de feux tricolores A et B.

On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et que pour un automobiliste circulant sur cette route, l'apparition d'une couleur donnée est un pur hasard.

On admet que la probabilité que le feu A soit vert est 0,75, la probabilité que le feu B soit vert est 0,5.

1. Un automobiliste passe successivement aux deux carrefours.

Calculez la probabilité :

a) qu'il rencontre deux feux verts ;

b) qu'il rencontre au moins un feu vert.

2. Un automobiliste passe cinq fois au carrefour muni du feu A. On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu A vert. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

46 • BAC On a rangé en vrac, dans une boîte, neuf cartes postales indiscernables au toucher.

Cinq de ces cartes proviennent de France, une provient d'Australie et trois des États-Unis.

A. On tire simultanément et au hasard trois cartes de la boîte.

1. Démontrez que la probabilité de n'obtenir aucune carte de France parmi les trois cartes est égale à $\frac{1}{21}$.

2. Calculez la probabilité des événements E_1 « lors d'un tirage, obtenir une carte de chaque pays » et E_2 « lors d'un tirage, obtenir au moins une carte de France ».

3. X est la variable aléatoire comptant, pour chaque tirage de trois cartes, le nombre de cartes de France obtenues. Déterminez la loi de probabilité de X.

Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles et les résultats seront rassemblés dans un tableau.

B. 1. On répète ce tirage cinq fois de suite en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boîte.

Quelle est la probabilité de l'événement « lors de ces cinq tirages, deux fois et deux fois seulement, on obtient aucune carte de France » ?

Donnez une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

2. On répète ce tirage n fois de suite en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boîte. À partir de quelle valeur de n, la probabilité d'obtenir au moins un tirage sans carte de France est-elle supérieure ou égale à 0,95 ?

47 • **Loto foot**

Il s'agit de pronostiquer les résultats de treize matches du championnat de France de football.

Exemple :

Bordeaux	Lyon	1	N	2

Le joueur choisit un résultat parmi les trois cases : 1 pour la victoire de Bordeaux, 2 pour celle de Lyon et N s'il prévoit un match nul.

On suppose que les résultats des matches sont indépendants et qu'il y a équiprobabilité entre les trois résultats pour chaque match.

On remplit une grille complète au hasard.

1. Justifiez que le nombre de bonnes réponses sur la grille suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

2. Une grille est gagnante si elle contient au moins dix bonnes réponses.

Calculez la probabilité d'avoir une grille gagnante.

48 : BAC On donne dans le plan trois points A, B, C non alignés.

Une urne U contient six jetons indiscernables au toucher portant les numéros -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.

Une urne V contient cinq jetons indiscernables au toucher : quatre portent le nombre 1, et un, -1.

On tire au hasard un jeton dans chaque urne. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre du jeton tiré dans U et b celui du jeton tiré dans V.

1. Justifiez que les points pondérés $(A ; a)$,$(B ; b)$, $(C ; 4)$ admettent un barycentre. On le note G.

2. **a)** Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « G est sur la droite (BC) » ;

E_2 : « G est sur le segment [BC] ».

b) Soit E_3 l'événement « G est strictement intérieur au triangle ABC ».

Prouvez que $P(E_3) = \frac{2}{5}$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un jeton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1. On note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de E_3.

a) Trouvez l'entier n tel que $E(X) = 4$.

b) Calculez le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres strictement intérieur au triangle ABC soit 0,999.

49 : BAC Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent, chacun pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade. L'expérience des dernières années prouve que la probabilité qu'un des groupes inscrits ne se présente pas au départ est $\frac{1}{8}$.

On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

☞ **Note. Les probabilités demandées seront arrondies au centième le plus proche.**

1. **a)** Prouvez que la probabilité qu'un jour donné les douze groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

b) On désigne par X la variable aléatoire qui indique le nombre de jours où les douze groupes ne se sont pas tous présentés au départ lors d'un mois de trente jours.
Prouvez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres. Donnez la signification des événements (X = 30) puis (X = 0).
Précisez l'espérance mathématique E(X). Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

c) Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.
Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit prévu pour la journée.
On note S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.
Calculez P(S = 11).
Précisez l'espérance mathématique de S.

2. **a)** Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire.
Évidemment si les treize groupes se présentent, le treizième groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité entraîne une dépense de deux Crédits à l'association.
Quelle est la probabilité p_{13}, qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement parmi les treize groupes inscrits ?

b) Soit R la variable aléatoire qui donne le coût de l'activité de substitution.
Précisez la loi de la variable aléatoire R et calculez son espérance mathématique.

c) Prouvez que le gain moyen obtenu par l'association pour chaque jour, est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2p_{13}.$$

Calculez ce gain.

d) La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

Lois continues

50 Dans chacun des cas, dites si la fonction f définit une densité de probabilité.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$ si $x \in [1 ; +\infty[$; $f(x) = 0$ sinon.

b) $f(x) = xe^{-x}$ si $x \in [0 ; +\infty[$; $f(x) = 0$ sinon.

51 Vous arrivez à un arrêt de bus à 10 heures sachant que le bus arrivera à un certain instant qui suit la loi uniformément distribuée entre 10 heures et 10 heures 30.

1. Quelle est la probabilité que votre attente dure dix minutes ou plus ?

2. Si à 10 heures 15, le bus n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité que votre attente dure au moins dix minutes supplémentaires ?

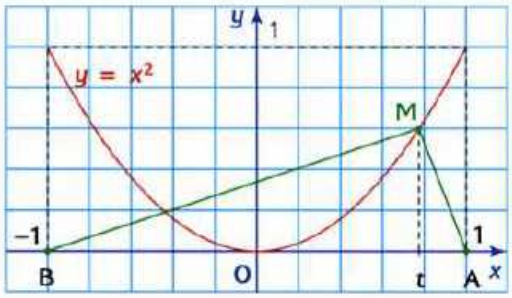
52 Une rame de métro relie deux stations M_1 et M_2 en un temps compris entre 8 et 12 minutes. On note X la durée du trajet lors d'une liaison.
On suppose que X suit une loi uniforme sur [8 ; 12].

1. Quelle est la densité de probabilité de X ?

2. Calculez la probabilité que la rame relie les deux stations en moins de 9 min 30 s.

3. La rame quitte M_1 à huit heures et un usager arrive en M_2 à 8 h 11. La rame reste en gare une minute. Quelle est la probabilité que l'usager rate le métro ?

53 • Dans un repère orthonormal, on donne le dessin ci-dessous.



On choisit un nombre t dans l'intervalle [−1 ; 1] ; ce choix se fait suivant la loi uniforme sur [−1 ; 1].
M désigne le point de la parabole d'abscisse t.
On note S la variable aléatoire qui donne l'aire, en u.a., du triangle ABM.

1. Calculez les probabilités suivantes :
$$P(S \leqslant 0{,}25),\ P(S > 0{,}5),\ P(S = 1).$$

2. Trouvez le nombre τ tel que $P(S \leqslant \tau) = \dfrac{1}{2}$.

54 • Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

1. Trouvez le paramètre de cette loi sachant que :
$$P(T \leqslant 70) = 0{,}05.$$

2. Déduisez-en $P(T > 30)$.

55 • La durée de vie X d'un élément radioactif suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La demi-vie du $^{14}_{6}C$ (carbone 14) est estimée à :
$$\tau = 5\,568 \text{ années.}$$

a) Évaluez $P(X < 1\,000)$.

b) Calculez x tel que $P(X < x) = 0{,}2$.

2. La demi-vie du césium $^{137}_{55}Cs$ est $\tau = 30$ années. Répondez aux mêmes questions.

Note. La demi-vie du carbone 14 a été estimée par Willard Libby, avec une incertitude de ±30 années. C'est la valeur utilisée depuis 1951 pour la datation au carbone 14.

56 • Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures ?

2. Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins dix heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé neuf heures ?

57 • Deux composants A et B sont montés en série sur une machine. La durée de vie de chacun d'eux est une variable aléatoire T (exprimée en jours) qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,0004. La panne d'au moins l'un d'entre eux entraîne l'indisponibilité de la machine. T_A est la durée de vie du composant A et T_B est la durée de vie de B. T_A et T_B sont deux variables aléatoires indépendantes.

1. Calculez $P(T_A \geqslant 300)$.

2. Calculez la probabilité que les deux composants fonctionnent encore après 300 jours.

3. Calculez la probabilité que la machine fonctionne après 300 jours, les composants étant montés en parallèle (la machine ne fonctionne plus, uniquement si les deux composants sont en panne).

58 • La durée de vie d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Pour assurer une plus grande longévité à un montage, on remplace le composant par deux composants identiques montés en parallèle. Dans ce cas, le système est défaillant lorsque les deux constituants sont en panne. On admet l'indépendance des pannes des deux constituants. La durée de vie du système est T. On appelle T_1 et T_2 la durée de vie des deux constituants.

1. Justifiez que $P(T \leqslant t) = P(T_1 \leqslant t) \times P(T_2 \leqslant t)$.

Aide. Le système est en panne avant l'instant t si les deux composants le sont.

2. Déduisez-en que :
$$P(T \leqslant t) = (1 - e^{-\lambda t})^2.$$

3. $\lambda = 2 \times 10^{-2}$ jour^{-1} ; quelle est la probabilité pour que le système fonctionne au-delà d'un an ?

4. Si le système est constitué de trois éléments en parallèle, quelle est alors la probabilité qu'il fonctionne au-delà d'un an ?

Aide. Utilisez la même démarche.

59 • **BAC** Le laboratoire d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie, en années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $P(X > 10) = 0{,}286$, prouvez qu'une valeur approchée de λ est 0,125.

2. Calculez la probabilité qu'un de ces oscilloscopes ait une durée de vie inférieure à six mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. La durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celles des autres appareils. Le responsable décide de commander quinze oscilloscopes.
Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il en acheter pour que la probabilité, qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de dix ans, soit 0,999 ?

60 • **BAC** Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en km que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.
Les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Calculez la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a) entre 50 et 100 km ;

b) supérieure à 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident

a) Calculez $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ où A est un réel positif.

b) Calculez la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$ (cette limite est la distance moyenne cherchée).

4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle ($\lambda = \frac{1}{82}$).
d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire qui donne le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

a) Justifiez que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.

b) Donnez le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

61 ⋮ Problème de Bertrand

Un cercle est donné, son rayon est R ($R > 0$) et son centre est le point O.
On choisit une corde du cercle au hasard.
Le but de cet exercice est de déterminer la probabilité que la longueur de cette corde soit inférieure à la longueur du côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle.

☞ **Note.** **Tous les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle de rayon R ont pour longueur de côté $R\sqrt{3}$.**

Le nombre de choix de cordes est infini, et leur longueur, qui est une variable aléatoire X, prend des valeurs de l'intervalle [0 ; 2R].
On recherche donc la probabilité de l'événement :

$$(0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3}).$$

1. Un point A est pris sur ce cercle. Une corde est déterminée par le choix au hasard d'un point M sur le cercle.

a) Tracez le triangle ABC équilatéral inscrit dans le cercle.

b) Où devez-vous placer le point M sur le cercle pour que la corde [AM] ait une longueur X qui vérifie :

$$0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3} ?$$

Évaluez $P(0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3})$.

2. Choisissez un point L au hasard dans le disque de centre O et de rayon R. La perpendiculaire à (OL) passant par L coupe le cercle en E et F.
Où doit se situer le point L pour que la longueur X de la corde [EF] vérifie $0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3}$?
Évaluez $P(0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3})$.

☞ **Note.** **Si L est en O, toute corde est un diamètre et ne répond pas à la question.**

3. Choisissez une corde [SR] du cercle.
Parmi toutes les cordes parallèles à (SR), comment faut-il les choisir pour que leur longueur X vérifie :

$$0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3} ?$$

Évaluez $P(0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3})$.

☞ **Commentaire.** **Voilà un étrange paradoxe : nous avons calculé trois probabilités différentes pour un même événement. Pourtant la loi uniforme est utilisée à chaque fois, mais pas sur le même univers. En fait, c'est la définition de la corde qui change à chaque calcul, c'est donc le protocole expérimental qui varie.**

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

62 Dix par dix

Dans une usine, on estime que la probabilité de fabriquer un objet défectueux est 0,01. Les objets sont fabriqués de façon indépendante. Ils sont regroupés ensuite par paquets de dix. Le fabriquant s'engage à rembourser les paquets qui contiennent au moins deux objets défectueux. Financièrement, cet engagement n'est supportable que si la proportion de paquets défectueux ne dépasse pas 1 %. La proposition est-elle réaliste ?

63 Avec la partie entière

Un jeu consiste à choisir, au hasard, un réel dans l'intervalle [1 ; 10] suivant la loi uniforme puis d'en prendre la partie entière qu'on affiche.
Paul affirme que chaque entier de 1 à 10 a la même probabilité d'être affiché. A-t-il raison ?

64 • Sans panne

Un moteur électrique a une durée de vie T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne est estimée à cinq ans et on admet que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.
Un lot de cent moteurs de ce type fonctionnent de manière indépendante. Quel est le nombre moyen de moteurs qui n'ont pas d'incident durant les deux premières années ?

65 • Le QCM

Un QCM est composé de dix questions auxquelles on propose quatre réponses possibles dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des questions. On attribue un point par réponse juste mais on ne pénalise pas les réponses fausses. Ainsi on obtient une note sur dix.
Quelle est la probabilité que le candidat ait au moins la moyenne ?

66 ⋮ Avec un barème plus dur !

On reprend les conditions de l'exercice 65. Mais la notation du QCM se fait suivant les modalités suivantes : on attribue un point par réponse juste mais on enlève un demi-point par réponse fausse.
(On peut ainsi obtenir une note négative !)
Quelle est la probabilité que le candidat ait au moins la note de cinq sur dix ?

67 ⋮ Nombre impair de « Face »

On lance n fois une pièce équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de « Face » ?

Problèmes

68 BAC

Thèmes : *Probabilités conditionnelles. Loi binomiale*

Pour chaque résultat, on donnera une approximation décimale à 10^{-3} près.

Un club hippique possède vingt chevaux (six blancs, cinq noirs, neuf gris) et une calèche prévue pour être tirée par deux chevaux. Le cocher de la calèche choisit au hasard les deux chevaux de l'attelage parmi les vingt chevaux du club hippique.

1. Calculez la probabilité des événements suivants :

A « les deux chevaux sont blancs » ;

B « l'un des chevaux, au moins, est blanc » ;

C « les deux chevaux sont de la même couleur » (on dit alors que l'attelage est « unicolore »).

2. Sachant que les deux chevaux de l'attelage sont de couleurs différentes, quelle est la probabilité que l'un d'entre eux soit blanc ?

3. Des enfants effectuent un stage de trois jours dans le club hippique. Le cocher organise alors, chaque jour, une promenade en calèche. Chaque jour, il choisit au hasard l'attelage.

Calculez la probabilité des événements suivants :

E_0 « l'attelage n'est jamais unicolore » ;

E_1 « l'attelage est unicolore exactement une fois » ;

E_2 « l'attelage est unicolore exactement deux fois » ;

E_3 « l'attelage est unicolore exactement trois fois ».

69 BAC

Thèmes : *Variable aléatoire. Loi binomiale*

On observe sur une grande période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante.

Pour n scooters franchissant le carrefour durant une année, on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour, durant cette année, suit une loi binomiale d'espérance mathématique $E(S_n) = 10$.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculez p puis donnez l'expression de $P(S_n = k)$ où k est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. a) Prouvez que $\ln[P(S_n = 0)] = -10\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{10}{n}\right)}{-\dfrac{10}{n}}$

puis déduisez-en $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$.

b) Démontrez que pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$P(S_n = k+1) = P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}.$$

c) Démontrez que si $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également,

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k+1) = e^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

d) Prouvez en raisonnant par récurrence sur k, que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!} \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

3. On suppose que l'entier naturel n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $P(S_n = k)$. Utilisez cette approximation pour calculer à 10^{-4} près, la probabilité qu'au cours de cette année, il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

70 BAC

Thèmes : *Loi binomiale. Étude de fonctions puissances*

Un étang contient un nombre N, inconnu mais défini, de poissons. Le but de ce problème est de proposer une évaluation de N, fondée sur des hypothèses bien définies.

1. On pêche dans différents endroits de l'étang ; on en sort vingt poissons que l'on marque et que l'on remet vivants dans l'étang. Quelques jours plus tard, on effectue une nouvelle pêche dans des endroits variés du même étang, en rejetant à l'eau les poissons pêchés après avoir noté s'ils sont marqués ou non. On prend ainsi cinquante poissons dont quatre sont marqués.

On suppose qu'entre les deux pêches, la population de l'étang n'a pas varié et que lors de la seconde pêche, à chaque coup, il y a équiprobabilité de sortie pour chacun des N poissons de l'étang.

Avant la seconde pêche, on pouvait se poser le problème : quelle est la probabilité de sortir les poissons marqués parmi les cinquante poissons pêchés ?

Répondez à cette question en donnant l'expression générale de $P(X = k)$ où X désigne la variable aléatoire comptant le nombre de poissons marqués parmi les cinquante poissons pêchés.

2. f est la fonction qui, à un réel x supérieur à 20, associe $f(x) = \left(\dfrac{20}{x}\right)^4\left(1-\dfrac{20}{x}\right)^{46}$.

Démontrez que f a un maximum. Pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?

3. a) Si l'on admet que l'événement $(X = 4)$ qui est réalisé correspond à l'événement de probabilité maximale parmi tous les événements possibles $(X = k)$, avec $k = 0, \ldots, 50$, quelle valeur doit-on attribuer à la population N de l'étang ?

b) Cette hypothèse conduit à la même conclusion qu'une autre hypothèse très simple que l'on aurait pu faire pour évaluer N. Laquelle ?

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes.
Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

71 • La durée de vie, en années, d'un appareil ménager avant la première panne, est modélisée par une variable aléatoire T, définie sur $[0 ; +\infty[$ et qui suit une loi exponentielle P de paramètre λ ($\lambda > 0$).

1. La valeur de t pour laquelle on a $P(T \in [0 ; t[) = P(T \in [t ; +\infty[)$ est égale à :

a $\frac{\ln 2}{\lambda}$. **b** $\frac{\lambda}{\ln 2}$. **c** $\frac{\lambda}{2}$. **d** $-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. La probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. Alors :

a $\lambda = \ln\left(\frac{50}{41}\right)$. **b** $\lambda = \ln\left(\frac{41}{50}\right)$. **c** $\lambda = \frac{\ln 82}{\ln 100}$. **d** $\lambda = \ln 41 - 2\ln 5$.

3. Sachant que cet appareil n'a pas eu de panne durant les deux premières années, alors la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a $P(T \in [1 ; +\infty[)$. **b** $P(T \in [3 ; +\infty[)$. **c** $P(T \in [2 ; 3[)$. **d** $e^{-\lambda}$.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.

4. L'espérance mathématique E(T), qui donne la durée de vie moyenne d'un appareil de ce type, est définie par $E(T) = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$. Alors cette durée de vie moyenne est :

a 10 ans. **b** 5 ans. **c** infinie. **d** 2 ans.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

72 • **1.** On lance vingt fois une pièce équilibrée. Alors la probabilité d'obtenir cinq « Face » est égale à celle d'obtenir quinze « Face ».

2. Même question, mais à partir d'une pièce truquée telle que la probabilité de « Face » soit 0,6.

3. Un QCM comporte dix questions avec trois réponses possibles. Un candidat répond au hasard. Alors la probabilité qu'il obtienne au moins cinq bonnes réponses est supérieure à 0,25.

4. Une urne U contient k jetons blancs et $3k$ noirs, on tire au hasard, et avec remise, $4k$ jetons. Alors la variable aléatoire X donnant le nombre de jetons noirs tirés est telle que $E(X) = 3k$.

5. Un lot de vis contient 1 % de vis défectueuses. On prélève successivement avec remise n vis.
Alors pour que la probabilité de tirer au moins une vis défectueuse dépasse 0,99, il suffit que $n \geqslant 100$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

73 • La variable aléatoire T qui donne la durée de vie, en semaines, d'un composant électronique X suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
Une étude a prouvé que $P(T < 200) = 0{,}5$.

1. Démonstration de cours

Pré-requis. Une variable aléatoire X définie sur $[0 ; +\infty[$ est « sans vieillissement » lorsque pour tous $t \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, $P(X \geqslant t + h / X \geqslant t) = P(X \geqslant h)$.
Prouvez que T est « sans vieillissement ».

2. Application

Justifiez chacune des affirmations suivantes.

a) X ayant déjà fonctionné 200 semaines, la probabilité qu'il fonctionne encore autant est 0,5.

b) La probabilité que X fonctionne entre 200 et 400 semaines est 0,25.

c) La probabilité $P(83 \leqslant T \leqslant 400)$ est 0,5 (à 10^{-4} près).

12 Les nombres complexes

1545

Le processus qui conduit à l'invention des nombres complexes commence au XVI^e siècle lorsque l'Italien Cardan a, en 1545, l'idée audacieuse d'utiliser des racines carrées de nombres négatifs pour résoudre des équations du 3^e degré.

En 1572 dans son *Algèbre*, Bombelli développe l'algèbre des quantités de la forme $x + y\sqrt{-n}$ avec n entier. À partir de cette date, ces expressions sont d'un usage courant mais ne sont pas considérées comme des nombres. Ainsi lorsqu'une solution d'équation est un « nombre » de cette forme, elle est dite « imaginaire ». Leibniz les considère « comme un recours élégant et merveilleux à l'intelligence humaine, une naissance contre nature dans le domaine de la pensée, ... ». D'Alembert montre que tous ces imaginaires s'écrivent $a + b\sqrt{-1}$ avec a et b réels et, en 1777, Euler remplace la notation $\sqrt{-1}$ par la lettre i. Lui aussi hésite à considérer ces « imaginaires » comme de vrais nombres.

Dans un livre paru en 1831, Gauss explique comment on peut représenter ces quantités par des points du plan et pourquoi ceci en fait des nombres comme les autres.

Jérôme Cardan
1501 – 1576

À LA MÊME ÉPOQUE

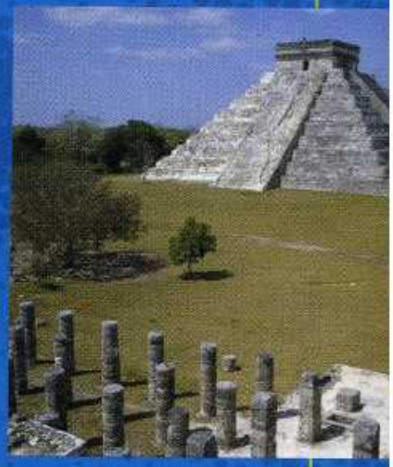
FRANCE

Prise en 1539 par François I^er, l'ordonnance de Villers-Cotterêts rend obligatoire l'usage du français dans les actes politiques et judiciaires : le français devient la langue officielle du royaume.

ART ET SCIENCE DE
RHETORIQVE METRIFIEE. AVEC
la Diffinitiõ de Synalephe, pour les Termes qui doibuẽt synalephier, & de leurs Exceptions. Les raysons pourquoy synalephent, & pourquoy nõ. Choses encores nõ specifiees, ny illuciidees p les Autheurs qui ont cõpoſé ſur leſd Art en langue Francoyſe, juſques au preſent. Cõpoſé p Gracien du Pôt, Eſcuyer, ſeigneur de Druſac. Lieutenãt lay general, de Monſeigñr le Seneſchal, en la Seneſchaulcee de Tholoze. Nouuellemẽt Imprimee aux Tholoze, par Nycolas Vieillard. 1539.

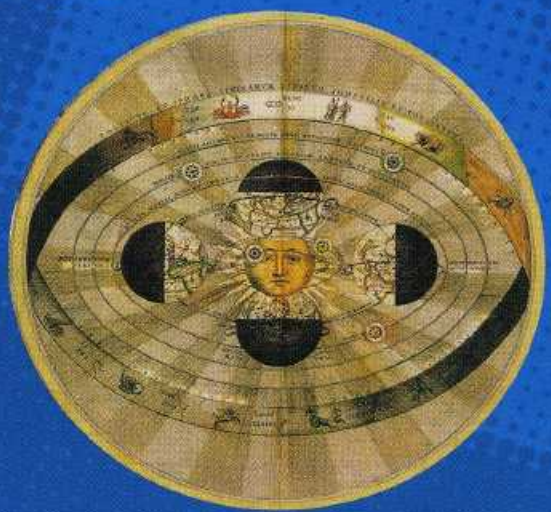
CIVILISATION

Les Espagnols mettent fin à l'un des plus anciens empires précolombiens, celui des Mayas, qui se caractérisait par une organisation en cités-États.



SCIENCES

Dans son *De revolutionibus orbium coelestium*, le Polonais N. Copernic soutient une conception héliocentrique de l'Univers : la Terre est une planète comme les autres qui tourne autour du Soleil.



ACTIVITÉS

INTRODUCTION Au XVI^{e} siècle, les mathématiciens italiens de la Renaissance (surtout Cardan et Bombelli) parviennent à résoudre, pour la première fois semble-t-il, des équations du 3^{e} et du 4^{e} degré.
Mais, pour trouver des racines réelles de ces équations, ils utilisent des nombres qui ne sont pas des nombres ordinaires.
Ainsi Bombelli montre que la solution $x = 4$ de l'équation $x^3 = 15x + 4$, peut s'écrire :

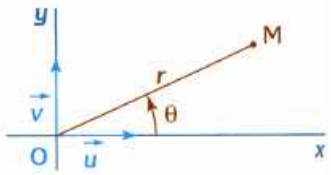
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 4,$$

mettant en évidence le fait que des nombres réels peuvent être désignés par des expressions « imaginaires ».
Au milieu du XVIII^{e}, Euler propose de remplacer $\sqrt{-1}$ par i, donc $i^2 = -1$, et d'Alembert montre que tous les imaginaires inventés, que Gauss appellera plus tard nombres complexes, sont de la forme $a + ib$ avec a et b réels.

RAPPELS Les coordonnées polaires

1 Coordonnées polaires d'un point

$(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct.
Si M est un point distinct de O, alors M est repéré par l'angle $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ et par sa distance à O, $OM = r$.
Pour tout point M, distinct de l'origine O, un couple $(r ; \theta)$ tel que $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est un couple de **coordonnées polaires** de M. On note $M(r ; \theta)$.



2 Lien entre repérages cartésien et polaire

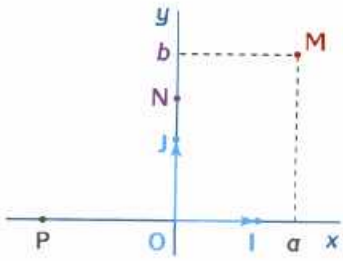
Dans un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, un point M (distinct de O) a pour coordonnées cartésiennes $(x ; y)$ et pour coordonnées polaires $(r ; \theta)$.
Alors : $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$; $\boldsymbol{x = r\cos\theta}$; $\boldsymbol{y = r\sin\theta}$.

ACTIVITÉ Présentation géométrique des complexes

À notre niveau, nous ne disposons pas de moyens nécessaires pour justifier convenablement la construction de l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$; ce ne serait rigoureux qu'en apparence, et surtout, les idées ou représentations essentielles n'apparaîtraient pas explicitement. Or ce sont elles qui permettent une utilisation efficace des nombres complexes. Aussi, adoptons-nous une représentation proche de celle de Gauss, qui écrit, dans une lettre datée de 1811 : *De même qu'on peut se représenter tout le domaine des réels par moyen d'une ligne droite ..., de même on peut se figurer les réels et les imaginaires au moyen d'un plan où chaque point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité* $a + ib$ (...). Le nom du mathématicien suisse Argand (1768-1822) est attaché à cette représentation.

1 Présentation

$(O\,;\vec{OI},\vec{OJ})$ est un repère orthonormal direct du plan.
Il est admis que l'axe des abscisses de ce repère représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Ainsi, le réel x est représenté par le point P de coordonnées $(x\,;0)$.
On **convient** que tout **autre** point du plan représente aussi un nombre, qui n'est donc pas un nombre réel et qu'on appelle **nombre complexe**.



1. On convient que le point J de coordonnées $(0\,;1)$ représente le nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$ et que le point N de coordonnées $(0\,;y)$ représente le nombre complexe iy (ou $i\times y$). (Remarquez que $\vec{ON} = y\vec{OJ}$.)

a) Placez les points N_1, N_2 et N_3 représentant les nombres :

$$y_1 = i\times 3,\quad y_2 = i\times 0 \text{ et } y_3 = i\times(-1),$$

et donnez leurs coordonnées.

b) Quels nombres les points $N_4(0\,;5)$ et $N_5(0\,;-2)$ représentent-ils ?

2. On convient que le point M de coordonnés $(a\,;b)$ représente le nombre complexe $a+ib$, somme du réel a et du complexe ib. (Remarquez que $\vec{OM} = a\vec{OI} + b\vec{OJ}$.)

a) Placez les points M_1, M_2 et M_3 représentant les complexes :

$$z_1 = 2+i(3),\quad z_2 = -1+i(4) \text{ et } z_3 = 5+i(-2),$$

et donnez leurs coordonnées.

b) Donnez les nombres complexes représentés par les points $M_4(1\,;2)$ et $M_5(-3{,}2\,;4)$.

CONCLUSION **Ainsi de cette manière,**

- tout point M de coordonnées $(a\,;b)$ représente le nombre complexe $a+ib$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe $z = a+ib$ est représenté par un point M de coordonnées $(a\,;b)$;
- les nombres complexes sont les nombres $a+ib$ avec a et b réels.

2 Calculs avec ces nouveaux nombres

On calcule avec les nombres complexes comme avec les réels, mais lors des calculs, on remplace i^2 par -1.

Exemples : $(3+2i)+(5-3i) = 8-i$;

$$(3+2i)(5-3i) = 15-9i+10i-6i^2 = 15+i-6\times(-1)$$
$$= 21+i.$$

- Calculez : $(-2+7i)+(4-3i)$; $(-2+7i)-(4-3i)$;
  $(5+2i)+(-4-i)$; $2i(3+4i)$;
  $(i\sqrt{2})^2$; $(-4+3i)^2$;
  i^3 ; $(-i\sqrt{5})^2$;
  $(a+ib)(a'+ib')$ avec a, a', b, b' réels.

1 Les nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

1.1 Écriture algébrique d'un complexe

Note
En général, on note z un nombre complexe.

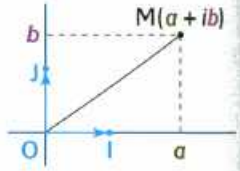
De la même façon que tout point d'une droite représente un nombre réel et un seul, on convient que tout point du plan représente un nombre dit nombre complexe et un seul. Le point J(0 ; 1) représente le nombre complexe noté $\boldsymbol{i}$ et tout point M de coordonnées $(a ; b)$ représente le complexe $a + ib$. L'ensemble de tous les **nombres complexes** est noté $\mathbb{C}$. Tout réel x est un complexe car $x = x + i \times 0$. Tout complexe ib (b réel) est dit **imaginaire pur**.

DÉFINITION 1

L'écriture $\boldsymbol{z = a + ib}$ d'un complexe avec $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ **réels** est appelée la **forme algébrique** (ou cartésienne) de z.

- On dit que a est la **partie réelle** de z et on la note : $\boldsymbol{a = \mathrm{Re}(z)}$.
- On dit que b est la **partie imaginaire** de z et on la note : $\boldsymbol{b = \mathrm{Im}(z)}$ ($\mathrm{Im}(z)$ est donc un réel).
- Dire qu'un complexe z est **réel** équivaut à dire que : $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Dire qu'un complexe z est **imaginaire pur** équivaut à dire que : $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Interprétation géométrique



- On dit que M de coordonnées $(a ; b)$ a pour **affixe** le complexe : $z = a + ib$.
- On dit que M est **l'image de** z.
- L'axe des abscisses représente l'ensemble $\mathbb{R}$; l'axe des ordonnées, celui des imaginaires purs.
- La distance OM est appelée **module de** z. On note $|z| = \mathrm{OM}$.
Donc $\boldsymbol{|z|^2 = a^2 + b^2}$ et $\boldsymbol{|z| = 0}$ **équivaut à** $\boldsymbol{z = 0}$.

- Deux complexes sont égaux s'ils sont représentés par le même point, donc s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

« $\boldsymbol{a + ib = a' + ib'}$ » **équivaut à** « $\boldsymbol{a = a'}$ **et** $\boldsymbol{b = b'}$ ».

En particulier, $a + ib = 0$ équivaut à $a = b = 0$.

1.2 Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

- L'ensemble des nombres complexes est muni de deux opérations, l'addition et la multiplication, qui possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$ et avec lesquelles on calcule comme dans $\mathbb{R}$.

Note
$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
$\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

- On convient que $i \times i = -1$ donc $i^2 = -1$. Ainsi, on remplace lorsque le cas se présente, $i \times i = i^2$ par -1. Par exemple, si z et z' ont pour écriture algébrique $a + ib$ et $a' + ib'$,

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') ;$$

et

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + i^2bb' + i(ab' + a'b) = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

- Il en résulte, entre autres, que les identités remarquables comme pour les réels restent valables avec de plus, $\boldsymbol{z^2 + z'^2 = (z + iz')(z - iz')}$
car $(z + iz')(z - iz') = z^2 - izz' + izz' - i^2z'^2 = z^2 + z'^2$.
En particulier, lorsque a et b sont des réels, $\boldsymbol{a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)}$.

COMPRENDRE

Les complexes n'ont pas de signe

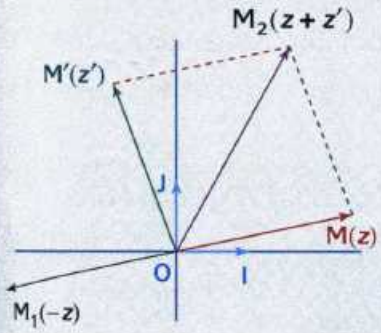
Il n'existe pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ qui prolonge celle de $\mathbb{R}$ et qui obéit à la même règle des signes.
En effet, que i soit « déclaré » positif ou négatif, alors i^2 serait, si une telle relation d'ordre existait, positif, mais $i^2 = -1$ par définition, il y aurait donc une contradiction.

Module d'un réel

Un réel x s'écrit dans $\mathbb{C}$, $x = x + i \times 0$ donc son module est $\sqrt{x^2}$.
Or $\sqrt{x^2}$ est sa valeur absolue.
Ainsi **le module d'un réel est sa valeur absolue**, ce qui explique le choix de la même notation.

Images de $-z$ et $z+z'$

z et z' sont deux complexes d'images respectives M et M' :
• l'image de $-z$ est le point M_1 symétrique de M par rapport à O ;
• l'image de $z+z'$ est le point M_2 tel que $OM'M_2M$ est un parallélogramme.



SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Calculer dans $\mathbb{C}$

ÉNONCÉ

On pose $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 2 - i$.

1) Calculez $|z_1|$ et $|z_2|$.

2) Écrivez sous forme algébrique chacun des complexes suivants et calculez leur module :

$$z_1 + z_2 \; ; \quad z_1 \times z_2 \; ; \quad z_1^2 \; ; \quad z_1 + iz_2.$$

SOLUTION COMMENTÉE

1) • $|z_1|^2 = 9 + 4 = 13$ donc $|z_1| = \sqrt{13}$ car $|z_1| > 0$.

• $|z_2|^2 = 4 + 1 = 5$ donc $|z_2| = \sqrt{5}$.

2) • $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i$ et $|z_1 + z_2| = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$.

• $z_1 z_2 = (3 + 2i)(2 - i) = 6 + 4i - 3i - 2i^2 = 8 + i$ et $|z_1 z_2| = \sqrt{65}$.
On remarque que $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$.

• $z_1^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$ et $|z_1^2| = \sqrt{169} = 13$.
On remarque que $|z_1^2| = |z_1|^2$.

• $z_1 + iz_2 = (3 + 2i) + i(2 - i) = 3 + 2i + 2i - i^2 = 4 + 4i$
et $|z_1 + iz_2| = 4\sqrt{2}$.

EXERCICES 3 à 5, 10 et 11

EXERCICE RÉSOLU 2 Écrire la forme algébrique d'un inverse

ÉNONCÉ

1) a et b sont deux réels. En utilisant la factorisation de $a^2 + b^2$, déterminez la forme algébrique de l'inverse de z, $z \neq 0$, $z = a + ib$.

2) Écrivez sous forme algébrique $\dfrac{1}{3 + 2i}$ et $\dfrac{1}{2 - i}$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) $z = a + ib$ et $z \neq 0$ donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + ib}$ et, comme $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, $a^2 + b^2$ est un réel non nul.
Ainsi, en multipliant le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{z}$ par $a - ib$, on obtient :

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

2) L'idée est d'appliquer la méthode précédente, ainsi :

• $\dfrac{1}{3 + 2i} = \dfrac{3 - 2i}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \dfrac{3 - 2i}{13} = \dfrac{3}{13} - \dfrac{2}{13}i$.

• $\dfrac{1}{2 - i} = \dfrac{2 + i}{(2 - i)(2 + i)} = \dfrac{2 + i}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

EXERCICES 6 à 8

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition

DÉFINITION 2

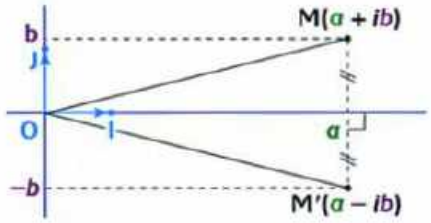
Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, est le nombre complexe $\boldsymbol{a - ib}$, noté $\overline{z}$.

Note
Pour le module, voir aussi le § 3.

EXEMPLE Si $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 3$, $z_3 = -2i$, alors :
$\overline{z_1} = 1 - 3i$,
$\overline{z_2} = 3$ et $\overline{z_3} = 2i$.

Interprétation géométrique

- Le point M′ d'affixe $\overline{z} = a - ib$ est le symétrique de M d'affixe $z = a + ib$ par rapport à l'axe des abscisses.



- Puisque OM = OM′, alors $|\overline{z}| = |z|$.

2.2 Conséquences

- « $z = z'$ » équivaut à « $\overline{z} = \overline{z'}$ ».
- Le conjugué de $\overline{z}$ est z (ou encore $\overline{(\overline{z})} = z$).
- Si $z = a + ib$, a et b réels, $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2ib$, d'où :

$$\boldsymbol{z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)} \text{ et } \boldsymbol{z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)}.$$

Il en résulte :

Note
Les seuls complexes z tels que $z = \overline{z}$ sont donc les nombres réels.

- « Le complexe z est **réel** » équivaut à « **z est égal à son conjugué $\overline{z}$** ».
- « Le complexe z est **imaginaire pur** » équivaut à « $\boldsymbol{z + \overline{z} = 0}$ ».

Relation fondamentale.

$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) = |z|^2$, d'où la relation fondamentale :

$$\boldsymbol{z\overline{z} = |z|^2}.$$

2.3 Opérations sur les nombres conjugués

THÉORÈME 1

- Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués : $\boldsymbol{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$.
- Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\boldsymbol{\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$.
- Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\boldsymbol{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$ $\boldsymbol{(z' \neq 0)}$.

Démonstration.

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux nombres complexes.

- Alors $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b')$.

D'autre part, $\overline{z} = a - ib$ et $\overline{z'} = a' - ib'$ donc $\overline{z} + \overline{z'} = (a + a') - i(b + b')$ d'où $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

- Les autres résultats se démontrent de manière analogue.

Remarque.

Ces résultats s'étendent sans difficultés à une somme de n termes ou à un produit de n facteurs. En particulier $\boldsymbol{\overline{z^n} = (\overline{z})^n}$.

COMPRENDRE

Utilisation du conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe permet :

- de trouver la forme algébrique d'un quotient du fait que $z\bar{z}$ **est un réel** ;

→ EXERCICES RÉSOLUS 3 et 4

- de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un **complexe z soit :**

un réel, cette condition est $z = \bar{z}$;

un imaginaire pur, cette condition est $z + \bar{z} = 0$.

Conjugués remarquables

- a réel, $\bar{a} = a$.
- b réel, $i\bar{b} = -ib$.
- $\bar{i} = -i$.

Utiliser le théorème 1

- Les règles qu'il énonce permettent de calculer le conjugué d'un nombre complexe z sans être obligé de l'écrire sous la forme algébrique $z = a + ib$. On utilise ces règles sans oublier que le conjugué d'un réel a est a et celui de i est $-i$.

Exemple.

Si $Z = \dfrac{z-i}{2-3i}$, alors :

$$\bar{Z} = \frac{\overline{z-i}}{\overline{2-3i}} = \frac{\bar{z}-\bar{i}}{\bar{2}-\overline{3i}} = \frac{\bar{z}+i}{2+3i}.$$

- **Mais attention !** Le conjugué du complexe $z = a + ib$ est $a - ib$ seulement lorsque a et b sont réels.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Trouver la forme algébrique d'un quotient

ÉNONCÉ Écrivez sous forme algébrique chacun des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2-i}{3+2i}; \quad z_2 = \frac{1}{2+i} - \frac{1}{3-i}; \quad z_3 = \frac{1}{-4+3i}.$$

POINT MÉTHODE

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

SOLUTION COMMENTÉE

- Le conjugué de $3 + 2i$ est $3 - 2i$. On écrit donc $z_1 = \dfrac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$.

Or $(3 + 2i)(3 - 2i) = 13$ donc $z_1 = \dfrac{4-7i}{13} = \dfrac{4}{13} - \dfrac{7}{13}i$.

- Comme précédemment :

$$z_2 = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} - \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{2-i}{5} - \frac{3+i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$$

- $z_3 = \dfrac{-4-3i}{(-4+3i)(-4-3i)} = \dfrac{-4-3i}{25} = -\dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}i.$

→ EXERCICES 7 à 9 et 12

EXERCICE RÉSOLU 4 Utiliser les propriétés du conjugué

ÉNONCÉ **1)** z est un complexe non nul, prouvez que :

« $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ » équivaut à « $|z| = 1$ ».

2) z et z' sont deux complexes tels que $zz' \neq -1$, $|z| = |z'| = 1$.

On pose $Z = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$. Prouvez que Z est réel.

POINT MÉTHODE

Pour démontrer qu'un complexe Z est réel, on peut démontrer que $Z = \bar{Z}$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) $z\bar{z} = |z|^2$ et « $|z| = 1$ » équivaut à « $|z|^2 = 1$ » car $|z|$ est positif.

Ainsi « $|z| = 1$ » équivaut à « $z\bar{z} = 1$ » donc à « $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ ($z \neq 0$ puisque $|z| = 1$) ».

2) $\bar{Z} = \left(\overline{\dfrac{z+z'}{1+zz'}}\right) = \dfrac{\overline{z+z'}}{\overline{1+zz'}} = \dfrac{\bar{z}+\bar{z'}}{1+\bar{z}\bar{z'}}$.

D'après le **1)**, puisque $|z| = |z'| = 1$, alors $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ et $\bar{z'} = \dfrac{1}{z'}$,

donc $\bar{Z} = \dfrac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{zz'}} = \dfrac{z'+z}{zz'+1} = Z$. Ainsi $\bar{Z} = Z$ donc Z est réel.

Autre solution.

En multipliant par $1 + \bar{z}\bar{z'}$, il vient $Z = \dfrac{(z+z')(1+\bar{z}\bar{z'})}{|1+zz'|^2} = \dfrac{z'+z+\bar{z}+\bar{z'}}{|1+zz'|^2}$

car $z\bar{z} = z'\bar{z'} = 1$. Or $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z' + \bar{z'} = 2\mathrm{Re}(z')$ donc Z est réel.

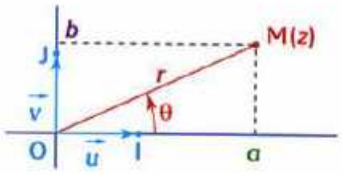
→ EXERCICES 16 à 21, 50

3 Forme trigonométrique

Dans ce paragraphe et les suivants, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$.

À tout point M de coordonnées **cartésiennes** $(a ; b)$ est associé le nombre complexe $a + ib = z$.

Mais M, distinct de O, possède aussi des coordonnées **polaires** $(r ; \theta)$ avec :



$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}).$$

Donc $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$ (voir activités, page 316) et :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

DÉFINITION 3

Note
Un complexe non nul a une infinité d'arguments. La différence entre deux de ses arguments est un multiple de 2π.

z est un nombre complexe **non nul**, $z = a + ib$ avec a et b **réels**, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Un **argument** de z, noté **arg** z, est n'importe quelle mesure exprimée en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
- L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée **forme trigonométrique** de z avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$.

Conséquences. $\arg \overline{z} = -\arg z$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi$.

Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique

- **Si** on connaît r et θ, **alors** $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.
- **Si** on connaît a et b, **alors** $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ est défini par :

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

EXEMPLES

- Si $z = 1 - i$, alors $r = \sqrt{2}$ puis $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Donc $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.
- Si $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$, on obtient $z = -\sqrt{3} + i$.

Égalité de deux complexes écrits sous forme trigonométrique

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ sont égaux alors, puisqu'ils sont associés au même point, $r = r'$ et $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$:

« $z = z'$ » **équivaut à** « $r = r'$ **et** $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$ ».

Quand peut-on dire que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une forme trigonométrique ?

THÉORÈME 2

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$, **alors** $|z| = r$ et $\theta = \arg z \pmod{2\pi}$.

Démonstration. $|z|^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$. Les nombres étant positifs, $|z| = r$.
Notons θ' un argument de z. La forme trigonométrique $z = r(\cos\theta' + i\sin\theta')$ implique $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$, c'est-à-dire $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$.
Donc puisque $r = |z|$ et $\theta = \theta'$, alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est bien une forme trigonométrique de z.

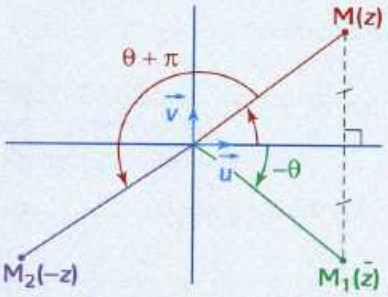
COMPRENDRE

Utilisation d'une forme trigonométrique

- Elle sert en géométrie aux calculs de distances et d'angles. (Voir chapitre 13).
- Elle est très efficace pour multiplier des complexes, calculer des puissances etc.

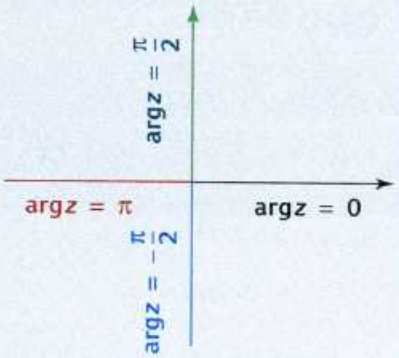
$\arg\bar{z} = -\arg z$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi$

La figure ci-dessous illustre ces égalités.



Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur

- **z réel équivaut à $\arg z = 0$ ou π.**
$z > 0$ équivaut à $\arg z = 0$.
$z < 0$ équivaut à $\arg z = \pi$.



- **z imaginaire pur équivaut à $\arg z = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.**

$\mathrm{Im}(z) > 0$ équivaut à $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{Im}(z) < 0$ équivaut à $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Passer d'une forme à une autre

ÉNONCÉ **1)** On pose $z_1 = \sqrt{3} + i$. Trouvez une forme trigonométrique de z_1.

2) z_2 est le complexe de module 3 et d'argument $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
Quelle est la forme algébrique de z_2 ?

SOLUTION COMMENTÉE

1) z_1 est de la forme $a + ib$, avec $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$.
Donc en tenant compte du lien entre la forme algébrique et une forme trigonométrique :

- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$;
- $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte que $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Pour z_2, $r = 3$ et $\theta = -\frac{\pi}{4}$ donc $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$,

c'est-à-dire $a = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $b = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Il en résulte que : $z_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

→ EXERCICES 22 à 26

EXERCICE RÉSOLU 6 Reconnaître une forme trigonométrique

ÉNONCÉ Déterminez une forme trigonométrique des complexes suivants :
$z_1 = -2(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z_2 = 4(\cos\theta - i\sin\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

SOLUTION COMMENTÉE

Attention. $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est pas toujours une forme trigonométrique.

- z_1 est bien de la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ mais ce **n'est pas une forme trigonométrique car ici $r = -2$ n'est pas strictement positif.**
On écrit $z_1 = 2(-\cos\theta - i\sin\theta)$, puis on utilise $-\cos\theta = \cos(\theta + \pi)$ et $-\sin\theta = \sin(\theta + \pi)$. Ainsi, $z_1 = 2(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$.
Il en résulte que :
$$|z_1| = 2 \text{ et } \arg z_1 = \theta + \pi.$$
- $4(\cos\theta - i\sin\theta)$ n'est pas une forme trigonométrique de z_2 à cause de la présence du signe moins dans $\cos\theta - i\sin\theta$.
On écrit $z_2 = 4(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ car $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. Il en résulte que $|z_2| = 4$ et $\arg(z_2) = -\theta$.

Commentaire. On peut remarquer que $\bar{z}_2 = 4(\cos\theta + i\sin\theta)$, puis écrire une forme trigonométrique de $4(\cos\theta + i\sin\theta)$ et en déduire une de z_2 en utilisant le fait que pour tout nombre complexe z, $|z| = |\bar{z}|$ et $\arg z = -\arg\bar{z}$.

→ EXERCICE 29

4 Propriétés des modules et arguments

4.1 Module et argument d'un produit

THÉORÈME 3

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$.
2. $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$.

Démonstration. Posons $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$
et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r' = |z'|$ et $\theta' = \arg z'$.

$$\begin{aligned} z \times z' &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)] \\ &= rr'[(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))] \text{ d'après les résultats de Première.} \end{aligned}$$

Comme $rr' > 0$, d'après le théorème 2, $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \theta'$.

Note
La proposition 1 est vraie quels que soient z et z'.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 107

Remarque. D'après le théorème 3, pour multiplier deux nombres complexes non nuls, « on multiplie les modules et on ajoute les arguments ».

EXEMPLE $z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$, $z' = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Alors, $|zz'| = 2 \times \sqrt{3}$ et $\arg(zz') = \left(\frac{\pi}{5}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{20}$,

d'où $zz' = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{20}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{20}\right)\right]$.

Conséquences. On démontre par récurrence que pour tout entier n et tout nombre complexe z non nul : $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z)^n = n\arg z \pmod{2\pi}$.

Formule de Moivre. En appliquant le résultat précédent au nombre complexe de module 1 et d'argument θ, on obtient :

Pour tout entier n et tout nombre réel θ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Note
Cette formule n'est pas exigible.

4.2 Module et argument d'un quotient

THÉORÈME 4

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

1. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
2. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$.

Démonstration. Posons $Z = \frac{z}{z'}$. Alors $Zz' = z$ et d'après le théorème 3,

$|Z||z'| = |z|$ et $\arg Z + \arg z' = \arg z \pmod{2\pi}$, d'où le résultat.

Remarque. D'après le théorème 4, pour diviser des nombres complexes non nuls, « on divise les modules et on retranche les arguments ».

EXEMPLE $z = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$, $z' = \frac{3}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Alors :

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$ d'où $\frac{z}{z'} = \frac{8}{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

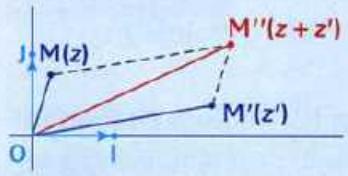
Conséquences. Si z est non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\frac{1}{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$.

COMPRENDRE

Module et addition

Le module de la somme de deux complexes n'est pas, en général, la somme des modules.
Comme on le voit sur la figure ci-dessous, $|z+z'| = OM''$ et $|z|+|z'| = OM + OM'$, et dans ce cas (qui est presque le cas général) :

$$OM'' < OM + OM'.$$



Retrouver des formules de trigonométrie

En posant $z = \cos a + i\sin a$ et $z' = \cos b + i\sin b$,
$|z| = |z'| = 1$, $\arg z = a$ et $\arg z' = b$.
En calculant zz' de deux façons :
• D'après le théorème 3, $|zz'| = 1$ et $\arg(zz') = a + b$ donc $zz' = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$. **(1)**
• En développant le produit $(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$, on obtient :
$zz' = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i\sin a\cos b + \sin b\cos a)$. **(2)**

En égalant les parties réelles et imaginaires de **(1)** et **(2)**, on obtient :
$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Calculer avec des puissances

ÉNONCÉ **1)** Donnez la forme algébrique du nombre $z = (1 - i\sqrt{3})^5$.

2) Donnez la forme algébrique du nombre $Z = \dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

SOLUTION COMMENTÉE

Pour calculer des puissances, il est préférable d'utiliser les formes trigonométriques (ou comme on le verra page suivante, les formes exponentielles).

1) Posons $z' = 1 - i\sqrt{3}$. Il vient $|z'| = 2$ et $\arg z' = -\dfrac{\pi}{3}$.

Donc $z' = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$ (voir l'exercice résolu 5).

Il en résulte, d'après les conséquences du théorème 3, que :

$$z'^5 = 2^5\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right].$$

Or $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $z = 2^4 + (2^4\sqrt{3})i$.

2) Posons $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Alors $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

De même, $|z_2| = 2$ et $\arg z_2 = \dfrac{\pi}{6}$ (voir l'exercice résolu 5).

Donc d'après les conséquences du théorème 3 :

- $|z_1^4| = (\sqrt{2})^4 = 4$ et $\arg z_1^4 = \pi$, donc $z_1^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$;
- $|z_2^3| = 8$ et $\arg z_2^3 = \dfrac{\pi}{2}$, donc $z_2^3 = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 8i$.

Donc $Z = -\dfrac{4}{8i} = \dfrac{-1}{2i} = \dfrac{i}{2}$.

→ EXERCICES 30 et 31

EXERCICE RÉSOLU 8 Déterminer un ensemble

ÉNONCÉ n est un entier naturel, on pose $z = (\sqrt{3} + i)^n$.

1) Déterminez un argument de z.

2) Déduisez-en l'ensemble E des valeurs de n pour lesquelles z est un réel strictement positif.

SOLUTION COMMENTÉE

1) D'après l'exercice résolu 7, $\arg(\sqrt{3} + i) = \dfrac{\pi}{6}$ donc, d'après les conséquences du théorème 3, $\arg z = n\dfrac{\pi}{6}$.

2) Or « z est un réel strictement positif » équivaut à « $\arg z = 0$ », donc à « il existe un entier k tel que $n\dfrac{\pi}{6} = 2k\pi$ » donc à « $n = 12k$ ou n est un multiple de 12 ».

L'ensemble E est donc l'ensemble des multiples de 12.

Commentaire. « Le complexe z est réel » équivaut à « $\text{Im}(z) = 0$ » ou « $z = \bar{z}$ » ou « $\arg z = 0$ ou π, si $z \neq 0$ ».

« Le complexe z est imaginaire pur » équivaut à « $\text{Re}(z) = 0$ » ou « $z + \bar{z} = 0$ » ou « $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$, si $z \neq 0$ ».

→ EXERCICE 82

5 Forme exponentielle

5.1 Cas d'un nombre complexe de module 1

Tout nombre complexe z de module 1 peut s'écrire sous la forme $z = \cos\theta + i\sin\theta$.
Notons U l'ensemble des complexes de module 1 et f la fonction qui, à tout réel θ, associe le complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ dans U.

Prouvons que pour tous réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$:

$$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ \text{et } f(\theta)f(\theta') &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'). \end{aligned}$$

D'où le résultat.
Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits ». D'où l'idée, puisque multiplier des complexes de module 1, c'est ajouter leurs arguments, de poser $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

DÉFINITION 4

Le complexe de module 1 dont un argument est θ, est noté $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Note

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$;
- $e^{i\pi} = -1$.

5.2 Cas général

Nous avons vu que tout complexe non nul, dont un argument est θ, peut s'écrire $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Donc, compte tenu de ce qui précède, $z = |z|e^{i\theta}$.

DÉFINITION 5

Une **forme exponentielle** d'un nombre complexe **non nul** z, dont un argument est θ, est l'écriture $z = |z|e^{i\theta}$.

5.3 Règles de calcul sur les formes exponentielles

En appliquant les propriétés énoncées au paragraphe **4.** avec $r > 0$, $r' > 0$:

THÉORÈME 5

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.
- « $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ » équivaut à « $r = r'$ et $\theta = \theta'$ (mod 2π) ».

EXEMPLE $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z' = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

alors $zz' = 6e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Formule de Moivre. $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ, $(e^{i\theta})^n$ a pour module 1 et pour argument $n\theta$ donc il s'écrit $e^{in\theta}$:

pour tout θ réel, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Formules d'Euler. Puisque $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, on en déduit les relations, appelées formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

COMPRENDRE

Pourquoi une forme exponentielle ?

Même, si ce n'est qu'une réécriture d'une forme trigonométrique, grâce à cette nouvelle forme, les règles de calcul sur le produit et le quotient sont transformées en règles de calcul sur les puissances analogues à celles connues sur les réels.

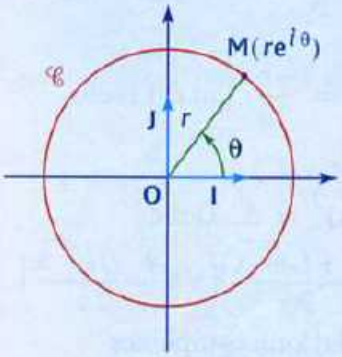
➜ EXERCICE RÉSOLU 9

Formule $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$

Si $z = |z|e^{i\theta}$ alors $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$.
En effet, $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg\overline{z} = -\theta$.

Images des complexes $re^{i\theta}$

r étant fixé, $r > 0$, l'ensemble des images des complexes $re^{i\theta}$, θ décrivant $\mathbb{R}$, est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.
En effet, dire que M(z) appartient à ce cercle équivaut à $OM = r$ donc à $|z| = r$. Et cela signifie qu'il existe θ réel tel que $z = re^{i\theta}$.



En particulier, le cercle trigonométrique est l'ensemble des images des complexes $e^{i\theta}$, θ décrivant $\mathbb{R}$.

Forme exponentielle de $ae^{i\theta}$ avec $a < 0$

➜ EXERCICE RÉSOLU 10

SAVOIR FAIRE

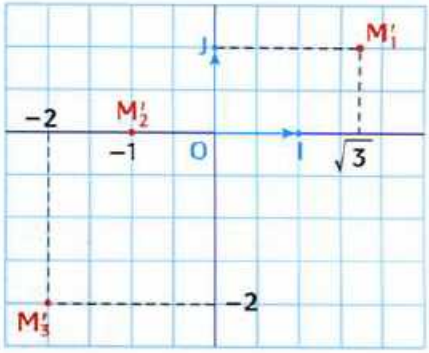
EXERCICE RÉSOLU 9 Changer de « forme »

ÉNONCÉ **1)** Placez les points M_1, M_2 et M_3 images respectives des complexes :

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Déterminez la forme algébrique de chacun de ces complexes.

2) Réciproquement, trouvez les affixes sous forme exponentielle des points M_1', M_2' et M_3' disposés comme l'indique la figure ci-contre.



SOLUTION COMMENTÉE

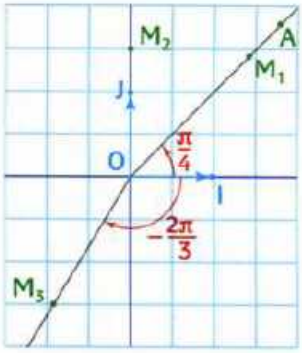
1) Les nombres étant sous forme exponentielle, on connaît un argument θ et le module r de chacun. Pour placer M_1 par exemple, on trace la demi-droite [OA) telle que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}$,

puis sur cette demi-droite, on place M_1 tel que :

$$OM_1 = 2.$$

On procède de même pour M_2 et M_3.

La forme algébrique s'obtient en développant :



- $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;
- $z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}i$;
- $z_3 = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$.

2) Par lecture de la figure et connaissance des lignes trigonométriques usuelles :

$$z_1' = 2e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_2' = 1e^{i\pi} \text{ et } z_3' = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

➜ EXERCICES 34 à 38

EXERCICE RÉSOLU 10 Trouver une forme exponentielle

ÉNONCÉ Déterminez une forme exponentielle de $z = -2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

SOLUTION COMMENTÉE

$-2e^{i\frac{\pi}{7}}$ est bien de la forme $re^{i\theta}$ mais r, ici $r = -2$, est négatif donc ce n'est pas une forme exponentielle. Pour trouver une telle forme, on utilise $-1 = e^{i\pi}$, on écrit alors $z = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{7}}$ donc $z = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)} = 2e^{i\frac{8\pi}{7}}$ est une forme exponentielle de z.

Il en résulte que $|z| = 2$ et $\arg z = \frac{8\pi}{7}$.

➜ EXERCICES 35, 39

6 Équation du second degré à coefficients réels

6.1 Vocabulaire

On appelle équation du second degré à **coefficients réels** toute équation qui peut s'écrire $aX^2 + bX + c = 0$, où X est l'inconnue, et a, b, c sont trois réels donnés, $a \neq 0$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation, c'est trouver **tous les complexes** u tels que $au^2 + bu + c = 0$; u est dit solution de l'équation, ou encore **racine** de l'équation.
Nous allons prouver que, dans $\mathbb{C}$, cette équation du second degré a deux racines complexes, éventuellement confondues.

6.2 Résolution

Pour résoudre, on procède au départ comme dans $\mathbb{R}$, l'idée est de factoriser $az^2 + bz + c$, et pour cela de l'écrire d'abord sous forme canonique. Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ étant les mêmes que celles dans $\mathbb{R}$, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on aboutit encore à :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Note
Voir le lexique page 478.

Puisque $a \neq 0$, résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est résoudre :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

Le nombre Δ, appelé encore **discriminant**, est réel, car a, b et c sont réels.

- **Si $\Delta > 0$**, on sait que l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$, et deux seulement, donc elle a deux solutions complexes et deux seulement, puisque $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
Les solutions sont $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- **Si $\Delta = 0$**, l'équation a une solution et une seule, $z = \dfrac{-b}{2a}$, qui est réelle.

- **Si $\Delta < 0$**, on utilise l'identité $z^2 + z'^2 = (z + iz')(z - iz')$.
Puisque $\Delta < 0$, $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$

Et dans ce cas, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Les **solutions** sont deux complexes **conjugués** : $\overline{z_2} = z_1$.

Remarque. Dans $\mathbb{C}$, le trinôme $az^2 + bz + c$, $a \neq 0$, se factorise toujours :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2),$$

z_1 et z_2 étant réels, distincts ou confondus, ou complexes et conjugués.

COMPRENDRE

Équation incomplète

Quand l'équation est incomplète, c'est-à-dire lorsque $b = 0$, ou $c = 0$, il est inutile de calculer Δ.

Exemples.

- $4z^2 + 8 = 0$ est équivalente à $z^2 + 2 = 0$ donc à $z^2 + (\sqrt{2})^2 = 0$.
Or
$z^2 + (\sqrt{2})^2 = (z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})$.
Donc $z^2 + 2 = 0$ s'écrit
$$(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2}) = 0$$
et a deux solutions $-i\sqrt{2}$ et $i\sqrt{2}$.
- $3z^2 - z = 0$ est équivalente à $z(3z - 1) = 0$ donc à $z = 0$ ou $3z = 1$.
Elle a deux solutions 0 et $\frac{1}{3}$.

Racines et coefficients

Comme vous l'avez vu en Première S, avec des racines réelles, lorsque l'équation :
$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0,$$
a deux racines complexes, alors :
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 11 — Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

ÉNONCÉ

Résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

SOLUTION COMMENTÉE

$a = 1$, $b = -8\sqrt{3}$, $c = 64$, donc $\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 64 = -64$.
$\Delta < 0$ donc il y a deux solutions complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 4\sqrt{3} + 4i.$$

→ EXERCICES 40 à 42

EXERCICE RÉSOLU 12 — BAC Se ramener à une équation du second degré

ÉNONCÉ

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :
$$(E) : z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$
1) Démontrez que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z - 2)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b, c sont trois réels.
2) Résolvez l'équation (E).

SOLUTION COMMENTÉE

1) • $2^3 + 2 \times 2^2 - 16 = 0$ donc 2 est solution de (E).

• Dire qu'il existe trois réels a, b, c tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $(z - 2)(az^2 + bz + c) = z^3 + 2z^2 - 16$ revient à dire que :
$az^3 + z^2(b - 2a) + z(c - 2b) - 2c = z^3 + 2z^2 - 16$ et pour cela, il suffit que
$(a ; b ; c)$ soit solution du système
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -16 \end{cases}$$
Ainsi $a = 1$, $b = 4$ et $c = 8$ conviennent.
Donc (E) est l'équation $(z - 2)(z^2 + 4z + 8) = 0$, ce qui équivaut à $z - 2 = 0$ ou $z^2 + 4z + 8 = 0$.
2) Comme le discriminant de $z^2 + 4z + 8$ est $\Delta = -16$, (E) a trois solutions $z_1 = 2$, $z_2 = -2 - 2i$ et $z_3 = -2 + 2i$.

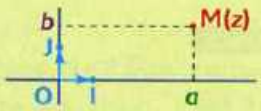
→ EXERCICES 57 à 64

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

Nombres complexes et géométrie. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct

• La forme algébrique $z = a + ib$, avec a et b réels, est liée au repérage du point M(z), par ses coordonnées cartésiennes $(a\,;\,b)$.

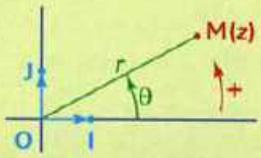


$(O\,;\,\overrightarrow{OI})$ **est l'axe des réels.** $(O\,;\,\overrightarrow{OJ})$ **est l'axe des imaginaires purs.**

• Le module de z, noté $|z|$, est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

• La **forme trigonométrique** d'un nombre complexe non nul, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est liée aux coordonnées polaires.
Lorsque $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

on retrouve $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$ et $r^2 = a^2 + b^2$.



→ EXERCICE RÉSOLU 5

• En posant par définition, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, la forme trigonométrique s'écrit $z = |z|e^{i\theta}$ Cette écriture est appelée **forme exponentielle** de z.

Conjugué d'un nombre complexe

• $z\bar{z} = |z|^2$ ($z\bar{z}$ réel) ; $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$.

• Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués. Il en est de même pour le produit et le quotient.

Calculs dans $\mathbb{C}$

• On calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ (avec $i^2 = -1$), mais on n'utilise pas d'inégalités.

• Pour multiplier des complexes non nuls, on multiplie les modules et on ajoute les arguments.

• Pour diviser des complexes non nuls, on divise les modules et on retranche les arguments.

• Une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ ($a\,;b\,;c$ réels, $a \neq 0$) a toujours dans $\mathbb{C}$ deux racines même si $\Delta < 0$. Lorsque $\Delta > 0$ ou lorsque $\Delta = 0$, elles se calculent comme dans $\mathbb{R}$.

→ EXERCICE RÉSOLU 11

DES réflexes À AVOIR

Pensez à utiliser le conjugué $\bar{z}$ dans la recherche de la forme algébrique d'un quotient.

→ EXERCICE RÉSOLU 3

Pour calculer des puissances, pensez à utiliser, de préférence, les formes trigonométriques ou exponentielles.

→ EXERCICE RÉSOLU 7

Pour démontrer que z est réel non nul, 3 façons :
• $\text{Im}(z) = 0$; • $z = \bar{z}$; • $\arg(z) = 0$ ou π si $z \neq 0$.

Pour démontrer que z est imaginaire pur, 3 façons :
• $\text{Re}(z) = 0$; • $z + \bar{z} = 0$; • $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$ si $z \neq 0$.

DES erreurs À ÉVITER

Ne pas écrire d'inégalités entre complexes.

Ne pas croire que :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
est toujours une forme trigonométrique ou exponentielle d'un complexe.
Cela n'est vrai que si $r > 0$.

TD 1 Équations $P(z) = 0$ où P est un polynôme complexe à coefficients réels

Dire que P est un **polynôme complexe à coefficients réels** signifie que P est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ du type $z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ avec a_0, a_1, a_2, ..., a_n réels. Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que le polynôme P est de degré n.
Nous admettrons ici les résultats suivants :

Note
Ce résultat est énoncé pour les polynômes à coefficients réels et à variable réelle dans le lexique page 478.

- **Si z_0 est racine du polynôme P de degré n (c'est-à-dire si $P(z_0) = 0$), alors il existe un polynôme Q de degré $(n-1)$ à coefficients réels tel que, pour tout complexe z, $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.**
- Tout polynôme complexe de degré n a n racines dans $\mathbb{C}$ distinctes ou confondues.
- Ces résultats sont vrais même si les coefficients sont non réels.

1 Polynômes de degré trois : exemple

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0$ **[1]**.

1. Pourquoi existe-t-il un polynôme Q de degré 2 tel que l'équation précédente s'écrive :
$$(z+1)Q(z) = 0 ?$$

2. Déterminez $Q(z)$, puis résolvez l'équation $Q(z) = 0$ et l'équation **[1]**.

3. Les solutions de l'équation **[1]** sont les affixes de trois points A, B, C.
Démontrez que le triangle ABC est équilatéral.

2 Solutions conjuguées

P est un polynôme complexe à coefficients réels défini par :
$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + z_0 .$$
Supposons que z_0 est un complexe solution de $P(z) = 0$, c'est-à-dire que $P(z_0) = 0$.

1. **a)** Démontrez que $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$.

b) Déduisez-en que $\overline{z_0}$ est aussi solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. Lorsque z_0 est **non réel**, pourquoi alors $P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})Q(z)$?

CONCLUSION P est un polynôme complexe à coefficients réels. Si l'équation $P(z) = 0$ admet une solution complexe z_0, alors son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi solution de cette équation.

3 Applications

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0$ **[2]**.

1. Vérifiez que $i\sqrt{3}$ est solution de cette équation.

2. Pourquoi existe-t-il un polynôme Q de degré 2 tel que l'équation **[2]** s'écrive :
$$(z^2 + 3)Q(z) = 0 ?$$

3. Résolvez alors l'équation proposée et démontrez que si les solutions de **[2]** sont les affixes de quatre points A, B, C, D, alors ces points sont sur un cercle. Précisez le centre et le rayon de ce cercle.

TD 2 Calcul de sommes trigonométriques

θ est un nombre réel et n un entier naturel. On se propose de calculer les sommes :

$$C_n = 1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta \text{ et } S_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta.$$

L'idée consiste à déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $C_n + iS_n$ pour ensuite identifier C_n comme sa partie réelle et S_n comme sa partie imaginaire. Pour cela, posons $u = \cos\theta + i\sin\theta$.

1. Expliquez pourquoi $C_n + iS_n = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n$.

2. Dans le cas où $\theta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, démontrez que $C_n = n + 1$ et $S_n = 0$.

3. On suppose maintenant que $\theta \neq 2k\pi$.

a) Démontrez que $1 + u + \cdots + u^n = \dfrac{1 - u^{n+1}}{1 - u} = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.

b) Mettez $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur dans $u - 1$ et $e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}$ en facteur dans $u^{n+1} - 1$ et prouvez que :

$$C_n + iS_n = \left(e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

c) Déduisez-en C_n et S_n.

TD 3 Linéarisation

Note
Un intérêt de la linéarisation est de calculer des primitives de fonctions du type $x \mapsto a\cos^n x \sin^n x$.

Linéariser consiste à exprimer $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ ou, de façon plus générale, une somme de termes $a\cos^n x \sin^n x$ comme somme de termes $b\cos qx$ ou $c\sin qx$ (avec a, b, c réels et n, q entiers naturels).

1. Exemple

On se propose de linéariser $\sin^4 x$.

Méthode

• On utilise les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

• On développe $(e^{ix} - e^{-ix})^4$ en utilisant la **formule du binôme** (voir chapitre 9).

• On réduit ce développement en utilisant l'égalité $e^{ikx}e^{ik'x} = e^{i(k+k')x}$ et on regroupe les termes e^{ikx} et e^{-ikx} et les termes $e^{ik'x}$ et $-e^{-ik'x}$.

• On utilise à nouveau les formules d'Euler sous la forme :
$e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx$, $e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i\sin kx$.

Opérations

• $\sin^4 x = \dfrac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{2^4 i^4} = \dfrac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{16}$.

• $\sin^4 x = \dfrac{1}{16}[e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}]$

• $\sin^4 x = \dfrac{1}{16}[(e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6]$

• $\sin^4 x = \dfrac{1}{16}[2\cos 4x - 8\cos 2x + 6]$
$= \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$.

2. Application

Pour chacun des cas suivants, linéarisez le polynôme trigonométrique f donné.

• $f(x) = \cos^4 x$. • $f(x) = \cos^3 2x$. • $f(x) = \sin^4 x \cos^2 x$.

EXERCICES

Maitriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. L'ensemble des nombres complexes

1 **1.** D est le point de coordonnées $(\sqrt{3} ; 3)$.
Quelle est son affixe ?

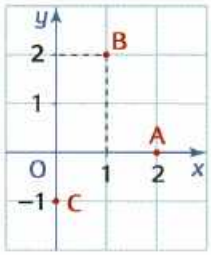
2. **a)** Placez les points A, B, C d'affixes respectives :
$z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = -\sqrt{3} - i$, $z_C = 2i$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère AOCD ?

3. Calculez $|z_A|$; $|z_B|$; $|z_C|$.
Qu'en déduisez-vous ?

4. Quelle est l'affixe du point E tel que ODEB soit un parallélogramme ?

2 x est un nombre complexe.
On note :
$z_1 = 2 + xi$ et $z_2 = 3 + x + 4i$.
Écrivez z_1 et z_2 sous la forme algébrique dans chacun des cas suivants :



a) x est l'affixe de A ;

b) x est l'affixe de C ;

c) x est l'affixe de B.

Pour les exercices 3 à 12, donnez la forme algébrique des complexes proposés.

☞ **Aide.** Voir les exercices résolus 1, 2, 3, pages 319 et 321.

3 $z_1 = 3 + 2i - 1 + 3i$; $z_2 = -4 + 7i - (2 + 4i)$;
$z_3 = 12 - 3i - 4(-5 + 8i)$.

4 $z_1 = (2 + i)(3 - 2i)$; $z_2 = (1 + i)^2$;
$z_3 = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$; $z_4 = (4 - 3i)^2$.

5 $z_1 = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$;
$z_2 = (2 + i)^2(1 - 2i)$;
$z_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6 $z_1 = \frac{1}{1-i}$; $z_2 = \frac{1}{2 - i\sqrt{3}}$; $z_3 = \frac{1}{4 - 3i}$.

7 $z_1 = \frac{4 - 6i}{3 + 2i}$; $z_2 = \frac{5 + 15i}{1 + 2i}$; $z_3 = \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$.

8 $z_1 = \frac{3 - 6i}{3 + i} + \frac{4}{3 - i}$; $z_2 = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$.

9 On pose $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$.

1. Calculez $\text{Re}(z_1 + z_2 + z_3)$; $\text{Re}(iz_1)$ et $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

2. Calculez $\text{Im}\left(z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3\right)$; $\text{Im}(z_1 z_2)$.

3. Calculez $|z_1|$; $|z_2|$; $|z_1 z_2|$ et $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

10 **1.** Justifiez que $(1 + i)^8$ est un réel positif.

2. Qu'en déduisez-vous pour le point d'affixe $(1 + i)^8$?

11 Pour tout complexe z, on pose $f(z) = z^2 - z$ avec $z = x + iy$, x et y réels.
Démontrez que $f(z)$ a pour partie réelle $x^2 - y^2 - x$ et pour partie imaginaire $y(2x - 1)$.

12 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z. (Donnez la solution sous forme algébrique.)

a) $(1 + i)z = 3 - i$; **b)** $2z + 1 - i = iz + 2$;

c) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$; **d)** $\frac{z + 1}{z - 1} = 2i$.

13 P est le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 + (-2 + 3i)z^2 + (13 - i)z - 6 - 10i.$$

Les complexes i ; 3 ; $1 + i$ sont-ils racines de P ?

14 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les systèmes proposés.

a) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$.

15 Dans chacun des cas suivants, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

a) $|z| = 3$; **b)** $\text{Re}(z) = -2$; **c)** $\text{Im}(z) = 1$.

EXERCICES

2. Conjugué d'un complexe

Pour les exercices 16 à 21, reportez-vous à l'exercice résolu 4, page 321.

16 Donnez la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ du complexe z dans chacun des cas suivants.

a) $z = 3 - 4i$; **b)** $z = \dfrac{1}{i-1}$; **c)** $z = \dfrac{3-i}{1+i}$.

17 On note $z_1 = \dfrac{2i+1}{i+2}$ et $z_2 = \dfrac{1-2i}{2-i}$.

1. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que $z_1 + z_2$ est un nombre réel et $z_1 - z_2$ un imaginaire pur ?

2. Retrouvez ces résultats par le calcul.

18 Écrivez en fonction de $\bar{z}$, les conjugués des complexes Z suivants :

a) $Z = 2 + 3iz$; **b)** $Z = (1 + iz)(1 + 2z)$;

c) $Z = \dfrac{1+iz}{3+z}$; **d)** $Z = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i$.

19 $z = x + iy$ avec x et y réels ; on note Z le nombre complexe $Z = z - 2\bar{z} + 2$.

1. Calculez en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z = 0$ d'inconnue z.

20 $z = x + iy$ avec x et y réels. On note Z le nombre complexe $Z = iz + \bar{z} - z - 2i$.

1. Vérifiez que $Z - \bar{Z} = 2i(x - y - 2)$.

2. Démontrez que « le point d'affixe Z est sur l'axe des abscisses » équivaut à « le point d'affixe z est sur la droite d'équation $y = x - 2$ ».

21 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z.

a) $2\bar{z} = i - 1$; **b)** $(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$;

c) $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$.

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Pour les exercices 22 à 26, reportez-vous à l'exercice résolu 5, page 323.

22 Représentez dans le plan complexe les points d'affixes respectives :

$1 + i$; $-1 - i$; 5; -3; $3i$; $4 - 4i$; $-5i$; $3 + 3i$

puis, sans calcul, par des considérations géométriques, donnez un argument de chacun de ces nombres.

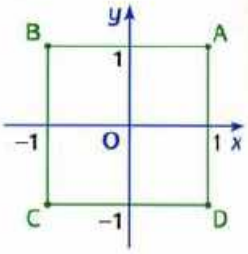
23 Donnez une forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$; **b)** $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

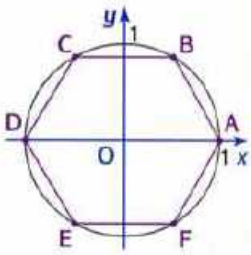
c) $z_3 = 4 - 4i$; **d)** $z_4 = -2i$;

e) $z_5 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$; **f)** $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$.

24 Dans un repère orthonormal direct, on a représenté le carré ABCD ci-contre.
Donnez l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré ABCD.



25 Dans un repère orthonormal direct, on a représenté ci-contre l'hexagone régulier ABCDEF de centre O.
Donnez l'affixe et un argument de chacun des sommets de l'hexagone.



26 À l'aide d'une calculatrice, donnez une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants.

a) $z = 4 - 3i$; **b)** $z = 1 + 2i$; **c)** $z = -2 + i$.

27 Dans chacun de cas suivants, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

a) $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$; **b)** $\arg z = -\dfrac{2\pi}{3}$; **c)** $\arg z = \pi$.

4. Modules et arguments

28 z est un nombre complexe de module r et dont un argument est α. Trouvez le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$-z;\quad \bar{z};\quad \frac{1}{z};\quad z^3;\quad z^p;\quad \frac{1}{z^p}\ (p \in \mathbb{N}^*).$$

29 Dans chacun des cas suivants, déterminez le module et un argument de z :

a) $z = -4$; **b)** $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;

c) $z = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$; **d)** $z = \sin\dfrac{\pi}{3} + i\cos\dfrac{\pi}{3}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 323.

30 Trouvez une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

a) $z = (1 - i)^2$; **b)** $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$;

c) $z = (1 - i\sqrt{3})(1 + i)$; **d)** $z = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 325.

31 Écrivez sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants.

a) $z = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$; **b)** $z = \left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)^6$;

c) $z = (i+1)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$; **d)** $z = (1+i)^{2\,006}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 325.

32 BAC On donne les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = 1 - i.$$

1. Donnez une forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Donnez la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. Déduisez-en que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

33 Dans chacun des cas suivants, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $\arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$; **b)** $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$;

c) $\arg(z) = \arg\bar{z}$.

5. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Pour les exercices 34 à 38, reportez-vous à l'exercice résolu 9, page 327.

34 On pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Trouvez une forme exponentielle des complexes suivants :

z_1z_2 ; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^3 ; $z_1z_2z_3$; z_3^4 ; $\frac{z_2}{z_3}$; $\frac{1}{z_3}$; $\bar{z}_3z_1z_2$.

35 Donnez une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

$z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$; $z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$;

$z_3 = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_4 = (1+i\sqrt{3})^4$;

$z_5 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

36 Dans chacun des cas suivants, écrivez z sous forme exponentielle et déduisez-en la forme algébrique de $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$.

a) $z = \frac{6}{1+i}$; **b)** $z = (1+i\sqrt{3})^4$;

c) $z = 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$; **d)** $z = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$;

e) $z = (2\sqrt{3} + 2i)^5e^{-i\frac{\pi}{3}}$; **f)** $z = \frac{(2+2i)^6}{(1-i)^4}e^{i4\frac{\pi}{3}}$.

37 On pose $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

1. Écrivez $\frac{z_1}{z_2}$:

a) sous forme algébrique ;

b) sous forme exponentielle.

2. Déduisez-en le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$, puis les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

38 BAC Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm). On note A, B, C, D les points d'affixes respectives :

$a = 1$; $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1. Écrivez c sous forme exponentielle et d sous forme algébrique.
2. **a)** Placez les points A, B, C, D dans le repère.

b) Démontrez que le quadrilatère OACB est un losange.

39 α est un réel. Déterminez le module et un argument de chacun des complexes suivants :

$z_1 = -e^{i\alpha}$; $z_2 = -\cos\alpha + i\sin\alpha$; $z_3 = \sin\alpha - i\cos\alpha$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 10, page 327.

6. Équation du second degré à coefficients réels

Pour les exercices 40 à 42, reportez-vous à l'exercice résolu 11, page 329.

40 Résolvez dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue z.

a) $2z^2 - 6z + 5 = 0$; **b)** $z^2 - 5z + 9 = 0$;

c) $z^2 + z + 1 = 0$; **d)** $z^2 - 2z + 3 = 0$;

e) $z^2 = z + 1$; **f)** $z^2 + 3 = 0$.

41 Résolvez dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue z.

a) $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$;

b) $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$, où θ est un réel.

42 Résolvez dans $\mathbb{C}$, le système :

$$\begin{cases} z_1z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = -2. \end{cases}$$

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

43 Recherche d'ensembles

u est un complexe donné. Pour tout complexe z, $z \neq 1$, on pose :

$$Z_1 = \frac{u - \bar{u}z}{1 - z} \text{ et } Z_2 = \frac{z + i}{z - i}.$$

Objectif : déterminer l'ensemble des complexes z tels que Z_1 est un réel, l'ensemble des complexes z tels que Z_2 est imaginaire pur. Dans chaque cas, représenter cet ensemble.

1. Il s'agit d'un problème de détermination d'ensembles (voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche H, page 456.
« Z est réel » ou « Z est imaginaire pur » peut se traduire de trois façons :

Z est un réel	Z est un imaginaire pur
(1) $\text{Im}(Z) = 0$	(1) $\text{Re}(Z) = 0$
(2) $Z = \bar{Z}$	(2) $Z + \bar{Z} = 0$
(3) $\arg Z = 0$ ou π, $Z \neq 0$	(3) $\arg Z = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$, $Z \neq 0$

(La première façon exige le calcul de $\text{Im}(Z)$ ou de $\text{Re}(Z)$, en général à partir de l'écriture algébrique $z = x + iy$, x et y réels.)
Choisir, parmi ces trois façons, la mieux adaptée est parfois délicat. La présence de u et de son conjugué $\bar{u}$ dans l'expression de Z_1 incite à passer par « $Z = \bar{Z}$ » pour déterminer le premier ensemble.

a) Justifiez que $\overline{Z_1} = \frac{\bar{u} - u\bar{z}}{1 - \bar{z}}$.

b) Prouvez que $Z_1 = \bar{Z}_1$ équivaut à $(u - \bar{u})(1 - |z|^2) = 0$.

2. Le raisonnement s'articule alors ainsi. On note $\mathscr{E}_1$ l'ensemble cherché. De ce qui précède, il résulte que : « $z \in \mathscr{E}_1$ » équivaut à « $(u - \bar{u})(1 - |z|^2) = 0$ » **[1]**.
Il s'agit de tirer de **[1]** une condition sur z.

a) Prouvez que si $u - \bar{u} = 0$, alors $\mathscr{E}_1$ est l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de 1.

b) Prouvez que si $u - \bar{u} \neq 0$, alors $\mathscr{E}_1$ est l'ensemble des complexes de module 1 privé de 1.

c) Représentez $\mathscr{E}_1$, dans le plan complexe, lorsque $u - \bar{u} \neq 0$.

3. Pour déterminer le deuxième ensemble, on ne voit pas *a priori* de « meilleure façon ».
On choisit donc de poser $z = x + iy$ avec x et y réels, puis d'écrire la forme algébrique de Z_2, $Z_2 = X + iY$, en fonction de x et de y.

Prouvez que $X = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$ et $Y = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$.

4. Pour le raisonnement, on note $\mathscr{E}_2$ l'ensemble des complexes z tel que Z_2 est imaginaire pur.

a) Prouvez que $\mathscr{E}_2$ est l'ensemble des nombres z, $z \neq 1$, $z = x + iy$ avec x et y réels, tels que $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

b) Représentez cet ensemble dans le plan complexe.

44 Suites et complexes

On note u le complexe $1 + i$.
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u^n + \bar{u}^n$.

Objectif : préciser, si possible, les valeurs de n :

- pour lesquelles S_n peut être nul ;
- pour lesquelles S_n peut être un entier relatif.

1. Avant d'effectuer tout calcul, il est bon de réfléchir pour voir si les relations avec lesquelles on doit travailler peuvent nous indiquer une piste.
Ici, on remarque que S_n est la somme de deux complexes conjugués.

Justifiez cette affirmation puis l'égalité $S_n = 2\text{Re}(u^n)$.

2. Il s'agit maintenant de calculer $\text{Re}(u^n)$ à partir de $u = 1 + i$.
Pour calculer la puissance d'un nombre complexe, il est souvent préférable d'utiliser la forme trigonométrique ou exponentielle.

a) Sans calcul, à l'aide d'un dessin, trouvez $|u|$ et $\arg u$.

b) Déduisez-en que $S_n = a_n \cos(n\theta)$, où a_n et θ sont deux réels que vous préciserez.

3. Dire que S_n est nul revient donc à dire que $(\cos n\theta) = 0$ et donc encore à dire que :

$$n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \text{ est entier relatif.}$$

a) Justifiez ces affirmations.

b) Déduisez-en les valeurs de n pour lesquelles $S_n = 0$.

4. Pour savoir si $a_n \cos n\theta$ peut être entier relatif, il est nécessaire de connaître les valeurs de la suite $\cos n\theta$. Pour cela, on peut calculer les premiers termes.

a) Calculez les premiers termes, en utilisant au besoin le cercle trigonométrique.
Prouvez que cette suite est périodique de période 8.

☞ **Note.** **Dire qu'une suite (u_n) est périodique de période p, p entier naturel, signifie que pour tout n, $u_{n+p} = u_n$.**

b) Déduisez-en que S_n est un entier relatif quel que soit l'entier n.

Pour progresser

Calculs dans $\mathbb{C}$

45 Pour tout complexe z, on pose $Z = 2z^2 - 2z + 4$ avec $z = x + iy$, $Z = X + iY$, x, y, X, Y réels.

1. Calculez X et Y en fonction de x et y.

2. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe Z soit réel ?

46 On note $z = x + iy$, x et y réels.
À tout complexe z, on associe $Z = 2\bar{z} - 2 + 6i$.

1. Calculez en fonction de x et y, les parties réelle et imaginaire de Z.

2. Existe-t-il des complexes z tels que $Z = z$?

47 • Dans le plan complexe, m est un point d'affixe $z = x + iy$, x et y réels. À tout complexe z, $z \neq 1$, on associe $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$.

1. Exprimez $Z + \bar{Z}$ en fonction de z et $\bar{z}$.

2. Démontrez que « Z est un imaginaire pur » équivaut à « m est un point d'un cercle privé d'un point ». (Voir *Types de problèmes et raisonnements* page 457)

48 • 1. Écrivez plus simplement les nombres :

$$i^2 ;\ i^3 ;\ i^4 ;\ i^8 ;\ i^{13}.$$

2. Démontrez que la suite des nombres complexes z_n définie par $z_n = i^n$ est périodique.
Précisez sa période.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 44, page 336.

3. On pose $S_n = 1 + i + \cdots + i^n$.

a) Calculez S_1, S_3, S_6, S_{13}.

b) Vérifiez que $S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$. Déduisez-en S_n.

c) Simplifiez l'écriture de S_n dans chacun des cas suivants lorsque $p \in \mathbb{N}$:

$n = 4p$; $n = 4p + 1$; $n = 4p + 2$; $n = 4p + 3$.

49 • Écrivez sous forme algébrique les complexes :

$$z_1 = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \text{ et } z_2 = (3 + i)^4.$$

50 ⁝ z est un complexe quelconque non réel et u un complexe tel que $|u| = 1$ et $u \neq 1$.

Prouvez que $Z = \dfrac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel.

Réciproquement, si Z est réel et z complexe non réel, est-il vrai que $|u| = 1$?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 321.

Équations dans $\mathbb{C}$

51 Trouvez les complexes p et q tels que l'équation :

$$z^2 + pz + q = 0$$

admette pour solutions les nombres $1 + 2i$ et $3 - 5i$.

52 Résolvez dans $\mathbb{C}$.

a) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$; **b)** $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$.

53 BAC 1. Justifiez que $(1 + i)^6 = -8i$.

2. On note (E) l'équation $z^2 = -8i$.

a) Déduisez du 1. une solution de (E).

b) (E) possède une autre solution ; écrivez cette solution sous forme algébrique.

3. Déduisez également du 1. une solution de l'équation $z^3 = -8i$.

54 • Résolvez dans $\mathbb{C}$.

a) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$; **b)** $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$.

55 • BAC 1. Résolvez dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Précisez le module et un argument de chacune des solutions.

2. Déduisez-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0.$$

56 ⁝ θ est un réel donné.

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2\sin\theta z + 1 = 0$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les points ayant pour affixes les solutions de l'équation (E).
Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

Pour les exercices 57 à 64, reportez-vous au TD 1, page 331 et à l'exercice résolu 12, page 329.

57 On pose pour tout complexe z,

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i.$$

1. Vérifiez que pour tout z,

$$f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4).$$

2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

58 1. Résolvez dans $\mathbb{C}$, $z^2 + z + 1 = 0$ et déduisez-en les solutions, dans $\mathbb{C}$, de $z^3 - 1 = 0$.

2. On désigne par j le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculez j^2, j^3, j^{2006}.

b) Calculez $S = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2006}$.

59 BAC On considère le polynôme :

$$P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40,$$

où z est un nombre complexe.

1. Déterminez deux réels a et b tels que :

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a).$$

2. Résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

60 • BAC Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^4 - 1.$$

1. Factorisez $P(z)$.

2. Déduisez-en les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation :

$$P(z) = 0.$$

3. Déduisez de la question précédente les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, d'inconnue z.

61 • BAC Pour tout complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

1. b est un réel.
Exprimez en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(ib)$.

2. Déduisez-en que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

3. Démontrez qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

4. Résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

62 1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 4.$$

Calculez $f(-4)$ et déduisez que -4 est l'unique solution réelle de l'équation $f(x) = 0$.

2. On pose :

$$P(z) = 2z^4 + (10 - i)z^3 + (10 - 5i)z^2 + (8 - 5i)z - 4i.$$

a) L'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle, et une seule. Trouvez-la, en utilisant la question 1.

b) L'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure. Trouvez-la.

c) Déterminez deux nombres a et b tels que pour tout complexe z :

$$P(z) = (2z - i)(z + 4)(z^2 + az + b).$$

Résolvez alors l'équation $P(z) = 0$.

63 On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.

1. α désigne un complexe quelconque.
Démontrez que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.
Déduisez-en que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. Calculez $P(1 + i)$.
Indiquez deux solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.

3. **a)** Vérifiez que $Q(z) = [z - (1 + i)][z - (1 - i)]$.

b) Vérifiez que $P(z)$ est le produit du polynôme $Q(z)$ et d'un polynôme $Q_1(z)$ du second degré. Déterminez $Q_1(z)$.

c) Résolvez l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

64 On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

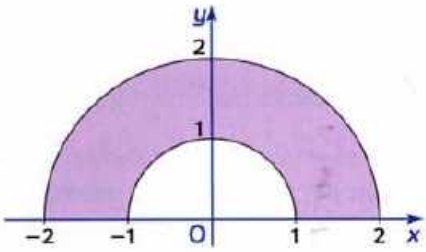
1. Démontrez que si le complexe α est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.

2. Calculez $P(1 + i)$.
Déduisez-en la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

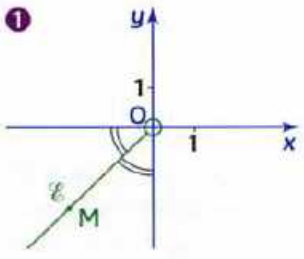
3. Écrivez $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

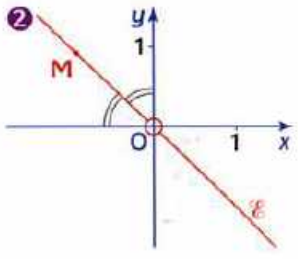
Modules et arguments

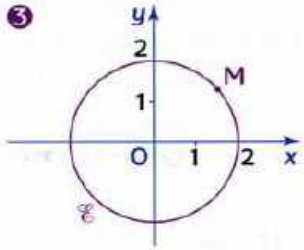
65 M est un point du plan d'affixe z, de module r et d'argument θ. On note S le domaine coloré ci-dessous, S est compris entre deux demi-cercles.
Quelles conditions doivent vérifier r et θ pour que M appartienne à S ?

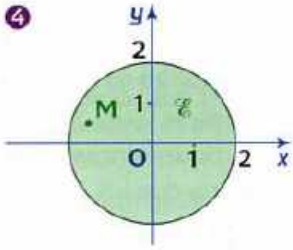


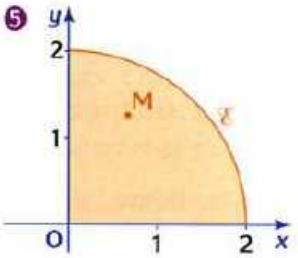
66 Dans chacun des cas suivants, on a représenté un ensemble $\mathscr{E}$ de points M du plan, dont l'affixe z a pour module r et pour argument θ.
Caractérisez, à l'aide de θ ou de r ou des deux, cet ensemble $\mathscr{E}$.

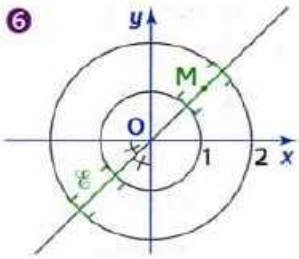








⑤ 

⑥ 

67 • **Identité du parallélogramme**

1. z et z' sont deux complexes, démontrez que :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2(|z|^2+|z'|^2).$$

2. Interprétez géométriquement cette égalité.

☞ **Aide.** Voir *Comprendre*, page 319.

68 • a, b, c, d sont quatre réels. On pose $z_1 = a+ib$ et $z_2 = c+id$.

1. En calculant le module de z_1z_2 de deux façons différentes, démontrez que :

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

2. Déduisez-en que 34×122 peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

69 • u est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ tel que $-\pi<\theta<\pi$.

1. **a)** Exprimez $1+\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$.

b) Déduisez-en une forme trigonométrique de $1+u$.

2. Dans le plan complexe, M est le point d'affixe u, P celui d'affixe $1+u$ et I celui d'affixe 1.

a) Quelle est la nature du quadrilatère OMPI ?

b) Retrouvez le résultat du 1. en utilisant ce quadrilatère.

70 • BAC θ est un réel quelconque, on considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$E_{(\theta)}: z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta = 0.$$

1. Résolvez, dans $\mathbb{C}$, les équations $E_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ et $E_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}$, en donnant à θ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives : $1+2i$; $1+\sqrt{3}+i$; $1+\sqrt{3}-i$; $1-2i$.

a) Placez ces points dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Précisez la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD.

c) Déduisez-en que ces points appartiennent à un cercle Γ dont on donnera une équation.

3. **a)** Résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation $E_{(\theta)}$.

b) Démontrez que les points qui ont pour affixes les solutions de $E_{(\theta)}$ sont des points de Γ.

71 • La suite de nombres complexes (z_n) est définie par $z_0=4$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n$.

1. Trouvez le module et un argument de z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\Delta_n = |z_{n+1}-z_n|.$$

a) Calculez Δ_{n+1} en fonction de Δ_n.

b) Démontrez que la suite (Δ_n) est géométrique. Précisez son premier terme et sa raison.

c) Calculez Δ_n en fonction de n et déduisez-en l'entier n_0 tel que lorsque $n\geqslant n_0$, $\Delta_n<10^{-2}$.

72 • Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, le point M_n a pour affixe :

$$z_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n(-1+i\sqrt{3}) \text{ où } n \text{ est un entier naturel.}$$

Justifiez chacune des affirmations suivantes.

a) La distance $OM_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;

b) Les points M_n appartiennent à la demi-droite Δ d'équation $\sqrt{3}x+y=0$ avec $x<0$.

73 • BAC Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_n d'affixe $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(1+i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1. Exprimez z_{n+1} en fonction de z_n, puis z_n en fonction de z_0 et n. Donnez z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2. Placez les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).

3. Déterminez la distance OM_n en fonction de n.

4. **a)** Démontrez que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$.

Déterminez L_n en fonction de n, puis la limite de L_n.

74 ⋮ 1. a et b sont deux entiers. On pose $z = a+ib$. Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $n\geqslant1$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que $z^n = a_n+ib_n$.

2. Déduisez-en que, si un entier p peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers, il en est de même pour p^n, quel que soit n de $\mathbb{N}$.

75 ⋮ On pose :

$$P(z) = z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8.$$

1. Calculez $P(2)$. Justifiez qu'il existe deux réels a et b tels que $P(z) = (z-2)(z^2+az+b)$ puis résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
(On note z_1 la solution de partie imaginaire strictement positive et z_2 celle de partie imaginaire strictement négative).

2. Écrivez z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3. Dans un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, placez les points A, B, C d'affixes respectives 2, z_1, z_2 puis I milieu de [AB].

4. Calculez l'affixe z_3 de I, le module de z_3 et une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OI})$.

5. Déduisez des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et celle de $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Formes trigonométrique et exponentielle

76 Déterminez et construisez l'ensemble E des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

a) $z = 3e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0 ; 2\pi[$;

b) $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$, $r \in]0 ; +\infty[$;

c) $z = ke^{-i\frac{\pi}{3}}$, $k \in \mathbb{R}$.

77 • BAC z est le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$, avec θ dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.

1. a) Vérifiez que $z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$.

b) Déduisez-en le module r et un argument α de z.

2. On pose $Z = \dfrac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$.

En utilisant les résultats précédents, trouvez le module et un argument de Z.

78 • θ est un réel distinct de π modulo 2π et :

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}.$$

1. Calculez $\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\dfrac{2t}{1-t^2}$ en fonction des lignes trigonométriques de θ.

2. Prouvez que :

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}, \quad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

et $$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

79 : On pose $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Écrivez z_1, z_2 et $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique.

2. Déduisez-en $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Résolvez dans $[-\pi ; \pi[$ l'équation :

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2.$$

80 : On pose $\alpha = e^{2i\frac{\pi}{5}}$, $A = \alpha + \alpha^4$ et $B = \alpha^2 + \alpha^3$.

1. Démontrez que $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ et déduisez que A et B sont solutions de l'équation (E) :

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

2. Déterminez A en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

3. Résolvez l'équation (E) et déduisez-en la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

81 **1.** : Démontrez que :

$$1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}}.$$

2. Quelles sont les valeurs des sommes :

$$C = \sum_{k=0}^{4} \cos\frac{k\pi}{5} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{4} \sin\frac{k\pi}{5} ?$$

82 : BAC Soit le nombre complexe $u = 1 + i$ et $\bar{u}$ son conjugué.

1. a) Écrivez u et $\bar{u}$ sous forme trigonométrique.

b) On pose $S_n = u^n + \bar{u}^n$ avec n entier naturel non nul.

Déduisez de **1. a)** que $S_n = \lambda_n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ où λ_n est un réel que l'on précisera.

c) Quelles sont les entiers n pour lesquels $S_n = 0$?

d) Prouvez que si n est pair, S_n est un entier relatif.

2. On suppose dans cette question que n est un entier naturel pair et on pose $n = 2m$.

a) Écrivez, par la formule du binôme (voir chapitre 9), les développements de $(1+i)^{2m}$ et $(1-i)^{2m}$ à l'aide des puissances de i (puissances que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question).

b) Pour p entier naturel, simplifiez :

$$i^{2p+1} + (-i)^{2p+1} \quad \text{et} \quad i^{2p} + (-i)^{2p}.$$

c) Application. On prend $n = 24$ (donc $m = 12$).
En utilisant les résultats des questions précédentes, démontrez que $\sum_{p=0}^{12} (-1)^p \binom{24}{2p} = 2^{12}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 325.

Recherche d'ensemble de points

Pour les exercices 83 à 92, vous pouvez vous reporter à la fiche H *Types de problèmes et raisonnements* p. 456 ainsi qu'à l'exercice 43.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

83 • À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 2(1+i)z$.

1. Déterminez les coordonnées x' et y' du point M' en fonction de celles, x et y, de M.

2. Démontrez que $\mathscr{H}$, l'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des abscisses, est la courbe représentative d'une fonction h que l'on déterminera.

84 • BAC z est un complexe non nul et $z' = \dfrac{-2}{z}$.

1. Quelle relation lie les modules de z et z' ? les arguments de z et z' ?

2. Dans le plan complexe, M est le point d'affixe z, M' le point d'affixe z', D le disque de centre O, de rayon 2 privé de O. A est le point d'affixe a telle que $|a| = 2$ et $\arg a = \dfrac{\pi}{4}$.

a) Quel est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit D ?

b) Quel est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le segment [OA] privé de O ?

85 • Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z + \dfrac{1}{z}$ est un réel.

86 • Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose :

$$Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}.$$

$z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.

1. Calculez X et Y en fonction de x et y.

2. Démontrez que l'ensemble des points $m(z)$ tels que Z soit réel est une droite privée d'un point.

3. Démontrez que l'ensemble des points $m(z)$ tels que Z soit imaginaire pur est un cercle privé d'un point.

87 • BAC À tout nombre complexe z, $z \neq -2$, on associe $Z = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

On pose $z = x + iy$, x et y deux réels.

1. Exprimez la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

On vérifiera que $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

2. Déduisez-en la nature de :

a) l'ensemble E des points M d'affixes z tels que Z soit un réel ;

b) l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

3. Représentez ces deux ensembles.

88 • BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 3 cm). On désigne par A le point d'affixe i.
À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z^2}{i-z}.$$

1. Déterminez les points M confondus avec leur image M'.

2. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

a) Démontrez que $x' = \dfrac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.

b) Déduisez-en l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessinez l'ensemble $\mathscr{E}$.

89 • À tout nombre complexe $z = x + iy$, $z \neq -1$, on associe le complexe $Z = \dfrac{2iz-i}{z+1}$.

1. Calculez $\bar{Z}$, $\mathrm{Re}(Z)$, $\mathrm{Im}(Z)$ et $|Z|$ en fonction de x et y.

2. Déterminez l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

3. Déterminez l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

4. Tracez les ensembles $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ et déterminez les points d'intersection de ces deux ensembles.

90 • À tout point m d'affixe non nulle z, on associe le point M d'affixe $Z = \dfrac{1}{z^2}$.

1. On note $z = re^{i\theta}$.
Écrivez Z sous forme exponentielle.

2. Dans cette question, on suppose que Z_0 est un complexe non nul donné. Est-il toujours possible de trouver z_0 tel que $Z_0 = \dfrac{1}{z_0^2}$? Est-il unique ?

3. On suppose dans cette question que z a pour module 1.

a) m étant donné, construisez M.

b) Quels sont les points m pour lesquels $Z = z$?

4. On note d^* une demi-droite d'origine O privée de O.

a) Lorsque m décrit d^*, quel est l'ensemble des points M ?

b) Lorsque M décrit d^*, quel est l'ensemble des points m ?

91 • BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point m d'affixe z, on associe le point M d'affixe $Z = \dfrac{z^3}{2+|z|^3}$. On note $z = re^{i\alpha}$ et $Z = \rho e^{i\theta}$.

EXERCICES

1. Exprimez ρ et θ en fonction de r et α.

2. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et T le point d'affixe $1 - i$.

a) Quel est l'ensemble des points M lorsque m décrit le cercle $\mathscr{C}$?

b) À quel ensemble appartient M lorsque m décrit la demi-droite [OT) ?

3. On note f la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{2 + x^3}.$$

a) Étudiez les variations de f et déduisez-en que f est strictement croissante sur I et que l'image de I par f est l'intervalle $[0 ; 1[$.

b) Déduisez-en que, lorsque m est un point quelconque du plan complexe, le point M est un point d'un disque que vous préciserez.

92 **D'après document ministériel**

À tout complexe $z = x + iy$, x et y deux réels, on associe le nombre complexe $f(z) = e^y e^{i\pi x}$.

1. Déterminez et placez, dans le plan complexe, les points d'affixes $f(0)$, $f(i)$, $f(-i)$, $f(1 + i)$, $f(1 - i)$.

2. Démontrez que pour tout complexe z, $f(z)$ est non nul, puis déterminez, en fonction de x et y, le module et un argument de $f(z)$.

3. **a)** Démontrez que, pour tous les nombres complexes z et z', $f(z + z') = f(z)f(z')$ et $f(z - z') = \frac{f(z)}{f(z')}$.

b) Démontrez que pour tout entier relatif n, pour tout complexe z, $f(nz) = (f(z))^n$.

4. A est le point d'affixe $\omega = 1 + i$. B, C, D sont d'affixes respectives $\overline{\omega}$; $-\omega$; $-\overline{\omega}$.

a) Déterminez l'ensemble des points L dont l'affixe z vérifie $\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| = 1 \end{cases}$ puis déterminez l'ensemble des points d'affixe $f(z)$ où z est l'affixe d'un élément de L.

b) Reprenez le **a)** avec L l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1. \end{cases}$

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

93 r et θ sont des réels avec $r > 0$.

On pose $z = re^{i\theta}$ et pour tout entier naturel n,

$$Z_n = (z + \bar{z}) + (z^2 + \bar{z}^2) + \cdots + (z_n + \bar{z}_n).$$

Calculez Z_n en fonction de r et θ.

94 θ est un réel de l'intervalle $\left]\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Déterminez le module et un argument de $1 - e^{i\theta}$.

95 Déterminez les nombres complexes z tels que z^2 et z^6 sont conjugués.

96 Déterminez, puis représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

z^3 est réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

97 φ est un nombre de l'intervalle $]0 ; \pi[$ différent de $\frac{\pi}{2}$ et $z = 1 + i\tan\varphi$.

Déterminez le module et un argument de $z' = \frac{z}{1 - z}$.

98 Démontrez que pour tout nombre complexe z,

$$|1 + z| \geqslant \frac{1}{2} \text{ ou bien } |1 + z^2| > 1.$$

99 • Vérifiez que tout nombre complexe, de module 1 et différent de 1, peut s'écrire $\frac{x + i}{x - i}$, $x \in \mathbb{R}$.

100 • Résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$$

sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

101 • z_1 et z_2 sont deux nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

Démontrez que :

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$$

est un réel positif ou nul.

102 a et b sont deux réels. Déterminez le module et un argument de $e^{ia} + e^{ib}$.

Problèmes

103 • BAC

Thèmes : *Fonctions. Déterminations d'ensembles*

$(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan $\mathcal{P}$.
A et B ont respectivement pour affixe 1 et 4, d est la droite (OA) privée de A, Δ la perpendiculaire en A à d privée de A et Γ le cercle de centre A et de rayon 1.
F est l'application qui, à tout point m d'affixe z différent de 1, associe le point M d'affixe :

$$Z = f(z) = \frac{z^2}{z-1}.$$

A. On note φ et ψ les fonctions :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x} \end{cases}.$$

1. Étudiez les variations de φ et de ψ sur leurs ensembles de définition E_1 et E_2.

2. Étudiez les limites de φ et ψ aux bornes de E_1 et E_2 respectivement.

3. Donnez les tableaux de variations de φ et ψ.

4. Déterminez les images $\varphi(E_1)$ et $\psi(E_2)$.

B. 1. On suppose dans cette question que M a pour affixe 3.
Écrivez sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle, les affixes z de m telles que $f(z) = 3$.

2. On suppose dans cette question que :

$$z = 1 + e^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

a) Calculez, en fonction de θ, l'affixe Z de M.

b) Déduisez-en l'ensemble des points M quand θ varie.

3. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où x, y, X et Y sont réels.

a) Calculez X et Y en fonction de x et y.

b) Quel est l'ensemble des points M lorsque le point m décrit d ?

c) Quel est l'ensemble des points M lorsque le point m décrit Δ ?

d) Quel est l'ensemble des points m lorsque le point M décrit l'axe $(O, \vec{u})$?

104 •

Thèmes : *Fonctions complexes. Fonctions involutives. Ensembles de points*

On dit qu'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est involutive si, pour tout complexe z de $\mathbb{C}$, on a :

$$(f \circ f)(z) = z,$$

où $f \circ f$ désigne la fonction composée de f avec f.

A. Soient A et B deux nombres réels.
On considère la fonction F définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$F(z) = Az + B\bar{z}.$$

1. Calculez $F(1)$ et $F(i)$.

2. Supposons que, pour tout complexe z, on ait :

$$F(z) = 0.$$

Démontrez que l'on a alors $A = B = 0$.

3. Déterminez A et B pour que, pour tout complexe z, on ait :

$$F(z) = z.$$

B. Soient a et b deux nombres réels.
On considère la fonction $f_{a,b}$ définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}.$$

1. Exprimez, pour tout complexe z, $(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z)$.

2. La fonction $f_{a,b}$ est involutive si et seulement si a et b vérifient un système de deux équations. Donnez ce système.

3. Déterminez toutes les fonctions $f_{a,b}$ involutives.

C. On considère dans cette partie, la fonction g définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\bar{z}.$$

1. La fonction g est-elle involutive ? Justifiez votre réponse.
Soit M un point quelconque du plan, d'affixe $z = x + iy$.
On considère le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que :

$$z' = g(z).$$

2. Exprimez x' et y' en fonction de x et de y.

3. **a)** Donnez le système des deux équations que doivent vérifier x et y pour que M' = M.

b) On note Δ l'ensemble des points M du plan tels que M' = M.
Démontrez que Δ est la droite d'équation $y = (\sqrt{2} - 1)x$.
Donnez un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

4. Démontrez que, pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

5. **a)** Déterminez les coordonnées x_I et y_I du milieu I du segment [MM'].

b) Démontrez que I appartient à Δ.

6. Par quelle transformation géométrique simple, le point M' se déduit-il du point M ?

D'après Concours GEIPI, 2005

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

105 BAC On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

a $2\sqrt{2}$. **b** $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$. **c** $2 + \sqrt{2} + i(2-\sqrt{2})$. **d** $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

a $4e^{i\frac{\pi}{4}}$. **b** $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **c** $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$. **d** $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

a $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$. **b** $2e^{i\frac{\pi}{8}}$. **c** $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$. **d** $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique pages 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

106 **1.** z est un complexe, z et iz ont le même module et la même partie réelle.

2. r et θ sont deux réels, θ est un argument de $z = re^{i\theta}$.

3. θ est un réel, le conjugué de $e^{i\theta}$ est l'opposé de $e^{i\theta}$.

4. z et Z sont deux complexes non nuls, dire que $Z = 2iz$ équivaut à dire que $\left|\frac{Z}{z}\right| = 2$ et $\arg\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$ (à $2k\pi$ près).

5. n est un entier naturel, $Z_n = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2}$ est un réel.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

107 **D'après document ministériel**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Démonstration de cours

Pré-requis. Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \text{ (à } 2k\pi \text{ près).}$$

z et z' sont deux nombres complexes non nuls.

Démontrez que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

puis que $\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2\arg(z)$.

2. Application. À tout point M distinct de O d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe $Z = \frac{1}{z^2}$. On note d la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit d privée de O ?

b) Quel est l'ensemble des points M lorsque M' décrit d privée de O ?

13 Application des nombres complexes à la géométrie

1799

À quelques années d'intervalle, deux auteurs peu connus, un Danois et un Suisse, ont donné l'interprétation géométrique des nombres complexes.

En 1799, Caspar Wessel publie, dans les *Mémoires de l'Académie royale de Copenhague*, un article dans lequel il expose l'interprétation géométrique de l'addition des nombres complexes.

Dans son *Essai* publié en 1806, Jean-Robert Argand expose quant à lui l'interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes. À cette occasion, Argand définit le « module » d'un complexe et ce mot sera conservé par la suite.

L'interprétation géométrique des nombres complexes a conduit à faire de ces nombres un outil très efficace dans la résolution des problèmes de géométrie.

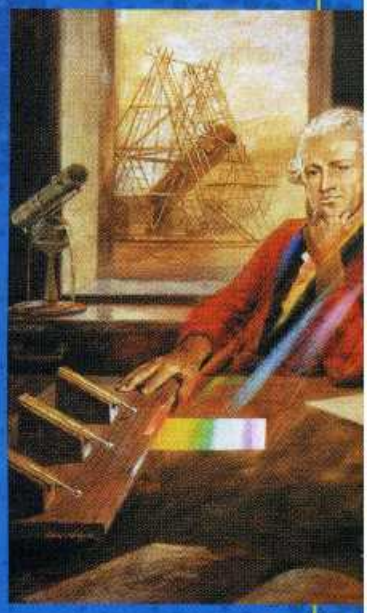
À LA MÊME ÉPOQUE

FRANCE

Le 9 novembre 1799, ou 18 Brumaire an VIII, Napoléon Bonaparte renverse de Directoire lors d'un coup d'État et se fait nommer consul.

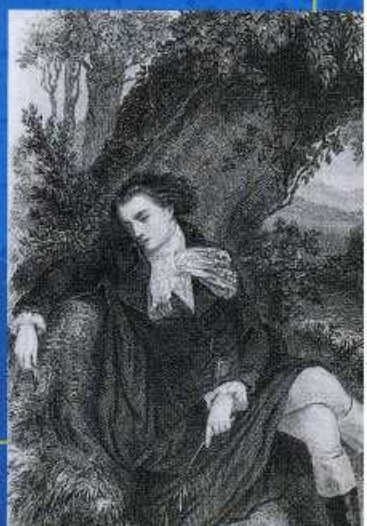
SCIENCES

W. Herschel découvre l'existence du rayonnement infrarouge : en déplaçant un thermomètre le long du spectre du Soleil, il constate en effet qu'un échauffement continue à se produire au-delà du rouge.



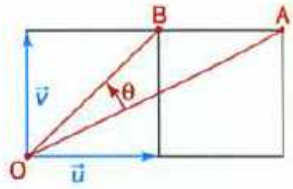
LITTÉRATURE

Traduisant les tourments d'une génération mélancolique, figée dans l'espoir de transformer le monde, le romantisme français cultive sa foi en Dieu avec *le Génie du christianisme* de Chateaubriand.



ACTIVITÉS

ACTIVITÉ 1 Utiliser les complexes en géométrie



Dans le plan orienté, la figure ci-contre est obtenue à partir de carrés de côté 1.
Il s'agit de calculer le rapport des longueurs $r = \dfrac{OB}{OA}$ et une mesure θ de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Les méthodes traditionnelles permettent bien sûr d'évaluer ces deux grandeurs. (Pensez notamment à l'utilisation du produit scalaire ou à la trigonométrie.) Voyons comment utiliser les nombres complexes pour résoudre le problème posé. Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ indiqué. Ce choix du repère facilite la lecture des affixes de A et B. Essayons de calculer r et θ à l'aide des nombres complexes.

1. Indiquez les affixes z_A et z_B de A et B.

2. À l'aide d'interprétations géométriques, prouvez que r est le module du nombre complexe $Z = \dfrac{z_B}{z_A}$ et que θ en est un argument.

3. Calculez Z puis déduisez-en les valeurs de r, $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

CONCLUSION Le calcul du quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$ donne deux renseignements :

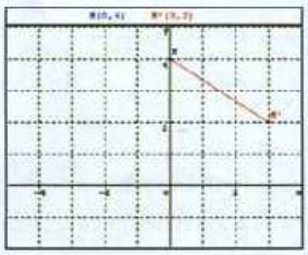
- l'égalité $\dfrac{OB}{OA} = r$ où r est le module de $\dfrac{z_B}{z_A}$;
- une mesure de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ puisque $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)$.

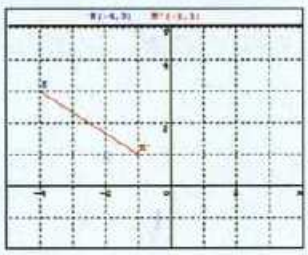
ACTIVITÉ 2 Complexes et transformations

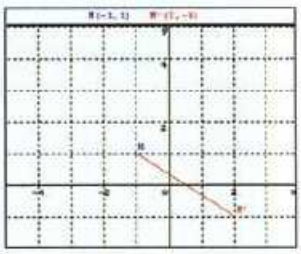
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O. Une transformation usuelle du plan associe à tout point M d'affixe z, son image M′ d'affixe z'.
À l'aide du logiciel Geoplan, cherchons à exprimer z' en fonction de z.

1 Action d'une translation

- Créez un point libre M (de coordonnées entières) piloté au clavier et faites afficher ses coordonnées, puis créez le vecteur $\vec{u}_1$ de coordonnées (3 ; – 2).
- Créez l'image M′ de M par la translation de vecteur $\vec{u}_1$.



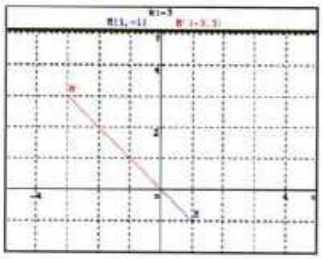
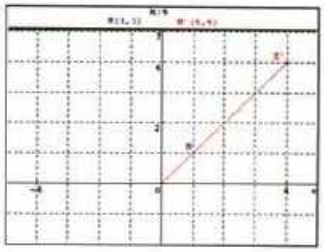
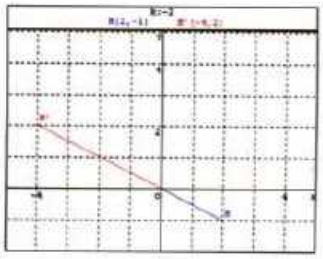




Au vecteur $\vec{u}_1$, on associe le nombre complexe $a = 3 - 2i$ appelé affixe du vecteur $\vec{u}_1$.
Quelle est l'expression de z' en fonction de z ? Justifiez-la.

2 Action d'une homothétie

- Créez un point libre (de coordonnées entières) piloté à la souris et faites afficher ses coordonnées, puis créez une variable numérique k (rapport d'homothétie) à valeurs entières pilotée au clavier.
- Créez l'image M′ de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.

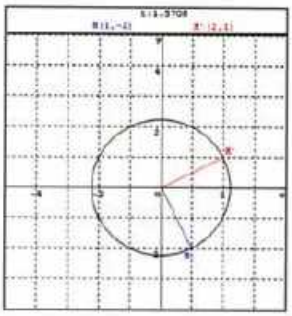
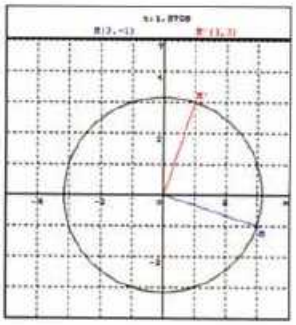
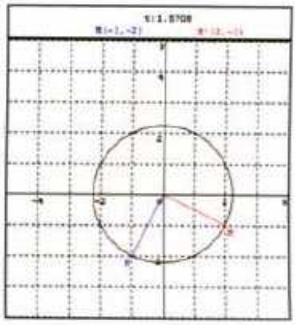




Quelle est l'expression de z' en fonction de z ? Justifiez-la.

3 Action d'un quart de tour direct

1. Créez un point libre M (de coordonnées entières) piloté à la souris et faites afficher ses coordonnées, puis créez une variable numérique $t = \frac{\pi}{2}$.

2. Créez l'image M′ de M dans la rotation de centre O et d'angle t.

a) Examinez les affixes de M et M′ déduites de leurs coordonnées cartésiennes. Conjecturez l'expression de z' en fonction de z.

b) Pour un quart de tour, la conjecture est simple mais en serait-il ainsi avec une valeur quelconque de t ? Les coordonnées cartésiennes semblent mal adaptées alors que l'utilisation des coordonnées polaires paraît plus naturelle.
Lorsque M est distinct de O, on pose M$(r\,;\theta)$ et M′$(r'\,;\theta')$. Exprimez r en fonction de r' et θ en fonction de θ'. Indiquez les écritures exponentielles de z et z' ; déduisez-en z' en fonction de z.
Retrouvez le résultat de la conjecture.

c) Utilisez la méthode précédente pour exprimer z' en fonction de z dans le cas d'une rotation de centre O et d'angle $t = -\frac{\pi}{2}$; $t = \frac{\pi}{3}$; $t = -\frac{\pi}{4}$.

CONCLUSION À toute transformation T, on peut associer une fonction $f : z \mapsto z'$ telle que, pour tout point M d'affixe z, $z' = f(z)$ est l'affixe de M′ = T(M).

1 Affixe d'un vecteur

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1.1 Définition et conséquences

De même qu'à un point M de coordonnées cartésiennes $(x ; y)$, on associe son affixe $z_M = x + iy$, à tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a ; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.

DÉFINITION 1 ➡ L'**affixe** du vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a ; b)$ est le complexe $z = a + ib$.

THÉORÈME 1 ➡ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, où z_A et z_B sont les affixes de A et B.

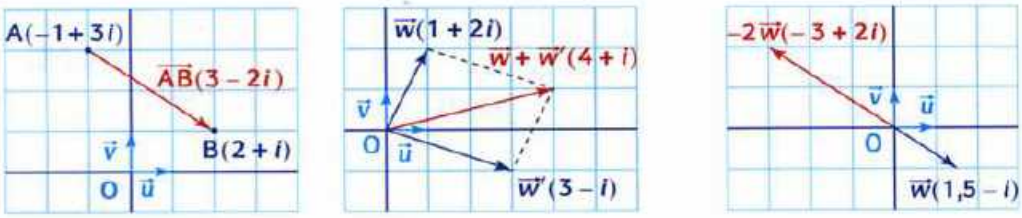
Démonstration. Si $z_A = x_A + iy_A$, $z_B = x_B + iy_B$, alors les coordonnées de A sont $(x_A ; y_A)$, celles de B sont $(x_B ; y_B)$, donc celles de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
Ainsi l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$, soit $z_B - z_A$.

Conséquences. Règles de calcul sur les affixes de vecteurs

Note
Ces résultats découlent directement de la définition de l'affixe d'un vecteur et du calcul sur les coordonnées.

1. L'égalité de deux vecteurs équivaut à celle de leurs affixes.
2. Si $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont les vecteurs d'affixes z et z', alors $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$ et, pour tout réel λ, $\lambda\vec{w}$ a pour affixe λz.

EXEMPLES



1.2 Affixe du barycentre

THÉORÈME 2 ➡ $(A_1 ; \alpha_1)$, $(A_2 ; \alpha_2)$, ..., $(A_n ; \alpha_n)$ sont n points pondérés du plan, d'affixes respectives z_1, z_2, ..., z_n tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Alors leur barycentre G a pour affixe la moyenne pondérée de leurs affixes : $z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$.

Démonstration. Le barycentre G est tel que pour tout point M du plan,

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}.$$

En particulier, lorsque M = O, on obtient l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}(\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}),$$

d'où le résultat en considérant les règles de calcul sur les affixes de vecteurs.

Il en résulte que l'affixe z_I du **milieu I** du segment [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ et celle du **centre de gravité** G d'un triangle MNP est $z_G = \dfrac{z_M + z_N + z_P}{3}$.

COMPRENDRE

Utilité des affixes

L'utilisation des affixes permet de simplifier les calculs.

Ainsi l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ qui, avec les coordonnées, se traduit par deux égalités numériques :

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$$

se réduit avec les complexes à une seule :

$$z_B - z_A = z_D - z_C.$$

→ EXERCICES RÉSOLUS 1 et 2

Affixes et colinéarité

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et donc tel que :

$$z_D - z_C = \lambda(z_B - z_A).$$

→ EXERCICE RÉSOLU 1

Choix d'un repère

Si dans l'utilisation géométrique des nombres complexes, on doit toujours travailler dans un repère orthonormal direct, il n'est pas toujours utile de préciser ce repère.

→ EXERCICE RÉSOLU 2

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Démontrer un alignement

ÉNONCÉ

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B, C d'affixes respectives :

$$a = 6 - i, \quad b = -6 + 3i, \quad c = -18 + 7i.$$

Prouvez à l'aide des complexes que A, B et C sont alignés.

POINT MÉTHODE

Pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés, on peut prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc que $z_C - z_A = \lambda(z_B - z_A)$, λ réel.

SOLUTION COMMENTÉE

Il s'agit de prouver qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour affixes respectives $Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = -12 + 4i$ et $Z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = -24 + 8i$.

On remarque que $Z_{\overrightarrow{AC}} = 2(-12 + 4i)$ soit $Z_{\overrightarrow{AC}} = 2Z_{\overrightarrow{AB}}$.

Ainsi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc A, B et C sont alignés.

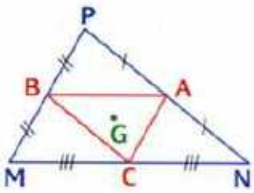
→ EXERCICE 2

EXERCICE RÉSOLU 2 Choisir un repère orthonormal direct quelconque

ÉNONCÉ

MNP est un triangle. A est le milieu de [NP], B celui de [PM] et C celui de [MN].

Démontrez, à l'aide des complexes, que les triangles MNP et ABC ont le même centre de gravité.



SOLUTION COMMENTÉE

On peut choisir un repère orthonormal direct quelconque.

Notons m, n, p, a, b, c les affixes respectives des points M, N, P, A, B, C.

Les points A, B, C dépendent de M, N, P, donc leurs affixes a, b, c sont liées à celles de M, N, P.

A est le milieu de [NP] d'où $a = \dfrac{n+p}{2}$.

De même, $b = \dfrac{p+m}{2}$ et $c = \dfrac{m+n}{2}$.

Notons G et G′ les centres de gravité des triangles MNP et ABC.

G a pour affixe $g = \dfrac{m+n+p}{3}$. G′ a pour affixe :

$$g' = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}\left[\frac{n+p}{2} + \frac{p+m}{2} + \frac{m+n}{2}\right] = \frac{1}{3}(m+n+p) = g.$$

Ainsi G et G′ sont confondus, donc les deux triangles ont bien le même centre de gravité.

Commentaire. Cette solution est particulièrement rapide. Notez qu'il a été inutile de préciser le repère orthonormal direct choisi.

→ EXERCICE 5

2 Utilisation de l'affixe d'un vecteur

2.1 Distance AB, angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

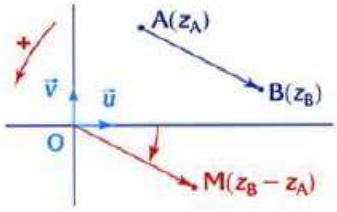
Note
Veillez aux notations : distance AB, norme $\|\overrightarrow{AB}\|$, module $|z_B - z_A|$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
D'où l'égalité des affixes : $z_M = z_B - z_A$ (1).
Or $|z_M| = OM$ et $OM = AB$ donc :

$$\mathbf{AB = |z_B - z_A|}.$$

Si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$ et comme $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$, alors d'après (1) :

$$\mathbf{(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)}.$$



2.2 Mesures d'un angle orienté

THÉORÈME 3

Coin Mémo
Dans le quotient, le dénominateur est l'affixe du premier vecteur et le numérateur celle du second.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 88

A, B, C, D sont des points d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Alors : $$\mathbf{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}.$$

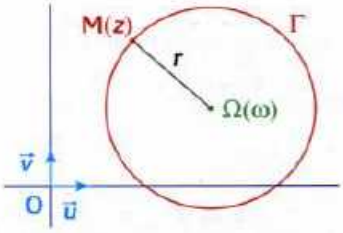
Démonstration. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$; d'après le résultat précédent, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$ d'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

Cas particulier.
A, B, M sont trois points d'affixes a, b et z telles que $z \neq a$ et $z \neq b$, alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{b - z}{a - z}\right)$ soit aussi $\mathbf{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{z - b}{z - a}\right)}$.

2.3 Caractérisations d'ensembles de points

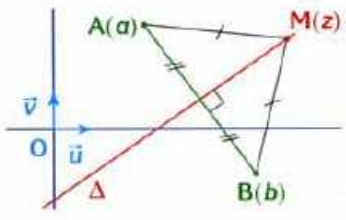
r est un réel ($r > 0$) et ω un complexe. L'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $\mathbf{|z - \omega| = r}$ est le **cercle** de centre Ω, d'affixe ω et de rayon r.

En effet, $|z - \omega| = r$ équivaut à $\Omega M = r$.



A et B sont les points d'affixes a et b ($a \neq b$). L'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $\mathbf{|z - a| = |z - b|}$ est la **médiatrice** du segment [AB].

En effet, $|z - a| = |z - b|$ équivaut à $AM = BM$.



Note
On dit que l'écriture $z = \omega + re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du cercle Γ.

Remarque. L'égalité $|z - \omega| = r$ signifie que le nombre complexe $z - \omega$ a pour forme exponentielle $z - \omega = re^{i\theta}$ où le réel θ est un de ses arguments.
Ainsi le cercle Γ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r est aussi l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $\mathbf{z = \omega + re^{i\theta}}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

COMPRENDRE

Intérêt du calcul de $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$

La connaissance de ce quotient fournit deux informations de nature géométrique.

- Son module r est un rapport de distances, $r = \frac{CD}{AB}$.
- N'importe lequel de ses arguments est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Conséquences.

- Si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on peut en déduire la **colinéarité** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
- Si $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$, on peut en déduire leur **orthogonalité**.

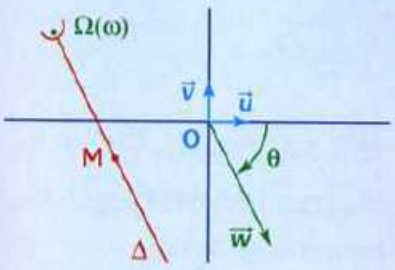
➜ EXERCICE RÉSOLU 3

Caractérisation d'une demi-droite ouverte

θ est un réel et ω un complexe ; l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $\arg(z - \omega) = \theta$ est la **demi-droite ouverte** d d'origine $\Omega(\omega)$, dirigée par un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \theta$.

En effet, l'appartenance d'un point M(z) à d se traduit par « $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens » donc par $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = (\vec{u}, \vec{w}) = \theta$.

Or $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = \arg(z - \omega)$. Donc l'appartenance de M à d se traduit par $\arg(z - \omega) = \theta$. Il en résulte que $\Delta = d$.

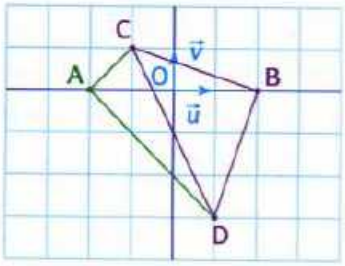


SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Utiliser un quotient de complexes

ÉNONCÉ

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes :
$a = -2$, $b = 2$, $c = -1 + i$, $d = 1 - 3i$.
Démontrez que les triangles BCD et ACD sont rectangles.



POINT MÉTHODE

Pour démontrer que les droites (BC) et (BD) sont perpendiculaires en B, il suffit de prouver que $\arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right)$ est égal à $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$.

SOLUTION COMMENTÉE

Pour démontrer que les triangles BCD et ACD sont rectangles respectivement en B et A, on prouve que les complexes $Z = \frac{d-b}{c-b}$ et $Z' = \frac{d-a}{c-a}$ ont un argument égal à $\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$.

$$Z = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{(-1-3i)(-3-i)}{10} = i ;$$

$$Z' = \frac{3-3i}{1+i} = \frac{3(1-i)(1-i)}{2} = -3i.$$

D'où $\begin{cases} |Z| = \dfrac{|d-b|}{|c-b|} = |i| = 1 \\ \arg Z = \arg\left(\dfrac{d-b}{c-b}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} \dfrac{BD}{BC} = 1 \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Ainsi BC = BD et (BC) ⊥ (BD) donc le triangle BCD est rectangle isocèle en B.

En outre, $\arg Z' = \arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$ d'où $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$.

Le triangle ACD est donc rectangle en A.

➜ EXERCICES 6 à 8

EXERCICE RÉSOLU 4 BAC Trouver un ensemble de points

ÉNONCÉ

A et B sont les points d'affixes $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$.

À tout complexe z, $z \neq z_A$, on associe le complexe $z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$.

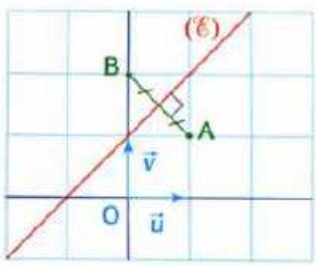
Construisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M(z) tels que $|z'| = 1$.

SOLUTION COMMENTÉE

$|z'| = 1$ s'écrit $\left|\frac{z - z_B}{z - z_A}\right| = 1$.

Ainsi, $|z'| = 1$ équivaut à $|z - z_B| = |z - z_A|$ et donc pour tout point M d'affixe z, BM = AM.

$\mathscr{E}$ est l'ensemble des points équidistants de A et B donc $\mathscr{E}$ est la médiatrice de [AB].



➜ EXERCICES 14, 17, 51

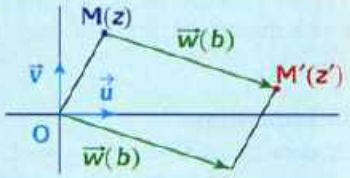
3 Écritures complexes de transformations

Dans tout ce paragraphe, un repère orthonormal direct du plan est choisi.
T est une transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z'.
On peut associer à T une fonction f et une seule, définie sur $\mathbb{C}$ par $f : z \mapsto z' = f(z)$.
L'écriture $z' = f(z)$ est une **écriture complexe** de T.

3.1 Écriture complexe d'une translation

THÉORÈME 4

Les propositions (1) et (2) sont équivalentes :
(1) t est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b,
(2) t a pour écriture complexe, $\boldsymbol{z' = z + b}$.



Démonstration. (1) signifie « pour tout point M(z) d'image M′(z'), $\overline{\mathrm{MM'}} = \vec{w}$ ». Ceci équivaut à « pour tout point M(z) d'image M′(z'), $z' - z = b$ » et donc à « t a pour écriture complexe $z' = z + b$ » (2).

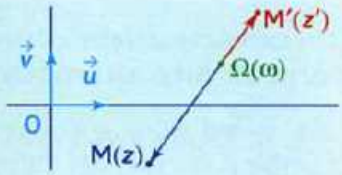
Rappel
Une égalité entre vecteurs équivaut à celle de leurs affixes.

3.2 Écriture complexe d'une homothétie

THÉORÈME 5

Note
Lorsque $k = -1$, on obtient une écriture complexe de la symétrie de centre Ω :
$z' = -z + 2\omega$.

Ω est le point d'affixe ω et k un réel non nul.
Les propositions (1) et (2) sont équivalentes :
(1) h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k,
(2) h a pour écriture complexe, $\boldsymbol{z' - \omega = k(z - \omega)}$.

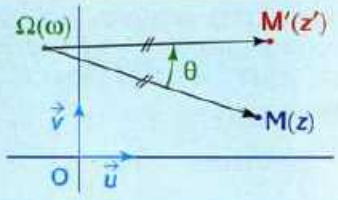


Démonstration. (1) signifie « pour tout point M(z) d'image M′(z'), $\overline{\Omega\mathrm{M'}} = k\overline{\Omega\mathrm{M}}$ ». Ceci équivaut à « pour tout point M(z) d'image M′(z'), $z' - \omega = k(z - \omega)$ » et donc à « h a pour écriture complexe $z' - \omega = k(z - \omega)$ » (2).

3.3 Écriture complexe d'une rotation

THÉORÈME 6

Ω est le point d'affixe ω et θ un réel quelconque.
Les propositions (1) et (2) sont équivalentes :
(1) r est la rotation de centre Ω et d'angle θ »,
(2) r a pour écriture complexe, $\boldsymbol{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$.



Démonstration. La proposition (1) signifie :
« $r(\Omega) = \Omega$ et pour tout point M$(z) \neq \Omega(\omega)$, d'image M′(z'), $\Omega\mathrm{M'} = \Omega\mathrm{M}$ et $(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M'}}) = \theta$ ».
Or $\Omega\mathrm{M'} = \Omega\mathrm{M}$ et $(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M'}}) = \theta$ signifient $\left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta$ donc $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$.
Ainsi (1) équivaut à « $r(\Omega) = \Omega$ et pour tout point M$(z) \neq \Omega(\omega)$, d'image M′(z'), $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ». Mais cette égalité est encore vraie lorsque $z = \omega$ (M en Ω), car alors $z' = \omega$ (et M′ en Ω). Donc les propositions (1) et (2) sont équivalentes.

Rappel
Tout complexe z non nul s'écrit $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.

Cas particulier. Le centre de la rotation est l'origine O du repère.
Alors la rotation r de centre O et d'angle θ a pour écriture complexe :

$$\boldsymbol{z' = e^{i\theta} z}.$$

COMPRENDRE

Utilité d'une écriture complexe

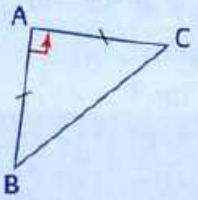
Elle permet :
- de calculer l'affixe z' du point M', image du point M d'affixe z ;
- ou, inversement, de calculer z connaissant z' ;
- de dire qu'un point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'une des transformations usuelles.

→ EXERCICE RÉSOLU 5

Figures clés des rotations

ABC est un triangle dont les sommets ont pour affixes a, b, c.

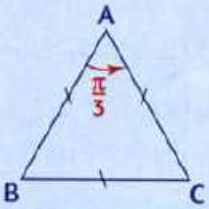
• Triangle rectangle isocèle



Dire que ABC est un triangle rectangle isocèle en A, de sens direct, équivaut à dire que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc d'après le théorème 6, que :

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a) \text{ soit}$$
$$c - a = i(b-a).$$

• Triangle équilatéral



Dire que ABC est un triangle équilatéral de sens direct, équivaut à dire que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et donc que :

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a).$$

→ EXERCICE RÉSOLU 5

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 — BAC — Utiliser les écritures complexes

ÉNONCÉ

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B, C, P et le vecteur $\vec{w}$ d'affixes respectives :

$z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

On note h l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$, t la translation de vecteur $\vec{w}$ et r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1) Calculez les affixes des points $Q = t(B)$, $R = h(P)$ et $S = r(P)$.

2) Prouvez que le triangle PQR est rectangle isocèle puis déduisez-en la nature du quadrilatère PQRS.

SOLUTION COMMENTÉE

1) • La translation t a pour écriture complexe $z' = z + z_{\vec{w}}$.

Or $B \xrightarrow{t} Q$ donc $z_Q = z_B + z_{\vec{w}}$. Ainsi $z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$.

• L'homothétie h a pour écriture complexe $z' - z_C = -\frac{1}{3}(z - z_C)$.

Or $P \xrightarrow{h} R$ donc $z_R - z_C = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$ d'où $z_R = z_C - \frac{1}{3}(z_P - z_C)$.

On obtient $z_R = -5 - i$.

• La rotation r a pour écriture complexe $z' - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ soit, puisque $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, $z' - z_A = -i(z - z_A)$.

Or $P \xrightarrow{r} S$ donc $z_S - z_A = -i(z_P - z_A)$ d'où $z_S = z_A - i(z_P - z_A)$. On en déduit que $z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$.

2) Pour démontrer que PQR est un triangle rectangle isocèle, il suffit de prouver que par la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$, l'image de P est R, et donc de prouver que $z_R - z_Q = i(z_P - z_Q)$ **(1)**.

Or $z_P - z_Q = \frac{5}{2} + \frac{11}{2}i$,

$z_R - z_Q = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}i$,

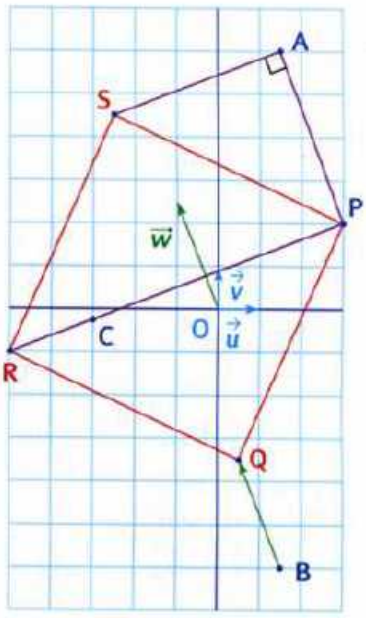
puis par mise en facteur de i,

$z_R - z_Q = i\left[\frac{11}{2}i + \frac{5}{2}\right] = i(z_P - z_Q)$;

donc PQR est rectangle isocèle en Q.

Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont tels que

$z_{\overrightarrow{PQ}} = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$ et $z_{\overrightarrow{SR}} = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$.



Ainsi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme. De plus, d'après le résultat précédent, QP = QR et (QP) ⊥ (QR) donc PQRS est un carré.

→ EXERCICES 25, 27 à 29

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Les points considérés A, B, C, D, Ω, M et M′ ont pour affixes respectives a, b, c, d, ω, z et z'.

Utilité en géométrie de l'affixe

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est égale à $z_B - z_A$. Alors $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$ et si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$,

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A).$$

Utilité en géométrie d'un quotient $\frac{d-c}{b-a}$

Si $a \neq b$ et $c \neq d$, le quotient $\frac{d-c}{b-a}$, de module r et d'argument θ, fournit deux renseignements :

$$r = \frac{CD}{AB} \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta.$$

→ EXERCICES RÉSOLUS 3 et 4

Écritures complexes de transformations usuelles M(z) M′(z')

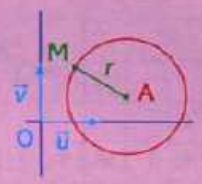
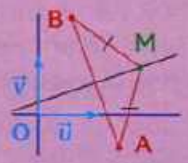
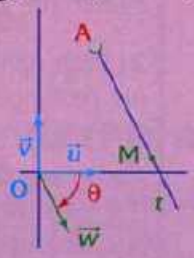
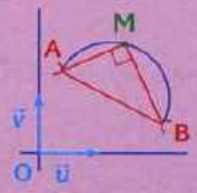
• Translation de vecteur $\vec{w}(b)$	• Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k $(k \in \mathbb{R}^*)$	• Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ $(\theta \in \mathbb{R})$
$z' = z + b$.	$z' - \omega = k(z - \omega)$.	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

DES réflexes À AVOIR

Ensembles de points

Retenez que les interprétations géométriques, dans le plan orienté, permettent de définir les ensembles de points M(z) dont les affixes vérifient une relation donnée.

→ EXERCICE RÉSOLU 4

• $\lvert z-a\rvert = r$ $(r \geqslant 0)$	• $\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	• $\arg(z-a) = \theta$ $(z \neq a)$	• $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \frac{\pi}{2}$ $(z \neq a,\ z \neq b)$
			
Cercle de centre A et de rayon r.	Médiatrice de [AB].	Demi-droite]At) dirigée par $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \theta$.	Demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

Orthogonalité

Pour démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, pensez à utiliser leur produit scalaire ou bien à calculer un argument.

Justifiez que :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ ou
- $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ (soit $\frac{d-c}{b-a}$ imaginaire pur).

→ EXERCICE RÉSOLU 3

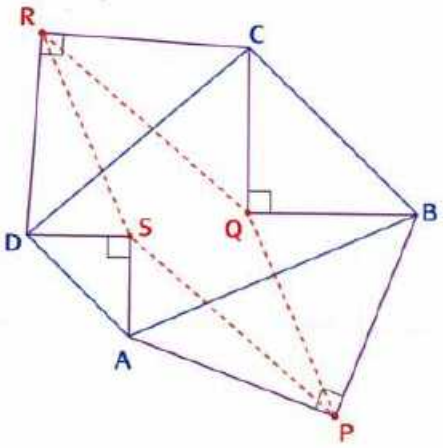
Écritures complexes

- N'oubliez pas que si M(z) et M′(z') sont deux points tels que $z' = z + b$, alors vous pouvez conclure que M′ est l'image de M par la translation dont le vecteur a pour affixe b.
- De même, si $z' = \omega + k(z - \omega)$, k réel non nul, M′ est l'image de M par l'homothétie qui a pour centre le point I d'affixe ω et pour rapport k.
- Et si $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$, M′ est l'image de M par la rotation qui a pour centre le point I d'affixe ω et pour angle θ.

TD 1 Des quarts de tour et un parallélogramme

Dans le plan orienté, ABCD est un quadrilatère convexe.
On construit les triangles rectangles isocèles PAB, QBC, RCD et SDA tels que :

$$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = -\frac{\pi}{2}, \quad (\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2}, \quad (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = -\frac{\pi}{2}, \quad (\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2}.$$



Le **but** de ce TD est de démontrer, en utilisant les nombres complexes, que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
Pour cela, il faut introduire un **repère orthonormal direct** dans lequel les points de base A, B, C, D ont des affixes simples. Mais ici, aucun choix particulier ne s'impose, aussi, supposons choisi un tel repère sans préciser davantage. Notons a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D et appelons p, q, r, s celles de P, Q, R, S.

1. La rotation de centre P et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en B.
Utilisez l'écriture complexe de ce quart de tour pour prouver que :

$$p = \frac{1}{2}[a(1+i) + b(1-i)].$$

2. De même en utilisant des quarts de tour centrés en Q, R et S, exprimez les affixes q, r et s en fonction de a, b, c, d.

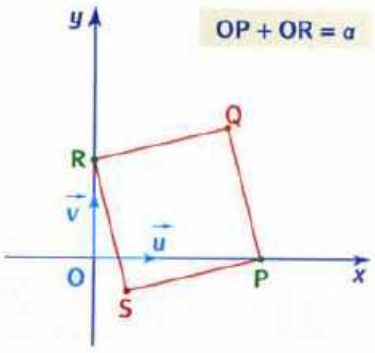
3. Vérifiez que $p + r = q + s$. Concluez.

TD 2 Lieu géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
P est un point du demi-axe $[Ox)$ et R un point du demi-axe $[Oy)$ tels que :

$$OP + OR = a,$$

où a est un réel strictement positif donné. On construit le carré direct PQRS.
Le **but** de ce TD est de démontrer que le point Q est fixe et de trouver le lieu du point S lorsque P et R se déplacent sous la condition indiquée.



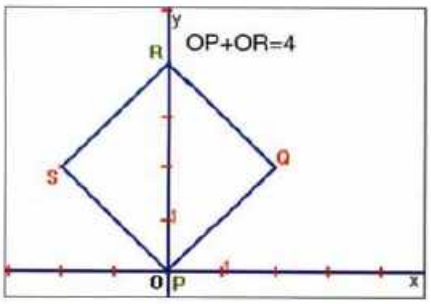
1 Conjecturer à l'aide d'un logiciel (Cabri-géomètre)

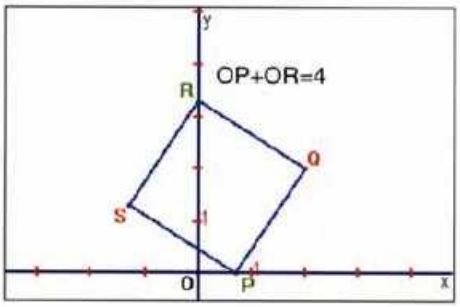
Note
L'utilisation d'un logiciel aide à conjecturer le lieu. Cependant, ce TD reste exploitable dans le cas où l'on ne dispose pas de l'outil informatique : on peut alors conjecturer en faisant plusieurs dessins.

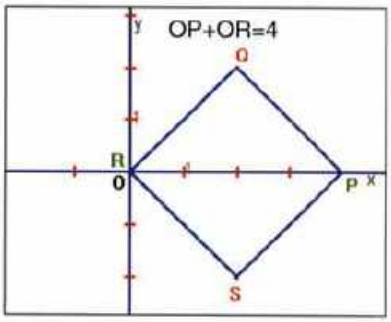
1. À l'aide du logiciel, on a tracé ci-dessous la figure dans le cas $a = 4$.

Remarque. Pour cette construction, remarquez que $0 \leqslant OP \leqslant 4$, placez le point P (pilote) sur le segment $[OP_0]$ tel que $OP_0 = 4$ préalablement défini. Pour le point R, utilisez le menu « report de mesure » sur l'axe des ordonnées après avoir défini la mesure $OR = 4 - OP$.

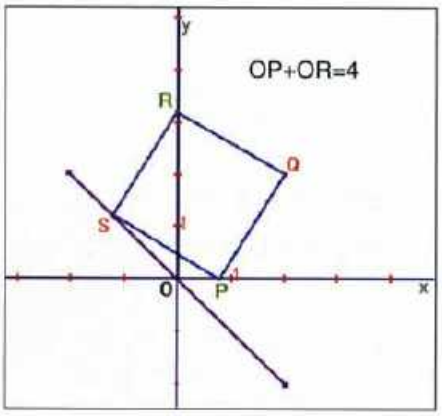
2. Examinez les positions « limites » de P et R.
Conjecturez la position du point Q.







3. En sélectionnant le menu « lieu », faites afficher le lieu de S en déplaçant P. Qu'observez-vous ?



2 Vérifier la conjecture

Tout d'abord, il s'agit d'attribuer des affixes aux points de base P et R.
On pose $p = OP$; on remarque que p décrit l'intervalle $[0 ; a]$ et que $z_P = p$.

1. a) Quelle est alors l'affixe de R ?

b) Prouvez, par le calcul, que l'affixe q de Q ne dépend pas de p.

Aide. Utilisez un quart de tour de centre Q.

c) Précisez la position de Q par rapport aux points « limites » P_0 et R_0 tels que :

$$OP_0 = OR_0 = a.$$

Ainsi la conjecture du § 1 est vraie !

1. Démontrez que l'affixe s de S s'exprime sous la forme $s = \left(p - \frac{a}{2}\right)(1 - i)$.

2. a) Déduisez-en les coordonnées de S en fonction de p et a.

b) Démontrez que S décrit un segment lorsque p décrit l'intervalle $[0 ; a]$.

Aide. Voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche J, page 460.

c) Représentez le lieu de S lorsque $a = 4$.

TD 3 Une transformation nouvelle : l'inversion

1 Écriture complexe et traduction géométrique

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; k est un réel non nul.

À tout point M d'affixe z, $z \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = \frac{k}{\bar{z}}$.

On note Φ la transformation qui à M associe M′ ; elle est définie dans le plan privé de O.

Note
La transformation Φ qui, à tout point M du plan distinct de O, associe M′ défini par l'égalité vectorielle [1] ou par la proposition [2] est appelée **inversion de centre O et de puissance k.**

1. Démontrez que le point M′ est tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \quad [1].$$

Aide. Écrivez $z' = \frac{k}{z\bar{z}}z$.

2. a) Déduisez-en que :

- lorsque $k > 0$, $OM' \times OM = k$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$,
- lorsque $k < 0$, $OM' \times OM = -k$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi$.

b) Application

Construisez l'image M′ du point M dans chacun des cas suivants :

- $k = 2$ et $z = 1 + i$;
- $k = -3$ et $z = -1 + i\sqrt{3}$.

3. Démontrez que M′ est le point de (OM) tel que le produit scalaire :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k \quad [2].$$

4. Prouvez que si M a pour image M′, alors M′ a pour image M.

2 Construction géométrique de l'image d'un point

Pour toute la suite du TD, on prend $k = 1$.

Ainsi l'inversion Φ a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

Note
Un point M est invariant par Φ lorsque $\Phi(M) = M$.

1. Démontrez que le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 est l'ensemble des points invariants de Φ.

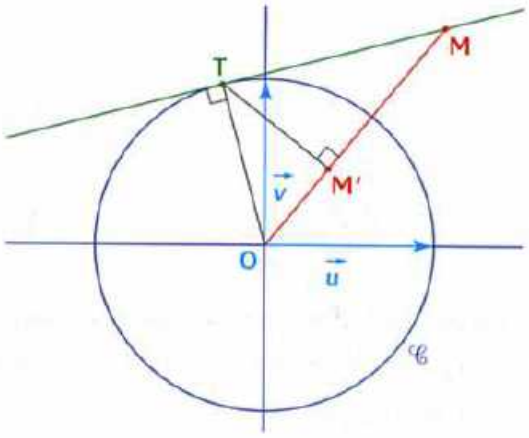
2. M est un point extérieur à $\mathscr{C}$; comme le montre la figure ci-dessous, (MT) est l'une des tangentes issues de M et M′ est le projeté orthogonal de T sur (OM).

a) Démontrez que :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT} = OT^2.$$

b) Déduisez-en que M′ est l'image de M par Φ.

3. M est un point distinct de O, intérieur à $\mathscr{C}$; proposez une construction de son image M′ par Φ.

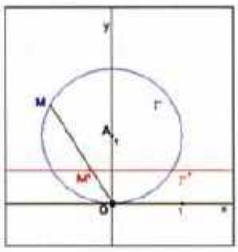


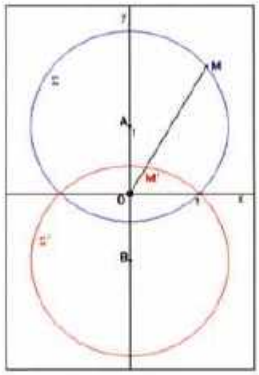
3 Quelques images d'ensembles de points

L'**objectif** de cette partie est d'examiner les images de deux ensembles de points :
• le cercle Γ de centre A, d'affixe i, et de rayon 1, privé de O,
• le cercle Σ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$;
puis d'étudier le cas général d'un cercle passant par le centre d'inversion.

1. Conjectures à l'aide d'un logiciel (Cabri-géomètre)

À l'aide de ce logiciel, on a tracé Γ, un point M mobile sur Γ et son inverse M′ en sélectionnant le menu « Inversion ». En sélectionnant le menu « Lieu », on fait afficher le lieu du point M′ lorsque M se déplace sur Γ. On obtient ainsi l'image Γ' de Γ par l'inversion Φ. De même, on obtient l'image Σ' de Σ par l'inversion Φ.





Il semble que Γ' soit la médiatrice de [OA] et que Σ' soit le cercle symétrique de Σ par rapport à (Ox), c'est-à-dire le cercle de centre B d'affixe $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2. Démonstration des conjectures

a) Prouvez que pour tout complexe z, $z \neq 0$, « $|z - i| = 1$ » équivaut à « $|z' - i| = |z'|$ » ; déduisez-en la nature de Γ'.

b) Prouvez que pour tout complexe z, $z \neq 0$, « $|z - i|^2 = 2$ » équivaut à « $|z' + i|^2 = 2$ » ; déduisez-en la nature de Σ'.

Aide. Utilisez $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.

3. Cas d'un cercle passant par O

Γ est le cercle de centre A, d'affixe non nulle $a = \alpha + i\beta$, de rayon $r = AO$, privé du point O ; Γ' est son image. M désigne un point quelconque d'affixe z, $z \neq 0$.

a) Prouvez que « M $\in \Gamma$ » équivaut à « $z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z = 0$ ».

Aide. $|z - a|^2 = |a|^2$.

b) Démontrez que Γ' est l'ensemble des points M′ d'affixe z' tels que :

$$1 - a\overline{z'} - \overline{a}z' = 0.$$

c) En posant $z' = X + iY$, $X \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}$, prouvez que cette relation s'écrit :

$$\alpha X + \beta Y = \frac{1}{2}.$$

d) Déduisez-en que Γ' est une droite perpendiculaire à (OA).

CONCLUSION Les transformations usuelles étudiées au lycée transforment des droites en droites et des cercles en cercles. L'inversion est un exemple de transformation pour laquelle ces résultats ne sont plus vrais.

TD 4 Racines cubiques de 1. Triangle équilatéral

L'**objectif** de ce TD est de déterminer les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3 = 1$, puis de les utiliser pour caractériser un triangle équilatéral.

1. Lorsque $z \neq 0$, on note r son module et θ son argument défini dans $[0 ; 2\pi[$, ainsi $z = re^{i\theta}$.

a) Prouvez que « $z^3 = 1$ » équivaut à « $r = 1$ et $3\theta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ».

b) On est donc amené à résoudre l'équation (E) : $3\theta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Les solutions de (E) sont les réels $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Indiquez les valeurs θ_0, θ_1, θ_2 obtenues lorsque $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$.

Déduisez-en que les complexes 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.
Représentez les points images M_0, M_1, M_2.

- Il s'agit maintenant de vérifier s'il y a d'autres solutions ou non.

Vérifiez que : lorsque $k = 3p$ $(p \in \mathbb{Z})$, $\theta_k = \theta_0$;
lorsque $k = 3p + 1$ $(p \in \mathbb{Z})$, $\theta_k = \theta_1$;
lorsque $k = 3p + 2$ $(p \in \mathbb{Z})$, $\theta_k = \theta_2$.

Concluez.

c) Démontrez que les points images M_0, M_1, M_2 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

d) Les complexes solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont appelés les **racines cubiques de 1.**

On note j le nombre $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, d'où $j^3 = 1$; remarquez que les racines cubiques de 1 sont : $1 ; j ; j^2$.

Vérifiez que $1 + j + j^2 = 0$ et que $\bar{j} = j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2 cm). A, B, C sont trois points distincts deux à deux d'affixes a, b, c. On rappelle que « ABC est un triangle équilatéral direct » équivaut à « $a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$ » (voir *Comprendre*, page 353).

Utilisez les résultats de la question **1.** pour démontrer que :

« ABC est équilatéral direct » équivaut à « $a + bj + cj^2 = 0$ ».

Aide. Voir la partie *Types de problèmes et raisonnements*, fiche G, page 455.

3. À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe les points R, M et M′ d'affixes 1, z, $\bar{z}$.

a) Pour quelles valeurs de z, les points M et M′ sont-ils distincts ?

b) En supposant que la condition précédente est réalisée, prouvez que l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que le triangle RMM′ soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

Note
Deux types de raisonnement, analytique ou géométrique, sont possibles.

Commentaire Post-Bac. La recherche, dans le cas général, des racines n-ièmes de l'unité suit la méthode exposée ici pour les racines cubiques de 1.

On peut alors prouver que les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ et que les images de ces solutions sont les sommets d'un polygone régulier convexe à n côtés.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. et 2. Affixe d'un vecteur

Pour les exercices de cette rubrique, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1 **1.** Placez les points A, B, C d'affixes :

$$z_A = -1 + i, \quad z_B = 2 + i, \quad z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

2. Calculez les affixes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

3. Déduisez-en les longueurs AB, AC et BC.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

2 **1.** Placez les points A, B, C d'affixes :

$$z_A = -\frac{1}{3} - 2i, \quad z_B = 1 + 2i \quad z_C = \frac{7}{3} + 6i.$$

2. Calculez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Déduisez-en que A, B et C sont alignés.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 349.

3 **1.** Placez les points A, B, C, D d'affixes :

$$z_A = 1{,}5i; \quad z_B = 3{,}5 + i;$$
$$z_C = 1 - 1{,}5i; \quad z_D = -2{,}5 - i.$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

4 Les points A et B ont pour affixes respectives :

$$z_A = 2(1 + i\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad z_B = 2(1 - i\sqrt{3}).$$

1. Prouvez que A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

2. Trouvez l'affixe du point C tel que O est le centre de gravité du triangle ABC.

3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

5 Les triangles ABC et A'B'C' sont définis par les affixes de leurs sommets :

$$a = 1 - i, \quad b = 2 + 3i, \quad c = 3 + i,$$
$$a' = -1 + 3i, \quad b' = 3 - i, \quad c' = 4 + i.$$

1. Calculez l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

2. Calculez l'affixe de G, centre de gravité de ABC.

3. Prouvez que G est le centre de gravité de A'B'C'.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 349.

6 $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont deux vecteurs dont les affixes sont telles que $z_{\vec{w}'} = iz_{\vec{w}}$. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{w}'$. Démontrez que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 351.

7 Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$1 + i, \quad 4 + 5i, \quad 5 - 2i.$$

Prouvez que (AB) et (AC) sont perpendiculaires en calculant une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 351.

8 **1.** **a)** Placez les points A, B, C d'affixes :

$$a = 1 + \frac{3}{4}i, \quad b = 2 - \frac{5}{4}i, \quad c = 3 + \frac{7}{4}i.$$

b) Quelle relation lie les affixes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

2. Déduisez-en que ABC est un triangle rectangle isocèle.

3. Calculez l'affixe de A' tel que ABA'C est un carré.

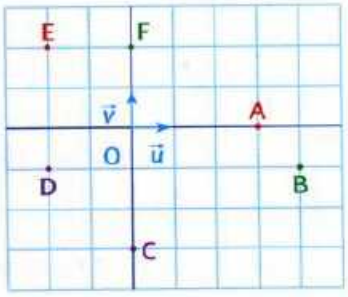
☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 351.

9 Les points repérés sur la figure ci-dessous sont à coordonnées entières.

1. Donnez par lecture graphique l'argument θ, avec θ dans $]-\pi ; \pi]$, de chacune des affixes des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{AC}, \ \overrightarrow{CA}, \ \overrightarrow{CD}, \ \overrightarrow{CF}, \ \overrightarrow{ED}, \ \overrightarrow{EF}, \ \overrightarrow{FE}.$$

2. Calculez une valeur approchée à 10^{-3} près de θ dans le cas des vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AD}$.



10 **1.** Placez les points A, B, C d'affixes :

$$a = 1 + i, \quad b = 2 - i, \quad c = 1 + 2\sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

2. Quel théorème permet le calcul d'une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$?

3. Déduisez-en les particularités du triangle ABC.

11 Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives :
$a = 2 - 2i$, $b = -1 + 7i$, $c = 4 + 2i$, $d = -4 - 2i$.

1. Ω est le point d'affixe $\omega = -1 + 2i$.
Prouvez que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5.

2. On note e l'affixe du milieu E de [AB].

a) Calculez e.

b) Prouvez que $\dfrac{a-e}{d-e} = \dfrac{c-e}{a-e}$.

c) La droite (EA) est une droite remarquable du triangle DEC ; précisez laquelle.

12 **1.** Placez les points E et F d'affixes $z_E = 3 + i$ et $z_F = -1 + 2i$ puis construisez le point H tel que EHF est un triangle rectangle isocèle direct en H, c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HE}) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit z_H l'affixe de H ; on note $Z = \dfrac{z_E - z_H}{z_F - z_H}$.

a) Indiquez le module et un argument de Z.

b) Déduisez-en l'affixe du point H.

13 ZOOM SUR... **le théorème 2**

1. Pourquoi, pour exprimer l'affixe de G en fonction de celles de $A_1, A_2, \ldots A_n$, écrit-on une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ... $\overrightarrow{OA_n}$?

2. Énoncez le théorème qui permet d'obtenir cette relation.

3. Démontrez le théorème dans le cas particulier où $n = 4$; $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = -2$; $\alpha_3 = 5$; $\alpha_4 = -3$; $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 2 - 4i$; $z_3 = 5 - 2i$; $z_4 = -i$; en donnant toutes les justifications.

14 A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$.
Dans chacun des cas, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z satisfait la condition indiquée.

a) $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$. **b)** $|z - (3 + 2i)| = 1$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 351.

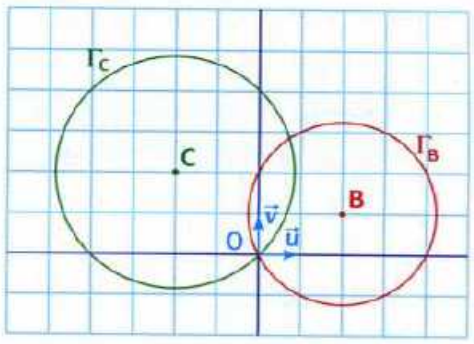
15 Sur la figure ci-après, on a représenté les disques Γ_B et Γ_C de centres B et C d'affixes respectives :
$z_B = 2 + i$ et $z_C = -2 + 2i$,
et passant par O origine du repère.

1. Prouvez que :
« $M(z) \in \Gamma_B$ » équivaut à « $|z - 2 - i| \leqslant \sqrt{5}$ ».

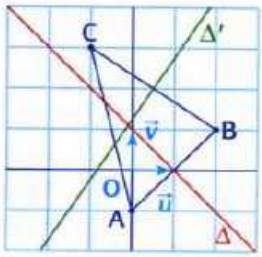
2. Caractérisez de manière analogue l'appartenance du point M(z) au disque Γ_C.

3. Représentez l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M(z) tels que :
$|z - 2 - i| \leqslant \sqrt{5}$ et $|z + 2 - 2i| \leqslant 2\sqrt{2}$.

☞ **Note.** On dit que le système $\begin{cases} |z - 2 - i| \leqslant \sqrt{5} \\ |z + 2 - 2i| \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases}$ caractérise l'ensemble $\mathscr{E}$.



16 Sur la figure ci-contre, on a placé les points A, B, C d'affixes : $a = -i$, $b = 2 + i$, $c = -1 + 3i$, et les droites Δ et Δ' médiatrices de [AB] et [BC].



1. **a)** Prouvez que :
« $M(z) \in \Delta$ » équivaut à
« $|z - (-i)| = |z - 2 - i|$ ».

b) Caractérisez de manière analogue l'appartenance d'un point M(z) à la médiatrice Δ'.

c) Représentez l'ensemble des points M(z) tels que :
$|z + i| = |z - 2 - i| = |z + 1 - 3i|$.

2. **a)** Quel est l'ensemble P des points M(z) tels que :
$|z + i| \geqslant |z - 2 - i|$?

b) Quel est l'ensemble P' des points M(z) tels que :
$|z + 1 - 3i| \geqslant |z - 2 - i|$?

c) Coloriez la région du plan qui représente l'ensemble des points M(z) tels que :
$|z + i| \geqslant |z - 2 - i|$ et $|z + 1 - 3i| \geqslant |z - 2 - i|$.

17 Dans chaque cas, représentez l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait la condition indiquée.

a) $|z - 3| = |z - (1 + i)|$. **b)** $|z + 1 + i| = |z - 2 + 3i|$.

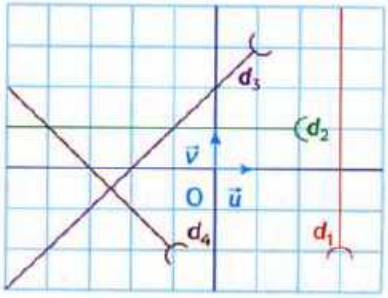
c) $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$. **d)** $|z + 3 - i| \leqslant 2$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 351.

18 Sur la figure, les origines des demi-droites sont à coordonnées entières ; d_1, d_2, d_3, d_4 sont les demi-droites ouvertes, c'est-à-dire privées de leurs origines.

1. Prouvez que :
« $M(z) \in d_1$ » équivaut à « $\arg(z - 3 + 2i) = \dfrac{\pi}{2}$ ».

2. Caractérisez de manière analogue un point M(z) de chacune des demi-droites ouvertes d_2, d_3, d_4.



19 Dans chacun des cas suivants, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z satisfait la condition indiquée.

a) $\arg(z-1) = \frac{\pi}{4}$. **b)** $\arg(z-i) = \frac{\pi}{2}$.

c) $\arg(z+i) = \frac{\pi}{3}$. **d)** $\arg(z-(1+i)) = \pi$.

3. Écritures complexes des transformations

Pour les exercices de cette rubrique, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour les exercices 20 à 22, le point M a pour affixe $z = 1 + i$. Trouvez l'affixe z' du point M', image du point M par la transformation indiquée.

20 1. t : translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$.

2. h : homothétie de centre O et de rapport 3.

21 1. r : rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. s : symétrie de centre A$(1 - 3i)$.

22 1. r : rotation de centre A$(-2 + i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. S : réflexion d'axe (Ox).

Pour les exercices 23 et 24, les points A et B ont leurs affixes a et b liées par la relation indiquée. Citez une transformation usuelle telle que A $\mapsto$ B.

23 1. $b = a - 1 + 3i$. 2. $b = -ia$.

3. $b = 2a$. 4. $b = \overline{a}$.

24 1. $b - 1 = -(a - 1)$.

2. $b - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - i)$.

3. $b = a + 4 - 3i$.

4. $b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$.

25 1. t est la translation telle que A$(1 - i) \mapsto$ B$(3 + 2i)$. Quelle est l'affixe du vecteur associé à t ? Quelle est l'écriture complexe de t ?

2. h est l'homothétie de centre O telle que :

$$C(2 - 2i) \mapsto D(-3 + 3i).$$

Quel est le rapport de h ? Quelle est son écriture complexe ?

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 353.

26 1. r est la rotation d'écriture complexe :

$$z' - i = i(z - i).$$

Précisez son centre et son angle.

2. r' est la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Quelle est son écriture complexe ?

27 1. r est la rotation de centre O telle que :

$$G(3 - i\sqrt{3}) \mapsto H(3 + i\sqrt{3}).$$

Calculez une mesure de $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ et déduisez-en une écriture complexe de r.

2. s est la symétrie centrale telle que :

$$E(3 - i) \mapsto F(-4 + 5i).$$

Calculez l'affixe de son centre et déduisez-en une écriture complexe de s.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 353.

28 Placez le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$.

1. Construisez le point B tel que OAB est un triangle équilatéral direct puis le point C, image de A dans la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

2. Calculez les affixes b et c de B et C.

3. Les droites (OA) et (BC) se coupent en L.

a) Justifiez que l'homothétie h de centre L telle que $h(O) = A$ transforme le triangle LOB en LAC.

b) Quel est son rapport ? Déduisez-en l'affixe de L.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 353.

29 Les points A, B, C ont pour affixes :

$$a = 8,\ b = -4 + 4i,\ c = -4i.$$

1. Prouvez que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. À tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

a) Quelle est la transformation associée ?

b) Calculez a', b', c' affixes de A', B', C'.

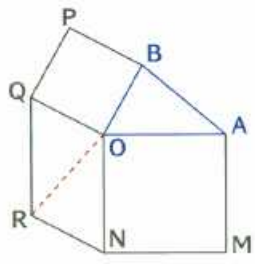
3. Les points P, Q, R, milieux respectifs des segments [A'B], [B'C], [C'A], ont pour affixes p, q, r.

a) Calculez p, q, r et vérifiez que $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$.

b) Déduisez-en la nature du triangle PQR.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 353.

30 On construit extérieurement à un triangle OAB les carrés OAMN, OBPQ et le parallélogramme NOQR. On choisit un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On note a, b, n, q, r les affixes de A, B, N, Q, R.



1. **a)** Quelles sont les images de N et B dans le quart de tour direct de centre O ?

b) Déduisez-en les expressions de n et q en fonction de a et b.

2. **a)** Exprimez r en fonction de n et q.

b) Vérifiez que $r = i(b - a)$.

c) Déduisez-en que OR = AB et que les droites (OR) et (AB) sont perpendiculaires.

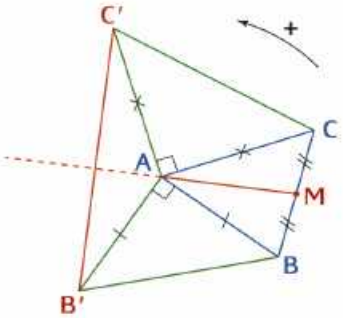
Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus. Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

31 Étudier une configuration

Dans le plan orienté, ABC est un triangle direct quelconque, M est le milieu de [BC]. Les triangles AB′B et ACC′ sont rectangles isocèles directs en A.

Objectifs : démontrer en utilisant les complexes que la médiane (AM) du triangle ABC est hauteur du triangle AB′C′ et que B′C′ = 2AM.



1. Choix du repère.
L'utilisation des complexes nécessite l'emploi d'un repère orthonormal direct.
Les points de base de la figure sont A, B, C et vu la présence d'angles droits en A, prenons comme origine A.
Il est inutile ici de préciser les vecteurs de base.
Notons b et c les affixes de B et C.

Calculez les affixes b', c' et m des points B′, C′, M en fonction de b et c.

2. Il s'agit de démontrer que $\overrightarrow{B'C'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AM}$ et B′C′ = 2AM, ce qui revient à prouver que :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{B'C'}{AM} = 2.$$

D'où l'idée d'utiliser le quotient $\dfrac{c'-b'}{m-a}$ des affixes de $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{AM}$ qui fournit deux renseignements :
– l'un sur les distances par son module,
– l'autre sur les angles par son argument.

Calculez ce quotient. Concluez.

☞ **Commentaires.** **1. Le résultat reste valable en inversant les rôles des triangles ABC et AB′C′. Si M′ est le milieu de [B′C′], la médiane (AM′) de AB′C′ est hauteur du triangle ABC et BC = 2AM′.**
2. Il existe d'autres méthodes pour démontrer ce résultat, notamment l'utilisation d'un quart de tour direct de centre A.

32 Recherche géométrique d'ensembles

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M(z), $z \neq i$, on associe le point M′(z') défini par $z' = \dfrac{z+2}{z-i}$.

Objectifs : trouver et représenter l'ensemble
- Δ des points M tels que z' est réel ;
- Γ des points M tels que z' est imaginaire pur.

1. Traduction géométrique.
Nous savons que (z' est réel) équivaut à :
« $\text{Im}(z') = 0$ » ou à « $\overline{z'} = z'$ » mais aussi, lorsque $z' \neq 0$, à « $\arg(z') = 0$ ou π ».
Or z' est un quotient du type $\dfrac{z-b}{z-a}$ dont on sait traduire un argument donc utilisons la dernière équivalence.
Notons a et b les affixes de A et B.

Quel angle de vecteurs a pour mesure $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)$?

2. Remarquons que $z' = \dfrac{z-(-2)}{z-i}$ d'où la forme désirée en posant $a = i$ et $b = -2$.

a) Vérifiez que « z' réel » équivaut à :
« M = B ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$ ».

b) Précisez la nature géométrique de l'ensemble Δ puis tracez-le.

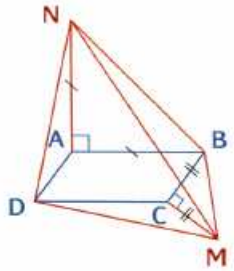
☞ **Aide.** **N'oubliez pas que $z \neq i$ donc M ≠ A.**

3. De la même façon, définissez l'ensemble Γ puis représentez-le.

☞ **Aide.** **« z' imaginaire pur » équivaut à :**
« M = B ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{2}$ ».

33 Utiliser des quarts de tour

Dans le plan orienté, on donne la figure ci-contre, où ABCD est un parallélogramme, ABN et CMB des triangles rectangles isocèles directs.



Objectif : démontrer en utilisant les complexes que le triangle DMN est rectangle et isocèle.

1. Choix du repère.
Il s'agit de prouver que DMN est un triangle rectangle isocèle c'est-à-dire que N est l'image de M par le quart de tour direct de centre D, donc pour faciliter les calculs, prenons D comme origine.
Notons a, b, c, m, n les affixes de A, B, C, M, N.
La donnée du parallélogramme DCBA montre que si a et c sont fixés, alors on peut calculer b.

a) Exprimez b en fonction de a et c.

b) Utilisez le quart de tour indirect de centre C pour exprimer m en fonction de a et c.

c) De même, exprimez n en fonction de a et c.

2. Il s'agit alors d'obtenir une relation entre m et n qui permette de reconnaître l'action du quart de tour direct de centre D (origine du repère).

Exprimez n en fonction de m. Concluez.

34 Trouver des lieux géométriques

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, à tout point M d'affixe z, on associe les points M′ et M″ d'affixes respectives :

$$z' = iz \quad \text{et} \quad z'' = z^2.$$

Objectifs : préciser les lieux Δ et Γ des points M tels que respectivement :

- M, M′et M″ sont alignés ;
- MM′M″ est un triangle rectangle en M.

(voir la partie *Types de problèmes et raisonnements* fiche I, page 458).

1. Nous savons que l'alignement et l'orthogonalité se traduisent par des relations angulaires.
Ainsi, lorsque $M' \neq M$ et $M'' \neq M$, la condition

« M, M′ et M″ alignés » **(1)**

équivaut à « $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = 0$ ou π » **(2)**.

a) Pour quelles valeurs de z, $M = M'$ ou $M = M''$?
Alors M, M′et M″sont bien sûr alignés.

b) Vérifiez que lorsque $z \neq 0$ et $z \neq 1$, la condition (1) équivaut à « $\arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right) = 0$ ou $\arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right) = \pi$ ».

c) Calculez un argument de $i-1$ et déduisez-en que la condition précédente équivaut à :

« $\arg(z-1) = \frac{3\pi}{4}$ ou $\arg(z-1) = -\frac{\pi}{4}$ ».

2. Nous connaissons les ensembles de points M(z) tels que $\arg(z-a) = \theta$ (voir *Comprendre* page 351).
Notons I le point d'affixe 1.

Représentez l'ensemble Δ et précisez sa nature.
(N'oubliez pas les points particuliers.)

3. De la même façon, déterminez l'ensemble Γ et représentez-le.

☞ **Aide.** « $M \in \Gamma$ » équivaut à :
« $M' \neq M$, $M'' \neq M$ et $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ ».

☞ **Commentaire.** Dans ce genre de problème, il ne faut pas oublier les cas particuliers. Ainsi pour définir Δ, les points O et I sont des solutions évidentes alors que pour l'ensemble Γ, ils ne peuvent pas l'être.

35 Longueur d'une ligne brisée

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, on considère la suite (A_n) de points dont les affixes a_n sont telles que :

$$a_0 = 8 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)a_n.$$

On pose pour tout entier naturel k, $d_k = A_kA_{k+1}$ et pour tout entier n, $n \geqslant 1$,

$$L_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}.$$

Objectifs : représenter les points de la suite (A_n) puis prouver que la suite (L_n) converge.

1. Il peut être utile de placer quelques points pour comprendre la situation.

a) Quelle conjecture pouvez-vous alors faire quant à la nature des triangles OA_0A_1, OA_1A_2, etc. ?

b) D'une manière générale, prouvez que pour tout k de $\mathbb{N}$, les triangles OA_kA_{k+1} sont rectangles en O et que $OA_{k+1} = \frac{1}{2}OA_k$.

c) Comment construire A_{k+1} après avoir placé A_k ?

2. Notons que (d_k) est la suite des longueurs des hypoténuses des triangles rectangles OA_kA_{k+1}.
Exploitons alors cette situation pour étudier la longueur L_n de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_n$.

a) Quel rapport existe-t-il entre les longueurs successives A_kA_{k+1} et $A_{k+1}A_{k+2}$?

b) Déduisez-en que (d_k) est une suite géométrique.
Précisez son premier terme et sa raison.

c) Que représente L_n pour la suite (d_k) ?
Exprimez alors L_n en fonction de n puis déduisez-en que la suite (L_n) converge et précisez sa limite.

☞ **Prolongement.** On pourrait s'intéresser à l'aire balayée par le rayon [OM] lorsque M décrit la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_n$. Cette aire tend vers une limite finie. Laquelle ?

Pour progresser

Vecteurs et affixes

Sauf indication de l'énoncé, dans cette rubrique, le plan complexe est muni d'un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.

36 Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives a, b, c, d. Démontrez que « ABCD est un parallélogramme » équivaut à « $a + c = b + d$ ».

37 **Calcul des lignes trigonométriques de $\frac{3\pi}{8}$**

Les points A et B sont repérés par leurs affixes :

$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

I désigne le milieu de [AB].

1. a) Faites une figure.

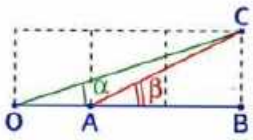
b) Précisez la nature du triangle OAB.

c) Déduisez-en une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OI})$.

2. a) Calculez l'affixe z_I de I sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

b) Déduisez-en $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

38 Dans le réseau à mailles carrées (de côté 1) du plan orienté, on considère la figure ci-contre.



On note α et β les mesures principales des angles $(\vec{OA}, \vec{OC})$ et $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

Le but de l'exercice est d'utiliser les nombres complexes pour évaluer $\alpha + \beta$.

1. On choisit le repère orthonormal direct $(O ; \vec{OA}, \vec{BC})$.

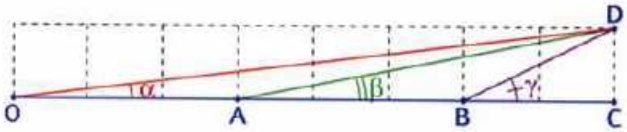
a) Indiquez les affixes de A, B et C.

b) Exprimez α et β sous la forme d'arguments d'affixes de vecteurs.

2. Déduisez-en la valeur de $\alpha + \beta$.

☞ **Note. Il existe d'autres méthodes, notamment l'utilisation de la trigonométrie, pour calculer $\alpha + \beta$.**

39 Utilisez la méthode de l'exercice 38 pour évaluer la somme de $\alpha + \beta + \gamma$ où α, β, γ désignent les mesures principales de $(\vec{OA}, \vec{OD})$, $(\vec{AB}, \vec{AD})$ $(\vec{BC}, \vec{BD})$, dans le réseau à mailles carrées (de côté 1) du plan orienté représenté sur la figure ci-dessous.



40 Les points A et B ont pour affixes $a = -8$ et $b = 8i$. D est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

C est le barycentre des points A, B et D affectés des coefficients respectifs -3, $\sqrt{3}$ et 3.

1. Calculez les affixes d et c des points D et C.

2. Prouvez que A, B, C, D sont sur un même cercle. Précisez son centre et son rayon.

3. **a)** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

b) Démontrez que ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.

41 Les points A_1, B_1, C_1 ont pour affixes respectives :

$$a_1 = 2, \quad b_1 = i\sqrt{3}, \quad c_1 = -4 + 3i\sqrt{3}.$$

On construit les carrés directs $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$.

1. Démontrez que A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

2. Démontrez que A_3, B_3 et C_3 sont alignés.

3. **a)** Prouvez que l'affixe de C_2 est $c_2 = (1 + i)c_1$.

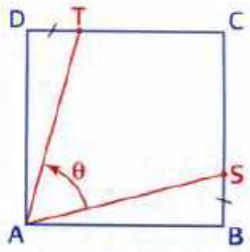
b) Déduisez-en que A_2, B_2, C_2 sont alignés.

42 Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct de côté a.

Pour tout réel x dans l'intervalle [0 ; 1], on considère les points S et T tels que :

$\vec{BS} = x\vec{BC}$ et $\vec{DT} = x\vec{DC}$.

On note θ la mesure principale de $(\vec{AS}, \vec{AT})$.



Le but de l'exercice est d'exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x.

On choisit le repère orthonormal direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{AB} = a\vec{u}$ et $\vec{AD} = a\vec{v}$.

1. Exprimez les affixes s et t de S et T en fonction de a et de x.

2. **a)** Prouvez que θ est tel que :

$$\cos\theta = \frac{2x}{1 + x^2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

b) Pour quelle valeur de x, $(\vec{AS}, \vec{AT}) = \frac{\pi}{4}$?

43 • BAC **1.** On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

a) Faites une figure que vous compléterez tout au long de l'exercice. (Unité graphique : 1 cm.)

b) Écrivez sous forme algébrique $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.

Que pouvez-vous en déduire pour le triangle IAB ?

c) Calculez l'affixe z_C du point C, image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

d) D est le barycentre du système de points $\{(A ; 1), (B ; -1), (C ; 1)\}$. Calculez son affixe z_D.

e) Démontrez que ABCD est un carré.

2. Déterminez et construisez l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}.$$

a) Prouvez que B appartient à Γ_2.

b) Déterminez puis construisez Γ_2.

44 BAC I désigne le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OI] et Ω son centre.

A. On considère le point A_0 d'affixe $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

1. Prouvez que A_0 appartient à $\mathscr{C}$.

2. B est le point d'affixe $b = -1 + 2i$ et B′ celui d'affixe $b' = a_0 b$.

a) Calculez b'.

b) Prouvez que le triangle OBB′ est rectangle en B′.

B. Soit a un nombre complexe ($a \neq 0$, $a \neq 1$) et A le point d'affixe a. À tout point M d'affixe z, non nulle, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de trouver l'ensemble des points A tels que le triangle OMM′ est rectangle en M′.

a) On pose $Z = \frac{z' - z}{z'}$. En interprétant de deux manières un argument de Z, prouvez que :

$$(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Interprétez géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

c) Déduisez-en que le triangle OMM′ est rectangle en M′ si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$, privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de I et de O. On note x son abscisse.
On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de O et 1.
Prouvez que le point M′ appartient à la droite (OA).
Déduisez-en que le point M′ est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Ensembles de points

Sauf indication de l'énoncé, dans cette rubrique, le plan complexe est muni d'un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.

45 M désigne un point d'affixe $z = x + iy$.
On se propose de trouver, par deux méthodes, l'ensemble Γ des points M tels que :

$$|\bar{z} - 2 + 3i| = \sqrt{2}.$$

1. Méthode analytique : prouvez que « $M \in \Gamma$ » équivaut à « $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ ».
Déduisez-en Γ.

2. Méthode géométrique : retrouvez Γ à l'aide d'une interprétation géométrique.

☞ **Aide.** Rappelez-vous que $|\bar{z}| = |z|$.

46 M désigne un point d'affixe $z = x + iy$.
On se propose de trouver l'ensemble Δ des points M tels que :

$$|\bar{z} - 2 + i| = |z + 3 - 2i|$$

par deux méthodes.

1. Méthode analytique : prouvez que « $M \in \Delta$ » équivaut à « $5x - y + 4 = 0$ ».
Déduisez-en Δ.

2. Méthode géométrique : retrouvez Δ à l'aide d'une interprétation géométrique.

☞ **Aide.** Rappelez-vous que $|\bar{z}| = |z|$.

47 Construisez dans chacun des cas, l'ensemble des points M(z) dont l'affixe vérifie la condition indiquée.

a) $\arg(1 - z) = -\frac{\pi}{6}$. **b)** $\arg(2 + i - z) = \frac{\pi}{2}$.

c) $\arg(\bar{z} - 1 - i) = -\frac{2\pi}{3}$.

☞ **Aide.** $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \arg(z_M - z_A)$, $\arg(-z) = \pi + \arg z$, $\arg(\bar{z}) = -\arg z$.

48 • Dans chacun des cas, précisez l'ensemble Γ des points M(z) vérifiant la condition indiquée, par deux méthodes :
• l'une analytique, en posant $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$;
• l'autre géométrique en interprétant la condition.
Représentez ensuite cet ensemble.

a) $|\bar{z} + 3 - 4i| = 5$. **b)** $|\bar{z} - 2 + i| = |z - 4 + 2i|$.

49 • Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.
À tout point M d'affixe z, $z \neq -\frac{1}{2}i$, on associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{z + 2i}{1 - 2iz}$.
Prouvez que si M est sur Γ, alors M′ est aussi sur Γ.
La réciproque est-elle vraie ?

☞ **Aide.** « $M \in \Gamma$ » équivaut à « $|z|^2 = 1$ » donc à « $z\bar{z} = 1$ ».

50 • Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - i| = |iz - i| = |z - iz|$?

51 • z est un complexe tel que $z \neq -2i$.
On pose $Z = \frac{z - 3 - i}{z + 2i}$.
Dans chacun des cas, précisez l'ensemble des points m d'affixe z tels que le point M d'affixe Z vérifie la condition indiquée.

a) M est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

b) M est sur le cercle de centre O et de rayon 2.

c) M est sur le demi-axe $]Oy)$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 351 et l'exercice 32, page 363.

52 • On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M(z) tels que $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$.

On note x et y les parties réelle et imaginaire de z.

1. a) Prouvez que M appartient à $\mathscr{H}$ si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

b) Les points A, B, C ont pour affixes respectives :

$$a = 2,\ b = -3 - i\sqrt{5},\ c = -3 + i\sqrt{5}.$$

Vérifiez que A, B, C appartiennent à $\mathscr{H}$.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

L'image du point M par r est le point M′ d'affixe $z' = x' + iy'$ $(x' \in \mathbb{R},\ y' \in \mathbb{R})$.

a) Calculez les affixes a', b', c' de A′, B′, C′.

b) On note $\mathscr{H}'$ l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de $\mathscr{H}$.

Exprimez x et y en fonction de x' et y' puis prouvez que M′ appartient à $\mathscr{H}'$ si et seulement si $x'y' = -2$.

3. Faites une figure sur laquelle vous placerez les points A, B, C, A′, B′, C′ et la courbe $\mathscr{H}'$. Construisez alors $\mathscr{H}$.

53 • BAC A est le point d'affixe $3i$.

On appelle f la fonction qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M′ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}.$$

1. Recherche des points invariants par f

a) Développez $(z - 7i)(z + i)$.

b) Prouvez que f admet deux points invariants B et C dont vous préciserez les coordonnées.

2. On appelle Σ le cercle de diamètre [BC].

M désigne un point de Σ (M ≠ B, M ≠ C) et M′ son image par f.

a) Justifiez que l'affixe z de M est telle que :

$$z = 3i + 4e^{i\theta} \text{ où } \theta \text{ est un nombre réel.}$$

b) Exprimez l'affixe z' de M′ en fonction de θ et déduisez-en que M′ appartient aussi à Σ.

c) Démontrez que $z' = -\bar{z}$ puis déduisez-en, en la justifiant, une construction géométrique de M′.

3. On considère un cercle de centre A et de rayon r (r réel positif).

Précisez l'image de ce cercle par f.

54 • BAC A, B et C sont les points d'affixes i, $1 + i$ et $-1 + i$. On considère la fonction f qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M′ du plan d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{iz + 2}{z - i}.$$

1. a) Calculez les affixes des images de B et C.

b) Prouvez que pour tout complexe z, $z \neq i$,

$$(z' - i)(z - i) = 1.$$

c) D est le point d'affixe $1 + 2i$.

Placez A, B, C, D sur une figure (unité graphique : 4 cm).

Déduisez de la question précédente, une construction du point D′ image de D par f.

2. On note r un réel strictement positif.

Quelle est l'image par f du cercle de centre A et de rayon r ?

3. a) Prouvez que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe de M′ est un imaginaire pur.

Que signifie ce résultat pour l'image par f de l'axe imaginaire privé de A ?

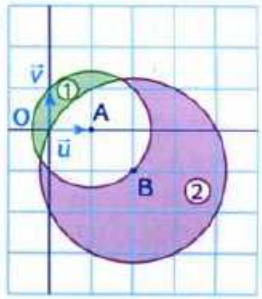
b) On note $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Précisez l'image de la droite $\mathscr{D}$ privée de A par f.

55 : Dans chacun des cas, caractérisez par une double condition sur son affixe z l'appartenance d'un point M à chacune des régions ① ou ②, frontières comprises.

❶

❷



☞ **Aide.** Voir les exercices 15 et 16, page 361.

56 : $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont deux vecteurs d'affixes :

$Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$ $(x, y, x', y'$ réels).

1. Prouvez que :

$$\bar{Z}Z' = (xx' + yy') + i(xy' - x'y).$$

☞ **Note.** La partie réelle de $\bar{Z}Z'$ n'est autre que le produit scalaire $\vec{w} \cdot \vec{w}'$ et la partie imaginaire, le réel $xy' - x'y$, est appelée déterminant de $\vec{w}$ et $\vec{w}'$.

2. Déduisez-en que :

a) « $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{w}'$ » équivaut à « $\bar{Z}Z' = Z\bar{Z}'$ » ;

b) « $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{w}'$ » équivaut à « $\bar{Z}Z' = -Z\bar{Z}'$ ».

3. Application

Pour tout complexe z non nul, on appelle M et N les points d'affixes respectives z et $\frac{1}{z}$.

Utilisez les résultats du **2.** pour préciser les ensembles suivants :

a) l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que O, M et N sont alignés ;

b) l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que (OM) est perpendiculaire à (ON).

57 BAC Pour tout couple $(z\,;z')$ de nombres complexes, on pose $\Phi(z\,;z') = z\overline{z'} + \overline{z}z'$.

1. a) Calculez :

$\Phi(i\,;3)$, $\Phi(1+2i\,;-2+2i)$,

$\Phi(2+i\,;-3+2i)$, $\Phi\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\,;e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

b) Prouvez que pour tout couple $(z\,;z')$, $\Phi(z\,;z')$ est un nombre réel.

2. On pose $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$ où x, y, x', y' sont des réels.

a) Calculez $\Phi(z\,;z')$ en fonction de x, y, x', y'.

b) Précisez l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $\Phi(z\,;1+i) = 2\sqrt{2}$. Tracez Δ.

3. On pose $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ où r, r', θ, θ' sont des réels tels que $r>0$ et $r'>0$.

a) Calculez $\Phi(z\,;z')$ en fonction de r, r', θ, θ'.

b) Exprimez $\Phi(z\,;z)$ en fonction de r.

c) Précisez l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $\Phi(z\,;z) = 2$. Tracez Γ.

d) Précisez la position relative de Δ et Γ.

58 BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$. À tout point M du plan d'affixe z distincte de $-i$, on associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1+iz}{z+i}.$$

1. a) Quelle est l'image du point O ? Quel point a pour image C d'affixe $1+i$?

b) Prouvez que l'équation $\frac{1+iz}{z+i} = z$ admet deux solutions.
Calculez ces solutions.

2. Vérifiez que $z' = \frac{i(z-i)}{z+i}$; déduisez-en que :

$$OM' = \frac{AM}{BM}$$

et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

3. Prouvez que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images situées sur un même cercle $\mathscr{C}$.
Précisez ce cercle.

4. M est un point du cercle de diamètre [AB], différent des points A et B.
Prouvez que son image M′ est située sur l'axe des abscisses.

59 A est le point d'affixe 1. Pour tout point M d'affixe z, on note M′ le point d'affixe z^3.
On se propose de déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels A, M et M′ sont alignés.

1. Méthode 1 : utilisation des arguments

a) Pour quelles valeurs de z, M = A ou M′ = A ?

b) On suppose que les points M et M′ sont distincts du point A.
Précisez, dans ce cas, l'ensemble des points M tels que A, M et M′ sont alignés.

c) Vérifiez alors que l'ensemble cherché est la réunion de deux droites.

2. Méthode 2 : utilisation de la conjugaison
Précisez cet ensemble en utilisant les résultats de l'exercice 56, question **2**.

☞ **Aide.** Voir l'exercice 32, page 363.

60 Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

1. À tout point M, d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que :

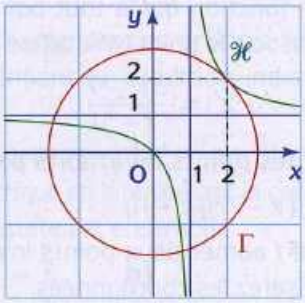
$$z' = z^2 - 2(1+i)z.$$

On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x', y' sont des nombres réels.

a) Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

b) On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
Prouvez que $\mathscr{H}$ est la représentation graphique de la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{x-1}$.

2. On a tracé ci-dessous le cercle Γ et la courbe $\mathscr{H}$.
Reproduisez cette figure.



a) Vérifiez que le point A d'affixe $a = 2(1+i)$ appartient à Γ et $\mathscr{H}$.

b) Que dire de la tangente en A à $\mathscr{H}$?

3. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et on pose B = r(A) et C = r(B).

a) Construisez B et C. Quels points particuliers semble-t-on obtenir ?

b) Donnez une écriture complexe de r puis déduisez-en les affixes de B et C.

c) Prouvez que B et C appartiennent à Γ et $\mathscr{H}$ puis précisez la nature du triangle ABC.

61 BAC Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 4 cm). On appelle f la fonction, définie sur $\mathbb{C}$ privé de $(-2i)$, qui à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}.$$

1. On pose $z = x + iy$, x et y étant deux réels.
Exprimez la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. Vérifiez que :

$$\text{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}.$$

2. a) Déduisez-en la nature de :
• l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel,
• l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z, tels que Z soit imaginaire pur.

b) Représentez ces deux ensembles.

3. On appelle A et B les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2 - i \text{ et } z_B = -2i.$$

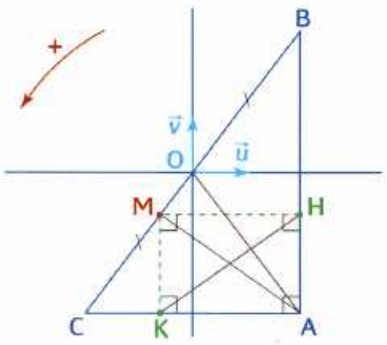
En remarquant que $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouvez les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ par une méthode géométrique.

4. Calculez $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et déduisez-en que lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, les points M′ d'affixe Z, sont tous sur un même cercle. Précisez son rayon et son centre.

Configurations. Transformations

62 • Un problème d'orthogonalité

Dans le plan orienté, ABC est un triangle direct rectangle en A. M est le projeté orthogonal de A sur (BC), H et K sont les projetés orthogonaux de M sur (AB) et sur (AC).
Le but de l'exercice est de prouver avec les complexes que les droites (OA) et (HK) sont perpendiculaires.
On choisit le repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que O est le milieu de [BC], $\vec{u}$ est un vecteur normal à (AB) et $\vec{v}$ un vecteur directeur de (AB). On note a, b, c, h, k, m les affixes respectives des points A, B, C, H, K, M.



1. Justifiez que $a = \bar{b}$ et $h - k = \overline{a - m}$.

☞ **Aide.** Utilisez le rectangle AHMK.

2. a) Prouvez que :

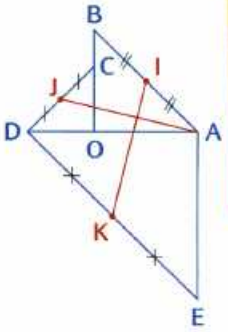
$$\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

b) Déduisez-en que :

$$\arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Concluez.

63 • Dans le plan orienté, on considère la figure ci-contre. OAB, OCD et ADE sont trois triangles rectangles isocèles et directs. I, J et K sont les milieux de leurs hypoténuses.



Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IK) et (AJ) sont perpendiculaires et que IK = AJ.
On choisit un repère orthonormal direct d'origine O.
Les affixes de A et C sont notées a et c.

1. a) Exprimez, en fonction de a et c, les affixes de B, D et E.

b) Déduisez-en les affixes z_I, z_J, z_K de I, J et K.

2. Prouvez que $z_K - z_I = i(z_J - a)$. Concluez.

☞ **Note.** Pour d'autres méthodes, voir chap. 16, TD 2, p. 434.

64 • Les points A, B, C ont pour affixes respectives :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad c = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

1. Faites une figure que vous compléterez au cours de l'exercice.

2. Calculez l'affixe d du point D, image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport –3.

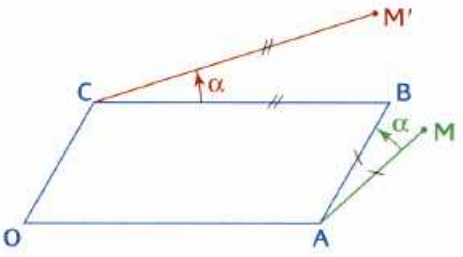
3. Calculez l'affixe e du point E, image de C par la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. a) Calculez le quotient $Z = \dfrac{d-b}{e-b}$.

b) I désigne le milieu du segment [DE] et F le symétrique de B par rapport à I.
Démontrez que BDFE est un carré.

65 • OABC est un parallélogramme « articulé » pour lequel le sommet O reste fixe.

M et M′ sont deux points tels que :
AM = AB, CM′ = CB et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM'}) = \alpha$.
On se propose de démontrer que M′ est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α.

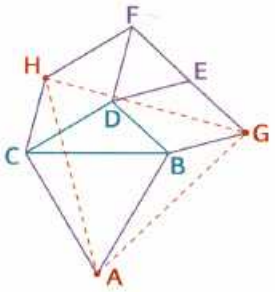


1. Un repère orthonormal direct d'origine O est choisi ; on note a et c les affixes de A et C.
Calculez l'affixe de B.

2. À l'aide des rotations, exprimez les affixes z et z' de M et M′ en fonction de a, α et c.
Déduisez-en que $z' = e^{i\alpha}z$. Concluez.

☞ **Note.** Pour d'autres méthodes, voir le chap. 16, exercice 2, p. 438.

66 • BCD est un triangle quelconque. On construit :



• le point A tel que ABC est un triangle équilatéral direct ;
• deux points E et F tels que DEF est un triangle équilatéral direct ;
• les points G et H tels que BDEG et CDFH sont deux parallélogrammes.

Le but de l'exercice est d'étudier la nature du triangle AGH en utilisant les nombres complexes.

On note a, b, c, d, e, f, g, h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H.

1. a) Justifiez que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

b) Exprimez $f - d$ en fonction de $e - d$.

2. a) Exprimez g en fonction de b, d et e.

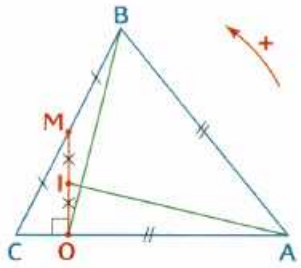
b) Exprimez h en fonction de c, d et f.

3. a) Démontrez que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$.

b) Déduisez-en la nature du triangle AGH.

67 **Un autre problème d'orthogonalité**

Dans le plan orienté, ABC est un triangle de sens direct, isocèle en A. M est le milieu du segment [BC] et O le projeté orthogonal de M sur la droite (AC). I désigne le milieu du segment [OM].



Le but de l'exercice est de démontrer à l'aide des complexes que les droites (IA) et (OB) sont perpendiculaires.

On note $a = OA$, $c = OC$ et $m = OM$.

On choisit le repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = m\vec{v}.$$

1. a) Quelles sont les affixes z_A, z_M, z_C, z_I de A, M, C, I ?

b) Calculez l'affixe z_B de B.

2. a) Exprimez $Z = \dfrac{z_A - z_I}{z_B}$ en fonction de a, c et m.

b) Prouvez que les réels positifs a, c et m sont tels que $ac = m^2$.

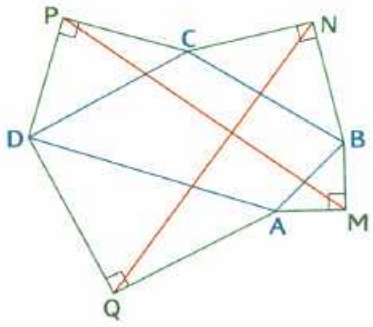
☞ **Aide.** **Exploitez la condition AB = AC.**

c) Déduisez-en que Z est imaginaire pur.

Concluez.

☞ **Note.** **Le choix du repère est ici décisif ; il permet d'exploiter l'égalité $ac = m^2$.**

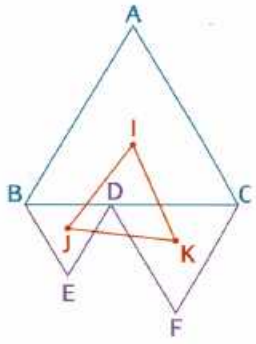
68 Dans le plan orienté, ABCD est un quadrilatère convexe de sens direct. On construit à l'extérieur de ce quadrilatère les points M, N, P, Q tels que les triangles MBA, NCB, PDC, QAD sont rectangles isocèles de sens direct respectivement en M, N, P, Q.



Démontrez en utilisant les nombres complexes que MP = NQ et que les droites (MP) et (NQ) sont perpendiculaires.

☞ **Aide.** **Utilisez un repère orthonormal quelconque. Reportez-vous au TD 1, page 355.**

69 Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral direct de centre I. D est un point du segment]BC[.



On construit les triangles équilatéraux directs BED et DFC de centres respectifs J et K.

Le but de l'exercice est de démontrer à l'aide des complexes que le triangle IJK est équilatéral.

On choisit un repère orthonormal direct $(B ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\overrightarrow{BC} = c\vec{u}$ avec $c = BC$.

1. Calculez en fonction de c, les affixes z_A et z_I des points A et I.

2. On pose $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$ avec t réel dans]0 ; 1[.

Calculez les affixes z_J et z_K des points J et K en fonction de t et c.

3. Vérifiez que $z_K - z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I)$. Concluez.

☞ **Note.** **Le choix du repère est décisif ; il permet d'exploiter au mieux la colinéarité de $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$.**

70 **Un problème de lieu**

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct de centre O. Le point M est variable sur [BC], N est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

I est le milieu de [MN]. On se propose de trouver le lieu de I lorsque M décrit [BC]. On note a la longueur de la demi-diagonale du carré ABCD. On choisit le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct tel que $\overrightarrow{OC} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{OD} = a\vec{v}$.

On pose $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC}$ avec t réel dans [0 ; 1].

1. a) Exprimez les affixes z_M et z_N de M et N en fonction de a et t.

b) Vérifiez que les points C, D et N sont alignés.

2. a) Calculez l'affixe de I.

b) Déduisez-en le lieu du point I.

☞ **Note.** **Il existe d'autres méthodes pour l'étude de ce lieu ; voir le chapitre 16, TD 3, page 435.**

71 BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout réel θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q celui d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donnez une construction géométrique du point P, du point Q. Placez les points O, A, M, P et Q sur une même figure.

2. Trouvez l'ensemble des points P lorsque θ décrit l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.
Représentez-le.

3. S est le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M.

a) Construisez S en justifiant la construction.

b) Dans le cas où S est différent du point O, tracez la droite (OS). Quelle conjecture faites-vous sur la position du point M ?

c) Démontrez que le nombre $\dfrac{1 + z + z^2}{z}$ est réel quel que soit θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$.
Concluez sur la conjecture précédente.

72 BAC Le plan complexe est muni d'un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct. A, A′, B et B′, sont les points d'affixes respectives $1 ; -1 ; i ; -i$.
À tout point M, d'affixe z, distinct de O, A, A′, B et B′, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 sont rectangles et isocèles tels que :

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Faites une figure.

2. a) Justifiez les égalités :

$$z - z_1 = i(i - z_1) \quad \text{et} \quad 1 - z_2 = i(z - z_2).$$

b) Vérifiez que z_1 et z_2 peuvent s'écrire sous la forme :

$$z_1 = \frac{1 + i}{2}(z + 1) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 - i}{2}(z + i).$$

3. On se propose de trouver les points M tels que le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

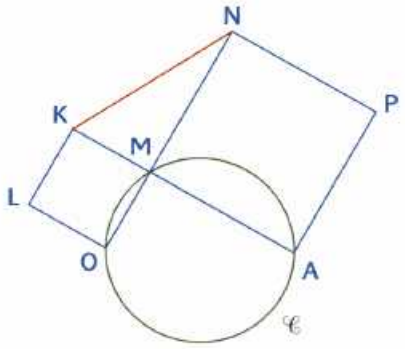
a) Prouvez que $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z + 1| = |z + i|$. Déduisez-en l'ensemble Δ des points M tels que $OM_1 = OM_2$. Tracez Δ.

b) Prouvez que « $OM_1 = M_1M_2$ » équivaut à « $|z + 1|^2 = 2|z|^2$ ».

c) Déduisez-en l'ensemble Γ des points M tels que $OM_1 = M_1M_2$. Tracez Γ.

d) Déduisez-en les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral. Placez-les.

73 BAC Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés $(O \neq A)$, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $OA = 1$, un point M distinct de O et A, variable sur $\mathscr{C}$, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO.



Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de prouver que le point N appartient à un cercle à déterminer.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct tel que O et A aient pour affixes 0 et 1. On note k, l, m, n, p les affixes respectives de K, L, M, N, P.

1. Prouvez que quel que soit M choisi sur $\mathscr{C}$, on a :

$$\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

2. Démontrez les relations suivantes :

$$l = im, \quad p = -im + 1 + i.$$

On admettra que l'on a également :

$$n = (1 - i)m + i \quad \text{et} \quad k = (1 + i)m.$$

3. Prouvez que le milieu Ω de [PL] est un point de $\mathscr{C}$ indépendant de la position de M sur $\mathscr{C}$.
Précisez sa position sur $\mathscr{C}$.

4. a) Calculez la distance KN et prouvez que cette distance est constante.

b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5. Démontrez que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont vous préciserez le centre et le rayon.

Suites de points et complexes

74 Le plan complexe est muni d'un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct (unité graphique : 4 cm).
A_0 est le point d'affixe 2. Pour tout entier naturel n, si A_n est un point d'affixe z_n, on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_nA'_n]$.
On note r_n et θ_n le module et un argument de z_n.

1. Placez les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

2. a) Prouvez que pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{1 + i}{2} z_n.$$

b) Déduisez-en que la suite (r_n) est géométrique et que la suite (θ_n) est arithmétique.
Précisez leur premier terme et leur raison.

c) Calculez r_n et θ_n en fonction de n.

d) Quelle est la limite de la suite (r_n) ?
Interprétez géométriquement ce résultat.

e) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. a) Prouvez que pour tout $n \geqslant 1$, $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$.

b) Exprimez en fonction de n la longueur L_n de la ligne brisée $A_0A_1 \ldots A_n$ puis déterminez sa limite.

75 BAC **1. a)** (r_n) est une suite géométrique réelle de premier terme r_0 ($r_0 > 0$) et de raison $\frac{2}{3}$.
Exprimez r_n en fonction de r_0 et de n.

b) (θ_n) est la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 (θ_0 dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$) et de raison $\frac{2\pi}{3}$.
Exprimez θ_n en fonction de θ_0 et de n.

c) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = r_n e^{i\theta_n}$.
Sachant que z_0, z_1 et z_2 sont liés par la relation $z_0z_1z_2 = 8$, calculez le module et un argument de z_0, z_1 et z_2.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm), M_n est le point d'affixe z_n.

a) Placez les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

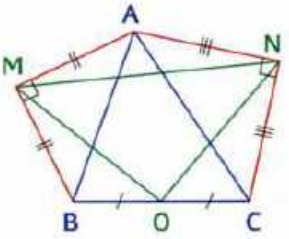
b) Pour tout entier naturel n, calculez $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$ en fonction de n.

c) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} \|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\|$. Calculez L_n en fonction de n puis déterminez sa limite.

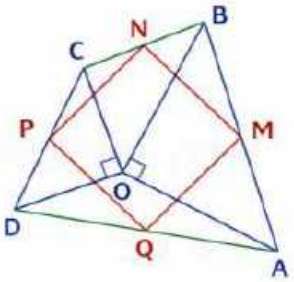
Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

76 Dans le plan orienté ABC est un triangle de sens direct.
On construit les triangles isocèles rectangles MAB et NAC comme indiqué sur la figure.
Démontrez que OMN est un triangle rectangle isocèle en O.



77 Dans le plan orienté, on donne la figure suivante, où OAB et OCD sont deux triangles rectangles isocèles de sens direct et M, N, P, Q les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA].
Démontrez que MNPQ est un carré.



78 • Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M du plan, d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2z}{1 + z\bar{z}}.$$

Prouvez que pour tout point M, son image M′ est un point du disque de centre O et de rayon 1.

79 • Dans le plan orienté, ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r.
Dans le quart de tour direct de centre O, il se transforme en A′B′C′D′.
P, Q, R, S désignent les milieux respectifs de [BA′], [CB′], [DC′] et [AD′].
Démontrez que les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires et que PR = QS.

80 • Dans le plan orienté, A, B, C sont trois points deux à deux distincts d'un cercle de centre O.
A′, B′, C′ sont les images de A, B, C dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On note M, N, P les milieux respectifs de [A′B], [B′C], [C′A].
Prouvez que MNP est un triangle équilatéral.

81 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne le point B d'affixe i.
Dans le quart de tour direct de centre O, le point M d'affixe z a pour image M′ d'affixe z'.
Quel est l'ensemble des points M tels que les points B, M, M′ sont alignés ?

82 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z, on associe les points M′ et M″ d'affixes respectives z^2 et z^3.
Quel est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MM′M″ est rectangle ?

83 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Pouvez-vous trouver un triangle équilatéral dont les sommets sont des points à coordonnées entières ?

Problèmes

84 Thèmes : *Suites géométriques. Trigonométrie. Configurations. Construction de pentagone régulier*

1. Calcul de $\cos\frac{2\pi}{5}$

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ puis $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

a) Démontrez que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

b) Prouvez que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$.

c) Justifiez que α et β sont les solutions de l'équation du second degré $X^2 + X - 1 = 0$ [1].

d) Exprimez α en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

e) Résolvez l'équation [1] et déduisez-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. Étude d'un pentagone régulier

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives 1, ω, ω^2, ω^3, ω^4.
H est le point d'intersection de l'axe réel et de la droite (A_1A_4).

a) Vérifiez que $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

b) Prouvez que $\overrightarrow{OH} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\vec{u}$.

c) Γ est le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point B d'affixe i. Il coupe l'axe réel en deux points M et N. (On note M celui d'abscisse positive). Démontrez que $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \beta\vec{u}$ et que H est le milieu de [OM].

d) Calculez la longueur du côté du pentagone.

3. Construction à la règle et au compas

Déduisez de la question 2., une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

4. Une construction approchée

Elle est effectuée (sur le dessin ci-après) avec une même ouverture de compas AB prise comme unité.
Les cinq côtés du pentagone ont la même longueur par construction, mais est-ce un pentagone régulier ?

a) Justifiez que K, O et I sont alignés.

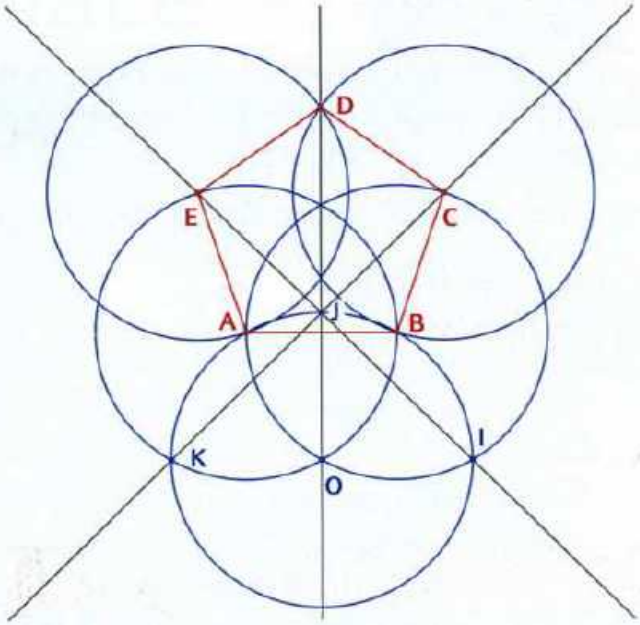
b) On considère le repère orthonormal $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Indiquez les coordonnées des points I, J, K et B et donnez une équation de la droite (KC).

c) On note α l'abscisse de C. Utilisez l'égalité BC = 1 pour prouver que $\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$.

d) Calculez de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et déduisez-en que $\cos\widehat{ABC} = \frac{1}{2} - \alpha$.

e) Quelle est, en degrés, la mesure de $\widehat{ABC}$ dans le cas d'un pentagone régulier ?

À l'aide de la calculatrice, comparez avec celle obtenue par cette construction. Concluez.



☞ **Commentaire.** **La construction ci-dessus est attribuée à Albert Dürer (1471-1528).**

85 Thèmes : *Le nombre j. Rotations. Optimisation*

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 0,5 cm). On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On donne les points A, B, C d'affixes :

$$a = 8, \quad b = 6j, \quad c = 8j^2.$$

On appelle r_A, r_B, r_C les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On pose $A' = r_C(B)$, $B' = r_A(C)$, $C' = r_B(A)$.

1. Démontrez que le nombre j est tel que :

$$j^3 = 1, \quad 1 + j + j^2 = 0, \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2, \quad e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j.$$

2. a) Prouvez que a', affixe de A' est un réel.

b) Exprimez les affixes de B' et C' en fonction de j.

c) Démontrez que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose de démontrer que $S_M = MA + MB + MC$ est minimale lorsque M = O.

a) Calculez la somme S_O.

b) M désigne un point quelconque d'affixe z.
Prouvez que :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.$$

c) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|z + z' + z''| \leqslant |z| + |z'| + |z''|.$$

Prouvez que S_M est minimale lorsque M = O.

C'EST NOUVEAU AU BAC

Dans chacun des exercices, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

86 • BAC **1.** On donne les points A, B et C d'affixes :

$$a = -2 + 3i, \quad b = -3 - i, \quad c = 2{,}08 + 1{,}98i.$$

Le triangle ABC est :

a isocèle et non rectangle. **b** rectangle et non isocèle.
c rectangle et isocèle. **d** ni rectangle, ni isocèle.

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' tel que $z' = \dfrac{z-4i}{z+2}$.

• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

a un cercle de rayon 1. **b** une droite.
c une droite privée d'un point. **d** un cercle privé d'un point.

• L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

a un cercle de rayon 1. **b** une droite.
c une droite privée d'un point. **d** un cercle privé d'un point.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

87 **1.** Les points A, B, C d'affixes :

$$a = e^{i\theta}, \quad b = e^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad c = e^{i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

définissent un triangle équilatéral.

2. Δ est la droite passant par A(i) et de vecteur directeur $\vec{w}(1+i)$. Alors Δ est l'ensemble des points M(z) tels que $\arg(z-i) = \dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

3. La transformation T qui, à tout point M(z), associe le point M'(z') tel que $z' = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i\right)z$ est une rotation de centre O.

4. Une écriture complexe de la symétrie de centre A(i) est $z' = -z + 2i$.

5. AMN est le triangle rectangle en A, isocèle, de sens direct tel que M$(3+2i)$ et N$(3i)$. Alors l'affixe de A est $1+i$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

88 **D'après document ministériel**

1. Démonstration de cours

Pré-requis. On rappelle que :

• Pour tous complexes non nuls z et z',

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'.$$

• Pour tous points distincts P et Q d'affixes respectives p et q, $\arg(q-p) = (\vec{u}, \overrightarrow{PQ})$.

Démontrez que pour tous points A, B, M d'affixes respectives a, b, z, distinctes deux à deux :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right).$$

2. Application. A et B ont pour affixes respectives $2i$ et -1. À tout point M d'affixe z différent de $2i$, on associe $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$. Utilisez la question **1.** pour déterminer puis représenter l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) Z est un réel strictement négatif ;

b) Z est un imaginaire pur non nul.

14 Le produit scalaire dans l'espace

1839

C'est en 1839 que l'on trouve la définition du produit scalaire de deux vecteurs et son expression en fonction de leurs coordonnées dans la thèse de Grassmann « Théorie des flots et des marées ».

Le calcul vectoriel a été lancé et utilisé par des physiciens et des ingénieurs, surtout dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e}. L'origine remonte aux travaux de Hamilton (1805 – 1865) et de Grassmann mais son développement est essentiellement dû au physicien Maxwel (1831 – 1879), au chimiste Gibbs (1839 – 1903), à l'ingénieur Heaveside (1850 – 1925).

Ce n'est que plus tard que les mathématiciens, faisant abstraction des entités physiques, ont vu toute la généralité de cet outil. Les théoriciens du calcul vectoriel ne distinguent pas vecteurs de l'espace et vecteurs du plan, mais travaillent avec des vecteurs pouvant avoir *n* coordonnées, dans ce qu'on appelle des espaces vectoriels abstraits. Cette théorie est aujourd'hui d'une grande importance en mathématiques et, en retour, dans les autres disciplines.

Hermann Günther Grassmann
1809 – 1877

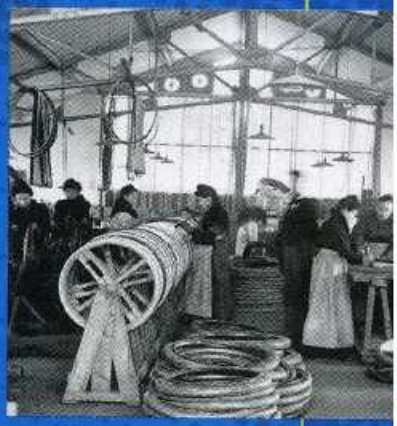
À LA MÊME ÉPOQUE

SOCIÉTÉ

La première « loi sociale » est votée en 1841, limitant le travail des enfants. Les enfants ne peuvent travailler avant l'âge de 8 ans. De 8 à 12 ans, ils ne peuvent pas faire plus de huit heures par jour, de 12 à 16 ans, plus de 12 heures par jour. Le travail de nuit n'est admis que pour les enfants âgés de plus de 13 ans.

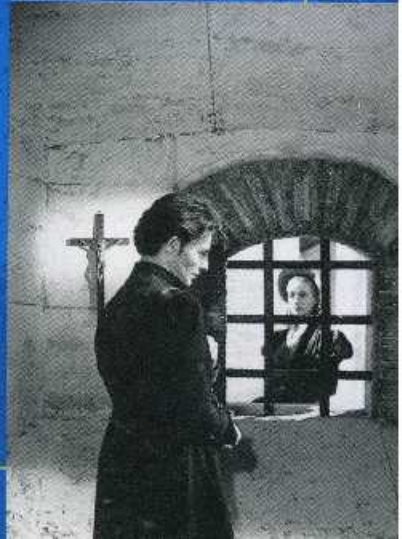
INDUSTRIE

L'invention par C. Goodyear du procédé de vulcanisation ouvre l'ère de la production et de l'utilisation industrielle du caoutchouc.



LITTÉRATURE

Stendhal écrit *La Chartreuse de Parme* : on y retrouve son génie pour la peinture psychologique du sentiment amoureux.



ACTIVITÉS

ACTIVITÉ 1 Rappels de Première S

1 Norme et distance dans l'espace

Dire que le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormal**, c'est dire que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

1. Norme d'un vecteur

Dans un repère **orthonormal**, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a ; b ; c)$ a pour **norme** :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2. Distance

Dans un repère **orthonormal**, si les points A et B ont pour coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $(x_B ; y_B ; z_B)$, alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

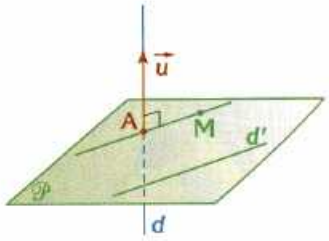
3. Exercice

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées A(2 ; 2 ; 2), B(−2 ; 2 ; −2), C(2 ; −2 ; −2) et D(−2 ; −2 ; 2). Calculez les longueurs AB, AC, AD, BC, BD et CD.
Que pouvez-vous en conclure pour les faces du tétraèdre ABCD ? (Le tétraèdre est dit régulier.)

2 Droite et plan perpendiculaires

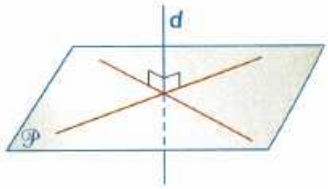
Dire que deux **vecteurs** non nuls $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont **orthogonaux** équivaut à dire que les droites (MN) et (PQ) sont orthogonales.

1. Plan perpendiculaire à une droite



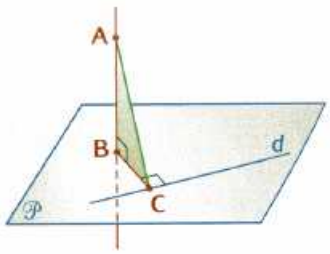
d est une droite, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, et A est un point de d.
Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à d en A est l'ensemble des points M tels que la droite (AM) est perpendiculaire à d (auquel on adjoint le point A). $\mathcal{P}$ est donc l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Il en résulte que la droite d est orthogonale à toute droite d' du plan $\mathcal{P}$.

2. Théorème



Lorsqu'une droite d est orthogonale à deux droites **sécantes** d'un plan $\mathcal{P}$, alors d est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, et donc orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.

3. Exercice



Le point B et la droite d sont dans le plan $\mathcal{P}$. La droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et la droite (BC) est perpendiculaire à la droite d.

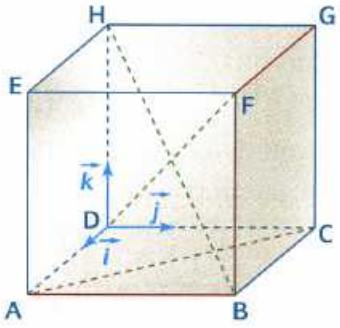
a) Expliquez pourquoi les droites (AB) et d sont orthogonales.

b) Prouvez que la droite d est perpendiculaire au plan (ABC).

c) Déduisez-en que la droite (AC) est perpendiculaire à la droite d.

ACTIVITÉ 2 Calculs dans un cube

On se propose dans cette activité de traduire analytiquement l'orthogonalité de deux vecteurs de l'espace.
ABCDEFGH est un cube d'arête AB = 3. Considérons le repère orthonormal $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Donnez dans ce repère, les coordonnées de tous les sommets du cube.

2. a) Pourquoi les droites (AB) et (FG) sont-elles orthogonales ?

b) Calculez les coordonnées $(x ; y ; z)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et les coordonnées $(x' ; y' ; z')$ du vecteur $\overrightarrow{FG}$.

c) Calculez $xx' + yy' + zz'$.

3. a) Pourquoi les droites (AC) et (BF) sont-elles orthogonales ?

b) Calculez les coordonnées $(x ; y ; z)$ du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et les coordonnées $(x' ; y' ; z')$ du vecteur $\overrightarrow{BF}$.

c) Calculez $xx' + yy' + zz'$.

4. a) Dessinez en vraie grandeur le quadrilatère DBFH. Les droites (DF) et (HB) sont-elles perpendiculaires ?

b) Calculez les coordonnées $(x ; y ; z)$ du vecteur $\overrightarrow{DF}$ et les coordonnées $(x' ; y' ; z')$ du vecteur $\overrightarrow{HB}$.

c) Calculez $xx' + yy' + zz'$.

5. a) I est le centre de la face EFGH. Donnez les coordonnées du point I.

b) $(x ; y ; z)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$ calculées à la question **4. b)**.
Calculez les coordonnées $(x' ; y' ; z')$ du vecteur $\overrightarrow{BI}$.

c) Calculez $xx' + yy' + zz'$. Que pouvez-vous conjecturer ?

6. a) Placez le point I sur la figure dessinée à la question **4. a)**.

b) Pour prouver que les droites (DF) et (BI) sont perpendiculaires, on est ramené à un problème du plan. En choisissant un repère orthonormal du plan (DBF), donnez les coordonnées des points de la figure et calculez le produit scalaire $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BI}$. Que pouvez-vous en conclure ?

CONCLUSION Plus généralement, nous verrons dans le Cours que, dans un repère orthonormal, l'orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ se traduit par $xx' + yy' + zz' = 0$.
Nous verrons que le nombre $xx' + yy' + zz'$ est appelé **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1 Produit scalaire dans le plan

1.1 Les quatre expressions du produit scalaire (rappels)

1. Dans le plan, une unité de longueur étant choisie, le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2].$$

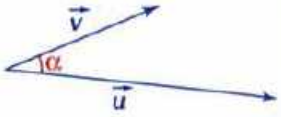
Rappel
$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u}) = \cos\alpha$ où α est une mesure en radians de l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et si α est la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors :

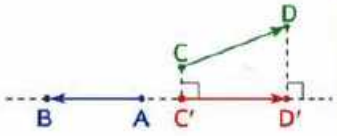
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha.$$



3. Si, dans un **repère orthonormal**, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

4. Si $\overrightarrow{C'D'}$ est le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{CD}$ sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.



1.2 Orthogonalité et distance (rappels)

THÉORÈME 1

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et donc, dans un **repère orthonormal**, à dire que $xx' + yy' = 0$, où $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Rappel
$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Il résulte de l'expression $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$, que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et donc que pour A et B quelconques dans le plan, $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. On écrit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$.

1.3 Distance d'un point à une droite (complément)

THÉORÈME 2

Dans un repère orthonormal, la **distance du point A** de coordonnées $(\alpha\,;\beta)$ à la **droite** d d'équation $ax + by + c = 0$ est égale à $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Note
Voir *Comprendre* page suivante le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

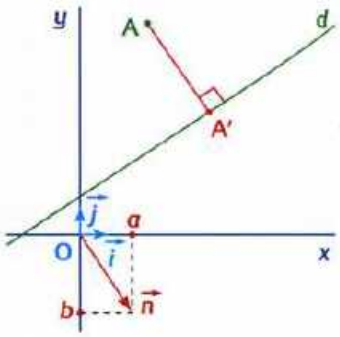
Démonstration.
Le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ est un vecteur normal à la droite d, donc $\vec{n} \neq \vec{0}$. Notons $A'(\alpha'\,;\beta')$ le projeté orthogonal du point A sur d : la distance cherchée est AA'. Or $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = \|\vec{n}\| \cdot AA' = \sqrt{a^2+b^2} \times AA'$ [1].
Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées $(\alpha' - \alpha\,;\beta' - \beta)$, donc :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = |a\alpha' + b\beta' - a\alpha - b\beta|.$$

Or A' appartenant à la droite d, $a\alpha' + b\beta' + c = 0$, d'où :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = |-a\alpha - b\beta - c| = |a\alpha + b\beta + c| \quad [2].$$

Les égalités [1] et [2] entraînent $AA' = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



COMPRENDRE

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **de même sens**.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et **de sens contraires**.
- Dans tous les cas, lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

Règles de calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et les réels a et b :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
- $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Mais :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'implique pas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. L'égalité dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

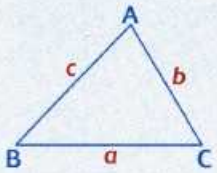
→ EXERCICE RÉSOLU 1

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$ mais $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$ et donc que $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux.

Des applications

- La **relation d'Al-Kashi**

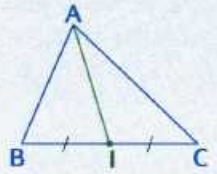
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$



- Le **théorème de la médiane**

I est le milieu de [BC] :

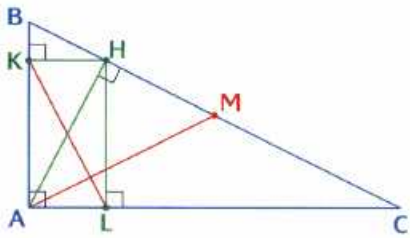
$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$



SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 — Démontrer que deux droites sont orthogonales

ÉNONCÉ ABC est un triangle rectangle en A. M est le milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A.
H se projette en K sur [AB] et en L sur [AC].
Prouvez que les droites (AM) et (KL) sont perpendiculaires.



SOLUTION COMMENTÉE

Utilisons le produit scalaire. Pour prouver que les droites (AM) et (KL) sont perpendiculaires, il suffit de démontrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$.

M étant le milieu de [BC], $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

En utilisant la projection orthogonale sur (AB), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA}$.

En utilisant la projection orthogonale sur (AC), $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.

D'où, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL})$

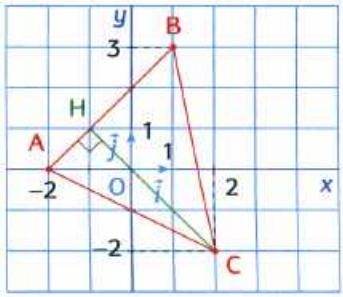
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,$

car, par hypothèse, (AH) est perpendiculaire à (BC). Donc les droites (AM) et (KL) sont bien perpendiculaires.

→ EXERCICE 5

EXERCICE RÉSOLU 2 — Calculer des grandeurs avec le produit scalaire

ÉNONCÉ Un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est donné. Les points A, B et C ont pour coordonnées A(−2 ; 0), B(1 ; 3) et C(2 ; −2).



1) Calculez une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré.

2) Calculez CH.

SOLUTION COMMENTÉE

1) L'expression 2 du produit scalaire fait intervenir le cosinus d'un angle géométrique. Ici $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (3 ; 3) et $AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (4 ; −2) et $AC = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

D'où, $\cos\widehat{BAC} = \frac{3 \times 4 + 3 \times (-2)}{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. À la calculatrice, $\widehat{BAC} \approx 71{,}56°$ et l'arrondi au dixième de degré de $\widehat{BAC}$ est 71,6°.

2) Calculons la hauteur CH, c'est-à-dire la distance de C à la droite (AB). Pour cela, écrivons une équation de (AB). Par lecture graphique, ou par le calcul, on obtient $y = x + 2$ soit $x - y + 2 = 0$.

Le théorème 2 permet de calculer CH et :

$$CH = \frac{|2 - (-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

→ EXERCICE 7

2 Produit scalaire dans l'espace

2.1 Définition

DÉFINITION 1

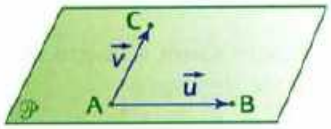
Dans l'espace, une unité de longueur étant choisie, le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2].$$

Note
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépend pas du choix des points A, B et C car si $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et (au moins) un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.

L'unité de longueur dans le plan $\mathcal{P}$ étant celle choisie dans l'espace, la définition du produit scalaire des vecteurs de l'espace $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan $\mathcal{P}$.



Il en résulte que les expressions suivantes du produit scalaire établies dans le plan (voir page 378) sont encore valables dans l'espace.

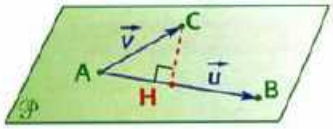
Note
Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, comme dans le plan, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

- Si α est la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha.$$

Conséquence. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

- Si, dans le plan $\mathcal{P}$, le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.



2.2 Expression analytique du produit scalaire

THÉORÈME 3

Si, dans un **repère orthonormal**, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Rappel
L'égalité : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ n'est vraie **que** dans un repère orthonormal.

Démonstration. Dans les conditions énoncées, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2$. Donc, en utilisant la définition **1** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}[(x^2 + 2xx' + x'^2) + (y^2 + 2yy' + y'^2) + (z^2 + 2zz' + z'^2) - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2]$$

$$= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy' + 2zz') = xx' + yy' + zz'.$$

2.3 Règles de calcul

THÉORÈME 4

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et les réels a et b :
1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. 2. $\vec{u} \cdot (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. 3. $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab)\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Démonstration. Démontrons la règle 2 (les deux autres se traitant de manière analogue).
Choisissons un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et notons $(x\,;y\,;z)$, $(x'\,;y'\,;z')$ et $(x''\,;y''\,;z'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Le vecteur $\vec{v}+\vec{w}$ a pour coordonnées $(x'+x''\,;y'+y''\,;z'+z'')$, donc :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'') + z(z'+z'') = (xx'+yy'+zz') + (xx''+yy''+zz'')$$
$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

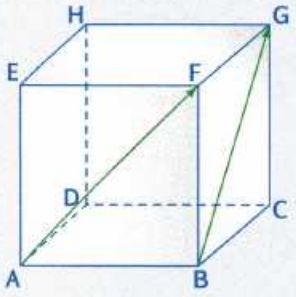
COMPRENDRE

Notion d'angle de deux vecteurs de l'espace

Pour déterminer l'angle géométrique associé à deux vecteurs de l'espace, on choisit des représentants de ces vecteurs situés **dans un même plan**.

Exemple.

Calculons la mesure α de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$ dans le cube de côté a ci-dessous.



Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont égaux, donc α est aussi la mesure de l'angle géométrique associé à $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ et A, F et H sont dans un même plan.

Le triangle AFH est équilatéral car $AF = AH = FH = a\sqrt{2}$,

on en déduit que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Un intérêt de la projection

(Voir la conséquence du § **2.1.**)

En remplaçant $\overrightarrow{AC}$ par sa projection orthogonale $\overrightarrow{AH}$ sur la droite (AB), on ramène le calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ qui est plus facile à calculer.

Exemple.

Dans le cube ci-dessus, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$. Dans le plan (AEG), le point **G se projette orthogonalement en E sur (AE)**, donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = a^2$.

SAVOIR FAIRE

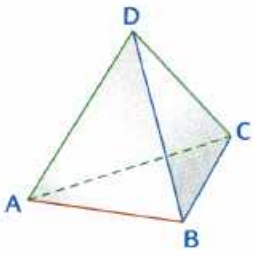
EXERCICE RÉSOLU 3 Calculer des produits scalaires sans repère

ÉNONCÉ

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a : chaque face est un triangle équilatéral de côté a. Calculez :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

SOLUTION COMMENTÉE



- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = a^2 \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$.
- De même, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$.
- D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$.

→ EXERCICES 12 et 13

EXERCICE RÉSOLU 4 Calculer dans un repère orthonormal

ÉNONCÉ

Un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné.

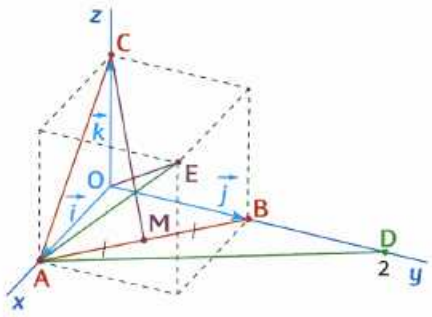
Sont représentés sur la figure ci-contre les points :

A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ; 1), D(0 ; 2 ; 0), E(1 ; 1 ; 1).

Le point M est le milieu de [AB].

Calculez :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CM}$.



SOLUTION COMMENTÉE

- Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement (−1 ; 1 ; 0) et (−1 ; 0 ; 1).

Or $(-1) \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$.

- Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont respectivement (0 ; 1 ; 1) et (−1 ; 2 ; 0).

Or $0 \times (-1) + 1 \times 2 + 1 \times 0 = 2$ donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 2$.

- Le point M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont respectivement (1 ; 1 ; 1) et $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; -1\right)$.

Or $1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) = 0$, donc $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.

→ EXERCICE 14

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION 2

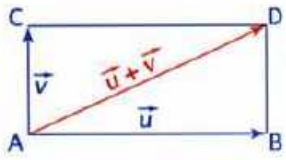
Dans l'espace, dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** signifie que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

THÉORÈME 5

1. Dire que « deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** » équivaut à dire que :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$
2. Donc, dans un repère orthonormal, « les vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ sont orthogonaux » équivaut à :
$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Démonstration.

1. Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur, et donc si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est immédiat.
On suppose donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Il existe alors des points A, B et C ($A \neq B$ et $A \neq C$) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Notons D le point tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



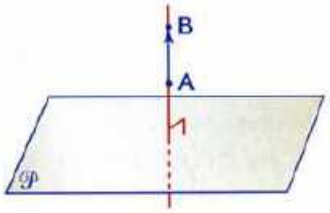
Par la définition 1, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2]$.
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ équivaut à $AB^2 + AC^2 = AD^2$, donc à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ orthogonaux.
D'où le résultat.
2. L'assertion 2. résulte directement de 1. et du théorème **3**.

EXEMPLE

Dans un repère orthonormal, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(1\,;2\,;-3)$ et $(0\,;4\,;5)$ ne sont pas orthogonaux car $1 \times 0 + 2 \times 4 + (-3) \times 5 \neq 0$.

3.2 Vecteur normal à un plan

Par définition, dire que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ signifie que la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

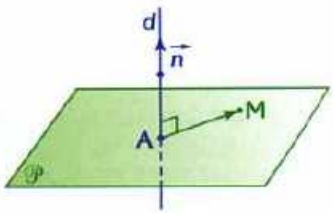


DÉFINITION 3

Un **vecteur normal à un plan** $\mathcal{P}$ est un vecteur non nul $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

3.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

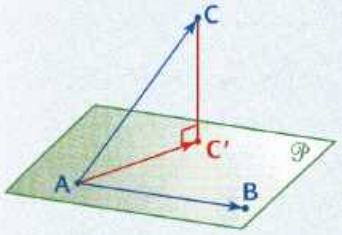
d est une droite, $\vec{n}$ un vecteur directeur de d et A un point de d.
Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à la droite d en A est l'ensemble des points M tels que la droite (AM) est perpendiculaire à d (auquel on adjoint le point A).
$\mathcal{P}$ est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à $\mathcal{P}$.



Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

COMPRENDRE

La projection orthogonale sur un plan



On ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en remplaçant l'un deux, par exemple $\overrightarrow{AC}$, par son projeté orthogonal sur un plan contenant la droite (AB).

En effet, soit C' le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C})$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C}$.

Or les droites (AB) et (CC') sont orthogonales donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$ et

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$.

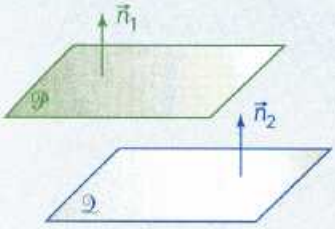
→ EXERCICE RÉSOLU 6

Une utilisation des vecteurs normaux

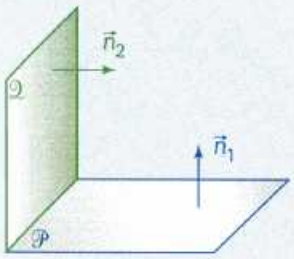
Les vecteurs normaux permettent de déterminer la position relative de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

$\vec{n}_1$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}_2$ est un vecteur normal à $\mathcal{Q}$:

• « $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires » équivaut à « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles ».



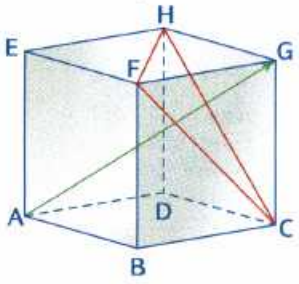
• « $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux » équivaut à « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires ».



SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 Démontrer qu'un vecteur est normal à un plan

ÉNONCÉ ABCDEFGH est un cube. Montrez que $\overrightarrow{AG}$ est vecteur normal au plan (CFH).



POINT MÉTHODE

Pour prouver qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de prouver qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

SOLUTION COMMENTÉE

D'après le point méthode, montrons que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FC}$, puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

• $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{EG}$ car A se projette orthogonalement en E sur le plan (FHE). Or la face EFGH étant un carré, (FH) et (EG) sont perpendiculaires, ce qui se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$. Donc $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$ et les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont bien orthogonaux.

• De même, $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ et $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux.

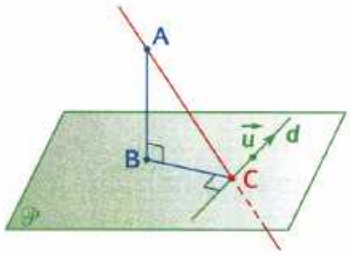
$\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FC}$: il est donc normal au plan (CFH).

→ EXERCICES 21 et 22

EXERCICE RÉSOLU 6 Démontrer l'orthogonalité de deux droites

ÉNONCÉ d est une droite contenue dans un plan $\mathcal{P}$.

Un point A extérieur à $\mathcal{P}$ se projette orthogonalement en B sur $\mathcal{P}$ et le point B se projette orthogonalement en C sur d.



Démontrez que (AC) et d sont perpendiculaires.

POINT MÉTHODE

Pour prouver que deux droites d et d' sont orthogonales, on peut prouver que $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$, où $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont des vecteurs directeurs de d et d'.

SOLUTION COMMENTÉE

Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et démontrons que $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 0$.

$\overrightarrow{AC}$ se projette en $\overrightarrow{BC}$ sur le plan $\mathcal{P}$, donc $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0$.

Donc (AC) et d sont perpendiculaires.

Remarque.

Supposons cette fois que A se projette orthogonalement en C sur la droite d, alors la droite (BC) est perpendiculaire à d. En effet, $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 0$.

→ EXERCICE 19

4 Équation cartésienne d'un plan

4.1 Équation cartésienne d'un plan

THÉORÈME 6

Note
Cette équation cartésienne n'est pas unique.

Dans un **repère orthonormal** :
1. Si le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ alors $\mathscr{P}$ a une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c ne sont pas tous nuls puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal.
2. **Réciproquement**, si les réels a, b, c et d sont donnés, et a, b, c ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.

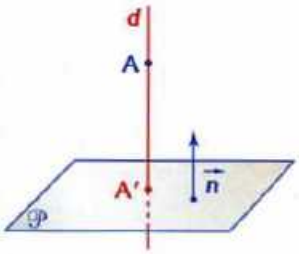
Démonstration.
1. $\mathscr{P}$ est un plan et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
Le vecteur $\vec{n}$ est, par définition, non nul : les réels a, b et c sont non tous nuls. Choisissons un point A de $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ (voir § **3.3**, page 382).
Notons $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ les coordonnées de A.
Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ se traduit par $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, c'est-à-dire par :
$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0,$$
et, en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, par $ax + by + cz + d = 0$.
2. **Réciproquement**, notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$.
a, b et c étant non tous nuls, il est donc toujours possible de choisir les réels x_0, y_0, z_0 de façon que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ (si $a \neq 0$, on peut choisir $x_0 = -\dfrac{d}{a}$, $y_0 = z_0 = 0$). Ainsi, le point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ est un point de $\mathscr{E}$.
Dire que $M(x\,;y\,;z)$ est un point quelconque de $\mathscr{E}$ équivaut à dire que :
$ax + by + cz + d = 0$, $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.
Notons $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a\,;b\,;c)$. Alors la dernière égalité se traduit par $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, ce qui équivaut à dire que M appartient au plan $\mathscr{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (voir § **3.3**, page 382). Ainsi l'ensemble $\mathscr{E}$ est le plan $\mathscr{P}$.

4.2 Distance d'un point à un plan

THÉORÈME 7

Dans un **repère orthonormal**, la distance du point A de coordonnées $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Démonstration.
Le vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
La droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A coupe $\mathscr{P}$ en A′, de coordonnées $(\alpha'\,;\beta'\,;\gamma')$, qui est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$: la distance cherchée est AA′.
Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc :
$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = \|\vec{n}\| \times AA' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times AA' \quad [1].$$
Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées $(\alpha' - \alpha\,;\beta' - \beta\,;\gamma' - \gamma)$, donc :
$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = |a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta) + c(\gamma' - \gamma)| = |a\alpha' + b\beta' + c\gamma' - a\alpha - b\beta - c\gamma|.$$
Or A′ appartenant au plan $\mathscr{P}$, $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + d = 0$, d'où :
$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = |-d - a\alpha - b\beta - c\gamma| = |a\alpha + b\beta + c\gamma + d| \quad [2].$$
Le vecteur $\vec{n}$ étant non nul, les égalités [1] et [2] impliquent $AA' = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.



RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES
exercice 71

COMPRENDRE

Conséquence du théorème 6

• Si on connaît un vecteur normal $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ du plan $\mathscr{P}$, alors on en déduit qu'une équation de $\mathscr{P}$ est $ax+by+cz+d=0$.
La connaissance des coordonnées d'un point du plan $\mathscr{P}$ permet le calcul de d.
• Réciproquement, si on connaît une équation de $\mathscr{P}$, $ax+by+cz+d=0$, alors on connaît un vecteur normal à $\mathscr{P}$, c'est $\vec{u}(a\,;b\,;c)$.

→ EXERCICE RÉSOLU 7

Une équation particulière

$(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace. Les réels a, b et c sont non nuls.
Les points $A(a\,;0\,;0)$, $B(0\,;b\,;0)$ et $C(0\,;0\,;c)$ sont sur les trois axes et déterminent un plan dont une équation cartésienne est :

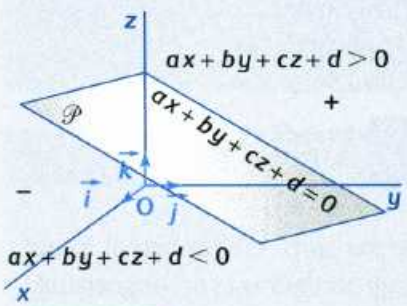
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Application. Lorsqu'on connaît les coordonnées des points d'intersection d'un plan avec les trois axes, on a immédiatement une équation de ce plan.

→ TD 3, p. 389

Régionnement de l'espace

Le plan $\mathscr{P}$, d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, partage l'espace en deux demi-espaces ouverts :
• les points $M(x\,;y\,;z)$ de l'un sont tels que $ax+by+cz+d>0$;
• les points $M(x\,;y\,;z)$ de l'autre sont tels que $ax+by+cz+d<0$.



→ TD 4, p. 390

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Trouver une équation d'un plan

ÉNONCÉ Dans un repère orthonormal, on donne le point $A(2\,;1\,;-3)$ et le vecteur $\vec{u}(1\,;1\,;2)$.
Trouvez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

SOLUTION COMMENTÉE
Le plan $\mathscr{P}$ a une équation de la forme :

$$ax+by+cz+d=0,$$

où $(a\,;b\,;c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Donc une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est de la forme $x+y+2z+d=0$. Il reste à trouver d.
Or le point A est un point du plan $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $x+y+2z+d=0$.
Ainsi $2+1+2\times(-3)+d=0$; d'où $d=3$.
Une équation de $\mathscr{P}$ est $x+y+2z+3=0$.

Une autre méthode
$\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$, c'est-à-dire tels que :

$$(x-2)\times1+(y-1)\times1+(z+3)\times2=0.$$

On retrouve $x+y+2z+3=0$.

→ EXERCICES 26 et 27

EXERCICE RÉSOLU 8 Déterminer la position de deux plans

ÉNONCÉ Dans chacun des cas suivants, on donne les équations des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$. Dites s'ils sont sécants ou non, perpendiculaires ou non.
1) $\mathscr{P}: x-4y+7=0$ et $\mathscr{Q}: x+2y-z+1=0$.
2) $\mathscr{P}: x-2y+3z-1=0$ et $\mathscr{Q}: 2x-4y+6z=0$.
3) $\mathscr{P}: 2x+y-z+1=0$ et $\mathscr{Q}: x+2y+4z-5=0$.

SOLUTION COMMENTÉE
1) $\vec{n}_1(1\,;-4\,;0)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et $\vec{n}_2(1\,;2\,;-1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{Q}$ (théorème 6).
Les deux vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : il n'existe pas de réel k tel que $\vec{n}_1=k\vec{n}_2$ donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.
Il est donc légitime de se demander s'ils sont perpendiculaires.
Or $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=1\times1+(-4)\times2+0\times(-1)=-7\neq0$,
donc les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas orthogonaux et les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas perpendiculaires (voir *Comprendre* page 383).
2) $\vec{n}_1(1\,;-2\,;3)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et $\vec{n}_2(2\,;-4\,;6)$ est un vecteur normal à $\mathscr{Q}$. Les deux vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires car $\vec{n}_2=2\vec{n}_1$ donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.
L'origine $O(0\,;0\,;0)$ appartient à $\mathscr{Q}$ et non à $\mathscr{P}$ donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles disjoints.
3) $\vec{n}_1(2\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et $\vec{n}_2(1\,;2\,;4)$ est un vecteur normal à $\mathscr{Q}$.
Or $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2\times1+1\times2+(-1)\times4=0$,
donc les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux et les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires.

→ EXERCICE 29

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

Produit scalaire

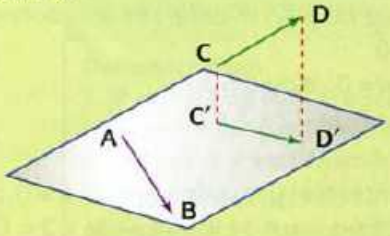
• Dans l'espace (une unité de longueur étant choisie), le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut s'exprimer de trois façons :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$.

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$, avec α mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, dans un **repère orthonormal.**

• **Projection**



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ où $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur un plan contenant (AB).

• On utilise le produit scalaire dans l'espace, comme dans le plan, pour prouver une orthogonalité, calculer une distance, déterminer le cosinus d'un angle.

Vecteur normal à un plan

• La notion de vecteur normal permet d'interpréter vectoriellement l'orthogonalité et le parallélisme de droites et de plans.

• Un vecteur normal n'est jamais nul.

• Le plan de vecteur normal $\vec{n}$ et qui passe par A, est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Cette caractérisation permet de trouver une équation du plan dans un repère orthonormal.

Distance

• Dans un repère orthonormal, la distance du point A de coordonnées $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Pour mémoriser, $a\alpha + b\beta + c\gamma + d$ est le réel que vous obtenez lorsque vous remplacez x, y et z par α, β et γ dans $ax + by + cz + d$ et $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ est la norme du vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ normal au plan $\mathcal{P}$.

DES réflexes À AVOIR

Pensez que, dans un repère orthonormal, si un plan $\mathcal{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est normal à $\mathcal{P}$, et que réciproquement, lorsque vous connaissez un vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ normal à $\mathcal{P}$, alors une équation de $\mathcal{P}$ est :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

N'oubliez pas que l'utilisation d'un repère orthonormal peut être utile pour démontrer. Si le repère ne vous est pas donné, choisissez un repère dans lequel les coordonnées des « points clés » de la figure s'expriment simplement.

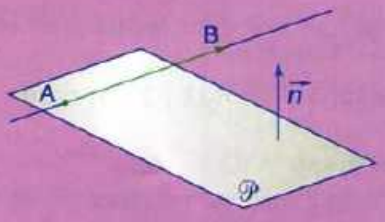
Interpréter vectoriellement l'orthogonalité, l'alignement et le parallélisme

En particulier, pensez à utiliser les équivalences (avec $\vec{n}_1$ normal à $\mathcal{P}_1$ et $\vec{n}_2$ normal à $\mathcal{P}_2$) :

• « les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles » équivaut à « $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires » ;

• « les plan $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires » équivaut à « $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux » ;

• « la droite (AB) est parallèle au plan $\mathcal{P}$ » équivaut à « $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$) ».



→ EXERCICE RÉSOLU 8

DES erreurs À ÉVITER

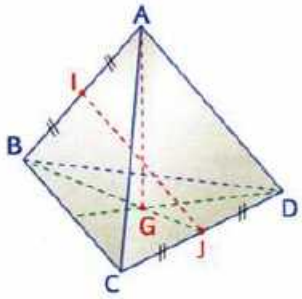
Ne pas utiliser un repère non orthonormal pour calculer des distances, pour démontrer une orthogonalité.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'implique pas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ mais $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}$.

TD 1 Propriétés du tétraèdre régulier

Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur. Deux arêtes sont dites opposées lorsqu'elles n'ont pas de point commun.

1 Propriétés du tétraèdre régulier



ABCD est un tétraèdre régulier et AB = a.

1. Propriétés des arêtes

Le but de cette partie est de démontrer que :

• deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales ;

• la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier est orthogonale à chacune de ces arêtes.

a) Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Démontrez que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Aide. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ en utilisant l'égalité $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

c) Démontrez que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales, ainsi que les droites (AD) et (BC).

d) I est le milieu de [AB] et J celui de [CD].

Vérifiez que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, et déduisez-en que la droite (IJ) est orthogonale aux droites (AB) et (CD).

2. Hauteurs du tétraèdre régulier

La hauteur issue de A est la perpendiculaire menée de A sur le plan (BCD).

a) G est le centre de gravité du triangle BCD. Calculez $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$, et déduisez-en que (AG) est la hauteur issue de A du tétraèdre.

b) Précisez les autres hauteurs du tétraèdre.

3. Propriétés de l'isobarycentre du tétraèdre

O est l'isobarycentre du tétraèdre ABCD, donc :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

a) Démontrez que les points A, O, G sont alignés. Calculez AG et AO.

b) Démontrez que O est le milieu du segment [IJ].

c) Calculez les longueurs OA, OB et OI.

Aide. Travaillez dans le plan (AOB).

d) Démontrez que le point O est équidistant des sommets du tétraèdre.
On dit que O est le **centre du tétraèdre**.

4. Calcul de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$

a) Évaluez le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ des deux façons suivantes :

- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\alpha$, où $\alpha = \widehat{AOB}$;
- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$.

b) Déduisez-en une approximation de α exprimée en degrés.

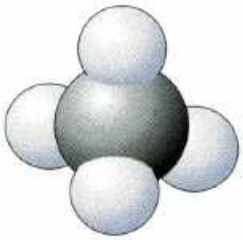
c) Démontrez que $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$.

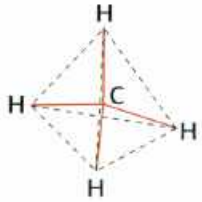
2 Application de ces résultats à la chimie

Voici représentée ci-dessous, à gauche, la molécule de méthane CH_4. Les noyaux des quatre atomes d'hydrogène sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Le noyau C de l'atome de carbone est à l'intérieur de ce tétraèdre, à égale distance de chacun des sommets. C est donc le centre de ce tétraèdre.

Pour simplifier la représentation de la molécule de méthane, on utilise le schéma ci-dessous, à droite, où les valences sont figurées en couleur et les arêtes du tétraèdre en pointillés (pour mémoire). Ce schéma est la formule stéréochimique du méthane. Des mesures ont permis de déterminer la longueur des liaisons C – H : $1{,}09 \times 10^{-10}$ mètres.

Un peu d'Histoire
Le Bel (1847-1930) et Van't Hoff (1852-1911) sont les créateurs de cette branche de la chimie : la stéréochimie.





1. Déterminez une approximation de la mesure de l'angle formé par deux liaisons C – H.

2. Déterminez la longueur de l'arête du tétraèdre, c'est-à-dire la distance entre deux atomes d'hydrogène.

TD 2 Tétraèdre orthocentrique

Un tétraèdre ABCD est dit **orthocentrique** lorsque les arêtes opposées, c'est-à-dire sans point commun, sont orthogonales, $(AB) \perp (CD)$; $(AC) \perp (BD)$; $(AD) \perp (BC)$.
Si A′ est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD), on dit que (AA′) est **la hauteur du tétraèdre issue de A**.

1 Préliminaire

ABCD est un tétraèdre (pas nécessairement orthocentrique).

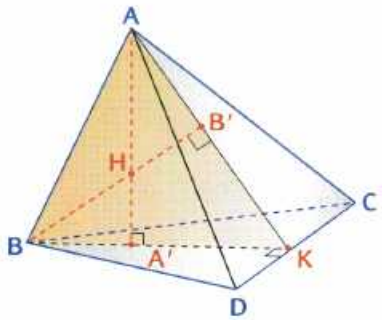
1. Démontrez que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Aide. Écrivez $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB} = \cdots + \cdots$.

2. Déduisez-en que si dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales, alors les deux autres arêtes opposées sont orthogonales, et donc ce tétraèdre est orthocentrique.

2 Propriété caractéristique du tétraèdre orthocentrique

ABCD est un tétraèdre. A′ est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) et B′ celui de B sur le plan (ACD).



1. **On suppose que ABCD est un tétraèdre orthocentrique.**

a) Démontrez que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA′) et déduisez-en que les droites (CD) et (BA′) sont perpendiculaires. On note K le point d'intersection de (CD) et de (BA′).

b) Démontrez que les droites (BC) et (DA′) sont perpendiculaires ; déduisez-en que A′ est l'orthocentre du triangle BCD.

c) Démontrez rapidement, en procédant comme aux questions **a)** et **b)**, que le point B′ est l'orthocentre du triangle ACD.

d) Démontrez que K appartient à la droite (AB′).

Aide. Utilisez le théorème des trois perpendiculaires (voir l'exercice résolu 6, page 383). Déduisez-en que les droites (AA′) et (BB′) sont sécantes.

e) Démontrez que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.
Le point de concours des hauteurs est appelé **orthocentre** du tétraèdre orthocentrique.

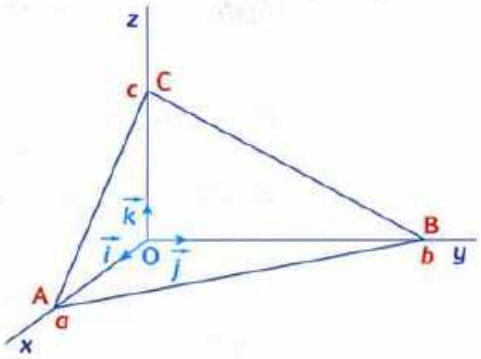
Remarque. Ainsi, en général, les hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas concourantes. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles le soient, est que le tétraèdre soit orthocentrique.

2. Étude d'une réciproque

Démontrez le résultat suivant :
« Dans un tétraèdre ABCD, si le projeté orthogonal A′ de A sur le plan (BCD) est l'orthocentre du triangle BCD, alors le tétraèdre ABCD est orthocentrique ».

TD 3 Calculs dans un tétraèdre trirectangle

OABC est un tétraèdre trirectangle (les faces OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O).
L'objectif de ce TD est d'établir des relations métriques entre les grandeurs liées au tétraèdre (longueurs des arêtes, aires des faces, ...).
On choisit pour repère le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = c\vec{k}$ (a, b et c sont donc des réels strictement positifs).



1. Déterminez une équation cartésienne du plan (ABC).

Aide. Pour des raisons de notation, prenez $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ comme équation générale d'un plan.

2. On note h la distance du point O au plan (ABC).
Exprimez h en fonction des réels a, b et c, puis déduisez-en que :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

3. On note $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC. Calculez, de deux manières différentes, le volume du tétraèdre OABC, dont une en fonction de $\mathcal{S}$.

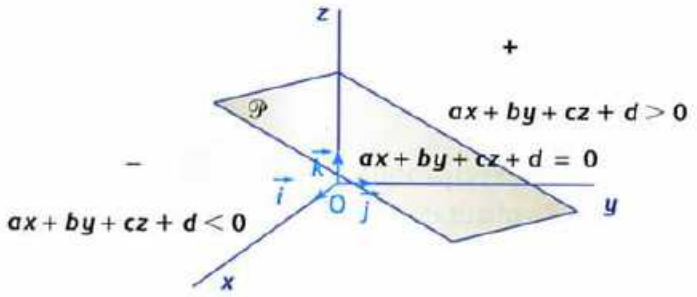
Vérifiez que $\mathcal{S} = \dfrac{abc}{2h}$.

4. Démontrez que $\mathcal{S}^2 = (\text{aire OAB})^2 + (\text{aire OBC})^2 + (\text{aire OAC})^2$.
À quel théorème de géométrie plane, ce résultat vous fait-il penser ?
Donnez un énoncé de ce nouveau théorème.

TD 4 Caractériser une région de l'espace

1 Partager par un plan l'espace en deux demi-espaces

Dans un repère orthonormal, le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, $\mathscr{P}$ est donc l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$.
Ce plan partage l'espace en deux demi-espaces. Il en résulte que pour tout point $N(x\,;y\,;z)$ de l'espace **n'appartenant pas** au plan $\mathscr{P}$, l'expression $ax + by + cz + d$ est non nulle.

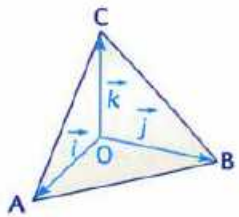


On admet que, dans chacun des deux demi-espaces, l'expression $ax + by + cz + d$ garde un signe constant, et que ce signe est :
• pour l'un des demi-espaces, strictement positif ($ax + by + cz + d > 0$),
• et pour l'autre, strictement négatif ($ax + by + cz + d < 0$).
La connaissance de la valeur de l'expression $ax + by + cz + d$ pour un seul point de l'espace suffit donc pour déterminer le signe dans chacun des demi-espaces.

Exemple. Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant donné, le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$ contient les points non alignés $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$ et $C(0\,;0\,;1)$.
Ce sont les intersections du plan $\mathscr{P}$ avec les axes.
Pour l'origine $O(0\,;0\,;0)$, l'expression $x + y + z - 1$ vaut -1.
On peut donc en conclure que le demi-espace de frontière $\mathscr{P}$, qui contient l'origine O, est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'inéquation :

$$x + y + z - 1 < 0,$$

et que l'autre demi-espace est caractérisé par l'inéquation $x + y + z - 1 > 0$.



2 Applications

1. Caractérisez par un système de quatre inéquations les points de l'espace intérieurs (strictement) au tétraèdre OABC du paragraphe 1.

2. Représentez graphiquement l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont telles que :

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ 2x + 3y + z - 6 \leqslant 0 \end{cases}.$$

Aide. Déterminez les coordonnées des points d'intersection des axes avec le plan d'équation $2x + 3y + z - 6 = 0$.

3. Dites si les points suivants appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}_1$, $D(1\,;1\,;1)$; $E(1\,;1\,;2)$; $F(0\,;2\,;0)$; $G(2\,;0\,;0)$.

4. Représentez sur le même graphique l'ensemble des points $\mathscr{E}_2$ dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont telles que $6x + 3y + 4z - 12 \leqslant 0$.

TD 5 Des demi-espaces avec un logiciel. Programmation linéaire

1 Maximiser un bénéfice

Une entreprise fabrique trois types de pièces notées P_1, P_2 et P_3. La fabrication nécessite différentes opérations qui sont réalisées par trois ateliers notés A_1, A_2 et A_3.
Les contraintes de temps de fabrication sont résumées dans le tableau (en heures) :

	A_1	A_2	A_3
P_1	4	6	1
P_2	8	2	2
P_3	7	4	1
maximum hebdomadaire	355	198	79

Par exemple, l'atelier A_2 ne peut fournir plus de 198 heures de main-d'œuvre par semaine.

1. Traduisez ces contraintes par un système d'inéquations du premier degré (on note x, y et z le nombre de pièces de type, respectivement, P_1, P_2 et P_3).

2. Le bénéfice réalisé est de 90 € pour une pièce de type P_1 ou P_3, et de 100 € pour une pièce de type P_2. On suppose que toute la production est vendue.
Exprimez, en fonction des quantités produites x, y et z, le bénéfice réalisé.

3. Justifiez que les productions engendrant un même bénéfice sont représentées dans l'espace par des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartenant à un même plan.

CONCLUSION Le chef d'entreprise, dont l'objectif est de faire réaliser par son entreprise un bénéfice maximum, doit décider quelles productions seront à exécuter.
Il doit donc résoudre le problème suivant.
Parmi les solutions $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ du système (S) d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ 4x + 8y + 7z \leqslant 355 \\ 3x + y + 2z \leqslant 99 \\ x + 2y + z \leqslant 79 \end{cases}$$

quelle est celle qui engendre le bénéfice maximum ? Ce qui revient géométriquement à déterminer un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées sont solutions de (S) et pour lequel la quantité $90x + 100y + 90z$ est maximale.

Note
Cette solution n'est pas forcément unique.

2 Résolution graphique avec Geospace

Note
L'utilisation d'un logiciel est pratiquement indispensable.

Chacune des inéquations du système à résoudre caractérise un demi-espace et le système caractérise l'intersection de six demi-espaces. On obtient, ici, un polyèdre à six faces que l'on appellera « polyèdre des productions possibles ».

1. Les variables x, y et z sont positives : on choisit donc de « travailler » dans un tétraèdre $OX_MY_MZ_M$ suffisamment grand pour couvrir toutes les productions réalisables.

Créez successivement, dans l'ordre :

- M = 500 à l'aide des menus Créer | Numérique ▶ | Variable réelle libre, puis Piloter | Affecter une variable numérique libre,
- les points X(M ; 0 ; 0), Y(0 ; M ; 0), Z(0 ; 0 ; M) à l'aide de : Créer | Point ▶ | Point repéré dans l'espace,
- le polyèdre T(tétraèdre) OXYZ à l'aide de : Créer | Solide ▶ | Polyèdre convexe défini par ses sommets.

2. La création du « polyèdre des productions possibles »

Pour cela, commencez par créer les plans $\mathcal{P}_1$ d'équation $4x + 8y + 7z = 355$, $\mathcal{P}_2$ d'équation $3x + y + 2z = 99$ et $\mathcal{P}_3$ d'équation $x + 2y + z = 79$ à l'aide de : Créer | Plan ▶ | défini par une équation.

Ensuite, après avoir remarqué que les demi-plans qui conviennent contiennent tous l'origine du repère, créez successivement à l'aide du menu : Créer | Solide ▶ | Polyèdre convexe ▶ | Intersection polyèdre/demi-espace.

- le polyèdre T_1, intersection du polyèdre T et du demi-espace $(\mathcal{P}_1, 0)$;
- le polyèdre T_2, intersection du polyèdre T_1 et du demi-espace $(\mathcal{P}_2, 0)$;
- le polyèdre T_3, intersection du polyèdre T_2 et du demi-espace $(\mathcal{P}_3, 0)$.

La figure 1 représente donc le « polyèdre des productions possibles » (ombré avec la palette).

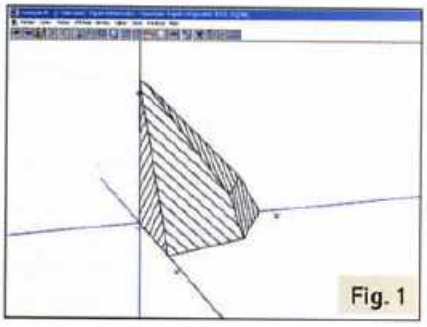


Fig. 1

3. La construction du plan de bénéfice

Créez d'abord le réel b, compris par exemple entre 0 et 10 000 : Créer | Numérique ▶ | Variable réelle libre dans un intervalle.

Ce réel b sera piloté au clavier à l'aide des flèches (Piloter | Piloter au clavier) et affiché sur l'écran (Créer | Affichage ▶ | Variable numérique déjà définie).

Créez ensuite le plan $\mathcal{P}$ d'équation $90x + 100y + 90z = b$.

4. Intersection du plan de bénéfice avec le « polyèdre des productions possibles »

Pour visualiser cette intersection, créez le contour de la section du plan $\mathcal{P}$ et du tétraèdre initial T d'une part, du plan $\mathcal{P}$ et du polyèdre T_3 d'autre part : Créer | Ligne ▶ | Polygone convexe ▶ | Section d'un polyèdre par un plan.

La construction est terminée. Il reste à l'exploiter.

À l'aide des flèches du clavier, faites varier le plan $\mathcal{P}$ (figures 2 à 4). Que constatez-vous lorsque b augmente ? Quelle valeur maximale du bénéfice le chef d'entreprise peut-il espérer ? La détermination des coordonnées du point correspondant à la production optimale peut se faire en définissant la droite d intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ puis l'intersection de d et de $\mathcal{P}_3$ (figure 4).

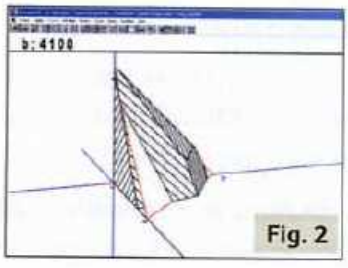


Fig. 2

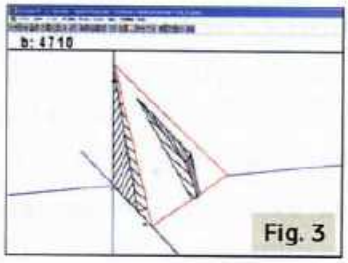


Fig. 3

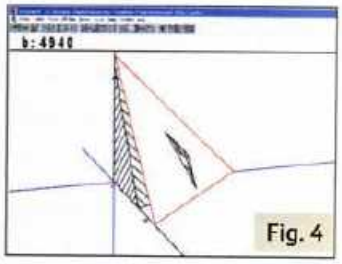
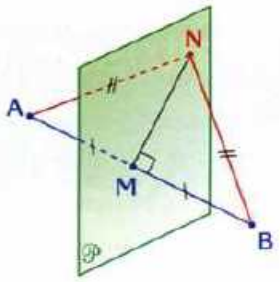


Fig. 4

TD 6 Plan médiateur, sphère circonscrite

1 Plan médiateur d'un segment de l'espace

[AB] est un segment et M est son milieu.
Par définition, le **plan médiateur de [AB]** est le plan perpendiculaire au point M à la droite (AB).



• Prouvez que le plan médiateur est l'ensemble des points de l'espace équidistants des extrémités du segment.

2 Applications

Un repère orthonormal est donné. Les points A et B ont pour coordonnées respectives (2 ; −1 ; 3) et (4 ; 1 ; −1).
L'**objectif** est de déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment [AB].

1. Donnez les coordonnées du milieu M du segment [AB].

2. N(x ; y ; z) est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$. Justifiez l'égalité $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Donnez un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

3. Déterminez une équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}$.

4. Déterminez, de même, une équation du plan médiateur de chacun des segments suivants :

a) [CD] avec C(4 ; −2 ; 1) et D(−3 ; 2 ; 5) ;

b) [EF] avec E(0 ; 5 ; 0) et F(5 ; −2 ; −2).

3 Sphère circonscrite à un tétraèdre

Un repère orthonormal est donné. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées A(4 ; 0 ; −3), B(2 ; 2 ; 2), C(3 ; −3 ; −1) et D(0 ; 0 ; −3).

1. Déterminez une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$, plan médiateur du segment [AB], une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$, plan médiateur du segment [BC] et une équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$, plan médiateur du segment [CD].

2. Expliquez pourquoi, si les trois plans ont un point commun Ω, ce point est le centre d'une sphère $\mathcal{S}$ passant par A, B, C et D. Cette sphère est dite **circonscrite au tétraèdre ABCD**.

3. En résolvant un système, prouvez que les trois plans ont un unique point commun Ω.

4. Trouvez le rayon r de la sphère circonscrite $\mathcal{S}$.

5. M(x ; y ; z) est un point de la sphère $\mathcal{S}$. Traduisez analytiquement l'égalité $\Omega M^2 = r^2$.
Vous obtenez ainsi une équation de la sphère $\mathcal{S}$.

EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. Produit scalaire dans le plan

Un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan est donné.

1 Dans chacun des cas, calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{w} \cdot \vec{u}$.

a) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} - 2\vec{j}$.

b) $\vec{u}(2 ; -1)$, $\vec{v}\left(-\frac{1}{2} ; 3\right)$, $\vec{w}(5 ; 2)$,

2 Dites, parmi les vecteurs suivants, lesquels sont orthogonaux entre eux :

$\vec{u}(2 ; 5)$, $\vec{v}(-2 ; -5)$, $\vec{w}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{5}\right)$, $\vec{t}(0{,}5 ; -0{,}2)$, $\vec{s}\left(2 ; -\frac{4}{5}\right)$.

3 Dans chacun des cas, déterminez une équation de la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite d d'équation donnée.

a) $A(5 ; 3)$ et $d : 2x + 5y - 5 = 0$.

b) $A(-1 ; 2)$ et $d : x - 3y + 2 = 0$.

4 Dans chacun des cas, déterminez une équation de la médiatrice du segment [AB].

a) $A(4 ; 1)$ et $B(-1 ; 2)$.

b) $A(-5 ; 3)$ et $B\left(2 ; \frac{1}{3}\right)$.

5 ABCD est un carré, I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC].
Prouvez que (DJ) et (CI) sont perpendiculaires.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 379.

6 Dans chacun des cas, trouvez la distance δ du point A à la droite d d'équation donnée.

a) $A(-2 ; 4)$ et $d : 2x + y - 5 = 0$.

b) $A(-\sqrt{2} ; 2)$ et $d : \sqrt{2}x - 3y - 1 = 0$.

7 Les points A, B et C ont pour coordonnées :
$A(-4 ; 3)$, $B(0 ; 5)$ et $C(4 ; 1)$.
Déterminez la mesure à 1 degré près des angles du triangle ABC et son aire.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 379.

2. Produit scalaire dans l'espace

Un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est donné.

8 Dans chacun des cas, calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{w} \cdot \vec{u}$.

a) $\vec{u}(1 + \sqrt{2} ; \sqrt{3} ; 0)$, $\vec{v}(1 - \sqrt{2} ; 0 ; -1)$, $\vec{w}(0 ; -\sqrt{3} ; 1)$.

b) $\vec{u}\left(\frac{2}{3} ; -\frac{1}{6} ; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{2} ; -2 ; \frac{2}{3}\right)$, $\vec{w}(1 ; 0 ; 1)$.

9 Les points A, B et C ont pour coordonnées :
$A(2 ; -1 ; 3)$, $B(1 ; 0 ; -1)$ et $C(0 ; -1 ; 2)$.
Déterminez la mesure à 1 degré près des angles du triangle ABC et son aire.

10 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour normes respectives 5 et 3 et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.
Calculez :

a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$. **b)** $(2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - 3\vec{u})$.

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$.

11 A, B, C et D sont quatre points quelconques de l'espace. Prouvez que :
$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.
Déduisez-en que les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.

12 ABCDS est une pyramide à base carrée de sommet S (toutes les arêtes ont la même longueur a).
Calculez $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 381.

13 ABCDEFGH est un cube d'arête a. I est le milieu de [EF] et J celui de [GC].
Calculez $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 381.

14 Les points A, B, C et D ont pour coordonnées :
$A(4 ; 1 ; -2)$, $B(-1 ; 2 ; 4)$, $C(0 ; 2 ; -5)$ et $D\left(1 ; -2 ; -\frac{7}{2}\right)$.
M est le milieu du segment [AB].
Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 381.

3. Orthogonalité dans l'espace

Un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est donné.

Pour les exercices 15 et 16, dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Justifiez votre réponse.

15 $\vec{u}\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(-\frac{2}{5}; 2; 3\right)$.

16 $\vec{u}(\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$ et $\vec{v}(-\sqrt{2}; 1; 1)$.

Pour les exercices 17 et 18, trouvez un réel α pour lequel les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

17 $\vec{u}\left(2; -\frac{1}{2}; 5\right)$ et $\vec{v}\left(-\frac{2}{5}; 3; \alpha\right)$.

18 $\vec{u}\left(\sqrt{3}; \frac{1}{3}; 2\right)$ et $\vec{v}\left(\alpha; 2\alpha; \frac{1}{2}\right)$.

19 Les points A et B ont pour coordonnées respectives A(2 ; −5 ; 1) et B(0 ; 2 ; 6).
Démontrez que la droite d qui passe par le point C de coordonnées (−2 ; 3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ est orthogonale à la droite (AB).

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 383.

20 Les points A, B, C et D ont pour coordonnées :

$A(1;0;-2), B(3;3;1), C\left(4; \frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right), D\left(1; \frac{13}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Le point C est-il le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB) ?

21 Les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées :
A(2 ; 0 ; 2), B(4 ; 0 ; 0), C(1 ; −2 ; 1), D(−1 ; 1 ; 0), E(1 ; −1 ; 2).
Prouvez que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 383.

22 Vérifiez que les points A(1 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(2 ; 5 ; 2) ne sont pas alignés et justifiez que le vecteur $\vec{v}(3 ; -1 ; 2)$ est normal au plan (ABC).

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 383.

23 Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ ont pour normes respectives 6 ; 8 et 10.
$\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont-ils orthogonaux ?

24 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.
Prouvez que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même norme.

4. Équation cartésienne d'un plan

Pour les exercices de cette rubrique, un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est donné.

25 ZOOM SUR... **le théorème 6**

$\mathcal{P}$ est un plan, A un point donné de $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

1. Comment, à partir du point A et du vecteur $\vec{u}$, caractériser l'appartenance d'un point M à $\mathcal{P}$?

2. Un repère orthonormal étant choisi,

a) comment la donnée de A et du vecteur $\vec{u}$ permet-elle d'obtenir la relation $ax + by + cz + d = 0$ qui caractérise l'appartenance de $M(x; y; z)$ à $\mathcal{P}$?

b) si $\vec{v} = k\vec{u}$ (k réel non nul), pourquoi $\vec{v}$ est-il un vecteur normal à $\mathcal{P}$? Avec A et le vecteur $\vec{v}$, quelle équation de $\mathcal{P}$ obtient-on ?

3. Un plan $\mathcal{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$. Comment démontre-t-on que le vecteur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$?

Pour les exercices 26 et 27, trouvez une équation du plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par le point A indiqué.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 385.

26 **a)** $A(1;0;5)$, $\vec{n}(1;-1;0)$.

b) $A\left(\frac{1}{2}; 3; -1\right)$, $\vec{n}\left(\frac{2}{3}; 4; -1\right)$.

27 **a)** $A(\sqrt{2}; -2; 5)$, $\vec{n}(2; -3; -1)$.

b) $A(0; -3; 0)$, $\vec{n}(\sqrt{3}; 2; 0)$.

28 Trouvez une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ parallèle au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point A donné.

a) $A(3; -1; 0)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + 3z = 0$.

b) $A(-1; 3; 1)$ et $\mathcal{P} : x + 2y + 3z + 5 = 0$.

☞ **Aide.** Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est normal à $\mathcal{Q}$.

29 Dans chacun des cas, dites si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles, sécants, éventuellement perpendiculaires.

a) $\mathcal{P} : x - 2y + z - 1 = 0$;
$\mathcal{Q} : 2x - 4y + z + 2 = 0$.

b) $\mathcal{P} : 2x - 3y + 5z + 4 = 0$;
$\mathcal{Q} : -x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z + 2 = 0$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 385.

30 Dans chacun des cas, trouvez la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

a) $A(5; -3; 4)$, $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$.

b) $A(2; 2; 5)$, $\mathcal{P} : y - z = 0$.

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus. Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

31 Plans perpendiculaires

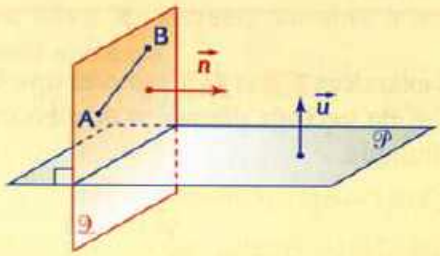
Un repère orthonormal est donné.
Les points A et B ont pour coordonnées :

$$A(1\,;-1\,;2),\quad B(2\,;0\,;4).$$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $x-y+3z-4=0$.

Objectif : trouver une équation du plan $\mathscr{Q}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et qui passe par les points A et B.

1. Il s'agit de trouver une équation d'un plan $\mathscr{Q}$ qui passe par un point (même deux en fait).
Si on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ à $\mathscr{Q}$, on sait en trouver une équation (théorème 6, page 384).
Demandons-nous quelles hypothèses peuvent permettre de trouver un vecteur normal, c'est-à-dire de trouver $(a\,;b\,;c)$.



Par hypothèse, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont orthogonaux donc un vecteur $\vec{u}$ normal à $\mathscr{P}$ est orthogonal à $\vec{n}$. De plus, le plan $\mathscr{Q}$ contient la droite (AB).

a) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal au plan $\mathscr{P}$.

b) Justifiez les égalités $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$.

2. Donc les réels a, b et c sont tels que :

$$\begin{cases} a-b+3c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases}$$

Deux égalités ne permettent pas en général de trouver des valeurs uniques pour a, b et c. Ici, ce n'est pas étonnant car on sait bien qu'il y a une infinité de vecteurs normaux à un plan.
Puisqu'il s'agit d'en trouver un, il suffit de trouver un triplet $(a\,;b\,;c)$. Pour cela, on peut choisir une valeur particulière pour a.

a) Prouvez que $b=-\dfrac{a}{5}$ et $c=-\dfrac{2a}{5}$.

b) Vérifiez que $\vec{n}(5\,;-1\,;-2)$ est un vecteur normal à $\mathscr{Q}$.

c) Trouvez alors une équation du plan $\mathscr{Q}$.

Note. Ici l'unicité du plan $\mathscr{Q}$ est due au fait que la droite (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Si la droite d passant par les deux points donnés est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, on trouve une infinité de plans $\mathscr{Q}$ car tout plan qui contient la droite d est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

32 BAC Une recherche d'ensemble

A et B sont deux points distincts de l'espace.

Objectif : déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}\ \text{[1]}\quad\text{et}\quad AB^2+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0.\ \text{[2]}$$

1. $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}$.
Les rôles « symétriques » de M et N confirment (comme le précise l'énoncé) que M et N appartiennent au même ensemble $\mathscr{S}$.
L'examen de la relation **[1]** montre que A est l'isobarycentre des points B, M et N.

Déduisez-en que les points A, B, M et N sont coplanaires et que (AB) et (MN) se coupent en un point fixe I milieu de [MN].

2. Utilisons maintenant la relation **[2]**. Puisque nous venons de mettre en évidence que le milieu I de [MN] est fixe, il est assez logique de transformer **[2]** en y « faisant apparaître » le point I. Cela se fait généralement en utilisant la relation de Chasles.

a) Prouvez que **[2]** équivaut à $IM^2=\dfrac{5}{4}AB^2$.

b) Déduisez-en que M et N appartiennent à la sphère $\mathscr{S}'$ de centre I, de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}AB$.

3. Réciproque
Nous venons de démontrer que si M et N sont dans $\mathscr{S}$ alors M et N sont dans $\mathscr{S}'$, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathscr{S}$ cherché est inclus dans la sphère $\mathscr{S}'$. Mais rien ne prouve encore que $\mathscr{S}$ est égal à $\mathscr{S}'$.
D'où la question : si M et N sont des points de $\mathscr{S}'$ diamétralement opposés (car nous avons montré au passage que le centre I de $\mathscr{S}'$ est le milieu de [MN]), ces points satisfont-ils aux conditions **[1]** et **[2]** ?

Prouvez que oui, et concluez.

4. Autre solution
Elle consiste à utiliser un **repère orthonormal**. On le choisit, en général, de façon que les points fixes aient des coordonnées « très simples ».
On peut donc prendre un repère orthonormal $(A\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires et de même sens, et si l'on pose $AB=a$, les coordonnées de B sont alors $(a\,;0,0)$. Notez alors $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y'\,;z')$ celles de N.

a) Des relations **[1]** et **[2]**, déduisez alors que M et N appartiennent à $\mathscr{S}'$.

b) Examinez la réciproque, puis concluez.

Pour progresser

Dans certains exercices de cette rubrique, le repère utilisé n'est pas précisé.
Il est sous-entendu que ce repère est orthonormal.

Distances, angles et orthogonalité

33 Les points A et B ont pour coordonnées respectives :
$(1\,;1\,;\sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\,;0)$.
Le point C est le symétrique de A par rapport à l'origine O du repère.
Prouvez que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

34 Les points A, B et C ont pour coordonnées :
A(1 ; 0 ; 1) ; B(2 ; 2 ; 0) et C(0 ; 3 ; 3).

1. Déterminez les mesures exactes, en radians, des angles géométriques $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$.

2. Les points B′ et C′ ont pour coordonnées :
B′(1 ; 1 ; 0) et C′(0 ; 1 ; 1).

a) Justifiez les égalités $\widehat{AOB} = \widehat{AOB'}$, $\widehat{BOC} = \widehat{B'OC'}$ et $\widehat{COA} = \widehat{C'OA}$.

b) En remarquant que O, A, B′ et C′ sont quatre des sommets d'une cube d'arête 1, retrouvez le résultat de la question 1.

35 Les points A, B et C ont pour coordonnées :
A(6 ; 8 ; 2), B(4 ; 9 ; 1) et C(5 ; 7 ; 3).

1. Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

2. Les points A, B et C se projettent orthogonalement respectivement en A′, B′ et C′ sur le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (d'équation $z = 0$).

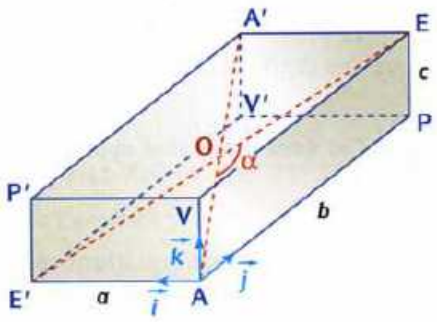
a) Déterminez les coordonnées des points A′, B′ et C′.

b) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$. Que constatez-vous ?

36 Les points A, B et C ont pour coordonnées :
$A(4\,;1\,;-1)$, $B(4\,;6\,;-2)$ et $C\left(2\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$.
Retrouvez parmi les points suivants :
D(0 ; 4 ; 0), E(0 ; −1 ; 1), F(1 ; 1 ; −1), G(2 ; 0 ; 0) et H(0 ; 3 ; −1) le projeté orthogonal de chacun des points A, B et C sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z - 4 = 0$.

37 $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormal. On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. A est un point quelconque de l'espace. On désigne par α, β et γ, les mesures respectives en radians des angles géométriques $\widehat{IOA}$, $\widehat{JOA}$ et $\widehat{KOA}$. Prouvez que :
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$
Aide. $\vec{i}\cdot\overrightarrow{OA} = OA\cos\alpha$, ...

38 • **Angle formé par les diagonales d'un pavé droit**
PAVEV′E′P′A′ est un pavé droit, ses diagonales (AA′) et (EE′) se coupent en O. On pose $a = E'A$; $b = AP$; $c = PE$. On note α l'angle $\widehat{AOE}$.
Le but de l'exercice est de trouver $\cos\alpha$, puis α.



On choisit un repère orthonormal, par exemple $(A\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, où $\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AE'}$, $\vec{j}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AP}$, $\vec{k}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AV}$.

1. Déterminez les coordonnées des points :
A ; E′ ; P ; V ; V′ ; P′ ; E ; A′ ; O.

2. Prouvez que $\cos\alpha = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

3. **Application numérique.**
Trouvez α lorsque $a = 3$, $b = 10$, $c = 2$.

4. Démontrez que, dans le cas d'un cube, $\cos\alpha$, donc l'angle α, ne dépend pas des dimensions du cube.
Quelle est, dans ce cas, une mesure de α en degrés ?

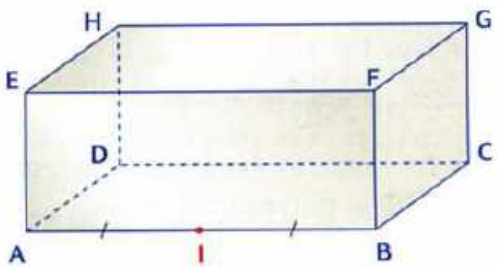
39 • Dans chacun des cas suivants, calculez la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

a) $A(1\,;2\,;-3)$; $\mathcal{P} : 2x - y + z + 1 = 0$.

b) $A(-1\,;1\,;1)$; $\mathcal{P}$ passe par B(0 ; 1 ; 0) ; C(−1 ; 1 ; 0) et D(−1 ; −2 ; −3).

Aide. Déterminez une équation du plan.

40 : ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 2 ; BC = GC = 1. Le point I est le milieu du segment [AB].



1. Trouvez un repère orthonormal d'origine A dans lequel vous pourrez exprimer facilement les coordonnées des points de la figure.

2. Déterminez une équation du plan (IFH).

3. Calculez la distance du point G au plan (IFH).

4. Calculez la distance du point G à la droite (IH).
Le projeté orthogonal de G sur le plan (IFH) appartient-il à (IH) ?

41 $\mathscr{P}$ est le plan d'équation $x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $\mathscr{Q}$ celui d'équation $2x - y + 2z + 1 = 0$.

1. Déterminez l'ensemble des points M situés à égale distance des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ et prouvez que cet ensemble est la réunion de deux plans π et π'.

2. Vérifiez que ces deux plans π et π' sont perpendiculaires.

☞ **Remarque.** Ces deux plans sont appelés plans bissecteurs de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

42 $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont les plans d'équations respectives :

$$x + y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0$$

et A le point de coordonnées (2 ; 1 ; 2).

1. Prouvez que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires.

2. Calculez les distances du point A à chacun des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

3. Déduisez-en la distance du point A à la droite d intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

☞ **Aide.** A et ses projetés orthogonaux sur $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et d forment un quadrilatère remarquable.

43 Les points A et B ont pour coordonnées :

$$A(2 ; 0 ; 1) \quad \text{et} \quad B(-1 ; 0 ; 2).$$

$\mathscr{P}_1$ est le plan d'équation cartésienne :

$$x - y - 2z + 2 = 0.$$

1. Déterminez une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$.

2. Prouvez que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

3. Calculez les distances du point B à $\mathscr{P}_1$ et de B à $\mathscr{P}_2$.

4. Déduisez-en la distance du point B à la droite d intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice 42.

44 BAC A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de l'espace, I est le milieu de [AB], J le milieu de [CD] et G le milieu de [IJ].

1. Peut-on avoir I = J ?
Existe-t-il des points M de l'espace tels que :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$?

2. Quel est l'ensemble $\mathscr{P}_1$ des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$?

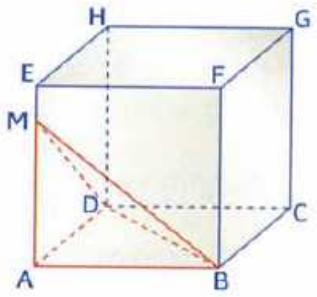
3. On suppose, dans cette question, que AB = CD et on se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{P}_2$ des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

Déterminez l'ensemble $\mathscr{P}_2$ (vous pouvez utiliser la formule de la médiane). Comparez $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

45 BAC On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.
On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}.$$



1. Déterminez le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(M ; a^2) ; (B ; 1) ; (D ; 1)\}.$$

a) Exprimez $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.

b) Calculez $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis déduisez-en l'égalité $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

c) Démontrez l'égalité $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

d) Démontrez que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrez les égalités $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.
Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4. **a)** Prouvez que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a}$ unité d'aire.

b) Déterminez le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire.
Déterminez la distance AK dans ce cas.

Équation cartésienne d'un plan

46 Dans chacun des cas suivants, les points A et B sont donnés par leurs coordonnées.
Donnez une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire en A à la droite (AB).

a) A(2 ; 0 ; −1) et B(0 ; 1 ; −3).

b) A(1 ; 1 ; −1) et B(2 ; −2 ; 2).

47 BAC Dans chacun des cas suivants, le plan $\mathscr{P}$ est donné par l'une de ses équations cartésiennes.
A et B sont donnés par leurs coordonnées.
Après avoir vérifié que la droite (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, donnez une équation du plan $\mathscr{Q}$ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et qui passe par les points A et B.

a) $\mathscr{P}$: $x + y + z = 0$; A(1 ; 0 ; 0) et B(0 ; 1 ; 1).

b) $\mathcal{P} : x + z = 0$; A(1 ; 2 ; 0) et B(1 ; 0 ; 1).

c) $\mathcal{P} : 2x + z - 4 = 0$; A(2 ; 3 ; −1) et B(1 ; 1 ; 1).

Aide. Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 31, page 396.

48 L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les axes sont notés (Ox), (Oy) et (Oz).

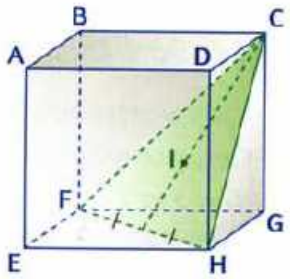
$\mathcal{P}_1$ est le plan d'équation $x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ et $\mathcal{P}_2$ celui d'équation $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$.

1. Prouvez que (Oz) est parallèle à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$. Déduisez-en la position relative de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$ par rapport au plan (xOy).

2. Déterminez les droites d_1 et d_2 intersections respectives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ avec le plan (xOy).

3. Le plan (xOy) est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminez une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d_2 (la première coordonnée des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant égale à 1).

49 • BAC ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Le point I est le centre de gravité du triangle CFH.



1. a) Prouvez que CFH est un triangle équilatéral.

b) Prouvez que les points A, G et I sont dans le plan médiateur du segment [CH] et aussi dans le plan médiateur du segment [CF].

c) Déduisez-en que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH), et qu'elle passe par le point I.

2. Reprenez la question **1.** en utilisant le repère orthonormal $(F ; \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FB})$.

Sphères

50 Les points Ω et A ont pour coordonnées :

$\Omega(2 ; -1 ; 3)$ et $A(-1 ; 0 ; 1)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω passant par A.

1. Calculez ΩA.

2. M(x ; y ; z) est un point de $\mathcal{S}$. Exprimez ΩM^2 en fonction de x, y et z.

3. Dire que « M appartient à la sphère de centre Ω et de rayon ΩA » équivaut à dire que « $\Omega M^2 = \Omega A^2$ ». Déduisez-en une équation de la sphère $\mathcal{S}$.

51 Dans chacun des cas suivants, déterminez une équation cartésienne de la sphère de centre Ω et de rayon r.

a) $\Omega(1 ; 2 ; 3)$ et $r = 2$.

b) $\Omega(0 ; 5 ; -1)$ et $r = \sqrt{3}$.

c) $\Omega(-2 ; 2 ; 1)$ et $r = \sqrt{5}$.

Aide. Voir l'exercice 50.

52 Dans chacun des cas suivants, déterminez une équation cartésienne de la sphère de centre Ω et passant par le point A.

a) $\Omega(0 ; 0 ; 1)$ et $A(1 ; 1 ; 1)$.

b) $\Omega(0 ; 5 ; -1)$ et $A(1 ; -2 ; 3)$.

c) $\Omega(-2 ; 2 ; 1)$ et $A(0 ; 4 ; 2)$.

Aide. Voir l'exercice 50.

53 Les points A et B ont pour coordonnées :

$A(5 ; 5 ; 5)$ et $B(-1 ; 2 ; 2)$.

1. Déterminez une équation de la sphère de diamètre [AB] en déterminant dans un premier temps son centre et son rayon et en vous inspirant de l'exercice 50.

2. Déterminez une équation de la sphère de diamètre [AB] en utilisant la propriété suivante : Dire que « M appartient à la sphère de diamètre [AB] », équivaut à dire que « $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ».

54 • Les points A et B ont pour coordonnées :

$A(2 ; 4 ; 1)$ et $B(0 ; -2 ; 3)$.

1. Donnez une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre [AB].

2. On note $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$ les plans tangents à la sphère $\mathcal{S}$, respectivement en A et B. Déterminez une équation de chacun de ces deux plans.

55 • Le point A a pour coordonnées (2 ; −2 ; 2) et $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $x + 2y + 3z - 5 = 0$. Trouvez une équation de la sphère de centre A et tangente au plan $\mathcal{P}$.

56 • $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $x - 2y + 2z - 4 = 0$ et A est le point du plan $\mathcal{P}$ d'abscisse 2 et d'ordonnée 1.

1. Déterminez la cote du point A.

2. Déterminez les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et déduisez-en deux vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ normaux à $\mathcal{P}$ de norme 3.

3. Le point Ω_1 est tel que $\overrightarrow{A\Omega_1} = \vec{n}_1$. Expliquez pourquoi la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre Ω_1 et de rayon 3 est tangente à $\mathcal{P}$ au point A.

4. Déterminez une équation de chacune des sphères de rayon 3 tangentes en A au plan $\mathcal{P}$.

EXERCICES

Recherche d'ensembles

Pour les problèmes de recherche d'ensembles, vous pouvez vous reporter à la partie « *Types de problèmes et raisonnements* » fiche H, page 456.

57 : A et B sont deux points de l'espace tels que AB = 8.

1. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -12$.

2. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -12$.

58 : A, B et C sont trois points de l'espace.
Dans chaque cas, déterminez l'ensemble des points M de l'espace satisfaisant la condition indiquée.

a) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$.

b) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$.

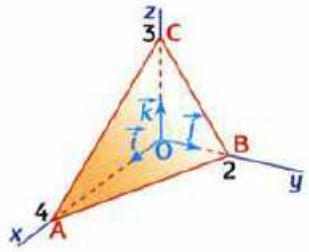
c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice 53, page 399.

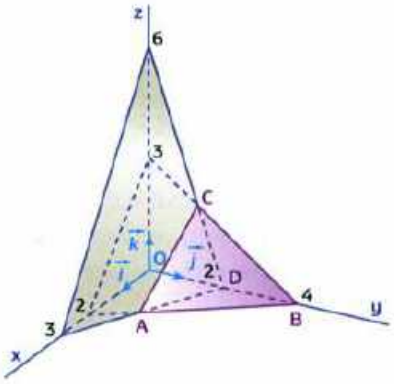
Demi-espaces

Pour les exercices 59 et 60, vous pouvez vous reporter au TD 4, page 390.

59 Déterminez un système d'inéquations caractérisant les points strictement intérieurs au tétraèdre OABC.



60 • Déterminez un système d'inéquations caractérisant les points intérieurs au tétraèdre ABCD.



61 • Un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné.
Représentez l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient simultanément les inéquations du système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 0 \leqslant z \leqslant 2 \\ 4x + 2y + z \leqslant 4 \end{cases}$$

Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

62 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées :

$$\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} ; 0\right) \quad \text{et} \quad \vec{v}\left(\frac{2}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right).$$

Est-il possible de choisir un vecteur $\vec{w}$ tel que $(O ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit un repère orthonormal ?

63 • Déterminez la distance du point A(3 ; 1 ; 0) à la droite Δ, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $x + y - 2z + 3 = 0$ et $2x + z - 1 = 0$.

64 • Un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est donné. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées :
A(2 ; −1 ; 3), B(−2 ; 0 ; 4), C(0 ; 2 ; 2) et (−1 ; 0 ; −2).
Vérifiez que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires et déterminez, s'il existe, le centre I de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

65 : $\mathscr{P}$ est le plan d'équation $2x - y - z + 3 = 0$. d est la droite passant par A(2 ; 2 ; −1), de vecteur directeur $\vec{v}(-1 ; -1 ; 1)$.
Démontrez que l'image de d dans la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ est une droite d'. Calculez l'angle α $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ des deux droites d et d'.

Problèmes

66 BAC

Thèmes : Équations de plan. Calculs de distances, d'aires et de volumes

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées A(3 ; −2 ; 2), B(6 ; 1 ; 5), C(6 ; −2 ; −1).

A. 1. Démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + y + z - 3 = 0.$$

Prouvez que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

3. Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminez une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.

4. Déterminez un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

B. 1. Soit D le point de coordonnées (0 ; 4 ; −1). Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. Calculez le volume du tétraèdre ABDC.

3. Prouvez que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.

4. a) Calculez l'aire du triangle BDC.

b) Déduisez-en la distance du point A au plan (BDC).

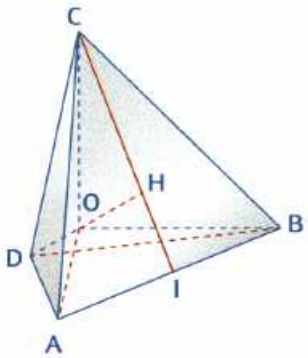
67 BAC

Thèmes : Tétraèdre orthocentrique, tétraèdre régulier. Calcul d'aire, de volume. Sphère circonscrite au tétraèdre

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O.
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrez que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Calcul de OH

a) Calculez le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre OABC puis l'aire $\mathscr{S}$ du triangle ABC.

b) Exprimez OH en fonction de $\mathscr{V}$ et de $\mathscr{S}$. Déduisez-en que $OH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. L'espace est rapporté au repère orthonormal :

$$\left(O ; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right).$$

a) Démontrez que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3} ; \frac{a}{3} ; \frac{a}{3}\right)$.

b) Démontrez que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrez que Ω est un point de la droite (OH) puis calculez ses coordonnées.

68 BAC

Thèmes : Barycentres. Détermination d'ensembles

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A et B ont pour coordonnées :

$$A(6 ; 0 ; 0) \text{ et } B(0 ; 6 ; 0).$$

1. a) Faites une figure.

b) Déterminez le barycentre G des points pondérés (O ; 1), (A ; 2) et (B ; 3).
Placez G.

2. On note C le point de coordonnées (0 ; 0 ; 4) et $\mathscr{S}$ l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que :

$$(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \quad [1].$$

a) Déterminez une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
Quelle est la nature de $\mathscr{S}$?
Précisez ses éléments.

b) Retrouvez le résultat précédent en montrant au préalable que pour tout point M, le vecteur :

$$\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

est colinéaire à $\overrightarrow{MG}$.

3. Quelle est l'intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $x = 0$? Dessinez cet ensemble sur la figure.

4. $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24.$$

a) Démontrez que M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{u}$ désignant le vecteur $2\vec{i} - 3\vec{j}$.

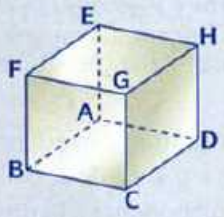
b) Déduisez-en alors l'ensemble $\mathscr{P}$.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Dites lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

69 ABCDEFGH est un cube de côté 1.
On choisit le repère orthonormal $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
L est le barycentre de $\{(A ; 1) ; (B ; 3)\}$.
Soit π le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.



1. Les coordonnées de L sont :

a $\left(\frac{1}{4} ; 0 ; 0\right)$. b $\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 0\right)$. c $\left(\frac{2}{3} ; 0 ; 0\right)$.

2. Le plan π est le plan :

a (GLE). b (LEJ). c (GFA).

3. Le plan parallèle au plan π passant par I coupe la droite (FB) au point M de coordonnées :

a $\left(1 ; 0 ; \frac{1}{4}\right)$. b $\left(1 ; 0 ; \frac{1}{5}\right)$. c $\left(1 ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$.

4. a Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.
b Les droites (EL) et (IM) sont parallèles. c Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.

5. Le volume du tétraèdre FIJM est :

a $\frac{1}{36}$. b $\frac{1}{48}$. c $\frac{1}{24}$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

70 Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d est la droite passant par A(1 ; 2 ; −3) et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; -1)$. $\mathscr{P}$ est le plan d'équation :

$$x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

1. Le point M(−1 ; 3 ; 2) est un point de d.
2. Le plan $\mathscr{P}$ et la droite d sont sécants.
3. Le plan $\mathscr{R}$ d'équation $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.
4. La distance de M(−1 ; −3 ; 2) au plan $\mathscr{P}$ est $\sqrt{14}$.
5. Si le point B a pour coordonnées (0 ; 7 ; 0) alors la droite (AB) est parallèle à $\mathscr{P}$.

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

Reportez-vous à la fiche O du bloc méthodologique page 466.

71 **1. Démonstration de cours**

Pré-requis. Dans un repère orthonormal, le plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ a pour équation :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Le point $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ se projette orthogonalement en A′ sur $\mathscr{P}$. En calculant de deux manières $|\vec{n} \cdot \vec{AA'}|$, démontrez que : $AA' = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

2. Application

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont pour équations respectives :

$$x + y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - y - z + 2 = 0.$$

Démontrez que $M(x ; y ; z)$ est équidistant de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ si et seulement si il appartient à l'un ou l'autre des plans suivants :

$$\mathscr{R}_1 : x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{R}_2 : 2y + 2z - 3 = 0.$$

15 Droites et plans dans l'espace

1750

Tout plan de l'espace a, dans un repère, une équation de la forme $ax + by + cz = d$. Chercher l'intersection de trois plans revient donc à résoudre un système constitué de trois équations de ce type. Un tel système est dit linéaire à trois équations et à trois inconnues. Plus généralement, la recherche des points d'intersection de plusieurs courbes algébriques conduit à la résolution de systèmes linéaires à n équations et p inconnues.

Dès la deuxième partie du XVIII^{e} siècle, plusieurs mathématiciens donnent des règles de résolution de systèmes linéaires, en particulier Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques paru* en 1750. Son nom reste attaché à un théorème qui donne un critère d'existence de solution.

Pour déterminer les orbites de planètes du système solaire, Gauss invente au début du XIX^{e} siècle une méthode algorithmique pour résoudre de tels systèmes. Cette méthode, utilisée par les ordinateurs, permet de résoudre des systèmes de grande taille.

Gabriel Cramer
1704 – 1752

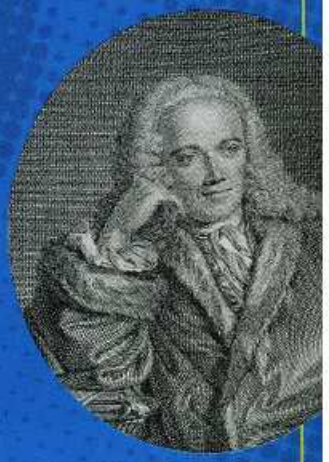
À LA MÊME ÉPOQUE

FRANCE

Une nouvelle crise économique frappe la France.
Ses conséquences, insupportables en matière d'impôts, accélèrent la contestation politique du règne de Louis XV.
Lors de l'attentat de Damiens, la vie de Louis XV est menacée.

ÉCONOMIE

En 1758, le *Tableau économique* que F. Quesnay consacre à la France de la fin du XVIII^{e} siècle est le premier ouvrage à proposer une analyse macroéconomique.
La science économique est née.



SCIENCES

Le retour de la comète de Halley consacre le succès de la théorie de la gravitation universelle de Newton.
En 1705, E. Halley avait établi que la trajectoire de la comète était une ellipse et avait ainsi prédit son retour.

ACTIVITÉ Résolution de systèmes linéaires

1 Exemple 1 : Méthode par substitution

Note
Chercher l'intersection des plans d'équations [1], [2] et [3] revient à résoudre le système (S).

On se propose de résoudre le système d'inconnues réelles $(x\,;y\,;z)$:

$$(S)\begin{cases} 2x-\ y+3z=0 & [1]\\ x-2y+\ z=1 & [2].\\ x+\ y-\ z=2 & [3]\end{cases}$$

(S) est un exemple de système linéaire de trois équations à trois inconnues.
La méthode consiste à se ramener à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues en considérant l'une des inconnues comme une « constante ».

Par exemple, d'après [2] et [3] : $\begin{cases} x-2y=1-z\\ x+\ y=2+z\end{cases}$.

1. Résolvez ce système en calculant x et y en fonction de z.
Dans l'équation [1], remplacez ensuite x et y par leurs expressions pour obtenir une équation à une seule inconnue z.

Note
Une vérification du calcul est toujours envisageable mais la théorie ne l'impose pas.

2. Déduisez-en que $z=-1$ puis $x=\dfrac{4}{3}$ et $y=-\dfrac{1}{3}$.
La théorie affirme, et nous l'admettrons, qu'en opérant ainsi on obtient l'ensemble des solutions du système (S). Une réciproque n'est donc pas nécessaire.

On dit alors que l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}^3$, de (S) est $\mathcal{S}=\left\{\left(\dfrac{4}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;-1\right)\right\}$.

2 Exemple 2 : Méthode par combinaisons linéaires

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) $\begin{cases} x+y+z=0 & (L_1)\\ x+y-z=-2 & (L_2).\\ x-y+z=4 & (L_3)\end{cases}$

Une équation du type $\alpha L_1+\beta L_2$ $(\alpha\in\mathbb{R}\,,\ \beta\in\mathbb{R})$ est appelée une **combinaison linéaire** de L_1 et L_2.
La méthode consiste à utiliser des combinaisons linéaires des lignes L_1, L_2 et L_3 afin d'obtenir des équations plus simples qui facilitent le calcul des inconnues.

1. Ajoutez L_1 et L_2 puis L_2 et L_3 ; quelles équations obtenez-vous ?

2. Déduisez-en x, y et z.

Note
La méthode générale par combinaisons nécessite une vérification.

3. Prouvez que le triplet que vous avez obtenu est bien solution. Concluez.
Lorsqu'on écrit des combinaisons linéaires sans méthode, on ne peut pas affirmer que le (ou les) triplets trouvés conviennent. Il est nécessaire de le vérifier.

Contre-exemple. Considérons les deux systèmes :

$$(S)\begin{cases} x+y+z=1 & (L_1)\\ x+y-z=2 & (L_2)\\ -x+y-z=4 & (L_3)\end{cases}\quad\text{et}\quad(S')\begin{cases} 2x+2y\ \ \ =3 & (L_1+L_2)\\ \ \ \ \ y-z=3 & (0{,}5L_2+0{,}5L_3).\\ 2x+\ \ 2z=-3 & (L_1-L_3)\end{cases}$$

Vérifiez que le triplet $(1{,}5\,;0\,;-3)$ est solution de (S') mais pas de (S).

3 Exemple 3 : Méthode de Gauss

Note
C'est une méthode par combinaisons linéaires mais telle que le système final a toujours le même ensemble de solutions que le système initial.

On se propose de résoudre le système :

$$(S)\ \begin{cases} x-3y+2z=1 & (L_1)\\ 2x-y+3z=9 & (L_2).\\ 3x-2y+4z=11 & (L_3)\end{cases}$$

1re étape : On cherche **à éliminer x dans L_2 et L_3 en combinant avec L_1.**

Pour cela, on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$ et L_3 par $-\frac{1}{3}$ de façon à faire apparaître $-x$.

● Vérifiez que vous obtenez :

$$\begin{cases} x-3y+2z=1\\ -x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=-\frac{9}{2}\\ -x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z=-\frac{11}{3}\end{cases}\ \text{puis}\ \begin{cases} x-3y+2z=1\\ -\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}z=-\frac{7}{2}\\ -\frac{7}{3}y+\frac{2}{3}z=-\frac{8}{3}\end{cases}\ \text{et}\ (S')\ \begin{cases} x-3y+2z=1\\ 5y-z=7.\\ 7y-2z=8\end{cases}$$

(utilisez L_2+L_1 et L_3+L_1) (utilisez $(-2)\times L_1$ et $(-3)\times L_3$)

2e étape : On cherche **à éliminer y dans L_3 en combinant avec L_2.**

Note
Le dernier système obtenu (S'') est dit triangulaire. La résolution d'un tel système est facile.

Pour cela, on multiplie L_3 par $-\frac{5}{7}$ de façon à faire apparaître le terme $-5y$.

● Vérifiez que vous obtenez :

$$\begin{cases} x-3y+2z=1\\ 5y-z=7\\ -5y+\frac{10}{7}z=-\frac{40}{7}\end{cases}\ \text{puis}\ \begin{cases} x-3y+2z=1\\ 5y-z=7\\ \frac{3}{7}z=\frac{9}{7}\end{cases}\ \text{soit}\ (S'')\ \begin{cases} x-3y+2z=1\\ 5y-z=7.\\ z=3\end{cases}$$

(utilisez L_3+L_2)

Note
La théorie affirme que le dernier système obtenu a même ensemble de solutions que le système initial. Il est donc inutile de faire une réciproque.

● Déduisez-en l'ensemble des solutions du système (S).

Remarques. 1. Il est important de noter que l'on écrit toujours des systèmes ; que la première ligne de (S) est toujours réécrite ainsi que la deuxième ligne de (S').

2. Lorsqu'on écrit un système dans lequel les deux dernières équations sont équivalentes, alors le système initial (S) admet une infinité de solutions.

Par exemple, le système $\begin{cases} x+y-2z=3\\ 3y-z=1\\ 6y-2z=2\end{cases}$ se réduit à $\begin{cases} x+y-2z=3\\ 3y=1+z\end{cases}$

d'où $\begin{cases} x+y=3+2z\\ 3y=1+z\end{cases}$ donc $y=\frac{1+z}{3}$ et $x=\frac{8+5z}{3}$.

Ainsi tous les triplets $\left(\frac{8+5z}{3}\,;\,\frac{1+z}{3}\,;\,z\right)$ où $z\in\mathbb{R}$ sont solutions du système (S).

3. Lorsqu'on obtient un système dans lequel les deux dernières équations sont incompatibles, alors le système initial (S) n'a pas de solution.

Par exemple, le système $\begin{cases} x+2y-3z=3\\ 3y-z=1\\ 3y-z=0\end{cases}$ n'a pas de solution.

1 Caractérisations barycentriques

1.1 Droites et segments dans l'espace

Rappelons que la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$ et le segment [AB] celui des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0\,;1]$.

THÉORÈME 1

- La **droite** (AB) est l'ensemble des barycentres de $(A\,;1-t)$, $(B\,;t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- Le **segment** [AB] est l'ensemble des barycentres de $(A\,;1-t)$, $(B\,;t)$ avec $t \in [0\,;1]$.

Démonstration.

Pour tout réel t, dire que « M est le barycentre de $(A\,;1-t)$, $(B\,;t)$ » équivaut à dire que « $\overrightarrow{AM} = \dfrac{t}{(1-t)+t}\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AB}$ » (voir lexique p 478). Ainsi :

- la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de $(A\,;1-t)$, $(B\,;t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$;
- le segment [AB] est l'ensemble des barycentres de $(A\,;1-t)$, $(B\,;t)$ lorsque t décrit $[0\,;1]$.

Note
]AB[est l'ensemble des barycentres de $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Remarque. Le segment [AB] est aussi l'ensemble de tous les barycentres de $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$ avec $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

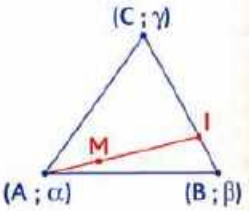
En effet, le barycentre M de $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$ est, par homogénéité, celui de $\left(A\,;\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$, $\left(B\,;\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$ donc de $(A\,;1-t)$, $(B\,;t)$ avec $t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Conséquence. Caractérisation de l'intérieur d'un triangle

L'**intérieur du triangle ABC** est l'ensemble des barycentres de $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$, $(C\,;\gamma)$ avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Démonstration.

- Si M est un tel barycentre, notons I le barycentre de $(B\,;\beta)$, $(C\,;\gamma)$; alors I est sur]BC[et d'après le théorème d'associativité, M est le barycentre de $(A\,;\alpha)$, $(I\,;\beta+\gamma)$. Or $\alpha > 0$ et $\beta + \gamma > 0$ donc M est sur]AI[; ainsi M est intérieur au triangle ABC.
- **Réciproquement**, si M est intérieur à ABC, (AM) coupe (BC) en I, entre B et C ; il existe $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que I est le barycentre de $(B\,;\beta)$, $(C\,;\gamma)$. Or M est sur]AI[, donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que M est le barycentre de $(A\,;\alpha)$, $(I\,;\beta+\gamma)$ et d'après le théorème d'associativité, le barycentre de $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$, $(C\,;\gamma)$ est M.



1.2 Plans dans l'espace

Rappelons que le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad [1],\ x \text{ et } y \text{ étant des réels quelconques.}$$

THÉORÈME 2

« M appartient au plan (ABC) » équivaut à « il existe deux réels x et y tels que M est le barycentre de $(A\,;1-x-y)$, $(B\,;x)$, $(C\,;y)$ ».

Démonstration.

L'égalité **[1]** s'écrit $\overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$, soit $(1-x-y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
Puisque $(1-x-y)+x+y \neq 0$, cela équivaut à dire que M est le barycentre de $(A\,;1-x-y)$, $(B\,;x)$, $(C\,;y)$.

Ainsi tout point du plan (ABC) est un barycentre de A, B, C.

COMPRENDRE

Illustration du théorème 1

Il découle de la démonstration que « $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$ » équivaut à « M est le barycentre de $(A ; 1-t)$, $(B ; t)$ ».

M est le barycentre de $(A ; 1-t)$, $(B ; t)$

Exemples.

- $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $t = \frac{5}{2}$, $1 - t = -\frac{3}{2}$ et M est le barycentre de $\left(A ; -\frac{3}{2}\right)\left(B ; \frac{5}{2}\right)$ soit de $(A ; -3)$, $(B ; 5)$.
- P est le barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 2)$ alors P est tel que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t = \frac{2}{3}$.

Illustration du théorème 2

- Tout point du plan (ABC) est un barycentre de A, B, C.

Exemple.

Si le point M de (ABC) est tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, alors
$x = 3$, $y = -1$
et $1 - x - y = -1$ donc
M est le barycentre de $(A ; -1)$, $(B ; 3)$, $(C ; -1)$.

- **Réciproquement**, tout barycentre de A, B, C est dans le plan (ABC).

Exemple.

G barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 2)$, $(C ; -1)$ est dans le plan (ABC). En effet, pour tout point M,

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

donc si M = A :

$$2\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Ce qui prouve que G est un point du plan (ABC).

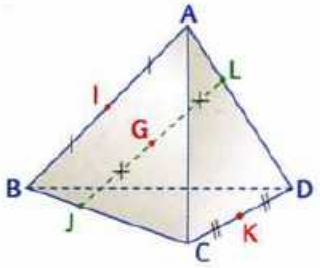
SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 1 Démontrer un alignement

ÉNONCÉ

ABCD est un tétraèdre, I et K sont les milieux de [AB] et [CD], J et L les points tels que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, G est le milieu de [JL].

Démontrez que G, I et K sont alignés.



POINT MÉTHODE

Pour démontrer que trois points sont alignés, on peut prouver que l'un est barycentre des deux autres.

SOLUTION COMMENTÉE

Des relations de colinéarité, nous déduisons que L est le barycentre de $\left(A ; \frac{2}{3}\right)$, $\left(D ; \frac{1}{3}\right)$ soit encore de $(A ; 2)$, $(D ; 1)$, et que J est celui de $(C ; 1)$, $(B ; 2)$.

Notons G′ le barycentre de $(A ; 2)$, $(D ; 1)$, $(C ; 1)$, $(B ; 2)$; d'après le théorème d'associativité, G′ est le barycentre de $(L ; 3)$, $(J ; 3)$. Ainsi G′ est confondu avec G, milieu de [JL].

Mais I est le barycentre de $(A ; 2)$, $(B ; 2)$ et K celui de $(C ; 1)$, $(D ; 1)$, donc, par une seconde application du théorème d'associativité, G′ est le barycentre de $(I ; 4)$, $(K ; 2)$.

Ainsi G est le barycentre de $(I ; 2)$, $(K ; 1)$, d'où l'alignement des points G, I et K.

→ EXERCICE 11

EXERCICE RÉSOLU 2 Prouver la coplanarité de 4 points

ÉNONCÉ

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB] et J celui de [BC].
K est le barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 2)$, $(C ; 1)$, $(H ; 1)$.
Prouvez que les points K, I, J, H sont coplanaires.

POINT MÉTHODE

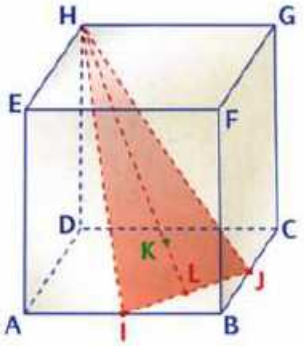
Pour prouver que quatre points sont coplanaires, on peut prouver que l'un est barycentre des trois autres.

SOLUTION COMMENTÉE

Par hypothèse, I est le barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 1)$ et J celui de $(B ; 1)$, $(C ; 1)$.

Or K est le barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 1)$, $(B ; 1)$, $(C ; 1)$, $(H ; 1)$, donc d'après le théorème d'associativité, K est aussi le barycentre de $(I ; 2)$, $(J ; 2)$, $(H ; 1)$.

Ainsi K, I, J, H sont coplanaires.



→ EXERCICE 12

2 Représentations paramétriques

Dans tout ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **quelconque**.

2.1 Paramétrage d'une droite

Supposons que la droite d est définie par la donnée d'un point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$.

La relation d'appartenance du point $M(x ; y ; z)$ à cette droite :

« il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ »

se traduit analytiquement par :

$$\text{« il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \text{ ».}$$

D'où le théorème :

THÉORÈME 3

La droite d passant par le point $\mathbf{A(x_0 ; y_0 ; z_0)}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que :

$$(S) \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note
Dans (S), le paramètre t peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre distincte de x, y, z.

EXEMPLE

Lorsque $A(1 ; 2 ; -1)$ et $B(3 ; 1 ; -1)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}(2 ; -1 ; 0)$ est un vecteur directeur de la droite (AB), et dans le repère utilisé, (AB) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2, \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Le système (S) est appelé **représentation paramétrique** de la droite d dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on dit que t est le **paramètre**.

On dit aussi que (S) est un **système d'équations paramétriques** de d.

À chaque réel t, on associe un point $M(at + x_0 ; bt + y_0 ; ct + z_0)$ et un seul de d ; réciproquement, à chaque point M de d correspond un unique réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Note
Le théorème 3 s'adapte aisément à la géométrie plane en supprimant la troisième coordonnée.

Réciproquement, lorsqu'une représentation paramétrique d'une droite d est écrite sous la forme (S), alors on peut affirmer **que d passe par $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et que $\vec{u}(a ; b ; c)$ en est un vecteur directeur.**

En effet, si on écrit la représentation paramétrique de la droite dirigée par $\vec{u}$ et qui passe par A, on trouve (S).

2.2 Paramétrage d'un segment, d'une demi-droite

A et B sont deux points distincts de l'espace ; on note $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

L'appartenance d'un point M au segment [AB] ou bien à la demi-droite [AB) d'origine A passant par B s'obtient en adaptant l'énoncé du théorème 3 :

1. pour le segment [AB], il suffit de remplacer dans le système (S) :

« $t \in \mathbb{R}$ » par « $t \in [0 ; 1]$ » ;

2. pour la demi-droite [AB), il suffit de remplacer dans le système (S) :

« $t \in \mathbb{R}$ » par « $t \in [0 ; +\infty[$ ».

COMPRENDRE

Critère d'appartenance

Une représentation paramétrique d'une droite d n'est pas un système à résoudre, mais un critère d'appartenance d'un point à d.

Exemple.

Soit la droite définie par

$$d:\begin{cases} x = 3t \\ y = -t+1, \\ z = 2t-1 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

d est la droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(3;-1;2)$ et qui passe par $A(0;1;-1)$.

- Pour obtenir un point M de d, il suffit de donner une valeur t_0 à t.

Ce point est alors dit de paramètre t_0 et $\overrightarrow{AM} = t_0\vec{u}$.

Ainsi le point de paramètre 1 est le point $M(3;0;1)$.

- Le point $P(-9;4;-7)$ est sur d s'il existe t tel que :

$$\begin{cases} -9 = 3t \\ 4 = -t+1 \\ -7 = 2t-1 \end{cases}$$

Sinon, il n'y est pas.

On trouve $t = -3$ donc $P \in d$ avec $\overrightarrow{AP} = -3\vec{u}$.

Non unicité de la représentation paramétrique

Une représentation paramétrique de d est obtenue à partir du choix d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$.

Si on choisit un autre point ou un autre vecteur directeur, on obtient une nouvelle représentation paramétrique.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 3 Prouver que deux droites sont sécantes

ÉNONCÉ

d et d' sont les droites de l'espace définies par :

$$d:\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -t-1 \\ z = t+1 \end{cases} t \in \mathbb{R}, \quad d':\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3, \\ z = -t+2 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Prouvez que d et d' sont sécantes.

SOLUTION COMMENTÉE

Il s'agit de prouver que d et d' ont un seul point commun.

Notons $I(x;y;z)$ un point quelconque. Dire que : « $I \in d$ » équivaut à « il existe t, $t \in \mathbb{R}$, tel que $x = 3t+2$, $y = -t-1$, $z = t+1$ ».

Mais dire que « $I \in d'$ » équivaut à « il existe s, $s \in \mathbb{R}$, tel que $x = s+1$, $y = 2s-3$, $z = -s+2$ ».

Attention. Il est impératif de **ne pas prendre la même lettre t**.

En effet, sur la droite d', le point I n'est pas nécessairement associé au paramètre t qui a servi à le situer sur d ; on note s son paramètre sur d'.

Ainsi, « I appartient à l'intersection de d et d' », équivaut à « il existe deux réels s et t tels que » :

$$\begin{cases} 3t+2 = s+1 \\ -t-1 = 2s-3. \\ t+1 = -s+2 \end{cases}$$

On trouve $t = 0$ et $s = 1$. Les coordonnées x, y et z de I s'obtiennent à partir de la valeur t (ou s).

Ainsi d et d' sont sécantes en $I(2;-1;1)$.

→ EXERCICE 20

EXERCICE RÉSOLU 4 Préciser la position de deux droites

ÉNONCÉ

Précisez la position des droites d et d' définies par :

$$d:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2, \\ z = -3t+3 \end{cases} t \in \mathbb{R}, \quad d':\begin{cases} x = t \\ y = -3t-3, \\ z = -t+1 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

SOLUTION COMMENTÉE

d et d' ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1;-3;-3)$ et $\vec{u}'(1;-3;-1)$. Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, ce qui prouve que d et d' ne sont pas parallèles.

Ainsi d et d' sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Cherchons si d et d' ont un point d'intersection.

D'où le système :

$$\begin{cases} t+1 = s \\ -3t+2 = -3s-3 \\ -3t+3 = -s+1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t-s = -1 & [1] \\ 3(t-s) = 5 & [2]. \\ -3t+s = -2 & [3] \end{cases}$$

Or [1] et [2] sont incompatibles donc ce système n'a pas de solution.

Ainsi d et d' ont une intersection vide donc sont non coplanaires.

→ EXERCICES 21 et 22

3 Intersections de plans et droites

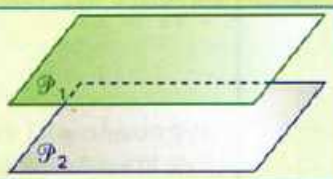
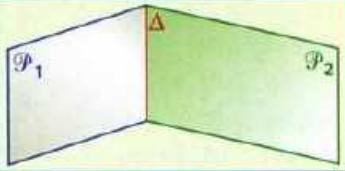
Dans tout ce paragraphe, l'espace est muni d'un **repère orthonormal** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.1 Intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
On peut savoir *a priori* s'ils sont sécants ou parallèles selon que leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou non (voir chapitre 14, page 383). En particulier, lorsqu'ils sont sécants, pour trouver les coordonnées de leurs points d'intersection, on résout le système formé par leurs deux équations. Ce système possède alors une infinité de solutions qui sont représentées par les points de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Note
Voir l'exercice résolu 5.

Le tableau suivant résume les différentes positions de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et indique l'ensemble des solutions du système (S) : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & [1] \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & [2] \end{cases}$.

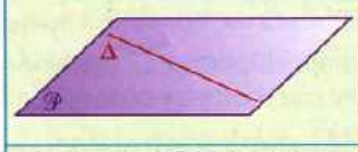
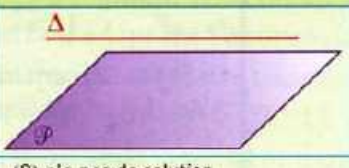
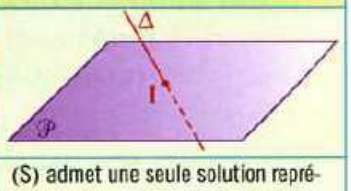
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ confondus	$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ disjoints	$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants
		
(S) admet pour solution tout triplet $(x ; y ; z)$ solution de l'équation **[1]** (ou **[2]**).	(S) n'a pas de solution.	Δ n'est pas définie paramétriquement ; Δ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $(x ; y ; z)$ sont les solutions de (S).

3.2 Intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une droite Δ

$\mathcal{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ et donc pour vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$; Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ et passe par le point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$.
On peut savoir *a priori* si Δ est parallèle ou bien sécante à $\mathcal{P}$ suivant que $\vec{u}$ est orthogonal ou non à $\vec{n}$ (voir chapitre 14, page 384).
En particulier, si Δ coupe $\mathcal{P}$, les coordonnées de leur point d'intersection I sont données par le triplet $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ solution du système (S) $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$.

Le tableau ci-dessous résume les diverses situations.

Note
Lorsque Δ est définie comme l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, la recherche de l'intersection de Δ et $\mathcal{P}$ peut se ramener à celle des trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}$.
(Voir § 4 page 412).

Δ contenue dans $\mathcal{P}$	Δ et $\mathcal{P}$ disjoints	Δ et $\mathcal{P}$ sécants en I
		
(S) admet une infinité de solutions représentées par les points de Δ.	(S) n'a pas de solution.	(S) admet une seule solution représentée par I.

COMPRENDRE

Droite intersection de deux plans

Si d est définie comme l'intersection de deux plans

$\mathscr{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et

$\mathscr{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

alors d est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

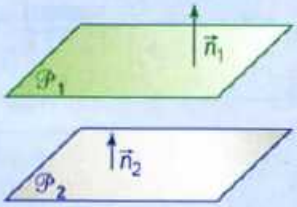
La résolution de ce système permet d'obtenir une représentation paramétrique de d.

➜ EXERCICE RÉSOLU 5

Plans parallèles et sécants

Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ alors :

• « $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires » implique « $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ parallèles » ;



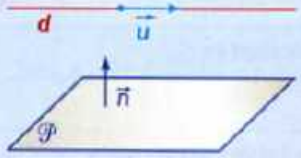
• « $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires » implique « $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants ».

➜ COMPRENDRE, P. 383

Position d'une droite et d'un plan

Si $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}$ et d pour vecteur directeur $\vec{u}$ alors :

• « $\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux » implique « d parallèle à $\mathscr{P}$ ».



• « $\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux » implique « d et $\mathscr{P}$ sécants ».

➜ EXERCICE RÉSOLU 6

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 5 — Paramétrer la droite d'intersection de deux plans

ÉNONCÉ

Démontrez que les plans $\mathscr{P}_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ et $\mathscr{P}_2 : 2x + 3y - z + 2 = 0$ sont sécants, puis trouvez une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

SOLUTION COMMENTÉE

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1(1 ; 2 ; -1)$ et $\vec{n}_2(2 ; 3 ; -1)$.
Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires. Ainsi $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite d.
L'appartenance d'un point $M(x ; y ; z)$ à d se traduit par le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons-le avec la méthode par substitution (voir activité p. 404).
Exprimons par exemple x et y en fonction de z.

$$\begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ 2(-2y + z - 1) + 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} y = z \\ x = -z - 1 \end{cases}$.

z peut prendre toute valeur de $\mathbb{R}$; on pose alors $z = t$ (paramètre).

D'où la représentation paramétrique de d : $\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

➜ EXERCICE 23

EXERCICE RÉSOLU 6 — Trouver l'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathscr{P}$

ÉNONCÉ

Prouvez que le plan $\mathscr{P} : 2x - y + z - 8 = 0$ et la droite d passant par $A(3 ; -1 ; 0)$ et $B(4 ; 1 ; -1)$ se coupent en un point I dont vous calculerez les coordonnées.

SOLUTION COMMENTÉE

d est dirigée par $\overrightarrow{AB}(1 ; 2 ; -1)$ et $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2 ; -1 ; 1)$.
Pour trouver la position de $\mathscr{P}$ et d, calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1 = -1$. Ainsi $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$ donc d coupe $\mathscr{P}$ en un point I.
Les coordonnées de I sont données par la solution du système formé des équations paramétriques de la droite d et de l'équation du plan $\mathscr{P}$.

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t \\ -t - 1 = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} t = -1 \\ x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ainsi (AB) coupe $\mathscr{P}$ en I(2 ; −3 ; 1).

➜ EXERCICES 27 et 28

4 Intersection de trois plans

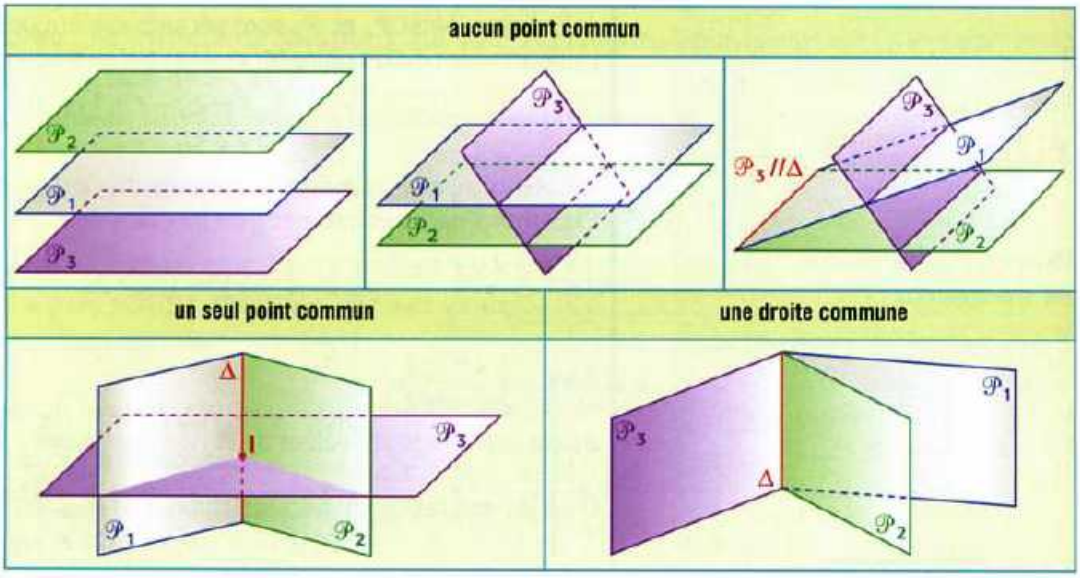
Dans tout ce paragraphe, l'espace est muni d'un **repère orthonormal** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4.1 Intersection de trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$

Notons que si deux plans sont confondus, l'étude de l'intersection des trois plans se ramène à celle de deux plans, qui a été faite au § **3.1**.

Dès lors, nous supposerons que les trois plans sont distincts deux à deux. Pour déterminer leur intersection, une idée est d'examiner d'abord l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, **puis** de considérer l'intersection de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ avec $\mathscr{P}_3$ en utilisant le § **3.2** dans le cas où $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est une droite Δ.

Les différents cas sont résumés dans le tableau suivant.



4.2 Interprétation algébrique

$\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$.

L'étude de l'intersection des trois plans revient à résoudre le système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

Le tableau résume les diverses situations illustrées ci-dessus et indique l'ensemble des solutions du système (S).

Note
Un système de trois équations à trois inconnues soit n'a pas de solution, soit a une seule solution, soit a une infinité de solutions.

intersection de $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$	ensemble des solutions de (S)
aucun point commun	vide
un seul point commun I	un seul triplet $(x ; y ; z)$, celui des coordonnées de I
droite Δ (Δ est définie par deux des trois équations)	tous les triplets $(x ; y ; z)$ solutions du système formé des deux équations définissant Δ
plan (cas où $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_3$)	tous les triplets $(x ; y ; z)$ solutions de l'une des équations

COMPRENDRE

Systèmes linéaires et intersection de plans

Une interprétation géométrique d'un système de trois équations à trois inconnues peut parfois permettre de conclure qu'il n'a pas de solution.

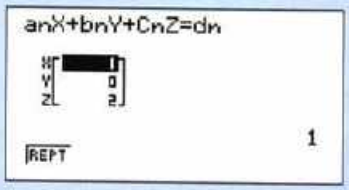
→ EXERCICE RÉSOLU 7

Avec la calculatrice

La plupart des calculatrices permettent, dans le cas général d'une solution unique, la résolution de systèmes linéaires.

Exemple.

Avec la calculatrice
Casio Graph 35+ ou 65,
Menu EQUA
Type F1 SIML
Nombre d'inconnues F2 3
Entrée des coefficients F1 SOLV
Ainsi pour l'exercice 8 :



Lorsque le système n'a pas de solution ou bien une infinité, la calculatrice indique qu'elle ne peut pas effectuer cette résolution par le message :

Ma ERROR

Note. Seules les calculatrices aptes au calcul formel (TI 89, CASIO 100, ...) permettent la résolution dans tous les cas.

SAVOIR FAIRE

EXERCICE RÉSOLU 7 Résoudre géométriquement un système

ÉNONCÉ Interprétez géométriquement le système puis déduisez-en l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S)\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 3x + y - z = -1. \\ -2x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

SOLUTION COMMENTÉE

Étudions l'intersection des plans $\mathscr{P}_1 : x+y-2z+1=0$,
$\mathscr{P}_2 : 3x+y-z+1=0$ et $\mathscr{P}_3 : -2x-2y+4z-1=0$.
Ils ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1(1\,;1\,;-2)$, $\vec{n}_2(3\,;1\,;-1)$ et $\vec{n}_3(-2\,;-2\,;4)$.
Or $\vec{n}_3 = -2\vec{n}_1$, donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_3$ sont colinéaires, ainsi $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont parallèles.
Mais sont-ils disjoints ou bien confondus ?
En divisant par -2, $\mathscr{P}_3$ a pour équation $x+y-2z=-0{,}5$, ce qui prouve par comparaison que $\mathscr{P}_3$ est distinct de $\mathscr{P}_1$; donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont disjoints.
Ainsi $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ ont une intersection vide et le système n'admet pas de solution. (Voir le § **4.1**).

→ EXERCICES 33 à 35

EXERCICE RÉSOLU 8 Trouver l'intersection de trois plans

ÉNONCÉ Déterminez algébriquement l'intersection des plans
$\mathscr{P}_1 : -x+2y+3z-5=0$, $\mathscr{P}_2 : 3x-y-4z+5=0$
et $\mathscr{P}_3 : 2x+3y-2z+2=0$.

SOLUTION COMMENTÉE

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$(S)\begin{cases} -x+2y+3z = 5 & (L_1) \\ 3x - y - 4z = -5 & (L_2). \\ 2x+3y-2z = -2 & (L_3) \end{cases}$$

Plusieurs méthodes sont possibles (voir activité p. 404) ; utilisons par exemple la méthode de Gauss.

- Éliminons x de (L_2) et (L_3) en combinant avec (L_1).

Pour cela, utilisons les combinaisons $L_2 + 3L_1$ et $L_3 + 2L_1$.

$$\begin{cases} -x+2y+3z = 5 \\ 5y+5z = 10 \quad (L_2+3L_1) \\ 7y+4z = 8 \quad (L_3+2L_1) \end{cases} \text{ soit en simplifiant } \begin{cases} -x+2y+3z = 5 \\ y+z = 2. \\ 7y+4z = 8 \end{cases}$$

- Éliminons y de (L_3) du dernier système, en combinant avec (L_2).

$$\begin{cases} -x+2y+3z = 5 \\ y+z = 2 \\ -3z = -6 \quad (L_3-7L_2) \end{cases}$$

Ce système « triangulaire » est équivalent à (S) (voir activité p. 405) ; d'où en « remontant » les calculs $z=2$, $y=0$ puis $x=1$.
Ainsi $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ ont un seul point commun $I(1\,;0\,;2)$.

→ EXERCICES 30 à 32

COIN MÉMO

DES idées À RETENIR

Caractérisations d'une droite (AB)

• **Vectorielle.** « $M \in (AB)$ » équivaut à « il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ ».

• **Barycentrique.** « $M \in (AB)$ » équivaut à « il existe un réel t tel que M est le barycentre de $(A ; 1-t)$, $(B ; t)$ ».

• **Analytique.** Dans un repère, si $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et $\overrightarrow{AB}(a ; b ; c)$ alors « $M(x ; y ; z) \in (AB)$ » équivaut à « il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \text{ ».}$$

• Pour un segment [AB], il suffit de remplacer la condition $t \in \mathbb{R}$, par $t \in [0 ; 1]$.

Caractérisations d'un plan (ABC)

• **Vectorielle.** « $M \in (ABC)$ » équivaut à « il existe des réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \text{ ».}$$

• **Barycentrique.** « $M \in (ABC)$ » équivaut à « il existe des réels α, β et γ $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$ tels que M est le barycentre de $(A ; \alpha)$, $(B ; \beta)$, $(C ; \gamma)$ ».

• **Analytique.** Dans un repère orthonormal, « $M(x ; y ; z) \in (ABC)$ » équivaut à « il existe des réels a, b, c, d avec $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$. »

Intersection de plans et systèmes linéaires

Préciser la position de trois plans de l'espace connus par leurs équations cartésiennes dans un repère **orthonormal**, revient à résoudre le système constitué de ces trois équations.

Inversement, la solution d'un système linéaire peut être interprétée géométriquement.

→ EXERCICES RÉSOLUS 7 et 8

DES réflexes À AVOIR

Barycentres : alignement, coplanarité

Pour démontrer :

• l'alignement de trois points, il suffit de prouver que l'un est barycentre des deux autres ;

• la coplanarité de quatre points, il suffit de prouver que l'un est barycentre des trois autres.

→ EXERCICES RÉSOLUS 1 et 2

Représentation paramétrique d'une droite

• Pensez qu'elle permet d'obtenir aisément un vecteur directeur et un point de cette droite.

Exemple.

$$d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -4t + 2 \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

est dirigée par $\vec{u}(2 ; -4 ; 3)$ et passe par $A(-1 ; 2 ; -4)$.

• N'oubliez pas qu'une droite peut être définie soit par une représentation paramétrique, soit comme l'intersection de deux plans sécants.

• Sachez retrouver un paramétrage de la droite à partir des équations des deux plans.

→ EXERCICE RÉSOLU 5

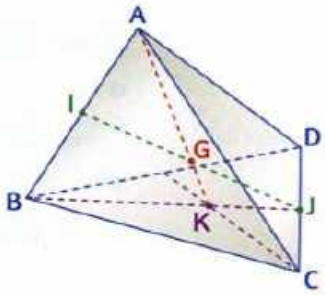
DES erreurs À ÉVITER

L'espace est muni d'un repère orthonormal.
La relation $ax+by+cz+d=0$ n'est pas une équation de droite dans l'espace mais celle d'un plan.

Sous forme cartésienne, une droite d est définie par un système formé des équations de deux plans sécants suivant d.

TD 1 Alignement et concours dans l'espace

1 Propriétés du tétraèdre quelconque



ABCD est un tétraèdre quelconque.
I et J sont les milieux des arêtes [AB] et [CD].
K est le centre de gravité du triangle BCD et G l'isobarycentre de A, B, C, D.

1. Le segment qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée, par exemple [AK], est appelé **médiane** du tétraèdre.
Le **but** de cette question est de prouver que les quatre médianes sont concourantes en G. Pour cette raison, on dit que G est le **centre de gravité** du tétraèdre.

a) Utilisez la règle d'associativité pour prouver que G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$.

b) Précisez de même la position de G sur les trois autres médianes.

2. Le segment qui joint les milieux de deux arêtes opposées, par exemple [IJ], est appelé **bimédiane** du tétraèdre.
Le **but** de cette question est de prouver que les trois bimédianes sont concourantes en G et que G est le milieu de chacune d'elles.

a) Prouvez que G est le milieu de [IJ]

b) Démontrez le résultat annoncé.

2 Un problème de droites sécantes

ABCD est un tétraèdre, les points P, Q, R, S sont tels que :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}.$$

Le **but** de l'exercice est de démontrer que des droites de l'espace sont sécantes.
Pour cela, nous introduirons des barycentres et utiliserons la règle d'associativité.

1. **a)** Écrivez P comme un barycentre de B et C puis Q comme un barycentre de A et D.

b) Soit G le barycentre de (A ; 1), (B ; 4), (C ; 1), (D ; 3). Justifiez que G appartient à (PQ).

2. De manière analogue, prouvez que G est sur la droite (RS). Qu'en déduisez-vous ?

3. On note I le milieu de [AC]. Prouvez que les droites (IG) et (BD) sont aussi sécantes et précisez la position de leur point d'intersection.

TD 2 Problèmes de lieux géométriques

1 Lieu géométrique et barycentre

OABC est un tétraèdre trirectangle en O, c'est-à-dire que les arêtes issues de O sont deux à deux orthogonales.
Pour tout réel m de [0 ; 1], G_m est le barycentre de (O ; 1), (A ; m), (B ; m), (C ; $-2m$).
Le **but** de ce TD est de trouver le lieu des points G_m lorsque m décrit [0 ; 1].

Note
Grâce au logiciel Geoplan, on peut conjecturer la nature de ce lieu.

1. Construire la figure

Pour avoir une idée du « déplacement » de G_m, on construit les différents barycentres G_m en pilotant au clavier le paramètre m de la manière suivante :

- créez un paramètre m entre 0 et 1 :

Créer | Numérique ▶ | Variable réelle libre dans un intervalle

- pilotez au clavier à l'aide des touches ↑ et ↓ :

Piloter | Piloter au clavier

- créez les points A, B, C :

Créer | Point ▶ | Point libre ▶ | sur une droite

- créez le tétraèdre OABC :

Créer | Solide ▶ | Polyèdre convexe ▶ | défini par ses sommets

- créez le point G_m :

Créer | Point ▶ | Barycentre

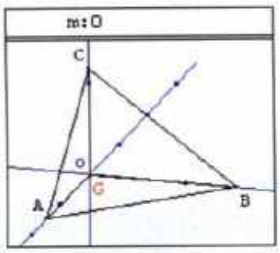
2. Conjecturer puis démontrer

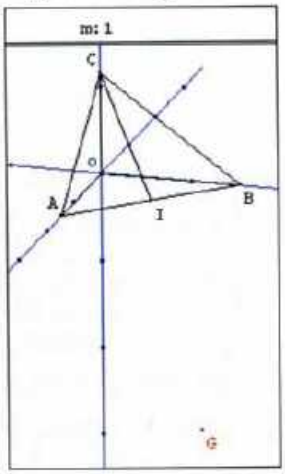
a) Lorsque $m = 0$, où se trouve G_0 ?

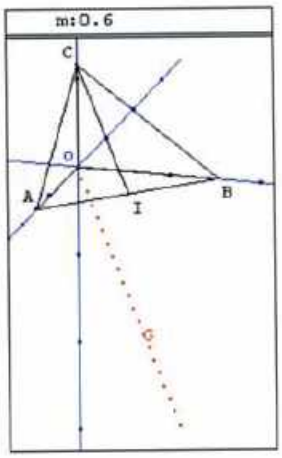
b) Lorsque $m = 1$, où se trouve G_1 ?

Précisez sa position en prouvant que $\overrightarrow{OG_1} = 2\overrightarrow{CI}$ où I désigne le milieu de [AB].

c) G_m semble se déplacer sur le segment $[OG_1]$.
Pour le prouver, démontrez que pour tout réel m de $[0 ; 1]$, $\overrightarrow{OG_m} = 2m\overrightarrow{CI}$.
Déduisez-en que le lieu du point G_m est le segment $[OG_1]$.



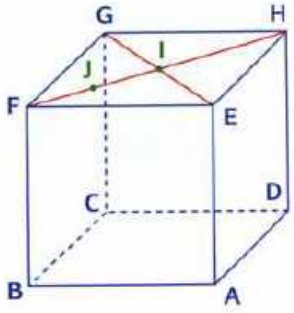




2 Un autre lieu géométrique

ABCDEFGH est un cube, I désigne le centre de la face EFGH.
Pour tout réel m de $[0 ; 1]$, on note P_m le barycentre de $(E ; m)$, $(F ; 2m)$, $(G ; m)$, $(C ; 4 - 4m)$.
Le **but** de ce TD est de trouver le lieu du point P_m lorsque m décrit l'intervalle $[0 ; 1]$.

Méthode 1 : Vecteurs et barycentres



1. Prouvez que les points P_m, F, I et C sont coplanaires.
2. On note J le milieu de [FI]. Prouvez que $\overrightarrow{CP_m} - m\overrightarrow{CJ} = \vec{0}$.
3. Déduisez-en le lieu du point P_m lorsque m décrit $[0 ; 1]$.

Méthode 2 : Outil analytique

On considère le repère $(C ; \overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CG})$.

1. Calculez les coordonnées du barycentre P_m en fonction de m.
2. Déduisez-en une représentation paramétrique du lieu de P_m lorsque m décrit $[0 ; 1]$.
3. Retrouvez le résultat obtenu par la méthode 1.

TD 3 Configuration mobile dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle Γ de centre O et de rayon 1 ; A est un point de l'espace extérieur au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note V un point variable de Γ et $\mathscr{P}_V$ le plan passant par V et perpendiculaire à la droite (AV).

L'**objectif** de ce TD est de prouver que tous les plans $\mathscr{P}_V$ passent par un point fixe lorsque V décrit Γ.

1. On note $(a ; b ; c)$ les coordonnées du point A et $(m ; n ; 0)$ celles du point V.

a) Prouvez que Γ a pour équation $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

b) Démontrez que $\mathscr{P}_V$ a pour équation $(m-a)x + (n-b)y - cz - 1 + am + bn = 0$.

Aide. « M$(x ; y ; z)$ appartient à $\mathscr{P}_V$ » équivaut à « $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{VM} = 0$ ».

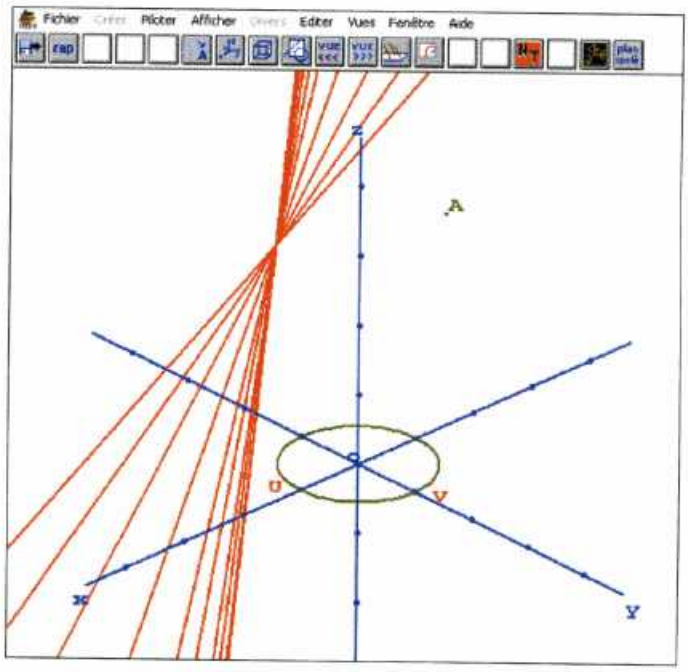
2. Une stratégie, pour prouver que tous les plans $\mathscr{P}_V$ passent par un point fixe, est d'examiner d'abord le cas de trois plans particuliers et de démontrer qu'ils passent par un point fixe F, puis de vérifier que F appartient à tous les plans $\mathscr{P}_V$.

a) On considère les points I$(1 ; 0 ; 0)$, J$(0 ; 1 ; 0)$ et K$(0 ; -1 ; 0)$.
Donnez les équations des plans $\mathscr{P}_I$, $\mathscr{P}_J$, $\mathscr{P}_K$.

b) Prouvez que ces trois plans se coupent en un point F dont vous calculerez les coordonnées.

c) Vérifiez alors que pour tout point V de Γ, les vecteurs $\overrightarrow{FV}$ et $\overrightarrow{AV}$ sont orthogonaux. Concluez.

Remarque. L'utilisation d'un logiciel, par exemple Geospace, permet une visualisation de la situation. Sur la figure ci-dessous, U et V sont des points libres du cercle Γ (en vert). On fait afficher, en mode « Trace », la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_U$ et $\mathscr{P}_V$. On obtient un faisceau de droites apparemment concourantes.



EXERCICES

Maîtriser le cours

Pour résoudre les exercices de cette partie, il suffit d'appliquer directement un résultat du cours. L'objectif est double : mieux comprendre le cours et reconnaître dans des situations simples les conditions d'application d'un théorème.

1. Caractérisations barycentriques

1 A et B sont deux points distincts.
Trouvez dans chaque cas le réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

a) M est l'isobarycentre de A et B.

b) M est le barycentre de (A ; 2), (B ; 3).

c) M est le barycentre de (A ; −2), (B ; 1).

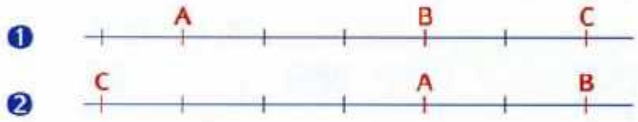
2 Dans chacun des cas, indiquez des réels α et β tels que M est le barycentre de (A ; α), (B ; β).

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$.

b) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

3 Sur les figures ci-dessous, les graduations sont régulières.
Exprimez chacun des points A, B, C comme un barycentre des deux autres.



4 ABC est un triangle. Dans chaque cas, trouvez les réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

a) M est le barycentre de (A ; −1), (B ; 1), (C ; 1).

b) M est le barycentre de (A ; 3), (B ; 1), (C ; 2).

5 ABC est un triangle.
Dans chacun des cas suivants, le point M est défini par l'égalité indiquée. Trouvez des réels α, β, γ tels que M est le barycentre (A ; α), (B ; β), (C ; γ).

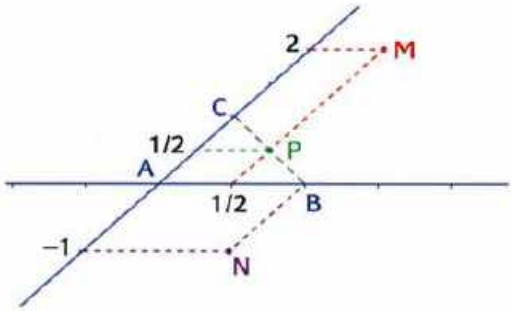
a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

d) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

6 Les points M, N, P sont placés dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) ci-après.



1. Comment choisir α, β, γ pour que M soit le barycentre de (A ; α), (B ; β), (C ; γ) ?

2. Reprenez la question précédente en remplaçant M par N puis par P.

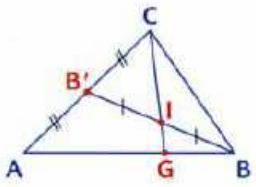
7 ABC est un triangle. M est le barycentre de (A ; 1), (B ; 1 − t), (C ; t) avec t réel de [0 ; 1].
On note I le barycentre de (B ; 1 − t), (C ; t).

1. Quel est l'ensemble des points I lorsque t décrit [0 ; 1] ?

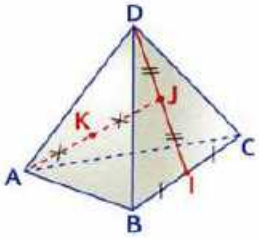
2. Déterminez puis représentez l'ensemble des points M lorsque t décrit [0 ; 1].

8 À partir de la figure ci-contre, trouvez des coefficients α, β, γ tels que I est le barycentre de (A ; α), (B ; β), (C ; γ).
Déduisez-en λ tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$



9 À partir de la figure ci-contre, trouvez des coefficients a, b, c, d tels que K est le barycentre de (A ; a), (B ; b), (C ; c), (D ; d).



10 ABCD est un tétraèdre. Utilisez la règle d'associativité pour placer le barycentre G indiqué.

a) G : barycentre de (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1), (D ; 3).

b) G : barycentre de (A ; −1), (B ; 2), (C ; −1), (D ; −2).

c) G : barycentre de (A ; 1), (B ; 2), (C ; 3), (D ; 6).

11 ABCD est un tétraèdre ; a est un réel. I est le milieu de [AB] et J celui de [CD]. E et F sont des points tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$.
H est le milieu de [EF].

1. Vérifiez que E est le barycentre de (A ; 1 − a), (D ; a) et F celui de (B ; 1 − a), (C ; a).

2. **a)** Prouvez que H est le barycentre de $(A ; 1 - a)$, $(B ; 1 - a)$, $(C ; a)$, $(D ; a)$.

b) Déduisez-en que I, J et H sont alignés.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 1, page 407.

12 ABCD est un tétraèdre, prouvez dans chacun des cas que les points M, B, C et D sont coplanaires et placez le point M.

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$.

b) $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 2, page 407.

2. Représentation paramétrique d'une droite

Dans toute cette rubrique, l'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

13 Donnez une représentation paramétrique de la droite d indiquée.

a) $d = (A ; \vec{u})$ avec $A(-1 ; 2 ; 0)$ et $\vec{u}(0 ; 1 ; -1)$.

b) $d = (AB)$ avec $A(2 ; 1 ; -1)$ et $B(2 ; -1 ; 1)$.

14 A et B ont pour coordonnées respectives :

$(-2 ; 1 ; 0)$ et $(2 ; 3 ; 1)$.

Donnez une représentation paramétrique de chacun des ensembles suivants.

a) La droite (AB).

b) Le segment [AB].

c) La demi-droite [AB).

d) La demi-droite [BA).

15 Précisez la nature géométrique de chacun des ensembles (E_1), (E_2), (E_3), (E_4) définis par les représentations paramétriques suivantes :

a) (E_1) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t - 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

b) (E_2) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t - 2 \end{cases}$, $t \in [0 ; 1]$.

c) (E_3) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t - 2 \end{cases}$, $t \in [-1 ; 0]$.

d) (E_4) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t - 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}^-$.

16 La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 1 - t \\ z = t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Indiquez un vecteur directeur $\vec{u}$ de d et le point I de paramètre 0.

2. d passe-t-elle par $A(3 ; 2 ; -3)$? par $B(-5 ; -2 ; -1)$?

3. Donnez les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{IM} = 2\,006\vec{u}.$$

17 La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Trouvez l'intersection de d et du plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$.

2. Prouvez que d est parallèle au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Donnez une représentation paramétrique de la droite d' parallèle à d passant par $I(2 ; -4 ; 0)$.

4. Donnez les représentations paramétriques de deux droites parallèles à d, dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

18 Dans chacun des cas suivants, donnez une représentation paramétrique de la droite d' passant par $I(1 ; -3 ; 9)$, parallèle à d.

a) $d = (O ; \vec{j})$.

b) $d = (AB)$ avec $A(2 ; -1 ; 5)$, $B(-1 ; 2 ; 3)$.

c) d est définie par $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

19 Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 5 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

20 ABCDEFGH est pavé droit ; I et J sont les milieux des arêtes [GH] et [EH]. On considère le repère orthogonal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donnez une représentation paramétrique de chacune des droites (AJ) et (CI).

2. (AJ) et (CI) sont-elles sécantes ?

3. Le résultat était-il prévisible ? Justifiez.

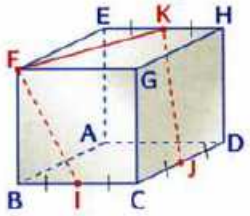
☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 3, page 409.

21 Précisez la position relative des droites d et d' ayant respectivement pour représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = 1-4t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3t+2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2-\dfrac{t}{3} \\ y = 3+\dfrac{2t}{3}, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = \dfrac{1}{2}-\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 409.

22 Dans le cube d'arête 1 ci-contre, on considère le repère orthonormal $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. I est le milieu de [BC], J celui de [CD] et K celui de [EH].



1. Donnez une représentation paramétrique de chacune des droites (IK) et (FJ).

2. Ces droites sont-elles sécantes ? I, J, K, F sont-ils coplanaires ?

3. Retrouvez ce résultat par une autre méthode.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 4, page 409.

3. et 4. Intersections de plans et de droites

Dans cette rubrique, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

23 Dans chacun des cas suivants, vérifiez que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants et donnez une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.
Précisez alors un vecteur directeur et un point particulier de d.

a) $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : x+y = 2 \\ \mathcal{P}_2 : x+z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : -x+y+z = 3 \\ \mathcal{P}_2 : 2x-y+2z = 1 \end{cases}$

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 5, page 411.

24 La droite d a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = 2 \\ z = t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; la droite d' est définie comme l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{cases} x+y-2z = 3 \\ x-y-2z = 2 \end{cases}.$$

1. Donnez une représentation paramétrique de d'.

2. **a)** Pourquoi d' est-elle parallèle à d ?

b) d et d' sont-elles strictement parallèles ?

25 Répondez aux questions de l'exercice 24 avec :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = -t+1, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} 3x-y-2z = 1 \\ x-y-z = 0 \end{cases}.$$

26 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $3x+2y-z-6 = 0$.
Trouvez les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes du repère.

27 Dans chacun des cas, prouvez que la droite d est sécante avec le plan $\mathcal{P}$ et calculez les coordonnées de leur point d'intersection.

a) d est la droite (AB) avec A(−1 ; 2 ; 3), B(1 ; 2 ; −1) ; $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $x+y+z = 1$.

b) d est la droite passant par A(2 ; −1 ; 0), dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i}-2\vec{j}$;
$\mathcal{P}$ est le plan d'équation $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{6} = 1$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 411.

28 Dans chacun des cas, trouvez l'intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P} : x-y+2z-1 = 0$ et $d : \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $\mathcal{P} : 2x+3y-z = 0$ et $d : \begin{cases} x = s+1 \\ y = 1+2s, \ s \in \mathbb{R}. \\ z = 8s-3 \end{cases}$

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 411.

29 On considère le système :

$$(S) \quad \begin{cases} x = 4t-1 \\ y = 2t \\ z = 3t+1 \\ x+y-2z = 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1. **a)** Justifiez que résoudre (S) revient à chercher l'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathcal{P}$.

b) Quelle est la position de d par rapport à $\mathcal{P}$?
Déduisez-en l'ensemble des solutions de (S).

2. Retrouvez ce résultat en résolvant (S).

Pour les exercices 30 à 32, résolvez, dans $\mathbb{R}^3$, le système formé par les équations des trois plans donnés ; précisez alors leur intersection.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 413.

30 **a)** $\mathcal{P}_1 : x-2y-3z = 3$;
$\mathcal{P}_2 : 2x-y-4z = 7$;
$\mathcal{P}_3 : 3x-3y-5z = 8$.

b) $\mathscr{P}_1 : 5x + y + z = -5$;
$\mathscr{P}_2 : 2x + 13y - 7z = -1$;
$\mathscr{P}_3 : x - y + z = 1$.

31 **a)** $\mathscr{P}_1 : 2x - y + 3z = 0$;
$\mathscr{P}_2 : x + 2y + z = 0$;
$\mathscr{P}_3 : 3x - 4y + 5z = 0$.

b) $\mathscr{P}_1 : 2x - y + 3z = 2$;
$\mathscr{P}_2 : x + 2y + z = 1$;
$\mathscr{P}_3 : 3x - 4y + 5z = 3$.

32 **a)** $\mathscr{P}_1 : 2x - y + 3z = 2$;
$\mathscr{P}_2 : x + 2y + z = 1$;
$\mathscr{P}_3 : 3x - 4y + 5z = 4$.

b) $\mathscr{P}_1 : x + y + z = 1$;
$\mathscr{P}_2 : x - 2y + z = 1$;
$\mathscr{P}_3 : 3x - 4y + 3z = -1$.

Pour les exercices 33 à 35, les équations du système sont celles respectivement des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 413.

33 Étudiez la position des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ puis indiquez l'ensemble des solutions du système :

$$(S) \begin{cases} x+y-z = 2 \\ x-y+z = 2 \\ -x+y-z = 3 \end{cases}.$$

34 On donne le système :

$$(S) \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 5y + 13z = 3 \end{cases}.$$

1. Prouvez que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants suivant une droite d. Précisez un point et un vecteur directeur de d.

2. Démontrez que d est contenue dans $\mathscr{P}_1$.

3. Déduisez-en l'ensemble des solutions de (S).

35 On donne le système :

$$(S) \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases}.$$

1. Prouvez que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants deux à deux.

2. On note d la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Précisez un point et un vecteur directeur de d.

3. Prouvez que d est strictement parallèle à $\mathscr{P}_3$, puis déduisez-en l'ensemble des solutions de (S).

36 **BAC** L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $\mathscr{P}$ est le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $3x + y - z = 0$.

1. **a)** Démontrez que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ.

b) Démontrez qu'une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 5, \ \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 5\alpha + 5 \end{cases}$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez précisément vos réponses.

a) La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{Q}$ d'équation $5x - 5y + z = 0$.

b) La droite Δ et la droite Δ' de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -3\beta \\ y = 1 + \beta \ , \ \beta \in \mathbb{R}, \\ z = 2 + 2\beta \end{cases}$ sont deux droites coplanaires.

37 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. À tout réel m, on associe le plan $\mathscr{P}_m$ d'équation $mx + y + (1 - m)z + m + 3 = 0$.

1. **a)** Démontrez que les plan $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$, correspondant respectivement à $m = 0$ et $m = 1$, se coupent suivant une droite Δ.

b) Déterminez une représentation paramétrique de Δ.

c) Pourquoi les points A(0 ; −4 ; 1) et B(1 ; −5 ; 2) sont-ils des points de Δ ?

d) Déduisez de la question 1. **c)** que Δ est contenue dans chaque plan $\mathscr{P}_m$.

2. On note $\mathscr{P}_{1/2}$ le plan associé à $m = \frac{1}{2}$.
Démontrez qu'il n'existe aucun plan $\mathscr{P}_m$ orthogonal au plan $\mathscr{P}_{1/2}$.

Si $m_1 \neq \frac{1}{2}$, démontrez que le plan $\mathscr{P}_{m_2}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}_{m_1}$ si et seulement si $m_2 = \frac{m_1 - 2}{2m_1 - 1}$.

38 Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point A a pour coordonnées (3 ; −2 ; 1) et la droite Δ a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et perpendiculaire à Δ.

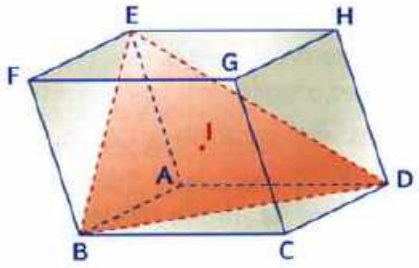
2. Déterminez les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur Δ. Déduisez-en la distance AH.

Apprendre à chercher

Les exercices de cette partie, de difficulté moyenne pour la plupart, ne sont pas des exercices résolus.
Le questionnement veut montrer comment on peut organiser une recherche et suivre un raisonnement.

39 Prouver un alignement

ABCDEFGH est un parallélépipède et I est le centre de gravité du triangle BDE.



Objectif : démontrer que A, I et G sont alignés et préciser la position de I sur [AG].

1. Une première idée est de prouver qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$.
Or $\overrightarrow{AG}$ représente la diagonale issue de A du parallélépipède donc $\overrightarrow{AG}$ s'exprime en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ (règle du parallélépipède).
Mais I est le centre de gravité de BDE d'où la possibilité d'exploiter des égalités vectorielles.

a) Écrivez $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b) I étant le centre de gravité de BDE, exprimez la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

c) Déduisez-en une relation de colinéarité entre $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$.
Concluez.

2. Une autre solution
On peut penser aussi à une solution analytique.
Le choix d'un repère est facilité par la donnée du parallélépipède. Le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ s'impose puisque les sommets auront des coordonnées simples.
La droite (AG) est alors définie paramétriquement et les coordonnées du point I sont facilement calculables.

a) Écrivez une représentation paramétrique de la droite (AG).

b) Calculez les coordonnées du point I.

c) Vérifiez que I est sur (AG) et précisez le nombre t tel que $\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AG}$.

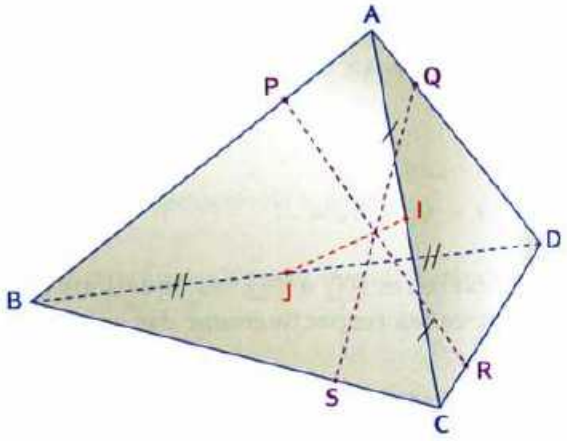
☞ Commentaire.

L'égalité du 1. a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ peut aussi s'interpréter en termes de barycentre.
Ainsi G est le barycentre de $(A ; -2)$, $(B ; 1)$ $(D ; 1)$ $(E ; 1)$ et, d'après la règle d'associativité, G est le barycentre de $(A ; -2)$ $(I ; 3)$.
On retrouve ainsi les résultats.

40 Trouver un point de concours

ABCD est un tétraèdre ; x est un réel de l'intervalle]0 ; 1[.
P, Q, R et S sont les points tels que :
$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$.
I et J sont les milieux des arêtes [AC] et [BD].

Objectif : démontrer que les droites (IJ), (PR) et (QS) sont concourantes.



1. On connait l'efficacité du barycentre dans les problèmes de concours, grâce au théorème d'associativité.
De plus, une égalité comme $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ indique que P est un barycentre de A et B. D'où l'idée de suivre cette piste.

a) Exprimez P comme un barycentre de A et B.

b) Traduisez de même les égalités :
$\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$.

2. Pour prouver l'existence de ce point de concours inconnu, on pense à l'identifier à un barycentre G de certains points.
Pour trouver ces points, observons que G doit être sur (PR) et que P est un barycentre de A et B tandis que R est un barycentre de C et D.
D'où l'idée d'introduire « par juxtaposition » un barycentre de A, B, C et D.

a) Quel barycentre G est-il alors judicieux d'introduire ? Assurez-vous de son existence.

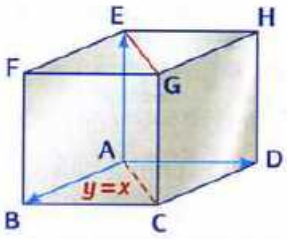
b) Grâce au théorème d'associativité, prouvez que G est sur chacune des droites (PR), (QS) et (IJ).
Concluez.

☞ Commentaire.

De façon plus précise, vous pouvez vérifier que G est le milieu de [PR] et [QS] et qu'il est sur la droite (IJ) définie par $\overrightarrow{IG} = x\overrightarrow{IJ}$.

41 Trouver l'intersection de trois plans

ABCDEFGH est un cube de côté 1.
On munit l'espace du repère orthonormal $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
On coupe ce cube suivant les plans d'équations :



$$x - y = 0,\ y - z = 0,\ z - x = 0.$$

Objectif : trouver l'intersection de ces trois plans.

Deux solutions sont envisageables.

· **Méthode géométrique** : les équations des plans sont si simples qu'on peut penser pouvoir identifier ces plans sur la figure.

Par exemple, trois points non alignés (ou plus) dont les coordonnées sont telles que $y = x$ permettent de définir le premier plan.

· **Méthode algébrique** : le problème revient à résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

1. Solution 1 : identification des trois plans

a) Indiquez les points de la figure situés dans le plan d'équation $x - y = 0$.

b) De même, indiquez les points de la figure situés dans le plan d'équation $y - z = 0$ puis dans celui d'équation $z - x = 0$.

c) Quels sont les points communs aux trois plans ? Déduisez-en leur intersection.

2. Solution 2 : résolution d'un système

Il s'agit donc de résoudre le système :

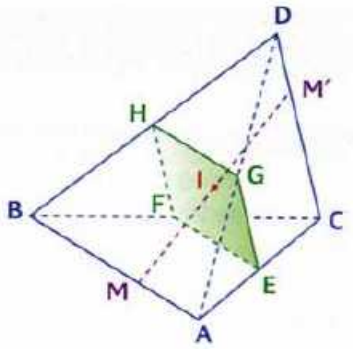
$$(S) \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0. \\ z - x = 0 \end{cases}$$

a) Résolvez ce système dans $\mathbb{R}^3$.

b) Déduisez-en que l'intersection cherchée est une droite.
Donnez-en une représentation paramétrique.
Précisez l'un de ces points et un vecteur directeur.

42 Trouver un lieu dans l'espace

ABCD est un tétraèdre. M et M′ sont deux points variables sur les arêtes opposées [AB] et [CD].
I désigne le milieu du segment [MM′].



Objectif : préciser le lieu géométrique de I lorsque M et M′ se déplacent sur [AB] et sur [CD].

1. On note $\mathscr{L}$ ce lieu. Pour connaître sa nature, on peut bien sûr utiliser un logiciel, par exemple, Geospace. Sinon, on peut choisir des positions particulières de M et M′ sur la figure et placer les points I correspondants.

a) Justifiez que les milieux E, F, G, H de [AC], [BC], [AD] et [BD] sont des points de $\mathscr{L}$.

b) Prouvez que EFHG est un parallélogramme.

2. D'autres essais, ou la visualisation avec un logiciel, permettent alors de conjecturer que I est dans le parallélogramme EFHG.
Comment le prouver ?
Introduisons le repère naturel $(E ; \vec{EF}, \vec{EG})$ du plan (EFG). Dire que « I est intérieur à EFHG » signifie que « I est tel que $\vec{EI} = x\vec{EF} + y\vec{EG}$ avec ses coordonnées x et y dans $[0 ; 1]$ ».

a) Démontrez que :

$$2\vec{EI} = \vec{EM} + \vec{EM'} = \vec{AM} + \vec{CM'} \quad (1).$$

b) Justifiez qu'il existe deux réels x et y de $[0 ; 1]$ tels que $\vec{AM} = x\vec{AB}$ et $\vec{CM'} = y\vec{CD}$.

c) Déduisez-en alors que $\vec{EI} = x\vec{EF} + y\vec{EG}$.

3. Ainsi vous avez prouvé que $\mathscr{L}$ est contenu dans le parallélogramme EFHG. Il s'agit d'étudier la réciproque, c'est-à-dire de se poser la question : si J est un point quelconque intérieur à EFHG, est-il le milieu d'un segment [MM′] avec M sur [AB] et M′ sur [CD] ?

a) Si J est intérieur à EFHG, il existe des réels a et b de $[0 ; 1]$ tels que $\vec{EJ} = a\vec{EF} + b\vec{EG}$.
Justifiez qu'alors $2\vec{EJ} = a\vec{AB} + b\vec{CD}$.

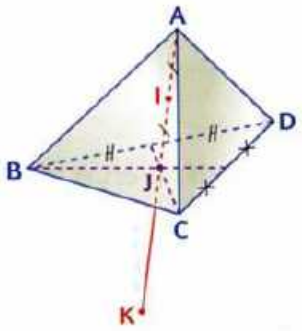
b) Déduisez-en qu'il existe un point M de [AB] et un point M′ de [CD] tels que $2\vec{EJ} = \vec{AM} + \vec{CM'}$.

c) À l'aide de la relation de Chasles, démontrez alors que J est le milieu de [MM′]. Concluez.

Pour progresser

Barycentres

43 ABCD est un tétraèdre ; J est le centre de gravité du triangle BCD, I le milieu de [AJ] et K le symétrique de A par rapport à J.
Exprimez I et K comme barycentres de A, B, C et D munis de coefficients que vous devez préciser.



44 ABCD est tétraèdre. I et J sont les milieux de [AD] et [BC]. Les points K et L sont définis par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. G est le barycentre de (A ; 2), (B ; 1), (C ; 1), (D ; 2).

1. **a)** Prouvez que les points G, I, J sont alignés.

b) Prouvez que les points G, K, L sont alignés.

2. Déduisez-en que les points I, J, K, L sont coplanaires.

45 ABCD est un tétraèdre, t un réel différent de -4 et M le barycentre de (A ; t), (B ; 2), (C ; 1), (D ; 1).
I et J sont les milieux respectifs de [CD] et [BI].

1. **a)** Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, calculez les coordonnées des points M et J.

b) Donnez une représentation paramétrique de la droite (AJ).

c) Prouvez que les points A, M et J sont alignés et précisez le coefficient λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AJ}$.

2. Exprimez J comme un barycentre de B, C, D puis retrouvez le résultat précédent en utilisant le théorème d'associativité.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 39, page 422.

46 • ABCD est un tétraèdre ; les points P, Q et R sont tels que les quadrilatères ABPC, ABQD, ACRD sont des parallélogrammes.
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (DP), (CQ) et (BR) sont concourantes.

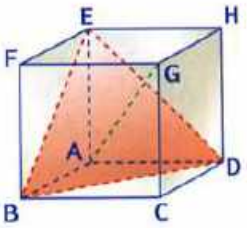
1. **a)** Prouvez que P est le barycentre des points pondérés (A ; -1), (B ; 1), (C ; 1).

b) De même, exprimez Q comme un barycentre de A, B, D, puis R comme un barycentre de A, C, D.

2. En utilisant I, barycentre bien choisi des points A, B, C, D et le théorème d'associativité, prouvez que les droites (DP), (CQ) et (BR) sont concourantes en I. Précisez la position de I sur chacune des droites.

☞ **Aide.** Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 40, page 422.

47 • BAC
ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



1. **a)** Exprimez plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et déduisez-en que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$ est nul.

b) Prouvez de même que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

c) Démontrez que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).

2. I est le centre de gravité du triangle BDE.
Déduisez de la question 1. **a)** que I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).
Précisez la position de I sur le segment [AG].

3. L'espace est muni du repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Écrivez une équation du plan (BDE).

b) Écrivez une représentation paramétrique de la droite Δ passant par H et orthogonale au plan (BDE).

c) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ et du plan (BDE) ?

d) Déduisez-en la distance de H au plan (BDE).

Ensembles de points

48 A, B, C, D, E sont cinq points de l'espace. Pour tout point M, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}.$$

1. Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

2. Quel est l'ensemble des points M tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$?

☞ **Aide.** Pensez à réduire les sommes vectorielles.

49 Répondez aux questions de l'exercice 48 avec :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}.$$

50 • BAC A, B, C sont trois points de l'espace et k est un réel de l'intervalle $[-1 ; 1]$.
On note G_k le barycentre de $(A ; k^2 + 1)$, $(B ; k)$, $(C ; -k)$.

1. Représentez les points A, B, C, le milieu I du segment [BC] et construisez les points G_1 et G_{-1}.

2. **a)** Prouvez que pour tout réel k de $[-1 ; 1]$,

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}.$$

b) Donnez le tableau de variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$.

c) Déduisez-en l'ensemble des points G_k lorsque k décrit l'intervalle $[-1 ; 1]$.

3. Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de l'espace tels que :
$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

4. Précisez l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de l'espace tels que :
$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.

5. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0 ; 0 ; 2)$, $(-1 ; 2 ; 1)$ et $(-1 ; 2 ; 5)$. Le point G_k et les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont définis comme ci-dessus.

a) Calculez les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
Prouvez que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont sécants.

b) Calculez le rayon du cercle Γ, intersection des ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.

51 ABCD est un tétraèdre, I est le milieu du segment [AB] et J celui du segment [CD].

1. a) G_1 est le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; 1)$, $(C ; -1)$, $(D ; 1)$.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.

b) G_2 est le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; 1)$, $(D ; 2)$.
Exprimez $\overrightarrow{IG_2}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$.

c) Démontrez que G_2 est le milieu de $[JG_1]$.

d) Faites une figure et placez I, J, G_1, G_2.

2. m est un réel. On note G_m le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; 1)$, $(C ; m-2)$, $(D ; m)$ lorsqu'il existe.

a) Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles G_m existe.

b) Exprimez en fonction de m les réels a et b tels que $m\overrightarrow{IG_m} = a\overrightarrow{IC} + b\overrightarrow{ID}$.
Déduisez-en que G_m appartient à un plan fixe $\mathscr{P}$.

c) Prouvez que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant.
Précisez ce vecteur.

d) Déduisez-en l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m du plan $\mathscr{P}$ lorsque m décrit $\mathscr{E}$.

(Concours GEIPI)

Intersections d'ensembles

Pour cette rubrique, sauf indication de l'énoncé, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

52 A, B, C, D, E sont les points de coordonnées respectives :
$(0 ; 0 ; a)$, $(a ; 0 ; 0)$, $(0 ; a ; 0)$,
$(-a ; 0 ; 0)$, $(0 ; -a ; 0)$
où a est un réel strictement positif donné.
Ainsi ABCDE est une pyramide régulière Σ à base carrée d'axe (Oz).

Le but de l'exercice est de préciser l'intersection des trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ d'équations respectives $x + y = 0$, $y + z = 0$, $x - z = 0$ par deux méthodes.

1. Méthode géométrique

a) Faites une figure et représentez les sections de Σ par les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

b) Prouvez que les points O et G, centre de gravité de la face ABE, appartiennent à l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

c) Vérifiez que O et G appartiennent à $\mathscr{P}_3$.
Quelle est l'intersection des trois plans ?

2. Méthode analytique
Résolvez le système défini par les trois équations de plan et retrouvez le résultat.

Aide. Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 41, page 423.

Commentaire. L'utilisation d'un logiciel du type Geospace, ... permet la visualisation des sections.

53 • OABCDEFG est un cube de côté 1 ; l'espace est muni du repère orthonormal $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.
On désigne par a un réel strictement positif.
M, N et P sont les points tels que :
$\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BP} = a\overrightarrow{OD}$.

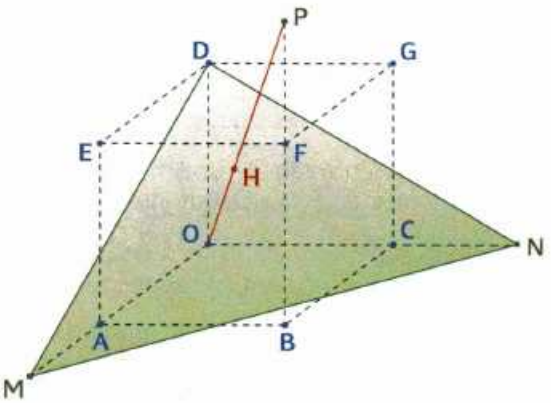
1. Démontrez que le plan (DMN) a pour équation :
$x + y + az = a$.

2. a) Prouvez que $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur normal au plan (DMN) puis donnez une représentation paramétrique de la droite (OP).

b) La droite (OP) coupe le plan (DMN) en H. Exprimez, en fonction de a, le réel t tel que $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OP}$.

3. a) Quelle est la distance de P au plan (DMN) ?

b) Justifiez que le triangle DMN est isocèle. Calculez son aire en fonction de a.
Déduisez-en le volume $\mathscr{V}(a)$ du tétraèdre PDMN.



54 • BAC $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère orthonormal de l'espace.
G est l'isobarycentre de A, B, C.

1. Calculez les coordonnées de G et prouvez que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. Les points A'(2 ; 0 ; 0), B'(0 ; 2 ; 0), et C'(0 ; 0 ; 3) définissent le plan (A'B'C').

a) Démontrez qu'une équation cartésienne du plan (A'B'C') est $3x + 3y + 2z = 6$.

b) Prouvez que le point M(x ; y ; z) appartient à la droite (AC) si et seulement s'il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$$

c) Calculez les coordonnées du point K commun à la droite (AC) et au plan (A'B'C').

3. a) Calculez les coordonnées du point L commun à la droite (BC) et au plan (A'B'C').

b) Prouvez que les droites (AB), (A'B') et (KL) sont parallèles.

c) Caractérisez l'intersection des plans (ABC) et (A'B'C') à l'aide de points définis précédemment.

55 • Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A, B, C, D de coordonnées :
A(1 ; 2 ; 0) ; B(0 ; 0 ; 1) ; C(1 ; 5 ; 5) ; D(−11 ; 9 ; −4).
On se propose de déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

1. a) Vérifiez que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) Justifiez l'affirmation suivante :
Dire que « M(x ; y ; z) appartient à la droite (DH) » équivaut à dire que « $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ».

c) Déduisez-en que la droite (DH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ 13y = 62 - 5\lambda \\ 13z = -19 + 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. a) Déduisez de la question **1. c)** les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).

b) Déterminez alors une équation du plan (ABC) et déduisez-en les coordonnées de H.

56 • Les points A, B, C, D ont pour coordonnées A(2 ; 4 ; 3) ; B(4 ; −2 ; 3) ; C(1 ; −1 ; 1) et D(3 ; 3 ; −3).

1. Vérifiez que A, B, C ne sont pas alignés.

2. Déterminez les coordonnées du point D', projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

57 • Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont respectivement pour équation :

$\mathscr{P}_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0$ et $\mathscr{P}_2 : x + y + z + 1 = 0$.

1. a) Démontrez que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants. (On note Δ la droite intersection des deux plans.)

b) Démontrez qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Déterminez une équation du plan $\mathscr{R}$ perpendiculaire à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et passant par A(2 ; 5 ; −2).

58 • Les points A et B ont pour coordonnées A(2 ; 1 ; −1) et B(3 ; 0 ; 0). À tout réel m, on associe le plan $\mathscr{P}_m$ d'équation cartésienne $mx + y + mz + m - 1 = 0$.
Existe-t-il une valeur de m pour laquelle :

a) la droite (AB) est parallèle à $\mathscr{P}_m$?

b) la droite (AB) est perpendiculaire à $\mathscr{P}_m$?

c) le plan $\mathscr{P}_m$ contient la droite (AB) ?

59 • La droite d est l'intersection des plan $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives :

$\mathscr{P}_1 : x - y + z - 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2 : 2x + z = 0$.

Le plan $\mathscr{R}$ a pour équation $x + y - z = 0$.
Démontrez que la droite d coupe $\mathscr{R}$ et déterminez les coordonnées du point d'intersection.

60 : BAC Dans un repère orthonormal, on donne les points A(8 ; 0 ; 8), B(10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. a) Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et B.

b) Prouvez que $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires.

2. a) Le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{D}$ et contient Δ.
Prouvez que le vecteur $\vec{n}(2 ; -2 ; 1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Déduisez-en une équation de $\mathscr{P}$.

b) Démontrez que la distance d'un point quelconque M de $\mathscr{D}$ au plan $\mathscr{P}$ est indépendante de M.

c) Donnez une représentation paramétrique de la droite définie comme l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan (xOy).

3. La sphère $\mathscr{S}$ est tangente à $\mathscr{P}$ au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de $\mathscr{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathscr{P}$, du même côté que O.
Trouvez une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

61 : BAC On considère les points A(4 ; 0 ; 0), B(2 ; 4 ; 0), C(0 ; 6 ; 0), S(0 ; 0 ; 4), E(6 ; 0 ; 0) et F(0 ; 8 ; 0).

1. Réalisez une figure et complétez-la au fur et à mesure de l'exercice.

2. Prouvez que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA) et F celui des droites (AB) et (OC).

3. **a)** Trouvez une équation du plan (SEF).

b) Calculez les coordonnées du point A′, barycentre des points pondérés (A ; 1), (S ; 3).

c) On considère le plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan (SEF) et passant par A′. Vérifiez qu'une équation de $\mathscr{P}$ est :

$$4x + 3y + 6z - 22 = 0.$$

4. Le plan $\mathscr{P}$ coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement en O′, A′, B′, C′.

a) Calculez les coordonnées du point O′.

b) Vérifiez que C′ a pour coordonnées $\left(0 ; 2 ; \frac{8}{3}\right)$.

c) Trouvez une représentation paramétrique de la droite (SB) et déduisez-en les coordonnées du point B′.

5. Vérifiez que O′A′B′C′ est un parallélogramme.

62 BAC

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Δ_1 est la droite passant par A(0 ; 0 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et Δ_2 est la droite passant par B(0 ; 0 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}_2 = \vec{i} - \vec{j}$.

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble (E) des points M de l'espace équidistants des deux droites Δ_1 et Δ_2.

1. Vérifiez que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales et non coplanaires. Démontrez que le point O est un point de (E).

☞ **Aide.** Faites une figure.

2. Déterminez une représentation paramétrique de Δ_1 et de Δ_2.

3. M est un point de coordonnées $(x ; y ; z)$.

On note H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur Δ_1 et Δ_2.

a) Calculez MH^2 et MK^2 en fonction de x, y et z.

b) Déduisez-en que M appartient à (E) si et seulement si $xy + 2z = 0$ (1).

4. En utilisant (1) :

a) Démontrez que les intersections de (E) avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles.

Précisez le cas d'exception.

b) Quelle est la nature des intersections de (E) avec des plans orthogonaux à l'axe $(O ; \vec{i})$ ou à l'axe $(O ; \vec{j})$?

Résolutions de systèmes

Dans cette rubrique, les situations issues de domaines variés conduisent à l'utilisation de systèmes linéaires.

63 Chez le boulanger

Deux baguettes, trois croissants et quatre pains aux raisins coûtent 7,30 € ; trois baguettes, deux croissants et cinq pains aux raisins 8,40 €.

Combien coûtent cinq croissants et deux pains aux raisins ?

64 Polynôme d'interpolation

P désigne un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$. Existe-t-il des réels a, b, c tels que $P(-1) = 10$, $P(2) = 7$, $P(3) = 22$?

65 À la recherche d'une primitive

1. Trouvez trois nombres α, β et γ tels que pour tout réel x, $x^2 = \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma$.

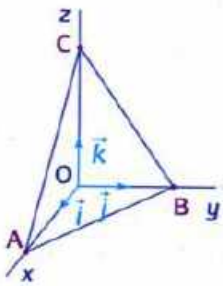
2. Déduisez-en une primitive sur $\mathbb{R}$, de la fonction $P : x \mapsto x^2(x+1)^{2006}$.

66 • Plan passant par trois points sur les axes

Dans un repère orthonormal, on donne les points A(a ; 0 ; 0), B(0 ; b ; 0), C(0 ; 0 ; c) tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Prouvez en résolvant un système linéaire qu'une équation du plan (ABC) est :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

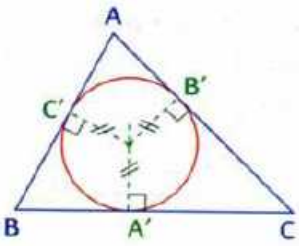


☞ **Commentaire.** Ce résultat a été mis en évidence dans le chapitre 14, page 385.

67 • Avec le cercle inscrit

On donne le dessin suivant BC = 7, CA = 5 et AB = 4.

Trouvez les longueurs AB′, BC′ et CA′.



68 • Sphère passant par quatre points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A(4 ; 0 ; −3), B(2 ; 2 ; 2), C(3 ; −3 ; −1), D(0 ; 0 ; −3).

1. Prouvez que le plan médiateur de [AB] a pour équation $4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

On admet que de même, les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations :

$$2x - 10y - 6z - 7 = 0 \text{ et } 3x - 3y + 2z - 5 = 0.$$

2. **a)** Démontrez que ces trois plans ont un unique point commun E.

b) Déduisez-en que A, B, C, D sont sur une sphère de centre E. Quel est son rayon ?

69 L'expert comptable

Une somme de 20 € est constituée de pièces de 1 €, de pièces de 50 centimes et de pièces de 20 centimes. Il y a au total 49 pièces. Trouvez toutes les combinaisons possibles de pièces de chaque sorte.

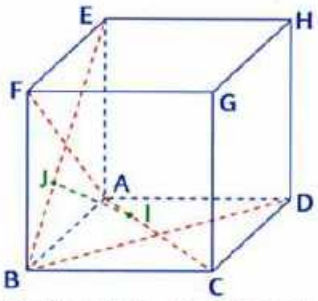
Prendre toutes les initiatives

Pour ces exercices, c'est à vous de prendre toutes les initiatives pour trouver une solution.

70 OABC est tétraèdre trirectangle en O tel que OA = OB = OC = a. G est le centre de gravité du triangle ABC. Calculez OG en fonction de a.

71 ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 1. G est le centre de gravité du triangle BC'D.
Prouvez que C, G, A' sont alignés et trouvez le nombre k tel que $\overrightarrow{CG} = k\overrightarrow{CA'}$.

72 • ABCDEFGH est un cube d'arête a.
I et J sont les centres de gravité des triangles ABD et ABF.



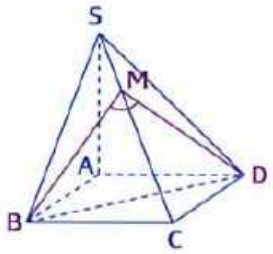
1. Prouvez que (IJ) est orthogonale à chacune des droites (AC) et (BE).
2. Démontrez que IJ mesure le tiers de la diagonale du cube.

☞ **Note.** **IJ représente la distance entre les droites non coplanaires (AC) et (BE).**

73 • Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne A(−3 ; −2 ; 5), B(−1 ; 3 ; 6), C(4 ; −1 ; 2), D(5 ; 3 ; −1), E(1 ; −2 ; 2). Démontrez qu'il existe une droite unique d passant par E et orthogonale à (AB) et (CD). Donnez-en une représentation paramétrique.

74 • ABCD est un tétraèdre et M le point de [AB] défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Le plan parallèle à (BCD) passant par M coupe [AC] en N et [AD] en P.
I, J et K désignent les milieux des segments [NP], [PM] et [MN].
Démontrez que les droites (BI), (CJ) et (DK) sont concourantes.

75 • SABCD est une pyramide dont la base est un carré de côté 1 et la hauteur [SA] telle que SA = 1.



M est un point de [SC] défini par $\overrightarrow{SM} = t\overrightarrow{SC}$ avec t dans [0 ; 1].
Pour quelle valeur de t l'angle $\widehat{BMD}$ est-il maximal ?
Précisez alors sa mesure.

76 ⋮ Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne la sphère Σ de centre I(1 ; 1 ; 1) et de rayon 1 et le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation $x + y + z = m$ $(m \in \mathbb{R}^+)$.
Pour quelles valeurs de m, le plan $\mathcal{P}_m$ est-il tangent à Σ ?
Application.
OABC est un tétraèdre trirectangle en O tel que OA = OB = OC = a $(a > 0)$. Indiquez la position de Ω, centre de la sphère inscrite dans OABC.

Problèmes

77 • *Thèmes : Barycentres. Étude de fonction*

M est un point intérieur à un triangle ABC. La droite (MA) coupe (BC) en A′ ; la droite (MB) coupe (AC) en B′ ; la droite (MB) coupe (AB) en C′.

On pose $S = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'}$ et on se propose de déterminer un point M pour lequel la somme S est minimale.

Nous rappelons que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on peut trouver des réels strictement positifs tels que M soit le barycentre de $(A ; \alpha)$, $(B ; \beta)$, $(C ; \gamma)$.

1. Déduisez-en qu'alors $\frac{MA}{MA'} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$.

2. Prouvez que $S = \left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)$.

3. a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

b) Déduisez-en que :

- pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 2$,
- pour tout $x > 0$, $f(x) = 2$ équivaut à $x = 1$.

4. a) Déduisez des questions 2. et 3. que :

« S est minimale » équivaut à « $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$ ».

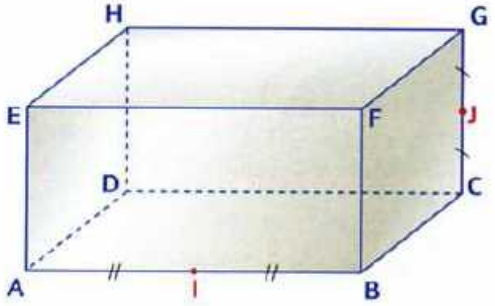
b) Déduisez alors la position du point M pour que S soit minimale.

78 • *Thèmes : Produit scalaire. Équations de plans. Représentations paramétriques de droites. Volumes*

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que :

$$AB = 2 ; \quad BC = GC = 1.$$

Le point I est le milieu du segment [AB] et J celui du segment [CG]. On considère le repère orthonormal $\left(A ; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. a) Calculez les distances DJ et IJ.

b) Trouvez, à 0,1° près, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IJD}$.

2. Prouvez que les droites (DI) et (IJ) sont perpendiculaires.

3. a) Déterminez une équation du plan (DIJ).

b) Calculez la distance du point H au plan (DIJ).

4. Calculez le volume du tétraèdre HDIJ.

5. a) Déterminez une représentation paramétrique de la droite d passant par le point J et perpendiculaire au plan (HDI).

b) Trouvez les coordonnées du point d'intersection J′ de la droite d et du plan (HDI).

c) Trouvez, de trois façons différentes, la distance du point J au plan (HDI).

79 • *Thèmes : Sections. Optimisation. Positions de plans*

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace.

SOABC est la pyramide telle que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OS} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}$.

On note t un réel tel que $0 < t < 1$. Le but du problème est de préciser la section du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y = t$ avec la pyramide et de chercher la valeur de t rendant son aire maximale.

1. a) $\mathcal{P}$ coupe les droites (OA) en D, (OC) en E, (SC) en F, (SB) en G, (SA) en H. Faites une figure et indiquez la nature de cette section.

b) Prouvez que DEFH est un rectangle. Exprimez son aire en fonction de t.

c) Calculez les coordonnées du point G, puis l'aire du triangle FGH en fonction de t.

d) Déduisez-en l'expression de l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la section en fonction de t.

2. Étudiez les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $]0 ; 1[$.

Déduisez-en la valeur de t rendant cette aire maximale.

3. Prouvez que, parmi les plans $\mathcal{P}$, celui dont la section avec la pyramide est d'aire maximale, est le plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OS}$ passant par le centre de gravité du triangle OAC.

C'EST NOUVEAU AU BAC

QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

80 • BAC Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point $S(1 ; -2 ; 0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite d passant par le point S et perpendiculaire à $\mathscr{P}$ est :

a $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = -3 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

c $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t \end{cases}$ **d** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

a $(-4 ; 0 ; 0)$. **b** $\left(\frac{6}{5} ; -\frac{9}{5} ; -\frac{3}{5}\right)$. **c** $\left(\frac{7}{9} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$. **d** $\left(\frac{8}{11} ; -\frac{25}{11} ; \frac{9}{11}\right)$.

3. La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

a $\frac{\sqrt{11}}{3}$. **b** $\frac{3}{\sqrt{11}}$. **c** $\frac{9}{\sqrt{11}}$. **d** $\frac{9}{11}$.

4. On considère la sphère Σ de centre S et de rayon 3 ; son intersection avec le plan $\mathscr{P}$ est égale :

a au point $I(1 ; -5 ; 0)$.

b au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c au cercle de centre S et de rayon $r = 2$.

d au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

VRAI OU FAUX

Reportez-vous aux fiches M et N du bloc méthodologique page 463.

Pour chacune des propositions, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

81 **1.** ABCD est un tétraèdre, I le milieu de [BC], G le barycentre de (A ; 2) (B ; 1) (C ; 1) (D ; −3). Les points I, G, A, D sont coplanaires.

2. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Les plans $\mathscr{P}_1 : x + 2y - z - 1 = 0$ et $\mathscr{P}_2 : 2x - y + z - 4 = 0$ sont sécants suivant la droite d passant par $A(1 ; 2 ; 4)$ et dirigée par $\vec{u}(-1 ; 3 ; 5)$.

b) Les plans $\mathscr{P}_1 : x - 2y + z - 5 = 0$, $\mathscr{P}_2 : 2x + y + 3z - 7 = 0$, $\mathscr{P}_3 : 2y + z = 0$ ont un seul point commun.

c) Le plan $\mathscr{P} : 2x + y - z + 1 = 0$ et la droite d passant par $A(1 ; 1 ; 4)$ et dirigée par $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ n'ont aucun point commun.

16 Travaux dirigés de géométrie

1870

Vers les années 1870, après un enrichissement considérable depuis les *Éléments* d'Euclide, les différentes méthodes de la géométrie sont bien répertoriées, chacune d'elles étant associées à des outils : géométrie des configurations, des vecteurs, des transformations, usage des nombres complexe...

Ainsi un même problème de géométrie peut être résolu de plusieurs façons parfois fort différentes. C'est le cas par exemple de la démonstration de l'existence du cercle d'Euler dit aussi cercle des neuf points. L'existence de ce cercle a été démontrée par Claude Julien Brianchon dans un article de 1808.

Ce cercle est l'image du cercle circonscrit au triangle ABC, de centre O, par l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$, ayant comme centre l'orthocentre H du triangle. Il passe par les trois milieux côtés, par les pieds des hauteurs et par les milieux des segments joignant l'orthocentre aux trois sommets.

À LA MÊME ÉPOQUE

EUROPE

L'Europe acquiert un nouveau visage avec la création de l'Empire austro-hongrois (1867) et de l'Empire allemand (1871) et avec l'unification de la péninsule italienne (1870).

PHILOSOPHIE

Karl Marx consacre sa réflexion économiste à la critique du capitalisme et publie le premier livre du *Capital* (1868). La pensée marxiste servira d'idéologie aux futures politiques communistes.

LITTÉRATURE

L'Idiot de Dostoïevski paraît en 1868. À travers son œuvre, Dostoïevski pose le problème de l'homme déchiré entre la présence du mal et la présence de Dieu.

TRAVAUX DIRIGÉS

Conformément au programme, ce chapitre a pour but d'entraîner l'élève à ***choisir et utiliser*** *l'outil le plus pertinent parmi ceux dont il dispose pour résoudre des problèmes.*

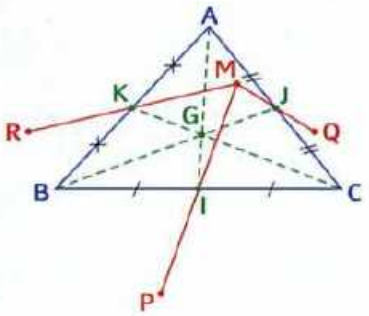
Quel repère choisir ?

Si l'on veut choisir un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan pour démontrer, on peut choisir :

- **un repère non orthonormal** lorsque l'énoncé et la solution ne font pas intervenir des calculs de distances ou d'angles et des questions concernant l'orthogonalité (voir TD 1),
- **un repère orthogonal**. Ce choix est **impératif** lorsque l'on doit traiter des questions de distances, d'angles et d'orthogonalité. (Voir TD 2 et TD 3),
- **un repère orthonormal direct** si on utilise les complexes en géométrie. (Voir TD 2).

TD 1 Concours, milieux, alignements

BAC ABC est un triangle, le point G est son centre de gravité ; I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA], [AB].
M est un point quelconque. Les points P, Q, R sont les symétriques respectifs de M par rapport à I, J, K.
Le point H est le centre de gravité du triangle PQR.
Il s'agit de démontrer que :



Question 1 : les segments [AP], [BQ] et [CR] ont même milieu L (*concours*) ;

Question 2 : L est le milieu du segment [GH] (*milieu*) ;

Question 3 : les points M, G, H sont alignés (*alignement*).

QUELLES MÉTHODES ? QUELS OUTILS ?

- Dans cet exercice, on ne traite pas de questions concernant les distances, les angles ou l'orthogonalité, donc, pour une solution analytique, on pourra choisir un repère non orthogonal de manière que les points « de base » (c'est-à-dire ceux à partir desquels on construit la figure) aient des coordonnées les plus simples possible.
- La présence du centre de gravité, de la symétrie centrale, etc., conduit à écrire des égalités vectorielles, donc à envisager une solution avec l'outil vectoriel et barycentrique.
- Un triangle avec son centre de gravité est aussi une « figure clé » de l'homothétie, donc une solution avec l'outil transformation (homothétie) semble également possible.

1 Avec l'outil vectoriel et barycentrique

Question 1

Prouvez que $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BR}$.
Déduisez-en que les segments [AP], [BQ] et [CR] ont le même milieu L.

Question 2 : avec les vecteurs

a) Justifiez que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{HR} = \vec{0}$.

b) Déduisez-en que $3\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}$ et $3\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{LR}$.
Prouvez alors que L est le milieu de [HG].

Question 3 : avec le barycentre

On va utiliser le théorème d'associativité pour déterminer l'isobarycentre de A, B, C, P, Q, R.

- Pourquoi l'isobarycentre de A, B, C, P, Q, R est-il aussi le barycentre de (G ; 3) et (H ; 3) ?

- Pourquoi l'isobarycentre de A, P, B, Q, C, R est-il aussi le barycentre de (L ; 2), (L ; 2), (L ; 2) ? (C'est donc L.)

Déduisez-en que L est le milieu de [GH].

a) Prouvez que G est le centre de gravité du triangle IJK.

b) Prouvez que $3\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$, puis que $3\overrightarrow{MH} = 6\overrightarrow{MG}$.
Précisez alors la position relative des points M, H, L, G.

2 Avec l'outil des transformations

Lorsqu'on dit que P est le symétrique de M par rapport à I, on peut dire de manière équivalente que P est l'image de I par l'homothétie h de centre M et de rapport 2. On a donc, de même, $h(J) = Q$ et $h(K) = R$.

Question 1

a) Prouvez que $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{IK}$.
Déduisez-en que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BA}$, et donc que les segments [AP] et [BQ] ont même milieu L.

b) Prouvez de même que L est le milieu des segments [BQ] et [CR].

Question 2

a) L'homothétie conserve le barycentre. Pourquoi $h(G) = H$? Déduisez-en que $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) On note h_1 l'homothétie de centre L et de rapport –1.
Précisez $h_1(A)$, $h_1(B)$, $h_1(C)$. Déduisez-en $h_1(G)$. Prouvez que L est le milieu de [HG].

Question 3

Déduisez de la question précédente que les points M, G, H, L sont alignés et précisez leur position relative.

3 Avec l'outil analytique

On va donc choisir un repère de manière que les points de base de la figure aient des coordonnées les plus simples possible. On peut choisir le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, I, J, K, G ?

2. Le point M est quelconque. On note alors $(a ; b)$ ses coordonnées qui sont aussi quelconques.
Déduisez-en fonction de a et b les coordonnées des points P, Q, R, H.

3. Résolvez alors les trois questions du problème.

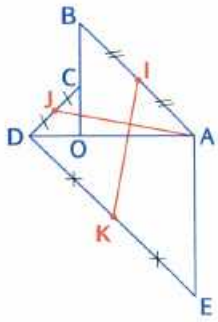
TD 2 Égalité de longueurs. Orthogonalité

BAC On a construit trois triangles rectangles isocèles AOB, COD et DAE comme l'indique la figure ci-contre. On note I, J, K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DE].

L'**objectif** du problème est de démontrer que :

Question 1 : AJ = KI ;

Question 2 : les droites (AJ) et (KI) sont deux droites perpendiculaires.



QUELLES MÉTHODES ? QUELS OUTILS ?

- Les triangles rectangles isocèles en O ou en A sont des figures clés liées aux quarts de tour ayant pour centre O ou A, d'où une solution possible en utilisant les rotations.
- La présence des angles droits laisse penser à l'utilisation d'un repère orthonormal, d'où une solution analytique.
- L'orthogonalité de certains vecteurs, qui mène à des produits scalaires nuls, peut conduire à utiliser le produit scalaire et les relations métriques dans un triangle (théorème d'Al Kashi, théorème de la médiane, etc.).
- Enfin, une solution utilisant les nombres complexes est également envisageable.

1 Avec le produit scalaire et les relations métriques

Question 1

On note $OA = a$ et $OC = c$.

a) Démontrez que le triangle IAK est rectangle. Déduisez-en que $IK^2 = a^2 + ac + \frac{c^2}{2}$.

b) En utilisant le théorème d'Al Kashi dans le triangle ADJ, calculez AJ^2. Concluez.

Question 2

a) Démontrez que $2\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}$ et $2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

b) Démontrez que $4\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{OC}$ et déduisez-en que les droites (IK) et (AJ) sont perpendiculaires.

2 Avec l'outil des transformations

On note r le quart de tour de centre O tel que $r(A) = B$.

1. Démontrez que CA = BD et que les droites (CA) et (BD) sont perpendiculaires.

2. On note Ω le milieu du segment [DA]. Démontrez que ΩI = ΩJ et que les droites (ΩI) et (ΩJ) sont perpendiculaires.

3. On note r_1 le quart de tour de centre Ω tel que $\Omega(I) = J$. Quelle est l'image de K par r_1 ? Déduisez-en que IK = AJ et que les droites (IK) et (AJ) sont perpendiculaires.

3 Avec l'outil analytique

On va choisir un repère orthonormal de manière à rendre les coordonnées des points de base de la figure les plus simples possible. On peut choisir le repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel A et C ont respectivement pour coordonnées $(a ; 0)$ et $(0 ; c)$ avec $a > 0$ et $c > 0$.

1. Déterminez alors les coordonnées de tous les autres points de la figure.

2. Répondez aux questions posées.

4 Avec l'outil complexe

On choisit le repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ du paragraphe précédent, car c'est un repère orthonormal **direct** (les notations sont les mêmes).

1. Déterminez en fonction de a et c les affixes des points A, B, C, D et E.

2. Prouvez que $z_K - z_I = i(z_J - z_A)$.

3. Répondez aux questions posées.

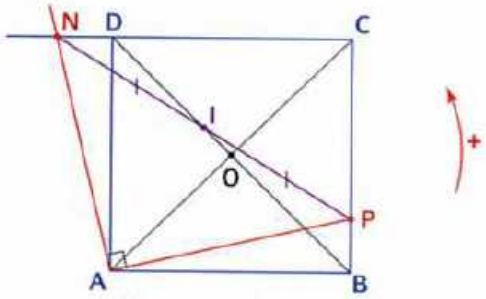
CONCLUSION Quel outil vous paraît le plus efficace ?

TD 3 Lieu géométrique

BAC ABCD est un carré de côté a, de centre O du plan orienté tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

P est un point du segment [BC]. La perpendiculaire en A à la droite (AP) coupe la droite (CD) en N. On note I le milieu de [PN].

Le **but** de ce TD est de trouver le lieu (E) de I lorsque P décrit le segment [BC].



QUELLES MÉTHODES ? QUELS OUTILS ?

- À l'aide d'un logiciel de géométrie, vous pouvez afficher le lieu de I en déplaçant le point P sur le **segment** [BC] afin d'avoir une idée de la réponse.
- Le carré ABCD est une figure clé de la rotation et de la similitude (pour l'enseignement de spécialité). On peut donc utiliser par exemple des quarts de tour de centre l'un des sommets du carré ou le centre O du carré.
- La présence d'angles droits suggère d'utiliser les vecteurs et le produit scalaire.
- Le choix d'un repère orthonormal conduit à une solution analytique.
- Pour la détermination d'un lieu géométrique voir la partie *Types de problèmes et de raisonnements*, fiche I, page 458.

Note
Une solution utilisant la similitude est proposée au § 3.

1 Avec l'outil analytique

On choisit le repère orthonormal $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$ $(a > 0)$.

1. **a)** Quelle est l'abscisse du point P ? On note m son ordonnée, pourquoi m est-il un réel de $[0 ; a]$?

b) Démontrez que les coordonnées de N sont $(-m ; a)$.

c) Déduisez-en les coordonnées x_I et y_I de I en fonction de m.

2. **a)** Démontrez que I est un point d'une droite **fixe** d. Précisez une équation de cette droite.

b) Déduisez-en le lieu (E) du point I.

2 Avec l'outil vectoriel

1. Justifiez l'affirmation suivante :
« Dire que P est un point de [BC] équivaut à dire que $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC}$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. »

2. **a)** Démontrez que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AD}$. Déduisez-en que $\overrightarrow{DN} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

b) Démontrez que $\overrightarrow{IP} = \lambda\overrightarrow{IC} + (1-\lambda)\overrightarrow{IB}$ et que $\overrightarrow{IN} = (1+\lambda)\overrightarrow{ID} - \lambda\overrightarrow{IC}$.
Déduisez-en que $\overrightarrow{OI} = \lambda\overrightarrow{OD}$.

3. Quel est alors le lieu (E) de I lorsque P décrit le segment [BC] ?

3 Avec l'outil des transformations (enseignement de spécialité)

On note r le quart de tour de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. **a)** On considérant le point P comme l'intersection de deux « lignes » (le segment [BC] et la droite (AP)), démontrez que $r(P) = N$.

b) Déduisez-en la nature du triangle PAN.

2. On note s la similitude de centre A telle que $s(B) = O$.

a) Quel est son rapport ? son angle ?

b) Quelle est l'image de P par s ?

3. Déduisez-en le lieu (E) de I lorsque P décrit le segment [BC].

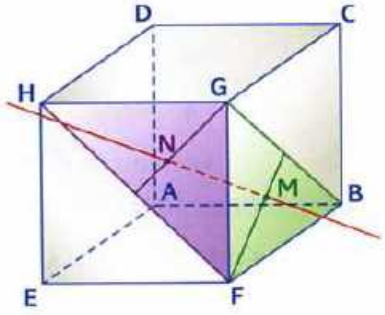
CONCLUSION Quel outil vous paraît le plus efficace ?

TD 4 Espace et orthogonalité

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
M et N sont les centres de gravité respectifs des triangles GFB et GFH.
Le **but** de ce TD est de prouver que la droite (MN) est la perpendiculaire commune aux droites (EG) et (FC).

QUELLES MÉTHODES ? QUELS OUTILS ?

- La présence d'un repère orthonormal permet d'envisager une solution analytique simple.
- L'étude de la configuration avec les théorèmes sur les droites et plans perpendiculaires conduit aussi à une solution.
- Une solution est également possible avec l'outil vectoriel et le produit scalaire dans l'espace.



1 Avec l'outil analytique

Les points M et N jouent ici un rôle particulier. On cherche donc à choisir un repère qui permet d'avoir pour ces points des coordonnées simples. De plus, l'arête du cube mesure 1.
On choisit donc le repère $(G ; \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH})$.

1. Déterminez les coordonnées des points A, B, D, E, puis celles des points M et N.

2. Démontrez alors que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (EG) et (FC).

2 Avec les propriétés de la configuration

On note O le centre du carré EFGH et J le milieu du segment [FB].

1. Démontrez que les droites (MN), (JO) et (BH) sont parallèles.

2. **a)** Démontrez que la droite (EG) est perpendiculaire au plan (BHF) et que la droite (FC) est perpendiculaire au plan (BHG).

b) Déduisez-en que la droite (HB) est perpendiculaire aux droites (EG) et (FC). Concluez.

3 Avec l'outil vectoriel

1. Démontrez que $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH})$.

2. Calculez $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{FC}$. Concluez.

CONCLUSION Quel outil vous paraît le plus efficace ?

EXERCICES

Pour progresser

1 Orthogonalité

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$, I est un point de [AD] et J un point de [AB] tel que AI = BJ.
On note H le point d'intersection des droites (BI) et (DJ).
On se propose de démontrer que H est l'orthocentre du triangle CIJ.

A. Avec les propriétés des configurations

1. **a)** Démontrez que les triangles CDI et DAJ sont isométriques.

b) Déduisez-en que les droites (DJ) et (CI) sont perpendiculaires.

2. Démontrez de même que les droites (CJ) et (BI) sont perpendiculaires. Concluez.

B. Avec les transformations

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. **a)** Démontrez que $r(I) = J$.

b) Déduisez-en que (CI) et (DJ) sont deux droites perpendiculaires.

2. Terminez la démonstration.

C. Avec l'outil vectoriel

1. **a)** Démontrez que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA}$.

b) Déduisez-en que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

2. Calculez de même $\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{BI}$ et concluez.

D. Avec l'outil analytique

On choisit le repère orthonormal $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $a > 0$, $\overrightarrow{AB} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = a\vec{v}$ et on note $(0 ; m)$ avec $0 \leqslant m \leqslant a$ les coordonnées du point I.

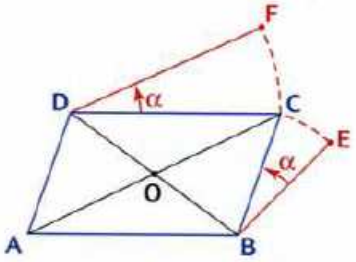
1. **a)** Calculez les coordonnées du point J.

b) Démontrez que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

2. Terminez la démonstration.

2 Égalité de longueurs

Dans le plan orienté, ABCD est un parallélogramme de centre O.



DCF et BEC sont des triangles isocèles de sommets respectifs D et B.

En outre, $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DF}) = \alpha$. Il s'agit de démontrer que le triangle EAF est isocèle de sommet A.

A. Avec les propriétés de la configuration

En utilisant le théorème d'Al Kashi dans les triangles ADF et ABE, démontrez que $AF^2 = AE^2$ donc AF = AE.

B. Avec les complexes

On suppose choisi un repère orthonormal direct d'origine A et on note b et d les affixes respectives des points B et D.

1. Déterminez en fonction de b, d et α les affixes des points C, E, F.

2. Déduisez-en que le triangle EAF est isocèle de sommet A.

C. Avec les transformations

On note G l'image de E par la symétrie s de centre O et r la rotation de centre D et d'angle α.

1. Précisez $s(C)$ et $s(B)$ puis prouvez que GC = AE.

2. **a)** Déduisez-en que $r(G) = A$.

b) Quelle est l'image de [GC] par r ? Concluez.

3 BAC

Dans le plan orienté, ABC est un triangle direct (c'est-à-dire que l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ admet une mesure comprise entre 0 et π).

ACDE est le carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2}$ et AFGB le carré de centre O′ tel que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$.

I est le milieu de [BC] et J celui de [EF]. Il s'agit de démontrer que le quadrilatère IOJO′ est un carré.

A. Avec les transformations

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrez que FC = BE et que les droites (FC) et (BE) sont perpendiculaires.

2. Déduisez-en que IOJO′ est un carré.

B. Avec les complexes

On suppose choisi un repère orthonormal direct d'origine A et on note b et c les affixes de B et C.

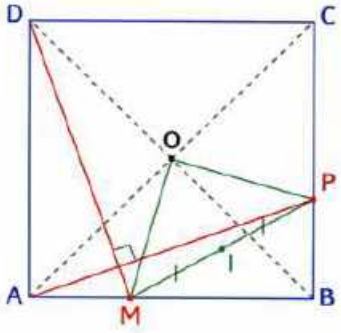
1. Déterminez les affixes des points F, E, O, O′, J, I.

2. Terminez la démonstration.

4 Égalité de longueurs, orthogonalité, lieu

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de coté a, et de centre O.

M est un point du segment [AB]. La perpendiculaire mené par A à la droite (DM) coupe (BC) en P.
Le but de l'exercice est de trouver le lieu (E) du point I, milieu du segment [MP], lorsque M décrit le segment [AB].



A. Avec l'outil analytique

On choisit le repère orthonormal $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$ $(a > 0)$.
M a pour coordonnées $(m ; 0)$ avec $0 \leqslant m \leqslant a$.

1. **a)** Calculez les coordonnées de P en fonction de m (Voir TD3 page 435).

b) Déduisez-en les coordonnées x_I et y_I de I en fonction de m.

2. **a)** Démontrez que I est un point d'une droite fixe d dont on précisera une équation.

b) Déduisez-en le lieu (E) de I lorsque M décrit le segment [AB].

B. Avec l'outil des transformations (enseignement de spécialité)

1. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Quelle est l'image de la droite (DM) par r ?

b) Déduisez-en que $r(M) = P$ et la nature du triangle MOP.

2. On note s la similitude de centre O telle que $s(M) = I$.

a) Quelle est son rapport ? son angle ?

b) Déduisez-en le lieu de I lorsque M décrit le segment [AB].

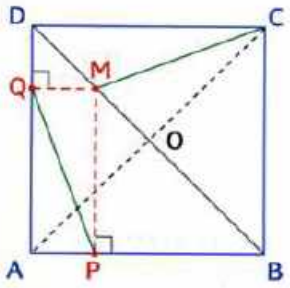
Pour les exercices 5 à 9, il est demandé de proposer plusieurs solutions.

5 • ABC est un triangle, D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et A' le symétrique de A par rapport à B. Les droites (A'D) et (BC) se coupent en O.
Démontrez que O est le milieu de [BC].

6 • ABC est un triangle rectangle en A, M est le milieu de [BC] ; [AH] est la hauteur issue de A. H se projette orthogonalement en K sur [AB] et en L sur [AC].
Démontrez que les droites (AM) et (KL) sont perpendiculaires.

7 • ABCD est un carré de côté a, M est un point du segment [CD]. N est le point de la droite (BC) situé à l'extérieur du segment [BC] tel que CN = CM.
Démontrez que la perpendiculaire à la droite (AN) menée par M passe par un point indépendant de la position de M sur le segment [CD].

8 • ABCD est un carré de centre O.
M est un point du segment [BD], P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AD).
Démontrez que (CM) et (PQ) sont deux droites perpendiculaires et que la médiatrice du segment [PQ] passe par un point fixe lorsque M décrit [BD].

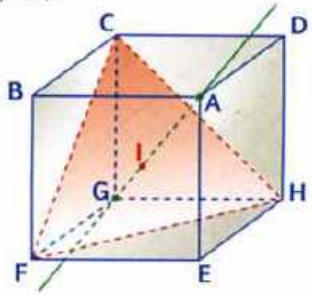


9 • ABCD est un quadrilatère. On note E et F les points tels que $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CD}$. K est le milieu de [AC] et I celui de [BD]. J est le point d'intersection des droites (AD) et (IE).
Démontrez que les points K, J, F sont alignés.

10 • BAC ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est le centre de gravité du triangle CFH.
On se propose de démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et coupe ce plan en I.

1. Donnez une solution en utilisant les propriétés de la configuration.

2. Donnez une solution en utilisant le repère orthonormal $(F ; \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FB})$.



PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

1 • BAC

Thèmes : *Fonctions irrationnelles. Suites et intégrales*

f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f_1(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad f_2(x) = 1 + \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

A. Étude des fonctions f_1 et f_2

1. a) Trouvez les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Étudiez les variations de f_1 et dressez le tableau de variations.
c) T_0 est la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse $x = 0$. Étudiez la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à T_0.
d) Construisez T_0 puis $\mathscr{C}_1$.

2. a) Démontrez que la fonction f_2 est paire.
b) Démontrez que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$.
c) Étudiez les variations de f_2 sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ puis tracez $\mathscr{C}_2$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$. Précisez la position relative de ces deux courbes.

B. Étude d'une suite

(u_n) est la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f_1(u_n)$.

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$ ou si $u_0 = 1$?

2. Dans cette question, on suppose $u_0 > 1$.
a) Démontrez que, pour tout entier n, $u_n > 1$.
b) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.
c) Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite.

3. Dans cette question, on suppose $0 < u_0 < 1$.
a) Démontrez que $0 < u_n < 1$ et que la suite (u_n) est croissante.
b) Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite.

C. Un calcul d'aire

On se propose de calculer, en cm², l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On note $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$;

$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. a) Démontrez à l'aide d'une intégration par parties que $I = \sqrt{2} - J$.
b) Vérifiez que $I = J + K$ et déduisez-en J en fonction de K.

2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Calculez $g'(x)$ et déduisez-en K puis J.

3. Calculez $\mathscr{A}$ en cm².

2 •

Thèmes : *Fonctions irrationnelles. Équation de cercle. Lieu géométrique*

A. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $[-1 ; 1[$ par $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1. a) f est-elle dérivable en $x = -1$?
b) Calculez $f'(x)$ pour tout x de $[-1 ; 1[$. Étudiez les variations de f et dressez le tableau de variations.

2. a) Tracez la courbe $\mathscr{C}$ puis la courbe $\mathscr{C}'$, image de $\mathscr{C}$ par la réflexion ayant pour axe l'axe des abscisses.
b) On note $\Gamma = \mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$. Démontrez que Γ a pour équation cartésienne :

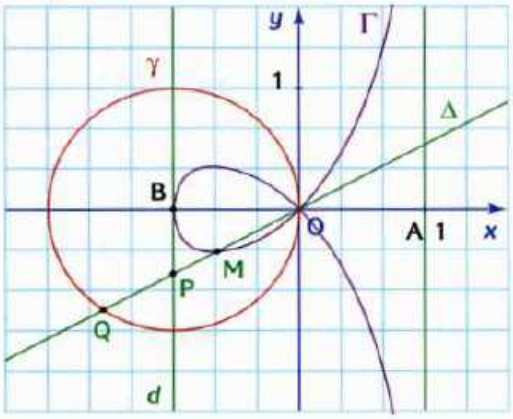
$$y^2(1-x) - x^2(1+x) = 0.$$

B. Une construction de Γ point par point

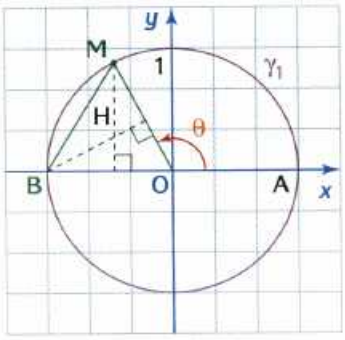
Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé le cercle γ de centre B(−1 ; 0) et de rayon 1 ainsi que la droite d d'équation $x = -1$. On note Δ une droite quelconque passant par O et de coefficient directeur t.
La droite Δ recoupe le cercle γ en Q, la courbe Γ en M et coupe la droite d en P.

1. a) Calculez, en fonction de t, les coordonnées de Q, M, P.
b) Vérifiez que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$.

2. Déduisez de la question précédente une construction point par point de la courbe Γ.



C. Un lieu géométrique



On suppose le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal et direct.
γ_1 est le cercle de centre O et de rayon 1.
Les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(1 ; 0)$ et $(-1 ; 0)$. À tout point M de γ_1 distinct de A et B, on associe le point H orthocentre du triangle OMB.
Le but de cette partie est de trouver le lieu de H lorsque M décrit le cercle γ_1.
(À l'aide Cabri-géomètre, par exemple, vous pouvez tracer la figure et afficher le lieu de H lorsque M décrit γ_1).
On pose $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ avec $\theta \in]0 ; 2\pi[$ privé de π.

1. Démontrez que le point H a pour coordonnées :

$$x = \cos\theta \quad \text{et} \quad y = -\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

2. Vérifiez que H est un point de Γ.

3. Réciproquement, tout point de Γ est-il l'orthocentre d'un triangle OMB ?

Commentaire. **La courbe Γ est appelée *strophoïde droite*. La plus ancienne mention connue de cette courbe se trouve dans une lettre adressée à Torricelli en 1645.**
Il semble que Roberval fut le premier géomètre à étudier cette courbe.

3

Thèmes : *Famille de fonctions. Trigonométrie. Calcul intégral*

n est un entier naturel, f_n est la fonction définie sur $I =]-\infty ; 1]$ par $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_0(x) = \sqrt{1-x}$.

A. Étude de la fonction f_n

1. La fonction f_n est-elle dérivable en $x = 1$?

2. **a)** Donnez le tableau de variations de f_n pour $n \geqslant 1$ en distinguant les deux cas n pair et n impair.
b) Déterminez l'unique élément α_n de l'intervalle $]0 ; 1[$ tel que, pour $n \geqslant 1$,

$$f_n'(\alpha_n) = 0.$$

3. Tracez dans un même repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives des fonctions f_1 et f_2.

B. Résolution d'une équation

1. Étudiez suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation : $f_1(x) = k$.

2. Démontrez que l'équation $|x\sqrt{1-x}| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2, x_3 vérifiant $-\dfrac{1}{3} < x_1 < 0$; $0 < x_2 < \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{2}{3} < x_3 < 1$.

3. Pour $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$, on pose $u_i = \dfrac{3}{2}\left(x_i - \dfrac{1}{3}\right)$.
Démontrez qu'il existe un unique θ_i de $[0 ; \pi]$ tel que $u_i = \cos\theta_i$.

4. **a)** Démontrez que θ_1, θ_2, θ_3 sont solutions de l'équation :

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad \theta \in [0 ; \pi].$$

b) Donnez une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1, x_2 et x_3.

C. Calcul d'une intégrale

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$.

1. Démontrez que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0.

2. **a)** Établissez que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n \leqslant f_n(\alpha_n)$.
b) Déduisez-en la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

3. **a)** Calculez I_0.
b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$, $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$.
c) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}.$$

4

Thèmes : *Fonctions trigonométriques. Suites adjacentes. Intégrales*

A. Étude de fonctions

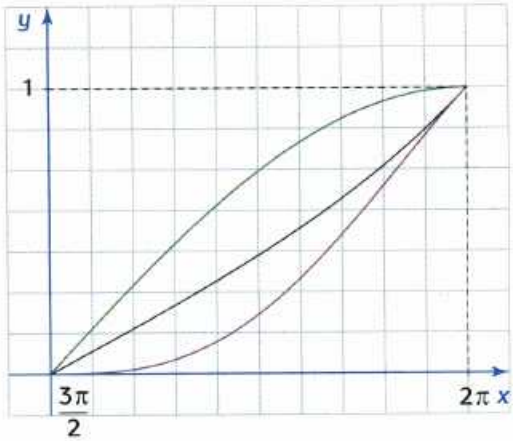
On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ représentatives des fonctions S, S_0 et S_1 définies sur l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ respectivement par :

$$S(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x} ; \quad S_0(x) = \cos x ; \quad S_1(x) = \cos x(1+\sin x).$$

1. Attribuez à chacune des fonctions sa courbe.

2. Démontrez que pour tout réel x de l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$,

$$S_1(x) \leqslant S(x) \leqslant S_0(x).$$



B. Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction S_n définie sur $[0 ; 2\pi]$, par :

$$S_n(x) = \cos x[1 + \sin x + \cdots + \sin^n x]$$

et on pose $I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)\,dx$.

1. a) Calculez I_0, I_1 puis $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x)\,dx$.

b) Vérifiez que $I_1 \leqslant I \leqslant I_0$. Comment pouvez-vous « illustrer » graphiquement ces inégalités ?

2. a) Démontrez que : $I_{n+1} - I_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

b) Déduisez-en par récurrence que :

$$I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

3. On définit les suites (A_n) et (B_n) pour tout entier naturel n par :

$$A_n = I_{2n} \text{ et } B_n = I_{2n+1}.$$

a) Démontrez que la suite (A_n) est décroissante et que la suite (B_n) est croissante.

b) Démontrez que la suite de terme général $(A_n - B_n)$ converge vers zéro.

Que peut-on alors en déduire pour les suites (A_n) et (B_n) ?

4. Le but de cette question est de trouver la limite commune des suites (A_n) et (B_n).

a) Démontrez, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$, que :

$$S(x) - S_n(x) = (\sin x)^{n+1} S(x),$$

puis que : $S_{2n+1}(x) \leqslant S(x) \leqslant S_{2n}(x)$.

b) Déduisez-en que :

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} B_n = \ln 2.$$

5 • *Thème : Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires*

L'énoncé de ce théorème se trouve chapitre 2 page 34.

Les notations sont conservées et la démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape, on se place dans le cas particulier où zéro se trouve entre $f(a)$ et $f(b)$ et on démontre qu'il existe un nombre c de l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(c) = 0$. Dans la deuxième étape, on prouve que le cas général se ramène à ce cas particulier.

A. Première étape

On suppose $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. (Remarquer que si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ le résultat est acquis avec $a = 0$ ou $b = 0$). On construit par dichotomie deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante (voir aussi le TD3 pages 41 et 42).

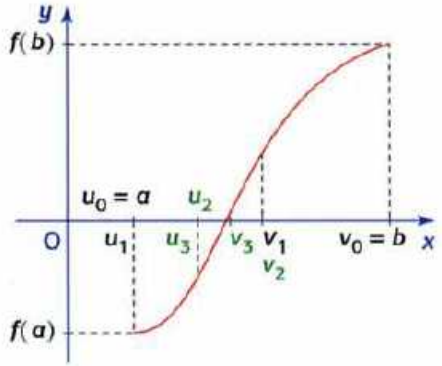
On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \geqslant 0$:

- si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \geqslant 0$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$;
- si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \leqslant 0$, on pose $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.

1. Prouvez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Notez c leur limite commune.

2. a) Prouvez que la suite $f(u_n)$ converge vers $f(c)$, puis déduisez-en que $f(c) \leqslant 0$.

b) Prouvez que la suite $f(v_n)$ converge vers $f(c)$ et que $f(c) \geqslant 0$. Concluez que $f(c) = 0$ avec c dans $[a ; b]$.



B. Deuxième étape

1. On suppose que $f(a) < f(b)$, y est un réel tel que $f(a) < y < f(b)$. On note g la fonction définie sur $[a ; b]$ par $g(x) = f(x) - y$.

Justifiez la continuité de g et, en utilisant les résultats de la partie **A**, justifiez l'existence d'un nombre c de $[a ; b]$ tel que $f(c) = y$.

2. On suppose $f(a) > f(b)$. En utilisant la fonction $(-f)$, démontrez dans ce cas le théorème.

6 • *Thèmes : Fonction logarithme. Dérivabilité en un point. Calcul intégral*

k est un réel et f_k est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$f_k(0) = 0$ et, pour tout réel x de $]0 ; 1]$,

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm). Les points I, J, L ont pour coordonnées respectives $(1 ; 0)$, $(0 ; 1)$ et $(1 ; 1)$.

A. Étude des fonctions f_k

I. Dans cette question, $k = 0$.

1. a) Étudiez les variations de f_0 sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

b) La fonction f_0 est-elle dérivable en $x = 0$?

Déduisez-en la tangente à $\mathscr{C}_0$ au point d'abscisse $x = 0$.

2. a) Dressez le tableau de variations.

b) Construisez la courbe $\mathscr{C}_0$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

II. 1. a) Calculez pour tout x de $]0 ; 1]$, $f_k'(x)$.

b) On note A_k le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse 1. Démontrez que la tangente en A_k à $\mathscr{C}_k$ est la droite (OA_k).

2. La fonction f_k est-elle dérivable en $x = 0$?

Déduisez-en la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse $x = 0$.

3. a) Déterminez la position relative des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

b) Dressez le tableau de variations de f_1 puis tracez $\mathscr{C}_1$ sur la même figure que $\mathscr{C}_0$. (On tracera la tangente à $\mathscr{C}_1$ en A_1).

4. a) Prouvez que, pour tout x de $[0\,;1]$,

$$f_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{2}(f_0(x)+f_1(x)).$$

b) Déduisez-en une construction de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ à partir de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. Construisez $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ sur la même figure que $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

B. Partage du carré OILJ en quatre parties de même aire

α est un réel de l'intervalle $]0\,;1]$.

On pose $I(\alpha)=\int_\alpha^1 x(\ln x)^2\,dx$.

1. a) En effectuant deux intégrations par parties, démontrez que :

$$I(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2+\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)+\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2}{4}.$$

b) Déduisez-en $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.

2. On pose $S_k(\alpha)=\int_\alpha^1 f_k(x)\,dx$.

a) Calculez $S_k(\alpha)$ en fonction de α puis $\lim\limits_{\alpha\to 0} S_k(\alpha)$.

On admettra que cette limite représente l'aire (en unités d'aire) du domaine plan limité par $\mathscr{C}_k$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=1$.

b) Déduisez-en que les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ partagent le carré OILJ en quatre parties de même aire.

7 • *Thèmes : Fonctions logarithme et exponentielle. Fonction définie par une intégrale et suite*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

A. Étude d'une fonction f

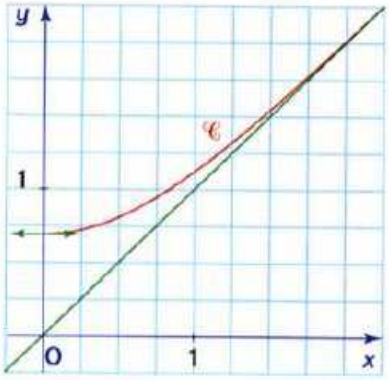
f est la fonction définie sur l'intervalle $I=[0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\ln(e^x+e^{-x}).$$

1. Vérifiez que pour tout x de I, $f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$.

2. On a tracé sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f. Justifiez chacune des affirmations suivantes :

- La droite d d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
- La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de d pour tout x de I.
- La dérivée de f s'annule pour $x=0$.



B. Fonction définie par une intégrale

Pour tout x de I, on pose $F(x)=\int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$.

(On ne cherchera pas à calculer $F(x)$).

1. Donnez une interprétation géométrique de F à partir de la courbe $\mathscr{C}$.

2. Étudiez le sens de variations de F sur I.

3. a) Démontrez que, pour tout x de I,

$$\frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x.$$

Aide. **On pourra étudier les variations de deux fonctions bien choisies.**

b) Déduisez-en que $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt\leqslant F(x)\leqslant \int_0^x e^{-2t}dt$

puis que $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x})\leqslant F(x)\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}$.

4. On admet que la limite de $F(x)$, quand x tend vers $+\infty$, existe. On note ℓ cette limite.

Démontrez que $\frac{1}{2}\ln 2\leqslant \ell\leqslant \frac{1}{2}$.

5. On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\int_n^{n+1}\ln(1+e^{-2t})\,dt.$$

a) Étudiez le sens de variation de la fonction h définie sur I par $h(x)=\ln(1+e^{-2x})$.

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n,

$$0\leqslant u_n\leqslant \ln(1+e^{-2n}).$$

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

6. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n.$$

a) Démontrez que $S_n=F(n+1)$.

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, quelle est sa limite ?

8 • *Thèmes : Équation différentielle. Famille de fonctions*

On considère l'équation différentielle (E) : $y-y'=\frac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;+\infty[$.

1. a) Démontrez que la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x)=\frac{e^x}{x}$ est solution de (E).

b) Démontrez qu'une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $h=f-u$, définie sur $]0\,;+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y-y'=0$.

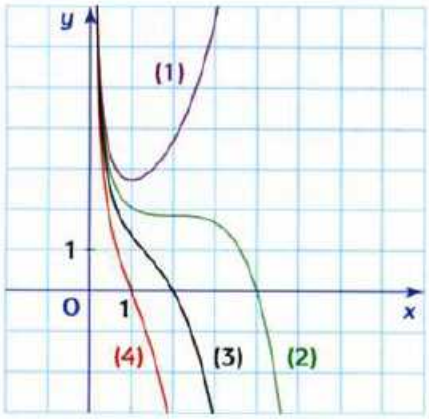
c) Déduisez-en toutes les solutions définies sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k de $]-\infty\,;0]$, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_k(x)=\frac{kx+1}{x}e^x$.

a) Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, calculez $f_k'(x)$ et déduisez-en le nombre de solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $f_k'(x)=0$.

b) Déterminez les limites de f_k aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



On a tracé sur le graphique ci-dessus les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,5}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$ et $\mathscr{C}_0$. En utilisant la question **2.**, reconnaissez chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose :

$$A(a) = \int_a^{a+1} f_0(t)\,dt.$$

a) Interprétez graphiquement $A(a)$.
b) On désigne par F une primitive de f_0 sur $]0 ; +\infty[$.
En remarquant que $A(a) = F(a+1) - F(a)$, étudiez le sens de variation de la fonction A qui, à tout réel a de $]0 ; +\infty[$, associe le réel $A(a)$.
c) On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre $\mathscr{C}_0$ et l'axe des abscisses soit minimale. Comment doit-on procéder ?

9 • *Thèmes : Étude d'une famille de fonctions. Suites et intégrales*

A. Étude d'une famille de fonctions

À tout réel m strictement positif, on associe la fonction f_m définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f_m(x) = m^2x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.
On note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

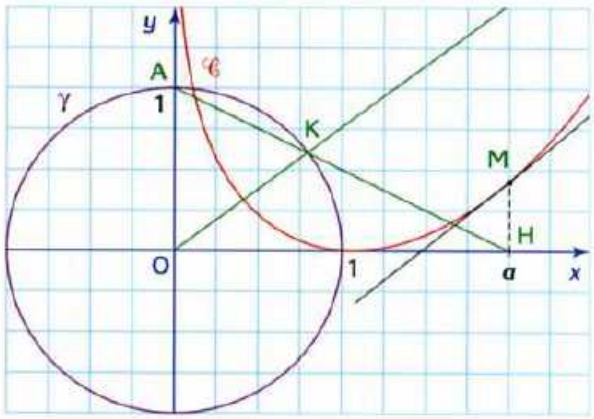
1. a) Précisez les limites de f_m aux bornes de I.
b) Étudiez les variations de f_m et dressez son tableau de variations.
Discutez suivant les valeurs de m le nombre de solutions dans I de l'équation $f_m(x) = 0$.

2. On note S_m le point de $\mathscr{C}_m$ correspondant au minimum de f_m.
Quel est l'ensemble Γ des points S_m lorsque m décrit I ?

3. a) Précisez les positions relatives de Γ et $\mathscr{C}_m$.
b) Construisez sur une même figure Γ puis $\mathscr{C}_{\frac{1}{4}}$ et $\mathscr{C}_1$.

B. Étude de la fonction f_m pour $m = \frac{1}{2}$

On note f la fonction f_m lorsque $m = \frac{1}{2}$. On a tracé sur la figure ci-après la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, ainsi que le cercle γ de centre O et de rayon 1.
Le point A a pour coordonnées $(0 ; 1)$.
M est un point quelconque de $\mathscr{C}$ d'abscisse a $(a > 0)$ et H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
La droite (AH) recoupe γ en K.



1. a) Calculez les coordonnées de K en fonction de a.
b) Démontrez que la tangente en M à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite (OK) et déduisez-en un procédé de construction de la tangente en un point M quelconque de $\mathscr{C}$.

2. n est un entier naturel $n \geqslant 2$. On découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de même amplitude et on note $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$. On se propose dans cette question de trouver la limite de la suite (S_n).
a) Démontrez que pour tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$:

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{p}{n}\right).$$

b) Déduisez-en que :

$$S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant S_n.$$

c) Calculez $I\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$ puis déduisez-en la limite de la suite (S_n).

10 • *Thèmes : Fonction exponentielle. Suites et intégrales*

A. Étude d'une fonction

1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.
a) Étudiez les variations de g et dressez son tableau de variations.
b) Déduisez-en que l'expression $\frac{e^x}{e^x - x}$ est définie pour tout réel x.

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
a) Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$?
b) Étudiez les variations de f puis tracez la courbe $\mathscr{C}$.

B. Étude d'une suite

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \int_0^n f(t)\,dt$.
a) Donnez de u_n une interprétation géométrique.

b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

c) Démontrez que $u_n = n + \int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx$.

d) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Dans cette question, on définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n - n.$$

a) Démontrez que la suite (v_n) est croissante.

b) Démontrez que pour tout x positif non nul $e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$ et déduisez-en que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, calculez $\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$ en fonction de n.

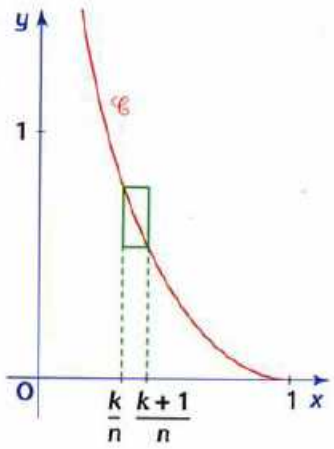
d) Déduisez-en que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 2$. La suite (v_n) est-elle convergente ?

11 • *Thème : Intégrales et suites*

A. Étude d'une fonction

On a tracé ci-contre dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}.$$



1. Justifiez que f est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$.

2. λ est un réel strictement positif.

On pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(t)\,dt$.

a) Calculez $I(\lambda)$ en fonction de λ.

☞ **Aide.** **Pensez à une intégration par parties.**

b) Quelle est la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers zéro ?

B. Suites et intégrales

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On découpe l'intervalle $]0 ; 1]$ en n intervalles d'amplitude $\frac{1}{n}$.

1. a) k est un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Démontrez en utilisant les résultats de la partie A que :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b) Déduisez-en que :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \quad (1).$$

c) En utilisant la courbe $\mathscr{C}$, quelle interprétation pouvez-vous donner de cet encadrement ?

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right].$$

a) Déduisez-en de (1) que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Démontrez alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

3. Dans cette question, on se propose d'utiliser les résultats précédents pour déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

a) Démontrez par récurrence que $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

b) Justifiez pour tout entier $n \geqslant 1$ que :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

c) Déduisez-en que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$S_n = \frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}.$$

d) Trouvez alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ puis déduisez-en celle de (u_n).

12 • *Thèmes : Famille de fonctions. Étude d'une suite définie par une intégrale*

À tout entier naturel $n \geqslant 1$, on associe la fonction f_n définie sur $I = [1 ; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

A. Étude de f_1

1. a) Étudiez les variations de f_1.

b) Tracez la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 1 puis tracez $\mathscr{C}_1$.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, calculez pour λ élément de I,

$$I_1(\lambda) = \int_1^\lambda f_1(t)\,dt.$$

b) Déduisez-en $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I_1(\lambda)$.

B. Comportement des fonctions f_n, pour $n \geqslant 1$

1. a) Étudiez les variations de f_n sur I et dressez le tableau de variations.

b) Vérifiez que la valeur maximale de f_n sur I est :

$$y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

2. On se propose d'étudier la suite (y_n) pour $n \geqslant 1$.

a) Calculez, pour $x > 1$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b) Démontrez que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} y_n$.

c) Déduisez-en que $y_n \leqslant \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{2^n}$. Quelle est la limite de la suite (y_n) ?

C. Étude de primitives de f_n sur I

À tout entier $n \geqslant 1$ et à tout réel x de I, on associe l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$.

1. a) k est un entier tel que $k \geqslant 1$. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x}.$$

b) Déduisez-en que :

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \dots - \frac{(\ln x)^n}{n!x}.$$

2. α est un réel fixé tel que $\alpha \geqslant 1$.

a) Démontrez que $0 \leqslant I_n(\alpha) \leqslant (\alpha - 1) y_n$.

b) Déduisez-en $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\alpha)$.

3. Pour $x \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}.$$

a) Exprimez $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

b) $\alpha \geqslant 1$ est un réel fixé, déterminez $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n(\alpha)$.

c) Déduisez-en la limite γ de la suite (u_n), $n \geqslant 1$, de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

13 • *Thèmes : Étude de fonctions. Suites. Fonction définie par une intégrale*

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par :

$f_0(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^2}$.

On note Γ_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

A. Étude des fonctions f_1 et f_3

1. a) Démontrez que la droite d d'équation $y = x$ est asymptote à Γ_3.

b) Étudiez les positions relatives de Γ_1 et Γ_3.

2. a) Étudiez les variations de f_1 et f_3 et dressez les tableaux de variations.

b) Construisez dans un même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d, Γ_1 et Γ_3.

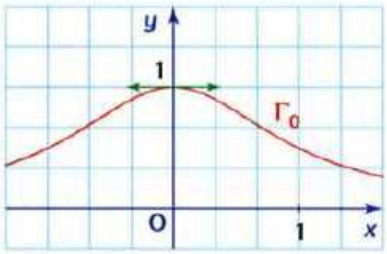
3. a) Calculez I_1, puis $I_1 + I_3$, déduisez-en I_3.

b) Quelle est en cm², l'aire du domaine limité par Γ_1, Γ_2 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$?

B. Étude d'une suite

On a tracé ci-dessus la courbe Γ_0. On note (a_n) la suite définie pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, par :

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$



1. a) Comment peut-on interpréter graphiquement a_n ?

b) Démontrez que la suite (a_n) est croissante.

2. a) Démontrez que $a_1 \leqslant 1$.

b) Démontrez que, pour tout réel t de $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

Déduisez-en que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\int_1^n \dfrac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

3. Déduisez des questions précédentes que $a_n \leqslant 2$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de la suite (a_n) ?

C. Étude d'une fonction définie par une intégrale

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f_0(t)\,dt$.

On note I l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Démontrez que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et précisez, pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x)$.

2. Pour tout réel a de I, on pose $H(x) = F(\tan x)$.

a) Calculez $H(0)$.

b) Démontrez que H est dérivable sur I et calculez, pour tout x de I, $H'(x)$.

c) Déduisez que pour tout x de I, $H(x) = x$ et démontrez que $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, on pose :

$$k(x) = F\left(\frac{1}{1+x}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right).$$

a) Démontrez que k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculez $k'(x)$.

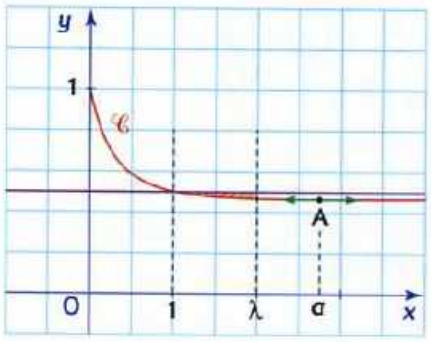
b) Déduisez-en la valeur de $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

14 • *Thèmes : Fonction. Calcul d'aire. Probabilités et nombres complexes*

A. Étude d'une fonction et calcul d'aire

f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x + 1}$ et on a tracé sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère

orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).



1. a) Pourquoi la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est-elle asymptote à $\mathscr{C}$?

b) Le point A d'abscisse a est tel que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Calculez les coordonnées exactes du point A.

2. a) Déterminez les réels m et p tels que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{m}{x+1} + \frac{p}{2x+1}.$$

b) On note $\mathscr{D}_\lambda$ la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $y = \frac{1}{2}$; $x = 1$ et $x = \lambda$ avec $\lambda > 1$.

Calculez en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de $\mathscr{D}_\lambda$.

Déduisez-en $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

B. Exploitation de la courbe $\mathscr{C}$ avec des probabilités

n est un entier naturel tel que $n \geqslant 1$. Une urne contient n boules blanches et $(n+2)$ boules noires. On tire simultanément de l'urne deux boules et tous les tirages sont équiprobables. On note p_n la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

1. a) Démontrez que $p_n = f(n)$.

b) Déduisez-en que pour tout $n \geqslant 2$, $p_n < \frac{1}{2}$.

2. a) Est-il vrai que lorsque l'urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires la probabilité p_n est minimale ?

b) Comment faut-il choisir $n \geqslant 2$ pour que $p_n > 0{,}48$?

C. Une transformation en complexes

$(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. À tout point M d'affixe z avec $z \neq -\frac{1}{2}$ et $z \neq -1$, on associe le point M d'affixe $Z = f(z)$. On note I le point d'affixe 1 et T la transformation qui à m associe M.

1. Démontrez que les points qui ont pour images respectives Ω et I par T sont quatre points d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2. Quel est l'ensemble des points m pour lesquels Z affixe de M est un réel ? Représentez cet ensemble.

3. Dans cette question, m décrit le segment $[\Omega I]$. À l'aide des résultats de la partie A, tracez l'ensemble des points M.

15 • *Thèmes : Étude d'une fonction et calcul d'aire. Complexes et constructions géométriques*

A. Étude d'une fonction et calcul d'aire

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1. Étudiez les variations de f et construisez $\mathscr{C}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2. a est un réel donné strictement positif. On note $\mathscr{A}(a)$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = a + 1$.

a) Calculez $\mathscr{A}(a)$ en fonction de a.

b) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle $\mathscr{A}(a)$ est maximale ?

B. Étude d'une transformation complexe

$(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. On note T la transformation qui, à tout point m d'affixe z, associe $M = T(m)$, d'affixe Z telle que :

$$Z = \frac{2z}{1 + z\bar{z}}.$$

1. Quel est l'ensemble des points m invariants par T ?

2. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$.

a) Exprimez X et Y en fonction de x et y.

b) Quel est l'ensemble des points m lorsque M décrit la droite d'équation $X = \frac{1}{3}$?

3. Dans cette question, l'affixe de m distinct de Ω, a pour module r et pour argument θ.

a) Calculez le module ρ et l'argument α de Z en fonction de r et de θ.

b) Déduisez-en que les points Ω, m, M sont alignés.

c) En utilisant les résultats de la partie A, démontrez que M est un point du disque de centre Ω et de rayon 1.

C. Construction de M connaissant m et réciproquement

1. m est un point donné quelconque du plan.

Exploitez la courbe $\mathscr{C}$ pour construire le point M associé à m.

2. Réciproquement, on se propose de construire m connaissant M.

Reproduisez la courbe $\mathscr{C}$ de la partie A et placez sur la figure M_0 d'affixe $\frac{1}{2}(-1 + i)$.

Puis :

- Tracez le cercle de centre Ω et de rayon ΩM_0 qui coupe l'axe des ordonnées en I d'ordonnée positive.
- Tracez par I la parallèle à l'axe des abscisses qui coupe $\mathscr{C}$ en N_1 et N_2. Projetez N_1 et N_2 en H_1 et H_2 sur l'axe des abscisses.
- Tracez les cercles de centre Ω et de rayons respectifs ΩH_1 et ΩH_2 qui coupent la demi-droite $]\Omega M_0)$ en m_1 et m_2.

a) Démontrez que $T(m_1) = T(m_2) = M_0$.

b) Calculez le module et l'argument des affixes respectives de m_1 et m_2.

Le vocabulaire de la logique

Ces pages sont conçues pour qu'on puisse s'y reporter tout au long de l'année, en cas de besoin. Les exemples traités ne font appel qu'à des notions des programmes antérieurs.

Vous trouverez, page 453, la partie ***Types de problèmes et raisonnements***.

FICHE A

L'implication

1. Un exemple

Note
Voir la fiche F « *Démontrer une implication* », page 453.

Examinons l'énoncé suivant :
« Si ABC est un triangle isocèle en A, alors les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux. »
Il affirme ceci : s'il est vrai que ABC est isocèle en A, alors il est vrai que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égaux.
Autrement dit lorsque la **proposition** (P) « ABC est un triangle isocèle » est vraie, alors la **proposition** (Q) « Les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux » est vraie aussi. On dit que (**P**) **implique** (**Q**).

2. Cas général

Note
À notre niveau, une proposition est une phrase. La définition des logiciens est plus complexe. Une proposition est vraie ou bien fausse.

■ Plus généralement, nous dirons que la proposition (P) implique la proposition (Q), pour signifier que lorsque (P) est vraie, alors (Q) est vraie, ou encore que (Q) est une conséquence de (P).

■ **Notation.** Pour signifier que « (P) implique (Q) », les logiciens écrivent (P) $\Rightarrow$ (Q). L'implication peut se traduire par diverses formulations :

- **Si** (P) **alors** (Q).
- (P) **donc** (Q).

Note
Dans un théorème énoncé sous la forme : « Si (P) ... alors (Q) » on dit que (P) est l'hypothèse et (Q) la conclusion.

Exemple
Si « $x = 2$ », **alors** « $x^2 = 4$ ».
« $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ » **donc** « ABCD est un parallélogramme ».

3. Des implications cachées

Parfois l'implication est implicite dans un énoncé de théorème et ne se remarque pas par l'utilisation du « Si..., alors... ». Ainsi, on énonce parfois :

« Deux réels a et b qui ont même valeur absolue sont égaux ou opposés »,

plutôt que

« **Si** deux réels a et b ont même valeur absolue, **alors** ils sont égaux ou opposés ».

4. Implications réciproques

■ **Explications sur un exemple.** Supposons qu'une proposition (P) implique une proposition (Q), par exemple, si « l'entier n est divisible par 6 », alors « l'entier n est divisible par 3 ». Nous pouvons toujours nous poser le problème de savoir si la réciproque est vraie, c'est-à-dire de savoir si (Q) implique (P).

Dans cet exemple, la réciproque s'énonce ainsi : « Si un entier n est divisible par 3, alors il est divisible par 6 ». Il est facile de voir que cette réciproque est fausse car, par exemple, 15 est divisible par 3 et non divisible par 6.
L'implication « (Q) **implique** (P) » est appelée **implication réciproque** de l'implication « (P) **implique** (Q) ».
Comme nous venons de le voir, la réciproque peut être fausse.

■ **Autre exemple.** La proposition (P) « ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » implique la proposition (Q) « Le triangle ABC est rectangle en A ».
L'implication réciproque s'énonce : « Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».
Dans ce cas, la réciproque est vraie : (Q) implique (P).

FICHE B

L'équivalence

Note
Voir la fiche G « *Démontrer une équivalence* », page 455.

1. Explications. Exemple

■ On dit que deux propositions (P) et (Q) sont équivalentes lorsque (P) implique (Q), **et** (Q) implique (P).
Exemple. La proposition « a et b sont des réels positifs tels que $a \leqslant b$ » est équivalente à la proposition « a et b sont des réels positifs tels que $a^2 \leqslant b^2$ ».

■ **Notation (P) ⇔ (Q).**
L'équivalence peut se formuler de plusieurs façons :
• (P) **équivaut à** (Q). • (P) **si et seulement si** (Q).
Exemple. a et b étant des réels positifs, « $a^2 \leqslant b^2$ » équivaut à « $a \leqslant b$ ». Ou, a et b étant des réels positifs, $a^2 \leqslant b^2$ si et seulement si $a \leqslant b$.

■ On dit aussi que (Q) [resp. (P)] est une **condition nécessaire et suffisante** pour (P) [resp. (Q)]. Ainsi, chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition (P) soit vraie, c'est chercher une proposition (Q) équivalente à (P).
Exemple. ABC est un triangle. Une condition nécessaire et suffisante pour que « ABC soit équilatéral » est « $\widehat{B} = \widehat{C} = 60°$ ».

■ **Commentaires sur l'emploi de ⇒ et de ⇔**
1. ⇒ et ⇔ ne sont pas des abréviations sténographiques mais des signes mathématiques (plus précisément de la branche des mathématiques qui étudie la logique). En aucun cas, ils ne doivent être mélangés aux mots d'un texte rédigé en langage usuel. Ainsi, n'écrivez pas dans une rédaction, « ABC est isocèle en A ⇒ AB = AC ». Remplacez ⇒ par « donc » (ce qui est aussi vite écrit).
2. Surtout ne pas croire que ⇒ remplace le mot « alors ». On rencontre très souvent (chez les débutants qui veulent utiliser ce signe) la faute comme, par exemple, « si ABC est isocèle en A ⇒ AB = AC » ce qui n'a aucun sens. Le rédacteur a voulu dire « puisque ABC est isocèle, alors AB = AC », et le lecteur lit « si ABC est isocèle en A implique AB = AC ».
3. Beaucoup d'erreurs proviennent aussi de ce que l'on emploie ⇔ lorsqu'il faudrait seulement ⇒, et inversement. Lorsqu'on emploie ⇔, il faut être sûr que l'implication est vraie **dans les deux sens**, ce qui demande toujours réflexion. Par exemple « $x > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4$ » est faux car « $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ » est vrai mais « $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ » est faux (car « $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ ou $x < -2$ »).
4. En conclusion, avant d'utiliser les « flèches », comprenez bien le sens des mots « implication » (qui se traduit par « donc », ou par « si... alors ») et « équivalence » (qui se traduit par « équivaut à »), c'est là l'essentiel.

FICHE C

« Et », « Ou »

1. « Et » en langage mathématique

Le sens en mathématiques de la conjonction « et » est le sens du langage usuel. Ainsi, « L'entier n est un nombre pair et un multiple de 3 », signifie que n possède les deux qualités **à la fois** : il est pair, il est multiple de 3.

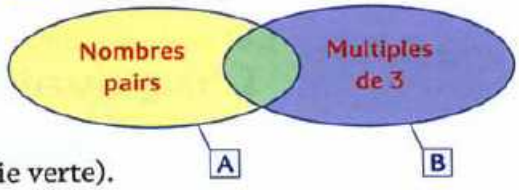
2. « Ou » en langage mathématique

En revanche, il n'en est pas de même pour « ou ». Dans le langage usuel, « ou » est exclusif. Dire qu'une porte doit être ouverte ou fermée signifie qu'elle doit être l'une ou l'autre, mais pas les deux à la fois.

En mathématiques, le « ou » est non exclusif, il accepte **les deux cas à la fois**.

Exemple. « L'entier n est un nombre pair **ou** un multiple de 3 » signifie que n est :

- soit pair sans être multiple de 3 (dans la partie jaune) ;
- soit multiple de 3 sans être pair (dans la partie bleue) ;
- soit pair et multiple de 3 (dans la partie verte).



Note
A est l'ensemble des nombres pairs.
B est l'ensemble des multiples de 3.
n est dans la réunion des ensembles A, B.

3. Emploi de « et », « ou »

Il faut donc être vigilant dans l'emploi du « et », du « ou ». Vous devez comprendre les fautes commises lorsqu'on écrit, a et b étant deux réels, les phrases suivantes.

- Il est faux de dire que $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$. Il faut dire $a = 0$ **ou** $b = 0$, c'est-à-dire $a = 0$, $b \neq 0$, ou bien $a \neq 0$, $b = 0$, ou bien $a = 0$, $b = 0$.
- Il est faux de dire que $a^2 + b^2 = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$. Il faut dire $a = 0$ **et** $b = 0$, les deux à la fois.

FICHE D

Les quantificateurs

1. Premier exemple

Vous avez déjà rencontré des propositions qui contiennent l'expression « quel que soit » ou « pour tout ». Par exemple, « quel que soit le réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x$ ».

On dit que l'expression « **quel que soit** » ou « **pour tout** » est un **quantificateur**, dit **universel**. Il signifie que **tout** élément x d'un ensemble précisé, ici $[0 ; 1]$, possède une propriété notée $P(x)$ (ici $P(x)$ est $x^2 \leqslant x$).

Dans cet exemple, nous savons que la proposition énoncée est vraie.

Note
Le quantificateur « pour tout » se note $\forall$.
On écrit :
$\forall x \in [0 ; 1], x^2 \leqslant x$.

2. Deuxième exemple

D'autres propositions contiennent l'expression « il existe ». Ainsi si x est un réel quelconque donné, « il existe un nombre entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$ ».

On dit que l'expression « **il existe au moins** » est un **quantificateur existentiel**. Il signifie qu'au moins un élément d'un ensemble précisé, ici $\mathbb{R}$, possède une propriété bien précisée elle aussi.

Dans cet exemple, la proposition énoncée est vraie, car lorsqu'on gradue la droite réelle par les nombres entiers, un nombre x est toujours entre deux entiers consécutifs. Le nombre n tel que $n \leqslant x < n + 1$ est la partie entière de x.

Note
Le quantificateur « il existe au moins » se note $\exists$.

FICHE E

Négation d'une proposition

1. Explications. Exemples

À partir d'une proposition (P), on peut écrire une autre proposition que l'on note **[non (P)]** et qui est la négation de (P).

Exemples. La négation de la proposition « le tableau de la classe est noir » est « le tableau de la classe n'est pas noir ». La négation de la proposition « le triangle ABC est isocèle » est « le triangle ABC n'est pas isocèle ».

2. Cas de propositions « P_1 et P_2 »

■ Examinons la proposition (P) « l'entier n est un multiple de 3 et de 5 ». (P) est la conjonction de deux propositions, P_1 « n est un entier multiple de 3 » **et** (P_2) « n est un entier multiple de 5 ». On dit que P est (P_1 et P_2).

Cette proposition attribue à n deux propriétés : être multiple de 3 et être multiple de 5. Nier (P) c'est dire que n **ne** possède pas l'une **ou** l'autre de ces propriétés.

C'est donc dire « n n'est pas un multiple de 3 », qui est la proposition [(non P_1)], **ou** « n n'est pas un multiple de 5 », qui est la proposition [(non P_2)]. Ainsi :

[non (P_1 et P_2)] est **[(non P_1) ou (non P_2)]**.

Note
Dans cette proposition le « ***et*** » n'est pas écrit, mais il est implicitement présent.

■ La négation de la proposition (P) « le triangle ABC est rectangle isocèle » est la proposition « le triangle ABC est **non** rectangle **ou non** isocèle ». Le « ou » signifie ici que trois cas sont possibles pour ABC (et trois seulement) : il est rectangle mais non isocèle, ou bien il est isocèle mais non rectangle, ou bien il est non isocèle et non rectangle.

3. Cas des propositions « P_1 ou P_2 »

Examinons la proposition (P) : « La carte tirée d'un jeu de cartes est un pique ou une figure ». (P) est la réunion de deux propositions, (P_1) « la carte tirée est un pique », (P_2) « la carte tirée est une figure ». On dit que (P) est la proposition (P_1 ou P_2).

Cette proposition dit que la carte possède au moins l'une des deux propriétés : être un pique, être une figure. Nier (P) c'est dire que la carte ne possède aucune de ces deux propriétés. C'est donc dire que « la carte n'est pas un pique », qui est la proposition [non (P_1)], **et** que « la carte n'est pas une figure » qui est la proposition [non (P_2)]. Ainsi :

[non (P_1 ou P_2)] est **[(non P_1) et (non P_2)]**.

4. Négation d'une proposition universelle. Contre-exemple

■ Un exemple

Examinons la proposition « tous les élèves de cette classe ont la moyenne en mathématiques ». La négation est « il existe au moins un élève de la classe qui n'a pas la moyenne en mathématiques ».

■ Cas général

Une proposition universelle (P) s'énonce « **pour tout** élément x de l'ensemble (E), x possède une propriété P(x) bien précisée ». Alors (non P) est « **il existe au moins** un élément x de E qui ne possède pas cette propriété ».

■ Qu'est ce qu'un contre-exemple ?

Il en résulte que pour prouver qu'une proposition universelle (P) n'est pas vraie, il suffit d'exhiber un **seul** élément x tel que P(x) n'est pas vraie. On dit alors qu'on a démontré que (P) est fausse en fournissant un **contre-exemple**.

Exemple. Prouvez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ n'est pas paire. Dire que f est paire c'est dire que « pour tout réel x, $f(x) = f(-x)$ ». Pour prouver la non-parité, il suffit donc de trouver **un nombre** x tel que $f(x) \neq f(-x)$. On peut choisir $x = 1$, car $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$.

5. Négation d'une proposition existentielle

■ Un exemple

La négation de la proposition (P) « il existe un entier n tel que l'écriture décimale de n^2 se termine par 3 » est « un tel entier n'existe pas ». Ce qui signifie qu'aucun entier n ne possède cette propriété, plus précisément : « Pour tout entier n, l'écriture décimale de n^2 ne se termine pas par 3. »

■ Cas général

Une proposition existentielle (P) s'énonce « **il existe au moins** un élément x de l'ensemble E qui possède une propriété bien précisée ». Alors, (non P) est « **pour tout élément** x de E, x ne possède pas cette propriété ».

6. Contraposée d'une implication

Supposons que la proposition (P) implique la proposition (Q). Alors la proposition **(non Q) implique** la proposition **(non P)**.
En effet, si (non Q) implique (P), puisque (P) implique (Q), on obtient (non Q) implique (Q), ce qui est contradictoire.
On dit que [(non Q) implique (non P)] est la **contraposée** de [(P) implique (Q)].

Exemple. La proposition (P) « ABC est un triangle rectangle en A » implique la proposition (Q) « ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».
Donc, par contraposée, « ABC est un triangle tel que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ » implique « ABC est un triangle qui n'est pas rectangle en A ».

Types de problèmes et raisonnements

Le but, modeste, de ces pages, qui font suite au ***Vocabulaire de la logique***, est de montrer les différents types de problèmes rencontrés à ce niveau, ainsi que les types de raisonnements pour les résoudre.

FICHE F

Démontrer une implication

Note
Voir la fiche A, « *L'implication* » dans *Le Vocabulaire de la logique* page 448.

1. Démonstration par implications successives

Exemple. Démontrer que si les réels x et y sont tels que $0 < x < 2$, $0 < y < 2$ alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$.

Note
Dans ce type de démonstration, on applique successivement le résultat suivant : si P implique P_1, et si P_1 implique P_2, alors P implique P_2.

Une solution. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Les inégalités $0 < x < 2$ et $0 < y < 2$ impliquent $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{y} > \frac{1}{2}$.

En ajoutant membre à membre ces inégalités, on obtient $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$.

L'**organigramme** d'une démonstration par implications successives est :

$$\mathbf{H} \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_n \Rightarrow (\mathbf{C})$$

où chaque proposition P_i se déduit des propositions précédentes ou d'une partie d'entre elles.

2. Démonstration par transformation de la conclusion

■ Explications

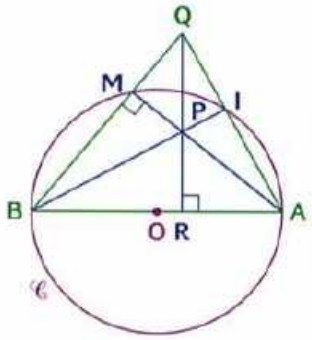
Au lieu de démontrer que (H) implique (C), on remplace la conclusion (C) par une proposition (C′) qui lui est équivalente, surtout lorsque les équivalences entre (C) et (C′) sont faciles à justifier, parce que connues.
Puis on démontre que (H) implique (C′). L'**organigramme** d'une telle démonstration est $\mathbf{H} \Rightarrow (C') \Leftrightarrow (\mathbf{C})$.
Il peut y avoir plusieurs équivalences successives pour aller de (C) à (C′).

Exemple. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, tout réel $y \geqslant 0$, $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$.
De l'hypothèse (H), « x et y sont des réels positifs », on ne peut déduire grand-chose sinon que $\sqrt{xy}$ existe et est positif. On remplace alors la conclusion (C), c'est-à-dire « $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ », par une proposition équivalente.
Une solution. (C) est équivalente à (C′) : $4xy \leqslant (x + y)^2$ (car on sait que dans l'ensemble des réels positifs, « $a \leqslant b$ » équivaut à « $a^2 \leqslant b^2$ »). Donc, démontrer (C) revient à démontrer (C′), donc à démontrer (C_1) : $4xy \leqslant x^2 + y^2 + 2xy$, donc (C_2) : $0 \leqslant (x - y)^2$.
(Il est clair que (C′) équivaut à (C_1) qui équivaut à (C_2).) Or (C_2) est vraie car tout carré est positif. Donc (C) est vraie.

Remarque. Ici nous n'avons pas eu à prouver que (H) implique (C_2), car C_2 est vraie quels que soient x et y. Mais (H), qui est « $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ » a été utilisée pour prouver que (C') : « $4xy \leqslant (x+y)^2$ » équivaut à « $2\sqrt{xy} \leqslant x+y$ ».

■ **En géométrie,** dans la recherche d'une solution, il est fréquent pour « trouver une piste » de transformer la conclusion en une conclusion équivalente.

Exemple. $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, de diamètre [AB], M est un point de $\mathscr{C}$, M ≠ A, M ≠ B. R est un point de [AB], R ≠ A, R ≠ B. La perpendiculaire en R à (AB) coupe (AM) en P et (BM) en Q. On note I le point d'intersection de (BP) et (AQ).
On veut démontrer que I est sur le cercle $\mathscr{C}$.



Comment démontrer qu'un point est sur un cercle de diamètre [AB] ? On se souvient que « I appartient à ce cercle » équivaut à « l'angle $\widehat{AIB}$ est droit » (I ≠ A, I ≠ B). On cherchera donc à prouver que $\widehat{AIB} = 90°$, ou encore, ce qui est équivalent à prouver que (AI) ⊥ (IB). (Et ceci est vrai car (BI) est une hauteur du triangle AQB, car elle passe par P, et P est l'orthocentre de AQB.)

■ **Une erreur à éviter**

Attention à ne pas commettre d'erreur en rédigeant, « lorsqu'on part de la conclusion ». Voici un **type d'erreur** assez fréquent.

Rédaction erronée de l'exercice précédent. « Si I est sur le cercle, alors $\widehat{BIA} = 90°$, donc (BI) ⊥ (AQ). Or, dans le triangle ABQ, P est l'orthocentre, donc (BI) qui passe par P est une hauteur, donc il est vrai que (BI) ⊥ (AQ), donc I est sur le cercle. »
Ce raisonnement ne prouve rien : il suppose, au départ « si I est sur le cercle » pour conclure « donc I est sur le cercle ».
(Comment pourrait-il en être autrement ? Si l'on prend pour hypothèse ce que l'on doit démontrer, il n'y a même plus besoin de le démontrer.)

Une rédaction correcte dans son articulation logique pourrait être celle-ci :
1. Démontrer que I est sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] revient à démontrer que l'angle $\widehat{BIA}$ est droit, ou encore que (BI) ⊥ (AQ). C'est ce que nous allons faire.
2. La deuxième étape consisterait à justifier (BI) ⊥ (AQ) en prouvant que (BI) est une hauteur de ABQ.

3. Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une implication « (H) implique (C) », le raisonnement par l'absurde consiste à garder l'hypothèse (H) et à **rajouter l'hypothèse supplémentaire (non C)**. Puis, à partir de (H) et de (non C), de déduire une contradiction. Il en résulte alors que (H) implique (C).

Exemple. Démontrer que si n^2 est un entier pair, alors n est un entier pair.
Raisonnons par l'absurde, gardons l'hypothèse (H) : « n^2 est pair » et supposons que (non C) est vraie, c'est-à-dire que n n'est pas pair. Alors, on peut écrire, $n = 2p + 1$, avec p entier, donc :

$$n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1 = 2q + 1 \quad \text{avec } (q = 2p^2 + 2p).$$

Cette égalité prouve que n^2 n'est pas pair.
C'est une contradiction. Donc (H) implique (C).

FICHE G

Démontrer une équivalence

Note
Voir la fiche B dans *Le Vocabulaire de la logique*, page 449.

Note
L'ordre des démonstrations n'a évidemment pas d'importance.

1. Deux méthodes

Pour démontrer l'équivalence de deux propositions (P) et (Q), on peut opérer de deux façons.

• **Première façon.** On démontre que (P) implique (Q) et que (Q) implique (P). On est alors amené à démontrer deux implications (voir la fiche F).

• **Deuxième façon : par équivalences successives**
On démontre successivement que « (P) équivaut à (P_1) », que « (P_1) équivaut à (P_2) », ... jusqu'à « (P_n) équivaut à (Q) ».
Nous allons mettre en œuvre ces deux façons sur un même exemple.

Remarque. Lorsqu'on démontre que deux propositions sont équivalentes, on ne démontre pas qu'elles sont vraies, mais on démontre que si l'une est vraie l'autre aussi, et que si l'une est fausse, l'autre aussi.

ÉNONCÉ

a et b sont deux réels quelconques.
Démontrez que « $a^2 = b^2$ » équivaut à « $a = b$ ou $a = -b$ ».

• **Première façon**. On démontre que (P) « $a^2 = b^2$ » implique (Q) « $a = b$ ou $a = -b$ », puis on démontre que (Q) implique (P).

1. Supposons donc $a^2 = b^2$.
On en déduit $a^2 - b^2 = 0$, c'est-à-dire $(a - b)(a + b) = 0$.
Donc, $a - b = 0$ ou $a + b = 0$, c'est-à-dire « $a = b$ ou $a = -b$ ».
Ainsi (P) implique (Q).

2. Supposons que $a = b$ ou $a = -b$, et prouvons que $a^2 = b^2$.
De $a = b$ on déduit $a^2 = b^2$, et de $a = -b$, on déduit aussi $a^2 = b^2$, donc (Q) implique (P).

3. En conclusion, (P) et (Q) sont équivalentes.

• **Deuxième façon : par équivalences successives**
« $a^2 = b^2$ » équivaut successivement à $a^2 - b^2 = 0$ et à $(a - b)(a + b) = 0$.
Or $(a - b)(a + b) = 0$ équivaut à $a - b = 0$ ou $a + b = 0$, donc $a = b$ ou $a = -b$.

2. Quelle méthode utiliser ?

• On utilise plutôt la méthode par équivalences successives lorsque les équivalences intermédiaires sont bien connues, parce que déjà prouvées antérieurement sous formes de théorèmes ou bien énoncées comme règles, et donc qu'il n'y a pas lieu de les démontrer.

• Sinon, il est préférable, en cas de doute, de procéder en deux étapes, comme dans la première façon.

FICHE H

Problèmes de détermination d'ensembles

1. Un exemple pour comprendre

Dans ces problèmes, **la conclusion n'est pas connue**, contrairement aux problèmes cités dans les deux fiches précédentes.

ÉNONCÉ

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan qui dans un repère ont pour coordonnées $(4\,;3m)$ et $(-5\,;2m^2)$, m réel.
Quel est l'ensemble des réels m tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Du point de vue logique, il y a deux méthodes possibles. Mais quelle que soit la méthode choisie, il est bon de donner un nom à l'ensemble cherché, et surtout de bien dégager la relation d'appartenance d'un élément à cet ensemble. Ici, si l'on note $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché, la relation d'appartenance à $\mathscr{E}$ est : « m est dans $\mathscr{E}$ » équivaut à « les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ».

Note
$u(x\,;y)$, $v(x'\,;y')$ sont colinéaires équivaut à $xy'-x'y=0$.

■ Première méthode, en deux étapes

• **Première étape.** On suppose que m est élément de $\mathscr{E}$. À partir de là, on cherche par implications une partie $\mathscr{E}'$ de $\mathbb{R}$, la plus petite possible, dans laquelle doit nécessairement se trouver m. Ici, puisque m est dans $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc :

$4\times 2m^2-(3m)(-5)=0$ donc $8m^2+15m=0$ donc $m(8m+15)=0$

donc $m=0$ ou $m=-\dfrac{15}{8}$.

Conclusion de cette première étape. Si m est dans $\mathscr{E}$, c'est-à-dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors nécessairement $m=0$ ou $m=-\dfrac{15}{8}$, c'est-à-dire que m est dans l'ensemble $\mathscr{E}'=\left\{0\,;-\dfrac{15}{8}\right\}$.

• **Deuxième étape.** Il faut comprendre qu'à ce stade du raisonnement, **rien ne permet de conclure que les nombres 0 et $-\dfrac{15}{8}$ conviennent**. On vient **seulement** de prouver que « m est dans $\mathscr{E}$ » implique « m est dans $\mathscr{E}'$ ». Il est indispensable alors d'étudier la réciproque : si m est dans $\mathscr{E}'$, m est-il dans $\mathscr{E}$? Autrement dit, si $m=0$ ou $m=-\dfrac{15}{8}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
Il est facile de vérifier que oui.

• **Conclusion.** L'ensemble des réels m pour lesquels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires est l'ensemble $\left\{0\,;-\dfrac{15}{8}\right\}$.

La personne qui s'arrête à la première étape, et conclut que l'ensemble cherché est $\left\{0\,;-\dfrac{15}{8}\right\}$, donne une bonne réponse, mais sans l'avoir prouvée, puisqu'elle n'aura fait qu'une partie du raisonnement. Pour vous convaincre que l'étude de la réciproque peut changer la réponse, voyez l'exemple du § 3, page 457.

Rappel
« $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires » équivaut à :
$xy'-yx'=0$.

■ Deuxième méthode par équivalences successives

Dans ce cas là, on part de la relation d'appartenance de l'ensemble cherché. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on peut dire « m appartient à $\mathscr{E}$ » équivaut à « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires », ce qui équivaut successivement à :
« $4\times 2m^2-(3m)(-5)=0$ » et à « $m=0$ ou $m=-\dfrac{15}{8}$ ». $\mathscr{E}$ est donc $\left\{0\,;-\dfrac{15}{8}\right\}$.

Note
Voir le § 2, de la fiche G page 455.

■ Quelle méthode utiliser ?

Il est clair que dans cet exemple la deuxième façon est plus « naturelle » puisque le cours donne l'équivalence suivante : « $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ colinéaires » équivaut à « $xy'-yx'=0$ ». Néanmoins, il faut connaître la première, parfois « plus facile à démarrer », mais ne pas oublier alors la réciproque.

2. Des déterminations d'ensembles cachés

Parfois le mot ensemble n'est pas prononcé dans l'énoncé de la question. Ainsi, l'énoncé précédent, au paragraphe 1, peut être formulé de la manière suivante : « Pour quelles valeurs de m, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? » ou « Trouvez les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires », ou « Comment choisir m de sorte que... ». Ces questions reviennent à celle-ci : « Quel est l'ensemble des réels m tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ? »

3. Cas des équations, des inéquations, des systèmes

Résoudre une équation, une inéquation, un système, c'est déterminer un ensemble : l'ensemble des solutions. Le cas des équations du premier ou du second degré, par exemple, est bien connu. Mais pour résoudre d'autres équations, les méthodes à suivre, en général, sont celles qui ont été données au § 1.

ÉNONCÉ

Résolvez l'équation $\sqrt{x^2+1}=2x$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

■ Première méthode, en deux étapes

On suppose qu'un réel x_0 est dans $\mathscr{S}$, c'est-à-dire $\sqrt{x_0^2+1}=2x_0$. On en déduit successivement que $x_0^2+1=4x_0^2$, donc que $x_0=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ou $x_0=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Conclusion. Si x_0 est solution, **alors** $x_0=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ou $x_0=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. Mais, logiquement, rien ne permet d'affirmer que ces deux nombres sont effectivement solutions. D'où la deuxième étape dans laquelle on cherche à savoir s'ils sont solutions. On montre que $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ est solution tandis que $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ne l'est pas. Vous voyez ainsi la nécessité de l'étude réciproque lorsqu'on choisit cette façon de résoudre le problème.

■ Deuxième méthode : par équivalences successives

Ici, il est aussi possible de résoudre par équivalences, à condition de savoir que « $\sqrt{a}=b$ » équivaut à « $b\geqslant 0$ » et « $a=b^2$ ». Alors on raisonne ainsi :
« $\sqrt{x^2+1}=2x$ » équivaut à « $2x\geqslant 0$ et $x^2+1=4x^2$ », donc à « $x\geqslant 0$ et $3x^2=1$ ».
Or « $x\geqslant 0$ et $3x^2=1$ » équivaut à « $x\geqslant 0$ et $x=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ». D'où $\mathscr{S}=\left\{\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right\}$.

Note
On peut le savoir ou avoir démontré auparavant cette équivalence.

FICHE I

Problèmes de lieux géométriques

1. Explications. Exemples

Vous savez que la médiatrice d'un segment [AB] est l'ensemble des points M équidistants de A et de B, c'est-à-dire tels que MA = MB. On dit aussi que la médiatrice de [AB] est le **lieu géométrique** des points M équidistants de A et de B.
De même, plutôt que de dire que le cercle de centre O et de rayon 5 est l'ensemble des points M dont la distance à O est 5, on peut dire que le cercle de centre O, de rayon 5, est le lieu géométrique des points M tels que OM = 5.
Un lieu géométrique est un ensemble de points (donc une partie du plan si on est en géométrie plane, ou de l'espace si on est en géométrie de l'espace). Chercher un lieu géométrique, c'est chercher à déterminer un ensemble de points (voir Fiche H).

Note
On peut conjecturer ce lieu à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2. Lieu géométrique lié à une configuration mobile

■ Présentation d'un tel problème

On donne une figure et on suppose qu'un point M de cette figure se déplace sur une **ligne fixe** $\mathscr{L}$. Alors un autre point N, associé à M, bouge aussi, et le problème consiste à chercher quelle est la **ligne fixe** $\mathscr{L}'$ décrite par le point N. Cette ligne $\mathscr{L}'$ est appelée **lieu géométrique des points N, ou du point N**, lorsque M décrit $\mathscr{L}$. Si on note f la fonction : $M \mapsto N = f(M)$, **chercher le lieu géométrique de N** c'est chercher l'ensemble de tous les points $f(M)$, c'est donc **chercher l'image par f de $\mathscr{L}$**.

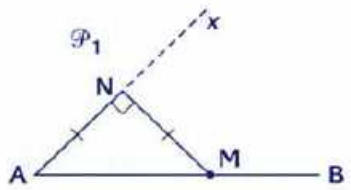
■ Comment résoudre un tel problème de lieu ?

• **Étude directe.** On cherche sur quelle ligne fixe se trouve le point N dont on cherche le lieu. Notons $\mathscr{L}_1$ cette ligne. Pour mener à bien cette recherche, il est conseillé de bien **distinguer les éléments fixes des éléments variables**, puis de **chercher les liens entre éléments fixes et éléments variables**.

• **Étude réciproque.** On pose la question de savoir si tout point N de $\mathscr{L}_1$ est associé à M, autrement dit si N décrit toute la ligne $\mathscr{L}_1$.
Cette ligne $\mathscr{L}_1$ n'est pas toujours décrite entièrement, comme le montre l'exemple étudié. Il est donc nécessaire de procéder à l'étude réciproque, en général.

Exemple

[AB] est un segment donné de longueur 1, M est un point de [AB]. Dans le demi-plan $\mathscr{P}_1$, on construit le triangle rectangle isocèle ANM. Quel est le lieu géométrique de N lorsque M décrit [AB] ?



A et B sont fixes. AMN est rectangle et isocèle, donc $\widehat{MAN} = 45°$. Donc N est sur la demi-droite fixe [Ax). Le lieu $\mathscr{L}'$ est inclus dans $\mathscr{L}_1 = [Ax)$.

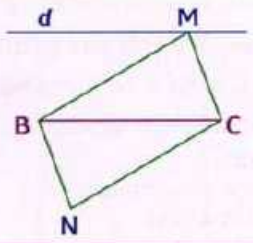
$AN = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$. AM varie de 0 à 1, donc AN varie de 0 à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. N ne décrit donc que le segment [AC] de [Ax), avec $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Le lieu cherché est ce segment [AC].

■ Cas où l'étude de réciproque est inutile

Lorsqu'on peut prouver que la fonction $f : M \mapsto N$ est une transformation connue alors, en général, on peut connaître facilement $f(\mathscr{L})$, dont nous avons dit que c'est le lieu cherché.

ÉNONCÉ

[BC] est un segment fixe, d une droite fixe parallèle à (BC). À chaque point M de d, on associe le point N tel que BMCN est un parallélogramme.
Quel est le lieu géométrique de N lorsque M décrit la droite d ?



Une solution. Les éléments fixes sont B, C, le segment [BC] et la droite d. Les points M et N sont variables. On cherche à lier les points variables à des éléments fixes de la figure.
Puisque BMCN est parallélogramme, la diagonale (variable) [MN] coupe la diagonale (fixe) [BC] au milieu fixe de [BC]. Notons O ce milieu. Il en résulte que N est l'image de M par la symétrie centrale de centre O ; $s_O : M \mapsto N$. Donc lorsque M décrit d, N décrit la droite d' image de d par cette symétrie centrale.
Le lieu de N est donc cette droite d'.

Il n'est pas nécessaire d'envisager l'étude réciproque lorsque l'on parvient à démontrer que le point N, dont on cherche le lieu, est l'image par une transformation **fixe** du point M qui « bouge ».

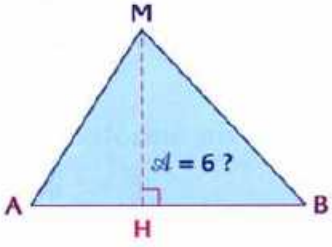
3. D'autres types de problèmes de lieux

Tous les problèmes de lieux ne sont pas des problèmes liés à une configuration mobile.

ÉNONCÉ

[AB] est un segment de longueur 12.
Quel est l'ensemble, ou quel est le lieu géométrique des points M tels que l'aire du triangle AMB est égale à 6 ?

Une solution. Appelons $\mathscr{E}$ le lieu cherché, et notons M un point de ce lieu. Alors, l'aire de AMB est égale à 6. Donc si on note MH la hauteur issue de M, MH = 1. Il en résulte que M est sur une droite d parallèle à (AB), telle que la distance entre (AB) et d est égale à 1. Mais il y a deux droites d et d' parallèles à (AB), et telles que la distance entre elles et (AB) est égale à 1. Donc M est sur d, ou sur d'.



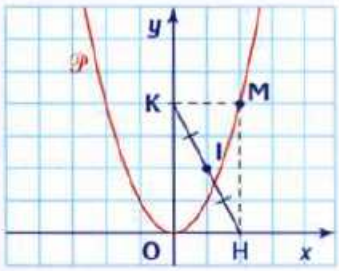
Ayant raisonné de la sorte, du point de vue logique une réciproque s'impose (même si elle paraît évidente), réciproque qui s'énonce : « Si M est sur d ou sur d', le triangle ABM a-t-il une aire égale à 6 ? » Il est immédiat de vérifier que oui.
Le lieu de M est donc la réunion des droites d et d'.

FICHE J

Problèmes de lieux en géométrie analytique

ÉNONCÉ

On trace la parabole $\mathscr{P}$ qui dans un repère donné a pour équation $y = x^2$. M est un point variable de $\mathscr{P}$ d'abscisse m. On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Ox), K celui de M sur l'axe (Oy) et I le milieu de [HK].
Quel est le lieu géométrique des points I lorsque M décrit la parabole $\mathscr{P}$?



Une solution

• On cherche d'abord les coordonnées de I. Celles de M sont $(m\ ;\ m^2)$ (m par hypothèse, et ordonnée m^2 puisque M est sur $\mathscr{P}$). Il en résulte, vu la définition de H et de K, que celles de H sont $(m\ ;\ 0)$, celles de K$(0\ ;\ m^2)$, donc celles de I sont :

$$\left(\frac{m}{2}\ ;\ \frac{m^2}{2}\right).$$

• Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des points I (ou **lieu de** I) lorsque M décrit $\mathscr{P}$. Dans ce genre de problème, à notre niveau, $\mathscr{C}$ est en général caractérisé par une équation $\mathbf{Y = g(X)}$ **indépendante de** m. Pour obtenir cette équation, en général, on cherche une relation entre les coordonnées $(x_I\ ;\ y_I)$ de I, indépendante de m.

C'est facile ici, car $x_I = \frac{m}{2}$, $m = 2x_I$ donc :

$$y_I = \frac{m^2}{2} = \frac{4x_I^2}{2} = 2x_I^2.$$

(On a exprimé m en fonction de x_I et, dans y_I, on a remplacé m par cette expression.)
Donc I est sur la **courbe fixe** $\mathscr{C}$ d'équation $Y = 2X^2$. $\mathscr{C}$ est une parabole.

• Mais logiquement, à cette étape de la détermination du lieu, rien ne permet d'affirmer que I décrit toute la courbe $\mathscr{C}$. Il est **indispensable** de répondre à la question : « Le point I décrit-il toute la courbe $\mathscr{C}$, ou seulement une partie, et si oui, laquelle ? » En général, on résout de la manière suivante.

Puisque x_I est fonction de m, ici $x_I = \frac{m}{2}$, on détermine d'abord l'ensemble D décrit par m, puis l'ensemble D_I décrit par x_I lorsque m décrit D. Le lieu de I est alors la restriction de la courbe $\mathscr{C}$ à cet ensemble D_I.
Ici, puisque M décrit la parabole $\mathscr{P}$, son abscisse m décrit $\mathbb{R}$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$). Ici $D = \mathbb{R}$. Mais lorsque m décrit $\mathbb{R}$, $x_I = \frac{m}{2}$ décrit aussi $\mathbb{R}$. Ici $D_I = \mathbb{R}$. Donc I décrit toute la courbe $\mathscr{C}$.
Le lieu géométrique de I est la courbe $\mathscr{C}$.

Là encore, la personne qui répondrait avant cette étape : « Le lieu de I est la parabole d'équation $Y = 2X^2$ » donnerait une réponse juste mais non prouvée. Il arrive que le lieu ne soit pas toute une courbe comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Supposons que, dans un problème, les coordonnées d'un point I sont $X_I = \sin m$, $Y_I = \cos^2 m + 2$, m réel, et que l'énoncé demande le lieu des points I lorsque m décrit $\mathbb{R}$. Puisque $\cos^2 m = 1 - \sin^2 m$, en remplaçant dans Y, on trouve $Y = -X^2 + 3$, donc I appartient à la parabole d'équation $Y = -X^2 + 3$, mais lorsque m décrit $\mathbb{R}$, le point I ne décrit que la partie de la parabole restreinte à $[-1 ; 1]$, car $X_I = \sin m$ décrit $[-1 ; 1]$.

FICHE K

Problèmes d'existence

1. Exemples de tels problèmes

1. Un repère du plan étant choisi, existe-t-il une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, qui passe par les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), C(3 ; 2) et D(5 ; 3) ?

2. Existe-t-il un polynôme de degré 3 qui prend la valeur 1 en 0, la valeur 2 en 1, et la valeur -1 en 2 et en 4 ?

2. Résolution

Si l'on ne sait pas répondre directement, on peut procéder de deux façons.

■ Première façon

• On suppose l'existence d'un objet qui possède la propriété imposée puis, à partir de cette hypothèse, on déduit d'autres conditions qui permettent de le préciser mieux.

Ainsi, pour le problème 1, on dira :

Supposons qu'une courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points donnés, alors, nécessairement, a, b, c sont liés par les relations...

De ces relations, on déduira l'ensemble des valeurs possibles pour a, b, c.

• Lorsque cet ensemble n'est pas vide, donc lorsqu'on a trouvé un objet possible, il faut étudier la réciproque : prouver que l'objet trouvé convient.

■ Deuxième façon

On procède par équivalences : « Dire qu'il existe un objet conforme aux conditions imposées », équivaut à dire que « ... ».

Dans notre exemple, on dira « L'existence d'une parabole telle que... » équivaut à dire « Il existe des réels a, b, c... » et on poursuivra par équivalences successives, lorsque cela est possible.

Une solution du problème 1. Dire que la parabole $\mathcal{P}$, d'équation $y = ax^2 + bx + c$, passe par A équivaut à $0 = a + b + c$, passe par B équivaut à $1 = c$, passe par C équivaut à $2 = 9a + 3b + c$, passe par D équivaut à $3 = 25a + 5b + c$.

Donc l'existence de la parabole $\mathcal{P}$ qui passe par A, B, C, D, équivaut à : il existe trois nombres a, b, c, tels que :

$$\begin{cases} a+b+c=0 & [1] \\ c=1 & [2] \\ 9a+3b+c=2 & [3] \\ 25a+5b+c=3 & [4] \end{cases}$$

Note

$25\times\frac{2}{3}+5\times\left(-\frac{5}{3}\right)+1 = \frac{28}{3}$

Puisque $c=1$, [1] et [3] s'écrivent $a+b=-1$ et $9a+3b=1$. Par une méthode habituelle, on déduit $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$. Mais alors $25a+5b+c\neq 3$. Donc il n'existe pas de tels nombres a, b, c et, par suite, pas de parabole répondant à la question.

Une solution du problème 2. Si un tel polynôme existe, on pose $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec :

$$P(0)=1, \quad P(1)=2, \quad P(2)=-1, \quad P(4)=-1$$

ce qui aboutit finalement à :

$$a=\frac{3}{4}\ ; \quad b=-\frac{17}{4}\ ; \quad c=\frac{9}{2}\ ; \quad d=1\ .$$

FICHE L Raisonnement par disjonction des cas

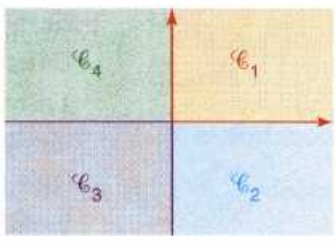
1. Pour démontrer qu'une proposition est vraie pour tout élément d'un ensemble $\mathcal{E}$, on peut démontrer qu'elle est vraie pour tous les sous-ensembles (non vides) qui forment une partition de $\mathcal{E}$.

Exemple. Prouver que, dans le système d'écriture décimale, le carré d'un entier n ne se termine pas par 3. Dans le système décimal, le dernier chiffre d'un entier n est soit 0, soit 1, soit 2, ..., soit 9. L'entier n est donc de la forme $a10^p+0$, ou $a\times 10^p+1$, ..., ou $a\times 10^p+9$. En calculant, **dans chacun de ces cas**, le carré de n, on voit que le dernier chiffre des carrés obtenus n'est jamais 3.

2. Pour déterminer un ensemble dont on connaît la relation d'appartenance, on peut procéder par disjonction des cas.

Exemple. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x\,;y)$ tels que $|x|+|y|=1$. Pour réaliser cette représentation graphique, et pour « éliminer » les valeurs absolues, on peut chercher :

- le sous-ensemble $\mathcal{E}_1$ des points $M(x\,;y)$ tels que : $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$;
- le sous-ensemble $\mathcal{E}_2$ des points $M(x\,;y)$ tels que : $x>0,\ y<0$;
- le sous-ensemble $\mathcal{E}_3$ des points $M(x\,;y)$ tels que : $x\leqslant 0,\ y\leqslant 0$;
- le sous-ensemble $\mathcal{E}_4$ des points $M(x\,;y)$ tels que $x<0,\ y>0$.



Conseils pour les vrai ou faux

FICHE M

Les vrai ou faux

1. De quoi s'agit-il ?

Il s'agit de dire si un énoncé est vrai ou faux en justifiant la réponse.
Dans ces énoncés, les quantificateurs (voir le *Vocabulaire de la logique*, fiche D) sont souvent cachés ainsi que les implications (voir le *Vocabulaire de la logique*, fiche A, § 3).

Exemple. Sur un intervalle, une fonction non croissante est décroissante.

Note
L'article indéfini « un » remplace « tout », la proposition est donc **universelle**, et il s'agit d'une implication. Il faut donc lire :
sur tout intervalle I, pour toute fonction f, « f non croissante sur I », *implique* « f décroissante sur I ».

■ Pour démontrer que l'énoncé est **FAUX**, il suffit souvent de fournir un **contre-exemple** (voir le *Vocabulaire de la logique*, fiche E, § 4), parfois de raisonner par l'**absurde** (voir *Types de problèmes et raisonnements*, fiche F, § 3).

■ Pour démontrer que l'énoncé est **VRAI**, on procède comme pour démontrer une implication ou une équivalence (voir *Types de problèmes et raisonnements*, fiches F et G).

2. Dans tous les cas

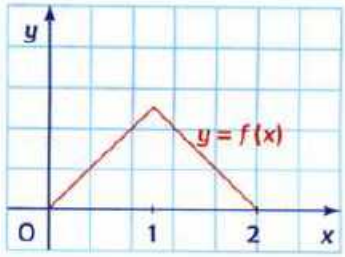
Commencez par une analyse logique de l'énoncé : déterminez s'il s'agit d'une implication et alors dégagez les hypothèses et la conclusion, voyez si elle est « universelle » (voir le *Vocabulaire de la logique*, fiche D), ...
Assurez-vous aussi de bien connaître les définitions des mots du vocabulaire des mathématiques.

Note
En géométrie, ne pas oublier que vous pouvez présenter une solution par calculs sur des coordonnées en choisissant vous-même un repère.

Exemple. Une fonction monotone sur [0 ; 1] et monotone sur [1 ; 2] est monotone sur [0 ; 2].
La tentation est grande de répondre : **VRAI**.

Note
Il faut lire : Pour *toute* fonction f, « f monotone sur... », *implique* « f est monotone sur... ».

Mais « monotone » signifie « ou bien croissante ou bien décroissante ». Donc elle peut être comme la fonction représentée ci-contre, fonction qui satisfait aux hypothèses, mais qui pourtant n'est pas monotone sur [0 ; 2].
Cette fonction apporte la preuve que l'énoncé n'est pas vrai pour toute fonction f, donc qu'il est **FAUX**.



FICHE N

Deux stratégies selon les cas

1. Cas où l'analyse donne la quasi-certitude que l'énoncé est faux ou qu'il est vrai

■ Il paraît **FAUX** parce que le résultat énoncé est si beau et si surprenant que s'il était vrai, « ça se saurait ».

Exemple 1. Une fonction non croissante est décroissante.

Exemple 2. Le quotient de deux entiers est toujours un décimal.

Si l'énoncé 1 est vrai, toute fonction est soit croissante, soit décroissante. Un tel résultat ferait sûrement l'objet d'un théorème. La fonction représentée sur la figure ci-dessus fournit un contre-exemple.

Note
Cet exemple montre bien aussi la nécessité de savoir le cours.

Dans le cas de l'énoncé 2, par définition, le quotient de deux entiers est un rationnel. Si l'énoncé est vrai, pourquoi a-t-on distingué les ensembles $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$?

Le nombre $\frac{1}{3}$ fournit un contre-exemple.

■ La certitude *a priori* que l'énoncé est vrai, ou bien faux, découle de ce qu'il est une conséquence directe du cours.

Note
Les deux propositions sont universelles.

Exemple 1. Deux triangles équilatéraux sont semblables.

Exemple 2. Le carré d'un nombre positif est plus grand que ce nombre.

Le 1 : Le cours dit que deux triangles semblables sont deux triangles « qui ont les mêmes angles ». Donc, l'énoncé est évidemment **VRAI** et la preuve est facile.

Le 2 : Le cours dit que $0 < a \leqslant 1$ implique $a^2 \leqslant a$ et que $a > 1$ implique $a^2 > a$.

L'énoncé est donc évidemment **FAUX**. Contre-exemple : le nombre $\frac{1}{2}$.

2. Cas où l'analyse ne permet pas de décider *a priori*

■ Parfois, il existe un critère ou une méthode connus pour lever l'incertitude.

Note
Il faut comprendre : il existe des valeurs de m, en tout cas **au moins une**, pour laquelle $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple. À tout réel m, on associe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coordonnées sont $(m-10\,;\,2)$ et $(2m\,;\,-1)$. Certains de ces vecteurs peuvent être colinéaires.

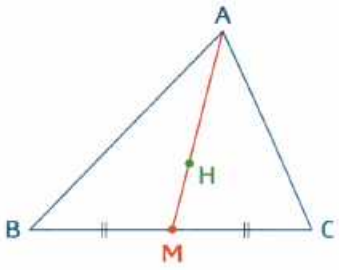
On connaît la traduction analytique de la colinéarité : $xy' - yx' = 0$. Il suffit donc de calculer $xy' - yx'$ dans ce cas particulier pour conclure. On obtient $-5m + 10$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque $m = 2$. L'énoncé est **VRAI**.

■ À défaut d'une méthode connue, on peut commencer par tirer des conséquences des hypothèses pour éclaircir la situation, ou tenter une démonstration.

Exemple. Lorsque, dans un triangle, une médiane passe par l'orthocentre, ce triangle est isocèle.

On dessine un triangle ABC non isocèle *a priori* et sa médiane (AM). L'hypothèse « l'orthocentre H est sur (AM) » implique que (AM) est aussi hauteur, donc médiatrice de [BC].

Ainsi A est équidistant de B et de C, donc AB = AC, et l'énoncé est **VRAI**.



Note
Ces conseils sont valables aussi pour les cas précédents si vous n'avez pas trouvé facilement la réponse.

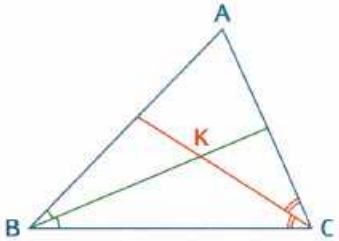
■ Sinon, il ne faut pas hésiter à **traiter des cas particuliers** : ils peuvent amener à conjecturer la réponse, donner l'idée d'une démonstration ou d'un contre-exemple.

En **algèbre**, pensez à utiliser des **représentations graphiques**.

Note
On peut aussi tenter de construire un triangle dont les bissectrices sont perpendiculaires et voir que cela est impossible.

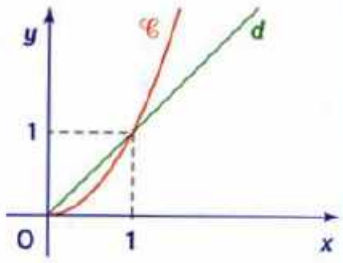
Exemple 1. Il existe un triangle ABC dont les bissectrices intérieures issues de B et C sont perpendiculaires.

Pour « voir », on peut, par exemple, construire plusieurs triangles avec $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ bien précisés : $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 70°$, etc. Constater que les bissectrices ne sont jamais perpendiculaires. Essayer alors de comprendre pourquoi, en calculant chaque fois



$\widehat{BKC}$, on trouve toujours $\widehat{BKC} = 180° - \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}\right)$. Or $\hat{B} + \hat{C} = 180° - \hat{A}$ donc $\widehat{BKC} = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$. Donc $\widehat{BKC} > 90°$, l'énoncé est **FAUX**.

Exemple 2. Le carré d'un nombre positif est plus grand que ce nombre.
Si le cours est oublié, on peut tracer la courbe d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $y = x$. Et constater que d est parfois au-dessus de la courbe.



Exemple 3. Si le carré d'un entier naturel est impair, cet entier est impair.
On note n un entier tel que n^2 est impair, donc $n^2 = 2k + 1$, avec k entier. De là, on ne peut rien déduire sur n.

Note
La démonstration est une démonstration par l'absurde.

Mais si on prend l'initiative d'écrire la liste des carrés :

n	1	2	3	4	5	6	7	...
n^2	1	4	9	16	25	36	49	...

On peut constater que seuls les entiers pairs ont des carrés pairs. Ceci conduit à penser que l'énoncé est vrai et que pour le prouver, il suffit de prouver que si n était pair, n^2 serait pair, ce qui est contradictoire.
Or, n pair implique bien n^2 pair, car si $n = 2k$, avec k entier, $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ avec $2k^2$ entier. Donc si n^2 est impair, n est nécessairement impair.

Note
On peut trouver sur Internet des applets java qui permettent de savoir si un nombre est premier.

Exemple 4. Pour tout naturel n, le nombre $A = n^2 - n + 41$ est premier.
Pour voir, on peut choisir $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$, ...
Dans chaque cas, A est premier. Pour le prouver, il faut montrer qu'une égalité $A = pq$ avec p et q entiers, $p \neq 1$, $p \neq A$ est impossible quel que soit n. Cela semble hors de portée. Alors, on peut écrire un programme sur calculatrice ou ordinateur, qui détectera si un nombre A est premier. Puis avec une boucle, on peut explorer pour toutes les valeurs de n jusqu'à un nombre n_0 choisi. Un essai avec $n_0 = 100$, par exemple, révèle que A n'est pas premier lorsque $n = 41$.
L'énoncé est **FAUX**.

■ **Commentaires.** Bien sûr avec de l'astuce, on peut voir aussitôt que lorsque $n = 41$, A est un multiple de 41. Mais ce qu'on appelle astuce n'est parfois qu'affaire d'habitudes acquises dans le travail. En tout cas, après cet exercice, on a la satisfaction de savoir, par exemple, que le nombre $A = 3n^5 - 5n^4 + 3n^3 + 10n^2 - 37n + a$ n'est pas premier pour tout n, lorsque $n = a$, A est un multiple de a.

Conseils pour les ROC

FICHE 0

Exemples commentés de rédaction

1. Premier exemple

ÉNONCÉ

• **Pré-requis**
La définition d'une suite convergente est supposée connue.
• Démontrez le théorème suivant. Trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont telles que :
a) pour tout naturel n, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,
b) les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et ont la même limite ℓ,
alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

■ Idée intuitive de la démonstration

Puisque les suites v et w convergent vers ℓ, tout intervalle de centre ℓ contient presque tous les nombres v_n et w_n, donc aussi presque tous les u_n car ceux-ci sont toujours entre v_n et w_n (note 1).

■ Rédaction possible

Nous allons utiliser la définition de la convergence d'une suite pour démontrer que u_n converge vers ℓ. Il s'agit donc de démontrer que, si I est un intervalle quelconque ouvert de centre ℓ, tous les nombres u_n sont dans I à partir d'un certains indice (note 2).
Puisque la suite (v_n) converge vers ℓ à partir d'un indice N_1, tous les v_n sont dans I, c'est-à-dire pour tout $n \geqslant N_1$, v_n est dans I.
De même, puisque (w_n) converge vers ℓ, il existe un indice N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$, (w_n) est dans I (note 3).
Choisissons un entier N tel que $N \geqslant N_2$ et $N \geqslant N_1$. Alors pour tout $n \geqslant N$, $n \geqslant N_1$ et donc v_n est dans I et $n \geqslant N_2$ et donc w_n est dans I (note 4).
Or par hypothèse pour tout n, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$. Donc si r est le rayon de I, $I =]1 - r\,;\, 1 + r[$, on obtient $1 - r < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < 1 + r$ d'où il ressort que u_n est dans I pour tout $n \geqslant N$, ce qu'il fallait démontrer pour conclure à la convergence de la suite (u_n) vers ℓ.

Note 1
Pour apprendre une démonstration et mieux la retenir, il est conseillé de dégager auparavant le fil conducteur.

Note 2
Il est bon d'avertir le lecteur de la route que l'on va suivre pour arriver à la conclusion. Il est préférable de donner au passage la définition d'une suite convergente.

Note 3
Il est indispensable de distinguer ces deux indices, il n'y a aucune raison pour que le même serve pour deux suites quelconques, d'où les notations N_1 et N_2.

Note 4
Étape indispensable pour exhiber un indice N qui aura la propriété voulue.

2. Deuxième exemple

ÉNONCÉ

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Démontrez que f est strictement positive.

■ Idée intuitive de la démonstration

La première étape consiste à prouver que $f(x)$ n'est jamais égal à zéro. Dans la deuxième étape, on prouve que $f(x)$ ne peut prendre des valeurs strictement négatives en utilisant l'hypothèse $f(0) = 1$ et le théorème des valeurs intermédiaires.
Pour prouver que $f(x)$ n'est pas égal à zéro, on introduit la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$ (car une façon de prouver qu'un nombre a n'est pas nul est

d'exhiber un nombre b tel que ab est différent de 0. Et avec $f' = f$, on peut fabriquer des fonctions dont les dérivées sont nulles partout donc constantes).

■ **Rédaction possible**

• Prouvons d'abord que quel que soit x, $f(x)$ est différent de 0 (note 1).
Pour cela, introduisons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$.
La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f l'est aussi, donc la fonction $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème sur la dérivabilité d'une fonction composée (note 2).
Et pour tout réel x, $g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$.
La fonction g, qui a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (note 3), est donc constante. Or $g(0) = f(0)f(0) = 1$, donc pour tout x, $g(x) = 1 = f(x)f(-x)$ donc $f(x)$ n'est jamais nul.

• Prouvons maintenant que f ne prend pas de valeurs strictement négatives, il en résultera bien que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons donc qu'il existe un nombre c tel que $f(c) = b$ avec $b < 0$. Alors 0 est dans l'intervalle $[b\,;2]$ (note 4) et puisque $f(0) = 1$ et que f est continue, car f est dérivable (note 5), le théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il existe x tel que $f(x) = 0$. Or ceci est impossible d'après la 1re partie de la preuve, d'où $f(x) > 0$ pour tout réel x.

3. Troisième exemple

ÉNONCÉ

• **Pré-requis**
On suppose connu le résultat suivant « Pour tous complexes non nuls z et z',
$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi} \text{ ».}$$
• Démontrez que dans ces conditions, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.

■ **Idée intuitive de la démonstration**

Par définition, le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, est égal à a. Cette définition permet d'utiliser le résultat connu.

■ **Rédaction possible**

z et z' étant deux complexes non nuls, le quotient $\frac{z}{z'}$ existe et par définition,
$$\frac{z' \times z}{z'} = z \text{ (note 6).}$$
Donc toutes les égalités qui suivent étant vraies modulo 2π,
$$\arg\left(\frac{z' \times z}{z'}\right) = \arg(z) \ldots \quad (1).$$
Or d'après le résultat admis, valable quels que soient les complexes non nuls considérés,
$$\arg\left(\frac{z' \times z}{z'}\right) = \arg(z') + \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \quad (2).$$
Des égalités (1) et (2), on déduit que :
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

Note 1
Voir la note 2 précédente.

Note 2
Il est important de dire que g est définie sur $\mathbb{R}$, mais à ce niveau, il est inutile de le justifier. En revanche, il est nécessaire de justifier sa dérivabilité.

Note 3
Il est important de dire que $\mathbb{R}$ est un intervalle car une fonction peut avoir aussi une dérivée nulle sans être constante.

Note 4
On a choisi l'intervalle $[b\,;2]$ pour la rédaction, mais on peut choisir n'importe quel intervalle $[b\,;\alpha]$, l'essentiel est que celui-ci contienne zéro.

Note 5
Le théorème des valeurs intermédiaires proprement dit étant énoncé avec des fonctions continues, il est prudent de signaler ici la raison pour laquelle il s'applique aussi pour f.

Note 6
Il est bon de justifier cette égalité.

Note 7
Dans le cours, on utilise plutôt $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, mais c'est parce qu'il est établi auparavant que $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z)$.
Comme ce dernier résultat n'est pas supposé connu par l'énoncé, il faudrait le justifier avant de l'utiliser. Il est préférable de revenir à la définition de $\frac{z}{z'}$.

CORRIGÉS DES EXERCICES

Chapitre 1
Rappels sur les suites. Récurrence

4 **a)** $\forall n,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1+n^2}{1+(1+n)^2} < 1$,
donc (u_n) est décroissante.

b) $\forall n \geqslant 1,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{10n} < 1$,
donc (u_n) est décroissante.

c) $u_n = f(n)$, avec $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$,
$f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0$, f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, donc (u_n) est strictement croissante.

10 **a)** $\forall n,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$:
(u_n) est croissante.

b) $\forall n,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} - 1 < 0$:
(u_n) est décroissante.

21 **1.** $u_n = u_1 + (n-1)r = -2 + 3n - 3 = 3n - 5$.

2. $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = \dfrac{(-2+55)\times 20}{2} = 530$.

30 **1.** $v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4 = -\dfrac{39}{10}u_n + \dfrac{12}{10}$
$= -\dfrac{3}{10}(13u_n - 4) = -\dfrac{3}{10}v_n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $k = -\dfrac{3}{10}$ et de premier terme $v_1 = 13a - 4$.

2. **a)** $v_n = (13a-4)\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{13}(v_n + 4) = \left(a - \dfrac{4}{13}\right)\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{13}$.

46 **1.** $S_1 = 1$; $S_2 = 4$; $S_3 = 9$; $S_4 = 16$;
il semble que $S_n = n^2$.

2. On note P_n la proposition : « $S_n = n^2$ ».
- P_1 est vraie.
- On suppose que P_n est vraie, alors
$S_{n+1} = 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1)$
$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
Donc P_{n+1} est vraie.
- Pour tout entier naturel $n \neq 0$, $S_n = n^2$.

3. S_n représente la somme des termes d'une suite arithmétique :
$$S_n = \frac{[1 + (2n-1)] \times n}{2} = n^2.$$

53 On note P_n la proposition : « $n^2 + 2n$ est multiple de 3 ».
- P_1 est vraie puisque $1^3 + 2 \times 1 = 3$.
- On suppose que P_n est vraie pour n, $n \geqslant 1$.
Alors,
$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 1 + 2n + 2$
$= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$
$= 3p + 3(n^2 + n + 1)$.
La propriété P_{n+1} est donc vraie.
- La propriété P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Chapitre 2
Fonctions : limites et continuité

2 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$;
$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$,
donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+3) = 4$,
donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$;
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

7 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$; $4{,}9 < f(x) < 5{,}1$
$\Leftrightarrow 4{,}9(x-1) < 5x - 1 < 5{,}1(x-1)$
car $(x-1)$ est positif.
D'où $-3{,}9 < 0{,}1x$ et $4{,}1 < 0{,}1x$ et donc $A = 41$ (ou tout réel supérieur à 41).

10 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$;
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

2. $d_1 : y = 2$ est asymptote horizontale et $d_2 : x = 1$ est asymptote verticale.
$f(x) - 2 = \dfrac{3}{x-1}$; la courbe est au-dessus de d_1 si et seulement si $x > 1$.

12 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
(car $x > 0$).

15 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \dfrac{1}{x}}$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

18 Pour $x > 1$, $\dfrac{3x-1}{x} \leqslant \dfrac{3x + \cos x}{x}$ donc
$\dfrac{3x-1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x+7}{x-1}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+7}{x-1} = 3$,
donc (th. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

27 **a)** $x > 5$, donc $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+3}{x-5} = +\infty$, et
$\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc (th. 4) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^5 + x^2 + x) = +\infty$, et
$\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc (th. 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

33 **a)** • $f(x) - (2x+3) = \dfrac{10}{x+1}$, donc
$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x+3)] = 0$ et
$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x+3)] = 0$.
Δ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

• $\dfrac{10}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > -1$:
la courbe est au-dessus de Δ pour $x > -1$ et en dessous pour $x < -1$.

b) $f(x) - (-x+1) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$
et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. Δ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Pour tout réel x non nul, $-\dfrac{1}{x^2} < 0$, donc la courbe est toujours en dessous de son asymptote.

36 La fonction f est strictement croissante et continue : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. 0 est dans $\mathbb{R}$, donc (th. 7) il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$; $f(1) = -1$ et $f(2) = 4$, donc $\alpha \in\ ]1\ ;2[$.

44 • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• Le trinôme $x^2 - 6x + 5$ s'annule en 1 et en 5.
$x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]1\ ;5[$.
Donc, puisque $\lim\limits_{x\to 1} (x-4) = (-3)$,
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$.

53 **a)** Pour $x \neq 3$,
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

b) Pour $x \neq 0$,
$f(x) = \dfrac{2x(\sqrt{x+1} + 1)}{x} = 2(\sqrt{x+1} + 1)$,
donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$.

62 **a)** • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$:
la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$:
la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^2+1} = 0$:
la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Chapitre 3
Dérivation

5 $f(1) = 2$; $f'(x) = 3x^2 + 2x$ donc
$f'(1) = 5$ et une équation de la tangente est :
$y = 5(x-1) + 2$ ou $y = 5x - 3$.

9 **a)** $f'(x) = 4\theta x + \theta^3$, ici x est la variable, x est réel.

b) $f'(\theta) = 2x^2 + 3\theta^2 x + 1$, ici θ est la variable θ réel.

12 **a)** $f'(x) = 1 + 1 \times \cos x + x \times (-\sin x)$
$= 1 + \cos x - x\sin x$.

b) $f(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$.

18 Pour tout réel x, $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$.

1. La droite d'équation $y = -4x$ a pour coefficient directeur -4. Ainsi la tangente est parallèle à cette droite équivaut à $f'(x) = -4$. Cette équation revient à $5x^2 + 10x = 0$, c'est-à-dire à $x = 0$ ou $x = -2$.
Il y a donc deux tangentes parallèles à la droite, aux points d'abscisses 0 et -2.

2. Cette fois, la droite a pour coefficient directeur $\frac{3}{2}$, on résout donc $f'(x) = \frac{3}{2}$. Mais cette équation n'a pas de solution donc il n'y a aucune tangente parallèle à la droite.

25 1. Pour tout réel x,
$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x+2)(x-1)$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$12x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	0	$-$	$-$	0 $+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$ 0 $+$
f	$+\infty$	↘	-28	↗ 4 ↘	-1 ↗ $+\infty$

2. f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; -2]$, l'image de cet intervalle est $]-28 ; +\infty[$. 0 est dans cet intervalle donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty ; -2]$. On raisonne de la même façon sur les autres intervalles et on obtient quatre solutions dans $\mathbb{R}$.
3. Pour α, $f(-2,8) > 0$ et $f(-2,7) < 0$ donc $-2,8 < \alpha < -2,7$. De la même façon, on obtient les intervalles $[-0,6 ; -0,5]$; $[0,7 ; 0,8]$; $[1,2 ; 1,3]$ pour les trois autres solutions.

30 **a)** $f = u\sqrt{v}$ où u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v strictement positive. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'\sqrt{v} + \dfrac{uv'}{2\sqrt{v}}$. Ainsi pour tout réel x, $f'(x) = k\sqrt{x^2+1} + \dfrac{kx^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) $f = \dfrac{u}{\sqrt{v}}$ où u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v strictement positive. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'\sqrt{v} - \frac{uv'}{2\sqrt{v}}}{\sqrt{v}^2}$. Ainsi pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$.

33 **a)** $f'(\theta) = 3(1 + \tan^2(3\theta)) = \dfrac{3}{\cos^2(3\theta)}$.

b) $f'(x) = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

38 **a)** $f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x$;
$f''(x) = -4\cos 2x - 4\sin 2x$;
$f^{(3)}(x) = 8\sin 2x - 8\cos 2x$.

b) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ privé des réels x tels que $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
$f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; $f''(x) = \dfrac{2 - \cos^2 x}{\cos^3 x}$;
$f^{(3)}(x) = \dfrac{\sin x(5 + \sin^2 x)}{\cos^4 x}$.

Chapitre 4
La fonction exponentielle

3 $\dfrac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \dfrac{\frac{2(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} \times (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}$
$= \dfrac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2e^{2x} + 2e^{-2x}}$
$= \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = f(2x)$.

4 **a)** $e^{5-x} = 1 = e^0$. Cette équation est équivalente à $3 - x = 0$ d'où $\mathcal{S} = \{3\}$.

b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ équivaut à $2x^2 - 7x + 3 = 0$ d'où $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2} ; 3\right\}$.

10 **a)** $e^{2x} < e^x$ équivaut à $2x < x$ ou $x < 0$ d'où $\mathcal{S} =]-\infty ; 0[$.

b) $3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0$. On pose $e^x = X$ avec $X > 0$. On obtient alors le système équivalent :
$\begin{cases} X = e^x \\ 3X^2 + X - 4 < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = e^x \\ (X-1)(3X+4) < 0 \end{cases}$
ou $\begin{cases} X = e^x \\ -\frac{4}{3} < e^x < 1 \end{cases}$
Or $e^x > 0$ d'où $0 < e^x < 1$ c'est-à-dire $x < 0$ et $\mathcal{S} =]-\infty ; 0[$.

11 $f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x$
$= (x^2-2)e^x$.

20 **a)** M a pour coordonnées $(m ; e^m)$ et N $(m ; e^{-m})$.
- Équation de la tangente en M à $\mathcal{C}_1$:
$y = e^m(x-m) + e^m = e^m x + e^m(1-m)$
$= e^m(x+1-m)$.
- Équation de la tangente en N à $\mathcal{C}_2$:
$y = -e^{-m}(x-m) + e^{-m} = -e^{-m}x + e^{-m}(m+1)$
$= e^{-m}[-x+m+1]$.

Les coefficients directeurs des tangentes sont respectivement e^m et $-e^{-m}$ et leur produit $e^m \times (-e^{-m}) = -e^{m-m} = -1$. Donc ces tangentes sont perpendiculaires.

b) I a pour coordonnées $(m-1 ; 0)$ et J $(m+1 ; 0)$ donc le milieu de [IJ] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(m-1+m+1) ; 0\right)$ soit $(m ; 0)$ c'est donc H.

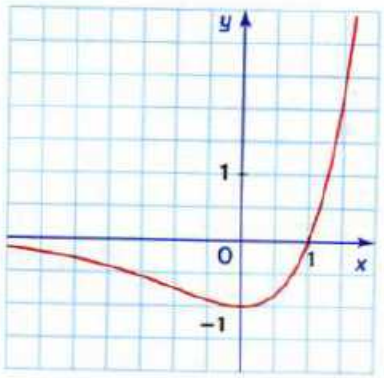
25 • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
• $f(x) = e^{-x}[2xe^x - e^x + 1]$ donc :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

32 1. $f(x) = (x-1)e^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2. $f'(x) = e^x[x - 1 + 1] = xe^x$ d'où le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

3.



40 $u(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$u'(x) = \dfrac{1 + x^2 - 2x(1+x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2}$.
Donc f a pour dérivée :
$f' : x \mapsto \dfrac{1 - 2x - x^2}{(1+x^2)^2} e^{\frac{1+x}{1+x^2}}$.

48 • Dire que pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{5}f(x)$ équivaut à dire que f est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{5}y$.
• Dire que A $(-2 ; 1)$ est un point de $\mathcal{C}$ équivaut à dire que $f(-2) = 1$.
Les solutions de $y' = -\frac{1}{5}y$ sont $f_k : x \mapsto ke^{-\frac{1}{5}x}$.
De plus, $1 = ke^{\frac{2}{5}}$ d'où $k = e^{\frac{2}{5}}$ et $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{5}(x-2)}$.

53 Les solutions de l'équation différentielle $y' = -2y + 5$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{-2x} + \frac{5}{2}$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \frac{5}{2}$, d'où $y = \frac{5}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.

58 Pour tout $t > 0$, $N'(t) = e^{-\frac{2d^2}{t}}\left[\dfrac{4d^2 - t}{2t^2\sqrt{t}}\right]$ d'où le tableau de variations suivant :

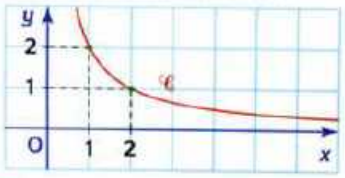
t	0	$4d^2$	$+\infty$
N'	$+$	0	$-$
N	0 ↗	$N(4d^2)$	↘ 0

Donc $N(t)$ est maximal pour $t_1 = 4d^2$ et $N(4d^2) = \dfrac{1}{2d}e^{-\frac{1}{2}}$.

Chapitre 5
La fonction logarithme népérien

3 1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}$ et $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}$ donc $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

2. On obtient la courbe ci-dessous.



7 **a)** $\ln(5-2x)=1$ a un sens pour $x<\frac{5}{2}$.
Cette équation équivaut à $5-2x=e$, d'où $x=\frac{5-e}{2}<\frac{5}{2}$, donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{\frac{5-e}{2}\right\}$.

b) De même pour $x<2$ l'équation équivaut à $2-x=e^{-3}$ d'où l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{2-e^{-3}\}$.

c) Pour $x<-2\sqrt{2}$ ou $x>2\sqrt{2}$ l'équation est équivalente à $x^2-8=1$ soit $x_1=3$ et $x_2=-3$. L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{-3\,;3\}$.

d) $1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$ pour $x<0$ ou $x>1$, l'équation est équivalente à $1-\frac{1}{x}=e^2$ d'où $\frac{1}{x}=1-e^2$ et $x=\frac{1}{1-e^2}<0$ donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{1-e^2}\right\}$.

13 **a)** L'inéquation a un sens lorsque $x>2$ et $x>\frac{1}{2}$, soit $x>2$. Elle est équivalente à : $x-2\leqslant 2x-1$ soit $-x\leqslant 1$ d'où $x\geqslant -1$. Donc $\mathscr{S}=]2\,;+\infty[$.

b) L'inéquation a un sens pour $x<0$ et $x^2-4>0$, soit $x\in]-\infty\,;-2[$. Elle est équivalente à $-3x\geqslant x^2-4$ soit $x^2+3x-4\leqslant 0$ c'est-à-dire $x\in[-4\,;1]$. Donc la solution est l'ensemble $\mathscr{S}=[-4\,;-2[$.

c) L'inéquation a un sens pour $x>0$ et $1+\frac{2}{x}>0$, soit $x\in]0\,;+\infty[$. Elle est équivalente à $1+\frac{2}{x}-x\geqslant 0$ soit $\frac{x^2-x-2}{x}\leqslant 0$ ou $\frac{(x+1)(x-2)}{x}\leqslant 0$, c'est-à-dire :
$x\in[-1\,;2]$. Or $x\in]0\,;+\infty[$
donc $\mathscr{S}=]0\,;2]$.

d) L'inéquation a un sens pour $x>0$ et $x(x-2)>0$, soit $x\in]2\,;+\infty[$. Elle est équivalente à $x^2-3x\geqslant 0$ soit $x<0$ ou $x\geqslant 3$, donc $\mathscr{S}=[3\,;+\infty[$.

14 $a=\ln 3-\ln 3=0$; $b=-\ln 2^4=-4\ln 2$; $c=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}\ln 2$.

23 **a)** L'équation a un sens pour $x+3>0$ et $x+2>0$ et $x+11>0$ soit $x\in]-2\,;+\infty[$. Elle équivaut à $\ln(x+3)(x+2)=\ln(x+11)$ soit $x^2+5x+6=x+11$ ou $x^2+4x-5=0$. Ainsi $x_1=1$ et $x_2=-5$. Or $x\in]-2\,;+\infty[$ donc $\mathscr{S}=\{1\}$.
b) L'équation a un sens pour $(x+3)(x+2)>0$ et $x+11>0$ soit $x\in]-11\,;-3[\cup]-2\,;+\infty[$. Elle équivaut à $x^2+4x-5=0$ donc $\mathscr{S}=\{-5\,;1\}$.

27 **a)** $e^{3x}-4e^x=0$ ou
$e^x[e^{2x}-4]=e^x[e^x+2][e^x-2]=0$.
Or $e^x>0$ donc $e^x=2$ et $\mathscr{S}=\{\ln 2\}$.

b) $e^x(e^x-2)<0$ donc $\mathscr{S}=]-\infty\,;\ln 2[$.

c) $e^{x+\ln 4}=4e^x>\frac{2}{3}$ ou $e^x>\frac{1}{6}$ et $\mathscr{S}=]-\ln 6\,;+\infty[$.

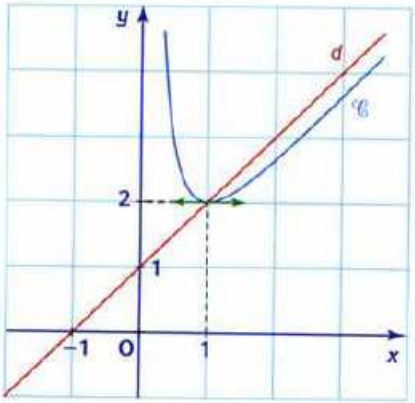
d) $e^x>0$ donc l'inéquation est équivalente à $e^{x+(x+2)}\geqslant 3$ soit $2x+2\geqslant\ln 3$ soit $x\geqslant\frac{\ln 3-2}{2}$ et $\mathscr{S}=\left[\frac{\ln 3-2}{2}\,;+\infty\right[$.

29 **1.** $f'(x)=\frac{1}{x}$.
2. En $x=1$, $f(1)=2$ et $f'(1)=1$ donc $y=1(x-1)+2=x+1$.

36 **a)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln x}{x}=+\infty$.

42 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $y=x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
2. $f(x)-(x+1)=-\frac{\ln x}{x}$ donc $f(x)>x+1$ si et seulement si $0<x<1$. Il en résulte que $\mathscr{C}$ est au-dessus de d lorsque $0<x<1$. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite d soit ainsi disposées :

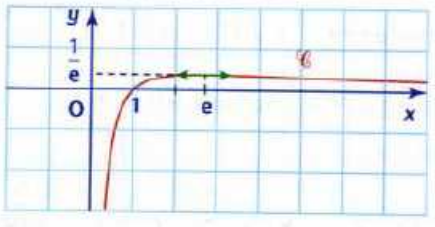


48 **a)** $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

b) $u(x)=\frac{x-1}{x+1}$ donc $u'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ donc $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$.

54 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; pour tout réel $x>0$ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ d'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



2. $f(x_0)=\frac{\ln x_0}{x_0}$, $f'(x_0)=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}$ d'où l'équation de T_0 :
$y=\left(\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\right)(x-x_0)+\frac{\ln x_0}{x_0}$ soit
$y=\frac{(1-\ln x_0)}{x_0^2}x+\frac{2\ln x_0-1}{x_0}$.

3. T_0 passe par l'origine du repère si et seulement si $2\ln x_0-1=0$ soit $\ln x_0=\frac{1}{2}$ et $x_0=\sqrt{e}$.

Chapitre 6
Les fonctions puissances. Croissances comparées

1 $a=e^{-\frac{1}{\ln 4}\ln 4}=\frac{1}{e}$;
$b=e^{\frac{1}{\ln 4}\ln 2}=e^{\frac{1}{2\ln 2}\ln 2}=\sqrt{e}$;
$c=\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}=e^{+\frac{1}{3}\ln 8}=e^{\ln 2}=2$.

2 **a)** $x^{\sqrt{3}}\leqslant\frac{1}{3}$ équivaut à $\sqrt{3}\ln x\leqslant-\ln 3$ soit $\ln x\leqslant-\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}$ ou $x\leqslant e^{-\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}}$.

3 **e)** Pour tout $x>0$, $(\sqrt{x})^x>x^{\sqrt{x}}$ équivaut à $e^{x\ln\sqrt{x}}>e^{\sqrt{x}\ln x}$ ou encore à $\frac{1}{2}x\ln x-\sqrt{x}\ln x>0$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x[\sqrt{x}-2]>0$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=]4\,;+\infty[\cup]0\,;1[$.

12 $1+4+\ldots+4^n$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 1. Donc
$1+4+\cdots+4^n=\frac{1(1-4^{n+1})}{1-4}=\frac{4^{n+1}-1}{3}$.
D'où $1+4+\cdots+4^n\geqslant 10^5$ équivaut à $\frac{4^{n+1}-1}{3}\geqslant 10^5$ c'est-à-dire $4^{n+1}\geqslant 3\cdot 10^5+1$.
Donc $(n+1)\geqslant\frac{\ln(3\cdot 10^5+1)}{\ln 4}$ soit $n\geqslant 8{,}09\ldots$ donc $n\geqslant 9$.

15 $A=\frac{3\times 3\sqrt{3}\times 3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}}=3^{1+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}=3^{\frac{11}{3}}$.
$B=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{3}{3}}=5$.

24 **a)** Pour tout $x>0$,
$f'(x)=e^x\left[x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right]=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^x(3x+1)$.

b) Pour tout $x>0$,
$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\ln x+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=x^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}\ln x+1\right]$.

34 **a)** $f(x)=x^2-\ln x^5$ équivaut, pour tout $x>0$, à $f(x)=x^2\left[1-5\frac{\ln x}{x^2}\right]$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Pour tout $x>0$,
$f(x)=x-80\ln x=x\left[1-80\frac{\ln x}{x}\right]$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

41 Notons g la fonction : $x \mapsto e^{x\ln 2}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $g'(x) = \ln 2 e^{x\ln 2}$ et $g'(0) = \ln 2$.

De plus, $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{e^{x\ln 2}-1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln 2$.

Chapitre 7
Limites de suites

1 $0 < \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow (\sqrt{n})^3 > 10^3$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} > 10 \Leftrightarrow n > 100$ donc $n_0 = 100$.

11 **a)** $u_n = f(n)$ où f est la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{2x+3}{3x-1}$, dont la limite en $+\infty$ est $\frac{2}{3}$, donc (th. 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

b) De même, $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto \frac{5x-3}{3x-5}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{3}$, donc (th. 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}$.

15 **a)** $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \frac{4n-3}{n+1}$ et $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

De plus $v_n = g(n)$ avec $g(x): x \mapsto \frac{4x-3}{x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

Comme $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ (th. 3).

b) $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \frac{2n^2-1}{3n+7}$ et $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

$v_n = g(n)$ avec $g: x \mapsto \frac{2n^2-1}{3n+7}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (th. 3).

30 **1.** $\sqrt{n^2+1} \geqslant 1$ et $0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant 1$.

2. Pour tout n non nul, $n^2+1 > n^2$ qui équivaut à $\sqrt{n^2+1} > n$ et à $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$ donc $u_n < v_n$.

3. Le second nous permet de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $0 < u_n < v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

33 **a)** Pour tout naturel n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$; la suite (u_n) est bornée.

b) Pour tout naturel n non nul, $n^2 \geqslant 1$, donc : $0 < \frac{1}{n^2} \leqslant 1$; $1 \leqslant u_n \leqslant 2$; la suite (u_n) est bornée.

c) Pour tout entier naturel n, $0 < \frac{1}{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$; la suite (u_n) est bornée.

d) Pour tout naturel n, $0 < \frac{1}{1+n^2} \leqslant 1$ et $0 < u_n \leqslant 1$; la suite (u_n) est bornée.

39 • $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n+6} + \frac{1}{2n+4} > 0$; la suite (u_n) est (strictement) croissante.

• Pour tout naturel n, $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$ et $v_n > v_{n+1}$; la suite (v_n) est (strictement) décroissante.

• $v_n - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4} = \frac{3n+5}{2n^2+6n+4}$.

La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{3x+5}{2x^2+6x+4}$ a pour limite 0 en $+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

48 **1.** $1 \leqslant \frac{3}{2} \leqslant 2$, donc la propriété $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ est vérifiée au rang 0.

Supposons-la vérifiée au rang n.

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f: x \mapsto x^2 - 2x + 2$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 2(x-1)$.

Il en résulte que f est croissante sur $[1\,;2]$ et pour tout $x \in [1\,;2]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$.

Or $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$ donc $f(x) \in [1\,;2]$ et si $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$: la propriété est vraie au rang $(n+1)$.

En conclusion, pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et la suite (u_n) est bornée.

2. **a)** Résulte de $(x-2)(x-1) = x^2 - 2x + 2 - x$.

b) Sur $[1\,;2]$, $(x-2)(x-1) < 0$ donc comme $u_n \in [1\,;2]$, $u_{n+1} - u_n < 0$; la suite (u_n) est décroissante.

3. Minorée par 1, elle converge.

Remarque. Graphiquement, ou à l'aide d'un tableau, on peut conjecturer que la limite est 1.

58 **a)** Pour tout n, $-1 \leqslant \cos n\pi \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème 4).

b) Pour $n \neq 0$, $u_n = \frac{\sin n}{n + \frac{1}{n}}$, donc :

$$\frac{-1}{n+\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{n}} ;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème 4).

61 u_n est la somme de n termes positifs dont le plus grand est $\frac{n}{n^2+1}$ et le plus petit $\frac{n}{n^2+n}$, car $n^2+1 < n^2+2 < \cdots < n^2+n$;

$n \times \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{n}{n^2+1}$ (résolu 6, p. 169)

soit : $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$, le théorème 4 nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

71 **1.** **a)** $u_0 = 0$, donc la propriété $u_n \geqslant 0$ est vraie au rang 0.

Supposons-la vraie au rang n. Puisque $u_n \geqslant 0$, $2u_n + 1$ et $u_n + 2$ sont positifs et, donc, leur quotient u_{n+1} aussi. Donc tous les termes de la suite (u_n) sont bien positifs.

b) $u_0 = 0$, donc la propriété $u_n < 1$ est vraie au rang 0. Supposons-la vraie au rang n.

$u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} = \frac{u_n+2+u_n-1}{u_n+2} = 1 + \frac{u_n-1}{u_n+2}$,

donc $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ et puisque $0 \leqslant u_n < 1$, $u_{n+1} - 1 < 0$ et $u_{n+1} < 1$. Pour tout n, $u_n < 1$ et la suite (u_n) est bornée.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1-u_n^2-2u_n}{u_n+2} = \frac{1-u_n^2}{u_n+2}$

donc, puisque $0 \leqslant u_n < 1$, $1 - u_n^2 > 0$ et $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est croissante. Croissante et bornée, (u_n) converge.

3. $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+2} = \frac{1}{3} v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$.

4. $v_n = (-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-1}{3^n}$, et, d'autre part :

$v_n(u_n+1) = u_n - 1$, soit $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

et $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ (suite géométrique et $-1 < \frac{1}{3} < 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5. $u_n > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - u_n < 0{,}01$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}} < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3^n} < \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{3^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1{,}99}{3^n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 199 < 3^n.$$

Donc $N = 5$ car $3^4 = 81$ et $3^5 = 243$.

74

• $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$

$$= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} > 0 ;$$

$u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$

$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0 ;$$

la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Chapitre 8
Intégration et primitives

5 **1.** • $I(f)$ est la « somme algébrique » des aires de deux triangles :

$I(f) = \frac{2 \times 1}{2} - \frac{4 \times 2}{2} = -3$.

• $I(g)$ est la somme de l'aire d'un trapèze et de l'aire d'un triangle :

$I(g) = \frac{(1+2)\times 2}{2} + \frac{4\times 1}{2} = 5.$

2. $I(f+4g) = I(f) + 4I(g) = 17.$
$I(5f-2g) = 5I(f) - 2I(g) = -25.$

8 **a)** Sur $[0;9]$, $f : t \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{t}}$ est strictement décroissante ($f' < 0$), donc pour tout t dans $[0;9]$, $f(9) \leqslant f(t) \leqslant f(0)$ soit :

$$\frac{1}{4} \leqslant f(t) \leqslant 1.$$

D'après l'inégalité de la moyenne :

$$\frac{9}{4} \leqslant \int_0^9 f(t)\,dt \leqslant 9.$$

b) Sur $[1;2]$, $g : x \mapsto \sqrt{1+x^3}$ est strictement croissante ($g' > 0$) donc pour tout x de $[1;2]$, $g(1) \leqslant g(x) \leqslant g(2)$ soit $\sqrt{2} \leqslant g(x) \leqslant 3$.
D'après l'inégalité de la moyenne :

$$\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 g(x)\,dx \leqslant 3.$$

19 **a)** Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$F'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = f(x).$

b) Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$F'(x) = 2\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \sqrt{e^x} = f(x).$

36 **a)** Sur $I =]-\infty ; -\frac{1}{2}[$, $f = u'u^{-2}$ avec $u : x \mapsto 2x+1$ et $u' : x \mapsto 2$;

F est du type $-\frac{1}{u} + k$.

$F(-1) = 0$ implique $k = -1$ donc :

$F(x) = -\frac{1}{2x+1} - 1.$

b) Sur $I =]-\infty ; 3[$, $f' = \frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto 3-x$, $u' : x \mapsto -1$ et $u > 0$;

F est du type $\ln u + k$.
$F(1) = 1$ implique $k = 1 - \ln 2$ donc :
$F(x) = \ln(3-x) + 1 - \ln 2.$

c) Sur $I =]-1 ; 1[$, $f' = \frac{1}{2}u'u^{-2}$ avec $u : x \mapsto x^2 - 1$, $u' : x \mapsto 2x$;

F est du type $-\frac{1}{2u} + k$.

$F(0) = 0$ implique $k = -\frac{1}{2}$ donc :

$F(x) = -\frac{1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2}.$

42 **a)** $I = [\sqrt{2x+5}]_1^2 = 3 - \sqrt{7}.$

b) $I = \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi} = \sqrt{2}.$

c) $I = \int_{-2}^{-1}\left(1 - \frac{3}{x}\right)dx = [x - 3\ln(-x)]_{-2}^{-1}$
$= 3\ln 2 + 1.$

d) $I = \left[\frac{1}{2}\ln(4-x^2)\right]_{-1}^{1} = 0.$

48 **1.** Pour tout réel $x \neq 1$,

$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$

2. $I = \left[x + 2\ln(1-x) - \frac{1}{x-1}\right]_{-5}^{0} = \frac{15}{4} - 4\ln 2.$

54 **a)** $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t}\,dt.$

On pose $u(t) = t-2$ et $v'(t) = e^{2t}$
alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$.

D'où $I = \left[\frac{1}{2}(t-2)e^{2t}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2t}\,dt$

$I = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_1^2 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^4.$

b) $J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$,
alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = 2\sqrt{x+1}$.

D'où $J = [2x\sqrt{x+1}]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$

$J = 2\sqrt{2} - \left[\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

67 **a)** Sur I, $f(x) = (1 + \tan^2 x)\tan x$.
On reconnaît $f = u'u$ avec $u : x \mapsto \tan x$ et $u' : x \mapsto 1 + \tan^2 x$, donc :
$F = \frac{1}{2}u^2$. Ainsi $F(x) = \frac{1}{2}\tan^2 x$.

b) Sur I, $f(x) = (1 + \tan^2 x) - 1$ donc :
$F(x) = \tan x - x$.

c) Sur I, $f(x) = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x}$.
On reconnaît $f = u'u^{-2}$ donc $F = -u^{-1} = -\frac{1}{u}$.
Ainsi $F(x) = -\frac{1}{\tan x}$.

75 Pour tout x de I,

$f(x) = 2 + \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1}.$

Sur I, $2x+1 > 0$ mais $2x-1 < 0$ ainsi :
$x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(2x+1)$
et $x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1-2x)$.

Donc $F(x) = 2x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right).$

86 **1.** $f'(x) = 4\cos x \sin^3 x$;
$f''(x) = -4\sin^4 x + 12\cos^2 x \sin^2 x.$

2. $f''(x) = -4f(x) + 12(1 - \sin^2 x)\sin^2 x$
$= -4f(x) + 12\sin^2 x - 12\sin^4 x$
$= -16f(x) + 12\left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)$
$= -16f(x) - 6\cos(2x) + 6.$

D'où $f(x) = -\frac{1}{16}f''(x) - \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$

3. Sur $\mathbb{R}$, une primitive F de f est définie par :

$F(x) = -\frac{1}{16}f'(x) - \frac{3}{16}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$

$F(x) = -\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x - \frac{3}{16}\sin(2x) + \frac{3}{8}x.$

102 **1.** $J = \left[\frac{1}{2}\ln(1 + 2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$

2. Par linéarité de l'intégration :

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x) + \cos x}{1 + 2\sin x}\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x + \cos x}{1 + 2\sin x}\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1.$

Ainsi $I = 1 - J$ donc $I = 1 - \frac{1}{2}\ln 3.$

107 **1.** $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ u.a.

2. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont symétriques par rapport à (OK)
donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}_3) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = \frac{1}{3}$ u.a.
$\mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = 1 - [\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_3)]$; ainsi :
$\mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = \frac{1}{3}$ u.a.

3. $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ exprime l'aire (en u.a) du domaine $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$; d'où $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$.

118 Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt.$

On pose $u(t) = \cos t$ et $v'(t) = e^{-2t}$,
alors $u'(t) = -\sin t$ et $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$.

D'où $F(x) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\sin t\,dt$

$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\sin t\,dt.$

On pose : $G(x) = \int_0^x e^{-2t}\sin t\,dt.$

D'où $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}G(x)$ [1].

Par une seconde intégration par parties :

$G(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin x + \frac{1}{2}F(x)$ [2].

On déduit de [1] et [2] :

$$F(x) = e^{-2x}\left(-\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right) + \frac{2}{5}.$$

128 Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$, d'où $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = f(x+1) - f(x)$
$= \int_x^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt.$

Sur l'intervalle $[x; x+1]$, $f' : t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$ est strictement décroissante ($f'' < 0$) donc :

$f'(x+1) \leqslant f'(t) \leqslant f'(x)$ soit :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne,

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \times 1 \leqslant \int_x^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1$

donc $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

140 La position des courbes :
$\mathcal{C}_1 : y = \sin x$ et $\mathcal{C}_2 : y = x\sin x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, est définie par le signe de la fonction différence $\Delta : x \mapsto \sin x - x\sin x$.
Or $\Delta(x) = (1-x)\sin x$ avec $\sin x \geqslant 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc le signe de $\Delta(x)$ est celui de $1 - x$.

• $\Delta(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$: $\mathscr{C}_1$ au-dessus de $\mathscr{C}_2$;

• $\Delta(x) \leqslant 0$ sur $\left[1\,;\frac{\pi}{2}\right]$: $\mathscr{C}_1$ en dessous de $\mathscr{C}_2$.

On note $\mathscr{A}$ l'aire cherchée :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 \Delta(x)\,dx - \int_1^{\frac{\pi}{2}} \Delta(x)\,dx.$$

Par intégration par parties :
On pose $u(x) = 1 - x$ et $v'(x) = \sin x$,
alors $u'(x) = -1$ et $v(x) = -\cos x$.

$$\int_0^1 \Delta(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\sin x\,dx$$
$$= [-(1-x)\cos x]_0^1 - \int_0^1 \cos x\,dx$$
$$= 1 - [\sin x]_0^1 = 1 - \sin 1.$$

De même : $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \Delta(x)\,dx = -1 + \sin 1$.

Donc $\mathscr{A} = 2(1 - \sin 1)$ u.a.

146 **1.** La section est un disque centré sur l'axe (Oy).

2. Le carré du rayon est $x^2 = 4 - y$.

L'aire du disque est $S(y) = \pi(4 - y)$.

$$\mathscr{V} = \int_0^4 S(y)\,dy$$

$$\mathscr{V} = \pi\int_0^4 (4-y)\,dy = \pi\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \text{ u.v.}$$

155 **1. a)** f est continue et positive sur $[n\,;n+1]$ donc u_n représente l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur cet intervalle.

b) Par intégration par parties avec :

$$u(x) = x+1, \quad v'(x) = e^{-x},$$
$$u'(x) = 1, \quad v(x) = -e^{-x},$$

$$u_n = [-(x+1)e^{-x}]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$$

$$u_n = -(n+2)e^{-(n+1)} + (n+1)e^{-n} + [-e^{-x}]_n^{n+1}$$

$$u_n = -(n+3)e^{-(n+1)} + (n+2)e^{-n}.$$

c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$ d'où on déduit que (u_n) converge vers 0.

2. $S_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

$S_n = \int_0^{n+1} f(x)\,dx$ (Relation de Chasles).

Or par intégration par parties :

$$\int_0^{n+1} (x+1)e^{-x}\,dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^{n+1} + \int_0^{n+1} e^{-x}\,dx$$
$$= -(n+2)e^{-(n+1)} + 1 + [-e^{-x}]_0^{n+1}$$
$$= -(n+3)e^{-(n+1)} + 2.$$

$S_n = -(n+3)e^{-(n+1)} + 2$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

Chapitre 9
Éléments de combinatoire

1 **a)** $\frac{21!}{20!} = \frac{21\times 20\times\ldots\times 2\times 1}{20\times 19\times\ldots\times 2\times 1} = 21$.

b) $\frac{17!}{15!} = 17\times 16 = 272$.

c) $\frac{6!-5!}{5!} = \frac{5!(6-1)}{5!} = 5$.

8 **1.** Former un classement revient à remplir 12 cases numérotées de 1 à 12.

1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e	11e	12e

Par le principe des cases, il y a :
$12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ choix c'est-à-dire $12! = 479\,001\,600$.

2. Ici tout se passe comme si l'on devait remplir 3 cases numérotées de 1 à 3.

1er	2e	3e

Il y a donc $8\times 7\times 6 = 336$ arrivées possibles des 3 premiers.

16 • $n\binom{n-1}{p-1} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$ car $n\times(n-1)! = n!$

• $p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$

car $\frac{p}{p!} = \frac{1}{(p-1)!}$. Ce qui prouve le résultat.

20 Une poignée de main est définie par un ensemble de deux mains, il y a donc autant de poignées de mains que de combinaisons « 2 parmi 18 » soit 153.
Une autre méthode consiste à dire que chaque personne serre la main de 17 personnes, il y a donc 17×18 poignées de mains, qu'il faut diviser par deux, car chacune d'elles est comptée 2 fois.
Ou encore la première personne serre 17 mains, la suivante seize (elle ne resserre pas la main de la 1re personne), la suivante quinze etc., jusqu'à 1.

Or $1 + 2 + \cdots + 17 = \frac{17\times 18}{2} = 153$.

36 **1.** Tout se passe comme si on devait remplir 8 cases avec 0 ou 1 à chaque case.
Il y a donc 2^8 octets possibles.

2. Les première et dernière cases sont remplies par 0, pour les autres, on a encore 2 choix : 0 ou 1.
Il y a donc 2^6 octets possibles.

3. On choisit les quatre cases où l'on met 1 : il y a $\binom{8}{4}$ choix. On met 0 dans les autres.

Il y a donc $\binom{8}{4} = 70$ octets possibles.

Chapitre 10
Probabilités

5 L'univers est l'ensemble des combinaisons de deux cartes parmi trente-deux et il y a équiprobabilité.
Nombre de cas possibles $\binom{32}{2}$. D'où :

a) $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{7}{124}$; **b)** $\frac{\binom{8}{1}\times\binom{24}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{12}{31}$;

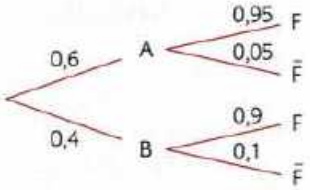
c) $\frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{69}{124}$; **d)** $\frac{\binom{8}{1}\times\binom{8}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{4}{31}$.

13 $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

d'où $p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B) = \frac{1}{6}$.

$p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{1}{3}$; $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{1}{2}$.

22 L'arbre pondéré suivant traduit la situation. A est l'événement « le bulbe est de la variété A », B « le bulbe est de la variété B », F « le bulbe donne une fleur ».



D'après la formule des probabilités totales :
$p(F) = p(A\cap F) + p(B\cap F)$
d'où $p(F) = 0{,}6\times 0{,}95 + 0{,}4\times 0{,}9 = 0{,}93$.

27 $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (les entiers premiers réalisant B sont 2, 3, 5).
$A\cap B$ contient la seule issue 2.
D'où : $p(A\cap B) = \frac{1}{6}$.
Ainsi $p(A\cap B) \neq p(A)\times p(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

41 L'univers est l'ensemble des combinaisons de 3 sujets parmi 60 et il y a équiprobabilité.

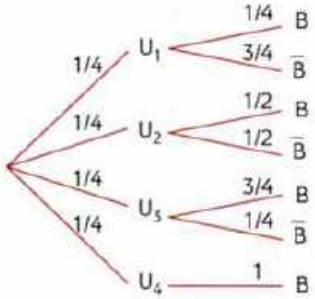
1. a) Le candidat ignore 45 sujets.
Notons A « le candidat n'a étudié aucun des trois sujets ».

$$p(A) = \frac{\binom{45}{3}}{\binom{60}{3}} = \frac{1\,419}{3\,422}.$$

b) D'où $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{2\,003}{3\,422}$.

2. a) $p(A) = \frac{7}{59}$. **b)** $p(\bar{A}) = \frac{52}{59}$.

51 Un arbre résume la situation.
B signifie « la boule est noire ».



1. D'après la formule des probabilités totales :
$p(B) = p(B\cap U_1) + p(B\cap U_2) + p(B\cap U_3) + p(B\cap U_4)$

$p(B) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\times 1 = \frac{5}{8}$.

2. $p_B(U_2) = \frac{p(U_2\cap B)}{p(B)}$, soit $p_B(U_2) = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$.

66 L'univers est l'ensemble des combinaisons de trois boules parmi dix et il y a équiprobabilité.
Nombre d'issues possibles, $\binom{10}{3} = 120$.

1. Loi de X

x_k	$p[X = x_k]$
0	$\frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{1}{6}$
4	$\frac{\binom{4}{1} \times \binom{6}{2}}{120} = \frac{1}{2}$
15	$\frac{\binom{4}{2} \times \binom{6}{1}}{120} = \frac{3}{10}$
100	$\frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{1}{30}$

2. $E(X) = \frac{59}{6}$ d'où $E(X) - 10 = -\frac{1}{6}$.
Le jeu est défavorable au joueur.

3. **Solution 1** : $11 - E(X) = \frac{7}{6}$ (bénéfice moyen en € espéré par l'organisateur).
Solution 2 : Le problème revient à considérer la variable aléatoire $Y = X - 1$. D'où :

$$E(Y) = E(X) - 1 = \frac{53}{6}.$$

Bénéfice espéré par l'organisateur :

$$10 - E(Y) = \frac{7}{6}.$$

D'où le même résultat dans les deux cas !

Chapitre 11
Lois de probabilités

11 **1.** La situation est celle d'une expérience de Bernoulli d'ordre 5 avec pour succès S « la machine n'est pas en panne un jour donné » de probabilité $p = 0{,}95$.
Soit X le nombre de jours sans panne.
X suit une loi $\mathcal{B}(5 ; 0{,}95)$. Calculons $P(X = 0)$:
$P(X = 0) = 0{,}95^5 \approx 0{,}773\,8$.

2. Calculons $P(X \leqslant 1)$.
$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$
$= 0{,}95^5 + 5 \times 0{,}95^4 \times 0{,}05$
$P(X \leqslant 1) \approx 0{,}977\,4$.

17 Notons R « la pièce est rejetée ».
R signifie $(d \leqslant 198{,}1)$ ou $(d \geqslant 201{,}9)$ (réunion de deux événements incompatibles).
d suit la loi uniforme sur $[198 ; 202]$ donc :
$P(R) = P(d \leqslant 198{,}1) + P(d \geqslant 201{,}9)$

$$= \frac{0{,}1}{4} + \frac{0{,}1}{4} = 0{,}05.$$

23 X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{99}$ d'où :

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200) = \int_{100}^{200} \frac{\ln 2}{99} \times e^{-\frac{\ln 2}{99}x}\,dx$$

$$= -e^{-\frac{200 \ln 2}{99}} + e^{-\frac{100 \ln 2}{99}} \approx 0{,}250.$$

36 **1.** Répondre au QCM est une expérience de Bernoulli d'ordre 6. La variable X qui indique le nombre de réponses justes suit une loi $\mathcal{B}\left(6 ; \frac{1}{4}\right)$.
Calculons $P(x \geqslant 3)$.
$P(x \geqslant 3) = 1 - P(x \leqslant 2)$
$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$.
D'où $P(x \geqslant 3) \approx 0{,}169\,4$.

2. De même, X suit une loi $\mathcal{B}\left(6 ; \frac{1}{3}\right)$ d'où :
$P(x \geqslant 3) \approx 0{,}319\,6$.

52 **1.** La densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ si } 8 \leqslant x \leqslant 12 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

2. La durée du trajet est comprise entre 8 et 9,5 min.

$$P(8 \leqslant X \leqslant 9{,}5) = \frac{9{,}5 - 8}{4} = 0{,}375.$$

3. L'usager rate son train lorsque la rame arrive en M_2 après 8 h 10. La durée du trajet doit dépasser 10 min.

$$P(10 \leqslant X \leqslant 12) = \frac{12 - 10}{4} = \frac{1}{2}.$$

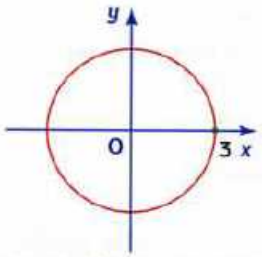
57 **1.** $P(T_A \geqslant 300) = e^{-300\lambda} = e^{-0{,}12}$.
2. Notons R « A et B fonctionnent après 300 jours ».
R signifie $(T_A \geqslant 300) \cap (T_B \geqslant 300)$.
T_A et T_B sont indépendantes donc :
$P(R) = P(T_A \geqslant 300) \times P(T_B \geqslant 300)$
$= (e^{-0{,}12})^2 = e^{-0{,}24}$
$P(R) \approx 0{,}787$.
3. Notons Q « A et B sont en panne avant 300 jours ».
Q signifie $(T_A < 300) \cap (T_B < 300)$.
De même :
$P(Q) = P(T_A < 300) \times P(T_B < 300)$
$= (1 - e^{-0{,}12})^2$
$\overline{Q}$ signifie « la machine fonctionne après 300 jours ».
$P(\overline{Q}) = 1 - (1 - e^{-0{,}12})^2 \approx 0{,}987$.

Chapitre 12
Les nombres complexes

3 $z_1 = 2 + 5i$; $z_2 = -6 + 3i$; $z_3 = 32 - 35i$.

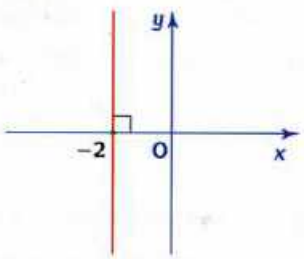
7 $z_1 = -2i$; $z_2 = 7 + i$; $z_3 = \frac{-3 + 4i}{5}$.

15 **a)**



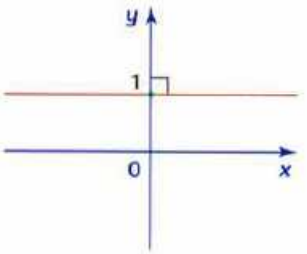
$|z| = 3$ équivaut à $OM = 3$. L'ensemble est le cercle de centre O et de rayon 3.

b)



$\mathrm{Re}(z) = -2$ signifie que l'abscisse de M est égale à −2. L'ensemble est la droite d'équation $x = -2$.

c)



$\mathrm{Im}(z) = 1$ signifie que l'ordonnée de M est égale à 1. L'ensemble est la droite d'équation $y = 1$.

18 **a)** $\overline{Z} = 2 - 3i\overline{z}$. **b)** $\overline{Z} = (1 - i\overline{z})(1 + 2\overline{z})$.
c) $\overline{Z} = \frac{1 - i\overline{z}}{3 + \overline{z}}$. **d)** $\overline{Z} = \overline{z}^3 - 2i\overline{z}^2 + 1 + 3i$.

24 $z_A = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
$z_B = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.
$z_C = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.
$z_D = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

30 **a)** $(1 - i)^2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
b) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.
c) $(1 - i\sqrt{3})(1 + i) =$
$2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$.
d) $\frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}} = 8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

32 **1.** • $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
• $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
• $\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$.
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$.
3. En identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

34 $z_1 z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{12}}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; $z_1^3 = e^{i\pi}$;
$z_1 z_2 z_3 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $z_3^4 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $\frac{z_2}{z_3} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$;
$\frac{1}{z_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$; $\overline{z_3} z_1 z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$.

39 • $z_1 = e^{i\pi}e^{i\alpha} = e^{i(\alpha + \pi)}$;
$|z_1| = 1$ et $\arg z_1 = \alpha + \pi$.
• $z_2 = -(\cos\alpha - i\sin\alpha) = -e^{-i\alpha} = e^{i(\pi - \alpha)}$;
$|z_2| = 1$ et $\arg z_2 = \pi - \alpha$.
• $z_3 = i(-i\sin\alpha - \cos\alpha)$
$= -i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$= e^{\frac{3i\pi}{2}}e^{i\alpha} = e^{i\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$
$|z_3| = 1$ et $\arg z_3 = \alpha + \frac{3\pi}{2}$.

Chapitre 13
Application des nombres complexes à la géométrie

8 1. **b)** $\overrightarrow{AB}(1-2i)$, $\overrightarrow{AC}(2+i)$

d'où $Z_{\overrightarrow{AC}} = i\,Z_{\overrightarrow{AB}}$.

2. $\dfrac{c-a}{b-a} = i$ d'où $\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$;

ainsi ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

3. Alors « ABA'C est un carré » équivaut à :

« $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$ » soit $a' - c = b - a$

donc $a' = 4 - \dfrac{1}{4}i$.

17 Γ désigne l'ensemble des points $M(z)$ cherchés.

a) On pose $A(3)$ et $B(1+i)$.

$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$

donc Γ est la médiatrice de [AB].

b) On pose $C(-1-i)$ et $D(2-3i)$.

$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - z_C| = |z - z_D|$

donc Γ est la médiatrice de [CD].

c) On pose $I(2-i)$.

$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - z_I| = \sqrt{5}$ donc Γ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

d) On pose $J(-3+i)$.

$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - z_J| \leq 2$ donc Γ est le disque fermé de centre J et de rayon 2.

27 1. Par r : $G \mapsto H$; l'angle de r est :

$\theta = (\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \arg\left(\dfrac{z_H}{z_G}\right)$,

donc $\theta = \arg\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Une écriture complexe de r est : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

2. Par s : $E \mapsto F$; le centre I de s est le milieu de [EF].

$z_I = -\dfrac{1}{2} + 2i$; s est un demi-tour d'écriture complexe :

$z' - z_I = e^{i\pi}(z - z_I)$, d'où $z' = -z - 1 + 4i$.

40 1. $d = e^{i\frac{\pi}{3}}a = -4 - 4i\sqrt{3}$;

$c = \dfrac{-3a + b\sqrt{3} + 3d}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 4i$.

2. $|a| = |b| = |c| = |d| = 8$ donc A, B, C, D sont sur le cercle de centre O et de rayon 8.

3. **a)** $\overrightarrow{AD}(4 - 4i\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC}(4\sqrt{3} - 12i)$

d'où $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{AD}$; de plus $AB = DC = 8\sqrt{2}$, donc ABCD est un trapèze isocèle.

b) $\dfrac{c-a}{d-b} = i$ donc :

$\dfrac{AC}{BD} = 1$ et $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

47 Δ_1, Δ_2, Δ_3 désignent les ensembles des points.

Rappel : lorsque $z \neq 0$,

$\arg(-z) = \pi + \arg(z)$ et

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

a) $M \in \Delta_1 \Leftrightarrow \pi + \arg(z-1) = -\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \arg(z-1) = -\dfrac{7\pi}{6}$.

b) $M \in \Delta_2 \Leftrightarrow \pi + \arg(z-2-i) = \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \arg(z-2-i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

c) $M \in \Delta_3 \Leftrightarrow \arg(\overline{z-1+i}) = -\dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg(z-1+i) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ainsi Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les demi-droites ouvertes d'origines A(1), B(2 + i), C(1 − i) et dirigées respectivement par $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ tels que :

$(\vec{u}, \vec{u}_1) = -\dfrac{7\pi}{6}$, $(\vec{u}, \vec{u}_2) = -\dfrac{\pi}{2}$, $(\vec{u}, \vec{u}_3) = \dfrac{2\pi}{3}$.

50 On note Γ cet ensemble.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} |z-i| = |iz-i| & (1) \\ |z-i| = |z-iz| & (2) \end{cases}$$

On note Γ_1 et Γ_2 les ensembles définis par (1) et (2).

On pose $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |z-i| = |i||z-1|$

$\Leftrightarrow |z-i|^2 = |z-1|^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x - y = 0$.

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow |z-i| = |1-i||z|$

$\Leftrightarrow |z-i|^2 = 2|z|^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2(x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Ainsi Γ est la paire de points définis par (3).

65 1. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ donc $b = a + c$.

2. Par la rotation $R_{(A, -\alpha)}$: $B \mapsto M$

d'où $z - a = e^{-i\alpha}(b - a)$, donc $z = a + ce^{-i\alpha}$.

De même, $R_{(C, \alpha)}$: $B \mapsto M'$ d'où

$z' - c = e^{i\alpha}(b - c)$, donc $z' = c + ae^{i\alpha}$.

On en déduit que $e^{i\alpha}z = e^{i\alpha}a + c = z'$; donc M' est l'image de M par $R_{(O, \alpha)}$.

68 Par $R_{\left(M, \frac{\pi}{2}\right)}$: $B \mapsto A$

donc $a - m = i(b - m)$;

ainsi $m = \dfrac{a - ib}{1 - i} = \dfrac{a + b + i(a - b)}{2}$.

De même, en utilisant les quarts de tour directs centrés en N, P, Q :

$n = \dfrac{b + c + i(b - c)}{2}$, $p = \dfrac{c + d + i(c - d)}{2}$,

$q = \dfrac{d + a + i(d - a)}{2}$.

Ainsi,

$p - m = \dfrac{1}{2}[-a - b + c + d + i(-a + b + c - d)]$

et

$q - n = \dfrac{1}{2}[a - b - c + d + i(-a - b + c + d)]$.

On vérifie que $q - n = i(p - m)$ d'où :

$$\begin{cases} |q - n| = |p - m| \\ \arg(q - n) = \dfrac{\pi}{2} + \arg(p - m). \end{cases}$$

Donc MP = NQ et $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Chapitre 14
Le produit scalaire dans l'espace

1 **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -14$; $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\dfrac{59}{6}$; $\vec{w} \cdot \vec{u} = \dfrac{20}{3}$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$; $\vec{v} \cdot \vec{w} = \dfrac{7}{2}$; $\vec{w} \cdot \vec{u} = 8$.

6 **a)** $\delta = \dfrac{|-4 + 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$.

b) $\delta = \dfrac{|-2 - 6 - 1|}{\sqrt{2 + (-3)^2}} = \dfrac{9\sqrt{11}}{11}$.

8 **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$; $\vec{v} \cdot \vec{w} = -1$; $\vec{w} \cdot \vec{u} = -3$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$; $\vec{v} \cdot \vec{w} = \dfrac{7}{6}$; $\vec{w} \cdot \vec{u} = \dfrac{7}{6}$.

10

a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 5^2 - 4 = 21$.

b) $(2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - 3\vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{u}\|^2$

$= -8 - 6 \times 25 = -158$.

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 3\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - 3\|\vec{v}\|^2$

$= 25 + 12 - 4 - 3 \times 9 = 6$.

17 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{2} + 5\alpha$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{2} + 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{23}{50}$.

26 **a)** $x - y + d = 0$ et $1 - 0 + d = 0$, donc $d = -1$ et une équation de $\mathscr{P}$ est $x - y - 1 = 0$.

b) $\dfrac{2}{3}x + 4y - z + d = 0$ et $\dfrac{1}{3} + 12 + 1 + d = 0$,

donc $d = -\dfrac{40}{3}$ et une équation de $\mathscr{P}$ est :

$\dfrac{2}{3}x + 4y - z - \dfrac{40}{3} = 0$.

29 Notons $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des vecteurs normaux respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

a) $\vec{n}_1(1 ; -2 ; 1)$ et $\vec{n}_2(2 ; -4 ; 1)$ ne sont pas colinéaires : $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 11 \neq 0$: $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) $\vec{n}_1 = -2\vec{n}_2$: $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.

Le point A(−2 ; 0 ; 0) appartient à $\mathscr{P}$ mais pas à $\mathscr{Q}$: $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles et disjoints.

33 $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ donc le point C a pour coordonnées $(-1 ; -1 ; -\sqrt{2})$.

$\overrightarrow{AB}(\sqrt{2} - 1 ; -\sqrt{2} - 1 ; -\sqrt{2})$ et

$\overrightarrow{BC}(-\sqrt{2} - 1 ; \sqrt{2} - 1 ; -\sqrt{2})$.

$AB = BC = 2\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 - 1 + 2 = 0$: le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

51 **a)** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

b) $x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 3$.

c) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Chapitre 15
Droites et plans dans l'espace

6 **a)** $M\left(\dfrac{1}{2} ; 2\right)$ donc $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

soit $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

D'où $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; ainsi M est le barycentre de (A ; 3), (B ; −1), (C ; −4).

1. De même, N(1 ; −1) est le barycentre de (A ; 1), (B ; 1), (C ; −1) et $P\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, celui de (A ; 0), (B ; 1), (C ; 1).

17 **1.** Le plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$ a pour vecteur normal $\vec{j}(0 ; 1 ; 0)$; d a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 3 ; 0)$.

$\vec{j}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, donc d et $(O ; \vec{i}, \vec{k})$ sont sécants en un point K$(x ; y ; z)$ tel que :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{5}{3} \\ y = 0 \\ z = -4 \end{cases}.$$

2. $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ a pour vecteur normal $\vec{k}(0 ; 0 ; 1)$; or $\vec{k} \cdot \vec{u} = 0$ donc d est parallèle à $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

3. $\vec{u}$ dirige d' et I appartient à d', donc :

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

4. $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ a pour équation $z = 0$, d'où par exemple :

$$d'_0 : \begin{cases} x = -t \\ y = 3t, \ t \in \mathbb{R} \text{ et} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$d'_1 : \begin{cases} x = -s + 1 \\ y = 3s + 1, \ s \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

25 **1.** $\begin{cases} 3x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$.

Ainsi $d' : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

2. a) d' a pour vecteur directeur $\vec{u}'\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)$ et d pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; -1 ; 2)$. $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires ($\vec{u} = 2\vec{u}'$), donc d' est parallèle à d.

b) A(0 ; 1 ; −1) appartient à d et à d' ; donc $d = d'$;

48 **1.** Soit Δ l'ensemble des points M cherchés.

$\vec{u} = 2\overrightarrow{MG}$ avec G barycentre de (A ; 1), (B ; 2), (C ; −1) ; $\vec{v} = 2\overrightarrow{MI}$ avec I milieu de [DE].

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}$ colinéaire à $\overrightarrow{MI}$. Ainsi Δ est la droite (GI).

2. Soit Γ l'ensemble des points M cherchés.

$M \in \Gamma \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow MG = MI$.

Ainsi Γ est le plan médiateur de [GI].

53 **1.** M$(a ; 0 ; 0)$, N$(0 ; a ; 0)$, D$(0 ; 0 ; 1)$ $(a > 0)$ sont les points d'intersection du plan (DMN) avec les axes d'où (DMN) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{1} = 1$ soit $x + y + az = a$.

2. a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + a\overrightarrow{OD}$ donc $\overrightarrow{OP}(1 ; 1 ; a)$ et $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur normal à (DMN).

$$(OP) : \begin{cases} x = t \\ y = t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = at \end{cases}$$

b) Le paramètre t associé au point H est tel que :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = at \\ x + y + az = a \end{cases} \text{ d'où } t = \frac{a}{a^2 + 2}.$$

3. a) Calcul à partir des coordonnées :

$$PH = \sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^2 + (at-a)^2}$$
$$= |t-1|\sqrt{a^2+2}.$$

$$|t-1| = \left|\frac{a}{a^2+2} - 1\right| = \frac{|-a^2 + a - 2|}{a^2+2} = \frac{a^2 - a + 2}{a^2+2}$$

puisque pour tout a, $a^2 - a + 2 > 0$. Ainsi,

$$PH = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2+2}}.$$

Note : la distance de P au plan (DMN) (voir chapitre 14) se calcule directement par :

$PH = \frac{|x_p + y_p + az_p - a|}{\sqrt{1 + 1 + a^2}}$, d'où le résultat.

b) DM = DN (immédiat) ;

aire(DMN) $= \mathcal{A} = \frac{1}{2}MN \times DI$ avec I milieu de [MN].

Ainsi $\mathcal{A} = \frac{a\sqrt{a^2+2}}{2}$.

Volume PDMN $= \mathcal{V}(a) = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times PH$, d'où

$$\mathcal{V}(a) = \frac{a(a^2 - a + 2)}{6}.$$

67 On pose $AB' = x$, $BC' = y$, $CA' = z$.

Par symétrie par rapport à la bissectrice (AI), $AB' = AC'$; de même, $BC' = BA'$ et $CA' = CB'$. B', C', A' appartiennent respectivement aux segments [CA], [AB], [BC] d'où le système :

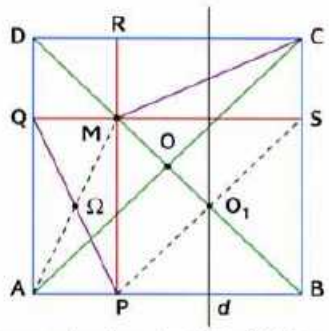
$$\begin{cases} x + z = 5 \\ x + y = 4. \\ y + z = 7 \end{cases}$$

D'où $x = 1$, $y = 3$, $z = 4$.

Chapitre 16
TD de géométrie

8 Nous allons démontrer de plusieurs manières que les droites (CM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Avec l'outil des transformations



On suppose le plan orienté et ABCD un carré direct.

d est la médiatrice de [MS]. On note σ_1 et σ_2 les réflexions d'axes respectifs d et (DB), et on pose $r = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

r est donc la rotation de centre O_1, centre du carré PBSM et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

De plus $r(C) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(C) = \sigma_2(R) = Q$,

et $r(M) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(M) = \sigma_2(S) = P$.

Donc CM = QP et les droites (CM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Avec l'outil vectoriel

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{RM})$$
$$= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RM}.$$

D'après le théorème de la projection,

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{RD} \cdot \overrightarrow{CR} = PA \times PB = QA \times DQ$

et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{DQ} = -QA \times DQ$ donc

$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ et les droites (PQ) et (CM) sont perpendiculaires.

Avec l'outil analytique

Considérons le repère orthonormal $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$.

Il en résulte que B, C, D ont respectivement pour coordonnées $(a ; 0)$; $(0 ; a)$ et $(a ; a)$. De plus, la droite (BD) a pour équation $x + y - a = 0$.

Notons am l'abscisse de M avec $0 \leqslant m \leqslant 1$.

L'ordonnée de M est donc $a(1 - m)$. Ainsi P a pour coordonnées $(am ; 0)$ et Q$(0 ; a(1 - m))$.

$\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(-am ; a(1 - m))$ et $\overrightarrow{MC}(a(1 - m) ; am)$.

Donc :

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MC} = -a^2m(1 - m) + a^2m(1 - m) = 0$

et les droites (PQ) et (MC) sont perpendiculaires.

De plus, on remarque que la médiatrice de [PQ] est parallèle à (CM).

Elle passe par Ω milieu de [AM]. Donc d'après le théorème des milieux, dans le triangle AMC, elle passe par le point O milieu de [AC].

Démonstrations concernant le logarithme et l'exponentielle

1. Fonction logarithme népérien

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, restreinte à l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ est continue et comme telle admet des primitives (voir TD 4, p. 175). La fonction logarithme népérien, notée ln, est celle de ces primitives qui s'annule en 1 (théorème 7, p. 200). Ainsi :

pour tout $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$; $\ln 1 = 0$;

ln est strictement croissante sur I.

2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$. $(a > 0 ; b > 0 ; n \in \mathbb{N})$.

On fixe a, puis on introduit la fonction $h(x) = \ln ax - \ln a - \ln x$.
On démontre, en la dérivant, qu'elle est constante, puis, que pour tout $x > 0$, $h(x) = 0$, d'où le résultat. Par récurrence, on déduit que $\ln(a^n) = n \ln a$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$).
Avec $b = \frac{1}{a}$, on obtient $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.
Puis $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

a) Il s'agit de prouver que quel que soit $M > 0$, on obtient $\ln x > M$ pour tout x d'un intervalle $]A ; +\infty[$. M étant fixé, choisissons un entier n tel que $n \ln 2 > M$ (ce choix est possible car $\ln 2 > 0$), et considérons l'intervalle $J =]2^n ; +\infty[$. Alors, pour tout x de J, $x > 2^n$, d'où :
$\ln x > \ln(2^n) \geqslant n \ln 2 > M$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

b) Par le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on prouve que $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

2. Fonction exponentielle

1. La fonction ln varie continûment de $-\infty$ à $+\infty$, et prend donc toutes les valeurs réelles (théorème des valeurs intermédiaires). Puisque ln est strictement croissante, chacune d'elles n'est prise qu'une seule fois. Ainsi pour tout réel x, il existe un y et un seul, $y > 0$, tel que $\ln y = x$. On note $y = e^x$ et on écrit exp la fonction, dite exponentielle : $x \mapsto y = e^x$.
Pour tout réel x, e^x est le nombre dont le logarithme est x.

D'où $e^x > 0$; $\ln e^x = x$; $e^{\ln x} = x$;
pour tout x, tout $y > 0$, $y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

2. La fonction exp est **strictement croissante.**

Prouvons que $a < b$ implique $e^a < e^b$. Si $a < b$, alors $\ln e^a < \ln e^b$, (voir **1.** ci-dessus), d'où, puisque ln est strictement croissante, $e^a < e^b$.

3. $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

On démontre que les nombres e^{a+b} et $e^a e^b$ ont le même logarithme, ce qui implique qu'ils sont égaux.

4. Pour tout réel a, $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$, donc exp est continue sur $\mathbb{R}$.

En posant $x = a + h$, tout revient à prouver que :
$\lim\limits_{h \to 0} e^{a+h} = e^a$.
Or $e^{a+h} = e^a e^h$, donc il suffit de prouver que $\lim\limits_{h \to 0} e^h = 1$.
Pour cela, prouvons que aussi petit que soit le nombre $\alpha > 0$, on obtient $1 - \alpha < e^h < 1 + \alpha$ pour tout h dans un certain intervalle J qui contient 0. Soit $0 < \alpha < 1$.
Posons $J =]\ln(1-\alpha) ; \ln(1+\alpha)[$ J contient 0 car $\ln(1-\alpha) < 0$ et $\ln(1+\alpha) > 0$.
Si $h \in J$, alors $\ln(1-\alpha) < h < \ln(1+h)$ d'où puisque exp est croissante, $e^{\ln(1-\alpha)} < e^h < e^{\ln(1+\alpha)}$ et donc $1 - \alpha < e^h < 1 + \alpha$ (d'où le résultat).

5. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa fonction dérivée.

a est un réel fixé. Considérons la fonction $t(x) = \frac{e^x - e^a}{x - a}$.
Posons $e^a = b$ et $e^x = y$, donc $a = \ln b$ et $x = \ln y$.
Ainsi, $t(x) = \frac{1}{g(y)}$ avec $g(y) = \frac{\ln y - \ln b}{y - b}$.
Or, $\lim\limits_{x \to a} y = e^a = b$ (continuité de la fonction exp) et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \frac{1}{b}$ (dérivabilité de la fonction ln en b).
Donc, $\lim\limits_{x \to a} t(x) = b = e^a$, donc exp est dérivable en a et $(\exp)'(a) = e^a$. Ceci étant vrai pour tout a, le théorème est démontré.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

On démontre en étudiant la fonction $h(x) = x - \ln x$, que pour tout $x \geqslant 1$, $x \geqslant \ln x$. Donc, $e^x \geqslant e^{\ln x}$, et $e^x \geqslant x$.
D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Par le changement de variable $X = -x$, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

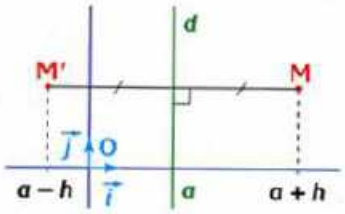
LEXIQUE

A-B

Axe de symétrie

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = f(x)$ et d la droite d'équation $x = a$.

Dire que la droite d est axe de symétrie de $\mathscr{C}$, équivaut à dire que pour tout réel $x = a + h$ de D_f, $a - h$ est dans D_f et $f(a + h) = f(a - h)$.



Barycentre

A, B et C sont trois points, α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

- Il existe un point G unique tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Ce point est le barycentre des points pondérés $(A ; \alpha)$, $(B ; \beta)$, $(C ; \gamma)$.

- Pour tout point M,

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}.$$

- **Règle d'associativité** : Supposons $\alpha + \beta \neq 0$ et notons H le barycentre de $(A ; \alpha)$ et $(B ; \beta)$, alors G est le barycentre de $(H ; \alpha + \beta)$ et $(C ; \gamma)$.
- Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, G a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} ;$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

- **Caractérisation d'une droite** : A et B sont deux points distincts.
- Tout barycentre G de $(A ; \alpha)$ $(B ; \beta)$, $(\alpha + \beta) \neq 0$, est un point de la droite (AB) tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

- Tout point M de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ (k réel) est barycentre de $(A ; 1 - k)$, $(B ; k)$.

Ainsi la droite (AB) est l'ensemble des points M barycentre de $(A ; 1 - k)$, $(B ; k)$, k décrivant $\mathbb{R}$.

C

Caractère

Particularité, que l'on veut étudier, d'une population statistique donnée.

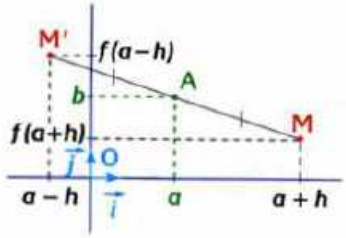
Un caractère est **qualitatif** s'il n'est pas mesurable. Un caractère est **quantitatif** lorsqu'on peut le mesurer en associant un nombre à chaque individu.

Centre de symétrie

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = f(x)$ et A le point de coordonnées $(a ; b)$.

Dire que le point A est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ équivaut à dire que pour tout réel $x = a + h$ de D_f, $a - h$ est dans D_f et :

$$\frac{f(a + h) + f(a - h)}{2} = b.$$



Cercle

- Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

- Dans un repère orthonormal, le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Changement de repère

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan et A un point de coordonnées $(a ; b)$ dans ce repère.

Si M a pour coordonnées $(x ; y)$ dans ce repère et $(X ; Y)$ dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$, alors $x = X + a$ et $y = Y + b$.

Colinéaires (vecteurs)

Voir *Vecteurs colinéaires*.

Composée de deux fonctions

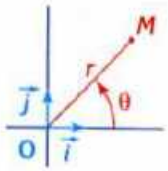
Étant données deux fonctions f et g définies respectivement sur D_f et D_g, la fonction $g \circ f$ est la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

L'ensemble de définition de $g \circ f$ est constitué de tous les réels x tel que x est dans D_f et $f(x)$ dans D_g.

Coordonnées polaires

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct.

- Pour tout point M distinct de O, un couple $(r ; \theta)$ tel que $OM = r$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ **est un couple de coordonnées polaires de M.**



- Si M a pour coordonnées cartésiennes $(x ; y)$, alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

$$x = r\cos\theta ; \quad y = r\sin\theta.$$

D-E-F

Droites perpendiculaires

Dans un repère orthonormal, les droites d et d' ont pour équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

Dire que d et d' sont perpendiculaires équivaut à dire que :

$$aa' + bb' = 0.$$

Effectif

En statistique, l'effectif d'une classe est le nombre d'individus correspondant à cette classe.

Équation trigonométrique

- $\cos x = \cos\theta$ équivaut dans $\mathbb{R}$ à : $x = \theta + 2k\pi$ ou $x = -\theta + 2k'\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k' \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = \sin\theta$ équivaut dans $\mathbb{R}$ à : $x = \theta + 2k\pi$ ou $x = \pi - \theta + 2k'\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur du caractère et la plus petite. Elle mesure la **dispersion** de la série.

Fréquence

La fréquence d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total.

H-I

Homothétie

O est un point du plan et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k, notée $h(O, k)$, la transformation qui, à tout point M du plan, associe M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

- Si $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$, alors :

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}.$$

• L'homothétie transforme une droite en une droite parallèle.

• L'homothétie transforme le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r en un cercle $\mathscr{C}'$ de centre $I' = h(I)$ et de rayon $r' = |k| \times r$.

• L'homothétie conserve le barycentre, l'alignement, la coplanarité, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles orientés.

• L'homothétie multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2, les volumes par $|k|^3$.

Individu

Chaque élément d'une population statistique.

M

Médiane

• Lorsqu'une série statistique est donnée par les valeurs de caractère non regroupées en classes, la médiane est la valeur du terme de rang $\frac{n+1}{2}$ si n est **impair**, et la valeur égale à la demi-somme des valeurs des termes de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$ si n est **pair**.

• Lorsque les valeurs de caractère sont regroupées en classes, on peut tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes.

Pour trouver en abscisse la valeur de la médiane, on coupe par la droite d'équation $y = 0{,}5$.

Mesure principale

Parmi les mesures en radians $\theta + 2k\pi$ d'un angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, une seule est dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Cette mesure est appelée **mesure principale** de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Moyenne

• La moyenne de n nombres $x_1, ..., x_n$ est le nombre $\overline{x}$ défini par :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

• Si n_1 nombres sont égaux à x_1, n_2 à x_2, ..., n_p à x_p alors :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n}$$

avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.

• $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, ..., \frac{n_p}{n}$ sont les fréquences $f_1, f_2, ..., f_p$ associées à $x_1, x_2, ..., x_p$ et $\overline{x} = f_1x_1 + \cdots + f_px_p$.

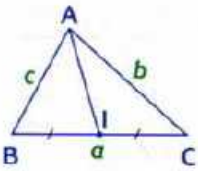
P-R

Population

Ensemble de personnes ou d'objets sur lequel porte une enquête statistique.

Relations métriques

Dans un triangle quelconque, d'aire S :



• **Relation d'Al Kashi :**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A};$$

• **Théorème de la médiane :**

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2};$$

• $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$;

• $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

S

Second degré

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

• **Écriture de $f(x)$ sous forme canonique :**

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

• **Discriminant de $f(x)$:**

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

• **Lorsque $\Delta < 0$:**

l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racine et $f(x)$ est toujours du signe de a.

Lorsque $\Delta = 0$:

l'équation $f(x) = 0$ a une « racine double » $x = -\frac{b}{2a}$ et $f(x)$ est toujours du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$, auquel cas $f(x) = 0$.

Lorsque $\Delta > 0$:

l'équation $f(x) = 0$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$f(x)$ est du signe de a **sauf** lorsque x est entre x_1 et x_2, auquel cas $f(x)$ et a sont de signes contraires.

T

Triangles semblables

• Dire que deux triangles sont semblables signifie que leurs angles sont égaux deux à deux.

• Si deux triangles sont semblables, alors les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

• Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

Trigonométrie

Quels que soient les réels a et b :

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$;

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$;

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$;

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$;

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

V

Vecteurs colinéaires

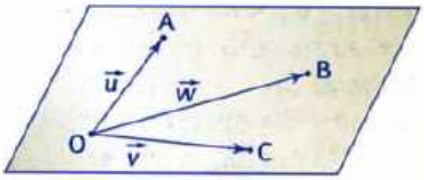
• Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire « Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou il existe un réel k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$ ».

• Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, dire que les vecteurs $\vec{u}(X ; Y)$ et $\vec{v}(X' ; Y')$ sont colinéaires équivaut à dire que :

$$XY' - X'Y = 0.$$

Vecteurs coplanaires

• Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que lorsqu'on choisit un point O quelconque, le point O et les points A, B, C définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.



• $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe des réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

INDEX

Affixe
d'un point 318
d'un vecteur 348
Aire
sous une courbe 193-195
Angle de vecteurs 350
Approximation
affine locale 54
affine locale de exp en 0 92
d'un nombre par une suite 174
Arbre pondéré 256
Arguments
d'un complexe 322
Asymptote
horizontale 22
oblique 30
verticale 24
Bernoulli (schéma de) 288
Bijection (réciproque) 36
Binôme (formule du) 242
Binomiale (loi) 288-290
Calcul intégral 204-206
Caractérisation barycentrique
de droites et plans 406
Chasles (relation de) 196
Combinaison 240
Combinatoire 238
Comparaison de suites 166
Composition de fonctions 30
Complexe conjugué 320
Continuité 32
Coordonnées polaires 316
Croissances comparées
de fonctions 150
de suites 166
Dénombrement 238
Densité de probabilité 292
Dérivé(e)(s)
d'une fonction composée 60-62
fonction 56
successives 62
Distance
d'un point à un plan 384
d'un point à une droite 378
Écriture complexe
d'une homothétie 352
d'une rotation 352
d'une translation 352
Encadrement (fonction) 125
Expériences indépendantes 262
Épreuves de Bernoulli 288
Équation(s)
cartésienne d'un plan 384
d'une sphère 393
du second degré dans $\mathbb{C}$ 328
Équation différentielle
$y' = ay$; $y' = ay + b$ 94
Équations linéaires 404
Espérance mathématique 261
Événement(s)
contraires 254
élémentaire 254
équiprobables 254
incompatibles 254
indépendants 260
« A et B » ; « A ou B » 260
Exponentielle
fonction – 86
forme – d'un complexe 326
Expression conjuguée 320
Extremum (fonction) 58
Euler
construction
par la méthode d' – 84
formule d' – 326
Factorielle 238
Fonctions
composition de – 30
de répartition 293
dérivable 54
dérivée *n*-ième 62
en escalier 192
exponentielle 90
logarithme népérien 120
racine n-ième 148
réciproque 36
tangente 67
Forme(s)
algébrique d'un complexe 318
exponentielle (complexe) 326
indéterminées 26
trigonométrique (complexe) 322
Formule(s)
d'Euler 326
de Moivre 324
de trigonométrie 332
Gauss (méthode de) 405
Indépendance de deux variables aléatoires 260
Intégrales 194
Intégration par parties 204
Intersection(s)
d'ensembles 254
de plans et de droites 410-412
Limite(s)
à droite, à gauche 25
d'une fonction composée 30
de fonctions 26-28-30
de suites 164
de $u_n = f(v_n)$ 166
Linéarisation 332
Logarithme
décimal 127
népérien 116
Loi de probabilités 254
binomiale 288-290
continue 292
exponentielle ; uniforme 294
Maximum d'une fonction 58
Méthode de Gauss 405
Minimum d'une fonction 58
Module d'un complexe 318
Monotone (suite) 168
Nombres complexes 318
Nombre dérivé 54
Orthogonalité (droites et plans) 382
Partie(s)
d'un ensemble 240
imaginaire d'un complexe 318
réelle d'un complexe 318
Période d'une fonction 67
Permutation 238
Plan(s)
équation d'un – 384
perpendiculaires 376
Primitives 200
Probabilités
conditionnelles 256
formule des – totales 258
Produit scalaire dans l'espace 380
Projection d'un point
sur un plan ; une droite 384
Programmation linéaire 391
Puissance(s)
fonctions – 144-146
réelles 144
Racine *n*-ième
fonction – 148
Raison d'une suite 10
Récurrence 12
Représentations paramétriques d'une droite 408
Sphère (équation d'une) 393
Suite(s)
adjacentes 170
arithmétique ; géométrique 10
bornée 168
convergente 164
croissante ; décroissante 10
majorée, minorée 168
$u_{n+1} = f(u_n)$ 10-173
Tangente
à une courbe $y = f(x)$ 54
verticale 68
Triangle de Pascal 242
Trinôme
forme canonique du – 328
Valeurs approchées d'intégrales (calculs de) 211
Valeurs intermédiaires (théorème) 34
Valeur moyenne d'une fonction 198
Variable aléatoire 254
exponentielle ; uniforme 294
Variance 254
Variation (sens de)
d'une suite 10
d'une fonction 58
Vecteur normal à un plan 382
Volumes (calculs de) 208

Édition
Gwenn Alvarez

Conception graphique
Frédéric Jély

Création de la couverture
Sylvie Lunet

Iconographie
Nadine Gudimard

Schémas
Laurent Blondel
et Alpha-Edit

Composition, mise en page et photogravure
Alpha-Edit

N° éditeur : 10128531
Dépôt légal : Avril 2006
Imprimé en Italie par Rotolito Lombarda

Crédits photographiques
Plat I de haut en bas : Archives Nathan ; Collection Roger-Viollet ; Archives Nathan. **Plat IV de haut en bas** : Archives Nathan ; Archives Nathan ; AKG. **9** bas g M.P./Leemage ; **9** ht d BIS/Ph. Jeanbor © Archives Larbor ; **9** m d BIS/Ph. Halberstadt, Hambourg DR ; Coll. Archives Larbor ; **9** bas d BIS/Ph. © Coll. Archives Larbor © Adagp, Paris 2006 ; **19** bas g MP/Leemage ; **19** ht d BIS/Ph. Oronoz © Archives Larbor ; **19** m d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **19** bas d Erich Lessing/AKG ; **53** bas g BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **53** ht d Hubert Staedler/Corbis ; **53** m d Boyer/Roger-Viollet ; **53** bas d Victor Tonelli/MAX PPP ; **83** bas d BIS/Ph. Jeanbor © Archives Larbor ; **83** bas g BIS/Ph. Jeanbor © Archives Larbor ; **83** ht d BIS/Ph. © Musée des Beaux-Arts de Dijon - Archives Larbor ; **83** m d Frédéric Hanoteau/Archives Nathan ; **115** bas g BIS/Ph. DR Coll. Archives Larbor ; **115** ht d ND/Roger-Viollet ; **115** m d Collection Roger-Viollet ; **115** bas d BIS/© Archives Larbor ; **143** bas g BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **143** ht d BIS/Ph. Sonneville © Archives Nathan ; **143** m d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **143** bas d BIS/Ph. J.-P. Vieil © Archives Larbor ; **163** bas g BIS/Ph. M. Didier © Archives Larbor ; **163** ht d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **163** m d BIS/Ph. Eileen Tweedy © Archives Larbor ; **163** bas d BIS/Ph. Oronoz © Archives Larbor ; **191** m d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **191** bas g Blanchetti/Leemage ; **191** ht d BIS/Ph. Kharbine © Archives Larbor - DR ; **191** bas d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **235** bas g Archivo iconografico S.A./ Corbis ; **235** ht d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **235** m d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **235** bas d Robert Holmes/Corbis ; **253** Regards du Sport ; **253** bas g BIS/Ph. D.R. Coll. Archives Larbor ; **253** ht d BIS/© Archives Larbor ; 253 m d BIS/Ph. Jeanbor © Archives Larbor ; **253** bas d BIS/© Archives Larbor ; **257** Collection Christophe L ; **275** Pascal Rondeau/Regards du Sport ; **282** Karen Bearson/Stone/Getty Images ; **283** Altrendo Images/Getty Images ; **285** Biophoto Associates/ SPL/Cosmos ; **285** bas g BIS/Ph. DR Coll. Archives Larbor ; **285** ht d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **285** m d T. Mähl/Zefa/Corbis ; **285** bas d Collection Christophe L ; **286** Stephen Marks/TIB/Getty Images ; **287** A.B. Dowsett/SPL/Cosmos ; **288** AGE/Photononstop ; **312** Christian Petit (vandystadt.com)/ Regards du Sport ; **315** bas g Collection Roger-Viollet ; **315** m d Collection Roger-Viollet ; **315** bas d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **345** ht d BIS/Ph. Hubert Josse © Archives Larbor ; **345** m d Heritage Images/LEEMAGE ; **345** bas d BIS/Ph. Jeanbor © Archives Larbor ; **345** bas d BIS/Ph. Aldo G. Rossano/Coll. Archives Larbor-DR ; **375** bas g Selva/Leemage ; **375** ht d Selva/Leemage ; **375** m d Boyer/Roger-Viollet ; **403** bas g Archives Nathan/D.R. ; **403** ht d Collection Grob/Kharbine-Tapabor ; **403** m d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **403** bas d BIS/Ph. Coll. Archives Larbor ; **431** ht d BIS/Ph. Coll. Archives Nathan ; **431** bas g Archives Nathan/D.R. ; **431** m d BIS/Ph. Michel Didier © Archives Larbor ; **431** bas d Harlingue/Roger-Viollet.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

1960 **Henri Cartan** écrit un *Calcul différentiel* qui sert de base à l'enseignement actuel.

1904 **Henri Lebesgue** donne une nouvelle définition de l'intégrale sur laquelle s'appuient les mathématiques et la physique du XX^{e} siècle.

Vers 1850 **Bertrand Riemann** donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe l'intégrale définie entre a et b d'une fonction définie sur $[a\,;\,b]$ au sens de Cauchy.

1823 Dans un *Résumé de leçons sur le calcul différentiel* données à l'École polytechnique, Cauchy fournit la définition par limite de la dérivée, et la définition par limite aussi de l'intégrale définie (selon les sommes dites de Riemann). Il démontre le premier théorème du calcul, à savoir $\frac{\mathrm{d}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}x} = f(x)$ lorsque la fonction f est continue.

1822 **Joseph Fourier**, dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, montre que la notion de fonction continue est beaucoup trop restreinte pour l'utilisation en physique, et que l'intégration permet de travailler de façon plus générale sur les fonctions.

1821 Publication du premier volume du *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* où **Augustin Cauchy** fonde l'analyse sur la notion de limite et de fonction continue.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

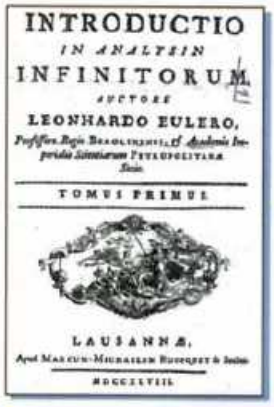
Par M. Augustin-Louis CAUCHY,

1re PARTIE. *Analyse algébrique.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

1821.

1797 **Lazare Carnot** publie à Paris ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, où il tente de montrer qu'un même mouvement intellectuel, sous des dehors différents, mène d'Archimède à Euler pour constituer le calcul différentiel et le calcul intégral.


INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio Berolinensi, et Academiae Imperiali Scientiarum Petropolitanae Socio.

TOMUS PRIMUS

LAUSANNAE,

Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.

MDCCXLVIII.

1755 **Euler** publie, à Saint-Pétersbourg et en latin, ses *Institutions du calcul différentiel*, donnant une unité au calcul issu de Newton et celui issu de Leibniz. À partir de 1769 à Saint-Pétersbourg, Euler publie ses *Institutions du calcul intégral en trois volumes*, où il développe toutes les ressources du calcul des primitives, mais aussi la résolution des équations différentielles.

1748 **Leonhard Euler** publie en latin et à Lausanne son *Introduction à l'analyse des infinis*, où sans différentielle et sans intégrale, il définit par des séries de puissances les fonctions élémentaires, exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques.

Fin XVII^{e} - début XVIII^{e} siècle De nombreux savants, à commencer bien sûr par **Leibniz** et **Newton**, utilisent le calcul différentiel et le calcul intégral pour des problèmes de mécanique, mécanique des machines ou mécanique céleste. Par exemple, **Daniel Bernoulli**, fils de **Jean Bernoulli**, qui détermine la forme courbe que prend une lame élastique tendue par un poids.

1714 **Leibniz** publie en latin son *Histoire et origine du calcul différentiel* dans lequel il se défend de l'accusation de plagiat que des disciples de Newton propagent de façon malveillante.

Leibniz

1900

1850

1800

1750

1700

C. FONCTION

1. L'éditeur de listes

On peut stocker des valeurs dans des listes qui fonctionnent comme des tableaux aux cases numérotées.

a. Édition manuelle

- Avec l'éditeur de listes statistiques [Stat] EDIT.

b. Édition dans un programme

- En utilisant des accolades et [STO].

EXEMPLE

{2 , 5 , 10 , 3 , 2 , 7 , 5} → L1 a pour effet d'initialiser L1 qui contient la séquence des 7 valeurs données. La première est désignée par L1(1), la deuxième par L1(2)...

- Une liste peut être initialisée par l'instruction Seq(...) que l'on trouve dans [2nd] [LIST] OPS.

EXEMPLE 1

Seq(0,X,1,6,1) crée une liste de 6 cases numérotées de 1 à 6 avec un pas de 1 et initialise toutes les cases à 0.

x	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0

EXEMPLE 2

Seq(Y1,X,0,2,0.2) créé une liste de 11 cases correspondant aux valeurs de 0 à 2 avec un pas de 0,2, chaque case contenant la valeur prise par la fonction en ce point.

x	1	0,2	0,4	...	1,8	2
f(x)	f(0)	f(0,2)	f(0,4)	...	f(1,8)	f(2)

2. Utilisation des listes en statistique

Une série statistique peut être stockée dans une liste afin d'utiliser des instructions pour le traitement des données.

- Classement (ordre croissant, ou décroissant) avec SortA (ou SortD) que l'on trouve dans [Stat] EDIT ou bien [2nd] [LIST] OPS.

- Dans [Stat] CALC / Var Stats, on peut obtenir les principaux paramètres d'une série statistique.

D. NOMBRES AU HASARD

Dans le menu [MATH] PRB, l'instruction rand donne un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[.
Pour simuler un tirage aléatoire d'un nombre entier entre 1 et N, on utilise int(Nrand+1).
Par exemple, int(6rand+1) simule le lancer d'un dé parfait.

EXEMPLE

Programme simulant N lancers d'un dé et plaçant les fréquences d'apparition de chaque face dans une liste.

Algorithme (et commentaires) :

Lire N

(N est le nombre de tirages)

Créer et initialiser Liste 1 à 0

(On crée une liste de 6 cases toutes mises à 0)

Pour K de 1 à N Faire

X ← Nb au hasard entre 1 et 6

(On tire un nb au hasard et on le met dans X)

L1[X] ← L1[X] + 1

Fin de Faire

(La case du n° X est augmentée de 1)

L1 ← L1/N

(On calcule la fréquence de chaque numéro)

Afficher L1

Le programme :

```
:Disp "LANCERS"
:Input N
:seq(0,X,1,6,1)→
L1
:For(K,1,N)
:int(6rand+1)→X
:1+L1(X)→L1(X)
:End
:L1/N→L1
:Disp L1
```

Un résultat obtenu :

```
LANCERS
?300
{.1533333333 .1...
                Done
```

Calculatrices TEXAS INSTRUMENTS

A. FONCTION

OBJECTIFS

f est la fonction définie sur R par :

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x + 2$$

On veut obtenir :

- Un tableau de valeurs (ex : les valeurs de $f(x)$ pour x variant entre – 2 et 3 de 0,1 en 0,1).
- Quelques valeurs isolées (ex : $f(27)$; $f(-5)$) et $f(3{,}84)$).
- La courbe représentative de la fonction f

1. Enregistrement de la fonction

Appuyer sur la touche [Y=], se placer sur Y1 à l'aide des touches de curseur [▼] [▲] et taper l'expression de $f(x)$ (attention aux règles de priorité) puis taper [ENTER].

Sur certaines TI, il faut passer par [GRAPH] puis [F1] pour accéder à Y1 =.

2. Tableau de valeurs

Taper [2nd] [TBLSET] puis choisir la valeur de départ et le pas souhaité en remplissant les champs TblStart et ΔTbl.

Dans le champ Indpnt, en choisissant Auto, on obtient un tableau illimité commençant à la valeur choisie, dans lequel on se déplace avec les touches de curseur.

En choisissant Ask, on obtient un tableau vide dans lequel on peut choisir la valeur que l'on veut pour x.

On tape [ENTER] pour avoir $f(x)$. On peut obtenir ainsi les images de valeurs isolées.

On affiche le tableau avec [2nd] [TABLE].

3. Calcul de valeurs isolées

Ce calcul peut aussi se faire à l'aide d'un programme : taper [PRGM], choisir l'option NEW, taper [ENTER].

Choisir un nom de programme.

Taper le programme :

```
:Input X
:Disp (-2/3)X^3-X+2
```

(Si la fonction est dans Y1, on peut taper Disp Y1 à la deuxième ligne du programme en utilisant [VARS] puis Y-VARS pour la saisie du Y1.)

```
:Input X
:Disp Y1
```

4. Courbe

La fonction est dans Y1. Utiliser la touche [GRAPH].

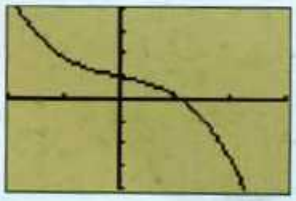
On peut changer les graduations en tapant [WINDOW] et en complétant les différents champs :

Xmin : valeur minimum

Xmax : valeur maximum

Xscl : 1 pour graduer les axes de 1 en 1.

De même pour Ymin, Ymax et Yscl.



B. SUITES

1. Suites données par $u_n = f(n)$

Ce qui a été dit en A.1 et A.2 pour les fonctions s'applique en prenant un pas de 1 pour le tableau de valeurs.

2. Suites données par $u_{n+1} = f(u_n)$

On peut aisément programmer le calcul de u_n pour une valeur donnée de n. L'algorithme et le programme sont donnés dans le TD2 du chap. 6, page 162.

Les calculatrices récentes possèdent maintenant un mode prévu pour le calcul des termes des suites définies par récurrence : c'est le mode Seq.

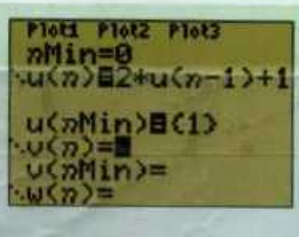
Il est ensuite demandé de préciser la relation de récurrence (donné sous la forme $u_n = f(u_{n-1})$) ainsi que le n minimum.

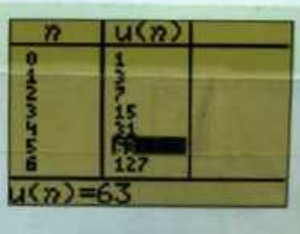
Sélectionner le mode Seq à l'aide de [mode] et des touches de curseur. Taper [ENTER].

Appuyer sur [Y=] puis entrer la formule de récurrence. Exemple : $u(n) = 2u(n-1) + 1$.

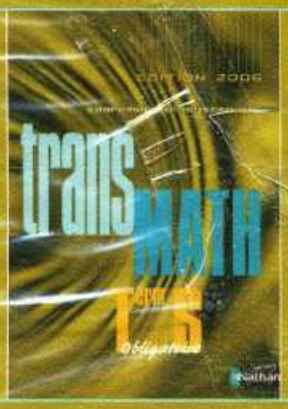
Choisir le n minimum et le terme initial.

Avec [2nd] [TABLSET], choisir les indices des termes à afficher, puis afficher avec [2nd] [TABLE].

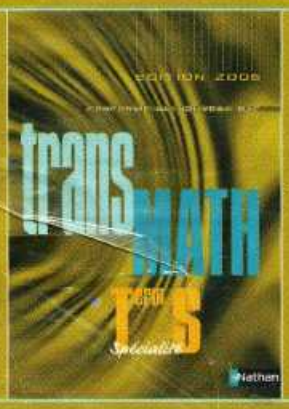




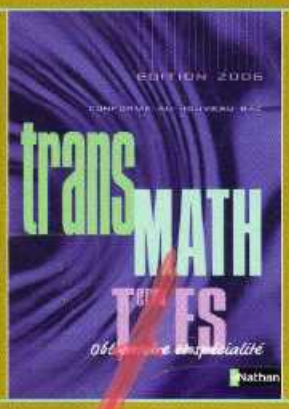
COLLECTION TRANSMATH - ÉDITIONS 2006 CONFORMES AU NOUVEAU BAC



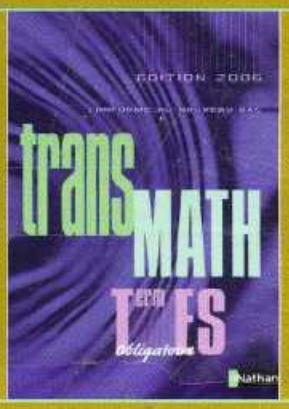
Obligatoire



Spécialité



Obligatoire et Spécialité



Obligatoire

La partie relative à l'enseignement obligatoire (contenu et pagination) est identique dans les deux manuels.

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

ISBN 2-09-172638-9
9 782091 726380

Nathan