



EDITION 2006

trans MATH

1^{er} S

Obligatoire et spécialité

Livre du professeur

EDITION 2006

trans MATH

Term
TS

Obligatoire et spécialité

Jean-Michel Barros

Patrick Bénizeau

Jacques Burgaud

Jean Morin

David Nivaud

Livre du professeur

 Nathan



"Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs.

Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.

En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite."

SOMMAIRE

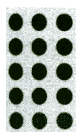
Enseignement obligatoire

CHAP 1 – Rappels sur les suites – Récurrence	7
CHAP 2 – Fonctions : limites et continuité.....	14
CHAP 3 – Dérivation	27
CHAP 4 – La fonction exponentielle.....	45
CHAP 5 – La fonction logarithme népérien	61
CHAP 6 – Les fonctions puissances – Croissances comparées.....	80
CHAP 7 – Limites de suites	92
CHAP 8 – Intégration et primitives.....	113
CHAP 9 – Éléments de combinatoire	141
CHAP 10 – Probabilités	148
CHAP 11 – Lois de probabilités	165
CHAP 12 – Les nombres complexes	179
CHAP 13 – Application des nombres complexes à la géométrie.....	193
CHAP 14 – Le produit scalaire dans l'espace.....	212
CHAP 15 – Droites et plans dans l'espace	223
CHAP 16 – Travaux dirigés de géométrie.....	241
<i>Problèmes de synthèse</i>	247

Enseignement de spécialité

CHAP 1 – Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ – Congruences	261
CHAP 2 – PGCD et PPCM	274
CHAP 3 – Les nombres premiers.....	289
CHAP 4 – Les similitudes	302
CHAP 5 – Composées de similitudes	318
CHAP 6 – Sections planes de surfaces.....	332
<i>Problèmes de synthèse</i>	339

Enseignement obligatoire



Corrigés des exercices

Pour progresser

(page 14)

Généralités sur les suites

1 $v_1 = 2$ et $v_2 = 5$.

$$v_{n+2} = 3v_{n+1} - 1 = 3(3v_n - 1) = 9v_n - 4.$$

2 $u_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+5}$; $u_{n-3} = \frac{n-3}{n^2-6n+13}$;

$$u_{2n} = \frac{n}{2n^2+2}.$$

Note : Dans les exercices 3 à 5, on applique l'une des trois méthodes décrites page 15.

3 a) Pour $n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$: (u_n) est décroissante.

b) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} > 0$: (u_n) est croissante.

c) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$; $f'(x) = \frac{9}{(x+4)^2} > 0$.

f est croissante, donc (u_n) est croissante.

4 Corrigé dans le manuel.

5 a) $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$: (u_n) est décroissante.

b) (u_n) change de signe à chaque indice, donc pas de monotonie.

c) Tous les termes de la suite sont positifs,

et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$: (u_n) est croissante.

6 a) $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$: (u_n) est décroissante.

b) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$.

f est croissante, donc (u_n) est croissante.

7 a) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$: (u_n) est croissante.

b) u_n change de signe à chaque indice, donc pas de monotonie.

8 a) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1 > 1$: (u_n) est croissante.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$: (u_n) est décroissante.

9 a) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)}{n^2}$;

si $g(x) = x^2 - x - 1$; $g'(x) = 2x - 1$, donc $n^2 > n + 1$ dès que $n \geq 1$ et (u_n) est croissante.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, donc pas de monotonie.

10 Corrigé dans le manuel.

11 $v_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$, d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 ; \end{aligned}$$

(v_n) est croissante.

12 a) $u_0 = 8$; $u_1 = 8$ et $u_n = 8$ pour tout n , donc (u_n) est constante.

b) $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{7}{2}$ d'où $u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$;

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4} (u_n - u_{n-1}) ;$$

$(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique de premier terme $\frac{3}{2}$ et de raison $\frac{3}{4}$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et (u_n) est croissante.

13 Oui, car pour tout n :

$$(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) \geq 0.$$

14 • (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante.

• $u_n + v_n = \frac{n-1}{n^2}$; $(u_n + v_n)$ est décroissante pour $n \geq 2$.

• $u_n v_n = -\frac{1}{n^3}$; $(u_n v_n)$ est croissante.

15 • Pour tout n , $v_{n+1} - v_n = 3(u_{n+1} - u_n) = 3r$ et $w_{n+1} - w_n = u_{2n+2} - u_{2n} = 2r$.

Suites arithmétiques Suites géométriques

16 Puisque le triangle est un rectangle, la mesure la plus grande est 90 en degrés. Si on note r la raison de la suite arithmétique, les autres mesures sont $90 - r$ et $90 - 2r$.

Comme $(90 - r) + (90 - 2r) = 90$, il vient $3r = 90$, soit $r = 30$ et les mesures sont 30, 60 et 90.

17 •

• Par récurrence, $v_n > 0$.

• $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1+v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = u_n + 1$; (u_n) est une suite arithmétique de raison 1.

18 Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. On peut aussi écrire $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

19 • Comme $u_5 = (5-2)r + u_2$, on trouve $r = -18$.

• Puis $u_{20} = u_5 + (20-5)(-18) = -283$.

20 • De $u_{10} = u_7 q^3$, on déduit $q^3 = \frac{25 \times 1\,080}{2\,197}$, puis :

$$q = \frac{30}{13}.$$

$$\bullet u_{30} = u_{10} q^{20} = \frac{25}{2\,197} \left(\frac{30}{13}\right)^{20}.$$

21 Corrigé dans le manuel.

$$\bullet u_{25} = u_0 + 25r = -3 - 50 = -53 ;$$

$$u_{125} = u_0 + 125r = -3 - 250 = -253 ;$$

$$S = \frac{(-53 - 253) \times 101}{2} = -15\,453.$$

$$\bullet \text{ 23 } \bullet 1. u_n = -2 \times 3^{n-1}.$$

$$2. S = -28 \times 3^{29}.$$

3. De $v_n = u_{2n}$, on déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison 9 et de premier terme $v_1 = u_2 = -6$.

$$\text{Et } S = \frac{3}{4} (1 - 9^n).$$

$$\bullet \text{ 24 } S = u_3 \left(\frac{1-2^8}{1-2} \right) = 1 \times 2^3 \left(\frac{-255}{-1} \right) = 2\,040.$$

25 En regroupant :

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{9}{2} \right) + (1 + 2 + \dots + 10)$$

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right) \times 5}{2} + \frac{(1+10) \times 10}{2} = \frac{25}{2} + 55 = \frac{135}{2}.$$

26 • On reconnaît une suite géométrique de premier terme 0,02 et de raison -5 .

Le dernier terme $u_n = 312,5 = u_0(-5)^n$ permet de trouver $(-5)^n = 15\,625$ ou $n = 6$.

$$\text{Alors } S = 0,02 \left(\frac{1 - (-5)^7}{1 - (-5)} \right) = 260,42.$$

$$\bullet \text{ 27 } \bullet 1. a = 2 + \sqrt{3} \text{ et } b = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} 2. v_{n+1} &= u_{n+2} - (2 + \sqrt{3}) u_{n+1} \\ &= (4u_{n+1} - u_n) - (2 + \sqrt{3}) u_{n+1} \\ &= (2 - \sqrt{3}) u_{n+1} - u_n \\ &= (2 - \sqrt{3}) [u_{n+1} - (2 + \sqrt{3}) u_n] \\ &= (2 - \sqrt{3}) v_n. \end{aligned}$$

(v_n) est géométrique de raison $2 - \sqrt{3}$ et de premier terme $v_0 = -2\sqrt{3}$.

3. De même, (w_0) est géométrique de raison $2 + \sqrt{3}$ et de premier terme $w_0 = 2\sqrt{3}$.

$$4. v_n = -2\sqrt{3} (2 - \sqrt{3})^n \text{ et } w_n = 2\sqrt{3} (2 + \sqrt{3})^n.$$

$$\text{De } \begin{cases} v_n = u_{n+1} - a u_n \\ w_n = u_{n+1} - b u_n \end{cases}, \text{ on déduit } v_n - w_n = (b - a) u_n,$$

et, en définitive :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{b-a} (v_n - w_n) \\ &= \frac{1}{-2\sqrt{3}} [-2\sqrt{3} (2 - \sqrt{3})^n - 2\sqrt{3} (2 + \sqrt{3})^n] \\ &= (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

28 • Si on note q la raison, alors $a = \frac{b}{q}$ et $c = bq$ et les hypothèses donnent :

$$\begin{cases} b^3 = 343 \\ \frac{b}{q} + b + bq = 36,75 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 7 \\ q^2 - 4,25q + 1 = 0 \end{cases}$$

Soit $q = 4$ ou $q = 0,25$. Les triplets solutions sont : $(1,75 ; 7 ; 28)$ et $(28 ; 7 ; 1,75)$.

29 • On a $b = aq$ et $c = aq^2$.

La seconde hypothèse permet d'écrire, en notant r la raison de la suite arithmétique, $2b = 3a + r$ et $c = 3a + 2r$.

D'où la relation $c = 3a + 2(2b - 3a) = 4b - 3a$, soit :

$$aq^2 = 4aq - 3a \text{ ou } q^2 - 4q + 3 = 0, \text{ c'est-à-dire } q = 1 \text{ ou } q = 3.$$

Vérifions :

- si $q = 1$, (a, a, a) et $(3a, 2a, a)$ vérifient les hypothèses ;
- si $q = 3$, $(a, 3a, 9a)$ et $(3a, 2a, a)$ vérifient les hypothèses.

[30] Corrigé dans le manuel.**[31]** La suite définie pour tout n par : $v_n = 9A_n + 1$ est géométrique et $v_n = 10^n$.

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 9S_n + n = \frac{10^{n+1} - 10}{9} \text{ d'où,}$$

$$S_n = \frac{1}{9} \left[\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right].$$

$$\begin{aligned} \text{[32] 3. } v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{7}{4}(n+1) - \frac{7}{16} \\ &= 5u_n - 7n - \frac{7}{4}(n+1) - \frac{7}{16} \\ &= 5 \left(u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16} \right) = 5v_n; \end{aligned}$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 5 - 0 - \frac{7}{16} = \frac{73}{16}$.

$$4. v_n = \frac{73}{16}(5)^n, \text{ puis } u_n = \frac{73}{16}(5n) + \frac{7}{4}n + \frac{7}{16}.$$

$$\begin{aligned} 5. S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= \frac{73}{16}(1+5+\dots+5^n) + \frac{7}{4}(1+\dots+n) + \frac{7}{16}(1+\dots+1) \\ &= \frac{73}{16} \left(\frac{1-5^{n+1}}{1-5} \right) + \frac{7}{4} \left(\frac{(n+1)n}{2} \right) + \frac{7}{16}(n+1) \\ &= \frac{73}{64}5^{n+1} + \frac{7}{8}n^2 + \frac{21}{16}n - \frac{45}{64}. \end{aligned}$$

Démontrer des égalités, des inégalités**[33] 1. a)** 1 ; 5 ; 14 ; 30.

$$b) S_{n+1} = S_n + (n+1)^2.$$

2. On note P_n la proposition « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

$$\bullet P_1 \text{ est vraie car } \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = S_1.$$

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}. \end{aligned}$$

On vérifie que $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, et :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

donc P_{n+1} est vraie.

Donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$.

[34] On note P_n la proposition :

$$\ll 1 + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1 \gg.$$

$$\bullet P_1 \text{ est vraie car } 1 = 1 \text{ et } (1+1)! - 1 = 1.$$

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \times 2! + \dots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)! [1 + (n+1)] - 1 = (n+1)! (n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est également vraie.

• La proposition P_n est vraie pour tout entier n non nul.

[35] On note P_n la proposition « $S_n = T_n$ ».

$$\bullet P_1 \text{ est vraie car } S_1 = 1 \times 2 = 2 \text{ et } T_1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2.$$

• On suppose que P_n est vraie et on calcule S_{n+1} .

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3) = T_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

• Et la proposition P_n est vraie pour tout entier n non nul.

[36] Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note P_n la proposition : « $S_n = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$ ».

$$\bullet P_2 \text{ est vraie puisque } S_2 = 1 \text{ et } (2-1)2^2 - 2 \times 2^{2-1} + 1 = 1.$$

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 2 \times 2 + \dots + (n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\ &= (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1 + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1. \end{aligned}$$

Or on veut prouver que :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 \\ &= 2n \times 2^n - n2^n - 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

• Et la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

[37] On note P_n la proposition :

$$\begin{aligned} \ll 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \gg. \end{aligned}$$

$$\bullet P_1 \text{ est vraie car } 1 \times 2 \times 3 = 6 \text{ et } \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = 6.$$

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 + \dots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4}(n+4), \end{aligned}$$

et P_{n+1} est vraie.

• P_n est donc vraie pour tout entier n non nul.

38 • Soit P_n la proposition : « $n! \geq 2^{n-1}$ ».

- P_1 est vraie car $1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$.
- On suppose que P_n est vraie. Alors, pour tout $n \geq 1$: $(n+1)! = n! (n+1) \geq 2^{n-1} (n+1) \geq 2^{n-1} \times 2 = 2^n$. Donc P_{n+1} est vraie.
- P_n est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Remarque : Il y a $(n-1)$ facteurs, dans le membre de gauche, supérieurs à 2 donc en multipliant...

39 • La propriété est vraie pour $n = 2$ car $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Supposons que pour un entier naturel $n \geq 2$, $5n \geq 4^n + 3^n$.

$5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n \geq 4 \times 4^n + 3 \times 3^n$: la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

40 • a) La propriété est vraie pour $n = 1$ car $(1+a)^1 = 1+a$.

Supposons que pour un entier naturel $n \geq 1$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$: la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

b) Si $q > 1$, alors il existe $a > 0$ tel que $q = 1+a$, donc $q^n \geq 1+na$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

41 • 1. On note P_n la proposition : « $3n^2 \geq (n+1)^2$ ».

• P_2 est vraie car $3 \times 2^2 = 12$ et $(2+1)^2 = 9$.

• On suppose que P_n est vraie, alors :

$$3(n+1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + 6n + 3 = n^2 + 8n + 4 \geq n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

P_{n+1} est vraie.

• Pour tout $n \geq 2$, P_n est vraie.

2. a) Notons P_n la proposition : « $3^n \geq 2^n + 5n^2$ ».

• Pour $n = 1$, $3 \geq 2 + 5$ est fausse.

• Pour $n = 2$, $9 \geq 4 + 20$ est fausse.

• Pour $n = 3$, $27 \geq 8 + 45$ est fausse.

• Pour $n = 4$, $81 \geq 16 + 80$ est fausse.

• Pour $n = 5$, $243 \geq 32 + 125$ est vraie.

$n = 5$ est donc la plus petite valeur non nulle pour laquelle P_n est vraie.

b) Supposons que pour $n \geq 5$, P_n est vraie et cherchons à savoir si P_{n+1} est vraie.

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(2^n + 5n^2) \geq 2 \times 2^n + 5 \times 3n^2,$$

et d'après le 1., $3n^2 \geq (n+1)^2$.

D'où $3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$ et P_{n+1} est vraie.

• P_n est donc vraie pour tout $n \geq 5$.

42 • 1. • $3^0 = 1$ et $(0+2)^2 = 4$ donc P_0 est fausse.

• $3^1 = 3$ et $(1+2)^2 = 9$ donc P_1 est fausse.

• $3^2 = 9$ et $(2+2)^2 = 16$ donc P_2 est fausse.

• $3^3 = 27$ et $(5+2)^2 = 25$ donc P_3 est vraie.

2. • $n \geq 3$; on suppose que P_n est vraie. Alors :

$$3^{n+1} = 3^n \times 3 \geq 3(n+2)^2 = 3n^2 + 12n + 12.$$

Il reste donc à prouver que :

$$3n^2 + 12n + 12 \geq (n+3)^2 \text{ ou } 2n^2 + 6n + 3 \geq 0,$$

ce qui est vérifié pour $n \geq 3$. Donc P_{n+1} est vraie.

• Pour tout $n \geq 3$, $3n \geq (n+2)^2$.

Conjecturer puis démontrer

43 Pour apprendre à chercher

Les outils :

- Raisonnement par récurrence.

Les objectifs :

- Savoir conjecturer une propriété après le calcul des premiers termes.
- Savoir prouver la conjecture.

1. $u_0 = 7$; $u_1 = 52$; $u_2 = 502$; $u_3 = 5\,0002$; $u_4 = 50\,002$; $u_5 = 500\,002$.

2. Lorsque n prend les valeurs 1, 2, 3, ..., il y a 0, 1, 2, ..., zéros entre le 5 et le 2.

3. a) En fait, on peut écrire pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$u_n = 5 \times 10^n + 2.$$

b) On suppose que cette proposition est vraie au rang n .

Alors $u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5 \times 10^n + 2) - 18$

$$= 5 \times 10^{n+1} + 2.$$

P_{n+1} est vraie et la proposition est vraie pour tout n .

44 1. • $u_0 = 2$; $u_1 = 1$; $u_2 = -1$; $u_3 = -5$; $u_4 = -13$; $u_5 = -29$.

• $u_1 - 3 = -2$; $u_2 - 3 = -4$; $u_3 - 3 = -8$; $u_4 - 3 = -16$; $u_5 - 3 = -32$.

Il semble donc que $u_n = 3 - 2^n$.

2. $u_{n+1} - 3 = (2u_n - 3) - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$.

La suite $(u_n - 3)$ est géométrique de raison 2 et de premier terme -1 .

Donc $u_n - 3 = -1 \times 2^n \Rightarrow 3 - 2^n = u_n$ pour tout entier naturel n .

45 1. $u_0 = 3$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 1$; $u_4 = 3$; $u_5 = 1$.

Il semble donc que lorsque n est pair, $u_n = 3$ et lorsque n est impair, $u_n = 1$.

2. Posons P_n la proposition : « $u_{2n} = 3$ et $u_{2n+1} = 1$ ».

P_0, P_1, P_2 sont vraies. On suppose que P_n est vraie.

$$\text{Alors } \begin{cases} u_{2n+2} = -u_{2n+1} + 4 = 3 \\ u_{2n+3} = -u_{2n+2} + 4 = 1 \end{cases} \text{ et } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

La proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n .

46 Corrigé dans le manuel.

47 • 1. $u_0 = 1 ; u_1 = 1 ; u_2 = 2 ; u_3 = 4 ; u_4 = 7$.

2. Remarque : $u_5 = u_0 + 1 + 2 + 3 + 4$.

Conjecture : pour tout entier n ,

$$u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

La propriété est vraie pour $n = 0$, car :

$$u_0 = \frac{0^2 - 0 + 2}{2} = 1.$$

Supposons que pour un entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{n^2 - n + 2}{2} + n \\ &= \frac{n^2 + n + 2}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 2}{2} \end{aligned}$$

et la propriété est vraie pour tout entier n .

48 • 1. $u_0 = 1 ; u_1 = \frac{1}{3} ; u_2 = \frac{1}{7} ; u_3 = \frac{1}{15} ; u_4 = \frac{1}{31} ; u_5 = \frac{1}{63}$.

Conjecture : pour tout naturel n , $u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

2. La propriété est vraie pour $n = 0$, car :

$$u_0 = \frac{1}{2-1} = 1.$$

Supposons que pour un entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}, \text{ alors :}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2^{n+1} - 1}}{\frac{1}{2^{n+1} - 1} + 2} = \frac{1}{1 + 2(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^{n+2} - 1} :$$

la propriété est vraie pour tout entier n .

Divisibilité

49 • P_0 est vraie car $4^0 + 5 = 6$.

• On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que

$$4^n + 5 = 3p, \text{ p entier.}$$

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 5 &= 4(4^n) + 5 = 4(3p - 5) + 5 \\ &= 12p - 15 + 5 = 12p - 10 = 2(6p - 5), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 2.

P_{n+1} est donc vraie.

• Pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3.

50 • 1. Si on suppose que P_n est vraie pour un entier n , alors $10^{n+1} + 1 = 10(10^n) + 1 = 10(9p - 1) + 1 = 90p - 9 + 1 = 9(10p - 1)$,

donc $10^{n+1} + 1$ est un multiple de 9 et P_{n+1} est vraie.

2. Pourtant $10^n + 1$ s'écrit $\underbrace{10 \dots 01}_{(n-1) \text{ zéros}}$.

Et comme la somme des chiffres est 2, le nombre n n'est pas divisible par 9. Donc P_n n'est jamais vraie.

51 • Soit P_n la proposition : « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 ».

• P_0 est vraie puisque $2^{2 \times 0} - 1 = 0$.

• On suppose que P_n est vraie pour un certain n . Alors :

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)} - 1 &= 2^{3n} \times 2^3 - 1 = 8(7p + 1) - 1 \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ &= 56p + 7 = 7(8p + 1). \end{aligned}$$

$2^{3(n+1)} - 1$ est un multiple de 7 et P_{n+1} est vraie.

• La propriété P_n est donc vraie pour tout entier naturel n .

52 • Pour $n = 0$: $3^0 - 1 = 0$.

Supposons que pour un entier naturel n , $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

$3^{2(n+1)} - 1 = 3^2 \times 3^{2n} - 1 = 9(3^{2n} - 1) + 8$: la propriété est vraie pour tout entier n .

53 • Corrigé dans le manuel.

54 • P_0 est vraie car $3^1 + 2^2$ est égal à 7.

• P_n est supposée vraie, pour un entier $n \geq 0$.

Il s'agit de prouver que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que :

$$3^{2(n+1)} + 1 + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$$

est un multiple de 7. Soit encore :

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} - (3^{2n+1} + 2^{n+2}) \text{ est multiple de 7,}$$

$$3^{2n+1}(3^2 - 1) + 2^{n+2}(2 - 1) \text{ est multiple de 7,}$$

$$3^{2n+1}(8) + 2^{n+2}(1) \text{ est multiple de 7,}$$

$$7(3^{2n+1}) + 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est multiple de 7,}$$

ce qui est vrai par hypothèse de récurrence.

Donc P_{n+1} est vraie et la proposition P_n est vraie pour tout n .

Divers

55 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$; la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Pour $n = 0, u_1 = 1 > 0^2$.

Supposons que pour un entier naturel $n, u_n > n^2$.

$u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$: pour tout entier naturel $n, u_n > n^2$.

56 $u_0 \in]0 ; 1[$; la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que pour un entier naturel $n : 0 < u_n < 1$.

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}, f'(x) = 2(1-x) > 0$ sur $]0 ; 1[$.

f est donc strictement croissante $]0 ; 1[$.

Puisque $0 < u_n < 1$, alors $f(0) < f(u_n) < f(1)$ soit :

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

Conclusion, pour tout entier $n, 0 < u_n < 1$.

57 • 1. $u_n = 1 + 2n$.

2. $v_0 = 1 = 1 + 0^2$, la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n .

$v_{n+1} = v_n + u_n = 1 + n^2 + 1 + 2n = 1 + (n+1)^2$: la propriété est donc vraie pour tout n .

58 • 1. Soit P_n la proposition : « $0 \leq u_n \leq 2$ ».

• P_0 est vraie car $u_0 = 1$.

• On suppose que P_n , soit $0 \leq u_n \leq 2$, alors :

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}.$$

On a bien $0 \leq u_{n+1} \leq 2$, P_{n+1} est vraie.

• Pour tout entier naturel n , P_n est vraie.

$$\begin{aligned} 2. u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}. \end{aligned}$$

Ce quotient est positif car $0 < u_n < 2$ et (u_n) est strictement croissante.

59 • On note P_n la proposition : « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

1. • P_0 est vraie puisque $u_0 = 1$.

• On suppose que P_n est vraie pour un entier $n \geq 0$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3} \geq 0.$$

$$\text{D'autre part } u_{n+1} - 1 = \frac{-2}{u_n + 3} \leq 0.$$

La propriété P_{n+1} est vraie.

• La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n .

$$2. \bullet u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2} \text{ donc } u_1 < u_0.$$

• On suppose que $u_{n+1} < u_n$.

Comme la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x+3}$ est strictement

croissante ($f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$), $f(u_{n+1}) < f(u_n)$, soit

$u_{n+2} < u_{n+1}$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

60 • On note P_n la proposition : « il existe p_n, q_n entiers tels que $(2 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n \sqrt{3}$ ».

• P_1 est vraie, en prenant $p_1 = 2$ et $q_1 = 1$:

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3}.$$

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{n+1} &= (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n \\ &= (2 + \sqrt{3})(p_n + q_n \sqrt{3}) \\ &= (2p_n + 3q_n) + (2q_n + p_n)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Les nombres $2p_n + 3q_n$ et $2q_n + p_n$ sont des entiers, donc P_{n+1} est vraie.

• P_n est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{61} \bullet 1. a) u_1 &= \sqrt{2(1 + \cos \theta)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \frac{\theta}{2}; \\ u_2 &= 2 \cos \frac{\theta}{4}. \end{aligned}$$

b) Récurrence immédiate.

2. Vrai pour $n = 0$.

Supposons que pour un entier naturel n ,

$$u_n = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2^n} \right).$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + 2 \cos \left(\frac{\theta}{2^n} \right)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} :$$

la propriété est vraie pour tout entier n .

62 • A. 1. $u_3 = 5$, $u_4 = 7$, $u_5 = 9$.

Il semble que $u_n = 2n - 1$ pour $n \geq 1$.

2. Cette proposition est vraie pour 1, 2, 3.

• Si elle est vraie pour u_n et u_{n+1} , $n \geq 1$, alors :

$$u_{n+2} = 2(2n+1) - (2n-1) = 2n+3.$$

• La proposition est vraie pour u_{n+2} et donc vraie pour tout n .

B. • P_n est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

• On suppose que P_n est vraie jusqu'au rang $n + 1$. Alors :

$$u_{n+2} = 5 \left(\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{5} \right) - 6 \left(\frac{2^n + 3^n}{5} \right) = \frac{2^{n+2} + 3^{n+2}}{5},$$

et P_{n+2} est vraie.

$$\text{63} \bullet \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^0 + (2 - \sqrt{3})^0] = 1 = u_0.$$

$$\frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^1 + (2 - \sqrt{3})^1] = 2 = u_1.$$

$$u_2 = 4u_1 - u_0 = 7 = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2].$$

La propriété est vraie aux premiers rangs.

Supposons la vraie au rang n .

Posons $a = 2 + \sqrt{3}$ et $b = 2 - \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(a^n + b^n) - \frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} \\ &= a^{n-1} \left(2a - \frac{1}{2} \right) + b^{n-1} \left(2b - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

$$2a - \frac{1}{2} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2} \text{ et } 2b - \frac{1}{2} = \frac{b^2}{2} \text{ donc}$$

$$u_{n+1} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}.$$

64 • a) $u_0 = 2 > -1$ donc vrai pour $n = 0$.

Supposons que pour un entier naturel n , $u_n > -1$, alors $u_n + 1 > 0$ et $\sqrt{u_n + 1} > 0 > -1$.

Conclusion, pour tout entier n , $u_n > -1$.

b) $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$, fonction strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

$$u_0 = 2 > \sqrt{3} = u_1.$$

Supposons que pour un entier naturel n , $u_n > u_{n+1}$, alors $f(u_n) > f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} > u_{n+2}$: pour tout

entier n , $u_n > u_{n+1}$; la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) $2 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc vrai pour $n = 0$.

Supposons que pour un entier naturel n ,

$$u_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \text{ alors } u_{n+1} \geq \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + 1,$$

$$\text{soit } u_{n+1} \geq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Conclusion, pour tout n , $u_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{65} \bullet 1. v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+4}{u_n-2} - 1}{\frac{u_n+4}{u_n-2} - 4} = -\frac{2}{3} \times \frac{u_n+4}{u_n-2} = -\frac{2}{3} v_n.$$

$$2. v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

$$\text{Pour tout } n, v_n \neq 1 \text{ et } u_n = \frac{4v_n+1}{v_n-1} = \frac{4(-2)^{n+1}+3^{n+1}}{(-2)^{n+1}-3^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{66} \bullet 1. P(x+1) - P(x) &= \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^2}{2} \\ &\quad + \frac{x+1}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} \\ &= x^2 + x + \frac{1}{3} - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ &= x^2. \end{aligned}$$

2. $P(0) = 0$, donc vrai pour $n = 2$.

Supposons que pour un entier naturel n , $P(n) \in \mathbb{N}$, alors, comme $P(n+1) = P(n) + n^2$, $P(n-1) \in \mathbb{N}$. Conclusion, pour tout entier naturel n , $P(n) \in \mathbb{N}$.

3. $0^2 = P(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, donc vrai au rang 0.

Supposons la propriété vraie au rang n .

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = P(n+1) + (n+1)^2 = P(n+2).$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \right] \\ &= (n+1) \times \frac{2n^2+7n+6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} : \end{aligned}$$

la propriété est vraie pour tout entier n .

67 • $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{3}{4}$, on peut conjecturer que pour tout entier n , $u_n = \frac{n}{n+1}$.

La propriété est vraie au rang 0. Supposons la vraie au rang n .

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} : \text{ la propriété est vraie pour}$$

tout entier n et $u_{2006} = \frac{2006}{2007}$.

68 • n est un entier supérieur ou égal à 24.

$24 = 2 \times 5 + 2 \times 7$: la propriété est vraie au rang 24.

Supposons la vraie au rang n :

$$24 \leq n = 5a + 7b.$$

Si $b \geq 2$, $25 \leq n+1 = 5a+7b+15-14$ et $n+1 = 5(a+3) + 7(b-2)$.

Si $b = 1$, $24 \leq n = 5a+7$ alors $a \geq 4$.

$$n+1 = 5a+8 = 5(a-4) + 7 \times 4.$$

Si $b = 0$, $24 \leq n = 5a$ alors $a \geq 5$.

$$n+1 = 5(a-4) + 7 \times 3.$$

La propriété est vraie pour tout $n \geq 24$.

69 1. a) $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{4}$; $u_3 = \frac{3}{8}$; $u_4 = \frac{4}{16}$; $u_5 = \frac{5}{32}$.

b) La propriété est vraie au rang 1 (et 2, 3, ...).

Supposons la vraie au rang n :

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

$u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$: la propriété est vraie pour tout n .

2. $v_1 = \frac{1}{k}$; $v_2 = \frac{2}{k^2}$; $v_3 = \frac{3}{k^3}$; on peut conjecturer que

$$v_n = \frac{n}{k^n}.$$

La propriété est, bien sûr, vraie au rang 1.

Supposons la vraie au rang n :

$$v_n = \frac{n}{k^n}.$$

$v_{n+1} = \frac{n+1}{k^{n+1}} \times \frac{n}{k^n} = \frac{n+1}{k^{n+1}}$: la propriété est vraie pour tout n .

Activités (page 20)

ACTIVITÉ 1

2 Dans le cas ①, f est continue sur $[-3; 3]$ puisqu'elle est d'un seul morceau.

Dans le cas ②, f est discontinue en 1, donc n'est pas continue sur $[-3; 3]$.

Dans le cas ③, f est discontinue en 1 ($f(1) = 0$), donc f n'est pas continue sur $[-3; 3]$.

ACTIVITÉ 2

1 1. • Si $x \in [0; 1[$, $E(x) = 0$;

• Si $x \in [1; 2[$, $E(x) = 1$.

2. a) $E(1) = 1$.

b) E n'a pas pour limite $E(1)$ en 1,

car $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.

$$3. E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1; 2[\\ 2 & \text{si } x \in [2; 3[\\ 3 & \text{si } x \in [3; 4[\\ 4 & \text{si } x \in [4; 5[\end{cases}$$

a) La fonction E est discontinue en 1, 2, 3 et 4.

b) E n'est pas continue sur $]3; 5[$, car 4 est un point de discontinuité.

2 1. $f([0; 2]) = [0; 4]$; $f([-2; 2]) = [0; 4]$;

$f([-2; 4]) = [0; 16]$; $f(-\infty; 2]) = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$;
 $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. $E(I) = [0; 1]$.

Travaux dirigés (page 39)

TD 1

1 1. a) $f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

b) $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, donc C_f est au-dessus de Δ pour $x > 0$ (on étudie le comportement de f en $+\infty$).

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\Delta' = \Delta$ et C_f est en dessous de Δ' pour $x < 0$.

2. a) Pour tout $x > -3$, $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+3}$.

b) $\Delta : y = 2x - 1$.

$\frac{3}{x+3} > 0 \Leftrightarrow x > -3$, donc sur $]-3; +\infty[$, Δ est au-dessus de C_f .

2 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

b) À l'infini ($+\infty$ et $-\infty$), la courbe C_f et la parabole P d'équation $y = x^2$ sont de plus en plus « proches » l'une de l'autre.

c) $\frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, donc C_f est au-dessus de $\mathcal{P}$ pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$.

TD 2

1 1. a) L'aire du secteur circulaire OAM est $\frac{h \times r^2}{2}$ avec $r = 1$.

b) Aire(OAM) = $\frac{Mm \times OA}{2} = \frac{\sinh}{2}$.

c) Dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\cosh}$, [AT] est l'image de [Mm] donc $AT = \frac{\sinh}{\cosh}$ et l'aire du triangle OAT est $\frac{OA \times AT}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sinh}{\cosh}$.

d) $\frac{\sinh}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{\sinh}{\cosh}$ soit, pour tout h de $]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$\sinh \leq h \leq \frac{\sinh}{\cosh}.$$

e) $h > 0$ donc la première inégalité équivaut à $\frac{\sinh h}{h} \leq 1$. $\cosh h$ et h sont strictement positifs, donc la seconde inégalité équivaut à $\cosh h \leq \frac{\sinh h}{h}$, et donc, pour tout h de $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cosh h \leq \frac{\sinh h}{h} \leq 1$.

2. Cela résulte de : pour tout h , $\cos(-h) = \cos h$ et $\frac{\sin(-h)}{-h} = \frac{-\sin h}{-h} = \frac{\sin h}{h}$.

3. Le théorème d'encadrement et le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ permettent de conclure que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1.$$

$$2. 1. a) \frac{\cosh h - 1}{h} = -2 \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

$$b) \frac{\cosh h - 1}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \sin \frac{h}{2}, \text{ donc,}$$

puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, lorsque h est voisin de 0,

$\frac{\cosh h - 1}{h}$ est voisin de $-\sin \frac{h}{2}$.

c) Il résulte de la remarque précédente que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\sin \frac{h}{2} \right) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = -\sin 0 = 0$$

$$2. x \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - \cos 0}{h - 0} = \sin 0 = 0.$$

$$f\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right) = f(0,25) \approx -0,48, \text{ donc } u_2 = 0,25 \text{ et } v_2 = 0,5.$$

$$b) f\left(\frac{u_2 + v_2}{2}\right) = f(0,375) \approx -0,19, \text{ donc : } u_3 = 0,375 \text{ et } v_3 = 0,5.$$

$$f\left(\frac{u_3 + v_3}{2}\right) = f(0,4375) \approx -0,041, \text{ donc : } u_4 = 0,4375 \text{ et } v_4 = 0,5.$$

$$f\left(\frac{u_4 + v_4}{2}\right) = f(0,46875) \approx -0,040, \text{ donc : } u_5 = 0,4375 \text{ et } v_5 = 0,46875.$$

c) Par récurrence : $v_0 - u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie : $v_n - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• Soit $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, auquel cas :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

soit $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$, auquel cas :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

• De plus, pour tout n , $u_n \leq \alpha \leq v_n$ donc :

$$v_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \alpha - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour obtenir un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3} , il faut et il suffit de choisir n tel que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3}, \text{ soit } 2^n \geq 1000, \text{ donc } n \geq 10 \text{ car}$$

$$2^9 = 512 \text{ et } 2^{10} = 1024.$$

$$u_{10} = 0,453125; v_{10} = 0,4541015625.$$

(À 10^{-7} près par défaut, $\alpha = 0,4533976$.)

$$d) \text{ Pour tout } n, 0 \leq v_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et}$$

$$0 \leq \alpha - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Le théorème d'encadrement (vu en 1^{re}) permet de conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite α . Ceci démontre le théorème 7 (dans le cas particulier).

$$2. 3. a) \alpha = 0,867 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}$$

$$b) \alpha = -2,0945 \text{ à } 10^{-4} \text{ près par défaut.}$$

TD 3

1. 1. a) La fonction f (polynôme) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 2$. Pour tout x de $[0; 1]$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$ (et sur $\mathbb{R} \dots$).

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$, donc il existe un unique réel $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$$2. a) f\left(\frac{u_0 + v_0}{2}\right) = f(0,5) = 0,125, \text{ donc } u_1 = 0 \text{ et } v_1 = 0,5.$$



1. 2. 3. Limite d'une fonction

1	limite	en $-\infty$	en $+\infty$
a)		$-\infty$	$+\infty$
b)		$-\infty$	$-\infty$
c)		$+\infty$	$-\infty$

2 Corrigé dans le manuel.

3 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

5 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

7 Corrigé dans le manuel.

8 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

$f(x) > 10^3 \Leftrightarrow 5x - 1 > 10^3(x - 1)^2$

$\Leftrightarrow 1\,000x^2 - 2\,005x + 1\,001 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{641} - 401}{400} < x < \frac{\sqrt{641} + 401}{400}$,

et on peut prendre $\alpha = 0,07$.

9 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4$.

$3,95 < f(x) < 4,05 \Leftrightarrow 2,95x < 14,85$ et $3,05x > 15,1$

$\Leftrightarrow 4,967\,21\dots < x < 5,033\dots$

et on peut prendre $I =]4,97; 5,03[$.

10 Corrigé dans le manuel.

11 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

La droite $d_1: y = -2$ est asymptote horizontale et la droite $d_2: x = -1$ est asymptote verticale.

• $f(x) + 2 = \frac{2}{x+1}$. La courbe est au-dessus de d_1 si et seulement si $x > -1$.

12 Corrigé dans le manuel.

13 a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = 0$.

14 a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$;

pas de limite en $+\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \pi + 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

15 Corrigé dans le manuel.

16 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

17 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. Théorèmes de comparaison

18 Corrigé dans le manuel.

19 Pour tout réel $x > -1$, $x+1 > 0$ et $-1 < \cos x < 1$,

$$\text{donc } \frac{-1}{x+1} < \frac{\cos x}{x+1} < \frac{1}{x+1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0.$$

$$\textbf{20} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

$$\textbf{21} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

22 Pour tout réel x , $-1 \leq -\cos x \leq 1$

$$\text{donc } 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \text{ et } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1 \text{ et pour}$$

$$x > -1, \frac{x+1}{3} \leq f(x) \leq x+1.$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

23 Pour tout réel x , $\sin x \leq 1$, donc :

$$-5\sin x \geq -5 \text{ et } x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5.$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5) = +\infty, \text{ alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5\sin x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5\sin x) = +\infty.$$

24 En $+\infty$ ($x > 0$) : $-x \leq x \sin x \leq x$

$$\text{soit } x^2 - x \leq f(x) \leq x^2 + x \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

En $-\infty$ ($x < 0$) : $x \leq x \sin x \leq -x$

$$\text{soit } x^2 + x \leq f(x) \leq x^2 - x \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\textbf{25} \quad 1. f(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} \\ = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}.$$

$$\textbf{2. a)} \text{ Pour tout } x \geq 0, \sqrt{1+x} > \sqrt{x},$$

$$\text{donc } 0 < 2\sqrt{x} \leq \sqrt{1+x} + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{1+x},$$

$$\text{et } \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\textbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0, \text{ donc (théorème d'encadrement) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ Le résultat pouvait se}$$

déduire directement de la question 1.

26 1. Pour tout x de $]1; +\infty[$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc, $x-1$ étant strictement positif,

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}.$$

$$\textbf{2.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2, \text{ donc (théorème d'encadrement) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

5. Limites d'une fonction composée

27 Corrigé dans le manuel.

$$\textbf{28} \quad \textbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x^2+1} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$\textbf{b)} \text{ Sur }]-1; 1[, 1-x^2 > 0; \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1-x^2) = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty.$$

$$\textbf{29} \quad \textbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty; \quad \textbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

$$\textbf{30} \quad \textbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \textbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$\textbf{31} \quad \textbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\textbf{b)} \quad f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} \times \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi.$$

32 Zoom sur le théorème 7

1. a) f est un polynôme donc dérivable sur I et $f'(x) = 3x^2 + 2$.

b) Pour tout x de I , $f'(x) > 0$: f est donc strictement croissante sur I .

f est dérivable donc continue et strictement croissante sur I : nous sommes dans les conditions d'utilisation du théorème 7.

Comme de plus $f(0) \times f(3) < 0$, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I .

2. a) g n'est pas continue en I donc le théorème 1 ne s'applique pas.

$$\textbf{b)} \text{ Sur } [0; 1[, g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ et sur } [1; 2].$$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ ce qui est impossible ; donc l'équation $g(x) = 0$ admet bien une unique solution dans J .

6. Asymptotes obliques

33 Corrigé dans le manuel.

$$\textbf{34} \quad \textbf{a)} \quad f(x) - x = \frac{\sin x}{x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$: Δ est bien asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour $x > 0$, $\frac{\sin x}{x}$ est du signe de $\sin x$, donc positif sur tout intervalle de la forme $[2k\pi; (2k+1)\pi]$ et négatif sur tout intervalle de la forme $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$: la courbe coupe une infinité de fois son asymptote (même chose en $-\infty$).

b) $f(x) - (3x+7) = -\frac{5}{\sqrt{|x|}}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{|x|}} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{\sqrt{|x|}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x+7)] = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (3x+7)] = 0$: Δ est bien asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'autre part, pour tout réel x non nul, $-\frac{5}{\sqrt{|x|}} < 0$: la courbe est toujours en dessous de son asymptote Δ .

35 a) $f(x) - (2x+1) = \frac{1}{x-4}$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-4} = 0$,

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-4} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x+1)] = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = 0$: Δ est bien asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'autre part, $\frac{1}{x-4} > 0 \Leftrightarrow x > 4$, la courbe est au-dessus de Δ pour $x > 4$ et en dessous pour $x < 4$.

b) $f(x) - (x-2) = -\frac{3}{(x+1)^2}$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x+1)^2} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x+1)^2} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$: Δ est bien asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'autre part, pour tout réel $x \neq -1$, $-\frac{3}{(x+1)^2} < 0$, la courbe est toujours en dessous de son asymptote Δ .

7. et 8. Fonctions continues

36 Corrigé dans le manuel.

37 f , fonction polynôme, est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $]-\infty; 0]$, f est strictement croissante, $f(]-\infty; 0]) =]-\infty; 1]$ qui contient -1 : $f(x) = -1$ admet une unique solution dans $]-\infty; 0]$.

De la même manière, sur $I =]0; 2]$ et sur $J =]2; +\infty]$, f est strictement monotone et -1 appartient à $f(I)$ et $f(J)$ donc $f(x) = -1$ admet une unique solution dans I et dans J : au total, l'équation admet donc trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ et trois seulement.

38 1. $f(-1) = -\frac{3}{2}$; $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; $f(0) = -\frac{1}{2}$; $f(1) = \frac{1}{2}$.

2. On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur $[-1; -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}; 0]$ et $[0; 1]$.

39 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$.

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1).$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

b)	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	$f'(x)$		$-$	$+$	0
	f	$+\infty$	-1	3	$+\infty$

3. f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]-2; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; 2[$ dont les images sont respectivement $]-1; 3[$, $]-1; 3[$ et $]-3; -1[$ qui contiennent tous 0.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique dans chacun des intervalles :

$$]-2; -1[,]-1; 1[\text{ et }]1; 2[.$$

Apprendre à chercher

(page 47)

40 Un changement de variable

Les outils :

- Limite de $\frac{\sin x}{x}$ en zéro.
- Dérivée de la fonction sinus.

Les objectifs :

- Savoir lever une indétermination.
- Savoir reconnaître le taux d'accroissement d'une fonction dérivable usuelle.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = 0$, d'où la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

2. Si $X = 3x$, alors $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \frac{\sin X}{X}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$.

3. Autre solution :

Si $g(x) = \sin 3x$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 3$.

41 Courbes asymptotes

Les outils :

- Limite à l'infini d'une fonction rationnelle.
- Tracé de courbes.

Les objectifs :

- Savoir trouver une fonction usuelle dont la courbe représentative est « proche » de celle de la fonction étudiée.
- Savoir montrer qu'une courbe asymptote n'est pas nécessairement une droite.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty.$$

$$2. [f(x) - x^2] = \frac{1}{x+2}, \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$

3. Pour x fixé dans $] -2 ; +\infty[$, $\frac{1}{x+2}$ représente la distance (dans un repère orthonormé) entre les deux points d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$ et la parabole $\mathcal{P}$ représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.
D'après 2., cette distance tend vers 0, les deux courbes sont « de plus en plus proches » lorsque x tend vers $+\infty$.

$$42 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\text{b) } f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0.$$

$$\text{Pour } x \neq 0, g(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \frac{1}{2}.$$

Si $f(x)$ se comporte comme x pour les « grandes valeurs » de x , (la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f), il n'en est pas de même pour $g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = 0 : g(x) \text{ se comporte comme } x + \frac{1}{2} \text{ pour les « grandes valeurs » de } x \text{ (la droite d'équation } y = x + \frac{1}{2} \text{ est asymptote à la courbe représentative de } g).$$

43 Polynôme de degré impair

Les outils :

- Limite à l'infini d'une fonction polynôme.
- Théorème sur les fonctions continues strictement monotones.

Les objectifs :

- Savoir montrer que tout polynôme de degré impair a au moins une racine.

1. Le théorème des valeurs intermédiaires.

$$2. \text{ a) } \bullet a_n > 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty.$$

$$\bullet a_n < 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty.$$

$$\text{b) } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

3. Pour tout polynôme P de degré impair, l'équation $P(x) = 0$ a une solution (au moins).

Remarque :

$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ a trois solutions et $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ a deux solutions.

Pour progresser

(page 48)

Limites de fonctions

44 Corrigé dans le manuel.

$$45 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

$x^2 - 4$ s'annule en -2 et 2 .

De plus, $x^2 - 4x - 12$ s'annule en -2 donc, pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x-6)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-6}{x-2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2.$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x - 12) = -16,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

1 étant racine du numérateur et du dénominateur, on est en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » en 1 :

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)} \text{ et donc pour tout } x \neq 1,$$

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+2}.$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{3}.$$

$$x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2, \text{ donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty.$$

46 a) En $+\infty$ et en $-\infty$, $f(x)$ est la somme de deux termes de limites nulles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

On évite les formes indéterminées liées à la somme en écrivant $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$.

$x^2 - 9 < 0$ signifie que $x \in]-3; 3[$, et donc puisque $\lim_{x \rightarrow -3} (x+1) = -2$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty.$$

De même, puisque $\lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

1 étant racine du numérateur et du dénominateur, on est en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » en 1 : pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{3}$.

47 a) Pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conclure :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \text{ donc } 1 \leq (2 + \cos x) \leq 3.$$

Pour $x > 0$, $x^3 \leq f(x) \leq 3x^3$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Pour $x < 0$, $3x^3 \leq f(x) \leq x^3$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

48 a) La fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$. Pour tout x , $f(x) \geq 3x - 2$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Sur son domaine de définition $]1; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

49 • Pour tout réel x , $1 \leq 3 + 2 \sin x \leq 5$ donc

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2\sin x} \leq 1 \text{ et } \frac{x^2}{5} \leq \frac{x^2}{3+2\sin x} \leq x^2.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = +\infty.$$

De même, pour tout réel x , $\frac{x-1}{5} \leq \frac{x+\sin x}{3+2\sin x}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{5} = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} = +\infty.$$

50 • 1. $f(x) = 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x-2}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

En -1 , $(x+1)$ tend vers 0 et le signe de $(x+1)$ est constant à gauche et à droite de -1 , donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

En 2, $(x-2)$ tend vers 0 et le signe de $(x-2)$ est constant à gauche et à droite de 2, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

51 • 1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ et $(x-1)^2$ est toujours positif, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

2. $\frac{x}{(x-1)^2} > 10^6 \Leftrightarrow 10^6 x^2 - (2 \times 10^6 + 1)x + 10^6 < 0$.

Les racines du trinôme ont pour valeurs approchées 0,999 000 4 et 1,001 000 5.

Donc on peut choisir $I =]0,999 1; 1,000 9[$.

52 • a) Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

$$\text{Pour } x > 0, f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1},$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

b) Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Pour $x < 0$,

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} = \frac{2x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x} = \frac{-2}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2},$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

53 • Corrigé dans le manuel.

54 • a) En $+\infty$, nous sommes en présence de la forme

$$\text{indéterminée } \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle; f(x) = \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

En 1, nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

$$f(x) = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

b) En $+\infty$, nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

En -1 , nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$.

55 • **a)** Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » ; $f(x) = 5 \times \frac{\sin 5x}{5x}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, le théorème 4 (limite d'une fonction composée) nous permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5 \times 1 = 5.$$

b) En 0 , nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » ; $f(x) = \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \times 1 = 0$. Pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$,

$$\text{donc } \frac{-1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement (théorème 1), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

56 • Nous sommes en présence de la forme indé-

$$\text{terminée « } \frac{0}{0} \text{ » ; } f(x) = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

57 • Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x^2}{1 - \cos x}$.

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \text{ alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \times 2 = 2.$$

58 • Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{(4 - 3x + 2)(\sqrt{2x + 5} + 3)}{(2 + \sqrt{3x - 2})(2x + 5 - 9)}$$

$$= \frac{3(2 - x)(\sqrt{2x + 5} + 3)}{-2(2 - x)(2 + \sqrt{3x - 2})} = -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2x + 5} + 3}{2 + \sqrt{3x - 2}},$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{9}{4}.$$

59 • **a)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{3}$, donc, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée (théorème 4), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = -\frac{1}{3}$.

$$\text{b) } f(f(x)) = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{-2x - 18}{6x + 22} = -\frac{x + 9}{3x + 11}.$$

$$\text{On retrouve bien } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = -\frac{1}{3}.$$

60 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. En remarquant que

$$f(x) = 3 + \frac{8}{x-3}, \text{ pour tout } x \text{ de } I =]3; +\infty[, f(x) > 3.$$

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée (théorème 4), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$.

Asymptotes

61 $f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x-3}$.

62 • Corrigé dans le manuel.

63 • **a)** f est définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$: la droite d'équation $y = 1 + \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{2}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{x}\right) = -\infty$: la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 3} = 0$, la droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et $+\infty$.

64 • f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 6x + 1) = -4 \text{ et } x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[.$$

Il en résulte $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 6x + 1) = 8, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ et}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

65 • f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

Pour $x \neq 1$, $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x-1}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$: la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 1) = -1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

66 • f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x , $f(x) = x + \frac{-2x+1}{x^2+2}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x^2+2} = 0$: la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

67 • • Pour $x > -1$ ($x \neq 0$), $f(x) = x + 1 + \frac{3}{x}$;

• Pour $x < -1$, $f(x) = -x + 1 + \frac{3}{x}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$, la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

68 • 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Le calcul de la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x + 1)$ nous conduit à la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 1) &= \frac{x^2 + 2x + 4 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}, \end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$.

b) La droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c) Pour tout x :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} > \sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1| \geq x + 1, \quad \mathcal{C} \text{ est au-dessus de } \Delta.$$

2. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{b) Pour } x < 0, \frac{f(x)}{x} = \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

$$\begin{aligned} f(x) - (-x) &= \sqrt{x^2 + 2x + 4} + x = \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} \\ &= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1}. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = -1$.

c) La droite Δ' d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

69 • 1. $f(x) = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

$$2. f(x) - 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x};$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ est toujours strictement positif : $\mathcal{C}$ est au-dessus de son asymptote oblique Δ .

70 • 1. Pour $|x| \geq \frac{1}{2}$, $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$, donc :
 $f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$.

$$\text{Pour } x > -\frac{1}{2}, f(x) = x + 2x \sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Pour } x < -\frac{1}{2}, f(x) = x - 2x \sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} = x \left(1 - 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} \right).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Si $x > \frac{1}{2}$,

$$f(x) - 3x = \sqrt{4x^2 - 1} - 2x = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x},$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0$.

$$\text{b) Si } x < -\frac{1}{2}, f(x) + x = \sqrt{4x^2 - 1} + 2x = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} - 2x},$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$.

3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0$, donc la droite Δ_1 d'équation $y = 3x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$, donc la droite Δ_2 d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

b) Il résulte du 2. a) que :

$$\bullet \text{ si } x > \frac{1}{2}, f(x) - 3x = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} < 0,$$

donc $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ_1 ;

$$\bullet \text{ si } x < -\frac{1}{2}, f(x) + x = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} - 2x} > 0,$$

donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ_2 .

71 • 1. a) $f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$

$$= \frac{-9}{\sqrt{x^2+9}(x+\sqrt{x^2+9})};$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0.$

b) Pour tout x , $\frac{-9}{\sqrt{x^2+9}(x+\sqrt{x^2+9})} < 0$, donc la courbe $\mathcal{C}$ est située sous l'asymptote oblique Δ .

2. $f(x) - (x-1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + 1$

$$= \frac{-9}{\sqrt{x^2+9}(x-\sqrt{x^2+9})};$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$, donc la droite Δ' d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

Courbes asymptotes

72 • $f(x) - (-2x^2) = \frac{1}{x+1}.$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation représentative de $x \mapsto -2x^2$ sont asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.

Puisque $\frac{1}{x+1}$ est du signe de $x+1$, $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{P}$ sur $] -\infty; -1[$ et au-dessus sur $] -1; +\infty[$.

73 • f est définie sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ donc } f(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ représentative

de f et la courbe Γ représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ sont asymptotes en $+\infty$.

Puisque pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement positif, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ .

Continuité

74 • $f(-1) = -1, f(0) = 1$, f est continue sur $] -1; 0[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in] -1; 0[$ tel que $f(c) = 0$.

On peut prouver l'unicité de c car sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

donc f est strictement croissante.

75 • 1. $f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2(x + \frac{3}{2})}{(x+1)^2}.$

Si $x > -\frac{3}{2}$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}; -1[$.

2.

x	$-\frac{3}{2}$	-1
$f'(x)$	0	+
f	$\frac{27}{4}$	$+\infty$

3. $f\left(-\frac{3}{2}; -1\right] = \left[\frac{27}{4}; +\infty\right]$, f est strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}; -1[$, 10 appartient à $[\frac{27}{4}; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 10$ a une solution unique dans l'intervalle $[-\frac{3}{2}; -1[$.

76 • $f'(x) = 2x - 2$;

x	0	1	3
$f'(x)$	-	0	+
f	-3	-4	0

$f(I) = [-4; 0]$.

77 • f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

• $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, d'où le tableau :

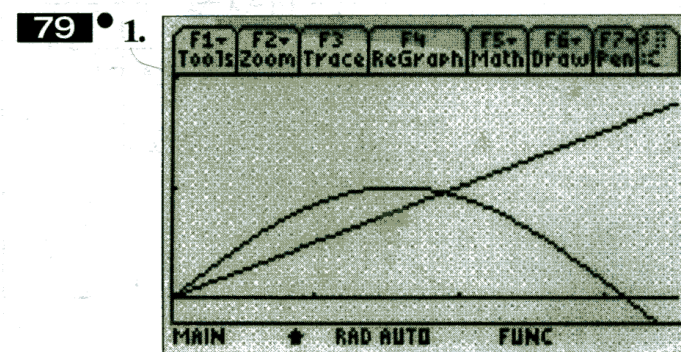
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	1	0	1

$f(\mathbb{R}) = [0; 1]$.

78 • Pour chercher la limite lorsque x tend vers 0, on utilise l'expression conjuguée.

$$f(x) = \frac{1 - (x^2 + 1)}{x(1 + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{-x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

f est continue en 0 équivaut à dire que $f(0) = 0$. D'autre part, f est continue car composée de fonctions continues (polynôme, racine carrée, somme et quotient). Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ équivaut à $m = 0$.



On peut conjecturer que l'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ admet une seule solution dans I .

2. a) Somme de deux fonctions dérivables sur I , f est dérivable sur I .

Pour tout x de I , $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc f' s'annule pour $x = \frac{\pi}{3}$.

b)

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

3. a) Sur $\left]0; \frac{\pi}{3}\right]$, f est croissante et strictement positive et donc ne s'annule jamais (car $f(x) > 0$).

Sur $\left]\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, f est continue strictement décroissante et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0$: l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

L'équation (équivalente) $\sin x = \frac{x}{2}$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle I .

b) $1,895\,4 < \alpha < 1,895\,5$.

Prendre toutes les initiatives

80 • 1. Pour $x > 1$, $f(x) > x^4 > x$ donc il suffit de prendre $A = 10^6$.

2. $f(x) = x^2(2x^2 - x - 1)$.

La fonction $g : x \mapsto 2x^2 - x - 1$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$. Comme $g(2) = 5$, pour $x > 2$, $f(x) > 5x^2$.

Il suffit donc de prendre A tel que $5A^2 \geq 10^6$ soit $A \geq 20\,000$. Le réel 142 convient.

81 • Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)(x-3)}} = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ et $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$.

82 • $f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{3}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

83 • 1. $f(x) = x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} - 1\right) = x \frac{-\frac{1}{x+1}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + 1}$

$$= \frac{-\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + 1}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

84 • La fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x , $f'(x) = x^n - 1[(n+1)x - 2n]$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}; 2\right]$, f est continue et strictement croissante. D'autre part, f est strictement décroissante sur $\left[1; \frac{2n}{n+1}\right]$ et $f(1) = 0$, donc $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.

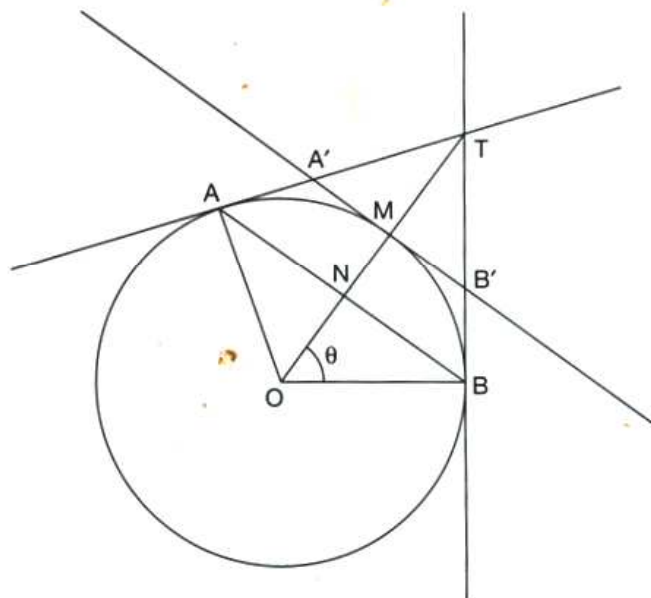
Comme $f(2) = 1$, le théorème 7 nous assure de l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}; 2\right]$.

85 • La fonction g définie sur $I = [0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$ est continue sur I .

$g(0) = f(0) \geq 0$; $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

Le théorème 6 nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel a de I tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(a) = a$.

86 :



Comme $OT = \frac{r}{\cos \theta}$ et $ON = r \cos \theta$, on en déduit :

$$TN = \frac{r}{\cos \theta} - r \cos \theta ; TM = \frac{r}{\cos \theta} - r.$$

$$\frac{\text{Aire } A'TB'}{\text{Aire } ATB} = \left(\frac{TM}{TN}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{\cos \theta} - 1}{\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta}\right)^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + \cos \theta}\right)^2.$$

Dire que A tend vers B , équivaut à dire que θ tend vers 0 et $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

La limite de $\frac{\text{Aire } (A'TB')}{\text{Aire } (ATB)}$ lorsque A tend vers B est donc $\frac{1}{4}$.

87 • 1. f est paire (son domaine de définition $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0 et pour tout x , $f(-x) = f(x)$) : la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe $(O; \vec{j})$ comme axe de symétrie.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f(x) - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$, donc la droite d d'équation

$y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Pour tout réel x , $\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} > 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus

de son asymptote oblique d .

4. $M(x; y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow y = \sqrt{1+x^2}$ ou $y = -\sqrt{1+x^2}$
 $\Leftrightarrow y^2 = 1+x^2$.

5. $\vec{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$

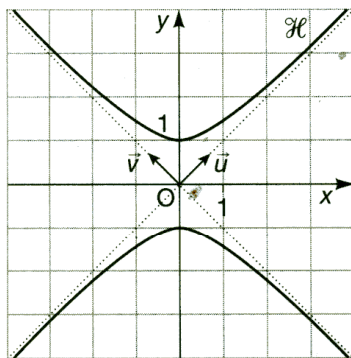
$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)\vec{j}$,

et, compte-tenu de l'unicité de la décomposition ;

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$.

$y^2 - x^2 = \frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(X-Y)^2 = XY = 1$.

$\mathcal{H}$ est donc une hyperbole équilatère.



88 • 1. a) • Si $x \in]-\infty; -1[$, $f(x) = -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$;

• si $x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$.

b) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• En -1 : si $x < -1$, alors $x^2 - 1 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

et si $-1 < x < 1$, alors $x^2 - 1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

• En 1 : si $-1 < x < 1$, alors $x^2 - 1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

et si $x > 1$, alors $x^2 - 1 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

2. a) Si $x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) = -1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$,

et si $x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$,

$f'(x) = 1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$.

b) Si $x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) < 0$,

et si $x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $(x^2 - 3)$, donc $f'(x)$ est négatif sur $]-1; 1[\cup]1; \sqrt{3}[$ et strictement positif sur $]\sqrt{3}; +\infty[$.

c)

x	$-\infty$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	0	+
f	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$	$+\infty$

3. a) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$: la droite d'équation $y = x + 1$

est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Sur $]1; +\infty[$, $\frac{x}{x^2 - 1}$ est positif : $\mathcal{C}$ est au-dessus de son asymptote.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$: la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

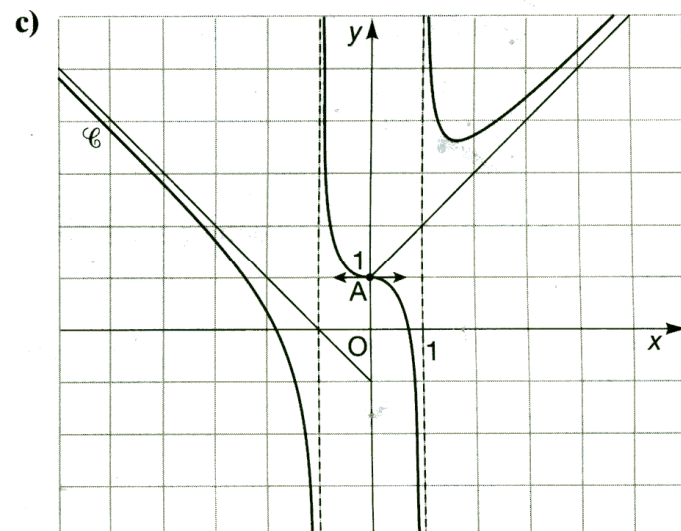
Sur $]-\infty; -1[$, $\frac{x}{x^2 - 1}$ est négatif : $\mathcal{C}$ est en dessous de son asymptote.

b) $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$; la tangente en $A(0; 1)$ à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = 1$: elle est horizontale.

Sur $]-1; 1[$, $f(x) - 1 = x + \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ est du signe

contraire de x . Donc si $0 < x < 1$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T et si $-1 < x < 0$, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

Remarque : A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



4. Sur $] -1 ; 1[$, f est continue (fonction rationnelle) et strictement décroissante car $f'(x) < 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

L'image par f de $] -1 ; 1[$ est $] -\infty ; +\infty[$, soit $\mathbb{R}$: d'après le théorème 7, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $] -1 ; 1[$.

$f(0,7) \times f(0,8) < 0$, donc $0,7 < \alpha < 0,8$.

89 • Partie A

1. Si $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, et si $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. f étant continue, les limites trouvées en 1. permettent d'affirmer que quel que soit a non nul, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3. 0 a au moins un antécédent par f : toute équation du troisième degré admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Pour tout réel x , f est dérivable et $f'(x) = 6x^2 - 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{9} - 1$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Résoudre l'équation $2x^3 = x + 1$ revient à résoudre l'équation équivalente $f(x) = 0$.

$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9} - 1 < 0$ donc $f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > 0$.

Pour tout x de $\left[-\infty; \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$, $f(x) < 0$: l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

L'image par f de $\left[\frac{\sqrt{6}}{6}; +\infty\right]$ contient 0. Sur cet

intervalle $\left[\frac{\sqrt{6}}{6}; +\infty\right]$, f est continue et strictement croissante : le théorème 7 nous permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

3. 1 est solution « évidente » de l'équation $2x^3 = x + 1$.

Partie C

1. $f(0) = 1$ et $f(1) = -3$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ donc (théorème 6) l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans I .

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 1.$$

f' s'annule pour $x_1 = 6 - \sqrt{33}$ et $x_2 = 6 + \sqrt{33}$.

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $[0; x_1[$ f est strictement croissante et $f(0) = 1$ donc f ne s'annule pas et de plus $f(x_1) > 0$.

Sur $[x_1; 1]$ f est continue, strictement décroissante et $f(x_1) \times f(1) < 0$: l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I (théorème 7).

3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ donc $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

4. $\alpha = 0,528$ à 10^{-3} près par défaut.

C'est nouveau au bac (page 52)

90 1. Réponse c) : $f(x) = (x-1)^2(x-3)$.

2. Réponse c) car pour tout $x \neq 3$,

$$\frac{2x-1}{x-3} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-3}.$$

3. Réponses a) car $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x-1}$ et

c) car $f(x) = x - 1 + \frac{1 + \sqrt{x}}{x+1}$.

91 1. Faux.

Un contre-exemple : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $]1; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Faux. Un contre-exemple : $f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto 2x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}.$$

3. Vrai.

92 1. Vrai.

2. Faux.

Un contre-exemple :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ si } x < 0 \text{ et}$$

$$f : x \mapsto x - 3 + \frac{1}{x^2 + 1} \text{ si } x \geq 0.$$

3. Vrai.

93 1. Le cours.

2. a) Sur $]1; +\infty[$, $|f(x) - 3| = \frac{|\sin x + 3|}{x-1} \leq \frac{4}{x-1}$.

b) $\frac{-4}{x-1} + 3 \leq f(x) \leq \frac{4}{x-1} + 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

Travaux dirigés (page 65)

TD 1

2 $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) = f(x_0) + \frac{h}{1+x_0^2}$

donc $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1+x_n^2}$ car $y_{n+1} = f(x_n + h)$.

TD 2

1. $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3 + 1)^2}$; donc $f'(x)$ a le même signe

que $2x^3 - 3x^2 - 1$.

2. a) $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

D'où le tableau de variations :

x	-1	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$			-1		-2		$+\infty$

b) On a besoin de la limite en $+\infty$ de $g(x)$; elle vaut $+\infty$.

• Sur $]-1; 1]$, $g(x)$ est inférieur à -1 , donc $g(x)$ ne s'annule pas.

• Sur $[1; +\infty[$, $g(x)$ prend des valeurs sur $[-2; +\infty[$, elle est strictement monotone. Donc, puisque 0 est dans $[-2; +\infty[$, il existe un réel unique α de $[1; +\infty[$ tel que $g(x) = 0$. $g(1,6) < 0$ et $g(1,7) > 0$ donc $\alpha \in [1,6; 1,7]$.

c) Si $x \in]-1; \alpha[$, alors $g(x) < 0$;
si $x \in]\alpha; +\infty[$, alors $g(x) > 0$.

3. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

• $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} 1-x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x^3 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	0

4. Une équation de la tangente Δ en A d'abscisse 0 :
 $y - f(0) = f'(0)(x)$ soit $y = -x + 1$.

Il s'agit d'étudier le signe de :

$$f(x) - y = \frac{1-x}{x^3+1} - (-x+1) = \frac{(1-x)(-x^3)}{x^3+1}$$

D'où le tableau de signes :

x	-1	0	1
$1-x$	+	+	0 -
$-x^3$	+	0	- -
$f(x)-y$	+	0	- 0 +

• Si $x \in]-1; 0] \cup [1; +\infty[$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ ;

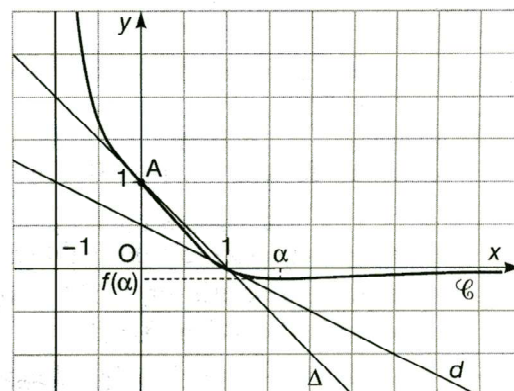
• Si $x \in [0; 1]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ .

5. Équation de la tangente d au point d'abscisse 1 :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{1-x}{x^3+1} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{(1-x)(2-x^3-1)}{2(x^3+1)} \\ &= \frac{(1-x)(1-x^3)}{2(x^3+1)} = \frac{(1-x)^2(1+x+x^2)}{2(x^3+1)}; \end{aligned}$$

donc $f(x) - y \geq 0$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de d .



TD 3

2 1. a) $m = \frac{y_M}{x_M} = \tan x$.

b) $T(1; \tan x)$.

2. • $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

• $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.

3. a) sin et cos sont dérivables sur $\mathcal{D}$ et cos ne s'annule pas, donc $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ aussi. De plus, pour tout x de $\mathcal{D}$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1^-$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0^+$

$$\begin{array}{cc} x \rightarrow \frac{\pi}{2} & x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2} & x < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$.

$$\begin{array}{cc} x \rightarrow \frac{\pi}{2} & \\ x < \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

c) $\sin \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$, $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ donc $\tan' > 0$ ainsi **tan**

est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$.

4. • D'après le 3. a) $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour tout x de $\mathcal{D}$, et $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

• D'après le 2. $\tan(-x) = -\tan x$ pour tout x de $\mathcal{D}$ donc **tan est impaire**, et $\tan(x + \pi) = \tan x$ pour tout x de $\mathcal{D}$ donc **tan est π -périodique**.

• D'après le 3. b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$

$$\begin{array}{cc} x \rightarrow \frac{\pi}{2} & \\ x < \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

donc par π -périodicité et imparité, les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont asymptotes verticales à la courbe.

TD 4

2 1. a) Les solutions de $x(2-x) \geq 0$ sont dans l'intervalle $[0; 2]$.

b) La fonction $x \mapsto x(2-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x(2-x)$ est strictement positif sur $]0; 2[$, donc $x \mapsto \sqrt{x(2-x)}$ est dérivable sur $]0; 2[$.

$x \mapsto x$ est aussi dérivable sur $]0; 2[$, donc f est dérivable sur $]0; 2[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0; 2[$. Et alors :

$$f'(x) = \sqrt{x(2-x)} + x \times \frac{2-2x}{2\sqrt{x(2-x)}} = \frac{3x-2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

2. a) $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{x(2-x)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x(2-x)} = 0$.

b) $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ a pour limite 0 en 0 donc f est dérivable en 0. La tangente à la courbe est horizontale.

$$3. a) \frac{f(x)}{x-2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2} = \frac{x\sqrt{x}}{-\sqrt{2-x}} \quad (\text{car } x \in]0; 2[)$$

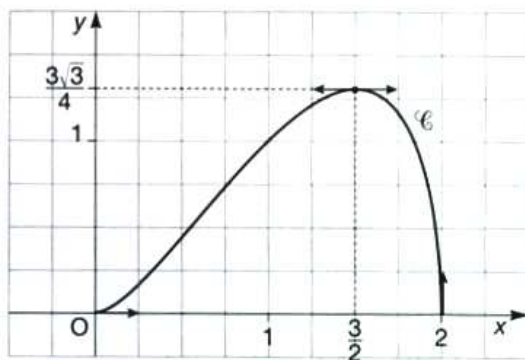
; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -\infty$. La tangente est donc verticale.

b) $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ a pour limite $-\infty$ en 2, donc f n'est pas dérivable en 2.

4. a)

x	0	$\frac{3}{2}$	2
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

b) En 0 : $y = 0$; en 2 : $x = 2$.



TD 5

2 1. $f(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ et g est dérivable en 0 avec

$$g'(0) = 10 \text{ car } g'(x) = 10(1+x)^9.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 10$$

2. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$b) f(x) = \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \cos' \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{Or } \cos' = -\sin \text{ et } -\sin \frac{\pi}{2} = -1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = -1.$$

$$3. a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \tan' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} = 2.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \cos'(\pi) = -\sin \pi = 0.$$

TD 6

$$2 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x+1} = -1;$$

$$y = -x + 2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x+2}{-x+1} - 2}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{-x+1} = 3^-; \\ y = 3x + 2.$$

TD 7

$$1. \tan \alpha(x) = \frac{295}{x}; \tan \beta(x) = \frac{145}{x}.$$

$$\tan \theta(x) = \frac{\tan \alpha(x) - \tan \beta(x)}{1 + \tan \alpha(x) \tan \beta(x)}.$$

2.

x	0	$\sqrt{295 \times 145}$	$+\infty$
θ'		+	-
θ	0	M	0

$$M = \theta(\sqrt{295 \times 145}),$$

$$M \approx 0,35 \text{ radian} \left(\tan M = \frac{3\sqrt{295 \times 145}}{29 \times 59} \approx 0,36 \right).$$

$$2. t'(x) = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 4}}{15\sqrt{x^2 + 4}}.$$

La fonction t présente un minimum au point d'abscisse $\frac{3}{2}$. Le rameur parcourt $6 - \frac{3}{2} = 4,5$ km à pied.

TD 8

$$2. a) \text{ D'après Thalès, } \frac{h(t)}{4} = \frac{r}{2} \text{ donc } r = \frac{h(t)}{2}.$$

$$\text{Ainsi } V(t) = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h(t) = \frac{1}{12} \pi h^3(t) \quad [1]$$

b) En dérivant [1] par rapport à t , on obtient :

$$V'(t) = \frac{1}{12} \pi \times 3h^2(t) \times h'(t) \text{ donc } h'(t) = \frac{4V'(t)}{\pi h^2(t)}.$$

$$c) h'(t_0) = \frac{4V'(t_0)}{\pi h^2(t_0)} = \frac{4 \times 40}{\pi \times 1} = \frac{160}{\pi}$$

$$\text{donc } h'(t_0) = 50,9 \text{ m/min.}$$

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 72)

1. et 2. Calculs de dérivées, tangentes (révisions)

$$1. a) \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{(1+h)^2 + 3} - 2}{h} \\ = \frac{(\sqrt{h^2 + 2h + 4} - 2)(\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2)}{h(\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2)} \\ = \frac{h + 2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}.$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2} = \frac{1}{2}.$$

$$2. y = f'(2)(x - 2) + f(2) \text{ donc } y = x + 1 \text{ car } f'(2) = 1 \text{ et } f(2) = 3.$$

$$3. 1. f(0) = 2; f'(0) = -1.$$

2. Coefficient directeur de la sécante (AM) où $M(x; f(x))$.

3. Puisque f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = -1$ alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = -1.$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x}; f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \text{ Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est } y = -x + 2.$$

5. Corrigé dans le manuel.

$$6. f(x) = \sqrt{x}; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \text{ Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

$$7. \bullet f(0) = 0; f(-1) = 1; f(2) = -1$$

$$\bullet f'(0) = 0; f'(-1) = 2; f'(2) = -\frac{1}{2}.$$

$$8. a) f'(x) = 3x^2 - 3x - 5; x \text{ réel.}$$

$$b) f'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{6}, x \text{ réel.}$$

$$9. a) f'(x) = 40x + \theta^3, x \text{ réel.}$$

$$b) f'(\theta) = 2x^2 + 3\theta^2x + 1, \theta \text{ réel.}$$

$$10. a) f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}; \text{ sur } \mathbb{R}.$$

b) $x^2 + x + 1 \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$.

11 a) $f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; sur $]0; +\infty[$.

b) $f'(x) = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$; sur $]0; +\infty[$.

12 Corrigé dans le manuel.

13 a) $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

b) $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

14 a) $f'(x) = \frac{1}{\sin x - 1}$.

b) $f'(x) = \frac{1+2\cos x + \sin x}{(2+\cos x)^2}$.

15 a) $f(0) = 0$; $f'(0) = -3$. Une équation est $y = -3x$.

b) $f(1) = 1$; $f'(1) = \frac{3}{2}$. Une équation est $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

16 a) $f(0) = 1$; $f'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$; $f'(0) = -2$.

Une équation est $y = -2x + 1$.

b) $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$.

Une équation est $y = x$.

17 a) $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$. Une équation est $y = 1$.

b) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{8}\sqrt{2}$. Une équation est

$y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)x + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}$.

18 Corrigé dans le manuel.

19 a) On applique l'approximation affine locale de f en 1 pour $f(x) = x^3$.

Alors $f(1+x) \approx f'(1)x + f(1)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ donc $f(1+x) \approx 3x + 1$.

b) On procède comme au a) avec $f(x) = \sqrt{x}$.

c) On procède comme au a) avec $f(x) = \frac{1}{x}$.

d) On applique l'approximation affine locale de f en 0 pour $f(x) = \sin x$.

Alors $f(x) \approx f'(0)x + f(0)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$ donc $f(x) \approx x$.

3. Applications de la dérivation (révisions)

20 a) $f'(x) = 8x^3 - 27$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

b) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}(2x-1)$ pour $x > 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	0		$+\infty$

c) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$.

x	$-\infty$	$\frac{4-\sqrt{13}}{8}$	$\frac{4+\sqrt{13}}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	y_1	y_2	$+\infty$

$y_1 = \frac{997-199\sqrt{13}}{81}$

$y_2 = \frac{997+199\sqrt{13}}{81}$

d) $f'(x) = 1 - \sin x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

e) $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$ pour $x \neq -1$.

x	0	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	2	$+\infty$	2

f) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^5}}(x-2\sqrt{x})$ pour $x > 0$.

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$		0

21 Courbe 3.

22 a) $f'(x) = 6x(x+4)$.

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	65	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) D'après le tableau de variations : 65 est un maximum local, 1 est un minimum local.

c) Elle n'est pas bornée car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$).

23 On doit avoir $f'(-1) = 0$ et $f(1) = 0$.

D'où le système $\begin{cases} 3a - b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$ soit $a = 1$ et $b = 2$.

Vérification ensuite : $f'(x)$ change de signe en -1 .

24 1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Une première solution sur $]-\infty; -1[$, puis sur $]-1; 1[$ et enfin sur $]1; +\infty[$.

4. $\alpha \approx -1,9$, $\beta \approx 0,3$, $\gamma \approx 1,5$.

25 Corrigé dans le manuel.

26 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

1^{er} cas : n est pair donc $n-1$ est impair.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2^e cas : n est impair donc n est pair.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. 1^{er} cas : n est pair (on utilise le tableau de variations, la continuité de f).

• Si $a < 0$ pas de solution.

• Si $a = 0$ une solution $x = 0$.

• Si $a > 0$ deux solutions, l'une dans $]-\infty; 0[$, l'autre dans $]0; +\infty[$. Ces solutions sont opposées.

2^e cas : n est impair.

Quel que soit a de $\mathbb{R}$, une unique solution.

4. Dérivée d'une fonction composée

27 a) $f'(x) = 3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$.

b) $f'(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 \times \frac{1}{(x+2)^2}$.

c) $f'(u) = 2 \times 2(2u+3) = 4(2u+3)$.

d) $f'(u) = 9(3u-1)^2$.

28 a) $f'(x) = -2 \sin 2x$.

b) $f'(x) = 3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) $f'(t) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

29 a) $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$.

b) $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

c) $f'(x) = \frac{-\sqrt{x+2}}{2(x+2)^2}$.

d) $x'(t) = \frac{3\sqrt{2-t}}{2\sqrt{t+1}(2-t)^2}$.

30 Corrigé dans le manuel.

31 a) $f'(x) = \frac{(2x+1)(-6x-5)}{(3x+1)^4}$.

b) $f'(x) = 3(3x-1)(1-2x)^2(-10x+4)$.

32 a) $f'(t) = 2 \cos t (-\sin t)$.

b) $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$.

33 Corrigé dans le manuel.

34 a) $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

b) $v'(t) = \frac{1}{\cos t} (2 \tan t + 3 \tan^3 t)$.

35 1. Il semble que la tangente soit commune.

2. a) $f = \sqrt{u}$ où $u(x) = x^2 - x + 1$.

u est dérivable (car polynôme) sur $\mathbb{R}$ et strictement positive donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}.$$

• g est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = -\frac{x}{2} + 1.$$

b) $f(1) = 1$; $g(1) = 1$.

$$f'(1) = \frac{1}{2}; g'(1) = \frac{1}{2}.$$

c) D'après le **b)** les tangentes au point d'abscisse 1 sont confondues.

36 1. $f = \sqrt{u}$ où $u(x) = \frac{x^3}{1-x}$.

u est une fonction rationnelle et définie sur $[0; 1[$ donc dérivable sur $[0; 1[$.

De plus, u est strictement positive sur $]0; 1[$ donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0; 1[$.

2. a) Il ne donne que des conditions suffisantes.

Il ne dit pas que $\sqrt{u}$ n'est pas dérivable en a tel que $u(a) = 0$.

$$b) t(x) = \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x} = \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{\sqrt{x^2}} \text{ car } x > 0,$$

$$\text{donc } t(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2(1-x)}} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$\text{or } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = 0$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} t(x) = 0$ ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

5. Complément : dérivées successives

37 a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1; x \in \mathbb{R}$.
 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1; f''(x) = 6x - 4; f^{(3)}(x) = 6$.

b) $f(x) = x\sqrt{x}; x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x};$

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}; f^{(3)}(x) = -\frac{3}{8x\sqrt{x}}.$$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}; f''(x) = 2(x+1)^{-3};$$

$$f^{(3)}(x) = -6(x+1)^{-4}.$$

38 Corrigé dans le manuel.

39 1. $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où $\sqrt{x^2+1} f'(x) = f(x)$.

2. On « dérive l'égalité » précédente, ce qui est possible car toutes les fonctions sont dérivables. On obtient

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} f'(x) + \sqrt{x^2+1} f''(x) = f'(x)$$

c'est-à-dire $(x^2+1) f''(x) + x f'(x) - \sqrt{x^2+1} f'(x) = 0$
ou encore $(x^2+1) f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$.

40 Corrigé dans le manuel.

Apprendre à chercher

(page 75)

41 Lieu géométrique

Les outils :

- Géométrie analytique.
- Étude de fonctions.

Les objectifs :

- Savoir utiliser une fonction pour construire un lieu géométrique.

1. a) On a $\vec{MJ} = \frac{2}{3} \vec{MN}$,

soit $\vec{OJ} - \vec{OM} = \frac{2}{3} (\vec{ON} - \vec{OM})$,

et $\vec{OJ} = \frac{1}{3} \vec{OM} + \frac{2}{3} \vec{ON}$.

b) Le triangle OMN est rectangle en O :

$$m^2 + n^2 = 9, \text{ soit } n = \sqrt{9 - m^2}.$$

c) Les coordonnées de J sont $x = \frac{1}{3} m$

et $y = \frac{2}{3} \sqrt{9 - m^2}$.

2. On a $m = 3x$; reportons dans l'expression de y :

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{9 - 9x^2} = 2\sqrt{1 - x^2}.$$

3. a) On a montré que J appartient à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Or $0 \leq m \leq 3$, alors $x \in [0; 1]$.

b) J décrit la partie de $\mathcal{C}$ correspondant à $0 \leq x \leq 1$.

c) $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$; f est définie sur $[-1; 1]$, dérivable sur $] -1; 1[$; $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	2	0

42 Fonctions et ensembles de points

Les outils :

- Utilisation de l'équivalence.
- Étude de fonctions.
- Dérivabilité en un point.
- Symétrie d'une courbe.

Les objectifs :

- Savoir construire un ensemble de points donné par une équation cartésienne.

1. a) $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ équivaut à $y^2 = \frac{1}{4}(-x^2 + 2x + 3)$

b) $-x^2 + 2x + 3 = (x+1)(3-x)$;
 $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1; 3]$.

On est ramené à étudier :

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \text{ ou } y = -\frac{1}{2} \sqrt{-x^2 + 2x + 3}.$$

2. a) On note $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2} \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc f_1 est dérivable sur $] -1; 3[$.

$$b) f'_1(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-x+1}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}.$$

c) • Étude de la dérivabilité de f_1 en $x = -1$.
 f_1 est dérivable au point -1 si et seulement si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_1(-1+h) - f_1(-1)}{h} \text{ existe.}$$

$$t(h) = \frac{f_1(-1+h) - f_1(-1)}{h} = \frac{\sqrt{4-h}}{2\sqrt{h}}.$$

On a $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{4-h} = 2$ et $\lim_{h \rightarrow 0^+} 2\sqrt{h} = 0^+$, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} t(h) = +\infty \text{ et } f_1 \text{ n'est pas dérivable en } x = -1.$$

• De même, en $x = 3$ avec $h < 0$:

$$t(h) = \frac{f_1(3+h) - f_1(3)}{h} = \frac{\sqrt{4+h}}{-2\sqrt{-h}}.$$

On a $\lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt{4+h} = 2$ et $\lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt{-h} = 0^-$, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} t(h) = -\infty \text{ et } f_1 \text{ n'est pas dérivable en } x = 3.$$

d) D'où le tableau de variations de f_1 :

x	-1		1		3
$f'_1(x)$		+	0	-	
$f_1(x)$	0		1		0

3. Pour $x \in [-1; 3]$, $f_2(x) = -f_1(x)$. Donc $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par la symétrie d'axe (Ox).

La courbe Γ est la réunion des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Pour progresser

(page 76)

Dérivabilité en un point

44 1. a) Oui car il y a une tangente non verticale.

b) Non car il y a deux demi-tangentes non confondues.

c) Comme le b).

d) Non car f n'est pas continue en 2.

2. Il suffit de lire, si possible et si existence, les coefficients directeurs des tangentes ou demi-tangentes.

a) $f'(2) = -1,5$.

b) f n'est pas dérivable à gauche car la demi-tangente est verticale. $f'_d(2) = 0,5$.

c) $f'_g(2) = -4$

$$f'_d(2) = \frac{4}{3}.$$

43 L'inégalité de Huygers

Les outils :

- Trigonométrie.
- Étude de fonctions trigonométriques et polynomiales (changement de variable).

Les objectifs :

- Savoir utiliser la trigonométrie et des changements de variable pour démontrer des inégalités non classiques.

1. Résoudre, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $2 \sin x + \tan x \geq 3x$

revient à résoudre, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$2 \sin x + \tan x - 3x \geq 0.$$

Posons $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$ et étudions les variations de f .

$$f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1$.

2. Posons $\cos x = X$ avec $0 < X \leq 1$.

Étudions le signe de $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ sur $]0; 1]$:

$$P'(X) = 6X^2 - 6X = 6X(X-1) > 0 \text{ pour } X \in]0; 1[.$$

Donc P est strictement croissant sur $]0; 1]$ et $P(0) = 1$, donc pour tout $X \in]0; 1]$, $P(X) > 0$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	0		

Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $f(x) \geq 0$,

donc si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $2 \sin x + \tan x \geq 3x$.

d) Pas de dérivée à gauche ni à droite car f n'est pas continue en 2. a).

$$45 a) t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sqrt{x}, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x} = 0$$

donc f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$.

b) $t(x) = |x|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ donc f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$.

$$46 1. \text{ Si } x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}; \text{ or } \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

$$2. \text{ Pour } x \in \mathbb{R}^*: f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}.$$

Dérivées de fonctions composées

47 1. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.

2. a) Posons $u(x) = \sqrt{x}$. u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g = f \circ u$. Donc $g' = (f' \circ u) \times u'$, soit :

$$g'(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

pour $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

b) Posons $u(x) = x^2$, alors $h = f \circ u$.

Donc $h'(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \times 2x$ pour $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

c) Posons $u(x) = \sqrt{x}$, alors $k = u \circ f$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc k est dérivable sur $]1; +\infty[$, et $k' = (u' \circ f) \times f'$:

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}} \times \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

d) Posons $u(x) = \sin x$, alors $m = f \circ u$.

$$m'(x) = f'(u(x)) \times u'(x) = \frac{\sin^2 x - 2\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} \times \cos x.$$

48 a) $f'(x) = -6\sin 2x \cos^2 2x$; sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 6\sin 3x \cos 3x = 3\sin 6x$; sur $\mathbb{R}$.

49 a) $f'(x) = \frac{-4\cos 2x}{\sin^3 2x}$; pour $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $f'(x) = \frac{-6\sin 2x}{\cos^4 2x}$; pour $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

50 $f'(x) = p \sin^{p-1} x \cos^q x - q \sin^p x \cos^{q-1} x$
donc $f'(x) = \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x [p \cos x - q \sin x]$.

51 1. f est paire et dérivable sur I , donc pour x de I , $-x$ est élément de I et $f(-x) = f(x)$. En dérivant, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$, soit $f'(-x) = -f'(x)$. Donc f' est impaire.

2. De la même façon, de $f(-x) = -f(x)$, on obtient $-f'(-x) = -f'(x)$, soit $f'(-x) = f'(x)$. Donc f' est paire.

Trouver la fonction

52 1. $f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$ donc :

$$f'(x) = \frac{3x^4 + (9-a)x^2 - 2bx + a}{(x^2 + 1)^2}.$$

On est ramené à résoudre $f'(0) = 4$ et $f(0) = 3$.

On trouve $b = 3$ et $a = 4$.

53 1. $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ donc $f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$.

f admet un extremum local pour $x = 1$ si et seulement si $f'(1) = 0$ et f' change de signe en 1.

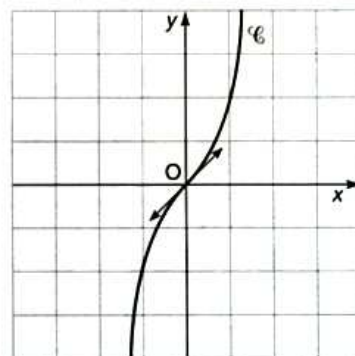
$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -3.$$

Pour $a = -3$, $f'(x)$ change de signe en 1, d'où le résultat.

54 1. On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		1	
$f(x)$		0	

D'où une courbe possible :



Résolution d'équations

55 1. Étudions les variations de $f: x \mapsto x^5 - x^3 + x - 5$.
 $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$.

Posons $X = x^2$; $5X^2 - 3X + 1 > 0$ pour tout X ($\Delta < 0$).

D'où les variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Le tableau de variations montre l'existence d'une solution unique α . On trouve $-1,67 < \alpha < -1,66$.

56 1. $x(2x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 + x - 5 = 0$.

$f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 5$; $f'(x) = 12x^2 + 8x + 1$;

or $\Delta < 0$ donc $f' > 0$. f est dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, donc il existe une solution unique $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On trouve $0,77 < \alpha < 0,78$.

57 1. $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$.

2. a) f est décroissante, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ et $f(2) < 0$,

donc f s'annule une fois entre 1 et 2.

b) On trouve $\alpha \approx 1,7$.

Dérivées successives

58 1. $f''(x) = \cos x - x \sin x = \cos x + x \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f''(x) = -\sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$= 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + x \cos(x + \pi).$$

$$f^{(3)}(x) = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) - x \sin(x + \pi).$$

$$= 3 \cos(x + \pi) + x \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

On utilise $\cos' x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Posons l'hypothèse de récurrence :

$$f^{(n)}(x) = n \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + x \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Alors $f^{(n+1)}(x) = n \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$+ \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + x \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

soit $f^{(n+1)}(x) = (n+1) \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$+ x \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

59 • 1. $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a-b}{x^2-1}$.

Ce qui conduit à résoudre le système :

$$a+b=2 \text{ et } a-b=0,$$

d'où $a=1$ et $b=1$:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

2. $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2};$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Par récurrence : $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{(x-1)^{n+1}} + \frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+1}}.$

Optimisation

60 • 1. a) AM est positif et la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc, par composition, « AM est minimale » équivaut à « AM^2 est minimale ».

b) $d(x) = (x-1)^2 + \left(\frac{1}{x} - (-1)\right)^2$ car $M\left(x; \frac{1}{x}\right)$

$$= (x-1)^2 + \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2$$

$$= x^2 - 2x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

2. $d'(x) = 2x - 2 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$, pour tout $x > 0$,

donc $d'(x) = \frac{2(x^4 - x^3 - x - 1)}{x^3}$

et $f(x) = x^4 - x^3 - x - 1$.

3. a) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$

et $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$ pour tout $x > 0$.

Il en résulte le tableau suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+
$f'(x)$	-1	$\searrow -\frac{5}{4}$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$
$f(x)$	-2		$\searrow -3$	$\nearrow +\infty$

b) f est continue donc d'après ce tableau, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I et $1,72 < \alpha < 1,73$.

c) $f(x) < 0$ lorsque $x \in]0; \alpha[$.

$f(x) = 0$ lorsque $x = \alpha$.

$f(x) > 0$ lorsque $x \in]\alpha; +\infty[$.

4. Puisque $x > 0$, d' est du signe de f d'où le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$	
$d'(x)$		-	0	+
$d(x)$				

Ainsi AM est minimale lorsque $x = \alpha$.

5. • (AM) a pour coefficient directeur $m = \frac{\frac{1}{\alpha} + 1}{\alpha - 1}$.

• La tangente en M à l'hyperbole a pour coefficient directeur $m' = -\frac{1}{\alpha^2}$.

Donc $mm' = \frac{\frac{1}{\alpha} + 1}{\alpha - 1} \times \left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{\frac{1}{\alpha} + 1}{\alpha^3 - \alpha^2} = -\frac{\alpha + 1}{\alpha^4 - \alpha^3}.$

Mais α est tel que $f(x) = 0$ ie $\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha - 1 = 0$

donc $\alpha^4 - \alpha^3 = \alpha + 1$

et ainsi $mm' = -\frac{\alpha + 1}{\alpha + 1} = -1$.

Comme le repère est orthonormal, (AM) et la tangente sont perpendiculaires.

61 • A. 1. $f'(x) = -3x^2 + \frac{9}{4} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right).$

D'où le tableau de variations :

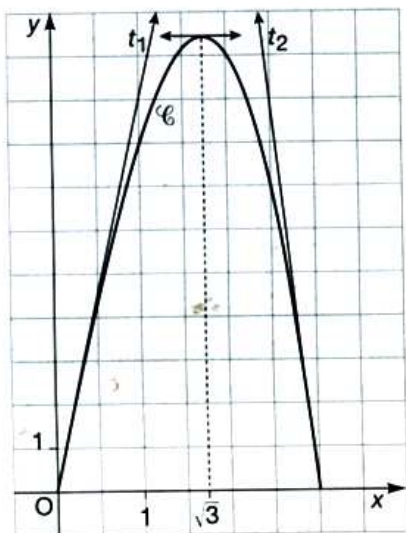
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

2. $t_1 : y = \frac{9}{4}x;$

$t_2 : y = -\frac{9}{2}x + \frac{27}{4}.$

L'étude des signes de $f(x) - y$ pour les deux tangentes montre que t_1 et t_2 sont au-dessus de la courbe.

3.



B. 1. $D^2 = x^2 + h^2$ (triangle rectangle).

2. $xh^2 = x(D^2 - x^2)$;

or, $D = \frac{3}{2}$ et $xh^2 = x\left(\frac{9}{4} - x^2\right) = f(x)$.

3. L'étude A. donne $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $h = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

62 • 1. L'aire du triangle MNI est égale à :

$$\frac{1}{2} MN \times HI = HM \times HI = \sqrt{1-x^2} (1-x).$$

2. a) $f(-1) = f(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \bullet \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \frac{\sqrt{1-x^2}(1-x)}{x+1} \\ &= \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -1} (1-x)\sqrt{1-x} = 2\sqrt{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1+x} = 0^+$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty.$$

f n'est pas dérivable au point -1 . Mais $\mathcal{C}_f$ a une tangente d'équation $x = -1$.

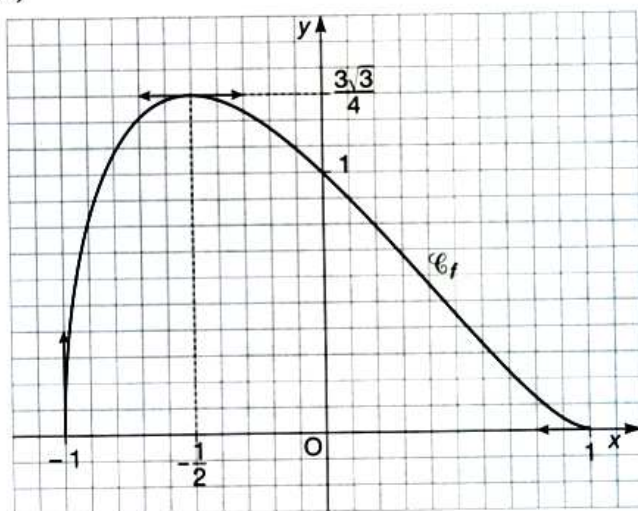
$$\bullet \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{1-x^2}(1-x)}{x - 1}.$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$ et f est dérivable en 1.

$$\text{c) } f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x) - \sqrt{1-x^2} = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

d)



3. L'aire est maximale pour $x = -\frac{1}{2}$, elle est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$$4. \sqrt{1-x^2}(1-x) = 1.$$

$x \in [-1; 1]$, donc, comparons les carrés :

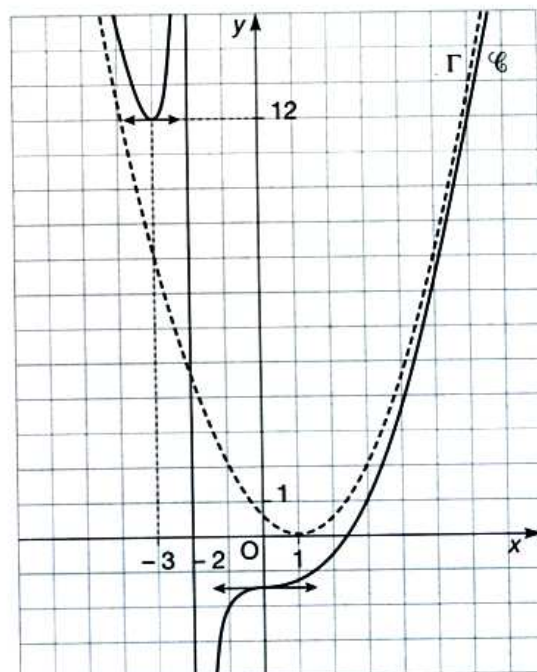
$$(1-x^2)(1-x) = 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x = 0,$$

$$\text{soit } x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

x_3 est à rejeter ; $x_2 \approx -0,618$.

Études de fonctions

63 • $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$.



1. Transformons l'écriture de $A(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$:

$$A(x) = \frac{2a(x-1)^2(x+2) + 2b}{2(x+2)}$$

$$= \frac{2ax^3 - 6ax + 4a + 2b}{2(x+2)}$$

$$A(x) = f(x) \Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } 6a = 3 \text{ et } 4a + 2b = -6.$$

$$\text{Donc } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -4; f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{(x+2)}.$$

2. a) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x+2} = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x+2} = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{9}{2}$;

$\lim_{x \rightarrow -2^-} -\frac{4}{x+2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{4}{x+2} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$;

b) $f'(x) = (x-1) + \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$;

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

3. $\overrightarrow{PM}\left(0; -\frac{4}{x+2}\right)$; $PM = \frac{4}{|x+2|}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} PM = 0$.

Γ est une courbe asymptote à $\mathcal{C}$.

4. Voir la figure au début de l'exercice.

64 • 1. $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$.

$f'(x)$ est donc du signe du trinôme $2x^2 - 4x - 2$.

Or ce trinôme a deux racines $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	x_1	1	2	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	-2	$\searrow$	$+\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

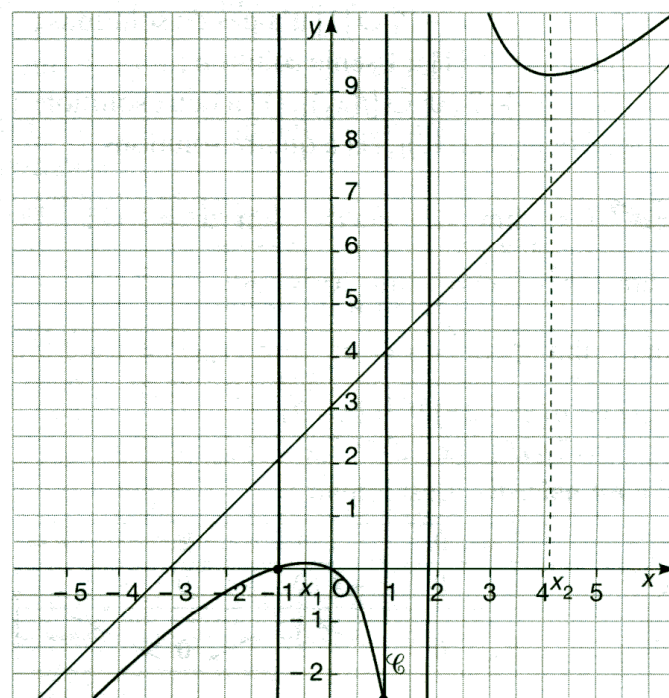
$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2} x(x+1) = 6.$$

2. a) Pour tout $x, x \neq 2, f(x) - (x+3) = \frac{6}{x-2}$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+3) = 0$.

Ainsi $d : y = x + 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

b)



3. a) $x^2 + (1-m)x + 2x = 0$ équivaut à $f(x) = m$.

Alors d'après le tableau de variations et puisque $f(x_1) < f(x_2)$:

- lorsque $m < f(x_1)$, cette équation a 2 solutions ;
- lorsque $m = f(x_1)$, cette équation a 1 solution ;
- lorsque $f(x_1) < m < f(x_2)$, cette équation n'a pas de solution ;
- lorsque $m = f(x_2)$, cette équation a 1 solution ;
- lorsque $m > f(x_2)$, cette équation a 2 solutions.

b) $\cos(2u) + 2(1-m)\cos u + 4m + 1 = 0$ [1]

avec $u \in [0; 2\pi[$ équivaut à

$$f(\cos u) = m \text{ avec } u \in [0; 2\pi[.$$

Or cela équivaut

$$\text{à } f(X) = m \text{ avec } X = \cos u, u \in [0; 2\pi[.$$

Comme $-1 \leq \cos u \leq 1$ pour tout u de $[0; 2\pi[$ il convient de résoudre $f(X) = m$ avec $-1 \leq X \leq 1$ pour commencer.

Pour cela, faisons intervenir $(-1; f(-1))$ et $(1; f(1))$ dans le tableau de variations de f , on obtient alors :

- lorsque $m < -2$ ou $m > f(x_1)$, l'équation $f(X) = m$ avec $X \in [-1; 1]$ n'a pas de solutions ;
- lorsque $m = f(x_1)$ l'équation a une solution $X = x_1$;
- lorsque $m = -2$ l'équation a une solution $X = 1$;
- lorsque $m \in [0; f(x_1)[$ l'équation a deux solutions : a et b ;
- lorsque $m \in]-2; 0[$ l'équation a une seule solution : c .

Il en résulte que :

- lorsque $m = f(x_1)$, [1] a pour solution les réels u tels que $\cos u = f(x_1)$ ce qui donne deux solutions ;
- lorsque $m = -2$, [1] a pour solution les réels u tels que $\cos u = 1$ ie $u = 0$;
- lorsque $m \in [0; f(x_1)[$, [1] a pour solution les réels u tels que $\cos u = a$ ou $\cos u = b$ ce qui fournit quatre solutions ;

- lorsque $m \in]-2; 0[, [1]$ a pour solution les réels u tels que $\cos u = c$ ce qui fournit deux solutions.

Conclusion :

- lorsque $m \in]-\infty; -2[\cup [1]$ n'a pas de solutions ;
- lorsque $m = -2, [1]$ a 1 seule solution ;
- lorsque $m \in]-2; 0[\cup \{f(x_1)\}, [1]$ a deux solutions ;
- lorsque $m \in [0; f(x_1)[, [1]$ a quatre solutions.

65 • 1. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$;

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$.

2. $f'_n(x) = n(x^2 - 2x)^{n-1}(2x - 2)$
 $= 2nx^{n-1}(x - 2)^{n-1}(x - 1)$.

- Si n est pair, $n - 1$ est impair :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+	0	+
$f_n(x)$		↘ 0	↗ 1	↘ 0	↗

- Si n est impair, $n - 1$ est pair : $f'_n(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$		↘ -1	↗

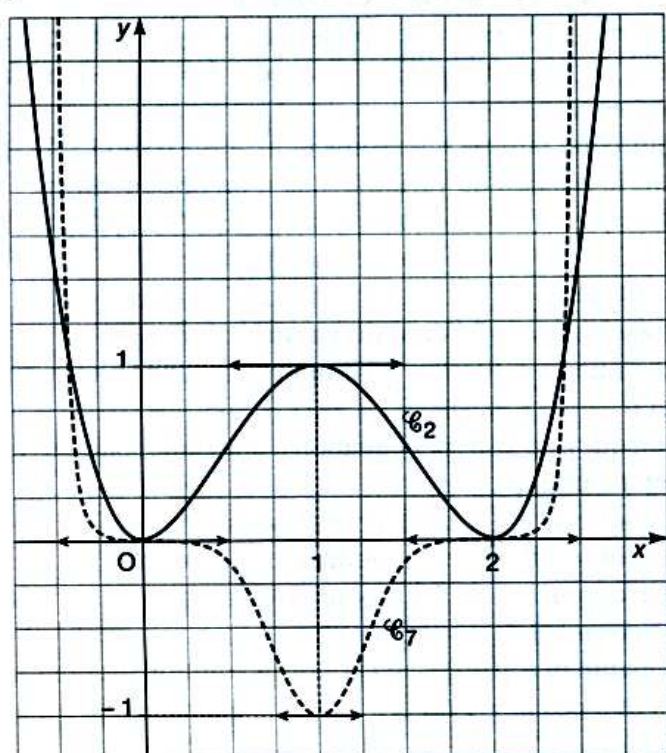
3. • $f_n(1 + h) = [1 + 2h + h^2 - 2(1 + h)]^n$
 $= (h^2 - 1)^n = f_n(1 - h)$.

Donc f_n est paire.

- $f_n(x) = x^n(x - 2)^n$; les valeurs de x solutions sont les racines des équations $x(x - 2) = 0$ ou $x(x - 2) = 1$.

$A(2; 0)$, $A'(1 - \sqrt{5}; 1)$, $O(0; 0)$, $A''(1 + \sqrt{5}; 1)$.

4.



66 • 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_\lambda(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_\lambda$.

asymptote verticale à $\mathcal{C}_\lambda$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = 0$

donc $d: y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_\lambda$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) Pour tout x de I , $f'_\lambda(x) = 1 - \frac{2\lambda}{x^2} - \frac{3\lambda^2}{x^4}$
 $= \frac{x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2}{x^4}$
 $= \frac{(x^2 - 3\lambda)(x^2 + \lambda)}{x^4}$

d'où le tableau suivant :

x	0	$\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	-	0	+
f_λ	$+\infty$	$\frac{16}{9}\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$

b) D'après le a) $x_\lambda = \frac{16}{9}\sqrt{3\lambda}$.

3. a) $P_\lambda(\sqrt{3\lambda}; \frac{16}{9}\sqrt{3\lambda})$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = \frac{16}{9}x$.

Donc l'ensemble des points P_λ est inclus dans la droite d'équation $y = \frac{16}{9}x$.

b) Réciproquement, si $M(x; \frac{16}{9}x)$ avec $x > 0$

alors $M = P_\lambda$ où $\lambda = \frac{x^2}{3}$.

En effet x étant fixé cela revient à choisir $\lambda > 0$ tel que

$\sqrt{3\lambda} = x$ ie $\lambda = \frac{x^2}{3}$.

Conclusion : L'ensemble des points P_λ lorsque λ décrit

I est la demi-droite d'équation $y = \frac{16}{9}x$; $x > 0$.

67 • 1. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- En $-\infty$, transformons l'écriture :

$$f(x) = \frac{[(x+1) - \sqrt{x^2+4x}][(x+1) + \sqrt{x^2+4x}]}{(x+1) - \sqrt{x^2+4x}}$$

$$= \frac{-2x+1}{(x+1) - \sqrt{x^2+4x}} = \frac{-2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}$$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

2. Étudions $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+3)]$.

$$f(x) - (2x+3) = \sqrt{x^2+4x} - x - 2 = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4x} + (x+2)},$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+3)] = 0^-.$$

La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

3. • Étude de la dérivabilité de f en 0 :

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + \sqrt{x^2+4x}}{x} = 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = +\infty, \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

• Étude de la dérivabilité f en -4 : $f(-4) = -3$ et :

$$t(x) = \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = \frac{x + 4 + \sqrt{x(x+4)}}{x + 4} = 1 - \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x-4}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} t(x) = -\infty, \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } -4.$$

$$4. f'(x) = 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}};$$

• si $x \geq 0$, $x+2 > 0$, donc $f'(x) > 0$;

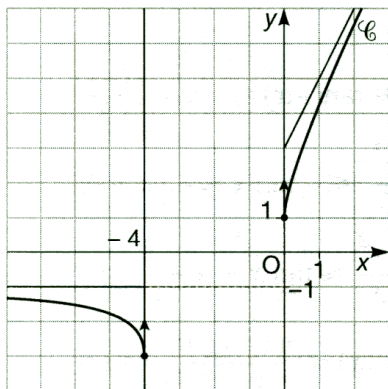
• si $x \leq -4$, $x+2 < 0$, donc $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} < 0$.

$$\text{Comparons } 1^2 \text{ à } \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \right)^2,$$

$$\text{soit } 1 \text{ à } \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x} : 1 - \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \right)^2 = -\frac{4}{x^2+4x} < 0.$$

Donc, si $x \leq -4$, $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$-1 \rightarrow -3$		$1 \rightarrow +\infty$	



68 • 1. a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$G'(x) = F'(x) - F'(-x) = 0 \quad (F' \text{ est paire}).$$

$$b) G(0) = 2F(0) = 0 \text{ et } G'(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

G est une fonction constante et $G(x) = G(0) = 0$.

D'où $F(x) + F(-x) = 0$, donc $F(-x) = -F(x)$. F est une fonction impaire.

2. a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur I , et F est dérivable, donc :

$$H'(x) = F'(x) + \left(-\frac{1}{x^2} \right) F'\left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$b) H(x) = \text{cte} = F(1) + F\left(\frac{1}{1} \right) = 2F(1).$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} F(u) = F(0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 2F(1).$$

d) La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite $y = 2F(1)$ pour asymptote.

$$3. a) T'(x) = F'(\tan x) \times \tan' x - 1$$

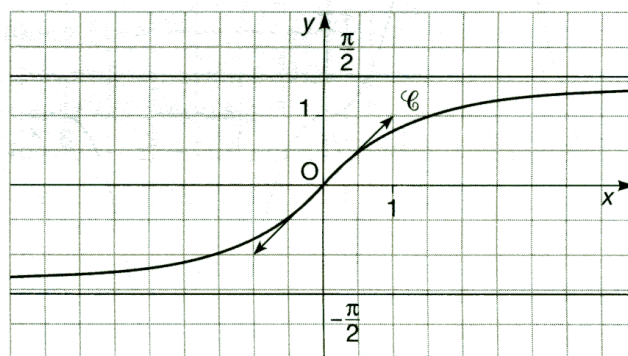
$$= \frac{1}{1+\tan^2 x} \times \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 0.$$

T est constante.

$$b) T\left(\frac{\pi}{4} \right) = T(0) = 0, \text{ donc } F(1) = \frac{\pi}{4}.$$

4.

x	0	$+\infty$
F	0	$\frac{\pi}{2}$



69 • 1. Pour tout réel x ,

• $f(x + 2\pi) = \sin(3x + 6\pi) - 3 \sin(x + 2\pi) = f(x)$ donc f est 2π -périodique ; il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi; \pi]$ par exemple.

• $f(-x) = \sin(-3x) - 3 \sin(-x) = f(x)$ donc f est paire ; il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.

$$\begin{aligned} \bullet f(\pi - x) &= \sin(3\pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x) \\ &= \sin(\pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ainsi la courbe de f est symétrique par rapport au point $I\left(\frac{\pi}{2}; -4 \right)$.

Il suffit donc d'étudier f sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ ensuite avec une symétrie de centre I on obtient la courbe sur $[0; \pi]$.

Avec une symétrie de centre O (origine du repère) on obtient la courbe sur $[-\pi; \pi]$ et enfin avec des translations de vecteurs $k2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\sin$ l'est et $x \mapsto 3x$ aussi, et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cos 3x - 3 \cos x \\ &= 3(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - \cos x) \\ &= 3(\cos x(\cos 2x - 1) - \sin 2x \sin x) \\ &= 3(\cos x(-2 \sin^2 x) - \sin 2x \sin x) \\ &= 3(-\sin x(2 \cos x \sin x + \sin 2x)) \\ &= 3(-\sin x(2 \sin 2x)) \\ &= -6 \sin x \sin 2x. \end{aligned}$$

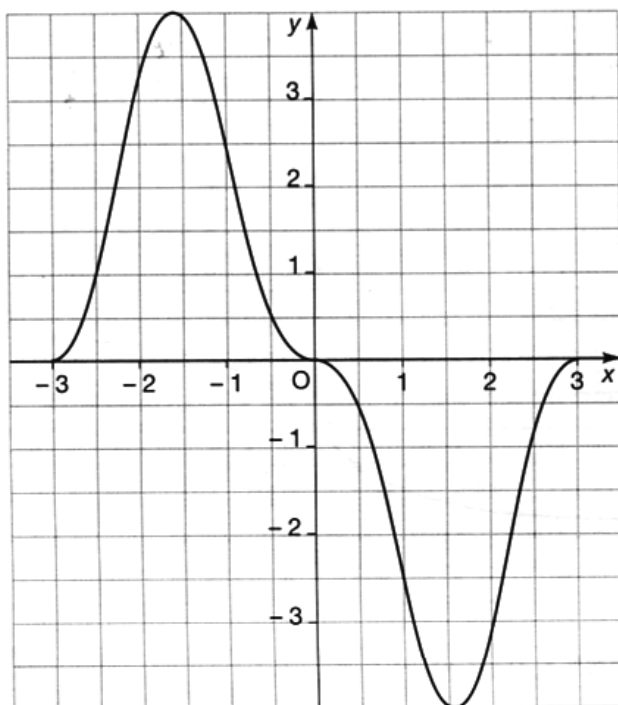
3. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

- $\sin x > 0$ lorsque $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin 0 = 0$.
- $\sin 2x > 0$ lorsque $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

Il en résulte le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	0	-4

4.



70 • Partie A

1. a) b) Pour tout x de I , $u'(x) = \tan^2 x$ et ainsi $u' \geq 0$ sur I .

La fonction est donc croissante sur I et comme $u(x) = 0$, pour tout x de I , $\tan x - x \geq 0$ ie $\tan x \geq x$.

2. a) La fonction $\tan$ est strictement croissante et continue sur I , et l'image de I est $[0; \sqrt{3}]$.

Ainsi la fonction $\tan^2$ est strictement croissante et continue sur I et l'image de I est $[0; 3]$.

Puisque $\sqrt{2} - 1 \in [0; 3]$, il existe un unique α dans I tel que $\tan^2 \alpha = \sqrt{2} - 1$.

b) De ce qui précède,

- lorsque $x \in [0; \alpha]$, $\tan^2 x \leq \tan^2 \alpha$
donc $\tan^2 x + 1 - \sqrt{2} \leq 0$;

- lorsque $x \in \left[\alpha; \frac{\pi}{3}\right]$, $\tan^2 x \geq \tan^2 \alpha$
donc $\tan^2 x + 1 - \sqrt{2} \geq 0$.

c) Pour tout x de I , $v'(x) = \tan^2 x + 1 - \sqrt{2}$, d'après le b) on en déduit le tableau suivant :

x	0	α	$\frac{\pi}{3}$
$v'(x)$	-	0	+
$v(x)$	0	$v(\alpha)$	$1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

Il en résulte que, pour tout x de I , $\tan x - x\sqrt{2} \leq 0$.

Partie B

1. Pour tout x de I , $\left(x \mapsto \tan x - x - \frac{x^2}{3}\right)' = \tan^2 x - x^2$.

Or $\tan^2 x - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$
et pour tout x de I ,

- $\tan x + x \geq 0$, puisque $\tan x \geq 0$ et $x \geq 0$;
- $\tan x - x \geq 0$ d'après le 1. b) Partie A.

On en déduit les variations de $h : x \mapsto \tan x - x - \frac{x^3}{3}$:

x	0	$\frac{\pi}{3}$
$h'(x)$	-	
$h(x)$	0	$h\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Ainsi pour tout x de I , $\tan x - x - \frac{x^3}{3} \geq 0$

et donc $\tan x \geq x + \frac{x^3}{3}$.

2. Posons, pour tout x de I , $\gamma(x) = \tan x - x - \frac{2x^3}{3}$
et $\gamma'(x) = \tan^2 x - 2x^2$
 $= (\tan x - \sqrt{2})(\tan x + \sqrt{2}x)$.

En raisonnant comme dans le 1. avec le signe de v sur I , on obtient pour tout x de I ,

$$\tan x - x - \frac{2x^3}{3} \leq 0$$

et donc $\tan x \leq x + \frac{2x^3}{3}$.

3. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$, $-x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ donc d'après le 1. et le 2.

$$-x + \frac{(-x)^3}{3} \leq \tan(-x) \leq -x + \frac{2(-x)^3}{3}$$

$$\text{ainsi } -\left(x + \frac{x^3}{3}\right) \leq -\tan x \leq -\left(x + \frac{2x^3}{3}\right)$$

$$\text{et donc } x + \frac{2x^3}{3} \leq \tan x \leq x + \frac{x^3}{3}.$$

71 • 1. a) $t(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$;

or $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = 0$.

g est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé 0.

b) Tangente au point O : $y = 0$.

$$2. a) g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = \frac{1}{k^2\pi^2} \sin k\pi = 0.$$

b) $\alpha > 0$. On veut $\frac{1}{k\pi} < \alpha$, soit $\frac{1}{\alpha\pi} < k$.

Il existe une solution $k_1 \in \mathbb{N}$. Alors, tout réel $k_1 + n$ est également solution, $n \in \mathbb{N}$.

3. La courbe $\mathcal{C}$ coupe la tangente en O en une infinité de points.

72 • 1. a) Pour tout x de $[0; \pi]$:

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x \\ = -x \sin x.$$

Sur $[0; \pi]$, $\sin x > 0$ si $x \neq 0$ et $\sin 0 = 0$ d'où le tableau suivant :

x	0	π
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$-\pi$

b) D'après ce tableau, $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0; \pi]$.

2. Pour tout x de $]0; \pi]$, $f'(x) = \frac{\cos x - x \sin x}{x^2}$ donc

$f'(x) < 0$ sur $]0; \pi]$ d'après le 1.

Ainsi f est strictement décroissante sur $]0; \pi]$ et f continue sur $[0; \pi]$ donc f est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.

3. a) $\varphi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$$\varphi''(x) = -\sin x + x$$

$$\varphi'''(x) = -\cos x + 1.$$

Il s'ensuit le tableau :

x	0	$+\infty$
φ'''		+
φ''	0	+
φ'	0	+
φ	0	

Ainsi, pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$\varphi(x) \geq 0 \text{ i.e. } \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$$

$$\text{donc } x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

De plus, pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$\varphi''(x) \geq 0 \text{ donc } x - \sin x \geq 0.$$

Ainsi, pour tout réel x , $x \geq 0$

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

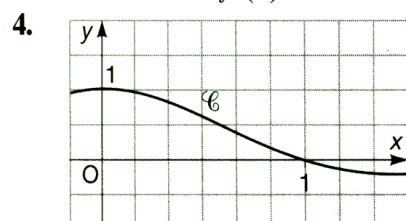
$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Or d'après le 3. a), pour tout $x > 0$,

$$0 \geq \frac{\sin x - x}{x^2} \geq \frac{-x}{6}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0 \text{ par encadrement et ainsi } f \text{ est}$$

dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.



Prendre toutes les initiatives

73 Notons $f: x \mapsto x^3$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $g: x \mapsto \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

$$f'(x) = 3x^2 \text{ et } g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ainsi les courbes ont des tangentes parallèles au point d'abscisse a équivaut à $3a^2 = \frac{1}{a^2}$. Cette équation n'a pas de solution donc il n'y a pas de telles tangentes.

74 Notons $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$.

Pour tout x de D ,

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 1) - (2x^3 + 3) \times 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Ainsi $f'(x)$ est du signe de $2x^4 - 6x^2 - 6x$.

Notons $g: x \mapsto 2x^4 - 6x^2 - 6x$ pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\text{alors } g'(x) = 8x^3 - 12x - 6$$

$$\text{et } g''(x) = 24x^2 - 12.$$

Il en résulte le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	α	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-	0	+
$g'(x)$	$-\infty$	y_1	y_2	$+\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$			$g(\alpha)$	$+\infty$

$$y_1 = g'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \quad y_2 = g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0.$$

D'après ces variations, g' est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g'(\alpha) = 0$.

$$\bullet g(\alpha) = 2\alpha^4 - 6\alpha^2 - 6\alpha \\ = \alpha(2\alpha^3 - 6\alpha - 6).$$

$$\text{Or } g'(\alpha) = 0 \text{ donc } 8\alpha^3 - 12\alpha - 6 = 0$$

$$\text{donc } \alpha^3 = \frac{12\alpha + 6}{8} = \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ainsi } g(\alpha) = \alpha(3\alpha + 3 - 6\alpha - 6) \\ = \alpha(-3\alpha - 3) \\ = -3\alpha(\alpha + 1).$$

Comme $1 < \alpha < 2$ (car $g'(1) < 0$ et $g'(2) > 0$) alors $g(\alpha) < 0$.

• On en déduit d'après les variations et la continuité de g , qu'il existe x_1 et x_2 , $x_1 < x_2$ tels que $g(x_1) = 0$ et $g(x_2) = 0$ et il s'ensuit le tableau :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$g(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$+\infty$	

75 • On pose, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x \text{ et } g(x) = \sin x - x.$$

En étudiant les variations de f et g , on démontre que

$f(x) \leq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ d'où l'encadrement.

76 • Notons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos(\sin x) - \sin(\cos x).$$

f est 2π -périodique et paire, de plus,

• pour tout x de $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $0 \leq \sin x \leq 1$ donc

$\cos(\sin x) > 0$ et $-1 \leq \cos x \leq 0$ donc $-\sin(\cos x) \geq 0$.
Ainsi $f(x) > 0$ donc $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

• pour tout x de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, d'après l'exercice 75,

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$$

donc $\cos(\sin x) > \cos x$ ($\cos$ est strictement décroissante en $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$)

et $\sin(\cos x) < \cos x$ (car $\cos x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$).

Ainsi $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Par parité et 2π -périodicité de f sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

77 • Posons a ($a > 2$) l'abscisse de A, une équation

$$\text{de (AP) est } y = \frac{1}{2-a}x + 1 + \frac{2}{a-2}.$$

Ainsi l'ordonnée de B est $1 + \frac{2}{a-2}$.

Il s'ensuit que l'aire de OAB est

$$A(a) = \frac{1}{2}a \times \left(1 + \frac{2}{a-2}\right)$$

$$A(a) = \frac{a}{2} + \frac{a}{a-2}.$$

Étudions sur $]2; +\infty[$ les variations de $A: a \mapsto A(a)$.

$$A'(a) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(a-2)^2} = \frac{(a-(2+\sqrt{2}))(a-(2-\sqrt{2}))}{2(a-2)^2}$$

d'où le tableau :

x	0	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$A'(a)$		-	+
$A(a)$			

D'après ce tableau, l'aire de OAB est minimale lorsque $a = 2 + \sqrt{2}$ ie $A(2 + \sqrt{2}; 0)$ et $B(0; 1 + \sqrt{2})$.

78 • Posons $f(x) = \sin 3x$ et $g(x) = \tan x$ alors

$$\frac{\sin 3x}{\tan x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \times \frac{x - 0}{g(x) - g(0)}.$$

f et g sont dérivables en O et $f'(0) = 3$ et $g'(0) = 1$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan x} = 3 \times 1 = 3.$$

79 • 1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ donc

$$(1+x^2)f'(x) = (1+x^2) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2}$$

$$\text{donc } (1+x^2)f'(x) = xf(x) \quad [1]$$

2. On raisonne par récurrence sur n avec x fixé réel arbitrairement choisi.

• L'égalité est vraie pour $n = 0$; il suffit pour cela de dériver [1]

• On suppose l'égalité vraie pour n quelconque puis on la dérive, l'hérédité est alors démontrée :

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^n(x) = 0$$

$$\text{donc } 2xf^{(n+2)}(x) + (1+x^2)f^{(n+3)}(x) + (2n+1)f^{(n+1)}(x) + (2n+1)xf^{(n+2)}(x) + (n^2-1)f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } (1+x^2)f^{(n+3)}(x) + (2n+3)xf^{(n+2)}(x) + (n^2+2n)f^{(n+1)}(x) = 0.$$

$$\text{Or } n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$$

$$\text{donc } (1+x^2)f^{(n+3)}(x) + (2n+3)xf^{(n+2)}(x) + ((n+1)^2 - 1)f^{(n+1)}(x) = 0.$$

80 • $g(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$;

si $x \in]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$;

si $x \in]1; 5[$, $g(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$.

• $g(3+h) = g(3-h)$, donc la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie.

• $x \in]1; 5[$,

$$\begin{cases} y^2 = -x^2 + 6x - 5 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ y > 0 \end{cases}$$

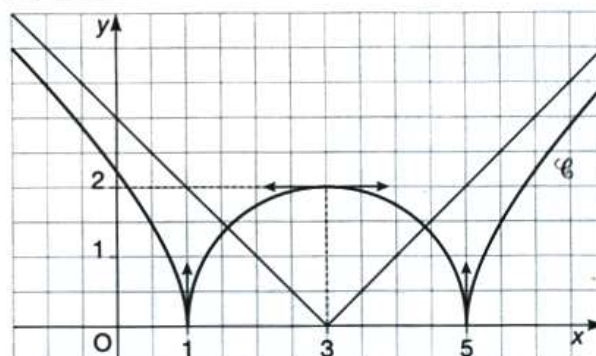
La courbe est le demi-cercle de centre $\Omega(3; 0)$, de rayon 2 correspondant à $y > 0$.

• $x \in]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$;

$$g'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}.$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$g'(x)$		-		+
$g(x)$			0	

• Les droites $d: y = x - 3$ et $d': y' = -x + 3$ sont asymptotes à $\mathcal{C}$.



81 **A. 1.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = 0$,
donc $f'(0) = 0$.

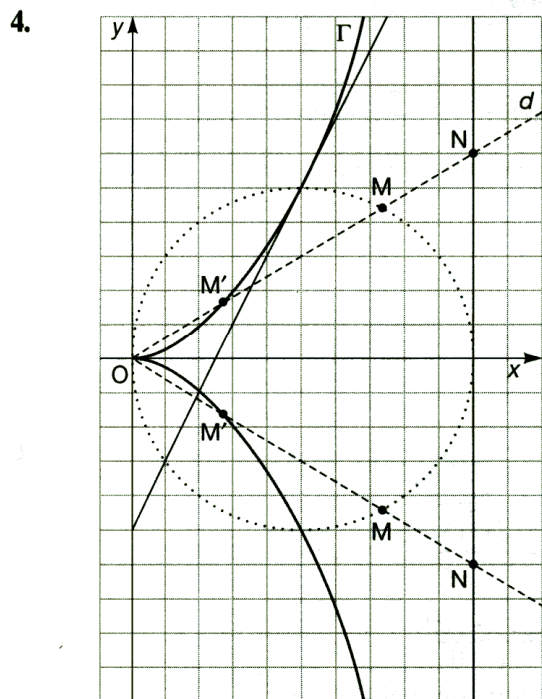
2. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{(1-x)^2}}} \times \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}$;

$f'(x)$ est du signe de $3-2x$.

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$;

Γ a pour équation $y = 2x - \frac{1}{2}$.



5. $M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2(x-1) + x^3 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^3}{1-x}.$$

• Si $x \in [0; 1[$, alors $y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

6. a) $M \in \mathcal{C} \cap d: \begin{cases} y = tx \\ y^2 = \frac{x^3}{1-x} \end{cases} \quad M\left(\frac{t^2}{1+t^2}; \frac{t^3}{1+t^2}\right);$

$M' \in \Gamma \cap d: \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ y = tx \end{cases}$

$M'\left(\frac{1}{1+t^2}; \frac{t}{1+t^2}\right)$ et $N(1; t)$.

b) $\overrightarrow{MN} \left(1 - \frac{t^2}{1+t^2}; t - \frac{t^3}{1+t^2}\right)$,

soit $\overrightarrow{MN} \left(\frac{1}{1+t^2}; \frac{t}{1+t^2}\right)$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM}$.

c) Construire d puis M et N .

On obtient M' par $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$.

B. On peut choisir une solution analytique. On peut aussi utiliser les propriétés du produit scalaire.

1. a) $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NO} = (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM}) \cdot \overrightarrow{NO}$
 $= \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{NO}$
 $= \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NO} \quad (\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{NO} = 0)$
 $= \overrightarrow{NI} \cdot (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IO}) = \overrightarrow{NI}^2$;

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI}^2$.

b) $\overrightarrow{NI}^2 = \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{M'O} \cdot \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{ON}$
 $(\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{ON}$: vecteurs colinéaires de même sens);

soit $\overrightarrow{NI}^2 = \overrightarrow{OM'} \times \overrightarrow{ON}$.

De même, $\overrightarrow{OI}^2 = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}$.

c) En utilisant le théorème de Thalès et $OM = M'N$, on obtient le résultat.

d) On peut écrire $OP = NI \times \frac{OM'}{OM}$, et alors :

$$OP \times OI^2 = NI \times \frac{OM'}{OM} \times OM \times ON = NI^3.$$

2. Il s'agit de résoudre $x = a^3\sqrt{2}$ et donc de connaître $\sqrt[3]{2}$, ce que permet la cissoïde.

82 **1.** L'altitude des trois points est nulle donc c'est une figure dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ qui montre ABC.

2. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 12$.

De même $AC^2 = 12$ et $BC^2 = 12$.

Ainsi $AB = AC = BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ donc ABC est équilatéral.

De plus $OA = OB = OC = 2$ donc O est son centre (de gravité en particulier).

3. a) $\mathcal{C}'$ est le plan $\perp$ à (AB) passant par O et C (car O et C sont équidistants de A et B).

Si on note $K(0; 0; 1)$, $\mathcal{C}'$ est le plan (OCK).

b) De même c'est le plan (OAK).

c) L'ensemble des points équidistants de A, B, C est l'intersection des deux plans précédents : c'est-à-dire $(OK) = (O\vec{k})$.

4. Pour que ABCD soit un tétraèdre régulier, il faut que D soit équidistant de A, B, C donc $D \in (O\vec{k})$.

Ainsi, nécessairement ses coordonnées sont du type $(0, 0, d)$.

De plus, on doit avoir $AD = AB$ ie $4^2 + d^2 = 12$.

Ce qui fournit $d = \sqrt{8}$. Nécessairement, si D existe : $D(0, 0, \sqrt{8})$.

Réciproquement, le point $D(0, 0, \sqrt{8})$ est toujours $AB = AC = BC = DA = DB = DC$ donc ABCD est régulier.

Conclusion : il existe un unique point D répondant au problème, c'est le point $D(0, 0, \sqrt{8})$.

5. a) D'après Al-Kashi dans AMB,

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cos \widehat{AMB}.$$

Or $AM = BM$ (car M $\in$ (OCD) = plan médiateur de [AB]) et $AB^2 = 12$ donc $12 - 2AM^2 (1 - \cos \widehat{AMB})$.

D'après Al-Kashi dans AMC,

$$AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2AC \cdot AM \cos \widehat{ACM}$$

or $\widehat{ACM} = \frac{\pi}{3}$ car ACD équilatéral et M $\in$ [CD]

$$AC = \sqrt{12}$$

$MC = \sqrt{12} \lambda$ car $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CD}$ donc $CM = |\lambda|CD = \lambda CD$ car $\lambda \in [0; 1]$.

Ainsi $AM^2 = 12 + 12\lambda^2 - 2 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} \lambda \times \cos \frac{\pi}{3}$
ie $AM^2 = 12 + 12\lambda^2 - 12\lambda = 12(\lambda^2 - \lambda + 1)$.

On en tire que $12 = 2 \times 12 (\lambda^2 - \lambda + 1) (1 - \cos \widehat{AMB})$.

$$\text{D'où } \cos(\widehat{AMB}) = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$$

b) f est rationnelle déf sur $\mathbb{R}$ donc dér sur $\mathbb{R}$ et

$$\bullet f'(\lambda) = \frac{4\lambda - 2}{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}$$

$$\bullet \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda^2}{2\lambda^2} = 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{2\lambda^2}{2\lambda^2} = -1.$$

c) et d) À l'aide du tableau, $\cos(\widehat{AMB})$ est minimal lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$ ie M milieu de [CD].

λ	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(\lambda)$		-	0	+	
f	1	$\searrow \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow \frac{1}{2}$	1

Comme $\widehat{AMB} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ où $\cos$ est décroissante alors $\widehat{AMB}$ est maximal quand son cosinus est minimal ie lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$.

C'est nouveau au bac (page 82)

83 1. a) Faux ; contre-exemple $f(x) = 2x + 3$ sur $[0; 3]$ en $a = 3$.

b) Faux ; contre-exemple $f(x) = x^3$ en $a = 0$.

c) Vrai (voir le cours).

d) Faux ; $f(x) = x^3 + x - 10$ sur $\mathbb{R}$.

3. D'après l'énoncé : $f'(1) = a$; $f'(-1) = c$;

$f(1) = a + b$ et $f(-1) = c + d$.

a) Vrai. Si f est paire alors $f'(1) = -f'(-1)$ donc $a = -c$.

b) Faux, contre-exemple $f(x) = x^3 + x - 10$.

c) Faux, contre-exemple $f(x) = x$.

d) Vrai. Si $ac < 0$ alors $f'(1) \times f'(-1) < 0$ et f' est continue (car f'' existe) sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in (-1; +1]$ tel que $f'(x) = 0$.

84 1. Vrai, par définition.

2. Faux, $g'(x) = (1 + \tan^2 x)f'(\tan x)$.

3. Vrai, il suffit d'étudier $\phi : x \mapsto \tan x - x$.

4. Vrai, $f' - g' = 0$ sur I donc $f - g$ est constante sur I. L'hypothèse intervalle est essentielle.

85 2. • Pas de difficulté en 0 et en 1,

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2(1-x)}} ;$$

• en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{x} = \sqrt{1-x} \text{ car } x > 0 \text{ et } \sqrt{x^2} = x$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

et f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

• en 1 :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{x - 1} = \frac{-\sqrt{x^2(1-x)}}{1 - x} = -\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 1.

• **Variations**

x	0	$\frac{2}{3}$	1		
$f'(x)$	1	+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Activités (page 20)

ACTIVITÉ 1

1. a) Pour tout point M la tangente coupe l'axe des abscisses donc $f'(x_0) \neq 0$.

b) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

c) (T) coupe l'axe des abscisses pour $y = 0$

$$\text{et } x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

2. a) $\overrightarrow{TH} = \vec{i}$ équivaut à abscisse de $\overrightarrow{TH}$ est 1

$$\text{donc } \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 \text{ d'où } f(x_0) = f'(x_0).$$

b) Il en résulte que f convient si et seulement si $f' = f$.

ACTIVITÉ 2

$$1. f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) = f(t_0) + \frac{1}{n}f'(t_0) = f(t_0)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{et } f(t_0) = y_0 = 1 \text{ d'où } y = 1 + \frac{1}{n}.$$

$$2. a) f\left(t_k + \frac{1}{n}\right) \approx f(t_k) + \frac{1}{n}f'(t_k) \text{ or } f'(t_k) = f(t_k)$$

$$\text{donc } f\left(t_k + \frac{1}{n}\right) = f(t_k)\left[1 + \frac{1}{n}\right].$$

$$\text{On choisit } y_{k+1} = y_k\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$b) \text{ Par récurrence il est évident que } y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$$

Travaux dirigés (page 97)

TD 1

1. Pour tout réel x , $f(x_0 + x) = f(x_0) \times f(x) = 0$.

Donc pour tout réel X , $f(X) = 0$.

2. a) $f(x + 0) = f(0) \times f(x)$, donc $f(x)[1 - f(0)] = 0$ pour tout réel x . Il en résulte que $f(0) = 1$.

$$b) f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = f(x),$$

donc pour tout réel X , $f(X) > 0$.

3. a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel y ,

$$g'(y) = f'(x + y) = f(x)f'(y).$$

b) Il en résulte que $f'(x) = f'(0)f(x) = af(x)$ avec $a = f'(0)$.

c) $f(x) = ke^{ax}$ et $f(0) = 1$ donc $k = 1$.

4. $e^{a(x+y)} = e^{ax} \times e^{ay}$ donc $f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

TD 2

1. a) $f'(x) = e^x - 1$.

D'après le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	↘ 0 ↗	$+\infty$

Pour tout réel x : $f(x) \geq 0$ donc $(1 + x) \leq e^x$ (1)

Pour tout réel $x < 1$, $1 - x < e^{-x}$, $1 - x > 0$ et $e^{-x} > 0$

$$\text{donc } e^x \leq \frac{1}{1 - x} \quad (2).$$

$$2. a) x = \frac{1}{n} \text{ avec } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ d'après (1) } \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq e^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{donc } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad (3).$$

$$b) x < 1 \text{ donc } e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \text{ soit}$$

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ donc } e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

d'où le résultat.

2 1. a) $g'(x) = e^{-x} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \right]$

$$= e^{-x} \left(-\frac{x^n}{n!} \right) < 0.$$

x	0	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	1	

Donc $g(1) < 1$.

On démontre de même que h est croissante sur $[0; 1]$ et que $h(1) > 1$.

2. Il résulte alors de l'étude précédente que

$$e^{-1} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) < 1 \text{ et}$$

$$e^{-1} \left[1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \right] > 1 \text{ donc}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \quad (4)$$

3 1. $n! + n! + \dots + 1! < n! e < (n! + n! + \dots + 1) + 1$.

En posant $a_n = n! + n! + \dots + 1$ il en résulte que

$$a_n < n! e < a_n + 1.$$

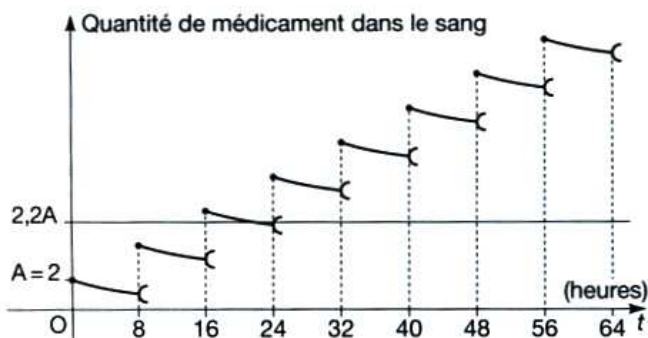
2. a) Si $q \leq n$ alors q divise $n!$ donc $\frac{n!p}{q}$ est un entier. Or $\frac{n!p}{q}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs donc $q \leq n$ est impossible.

b) Il résulte que quel que soit $n > 1$, $q > n$. Ce qui est impossible donc e est irrationnel.

TD 3

1 1. Il reste $Ae^{-\frac{1}{3}}$.

2.



3. À partir de la troisième injection.

2 1. $b > 0$ donc $1 + be^{-kt} > 0$ pour tout réel t .

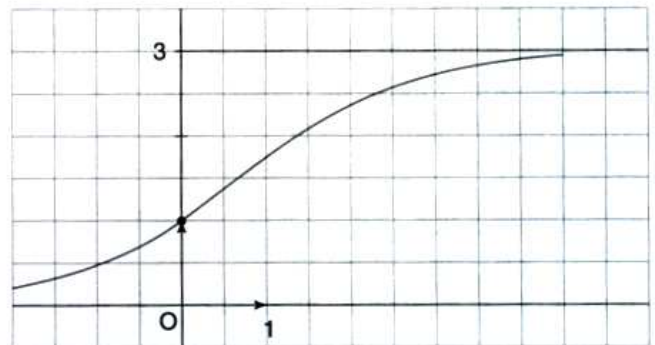
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$.

$$3. f'(t) = \frac{akbe^{-kt}}{(1 + be^{-kt})^2}$$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	$\frac{a}{1+b}$	a

Pour $a = 3$, $b = 2$ et $k = 1$.

On a la fonction $f: t \mapsto \frac{3}{1 + 2e^{-t}}$.



3 1. a) $x'(t) = -kx(t) + 1000k$ équation du type $y' = ay + b$ donc les solutions sont :

$$f: t \mapsto \lambda e^{-kt} + 1000.$$

b) $40 = \lambda + 1000$ donc $k = -960^\circ$. Il en résulte que $f(t) = -960e^{-kt} + 1000$.

$$f(1) = 160 \text{ donc } 160 = -960e^{-k} + 1000 \text{ soit } e^{-k} = \frac{7}{8}$$

$$f(5) = -960(e^{-k})^5 + 1000 = -\left(\frac{7}{8}\right)^5 \times 960 + 1000.$$

Soit $f(5) \approx 508^\circ$.

2. Mise en mouvement d'un canot :

$$mv' = -rv + F \text{ ou } v' = -\frac{r}{m}v + \frac{F}{m} \text{ donc}$$

$$v(t) = \lambda e^{-\frac{r}{m}t} + \frac{F}{r}.$$

$$v(1) = F \text{ donc } 1 = \lambda e^{-\frac{r}{m}} + \frac{F}{r} \text{ soit } \lambda = e^{\frac{r}{m}} \left(1 - \frac{F}{r} \right)$$

$$\text{donc } v(t) = e^{\frac{r}{m}} \left(1 - \frac{F}{r} \right) e^{-\frac{r}{m}t} + \frac{F}{r}.$$

La vitesse limite du canot est $\frac{F}{r}$.

TD 4

$$1 y - y' = \frac{e^x}{x^2}.$$

$$1. h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$\text{donc } h(x) - h'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}$$

donc h est solution de (E).

2. g solution de (E) si et seulement si $g - g' = \frac{e^x}{x^2}$

soit $g_1 - g'_1 + h - h' = \frac{e^x}{x^2}$.

Or $h - h' = \frac{e^x}{x^2}$ donc $g_1 - g'_1 = 0$.

3. $g_1(x) = \lambda e^x$.

4. $g(x) = \lambda e^x + \frac{e^x}{x}$.

2 1. $h(x) = ax^2 + bx + c$

$h'(x) = 2ax + b$

$h(x) + h'(x) = ax^2 + (b + 2a)x + c + b$
 $= x^2 + x$

d'où $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$ soit $h(x) = x^2 - x + 1$

donc les solutions sont données pour tout réel x par $f(x) = \lambda e^{-x} + x^2 - x + 1$.

2. $h'(x) = -a \sin x + b \cos x$

$h(x) + h'(x) = (b - a) \sin x + (a + b) \cos x = 5 \cos x$

d'où $a + b = 5$, $b - a = 0$, $b = \frac{5}{2} = a$

et $h(x) = \frac{5}{2} (\cos x + \sin x)$

et $f(x) = \lambda e^{2x} + \frac{5}{2} (\cos x + \sin x)$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 101)

1. La fonction exponentielle

1 a) e^x b) e^{-3} c) $1 + e^{-2x}$
d) e^{2-x} e) e^{4x} f) e^{2y}

2 1. $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = [g(x) + h(x)][g(x) - h(x)]$
soit $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$.

2. $2[g(x)]^2 - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - 1 = g(2x)$.

$2g(x)h(x) = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) = h(2x)$.

3 Corrigé dans le manuel.

4 Corrigé dans le manuel.

5 a) $2e^{-x}(e^x + 2) = 1$ soit $2 + 4e^{-x} = 1$.
 $4e^{-x} = -1$ pas de solution.

b) $x = 2$.

6 a) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}}$ équivaut pour $x \neq 0$ à $x^2 + x - 2 = 0$
soit $x = 1$ ou $x = -2$.

b) $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ d'où $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

7 a) L'équation équivaut à $x^2 + x - 6 = 0$
soit $x = -3$ ou $x = 2$.

b) L'équation équivaut à $x^2 - x + 2 = 0$ donc pas de solution.

8 a) $e^{x^2} \leq e^{-2}$ d'où $x^2 \leq -2$ vrai pour tout réel x .
b) L'équation équivaut à $x^3 - x - 6 \leq 0$
ou $(x-2)(x^2 + 2x + 3) \leq 0$ donc $x \in]-\infty; 2]$
car $x^2 + 2x + 3 > 0$ pour tout réel x .

9 a) L'inéquation équivaut à $e^{2x} \leq 1$.

Soit $2x \leq 0$ et $x \in]-\infty; 0]$.

b) $(e^x - 1)(e^x - 1) > 0$ donc $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

10 Corrigé dans le manuel.

2. Étude de la fonction exponentielle

11 Corrigé dans le manuel.

12 $f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

13 $f'(x) = \frac{3e^x}{(2e^x + 1)^2}$.

14 $f'(x) = e^x [2 \cos x]$.

15 $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

16 $f'(x) = 2x - 2xe^x = 2x(1 - e^x)$.

17 1. $f'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = g(x)$.

$g'(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = f(x)$.

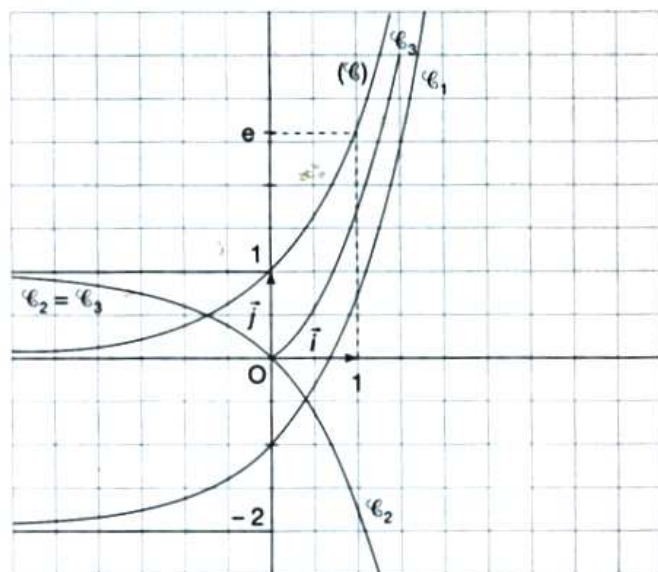
2. $h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2} = \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{f^2}$.

Or $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$ (voir corrigé exercice 2)

et $h'(x) = \frac{1}{f^2(x)}$ ou $h'(x) = \frac{1}{f^2}$.

- 18** 1. $f(0) = 2$ et $f(-2) = 0$ donc $2 = b$
 et $0 = (-2a + b)e^2$ donc $2a = b = 2$; $a = 1$ et $b = 2$.
 Ainsi pour tout réel x , $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.
 2. $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$ et A pour coordonnées $(-1; e)$.

19



- a) $f_1 : x \mapsto e^x - 2$. La courbe $\mathcal{C}_1$ est déduite de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.
 b) $f_2 : x \mapsto 1 - e^x$. $\mathcal{C}_2$ se déduit de $\mathcal{C}$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie de la translation de vecteur $\vec{j}$ (c'est-à-dire la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$).
 c) $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2$ si $x < 0$ et $\mathcal{C}_3$ est la symétrie de $\mathcal{C}_2$ par rapport à l'axe des abscisses $x > 0$.

20 Corrigé dans le manuel.

3. Des limites importantes

- 21** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
22 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
23 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.
24 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

25 Corrigé dans le manuel.

- 26** $f(x) = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- 27** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

- 28** 1. $f(x) - (x - 1) = e^{-2x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ donc la

droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

2. $e^{-2x} > 0$ pour tout réel x donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d .

- 29** $f(x) - x - 1 = 4e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^{-x} = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

- 30** $f(x) - x - 2 = xe^x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

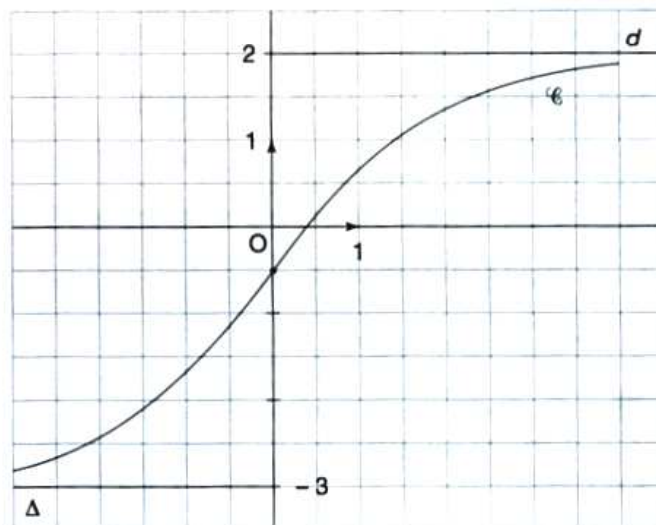
- 31** 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ d'où le résultat.

2. a) $f'(x) = \frac{2e^x(e^x + 1) - (2e^x - 3)e^x}{(e^x + 1)^2}$

donc $f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2}$.

b)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-3	2



32 Corrigé dans le manuel.

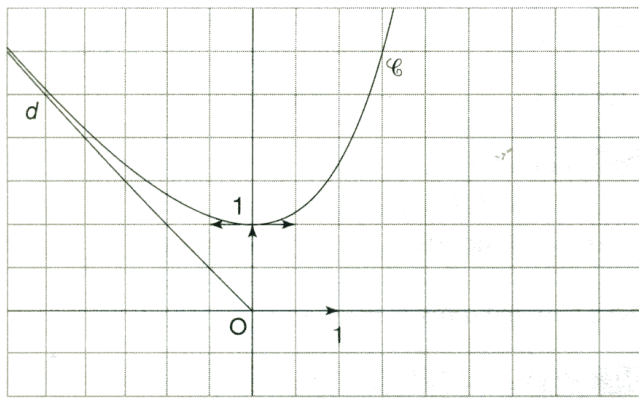
- 33** 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- b) $f(x) + x = e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc la droite d est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

2. $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$



34 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

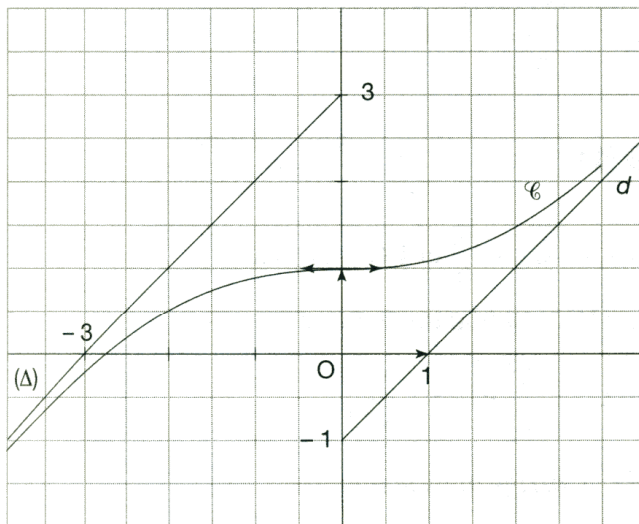
2. a) $f(x) - (x-1) = \frac{4}{e^x + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0$
d'où le résultat.

b) $f(x) - (x+3) = \frac{-4e^x}{e^x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^x}{e^x - 1} = 0$
d'où le résultat.

3. $f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$.

$f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$



35 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+		
$f(x)$	$+\infty$		-1		$+\infty$

3. a) f bijection de $]-\infty; 0]$ sur $[-1; +\infty[$ donc il existe α unique de $]-\infty; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
De même pour β dans $[0; +\infty[$.

$f(-1; 9) \approx e^{-1,9} - 0,1 \approx 0,14$

$f(-1,8) \approx e^{-1,8} - 0,2 \approx -0,03$

donc $-1,9 < \alpha < -1,8$.

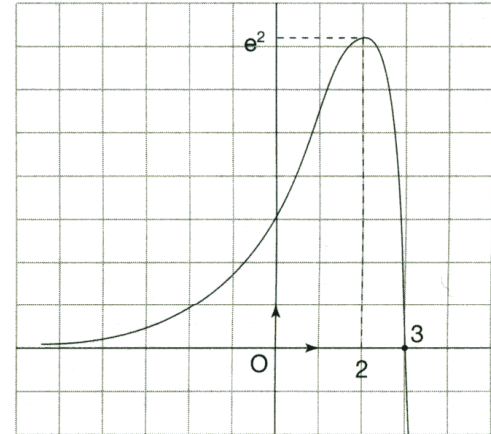
Même chose pour $1,1 < \beta < 1,2$.

b) Il résulte que $f(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; \beta[$.

36 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = (2-x)e^x$

d'où le tableau avec $f(2) = e^2$.



2. Si $m > 0$ et $m < e^2$ on a deux solutions et $m > e^2$ zéro solution.

4. Des fonctions $x \mapsto e^{u(x)}$

37 $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} + 1 \right]$.

38 $f'(x) = 2e^{x-1} [x]$.

39 $f'(x) = e^{\sin x} [\cos^2 x - \sin x]$.

40 Corrigé dans le manuel.

41 1. a) $x + e^{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$.

b) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1 \right) e^{\sqrt{x}}$.

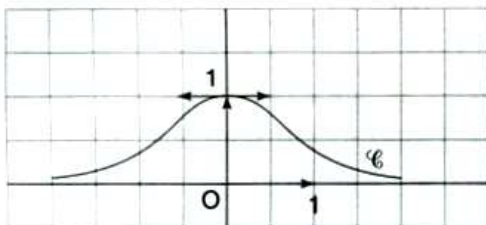
2. $f(0) = 0$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = e^{\sqrt{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1$ donc f est dérivable en $x = 0$.

42 a) $f(-x) = e^{-x^2} = f(x)$ donc f est paire et $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

b) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

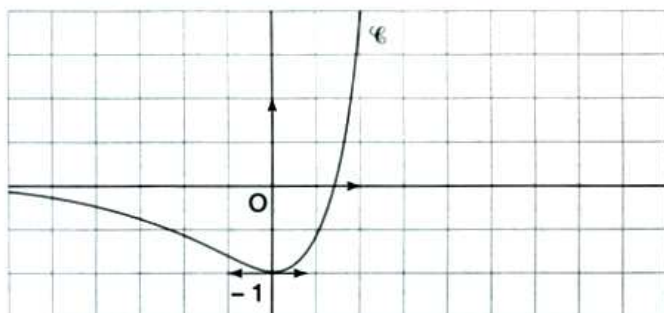
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	0



43 $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$



44 1. $f_1(x) - f_2(x) = e^{-x}[1 - \sin x]$.

$\sin x = 1$ sur $[0; \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

donc un seul point commun $A\left(\frac{\pi}{2}; e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

2. $f'_1(x) = -e^{-x}$ $f'_2(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x)$

$f'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ donc les deux courbes ont une tangente commune en A.

5. Équations différentielles

45 a) $f(x) = \lambda e^{3x}$. b) $f(x) = \lambda e^{-2x}$.

46 a) $f(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$. b) $f(x) = \lambda e^{\frac{5}{3}x}$.

47 1. $f(x) = \lambda e^{2x}$.

2. $f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ donc $f(x) = e^{2x}$.

48 Corrigé dans le manuel.

49 $f'(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ $f'(-2) = \frac{1}{2}$

donc $f(-2) = -1$.

$f(x) = \lambda e^{-\frac{1}{2}x}$ et $-1 = \lambda e$

donc $\lambda = -e^{-1}$ et $f(x) = -e^{-\frac{1}{2}x-1}$.

50 $f(x) = \lambda e^{-2x}$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda e = 1$

d'où $\lambda = e^{-1}$ et $u: x \mapsto e^{-1-2x}$.

51 a) $f(x) = \lambda e^{2x} - \frac{1}{2}$. b) $f(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + 2$.

c) $f(x) = \lambda e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$. d) $f(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x} + 1$.

52 $f(x) = \lambda e^{-3x}$.

1. $f(0) = 1$ d'où $k = 1$ et $f(x) = e^{-3x}$.

2. $f'(0) = 3$ donc $f(0) = -1$ et $\lambda = -1$ donc $f(x) = -e^{-3x}$.

53 Corrigé dans le manuel.

54 $f'(x) = -6e^{-3x}$ donc $f'(x) = -3f(x)$.

55 $f'(x) = -6e^{-2x}$ d'où $f'(x) = -2f(x) - 8$.

6. Applications

56 1. a) $f(x) - x + 2 = e^{-x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc la droite d est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b) $f(x) - (x - 2) = e^{-x} > 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de d .

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 - e^{-x}$

$f'(x) \geq 0$ si et seulement si $e^{-x} \leq 1$ ou $-x \leq 0$
donc $x \geq 0$ $f(0) = -1$.

3. f est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $[-1; +\infty[$
donc 0 a un antécédent unique α dans $]-\infty; 0]$,
de plus $f(-2) = e^2 - 4 > 0$ et $f(-1) = e - 3 < 0$
donc $-2 < \alpha < -1$.

De même f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$
donc 0 a un antécédent unique β dans $[0; +\infty[$.

$f(1) = -1 + e^{-1} < 0$ $f(2) = e^{-2} > 0$

donc $1 < \beta < 2$.

57 $I'(\lambda) = e^{-\frac{K}{\lambda}} \left[\frac{K}{\lambda^2} - \frac{5}{\lambda^6} \right] = e^{-\frac{K}{\lambda}} \left[\frac{K - 5\lambda^4}{\lambda^6} \right]$

$I'(\lambda) > 0$ si $\lambda < \frac{K}{5}$ et $I'(\lambda) < 0$ si $\lambda > \frac{K}{5}$

donc $I(\lambda)$ est maximale pour $\lambda_0 = \frac{K}{5}$

et $I(\lambda_0) = \frac{5^5}{K^5} e^{-5} = \left(\frac{5}{Ke} \right)^5$.

58 Corrigé dans le manuel.

59 $y' = -\frac{k}{m}y + g$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $f(\lambda) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$.

Or $f(0) = 0$ donc $\lambda = -\frac{gm}{k}$ et $v(t) = \frac{gm}{k} \left[1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right]$.

60 1. a) $f(x) - (2x - 2) = (1 - x)e^{-x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^{-x} = 0$ donc la droite Δ est asymptote à $\mathcal{C}$.

b) $f(x) - (2x - 2) = (1 - x)e^{-x}$ si $x < 1$

$f(x) > 2x - 2$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ .

2. a) $f'(x) = 2 + e^{-x}[x - 1 - 1] = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.
 b) Si $x \geq 0$ $e^{-x} < 1$ donc $f'(x) \geq 0$.
 c) $f'(0) = 0$.

x	0	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	-1	0	$+\infty$

3. La tangente à $\mathcal{C}$ en A d'abscisse a est parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = 2$.

Soit $ae^{-a} + 2 - 2e^{-a} = 2$

soit $e^{-a}(a - 2) = 0$ donc $a = 2$

et A a pour coordonnées $(2; 2 - e^{-2})$.

Apprendre à chercher

(page 105)

61 Tangentes à une courbe issues d'un point

Les outils :

- Étude d'une fonction.
- Équations de droites.

Les objectifs

- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir utiliser un tableau de variations.

1. a) $f(x) - (x - 1) = -e^x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

b) $f'(x) = 1 - e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$

Du tableau il résulte que $f(x) \leq -2$.

2. a) $M_0(x_0; f(x_0))$ et $f'(x_0) = 1 - e^{x_0}$ d'où l'équation de T_{x_0} :

$$y - x_0 + 1 + e^{x_0} = (1 - e^{x_0})(x - x_0)$$

d'où $y = (1 - e^{x_0})x - 1 + e^{x_0}(x_0 - 1)$.

b) $O \in T_{x_0} \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} = 1$ (1).

3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$.

b) $\varphi'(x) = xe^x$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+	
$\varphi(x)$	-1	-2	0	$+\infty$

4. a) Pour tout $x \leq 0$, $\varphi(x) < 0$. De plus φ est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $[-2; +\infty[$ donc 0 a un antécédent unique α .

b) $\varphi(1) = -1$

$\varphi(2) = e^2 - 1 > 0$

donc $\alpha \in]1; 2[$

$\alpha \approx 1,28$.

62 Famille de fonctions et lieu géométrique

Les outils :

- Étude d'une famille de fonctions.
- Définir analytiquement un lieu géométrique.

Les objectifs

- Savoir déterminer un lieu géométrique.

1. $(x + m_1)e^{-x} - (x + m_2)e^{-x} = (m_1 - m_2)e^{-x}$.

Donc si $m_1 \neq m_2$.

$(m_1 - m_2)e^{-x} \neq 0$ donc les courbes $\mathcal{C}_{m_1}$ et $\mathcal{C}_{m_2}$ n'ont pas de point commun.

2. a) $f'_m(x) = e^{-x}(-x - m + 1)$.

b) Pour tout réel m , I_m a pour coordonnées $(1 - m; e^{m-1})$.

3. a) $x = 1 - m$,

$y = e^{m-1}$ d'où $y = e^{-x}$.

b) Ainsi I_m appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

4. $x = 1 - m$ donc lorsque m décrit $\mathbb{R}$, x décrit $\mathbb{R}$. On en déduit alors que I_m décrit toute la courbe (Γ) .

Pour progresser

(page 106)

Études de fonctions

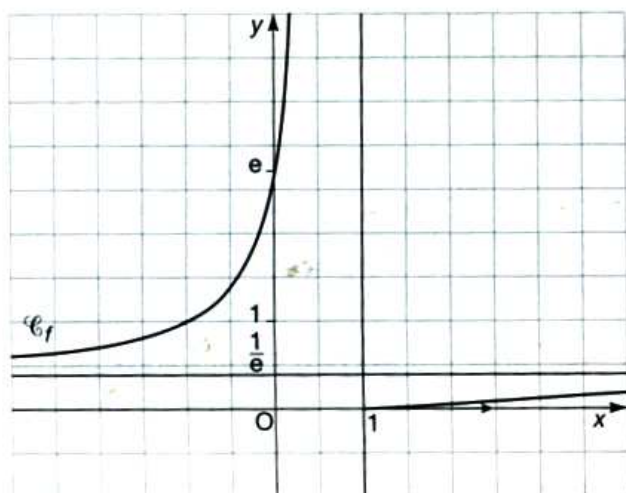
63 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{e}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{e}$;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

• $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} e^{\frac{1+x}{1-x}}$;

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	$\frac{1}{e}$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

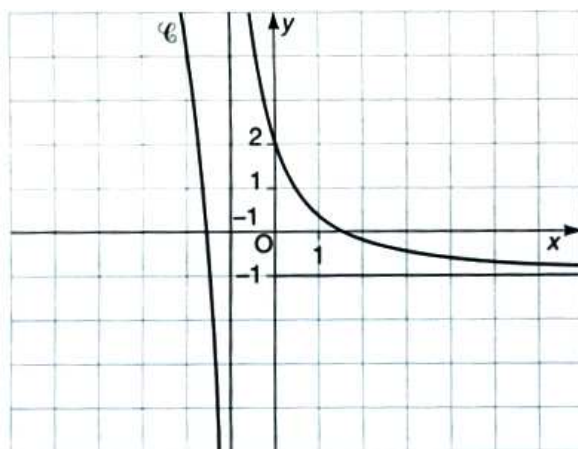


64 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(1+x)^2} < 0$;

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
f	$+\infty \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow -1$



65 1. $f(0) = -1$ $g(0) = 1$.

La courbe associée à g est celle qui présente un maximum au point de coordonnées $(0; 1)$.

2. a) $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 1 - e^x + xe^x$
 $= 1 - (1 - x)e^x = 1 - g(x)$.

b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	+
$h(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$

3. a) $f(x) = g(x)$ si et seulement si $h(x) = 0$.
 Or $h(x) = 0$ s'annule pour une seule valeur α de l'intervalle $]0; +\infty[$. Or $h(1) = 1 - e < 0$ et $h(2) = 2 > 0$ donc $\alpha \in]1; 2[$.

b) $1,5 < \alpha < 1,6$.

66 • 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ d'où les courbes.

2. $f_0(-x) + f_0(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = 1$ donc $A(0; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_0$. On démontre de même que A est centre de symétrie pour $\mathcal{C}_1$.

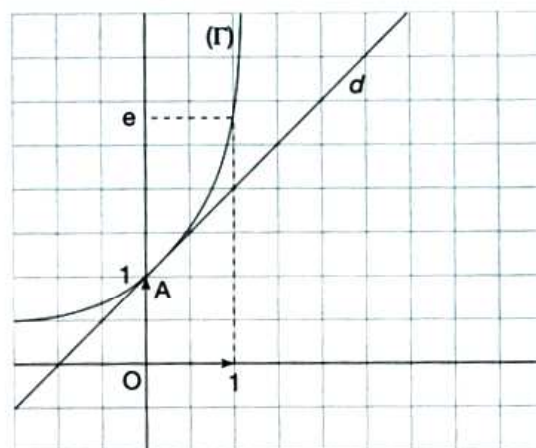
3. $f_0(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x} = f_1(x)$

donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie.

4. a) $f_0(x) + f_1(x) = 1$.

b) $\mathcal{C}_1$ est donc l'image de $\mathcal{C}_0$ par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

67 • 1. La tangente en A a pour équation $y = x + 1$ et (Γ) est au-dessus de cette tangente donc pour tout réel u , $e^u \geq u + 1$ (1).



2. a) En posant $u = -x$ d'après (1)

$$e^{-x} \geq -x + 1 \text{ soit } e^{-x} + x - 1 \geq 0.$$

$e^{-x} > 0$ donc

$$1 \geq e^x(1 - x)$$

soit $1 + (x - 1)e^x \geq 0$ (2).

3. $f'(x) = \frac{1 + e^x(x - 1)}{x^2}$. En tenant compte de (2),

$f'(x) \geq 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

68 • 1. a) $f(x) - (x - 1) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - x + 1 = \frac{2}{e^x + 1}$;

$$f(x) - (x + 1) = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 = \frac{-2e^x}{e^x + 1}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$.

Donc les droites Δ_1 et Δ_2 sont asymptotes à $\mathcal{C}$ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

d) Au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ_2 et au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ_1 .

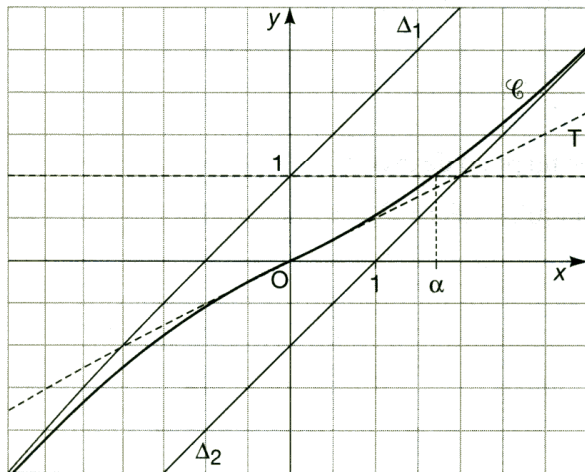
2. a) $f(-x) = -x - \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$
 $= -f(x)$,
donc f est impaire.

b) $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	+	
f	0	1	$+\infty$

La tangente en $x = 0$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

3.



4. • f est strictement croissante
et $f([0; +\infty[) =]0; +\infty[$.

• $1,6 < \alpha < 1,7$.

69 • 1. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2. a) $t(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$;

$\frac{1}{x} = X$ et $t(X) = (X + X^2 + X^3) \frac{1}{e^X}$;

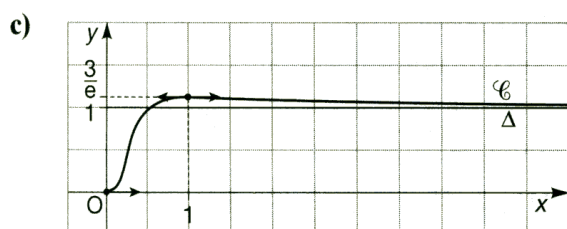
$\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} t(X) = 0$.

b) Donc f est dérivable en 0 et le nombre dérivé en ce point est 0.

3. a) $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right] = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0
f	0	$\frac{3}{e}$	1

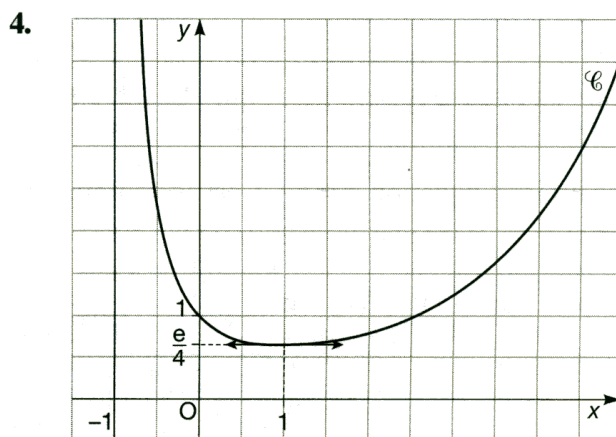


70 • 1. a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - 2e^x(1+x)}{(x+1)^4} = \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}$.

3.

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\frac{e}{4}$	$+\infty$



71 • 1. a) $g'(x) = e^x - 1$.

Pour tout réel x , $g(x) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

b) $e^x - x \neq 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

b) $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

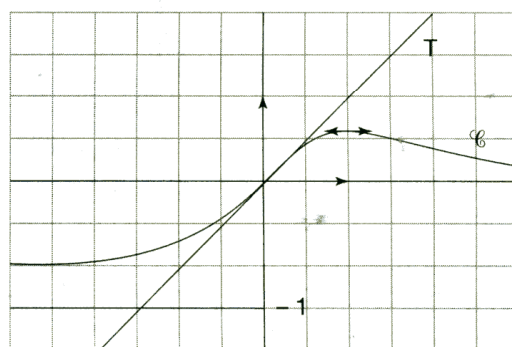
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

c) T a pour équation $y = x$

$f(x) - x = \frac{-xg(x)}{e^x - x} \left\{ \begin{array}{l} \text{Or } g(x) \geq 0, \\ \text{donc } e^x - x > 0. \end{array} \right.$

Pour $x \leq 0$, C est au-dessus de T et pour $x > 0$, C est en dessous de T.

d) Tracé de T et C .



72 • A. 1. • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, car si $\frac{1}{x} = X$,

$$f(x) = \frac{e^X}{X} \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty.$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = xe^{\frac{1}{x}} - x - 1 = f(x) - x - 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = 0$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$.

Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$;

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f	$+\infty$	e	$+\infty$

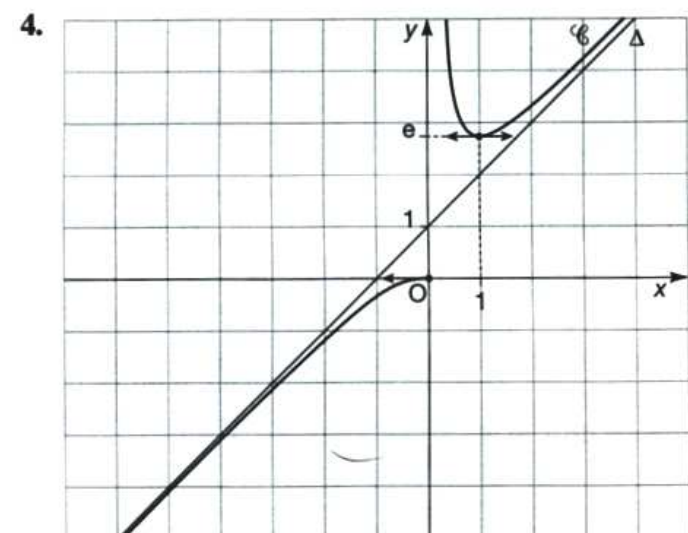
B. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

3. a) $\frac{g(x) - g(0)}{x} = e^{\frac{1}{x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

b) Donc g est dérivable en zéro et le nombre dérivé en ce point est zéro.

c)

x	$-\infty$	0
$g'(x)$		+
g	$-\infty$	0



73 • 1. a) M_0 a pour coordonnées $(x_0; e^{x_0} - x_0)$ et $f'(x_0) = e^{x_0} - 1$. Donc T_{x_0} a pour équation

$$y = (e^{x_0} - 1)x + e^{x_0}(1 - x_0).$$

b) $A \in T_{x_0} \Leftrightarrow 0 = e^{x_0} - 1 + e^{x_0}(1 - x_0)$
soit $e^{x_0}(2 - x_0) = 1$ (1)

2. a) $\varphi'(x) = e^x(1 - x)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	0	e	$-\infty$

b) $\varphi(x) = 1$ pour deux valeurs α et β de x avec $-1,2 < \alpha < -1,1$ et $1,8 < \beta < 1,9$.

3. On peut donc mener à $\mathcal{C}$ deux tangentes passant par A.

74 • 1. a) M a pour coordonnées $(m; e^m)$ et N a pour coordonnées $(m; e^{-m})$ donc I a pour coordonnées $(m; \frac{e^m + e^{-m}}{2})$.

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

c) I est un point de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Or lorsqu'on décrit $\mathbb{R}$, $x = m$ décrit $\mathbb{R}$ donc $(\Gamma) = (\mathcal{C})$.

2. a) $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

b) Les tangentes T_1 en M à $\mathcal{C}_1$ et T_2 en N à $\mathcal{C}_2$ ont respectivement pour équations :

$$y = e^m x + e^m(1 - m) \text{ et } y = -e^{-m} x + e^{-m}(1 + m).$$

Leur point d'intersection P a pour coordonnées

$$\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}; \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right).$$

Il en résulte que $\vec{IP}$ a pour coordonnées

$$\left(-\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}; -\frac{(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m + e^{-m})}\right).$$

Ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\left(1; \frac{e^m - e^{-m}}{2}\right)$.

Or $f'(m) = \frac{1}{2}(e^m + e^{-m})$ donc (IP) est la tangente en I à (Γ) .

75 • 1. a) M_m a pour coordonnées $(m; e^m)$ et P_m a pour coordonnées $(m; m)$. La tangente en M_m à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = e^m(x - m) + e^m$ donc N_m a pour coordonnées $(0; e^m(1 - m))$.

Donc G_m a pour coordonnées

$$\left(\frac{m}{2}; \frac{1}{4}[m + e^m + e^m(1 - m)]\right)$$

soit $\left(\frac{m}{2}; \frac{1}{4}[m + e^m(2 - m)]\right)$. (1)

b) De (1) on tire $m = 2x$

$$\text{donc } y = \frac{1}{2} [x + e^{2x}(1-x)].$$

2. a) $f'(x) = \frac{1}{2} [1 + e^{2x}(1-2x)]$

$$f''(x) = -2xe^{2x}.$$

b)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$-\infty$

c) $f'(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$

$$f'(1) = \frac{1-e^2}{2} < 0 \text{ donc } \alpha \in]0; 1[.$$

À la calculatrice on trouve $\alpha \approx 0,65$.

3.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

76 • 1. a) $f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$.

b) $f_n(0) = -2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

x	$-\infty$	0
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$	-2	1

2. a) $f_n(n) = -e^{-n} < 0$.

b) Si $n = 1$, $e^{n+1} = e^2 > 3$ donc vraie.

$$\text{Si } e^{n+1} > 2n+1, e^{n+2} > e(2n+1) > 2n+3.$$

Donc la proportion est vraie pour tout $n \geq 1$.

c) $f_n(n+1) = 1 - \frac{2n}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}}$.

$$\text{Or } e^{n+1} > 2n+1 \text{ donc } \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{e^{n+1}} \text{ et } f_n(n+1) < 0.$$

3. $f_n(n) \times f_n(n+1) < 0$ d'où l'existence d'une solution unique un telle que $n < u_n < n+1$.

77 • 1. a) $f(1)(x) = e^x(x^2 + 3x + 2)$.

b) Pour $n = 1$, $f^{(1)}(x)$ est de la forme $e^x(x^2 + a_n x + b_n)$ avec $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$.

$$\text{Si } f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + a_n x + b_n)$$

$$\text{alors } f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n)$$

$$\text{d'où } f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})$$

$$\text{avec } a_{n+1} = a_n + 2 \text{ (1) et } b_{n+1} = a_n + b_n \text{ (2)}$$

$$\text{avec } a_{n+1} \in \mathbb{N} \text{ ainsi que } b_{n+1}.$$

2. a) (a_n) est une suite arithmétique de premier terme $a_1 = 3$ et de raison 2.

$$\text{Donc } a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1.$$

b)
$$\begin{cases} b_n - b_{n-1} = a_{n-1} \\ b_{n-1} - b_{n-2} = a_{n-2} \\ \vdots \\ b_2 - b_1 = a_1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

$$\text{Or } a_1 + \dots + a_{n-1} = \frac{n-1}{2} [3 + 2n-1] = n^2 - 1$$

$$\text{donc } b_n = n^2 + 1.$$

3. a) Si d divise a_n et b_n , d divise $\alpha(2n+1) + \beta(n^2+1)$. En prenant $\alpha = n$ et $\beta = -2$, d divise $(n-2)$. Il divise ainsi : $(2n+1) - 2(n-2) = 5$.

$$d = 5 \text{ si et seulement si } 2n+1 \equiv [5]$$

$$\text{soit } 2n \equiv 4 [5] \text{ soit } u \equiv 2 [5].$$

b) Pour les autres valeurs de n , a_n et b_n sont premiers entre eux.

78 • 1. a) $f_1^{(1)}(x) = 2x(x+1) = f_1 + f_0$.

$$\text{Si } f_1^{(n)}(x) = n f_0(x) + f_1(x)$$

$$\text{alors } f_1^{(n+1)}(x) = n f_0'(x) + f_1'(x)$$

$$= n f_0(x) + f_0(x) + f_1(x)$$

$$= (n+1) f_0(x) + f_1(x)$$

$$\text{d'où } f_1^{(n+1)} = (n+1) f_0 + f_1.$$

Donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$.

b) La démonstration est analogue à la précédente.

$$2. f = 2f_2 - 3f_1$$

$$\text{donc } f^{(n)} = 2[n(n-1)f_0 + 2nf_1 + f_2] - 3[nf_0 + f_1]$$

$$\text{soit } f^{(n)} = n(2n-5)f_0 + (4n-3)f_1 + 2f_2.$$

$$\text{D'où } f_{(n)}^{(x)} = e^x[2x^2 + (4n-3)x + 4(2n-5)].$$

Équations différentielles

79 • 1. $f(x) = k e^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. a) $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$; si f est solution de (E'), alors, pour tout réel x ,

$$4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3ax^2 + x(4a + 3b) + 2b + 3c = x^2 + 1;$$

$$a = \frac{1}{3}; b = -\frac{4}{9}; c = \frac{17}{27}.$$

b) g est solution de (E') ainsi que f , donc :

$$2g' + 3g = x^2 + 1 = 2f' + 3f,$$

$$\text{d'où } 2(g' - f') + 3(g - f) = 0 \Leftrightarrow 2(g - f)' + 3(g - f) = 0.$$

Ainsi $(g - f)$ est solution de (E).

Réciproquement, si $(g - f)$ est solution de (E) :

$$2g' + 3g = 2f' + 3f = x^2 + 1,$$

donc g est solution de (E').

c) Les solutions (E') sont les fonctions :

$$x \mapsto k e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}, k \in \mathbb{R}.$$

3. On cherche pour (E'') une solution de la forme $a \cos x + b \sin x$. Donc, pour tout réel x :

$$-2a \sin x + 2b \cos x + 3a \cos x + 3b \sin x = \cos x,$$

$$\text{d'où } 2b + 3a = 1 \text{ et } 3b - 2a = 0.$$

Il résulte que $b = \frac{2}{13}$ et $a = \frac{3}{13}$ et les solutions de (E'')

sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x} + \frac{3}{13}\cos x + \frac{2}{13}\sin x$, $k \in \mathbb{R}$.

80 • 1. $g'(x) = -ae^{-x}$, d'où $(-a + 3a)e^{-x} = 2e^{-x}$ et $a = 1$; $g(x) = e^{-x}$.

Pour les questions 2. et 3., le raisonnement est le même que pour l'exercice 79. Les solutions de (E) sont données par $x \mapsto ke^{-3x} + e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

81 • Comme pour l'exercice 80, on trouve :

$$g(x) = -4\cos 2x + \sin 2x,$$

et les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x} - 4\cos 2x + \sin 2x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

82 • 1. a) $y = z + x$, $y' = z' + 1$, d'où :
 $y + y' = z + z' + x + 1$, donc $z + z' = 0$.

b) $z = ke^{-x}$ et $y = ke^{-x} + x$, $k \in \mathbb{R}$.

2. $f_\alpha(0) = \alpha$, d'où $k = \alpha$ et $f_\alpha(x) = \alpha e^{-x} + x$.

a) $f'_\alpha(x) = -\alpha e^{-x} + 1$;

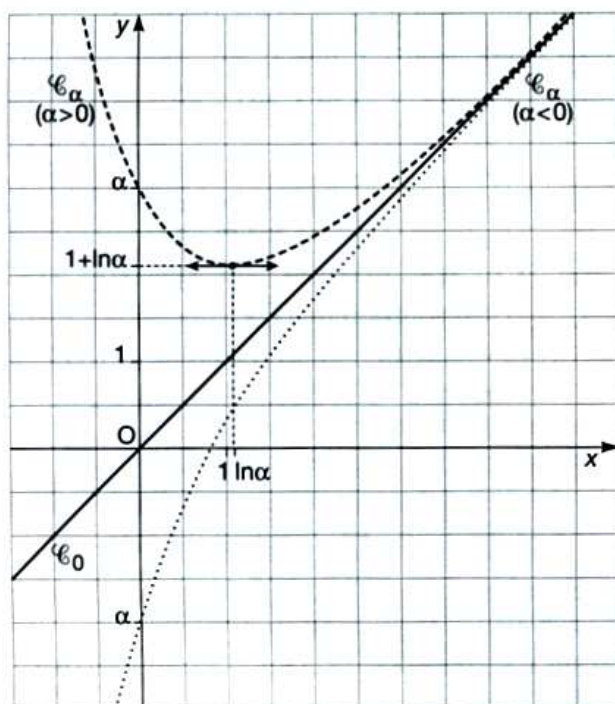
• $f_0 : x \mapsto x$;

• $\alpha < 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		+	
f_α	$-\infty$	α	$+\infty$

• $\alpha > 0$:

x	$-\infty$	$\ln \alpha$	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	-	0	+
f_α	$+\infty$	$1 + \ln \alpha$	$+\infty$



b) Le point d'abscisse -1 a pour ordonnée αe^{-1} et $f'(-1) = -\alpha e^{-1} + 1$, donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation :

$y - \alpha e^{-1} + 1 = (1 - \alpha e^{-1})(x + 1)$ ou $y = (1 - \alpha e^{-1})x$, donc elle passe par l'origine.

c) Au point $(x_0; \alpha e^{-x_0} + x_0)$, $f'_\alpha(x_0) = -\alpha e^{-x_0} + 1$. La tangente en ce point a pour équation :

$$y - \alpha e^{-x_0} - x_0 = (1 - \alpha e^{-x_0})(x - x_0),$$

ou encore $y = (1 - \alpha e^{-x_0})x + \alpha e^{-x_0}(1 + x_0)$ [1].

L'intersection de cette tangente et de $\mathcal{C}_0$, d'équation

$y = x$, est donnée par $\alpha e^{-x_0}(1 + x_0 - x) = 0$ et $x = 1 + x_0$.

Donc, pour x_0 donné, les tangentes en x_0 à $\mathcal{C}_\alpha$ passent par le point de coordonnées $(1 + x_0; 1 + x_0)$.

83 • 1. a) S'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f(x_0)f'(x_0) = 0$.

Ce qui est impossible donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

b) $g'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x) = 0$.

c) $g(x) = k$ avec $g(0) = [f(0)]^2 = 16$, donc $g(x) = 16$ pour tout réel x .

d) D'après la question précédente :

$$f(-x) = \frac{16}{f(x)} \quad \text{d'où} \quad f'(x) = \frac{f(x)}{16}$$

et f est solution de (E) avec $f(0) = -4$.

2. $\varphi(x) = \lambda e^{\frac{1}{16}x}$, $\varphi(0) = \lambda = -4$ donc $\varphi(x) = -4e^{\frac{1}{16}x}$. Cette fonction est la seule fonction vérifiant les conditions ($\mathcal{C}$).

84 • 1. $g'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$; or, $\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} + \frac{2}{f(x)} = 1$, donc :
 $2g - g' = 1$ [1].

2. On détermine g suivant le principe des exercices 79 et 80 :

$$g(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad f(x) = \frac{2}{2ke^{2x} + 1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

L'exponentielle dans les autres sciences

85 1. a) $I(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

b) $I(0) = 0$ donc $K = -\frac{E}{R}$ et $I(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{E}{R}$.

86 1. a) $g(t) = Ke^{\frac{1}{4}t}$.

b) $g(0) = K = 1$ d'où $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c) $g(t) \geq 3$ équivaut à $e^{\frac{1}{4}t} > 3$ soit $t > 5$ années.

2. a) $h' = \frac{-u'}{u}$ et $u = \frac{1}{h}$ donc $u' = \frac{-h'}{h^2}$.

u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si :

$$h(0) = 1 \text{ et } \frac{-h'(t)}{h^2(t)} = \frac{1}{4h(t)} - \frac{1}{12h^2(t)}$$

soit $h(0) = 0$, $h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}$.

b) $h(t) = Ke^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$.

$h(0) = 1$ d'où $K = \frac{2}{3}$ et $h(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$

donc $u(t) = \frac{3}{2e^{-\frac{1}{4}t} + 1}$.

c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 3$.

87 1. a) f est paire, donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie de sa courbe représentative.

b) $f'(x) = \frac{1}{41} \left(e^{\frac{x}{41}} - e^{-\frac{x}{41}} \right) > 0$ pour $x > 0$.

x	0	180
f	2	$\approx 80,67$

2. AB a pour hauteur approximativement 80,67 m.

88 • A. 1. a) $f'(x) = 10 \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}$.

En posant $g(x) = e^x + 1 - xe^x$

$$f'(x) = 10 \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

b) $g'(x) = -xe^x$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			2	$-\infty$

Il existe une unique de $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ avec $1,2 < \alpha < 1,3$.

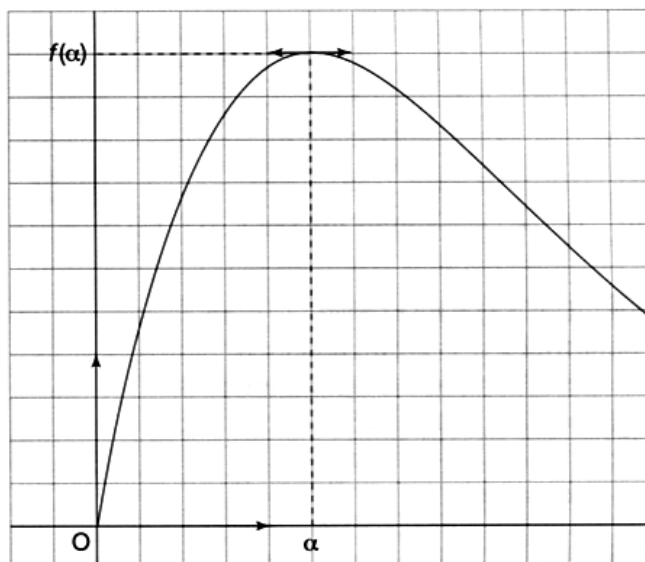
c)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

$g(\alpha) = 0$ donc $e^\alpha(1 - \alpha) = -1$

donc $f(\alpha) = \frac{10\alpha}{1 - \frac{1}{1-\alpha}} = \frac{10\alpha(1-\alpha)}{-\alpha} = 10(\alpha - 1)$.

2.



Prendre toutes les initiatives

89 • $n \in \mathcal{D} \Leftrightarrow e^x \equiv x - 2 \neq 0$.

Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - x - 2$.
 $\varphi'(x) = e^x - 1$ et

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	
$\varphi(x)$	$+\infty$		-1		$+\infty$

Il existe deux réels α et β et deux seulement tels que $\varphi(x) = 0$ avec $-1,9 < \alpha < -1,8$ et $1,1 < \beta < 1,2$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\alpha; \beta\}$ et $f(x) < 0$ pour tout x de $]\alpha; \beta[$.

90 • $f'(x) = e^x(2 - x)$.

Existe-t-il x tel que $e^x(2 - x) = 2$.

Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = e^x(2 - x) \quad \varphi'(x) = e^x(1 - x).$$

x	$-\infty$	0	1	β	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	
$\varphi(x)$	0	2	e	2	$-\infty$

Il existe donc deux valeurs de x pour lesquelles $\varphi(x) = 2$ soit $\alpha = 0$ et $\beta \in]1,6; 1,7[$. Ainsi il existe deux tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ de coefficient directeur 2.

91 • $f'(x) = (2x + 3)e^{2x}$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2e^3}$	$+\infty$

Or $-\frac{1}{2e^3} > -\frac{1}{16}$ donc l'équation $f(x) = -\frac{1}{16}$ n'a pas de solution.

92 • La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1 donc

$$u_n = 1 + n \text{ donc } v_n = e^{-1}e^{-n} \text{ avec } v_0 = e^{-1}.$$

$$v_0 + \dots + v_n = \frac{e^{-1}(1 - e^{-n-1})}{1 - e^{-1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1})^{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + \dots + v_n) = \frac{1}{e-1}.$$

93 • 1. $v'_1(x) = u'(x) e^{u(x)}$.

Or pour tout $x \in]-\infty; a[$, $u'(x) < 0$

donc v_1 est décroissante sur cet intervalle.

2. $v'_2(x) = (u'(x) + u(x))e^x$.

Pour $x > b$, $u'(x) > 0$ et $u(x) > 0$.

Donc v_2 est croissante sur $]b; +\infty[$.

94 • $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1}$ si $x < 0$.

Il en résulte que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ et

pour tout $x < 0$, $f'(x) = \frac{-2 - e^{-x}}{(e^x + 1)^2}$ donc $f'(0)$ à droite

vaut $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}$ à gauche donc f n'est pas dérivable en $x = 0$.

95 • On doit avoir $f(1) = e = a + b$.

D'autre part :

si $x \leq 1$, $f'(x) = (x+1)e^x$

et si $x > 1$, $f'(x) = a$.

Il faut donc que $f'(1) = 2e = a$

soit $a = 2e$ et $b = -e$

donc si $x \leq 1$, $f(x) = e(2x+1)$.

Dans ce cas f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

96 • La tangente en M a pour équation

$$y = ae^{ax_0}(x - x_0) + e^{ax_0}.$$

Donc T a pour coordonnée $(x_0 - \frac{1}{a}; 0)$ et M a pour coordonnées $(x_0; 0)$ donc $\overline{TH}$ a pour coordonnées

$(\frac{1}{a}; 0)$. Ainsi $TH = \frac{1}{|a|}$ ne dépend pas de la position de M sur $\mathcal{C}$.

Problèmes

(page 112)

97 A. 1. a) d a pour équation $y = x + 1$

donc $m = p = 1$ et $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$.

b) Le point A(0; 1) est centre de symétrie donc

$$f(x) + f(-x) = 2. \quad (1)$$

c) De (1) il vient :

$$x + 1 + \varphi(x) + 1 - x + \varphi(-x) = 2$$

donc $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ et la fonction φ est impaire.

2. $\varphi(-x) = (-ax + b)e^{-x^2}$.

Pour tout réel x on a :

$$(ax + b + ax + b)e^{-x^2} = 0 \text{ donc } b = 0.$$

De plus $f'(x) = 1 + \varphi'(x)$ or $f'(0) = (1 - e)$.

Donc $\varphi'(0) = -e$.

De plus $\varphi'(x) = a(1 - 2x^2)e^{-x^2}$ soit $a = -e$.

B. 1. a) $f'(x) = 1 - (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$

$f'(0) = 1 - e$ et $f(0) = 1$

donc la tangente en $x = 0$ a pour équation

$$y = (1 - 2)x + 1.$$

b) $f(x) - (1 - 2)x - 1 = 1 + x - xe^{1-x^2} - x + ex - 1$

$$f(x) - (1 - 2)x - 1 = ex[1 - e^{-x^2}].$$

$1 - e^{-x^2} > 0$ pour tout réel x donc si $x < 0$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T et si $x > 0$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

2. a) $f''(x) = 2x(3 - 2x^2)e^{1-x^2}$.

Sur $\mathbb{R}$, $f''(x)$ est donc du signe de $2x(3 - 2x^2)$.

Le tableau de variation sur $[0; 1]$ est :

x	0	α	1
$f''(x)$		+	2
$f'(x)$	$1 - e$	0	2

b) Sur $[0; 1]$, $f'(0)f'(1) < 0$, il existe donc α unique tel que $f'(\alpha) = 0$ (car f' est strictement croissante sur $[0; 1]$. $f'(0,51) \approx -0,005$, $f'(0,52) > 0$ d'où $0,51 < \alpha < 0,52$.

c) $1 - (1 - 2\alpha^2)e^{1-\alpha^2} = 0$.

$$\text{Donc } f(\alpha) = 1 + \alpha - \alpha e^{1-\alpha^2} = 1 + \alpha - \frac{\alpha}{1 - 2\alpha^2}$$

$$\text{soit } f(\alpha) = 1 - \frac{2\alpha^3}{1 - 2\alpha^2}.$$

D'où ce minimum relatif a pour coordonnées

$$\left(\alpha; \frac{1 - 2\alpha^2 - 2\alpha^3}{1 - 2\alpha^2} \right).$$

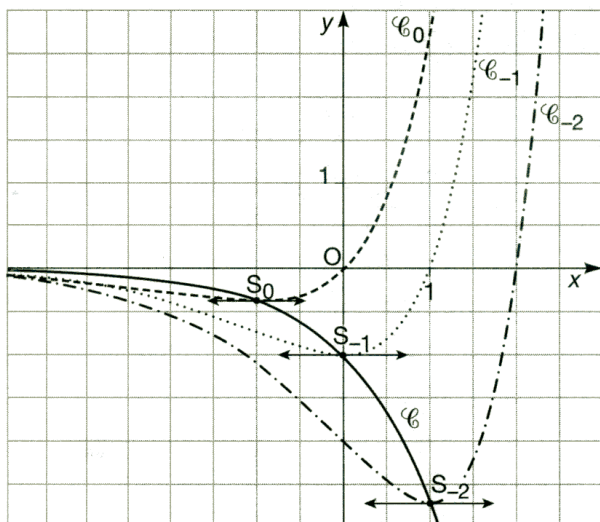
98 • Partie A. 1. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty; f'_m(x) = (x + m + 1)e^x;$$

x	$-\infty$	$-(m+1)$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
f_m	0	$-e^{-(m+1)}$	$+\infty$

2. a) S_m a pour coordonnées $(-m-1; -e^{-(m+1)})$.
b) S_m appartient à la courbe d'équation $y = -e^x$. De plus m décrit $\mathbb{R}$, donc x décrit $\mathbb{R}$. Il en résulte que le lieu $\mathcal{C}$ de S_m est la courbe d'équation $y = -e^x$.

3.



4. $M(a; b)$ appartient à $\mathcal{C}_m$ équivaut à $be^{-a} = a + m$, donc $m = be^{-a} - a$. Par M , il passe une courbe $\mathcal{C}_m$ et une seule.

Partie B. 1. M_m a pour coordonnées $(x_0; (x_0 + m)e^{x_0})$ et $f'_m(x_0) = (x_0 + m + 1)e^{x_0}$. Donc T_m a pour équation : $y = (x_0 + m + 1)e^{x_0}(x - x_0) + (x_0 + m)e^{x_0}$, ou encore $y = e^{x_0}[(x_0 + 1)x - x_0^2 + m(x - x_0 + 1)]$.

2. D'après l'équation précédente, T_m passe par A de coordonnées $(x_0 - 1; -e^{x_0})$.

Partie C. 1. $M_\alpha(x; (x + \alpha)e^x)$, $M_\beta(x; (x + \beta)e^x)$, $M_\gamma(x; (x + \gamma)e^x)$.

Donc $\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}$ a pour coordonnées $(0; (\alpha - \beta)e^x)$ et $\overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}$ a pour coordonnées $(0; (\alpha - \gamma)e^x)$. Donc $\overrightarrow{M_\beta M_\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} \overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}$.

2. a) N est le barycentre de $(M_\beta, 1)$ et $(M_\gamma, -k)$; donc N a pour coordonnées $(x; (x + \frac{\beta - k\gamma}{1 - k})e^x)$.

Ainsi N décrit une courbe $\mathcal{C}_\alpha$ avec $\alpha = \frac{\beta - k\gamma}{1 - k}$.

b) Pour $k = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -2$; il vient $\alpha = \frac{2}{2} = 1$. Donc E_{-1} est $\mathcal{C}_1$.

99 A. 1. a) $M(x_0; y_0)$ appartient à $\mathcal{C}_m$ équivaut à :

$$y_0 + 4x_0^2 = me^{2x_0},$$

donc $m = e^{-2x_0}(y_0 + 4x_0^2)$. Ainsi par $M(x_0; y_0)$ donné passe une courbe $\mathcal{C}_m$ et une seule.

b) $y = me^{2a} - 4a^2$, donc $m \mapsto me^{2a} - 4a^2$ est une fonction croissante de m .

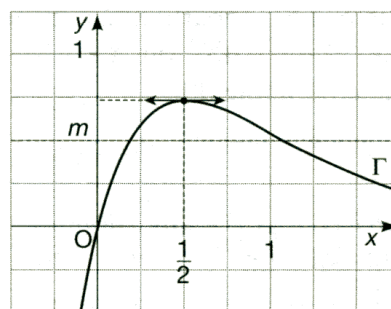
2. a) $f'_m(x) = 2me^{2x} - 8x = 2e^{2x}(m - 4xe^{-2x})$.

b) Il résulte de l'écriture précédente que $f'_m(x)$ a le même signe que $m - 4xe^{-2x}$.

3. a) • $\gamma'(x) = -8xe^{-2x} + 4e^{-2x} = 4e^{-2x}(1 - 2x)$;

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = -\infty$;

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\gamma'(x)$		+	0	-
γ	$-\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0



b) $f'_m(x)$ a le même signe que $m - \gamma(x)$, donc :

• si $m > \frac{2}{e}$: pour tout réel x , $f'_m(x) > 0$;

• si $m = \frac{2}{e}$: $f'_m(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$,

et $f'_m\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

• si $0 < m < \frac{2}{e}$: $f'_m(x)$ s'annule pour deux valeurs α et β et $f'_m(x) > 0$ pour $x < \alpha$ ou $x > \beta$;

• si $m = 0$: $f'_m(x) > 0$ pour $x < 0$, et $f'_m(0) = 0$;

• si $m < 0$: $f'_m(x)$ s'annule pour une valeur $\alpha < 0$ et $f'_m(x) > 0$ pour $x < \alpha$.

4. • $m < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'_m(x)$		+	-
f_m	$-\infty$	$f_m(\alpha)$	$-\infty$

• $m = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		+	-
f_m	$-\infty$	0	$-\infty$

• $0 < m < \frac{2}{e}$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$		
$f'_m(x)$		+	0	-	0	+
f_m	$-\infty$	$f_m(\alpha)$	$f_m(\beta)$	$+\infty$		

• $m = \frac{2}{e}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$+$	0	$+$
f_m	$-\infty$	1	$+\infty$

• $m > \frac{2}{e}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		+	
f_m	$-\infty$		$+\infty$

B. 1. a) $f'_m(X) = 0$ donc $4Xe^{-2X} = m$
et $Y = me^{2X} - 4X^2$.

b) Il en résulte que S_m appartient à la courbe d'équation : $Y = 4Xe^{-2X}e^{2X} - 4X^2$ ou $Y = 4X - 4X^2$ (équation d'une parabole $\mathcal{P}$).

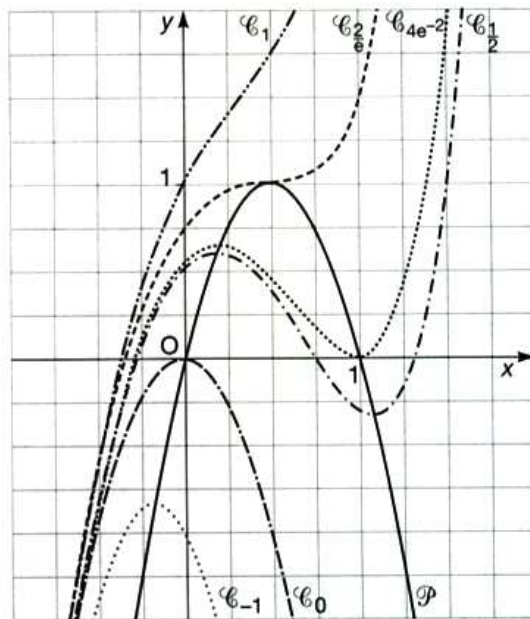
2. Pour tout réel X , $m \leq \frac{2}{e}$, donc $(\frac{1}{2}; 1)$ n'est pas un point S_m .

3. a) $K_m(0; m)$ et $f'_m(0) = 2m$, donc la tangente T_m en K_m a pour équation $y - m = 2mx$ ou encore $y = m(2x + 1)$.

Donc pour tout réel m , T_m passe par le point $A(-\frac{1}{2}; 0)$.

b) • Voir figure ci-contre.

• $A(1; 0)$ appartient à $\mathcal{C}_m$ équivaut à $4 = me^2$, donc $m = 4e^{-2}$ et $f_{4e^{-2}}(x) = 4e^{2(x-1)} - 4x^2$.



C'est nouveau au bac (page 114)

100 1. a) Vrai, en effet $f_1(x) - f_2(x) = xe^{-x}(1-x)$ et pour tout réel $x \in [0; 1]$ $1-x \geq 0$.

Donc $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$.

b) Faux. En effet $f_1(x) = f_2(x)$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$. Donc il n'y a pas de troisième point commun.

2. a) Vrai car $f'_1(x) = (1-x)e^{-x}$ et $f'_1(x) + f_1(x) = e^{-x}$.

b) Vrai.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0	-
$f_1(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

Pour tout réel x , $f_1(x) \leq \frac{1}{e}$ donc $f_1(x) \leq \frac{1}{2}$.

c) Vrai car $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{e}$ d'où deux solutions distinctes.

3. a) Vrai. La tangente en M à $\mathcal{C}_1$ a pour équation

$$y = (1-m)e^{-m}(x-m) + me^{-m}.$$

Elle coupe l'axe des ordonnées en N de coordonnées $(0; m^2e^{-m})$. Or P a pour coordonnées $(m; m^2e^{-m})$ donc N et P ont la même ordonnée.

b) Vrai. En effet : La tangente en un point quelconque passe par $H(0; h)$ si et seulement si $m^2e^{-m} = h$ donc si l'équation $f_2(m) = h$ a des solutions.

Le tableau de variation de f_2 est :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f_2'(x)$	-	0	+	0	-		
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

Donc si $h \in]0; \frac{4}{e^2}]$, il existe trois réels pour lesquels $f_2(x) = h$ d'où trois tangentes à $\mathcal{C}_1$.

101 1. Vrai. En effet en posant $\varphi(x) = e^x - ax - b$ $\varphi'(x) = e^x - a > 0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Il existe donc α unique tel que $\varphi(\alpha) = 0$ donc $e^x = ax + b$ a une solution unique.

2. Vrai. En effet $f'(x) = [u(x) + u'(x)]e^x$. Or $u(x) \geq 0$ et $u'(x) \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ et f est strictement croissante.

3. Faux. En effet, $\frac{\sqrt{x}e^{1-x}}{x} = \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

4. Faux. En effet $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

5. Faux. En effet l'équation $y' + y = 0$ a pour solution $\varphi(x) = ke^{-x}$ si $\varphi(0) = 2$ alors $k = 2$ et $\varphi(x) = 2e^{-x}$.

102 2. $f(x) = ce^{ax} + 20$.

$f(0) = 70$ et $f(5) = 60$ donc $70 = c + 20$

$60 = ce^{5a} + 20$.

Il résulte que $c = 50$ et $e^{5a} = \frac{4}{5}$.

3. $f(30) = 50e^{30a} + 20 = 50(e^{5a})^6 + 20$

soit $f(30) = 50\left(\frac{4}{5}\right)^6 + 20 \approx 33,11$.

Travaux dirigés (page 125)

TD 1

1. $f(x) = \ln x + 1 - x$ $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.

x	0	1	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Il résulte du tableau que $f(x) \leq 0$

donc $\ln x \leq x - 1$.

(1)

2. a) On pose $x = 1 + t$ avec $t > -1$ alors (1) devient : $\ln(1+t) \leq t$.

b) On pose $x = \frac{1}{1+t}$ avec $t > -1$ alors (1) devient

$-\ln(1+t) \leq \frac{1}{1+t} - 1$ d'où $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$. (2)

3. 1. Si $x = \frac{1}{p}$, à partir de (3)

$\frac{1}{1+p} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$ (4)

2. a) $\begin{cases} \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+2} \leq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+n} \leq \ln\left(\frac{n+n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2n-1} \end{cases}$ par addition

$u_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{n+n}{2n-1}\right) \leq u_n + \frac{1}{2n}$.

soit $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.

b) $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n < \ln 2$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$.

TD 2

1. En posant $\varphi(x) = x - \ln x$ $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$		1	

Pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \geq 1$ donc $x - \ln x \neq 0$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

b) $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \ln x} = 0$,
donc g est dérivable en zéro et $g'(0) = 0$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ car $g(x) = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}}$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

3. a) $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$.

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	0	+	-
$g(x)$	0	$\frac{e}{e-1}$	1

b) D'après le tableau de variation les coordonnées de A sont $\left(e; \frac{e}{e-1}\right)$.

2. 1. u_n est la somme des termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{\ln a}{a}$.

2. a) Pour tout $x > 1$,

$0 \leq \frac{x}{x - \ln x} \leq \frac{e}{e-1}$

ou encore $\frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{e}}$ donc $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$

et comme $a > 1$, $0 \leq \frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{e}$.

b) $u_n = \frac{1 - \left(\frac{\ln a}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\ln a}{a}}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln a}{a}\right)^{n+1} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = g(a)$.

TD 3

1. $f(1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$.

2. a, b) Pour tout $y > 0$

$g'(y) = xf'(xy) = f'(y)$.

c) Pour tout $x > 0$ et $y = 1$

$$g'(1) = xf'(x) = f'(1) = k.$$

3. a) $f'(x) = \frac{k}{x}$ d'où $xf'(x) = k$, donc $x \mapsto k \ln x$ est solution de (3).

b) $f(x) = h(x) + k \ln x$.

f est solution de (3) si et seulement si

$$x \left[h'(x) + \frac{k}{x} \right] = k$$

soit $h'(x) = 0$.

c) $h(x) = C$ donc

$$f(x) = k \ln x + C.$$

$$\begin{aligned} 4. f(xy) &= k \ln(xy) + C = k \ln x + k \ln y + C \\ &= k \ln x + C + k \ln y + C. \end{aligned}$$

Il en résulte que $C = 0$ d'où la conclusion.

TD 5

1. a) $\varphi(x) = x + e^{-x}$ $\varphi'(x) = 1 - e^{-x}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$

Il résulte du tableau que pour tout réel x , $x + e^{-x} \geq 1$.

b) Il est évident que $x + e^{-x} > 0$ donc f définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f(x) = \ln[e^{-x}(1 + xe^x)] = -x + \ln(1 + xe^x)$ (1) pour tout réel x .

b) Pour tout $x > 0$

$$f(x) = \ln x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \ln x + \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{x} \right). \quad (2)$$

c) D'après (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et d'après (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. a) D'après (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + xe^x) = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

b) D'après (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$ donc la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

4. $\varphi(x) = 1 + xe^x$ $x \in]-\infty; 0]$.

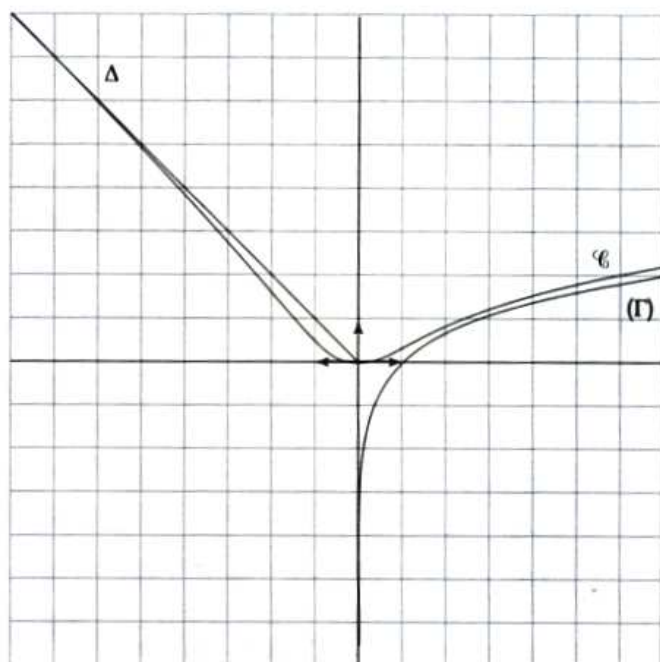
a) $\varphi'(x) = e^x(x + 1)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	$\nearrow$

Il résulte du tableau que pour tout $x < 0$,

$\varphi(x) \in]0; 1[$.

b) $f(x) + x = \ln(1 + e^x)$ or $\varphi(x) \in]0; 1[$ donc $\ln(1 + e^x) < 0$ et $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ .



TD 4

1. $\log 1 = 0$;

$$\log 10 = 1;$$

$$\log 100 = 2;$$

$$\log 1\,000 = 3;$$

$$\log 10\,000 = 4.$$

$$2. \frac{1}{\ln 10} \approx 0,43, \text{ donc } 0 < k < 1.$$

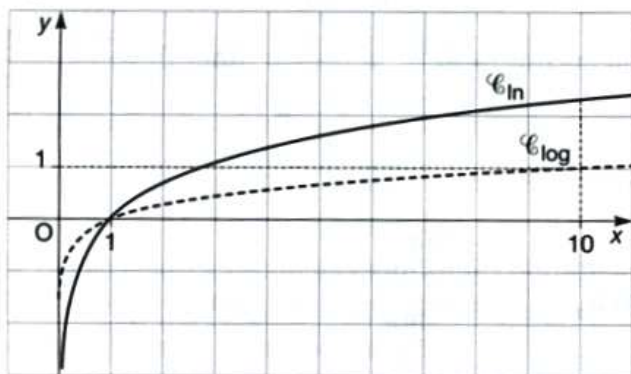
3. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$,

$$\log(xy) = k \ln(xy) = k \ln x + k \ln y,$$

donc $\log(xy) = \log x + \log y$.

Il en va de même pour les autres résultats.

4.



2. 1. a) Lorsque la concentration décuple, le pH diminue de 1.

$$b) \log(\text{H}_3\text{O}^+) = -6,3 \text{ et } [\text{H}_3\text{O}^+] \approx 50 \times 10^{-7}.$$

$$2. M = \log(50,01 \times 10^6) \approx 7,7.$$

3. L'intensité d'une conversation normale est 50 décibels.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 129)

1. Les fonctions ln et exp

1 $a = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$; $b = \frac{8e^2}{4e^2} = 2e$; $c = \frac{8}{8} = 1$.

2 Pour tout $x > 1$ $\ln(x-1) + \ln x = \ln(x^2-x)$ donc $e^{\ln(x^2-x)} = x^2 - x$.

3 Corrigé dans le manuel.

4 a) $x \neq 0$; b) $x < 1$; c) $x > 3$.
d) $x \neq 0$ et $x > -1$. e) $x > 0$ et $x \neq 1$.

5 a) $x \in]-\infty ; -4[\cup]0 ; +\infty[$.
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$.
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.
d) $x \in]2 ; 3[$.

6 a) $x > 0$; b) $x \neq 0$; c) $x > -1$; d) $x < -1$ ou $x > 1$.

2. Résolution d'équations et d'inéquations

7 Corrigé dans le manuel.

8 a) $e^{x+2} = 3$ équivaut à $x+2 = \ln 3$
d'où $x = \ln 3 - 2$.

b) $x \neq -1$ et $\frac{x}{x+1} = \ln 2$ d'où $x = \frac{\ln 2}{1 - \ln 2}$.

c) $e^x > 0$ donc $e^x = 4$ $x = \ln 4$.

d) $e^x + 1 = e^2$ d'où $x = \ln(e^2 - 1)$.

9 a) $x \in]0 ; e[$.

b) $x \in [e^2 ; +\infty[$.

c) $x \in [e^{-1} ; e^2]$.

d) $x \in \left] \frac{e^{-1}+1}{2} ; +\infty \right[$ car $\frac{e^{-1}+1}{2} > \frac{1}{2}$.

10 a) $x \in]-\infty ; 1 + \ln 2[$.

b) $x < \frac{1}{\ln 3 - 1}$ et $x \neq 0$.

c) $x \in [-\ln 2 ; \ln 2]$.

d) $x \in]-\infty ; \ln 4]$.

11 a) x appartient à $]2 ; +\infty[$ et $x^2 - 4 = 3x - 4$ d'où $\mathcal{S} = \{3\}$.

b) $x < -2$ et $x^2 + 3x - 4 = 0$ d'où $\mathcal{S} = \{-4\}$.

12 a) $\varphi = \{4\}$.

b) L'équation n'a pas de solution.

13 Corrigé dans le manuel.

3. Logarithme d'un produit

14 Corrigé dans le manuel.

15 $a = \ln 2 + 2 \ln 5$

$b = 4 \ln 2 - 2 \ln 5$

$c = \ln 2 + 3 \ln 5$.

16 $\ln(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = \ln 1 = 0$.

17 a) $x = \ln 5$ et $y = \ln 6$ donc $y > x$.

b) $x = \ln 9$ et $y = \ln 8$ donc $x > y$.

18 $a = \ln 7 + 4 \ln 3 - 3 \ln 2 - 2 \ln 3 - \ln 7 + 3 \ln 2 - 3 \ln 3$ d'où $a = -\ln 3$.

$b = \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{3}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{3}{2} \ln 3$ d'où $b = \ln 5$.

19 a) Pour $x > 0$, $\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$.

b) $\ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) = \ln 1 = 0$.

20 a) $x \in]1 ; +\infty[$.

b) $x \in]1 ; +\infty[$.

21 a) $n \ln 2 \leq \ln 100$ d'où $0 \leq n \leq 6$.

b) $-n \ln 3 \leq -2 \ln 10$ d'où $n \geq 5$.

c) $\ln(0,2) \geq n \ln \frac{2}{5}$ d'où $n \geq 2$.

d) $n \ln\left(1 + \frac{3}{100}\right) \geq \ln 2$ d'où $n \geq 24$.

22 a) $x > 0$ et $x^2 = 2x(x+4)$ d'où $x(x+8) = 0$.

Donc l'équation n'a pas de solution.

b) $x > 0$ et $x^2 = 2x^2 + 8x$ d'où $x(x+8) = 0$ donc l'équation n'a pas de solution.

23 Corrigé dans le manuel.

24 a) $x > 6$ et $x^2 - 5x - 14 = 0$ d'où $\mathcal{S} = \{7\}$.

b) $x > 2$ et $(3x-1)(x-1) = (x-2)^2$

soit $x > 2$ et $2x^2 - 3 = 0$.

Donc l'équation n'a pas de solution.

25 a) $1 < x < 5$ et $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ d'où $\mathcal{S} = \{2 ; 4\}$.

b) $x > \frac{1}{3}$ et $3x(x-1) \leq 0$ d'où $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{3} ; 1 \right]$.

26 a) $x > 1$ et $3x^2 - x - 2 \geq 6x + 4$

$x > 1$ et $3x^2 - 7x - 6 \geq 0$

d'où $\mathcal{S} =]3; +\infty[$.

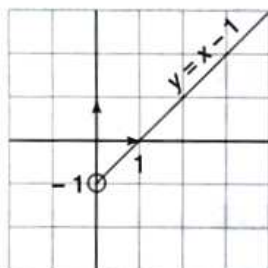
b) $x > \frac{2}{3}$ et $x^3 - 3x + 2 > 0$ soit $x > \frac{2}{3}$ et

$(x-1)^2(x+2) > 0$

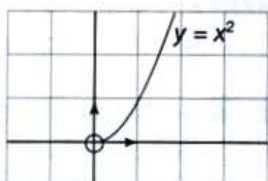
d'où $\mathcal{S} = \left] \frac{2}{3}; 1 \right] \cup]1; +\infty[$.

27 Corrigé dans le manuel.

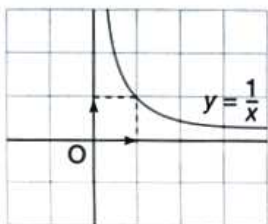
28 a) $x > 0; y > -1$ et $y = x - 1$.



b) $x > 0; y > 0; y = x^2$.



c) $x > 0, y > 0$ et $y = \frac{1}{x}$.



4. Étude la fonction ln

29 Corrigé dans le manuel.

30 1. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$.

2.

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geq 1$ donc $f(x) > 0$.

31 1. Sur la figure on peut lire que : $f(1) = 1$; $f(2) = 2 \ln 2$ et $f'(2) = 0$.

Or $f'(x) = a + \frac{c}{x}$ donc $a + b = 1$; $2a + c = 0$;

$2a + b + c \ln 2 = 2 \ln 2$.

Or $b = 1 - a$ d'où $a + c \ln 2 = 2 \ln 2 - 1$.

2. Il résulte de la question précédente que : $c = 2$; $a = -1$ et $b = 2$.

D'où $f(x) = -x + 2 + 2 \ln x$.

32 1. Pour tout $x > 0$ $f'(x) = a + \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

2. a) La tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 3 donc $f'(1) = 3$ ou $a + 1 = 3$ et $a = 2$.

b) $A(1; 0)$ est un point de $\mathcal{C}$ donc $f(1) = 1$ soit $0 = a + b$ d'où $b = -2$.

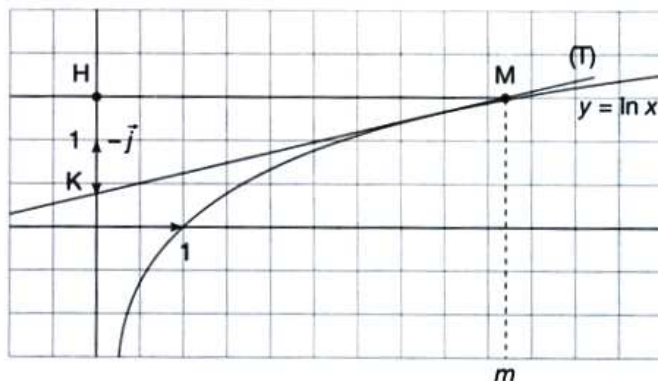
3. Il résulte que $f(2) = 2x - 2 + \frac{1}{x} \ln x$.

33 1. (T) a pour équation $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$.

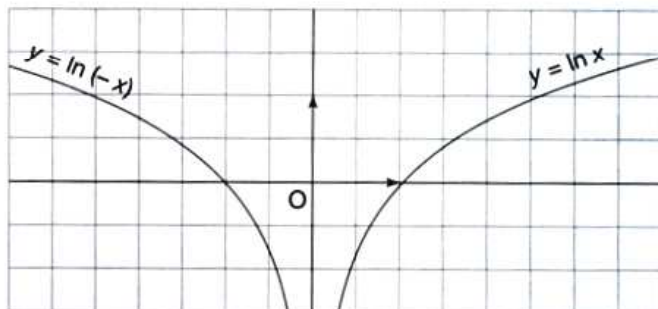
2. a) Si $x = 0$ alors $y = \ln m - 1$ d'où le résultat.

b) H a pour coordonnées $(0; \ln m)$ donc $\overline{KH}$ a pour coordonnées $(0; 1)$ et $\overline{KH} = \vec{j}$.

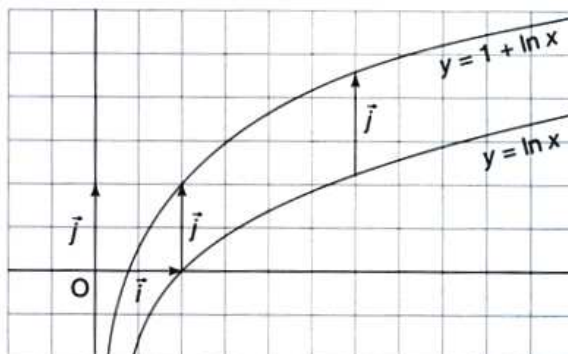
3. D'où la construction de la tangente en M.



34 a) $x \mapsto \ln(-x)$ avec $x < 0$ a pour courbe représentative la courbe symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées.



b) $x \mapsto 1 + \ln x$ a pour courbe représentative celle déduite de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\vec{j}$.



35 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. a) $S_n = \ln \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1} \right]$

donc $S_n = \ln \left(\frac{1}{n+1} \right) = -\ln(n+1)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$.

5. Des limites importantes

36 Corrigé dans le manuel.

37 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

38 a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. b) $f(x) = x + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

39 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\ln 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 3$.

40 a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

41 a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

42 Corrigé dans le manuel.

43 $f(x) - x + 1 = 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$.

D'où le résultat.

44 $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = (x - x \ln x)$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = 0$.

Il en résulte que la fonction f est dérivable en $x = 0$.

45 $f(x)$ est définie pour $\frac{x+1}{x} > 0$ soit $x < -1$ ou $x > 0$. Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ sont asymptotes à $\mathcal{C}$. En effet $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ car $f(x) = x - \ln(x+1) + \ln x$.

De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} \\ x \rightarrow -\infty}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ donc la droite d'équa-

tion $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$.

46 1. $\ln(3 + e^x) = \ln e^x(1 + 3e^{-x})$
 $= \ln e^x + \ln(1 + 3e^{-x})$

d'où $f(x) = x + \ln(1 + 3e^{-x})$. (1)

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 3$ et d'après (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$
donc $y = \ln 3$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.

6. Dérivée d'une fonction $\ln \circ u$

47 1. Sur $]0 ; +\infty[$ u est dérivable et strictement positif. Donc $f(x) = x^2 \ln u(x)$ est dérivable sur cet intervalle.

2. a) En $x = 0$ $u(x) = 0$ donc pas de réponse.

b) $t(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = x \ln x - x \ln(x+1)$

$\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = 0$ donc f est dérivable en $x = 0$.

48 Corrigé dans le manuel.

49 a) $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$.

b) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}$.

50 a) $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

b) $f'(x) = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$.

51 a) $f'(x) = e^{-x} \left[-\ln x + \frac{1}{x} \right]$.

b) $f'(x) = (1 + \ln x) e^{x \ln x}$.

52 a) $f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

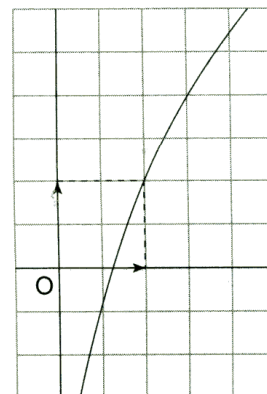
b) $f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$.

7. Études des fonctions

53 a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

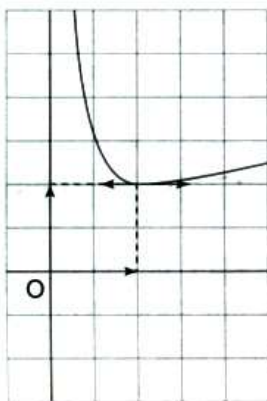
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

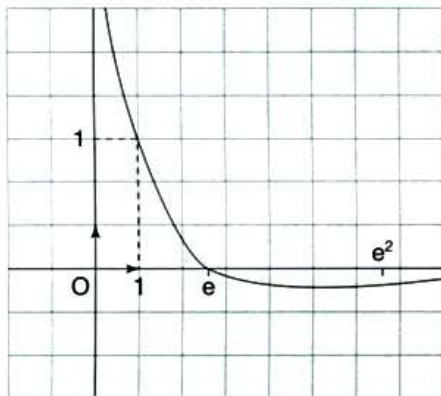
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$

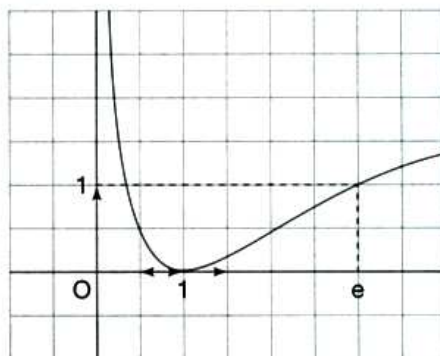
x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$-e^{-2}$	0



d) $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln x.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



54 Corrigé dans le manuel.

55 1. $g'(x) = e^x[1+x]$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	1	$1 - \frac{1}{e} > 0$	$+\infty$

Donc pour tout réel x , $y(x) > 0$.

2. a) $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} g(x)$.

b) Comme $g(x) > 0$ pour tout réel x , $f'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

c) Pour tout m réel, $f(x) = 0$ pour deux valeurs de x , α et β avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.

Apprendre à chercher

(page 133)

56 Série harmonique et exponentielle

Les outils :

- La fonction exponentielle.

Les objectifs :

- Savoir étudier la convergence d'une suite.
- Savoir conjecturer un résultat.

1. Non.

2. $e^{u_n} = e^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = e \times e^{\frac{1}{2}} \times \dots \times e^{\frac{1}{n}}$ [1].

3. a) $f(x) = e^x - x - 1$; $f'(x) = e^x - 1$;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f		1	

Il résulte que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

b) Donc pour tout $k \geq 1$, $e^{\frac{1}{k}} \geq \frac{k+1}{k}$.

c) Donc $e^{u_n} \geq \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n}$,

donc $e^{u_n} \geq n + 1$ [2].

4. Il résulte de la question précédente que $u_n \geq \ln(n+1)$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

57 Tangentes communes à deux courbes

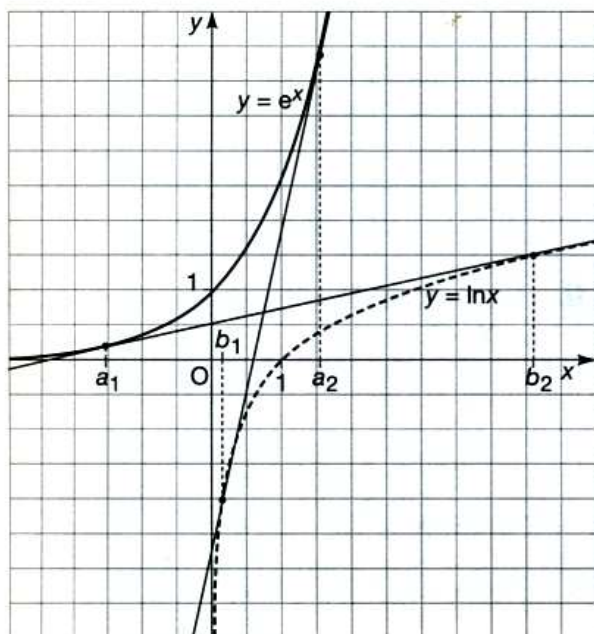
Les outils :

- Étude d'une fonction.
- Équations de droites.

Les objectifs :

- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir utiliser un tableau de variations.

1.



2. a) • Tangente T_2 en $(b; \ln b)$: $y - \ln b = \frac{1}{b}(x - b)$,

d'où $\frac{1}{b}x - y - 1 + \ln b = 0$ [1].

• Tangente T_A en $(a; e^a)$: $y - e^a = e^a(x - a)$, d'où $e^a x - y + e^a(1 - a) = 0$ [2].

b) $T_1 = T_2$ équivaut à $b = e^{-a}$ et $e^a(1 - a) = -1 + \ln b$;

or, $\ln b = -a$, d'où $e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}$.

3. a) $f(x) = e^{-x} - \frac{x-1}{x+1}$.

Pour tout réel $x, x \neq -1$, $f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(x+1)^2} < 0$.

x	$-\infty$	a_1	-1	a_2	$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
f	$+\infty$	0	$+\infty$	0	-1

D'où l'existence de deux valeurs a_1 et a_2 telles que $f(a_1) = 0$ et $f(a_2) = 0$ avec $-1,6 < a_1 < -1,5$ et $1,5 < a_2 < 1,6$. Et $0,2 < b_1 < 0,3$ et $4,5 < b_2 < 4,9$.

58 Calculer avec les logarithmes

Les outils :

- Résolution d'une équation du second degré.
- Utilisation d'équations équivalentes.

Les objectifs :

- Savoir « passer » d'une équation à une équation équivalente.
- Savoir vérifier la cohérence d'un résultat.

1. a) $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2} \ln ab = \ln \sqrt{ab}$.

b) Il résulte que :

$\ln \left[\frac{1}{3}(a+b) \right] = \ln \sqrt{ab}$, d'où $a+b = 3\sqrt{ab}$.

Or, $a > 0$, $b > 0$, donc cette équation est équivalente à :

$$(a+b)^2 = 9ab \text{ ou } a^2 + b^2 - 7ab = 0 \quad [2].$$

2. En posant $k = \frac{a}{b}$ avec $k > 0$, $k^2 - 7k + 1 = 0$.

Donc $k > 0$ et $\left(k = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \text{ ou } k = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)$, donc :

$$\frac{a}{b} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

59

Les outils :

- Résolution d'un système.
- Résolution d'une équation du second degré.

Les objectifs :

- Savoir résoudre un système par « implication ».
- Savoir conduire une réciproque.

1. $xy = 4$ équivaut à $\ln x + \ln y = 2 \ln 2$.

2. a) $X + Y = 2 \ln 2$ et $X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2$ d'où

$$Y = 2 \ln 2 - X \text{ et } X^2 + X^2 - 4X \ln 2 + 4(\ln 2)^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2.$$

Soit : $Y = 2 \ln 2 - X$ et $4X^2 - 8X \ln 2 + 3(\ln 2)^2 = 0$. (1)

b) La résolution de (1) donne $X_1 = \ln \sqrt{2}$ et $X_2 = \ln(2\sqrt{2})$.

c) La question précédente avec $Y = 2 \ln 2 - X$ conduit au résultat.

3. À partir du système initial, on vérifie que les deux couples trouvés conviennent.

60 Problème d'existence

Les outils :

- Étude et représentation d'une fonction.

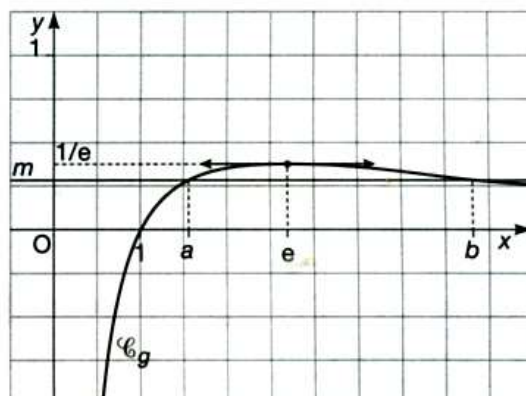
Les objectifs :

- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir utiliser une courbe et un tableau de variations.

1. a) Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, d'où le tableau de variations :

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
g	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

b) Courbe représentative :



c) m est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{e}\right]$. Il existe donc un réel unique a de $]1; e[$ et un réel unique b de $]e; +\infty[$ pour lesquels $g(a) = g(b) = m$.

$$\text{D'où } \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \text{ ou } \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}.$$

Pour progresser

(page 135)

Équations et inéquations

- 61** 1. a) $x \in \mathbb{R} - \{2; -2\}$
 $|x^2 - 4| = 1$ d'où $\mathcal{S} = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$.
 b) $x \in]-4; 2[\cup]2; +\infty[$.
 $|x - 2|(x + 4) = 8$.
 Si $x \in]-4; 2[$ $(2 - x)(x + 4) = 8$.
 $-x^2 - 2x = 0$ et $x = 0$ ou $x = -2$.
 Donc $\mathcal{S}_1 = \{0; -2\}$.
 Si $x > 2$, $(x - 2)(x + 4) = 8$ d'où $x^2 + 2x - 16 = 0$
 donc $x = -\sqrt{17} - 1$ ou $\sqrt{17} - 1$ et $\mathcal{S}_2 = \{\sqrt{17} - 1\}$.
 Donc $\mathcal{S} = \{-2; 0; \sqrt{17} - 1\}$.
 c) $x \in \mathbb{R} - \left(-\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ et $|2x + 3||x - 1| = x^2$.
 Si $x \in]-\frac{3}{2}; 1[$ $3x^2 + x - 3 = 0$
 soit $\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{-1 - \sqrt{37}}{6}; \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}\right\}$.
 Si $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]2; +\infty[$
 $x^2 + x - 3 = 0$ et $\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right\}$ donc
 $\mathcal{S} = \left\{\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{37}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}\right\}$.
62 a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ xy = 3 \end{cases}$
 donc $(x + y = 4 \text{ et } xy = 3)$ ou $(x + y = -4 \text{ et } xy = 3)$.
 Il en résulte que $\mathcal{S} = \{(1; 3); (3; 1)\}$.
 b) $x + y = 1$ et $3e^x - e^4e^{-x} - 2e^2 = 0$
 ou $x + y = 1$ et $3(e^x)^2 - 2e^2e^x - e^4 = 0$.
 Il en résulte que $e^x = e^2$ ou $e^x = -\frac{1}{3}e^2$ d'où $x = 2$ et
 $y = -1$ $\mathcal{S} = \{(2; -1)\}$.

- 63** 1. $\ln x = X$ et $X^2 - 2X - 3 = 0$
 soit $X = -1$ ou $X = 3$
 donc $x = e^{-1}$ ou $x = e^3$ $\mathcal{S} = \{e^{-1}; e^3\}$.
 2. $\mathcal{S} =]0; e^{-1}] \cup [e^3; +\infty[$.
64 a) $e^x = X$ $X^2 - 5X + 4 = 0$ $\mathcal{S} = \{0; \ln 4\}$.
 b) $e^{-x} = X$ et $X^2 - 5X + 6 = 0$.
 $X = 3$ ou $X = 2$ donc $\mathcal{S} = \{-\ln 3; -\ln 2\}$.

- 65** a) $\ln|x| = X$ et $X^2 - 2X - 3 > 0$
 $X < -1$ ou $X > 3$.

Soit $|x| < \frac{1}{e}$ ou $|x| > e^3$.

$$\mathcal{S} =]-\infty; -e^3[\cup]-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}[\cup]e^3; +\infty[.$$

- b) $e^x = X$ avec $3X^2 - 7X + 2 < 0$

$$\frac{1}{3} < X < 2 \text{ donc } x \in]-\ln 3; \ln 2[.$$

- 66** $\ln x = 3$ et $\ln y = 1$ d'où $\mathcal{S} = \{(e^3; e)\}$.

- 67** $x > 0, y > 0, \ln x = X, \ln y = Y$.
 $XY = -12$ et $X + Y = 1$

d'où

$(X = 4 \text{ et } Y = -3)$ ou $(X = -3 \text{ et } Y = 4)$ donc
 $\mathcal{S} = \{(e^4; e^{-3}); (e^{-3}; e^4)\}$.

- 68** $e^x = X, e^y = Y, e^X - Y = e, 2X + Y = 4 + e$
 d'où $X = 2, Y = e$.
 Donc $\mathcal{S} = \{(\ln 2; 1)\}$.

- 69** 1. a) $P(-1) = -2 + 5 - 1 - 2 = 0$.

- b) $P(x) = (x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$.

- c) $P(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; -2] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

2. Pour $x \in]0; 2[$ l'équation équivaut à :
 $x^2(2x + 5) \leq 2 - x$ soit $P(x) < 0$.

$$\text{D'où } \mathcal{S} = \left]0; \frac{1}{2}\right[.$$

Étude de fonctions

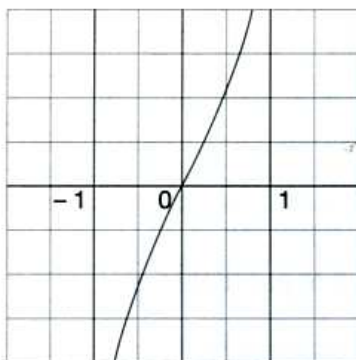
- 70** 1. Si $x \in]-1; 1[, -x \in]-1; 1[$ et

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

soit $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire.

$$2. f'(x) = \left(\frac{2}{1-x^2}\right) > 0.$$

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



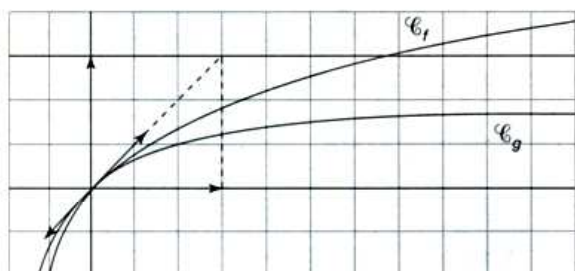
71 1. $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ avec $x \in I$.

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	0	$+\infty$

Il résulte du tableau que pour tout x de I , $h(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq g(x)$.

2. $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$ donc la droite d'équation $y = x$ est tangente commune à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ en $x = 0$.



72 1. $\ln(m_1 x) = \ln(m_2 x) \Leftrightarrow x(m_1 - m_2) = 0$.

Or $x \in]0; +\infty[$ et $m_1 \neq m_2$ donc $x(m_1 - m_2) \neq 0$ et les courbes $\mathcal{C}_{m_1}$ et $\mathcal{C}_{m_2}$ n'ont pas de point commun.

2. Pour tout $x > 0$ $f_m(x) = \ln m + \ln x$.

$$f_m(x) = f_1(x) + \ln m$$

donc $\mathcal{C}_m$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur $(\ln m)\vec{j}$ si $(0; \vec{i}; \vec{j})$ est le repère.

3. M a pour coordonnées $(\frac{1}{m}; 0)$ et N a pour coordonnées $(\frac{e}{m}; 1)$. La droite (MN) a pour équation

$$y = \frac{1}{e-1} (mx - 1).$$

Ainsi toutes les droites (MN) passent par le point Ω de coordonnées $(0; \frac{-1}{e-1})$.

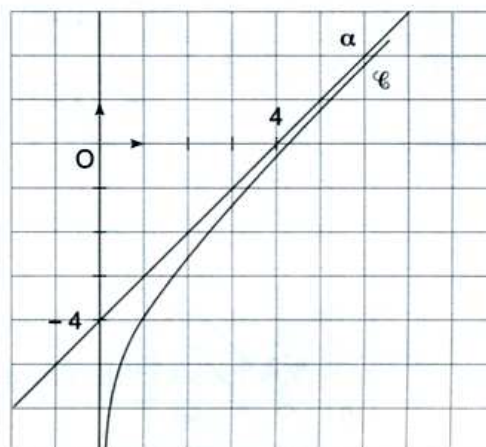
73 1. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$ sur I donc f est strictement croissante sur I .

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 4) = 0$ donc la droite $y = x - 4$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

b) $f(x) - (x - 4) = \ln \frac{x}{x+1} < 0$ donc $\mathcal{C}$ est en dessous

de la droite d .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	$-\infty$	$+\infty$



74 1. $f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)}$.

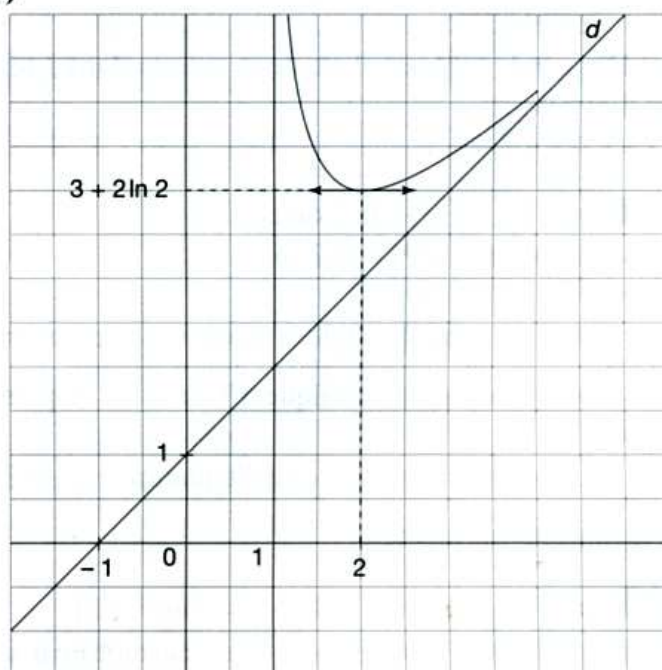
x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$3 + 2\ln 2$	$+\infty$

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$.

b) $f(x) - (x + 1) = 2 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$.

Pour tout $x > 1$ $f(x) > (x + 1)$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de d .

c)



75 Pour tout $x > 0$; $f(x) = x - \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right)$.

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

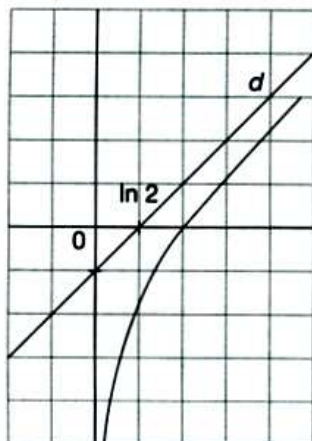
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - \ln 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) = 0$.

Donc la droite d est asymptote à $\mathcal{C}$.

c) $f(x) - (x - \ln 2) = -\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) < 0$ donc $\mathcal{C}$ est en dessous de d .

2. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(2x+1)} > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$



76 1. $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$.

$x^2 + 2x - 1 > 0$ pour tout $x > \sqrt{2} - 1$.

Donc sur $I =]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et f est croissante strictement sur I . On a le tableau suivant :

x	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

2. a) D'après le tableau, il existe α unique dans I tel que $f(\alpha) = 0$.

b) $1,1 < \alpha < 1,2$.

77 $f(x) = \ln(1 + e^x) - \ln 2$ ou encore (1)

$f(x) = \ln e^x + \ln(1 + e^{-x}) - \ln 2$ soit

$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-x})$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + \ln 2] = 0$ donc la droite d'équation

$y = x - \ln 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$; de plus d'après (1) :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2$ donc la droite d'équation $y = -\ln 2$ est asymptote horizontale.

78 1. a) $f(x) = \ln e^{-x}(e^x + 1) = -x + \ln(e^x + 1)$.

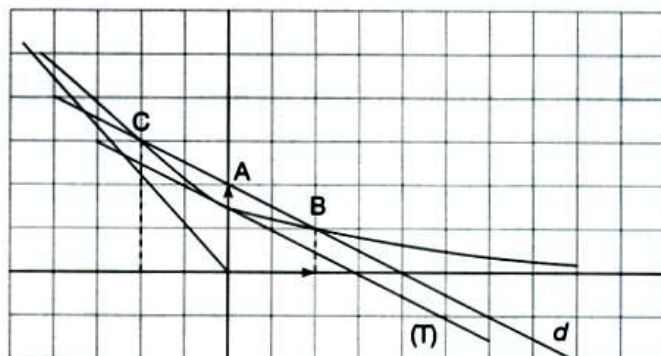
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$ donc $y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

2. $f'(x) = -1 + \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{-1}{1 + e^x} < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

La droite (BC) a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$f'(0) = -\frac{1}{2}$ d'où le parallélisme.



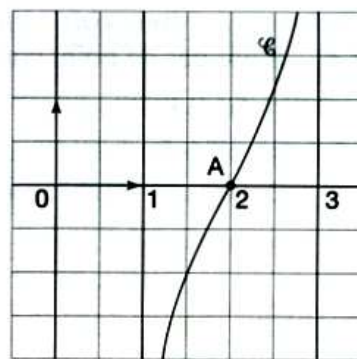
79 1. a) $1 < x < 3$ donc $-3 < -x < -1$ et $1 < 4 - x < 3$.

b) $\frac{1}{2} [f(4-x) + f(x)] = \left[\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \right] = 0$.

c) Il résulte de la question précédente que $A(2; 0)$ est centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

2. $f'(x) = \frac{2}{(x-1)(3-x)}$.

x	1	2	3
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



80 • $f(x) = \frac{x \ln x - 4}{2 \ln x}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - 4}{2x \ln x} = +\infty$.

Donc $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale en $x = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{2}{x} \right] = 0$ donc $y = \frac{2}{x}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$.

• $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

• Sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$, $x(\ln x)^2 > 0$ d'où le résultat.

x	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-\infty$	$0 \rightarrow +\infty$

Sur $]0; 1[$ $f(x) > 0$ et sur $]1; +\infty[$, il existe α unique tel que $f(\alpha) = 0$.

$$f(3) \times f(4) < 0 \text{ donc } 3 < \alpha < 4.$$

81 • 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ donc $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$.

b) $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ sur I .

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	$0 \rightarrow$	$+\infty$

h strictement croissante sur $]0; +\infty[$ d'où l'existence d'un α unique. $h(0,5) \approx -0,19$ et $h(0,6) \approx 0,09$.

$$h(0,5) \times h(0,6) < 0 \text{ d'où } 0,5 < \alpha < 0,6.$$

c) $f(x) - x = \frac{h(x)}{x^2}$. Donc si $x \in]0; \alpha[$ $h(x) < 0$ et $\mathcal{C}$ est au-dessous de d et si $x > \alpha$ $h(x) > 0$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de d .

$$2. a) f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3}.$$

$$b) g(x) = x^3 - x + 1 + 2\ln x.$$

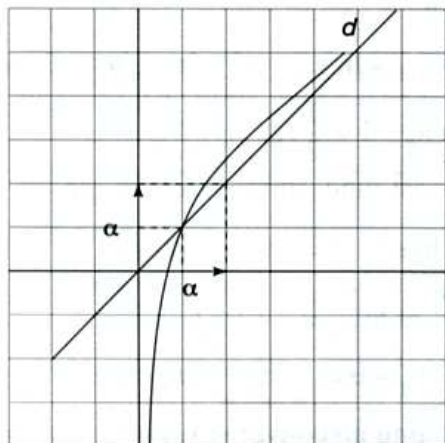
$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1 \nearrow +\infty$

Il résulte que pour tout x de I , $g(x) \geq 1$.

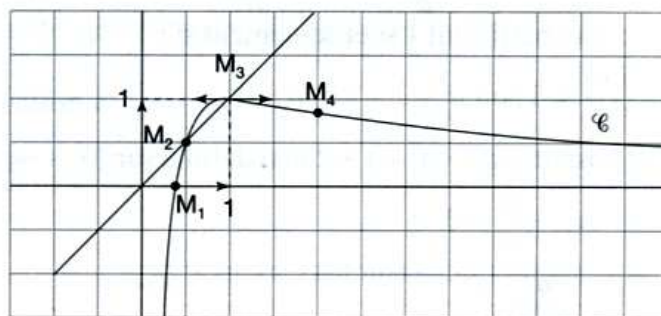
c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$



$$82 \bullet 1. f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 \searrow 0$



2. M_1 a pour coordonnées $(\frac{1}{e}; 0)$.

Une tangente en x_0 a pour équation

$$y = -\frac{\ln x_0}{x_0^2} + \frac{1 + 2\ln x_0}{x_0}.$$

Donc la tangente passe par O si et seulement si

$$\ln x_0 = -\frac{1}{2} \text{ soit } x_0 = e^{-\frac{1}{2}} \text{ et } M_2 \text{ a pour coordonnées } (e^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}).$$

Le point M_3 a pour coordonnées $(1; 1)$

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3} \text{ donc } M_4 \text{ a pour coordonnées } (e^{\frac{1}{2}}; \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}}).$$

a) Les nombres $e^{-1}; e^{-\frac{1}{2}}; 1; e^{\frac{1}{2}}$ forment une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{2}}$.

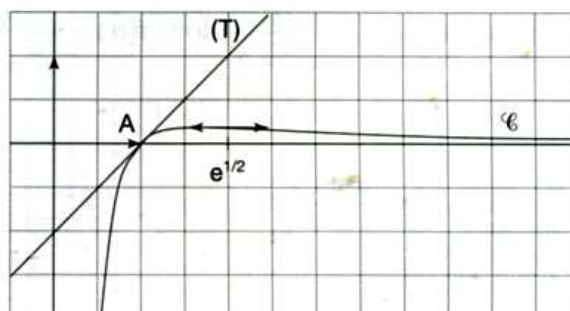
$$83 \bullet 1. f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e} \searrow 0$

$$2. a) f(1) = 0 \quad f'(1) = 1.$$

Donc T a pour équation $y = x - 1$.

b)



3. M a pour coordonnées $(u; \frac{\ln u}{u^2})$.

$f'(u) = \frac{1-2\ln u}{u^3}$. Donc T_u a pour équation :

$$y = \frac{1-2\ln u}{u^3}x + \frac{3\ln u - 1}{u^2}.$$

T_u a pour coefficient 1 si et seulement si :

$$\frac{1-2\ln u}{u^3} = 1 \text{ soit } u^3 - 1 + 2\ln u = 0.$$

4. En posant $\varphi(u) = u^3 - 1 + 2\ln u$ définie sur $]0; +\infty[$

$$\varphi'(u) = 3u^2 + \frac{2}{u} > 0.$$

u	0	1	$+\infty$
$\varphi'(u)$		+	
$\varphi(u)$	$-\infty$	0	$+\infty$

D'après le tableau $\alpha = 1$ est la seule solution de $\varphi(u) = 0$ donc A est le seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

84 • A.1. $g'(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

x	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	-	
g	0	$1-\ln 2$	0	$-\infty$

$$1,9 < \alpha < 2.$$

2. $g(x) > 0$ pour $0 < x < \alpha$ et $g(x) < 0$ pour $x > \alpha$.

B. 1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1.$

b) f est dérivable en O et la tangente T en $x=0$ a pour équation $y = x$.

2. a) $f(x) = \frac{1}{x} \ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$

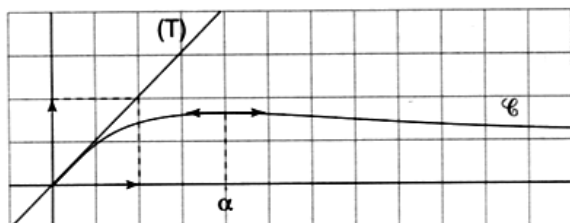
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

3. a) $f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{x^2} g(x).$

b)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	1	+	-
f	0	$f(\alpha)$	0

$$g(\alpha) = 0 \text{ donc } \ln(1+\alpha^2) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} \text{ donc } f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}.$$



85 • 1. a) $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x})^2 (\ln(\sqrt{x}))^2 = [2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}]^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln \sqrt{x} = 0 \text{ d'où le résultat.}$$

b) $\frac{f(x)-f(0)}{x} = (\ln x)^2 + 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 + 1 = +\infty$

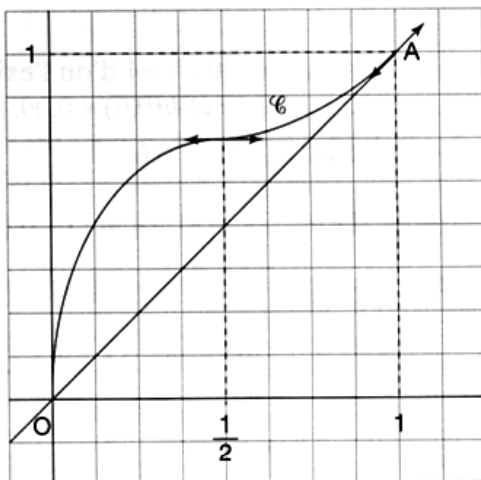
donc f n'est pas dérivable en $x=0$.

2. Pour tout x de $]0; 1]$ $f'(x) = [\ln x + 1]^2$.

x	0	e^1	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0		1

3. a) $f'(1) = 1$ donc la tangente en A a pour équation $y = (x-1) + 1 = x$. Cette tangente passe donc par O.

b) $f(x) - x = x(\ln x)^2 > 0$ sur $]0; 1]$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente en A.



Fonctions exp et ln et suites

86 1. $v_n = 15 \left(\frac{1}{2} \right)^n$ donc $w_n = \ln 15 - n \ln 2$. Il en résulte que $w_{n+1} - w_n = -\ln 2$. Donc (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $\ln 15$ et de raison $(-\ln 2)$.

2. a) $S_n = \frac{n+1}{2} [2 \ln 15 - n \ln 2].$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty.$

3. a) $\ln P_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ donc $P_n = e^{S^n}.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0.$

87 • 1. $v_{n+1} = \ln u_{n+1} - 2 = \ln e^{\sqrt{u_n}} - 2$ soit

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_n - 1 = \frac{1}{2} v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \ln e^3 - 2 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$.

2. $v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$ et $\ln u_n = 2 + \left(\frac{1}{2} \right)^n.$

3. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = 2.$

b) Donc la suite u_n converge vers e^2 .

b) $n < n+1$ donc $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. La suite (α_n) est donc strictement croissante.

3. a) $f(1) = 1f'(1) = 2$ donc Δ a pour équation $y = 2x - 1$.

b) $f(x) - (2x - 1) = \ln x - x + 1 = \varphi(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Il résulte que $\varphi(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq 2x - 1$ et $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ pour tout x de $]0; +\infty[$.

4. a) $x + \ln x \leq 2x - 1$ donc $\alpha_n + \ln \alpha_n < 2\alpha_n - 1$

$$\text{soit } \frac{n+1}{2} \leq \alpha_n.$$

b) Il résulte de la question précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty.$$

93 1. On pose pour tout $x \geq 0$

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x \text{ et } \psi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

$$\varphi'(x) = \frac{-x}{(x+1)} \text{ et } \psi'(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ donc,}$$

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-
$\varphi(x)$	0	$-\infty$

x	0	$+\infty$
$\psi'(x)$		+
$\psi(x)$	0	$+\infty$

Donc pour tout $x \geq 0$ $\varphi(x) \leq 0$ et $\psi(x) \geq 0$.

$$\text{Il en résulte que } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x. \quad (1)$$

$$2. \text{ Pour } n=1 \quad 1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}.$$

La proposition est donc vraie pour $n=1$

$$\text{supposons que } 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\text{soit } \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.$$

Donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$.

$$3. \ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

En tenant compte de (1) il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} \\ &\vdots \\ \frac{n}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n^2}\right)^2 &\leq \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \frac{n}{n^2} \end{aligned} \right\}$$

Par addition :

$$\frac{1 + \dots + n}{n^2} - \frac{1^2 + \dots + n^2}{2n^4} \leq \ln u_n \leq \frac{1 + \dots + n}{n^2}$$

$$\text{soit } \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} < \ln u_n < \frac{n(n+1)}{2n^2} \quad (2)$$

Donc de (2) on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln u_n) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{e}$.

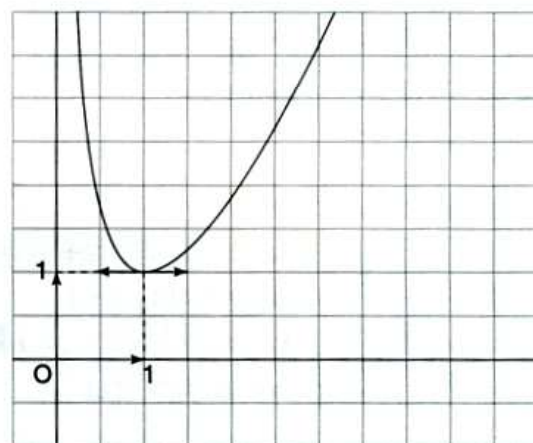
Prendre toutes les initiatives

$$\textbf{94} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}.$$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$



95 • Pour $x > a$, l'équation équivaut à $x - a = xb$ ou $x(1-b) = a$ si $b \neq 1$, $x = \frac{a}{1-b}$.

Comparons $\frac{a}{1-b}$ et a . $\frac{a}{1-b} - a = \frac{ab}{1-b}$;

si $0 < b < 1$, $\frac{ab}{1-b} > 0$ donc $\frac{a}{1-b} > a$ et $\mathcal{S} = \left\{ \frac{a}{1-b} \right\}$;

si $b > 1$, l'équation n'a pas de solution.

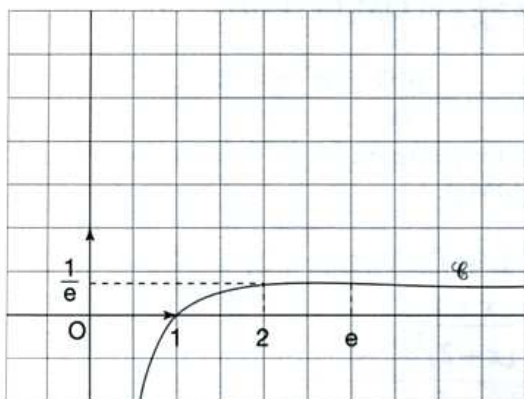
96 • $u_n = u_0 q^n$ donc $v_n = \ln u_0 + n \ln q$ et $v_{n+1} = v_n + \ln q$. Donc (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = \ln u_0$ et de raison $\ln q$.

97 • (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison -2 donc $u_n = -2n$. Il en résulte que $v_n = e^{-2n \ln 2}$ et $v_{n+1} = e^{-2 \ln 2} v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $e^{-2 \ln 2} = e^{\ln \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

98 • Pour tout x de $]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ d'où le tableau et la courbe

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0



$1 < 2 < e$ donc il existe un couple $(n; p)$ avec $n = 2$ et $p = 4$ tel que $n^p = p^n$.

99 • $f^{(1)}(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$.

$f''(x) = 2 \ln x + 3$ et $f'''(x) = \frac{2}{x}$ donc $f^{(3)}(x) = \frac{2(-1)^2 0!}{x}$ et la proposition est vraie pour $n = 3$.

Supposons que $f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$

alors $f^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!(-1)(n-2)}{x^{n-1}}$

soit $f^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$ donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 3$.

100 • A a pour coordonnées $(a; \ln a)$ et B $(b; \ln b)$ donc I a pour coordonnées $(\frac{a+b}{2}; \frac{\ln ab}{2})$ et J a pour coordonnées $(\frac{a+b}{2}; \ln(\frac{a+b}{2}))$.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{4}\right)^2 > 0 \text{ car } 0 < a < b.$$

$$\text{Donc } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \text{ et } \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{2} \ln(ab).$$

Il en résulte que J est au-dessus de I donc que I est « en dessous » de $\mathcal{C}$.

101 • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln x - \frac{3}{2}x\right) = 0$ donc la tangente en O est l'axe des abscisses.

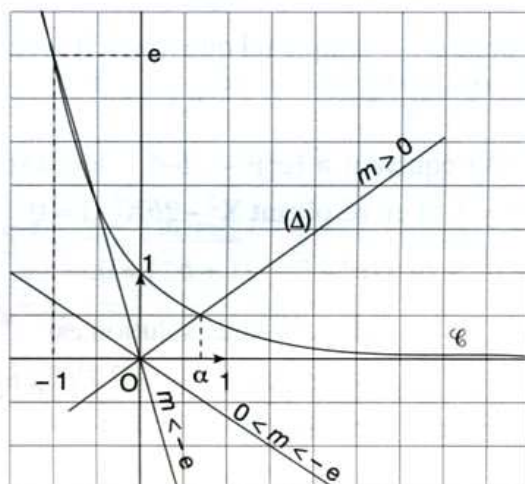
$$f'(x) = 2x(\ln x - 1).$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}e^2$	$+\infty$

De plus $f(x) = 0$ si et seulement si $\ln x = \frac{3}{2}$ soit $x = e^{\frac{3}{2}}$.

Donc $\mathcal{C}$ présente un minimum en $A(e; -\frac{1}{2}e^2)$ et recoupe l'axe des abscisses en $B(e^{\frac{3}{2}}; 0)$.

102 •



Pour avoir une idée de la solution on a tracé sur la figure ci-dessus la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = e^{-x}$ et la droite Δ d'équation $y = mx$. Il semble donc que si $m > 0$ il existe une unique solution. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x} - mx$, $\varphi'(x) = -e^{-x} - m$.

1. Si $m > 0$ $\varphi'(x) < 0$ pour tout réel x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	
$\varphi(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

Il existe donc α unique tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et l'équation (E_m) a une unique solution.

2. Si $m < 0$ $\varphi'(x) > 0$ si et seulement si $-e^{-x} > m$ ou $e^{-x} < -m$ soit $x > -\ln(-m)$.

D'où le tableau de variation

x	0	$-\ln(-m)$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	$+\infty$	$m[\ln(-m)-1]$	$+\infty$

$$\ln(-m) = 1 \Leftrightarrow m = -e.$$

D'où

• si $m = -e$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ donc l'équation (E_m) a une unique solution $x = -1$;

• si $-e < m < 0$, $m[\ln(-m)-1] > 0$ donc $\varphi(x) > 0$ et l'équation (E_m) n'a pas de solution;

• si $m < -e$, $m[\ln(-m)-1] < 0$ donc $\varphi(x) = 0$ pour deux réels α_1 et α_2 et l'équation (E_m) a deux solutions.

103 • $f'(x) = 6x^2 + 2x + \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x}$ avec pour tout $x > 0$, $g(x) = 6x^3 + 2x^2 + 1$. $g'(x) = 18x^2 + 4x$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	1	$+\infty$

Il en résulte que pour tout réel $x > 0$, $g(x) > 1$ donc $f'(x) > 0$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Il existe donc $\alpha > 0$ unique tel que $f(\alpha) = 0$ avec $54 \cdot 10^{-2} \leq \alpha < 55 \cdot 10^{-2}$.

104 • (P_1) équivaut à $(e^a)^2 - 2be^a - 1 = 0$ soit en posant $e^a = X$ et en résolvant $X^2 - 2bX - 1 = 0$
 $(e^a - b + \sqrt{1+b^2})(e^a - b - \sqrt{1+b^2}) = 0$.

Or $b - \sqrt{1+b^2} < 0$ donc la seule solution est $e^a = b + \sqrt{1+b^2}$ soit $a = \ln(b + \sqrt{1+b^2})$ d'où l'équivalence des deux propositions.

105 • On pose pour tout x de $[0; a[$
 $g(x) = \ln(a-x) \ln(a+x) - (\ln a)^2$

$$g(x) = \left[\ln a + \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] \left[\ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) \right] - (\ln a)^2$$

$$\text{soit } g(x) = \ln a \ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Or $0 < \frac{x}{a} < 1$ donc $0 < \frac{x^2}{a^2} < 1$ soit $0 < 1 - \frac{x}{a} \leq 1$ et

$0 < 1 - \frac{x^2}{a^2} < 1$ donc : $\ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) < 0$, $\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) < 0$ et $\ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) > 0$ d'où $g(x) \leq 0$ et $\ln(a-x) \ln(a+x) \leq (\ln a)^2$.

106 • 1. a) Pour $x > 0$, M a pour coordonnées $(x; 7 \ln x)$ donc $OM^2 = x^2 + (\ln x)^2$.

b) Pour tout réel $x > 0$ $f'(x) = 2x + \frac{2}{x} \ln x$ soit

$$f'(x) = \frac{2}{x} (x^2 + \ln x) = \frac{2}{x} g(x) \text{ avec pour tout réel } x > 0,$$

$$g(x) = x^2 + \ln x.$$

2. a) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

b) g est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe α unique de $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ avec $0,65 < \alpha < 0,66$.

3. a)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Or $g(x) = 0$ donc $\ln \alpha = -\alpha^2$ et $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$.

b) La distance OM est donc minimale pour $x = \alpha$.

c) La tangente en M_0 de coordonnées $(\alpha; \ln \alpha)$ a pour

$$\text{équation } y = \frac{1}{\alpha} (x - \alpha) + \ln \alpha.$$

Le vecteur $\vec{u}$ directeur de la tangente α pour coordonnées $\left(\alpha; \frac{1}{\alpha}\right)$ et $\overrightarrow{OM_0}(\alpha; \ln \alpha)$.

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM_0} = \alpha + \frac{\ln \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \ln \alpha}{\alpha} = 0.$$

Donc la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$ est perpendiculaire à la droite (OM_0) .

107 • 1. a) $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$

$$f''(x) = \frac{x+4}{(x+2)^2}.$$

x	-2	α	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$f'(-0,6) \approx -0,09$$

$$f'(-0,5) \approx 0,072.$$

Donc $f'(-0,6) \times f'(-0,5) < 0$ et $-0,6 < \alpha < -0,5$.

2.

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$f(\alpha) = 1 + \alpha \ln(\alpha + 2) = 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha + 2} = \frac{\alpha + 2 - \alpha^2}{\alpha + 2}.$$

3. a) T_{x_0} a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

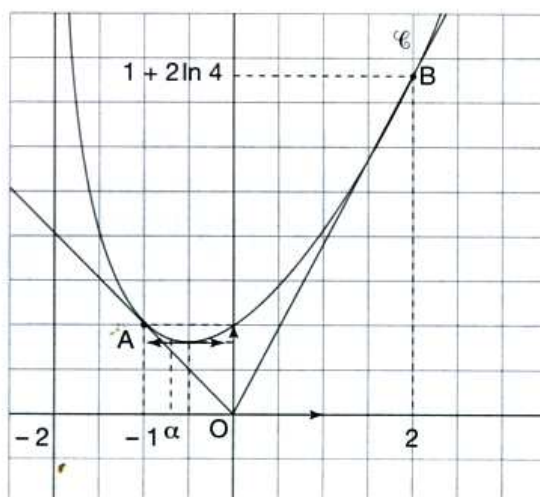
Donc T_{x_0} passe par O si et seulement si

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0).$$

b) $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$ si et seulement si $1 + x_0 \ln(x_0 + 2) =$

$$x_0 \ln(x_0 + 2) + \frac{x_0^2}{x_0 + 2} \text{ soit } x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \text{ donc } a = -1 \text{ et } b = 2.$$

4.



108 • A. 1. $f(1-x) = -(1-x) \ln(1-x) - x \ln x = f(x)$

donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie pour $\mathcal{C}$.

2. a) $f'(x) = \ln(1-x) - \ln x = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$ si $x \in]0; \frac{1}{2}[$
 $\frac{1-x}{x} > 1$ et $f'(x) > 0$.

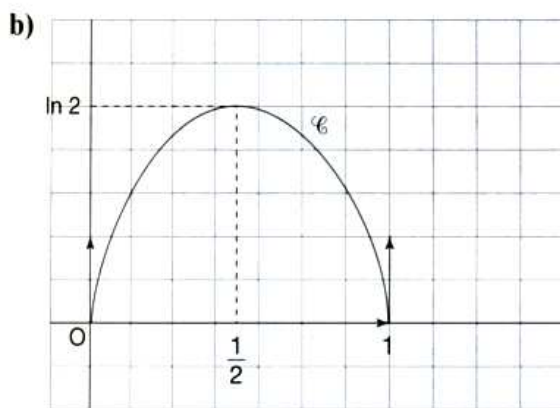
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\ln x - \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} \right]$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

La tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 0$ est verticale.

3. a)

x	0	$\frac{1}{2}$	1		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0



B. 1. $b = 1 - a$ donc

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} = -a \ln a - (1-a) \ln(1-a) = f(a).$$

Or $f(a) \leq \ln 2$ donc

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2.$$

2. Pour $a = b = \frac{1}{2}$ on a l'égalité.

109 • 1. $f'(x) = 1 - e^x$ et $g'(x) = -xe^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	0	1	$-\infty$

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ est celle pour lequel le maximum est le point de coordonnées $(0; -1)$.

3. $h(x) = x - e^x - (1-x)e^x = x + e^x(x-2)$

$$h'(x) = 1 + e^x(x-1) = 1 - g(x)$$

donc pour tout réel x , $h'(x) \geq 0$.

b)

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$h'(x)$		+	0	+	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$

D'où l'existence de α unique tel que $h(\alpha) = 0$ et $1,6 < \alpha < 1,7$.

B. 2. a) Pour tout x de l'intervalle $]0; 1[$ $g(x) \leq 1$ soit $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

b) $k \geq 2$ $0 < \frac{1}{k} < 1$ soit $e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$

et $\ln e^{\frac{1}{k}} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$ soit $\frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

c) $S_n - S_{n-1}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \ln(n-1)\right)$$

$$\text{soit } S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \leq 0.$$

Donc la suite (S_n) est décroissante.

3. a) La suite (S_n) est décroissante donc $u_n \geq 0$.

b) Pour tout x de $]0, 1[$ $x - e^x \leq -1$ d'où $x + 1 \leq e^x$.

c) Si $k \geq 1$ $0 < \frac{1}{k} \leq 1$ et $1 + \frac{1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}$ soit $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

d) $u_n = \left(1 + \dots + \frac{1}{20}\right) - \ln 20 - \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right) + \ln n$ d'où $u_n = \ln \frac{n}{20} - \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

Pour $n = 21$ $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) = \ln \frac{22}{21} \leq \frac{1}{21}$, donc la proposition est vraie pour $n = 21$.

Supposons $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n}$

$$\ln\left(\frac{n+2}{21}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{21}\right).$$

Or $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ donc

$$\ln\left(\frac{n+2}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \text{ donc la proposition est vraie pour tout } n > 20.$$

e) $u_n \leq \ln \frac{n}{21} - \ln\left(\frac{n+1}{21}\right)$

$$\text{soit } u_n \leq \ln \frac{21}{20} - \ln \frac{n+1}{n} \leq 0,049$$

$$\text{car } \ln \frac{21}{20} \approx 0,0487 \dots \text{ et } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0.$$

110 • Partie préliminaire

A. 1. $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$1 + \frac{1}{e}$		1

2. Il existe α unique de $]0; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

B. 1. $h'_n(x) = \frac{2x^2 + n}{x}$.

x	0	β_n	$+\infty$
$h'_n(x)$		+	
$h_n(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

a) $h_n(x) = 0$ a une solution unique β_n
 $h_n(1) = 1 - n$ et $h_n(3) = 9 + n(\ln 3 - 1)$.
 Si $n = 1$, $h_n(1) = 0$ et $h_n(3) = 8 + \ln 3$ donc $\beta_1 = 1$.
 Si $n > 1$, $h_n(1) < 0$ et $h_n(3) > 0$ donc $1 < \beta_n < 3$.

Étude d'une famille de fonctions :

A. 2. a) $f'_n(x) = 1 - n\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) = \frac{h_n(x)}{x^2}$.

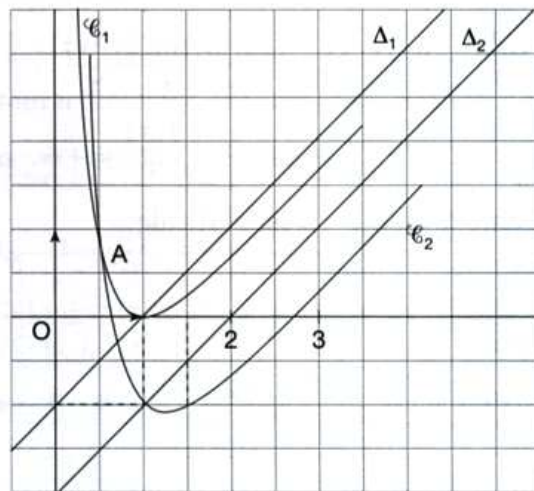
b)

x	0	β_n	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$f_n(\beta_n)$	$+\infty$

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - n)] = 0$ donc la droite Δ_n d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique.

b) $f_n(x) - (x - n) = -n \frac{\ln x}{x}$ donc si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ et $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de Δ_n et si $n > 1$ $\mathcal{C}_n$ est en dessous de Δ_n .

3.



B. 1. $f_n(x) = x - ng(x)$.

$f_n(\alpha) = \alpha$ car $g(\alpha) = 0$ donc les courbes $\mathcal{C}_n$ passent toutes par le point $A(\alpha; \alpha)$.

2. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n + 1)g(x) - x + ng(x)$ soit $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -g(x)$.

Donc pour $0 < x < \alpha$, $g(x) < 0$ donc $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ est en dessous de $\mathcal{C}_n$.

C'est nouveau au bac (page 82)

111 1. a) Faux car $u_n = \frac{2}{3^{n-1}}$.

b) Vraie car $v_n = \ln 2 - (n - 1) \ln 3$ donc $v_{n+1} - v_n = -\ln 3$. D'où le résultat.

c) Vraie car :

$$\frac{1}{n}(v_1 + \dots + v_n) = \frac{1}{n} \left[\frac{n}{2} (2 \ln 2 - (n - 1) \ln 3) \right]$$

$$= \frac{1}{2} [\ln 4 + \ln 3 - n \ln 3]$$

soit $\frac{1}{2} (\ln 12 - n \ln 3)$.

2. a) Faux car g n'est pas défini en $x = 1$ car $f(1) = 0$.

b) Faux : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ donc $g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{0}{e} = 0$.

c) Vraie car $g(x) = 1$ équivaut à $f(x) = e$ donc deux solutions $x = 0$ et $x = \alpha$ avec $1 < \alpha < 2$.

d) Vraie car

e) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln f(x) = -\infty$.

112 1. Vraie car si $\varphi(x) = \ln x - ax - b$

$f'(x) = \frac{1}{x} - a > 0$.

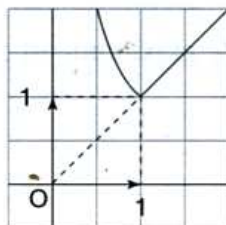
x	0	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Il existe donc α unique de $]0; +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$ donc l'équation $\ln x = ax + b$ a une solution unique.

2. Vraie car $x > 0$, $y > 0$ $\ln(x + y) = \ln x + \ln y$ équivaut à $x + y = xy$ ou $y(x - 1) = x$ pour $x > 1$, $y = \frac{x}{x - 1}$ d'où l'infinité de couples.

3. Faux

si $n > 1$ $\ln x > 0$ donc $f(x) = x$ et si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$.



f est donc non dérivable en $x = 1$ (dérivée à gauche (-1) et dérivée à droite 1).

4. Faux car l'équation équivaut à $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

ou $(a+b)^2 = 9ab$

donc $a^2 - 7ab + b^2 = 0$.

En posant $\frac{a}{b} = X$ il résulte $X_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ et

$X_2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ donc $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ convient également.

113 1. Voir le cours.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) $f'(x) = e^{-x} \left[-\ln x - 1 + \frac{1}{x} \right] = e^{-x} g(x)$.

c) $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ donc pour tout $x > 1$, $g(x) < 0$.

x	0	1	$+\infty$
g'(x)		$-\frac{1}{2}$	
g(x)	$+\infty$	0	$-\infty$

d)

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	e^{-1}	0

donc l'équation $f(x) = e^{-1}$ a pour unique solution $x = 1$.

Les fonctions puissances

Croissances comparées

Travaux dirigés (page 153)

TD 1

1 f_α est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{et } f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Le signe de f_α est donc celui de α .

2 1. $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$.

Sur $]0; +\infty[$ $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$ donc f_α est continue sur $]0; +\infty[$. De plus $f_\alpha(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$ donc f_α est continue sur $[0; +\infty[$.

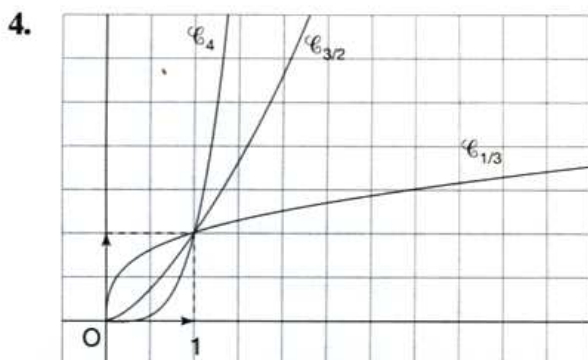
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x} = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		+
$f_\alpha(x)$	0	$+\infty$

$$3. \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1) \ln x}.$$

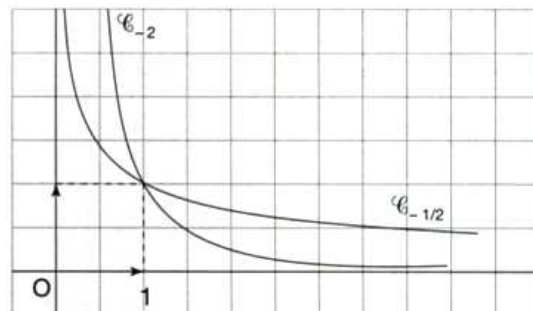
Si $0 < \alpha < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(\alpha-1) \ln x} = +\infty$ donc f_α n'est pas dérivable en $x = 0$.

Si $\alpha > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(\alpha-1) \ln x} = 0$ donc f_α est dérivable en zéro.



3 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$.

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		-
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	0



TD 2

2 1. f est définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{x \ln x}$.

2. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

• $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

3. a) Pour tout x de I , $f'(x) = (1 + \ln x)e^{x \ln x}$.

b)

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
f	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	$+\infty$

• $e^{-\frac{1}{e}} \approx 0,69$.

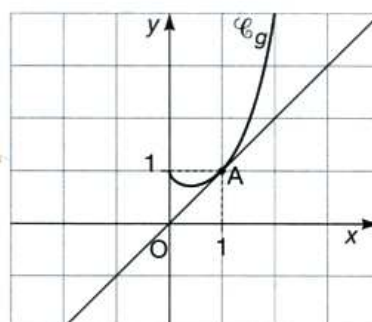
4. a) Pour tout $x > 0$,

$$t(x) = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \times \ln x.$$

b) Posons $X = x \ln x$, $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = -\infty$.

c) Donc la courbe représentative de g admet pour tangente en $(0; 1)$ l'axe des ordonnées.

$g(1) = f(1) = 1$ et $g'(1) = f'(1) = 1$ donc la tangente en $A(1; 1)$ a pour équation $y - 1 = 1(x - 1)$ où $y = x$.



1. Immédiat.

2. a) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{x \ln \frac{2}{5}}$, et si $f(x) = e^{x \ln \frac{2}{5}}$,

$$f'(x) = \ln \frac{2}{5} e^{x \ln \frac{2}{5}} < 0.$$

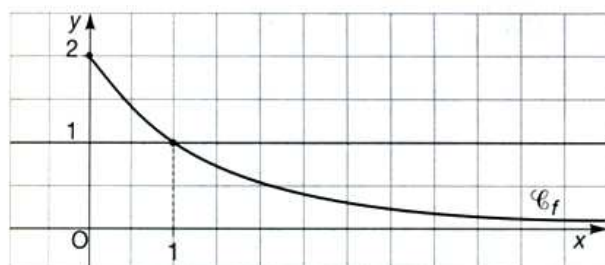
Donc les fonctions $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$ et $x \mapsto \left(\frac{3}{5}\right)^x$ sont strictement décroissantes sur $]0; +\infty[$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0$.

b)

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		-	
f	2	1	0

Donc l'équation a une solution et une seule strictement positive qui est $x = 1$.



2 1. $x^5 = e^{5 \ln x}$ et $(2,5)^x = e^{x \ln(2,5)}$, donc $x^5 = (2,5)^x$ équivaut à $5 \ln x = x \ln 2,5$. Puisque $x > 0$, cela équivaut à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2,5}{5}$.

2. a) $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

b) • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

• $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;

x	0	1	e	$+\infty$
f'(x)		+	0	-
f	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

$\frac{\ln 2,5}{5} \approx 0,18$, donc l'équation a deux solutions strictement positives et deux seulement, α et β , telles que $1 < \alpha < e$ et $\beta > e$.

c) $1,25 < a < 1,26$ et $14,64 < b < 14,65$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 155)

1. et 2. Puissances réelles et $x \mapsto a^x$, $a > 0$ et $a \neq 1$

1 Corrigé dans le manuel.

2 a) $e^{\sqrt{3} \ln x} \leq e^{-\ln 3}$ d'où $\sqrt{3} \ln x \leq -\ln 3$.

$0 < x < e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \ln 3}$ ou encore $0 < x \leq 3^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

b) $x = 2^{-\frac{1}{\pi}}$ car $e^{\pi \ln x} = e^{-\ln 2}$.

c) $e^{-x \ln 2} = e^{\ln 3}$ d'où $x = -\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

d) $(x-1) \ln 7 = x \ln 3$ soit $x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$.

e) $x \ln 3 = (2x+1) \ln 4$ soit $x = \frac{\ln 4}{\ln \frac{3}{16}}$.

f) $(1-3x) \ln 5 = -3 \ln 5$ soit $x = \frac{4}{3}$.

3 a) $x \ln 3 \geq \ln 4$ soit $x \in \left[\frac{\ln 4}{\ln 3}; +\infty\right[$.

b) $-x \ln 3 > \ln 4$ soit $x \in \left]-\infty; -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$.

c) $-x \ln 5 < 2x \ln 5$ soit $x \in]0; +\infty[$.

d) $\frac{2^x}{2^x + 1} < \frac{1}{3}$ équivaut à $\frac{2 \cdot 2^x - 1}{3(2^x + 1)} < 0$.

Soit $2^{x+1} < 1$ ou $x+1 < 0$ et $x \in \left]-\infty; -1\right[$.

e) $x > 0$ et $\frac{1}{2} x \ln x > \sqrt{x} \ln x$ ou

$x > 0$ et $\ln x \times \left(\frac{1}{2} x - \sqrt{x}\right) > 0$.

$x > 0$ et $\sqrt{x} \ln x \left(\frac{1}{2} \sqrt{x} - 1\right) > 0$.

Donc $\mathcal{S} =]0; 1[\cup]4; +\infty[$.

f) $-x \ln \sqrt{2} < \ln 2$ soit $-\frac{1}{2}x \leq 1$

d'où $x \geq -2$, $\mathcal{S} = [-2; +\infty[$.

4 a) En posant $2^x = X$ l'équation devient $X^2 + 2X - 3 = 0$

$X_1 = -1$ et $X_2 = 3$ d'où $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\}$.

b) On montre de même que $0 < 2^x < 3$

$\mathcal{S} =]-\infty; \frac{\ln 3}{\ln 2}]$.

5 a) Même principe qu'au 4. a) donc

$\mathcal{S} = \left\{ 1; \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\}$.

b) $\mathcal{S} =]-\infty; 1] \cup \left[\frac{\ln 3}{\ln 2}; +\infty[$.

6 a) En posant $3^x = X$ alors $3X^2 - 7X + 2 = 0$

$X_1 = 2$ et $X_2 = \frac{1}{3}$.

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln 2}{\ln 3}; -1 \right\}$.

b) $3^x \leq \frac{1}{3}$ ou $3^x \geq 2$ donc $\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{\ln 2}{\ln 3}; +\infty[$.

7 En posant $3^x = X$ et $3^y = Y$ on obtient le système : $XY = 9$ et $X + Y = 4\sqrt{3}$

d'où $(X_1 = 3\sqrt{3}$ et $Y_1 = \sqrt{3})$ ou $(X_2 = \sqrt{3}$ et $Y_2 = 3\sqrt{3})$.

Ainsi $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right) \right\}$.

8 Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$

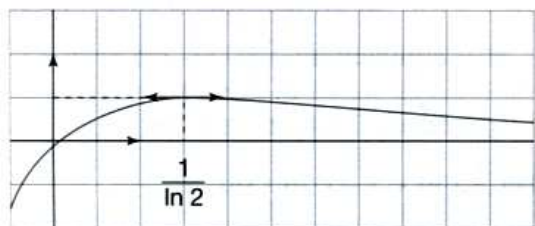
$a^{\ln b} = e^{\ln b \ln a}$ et $b^{\ln a} = e^{\ln a \ln b}$.

D'où l'égalité.

9 $f(x) = xe^{-x \ln 2}$ définie sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = (1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e \ln 2}$	0

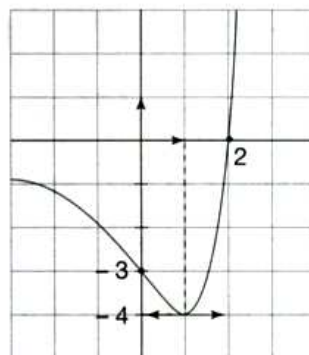


10 $f(x) = (e^{x \ln 2})^2 - 4e^{(x \ln 2)}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 2 \ln 2 [e^{x \ln 2} - 2]e^{x \ln 2}$.

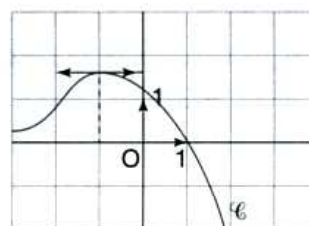
x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	
f	0	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$



11 $f(x) = (1 - x)e^{x \ln 2}$

$f'(x) = (\ln 2 - x \ln 2 - 1)e^{x \ln 2}$.

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2 - 1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$ $\frac{1}{e \ln 2}$ $\searrow$	$-\infty$



12 Corrigé dans le manuel.

3. La fonction racine n-ième

13 $A = 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{3}} = 2^4$; $B = 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{2}} = 2^{\frac{31}{6}}$.

14 $A = 2^2 \times 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-3} \times 2^{-\frac{1}{4}} = 1$.

$B = 2^{\frac{10}{10}} - 2^{-2} 2^3 = 0$.

15 Corrigé dans le manuel.

16 $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \left(3^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right)$ est égal à :

$\left(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left[\left(3^{\frac{1}{3}} \right)^2 + 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + \left(2^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right]$.

Cette expression est de la forme $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$, elle est donc égale à $a^3 - b^3 = 1$. D'où le résultat.

17 $\sqrt[3]{9 \times 27 \times 243} = \sqrt[3]{3^2 \times 3^3 \times 3^5} = \sqrt[3]{3^{10}} = 27\sqrt[3]{3}$

18 $A = x^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$; $B = x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$

19 $A = x^{-1}x^{-\frac{4}{3}}x^{-4} = x^{-\frac{19}{3}}$; $B = x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{4}}$.

20 $A = x^{-2}x^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{13}{6}}$; $B = x^{-2}x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{7}{6}}$.

21 • a) $x > 0$ et $x^{\frac{7}{2}} = 4$ d'où $x = 4^{\frac{2}{7}}$.

b) $x > 0$ et $x\left(x^{\frac{1}{3}} - 4\right) < 0$ d'où $\mathcal{S} =]0; 64[$.

22 a) $x > 0$ et $x^{\frac{2}{3}}\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right) < 0$, $\mathcal{S} =]0; 1[$.

b) $x > 0$ et $-\frac{4}{3} \ln x \leq \ln 2$, $\mathcal{S} = \left]0; 2^{-\frac{3}{4}}\right]$.

23 a) $x > -1$ et $\frac{5}{2}(x+1) < 0$ soit $\mathcal{S} =]-1; 0[$.

b) $x^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{7}{4}}$ d'où $x \in \left[0; \left(2^{\frac{7}{2}}\right)^2\right]$.

24 Corrigé dans le manuel.

25 a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$. b) $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

26 a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. b) $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}}$.

27 $f'(x) = \frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$.

28 Pour tout x de I , $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}e^{-x} - x^{\frac{5}{3}}e^{-x}$.

$f'(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}\left[\frac{5}{3} - x\right]$ d'où le résultat.

29 $f'(x) = -\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ donc si $x \in]-\infty; 1[$.

$f'(x) < 0$.

30 Pour tout x de I , $f'(x) = 1 - 2x^{-\frac{2}{3}}$.

$f'(x) > 0$ si et seulement si $x^{-\frac{2}{3}} < \frac{1}{2}$

soit $-\frac{2}{3} \ln x < -\ln 2$ donc $\ln x > \frac{3}{2} \ln 2$

et $x \in]2\sqrt{2}; +\infty[$.

4. Croissances comparées

31 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

32 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

33 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

34 Corrigé dans le manuel.

35 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

36 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2} = +\infty$.

37 $\frac{e^{2x+3}}{x^{\frac{7}{2}}} = e^3 \frac{e^{2x}}{x^{\frac{7}{2}}} > \frac{e^x}{x^{\frac{7}{2}}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+3}}{x^{\frac{7}{2}}} = +\infty$.

38 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$ donc pour x suffisamment grand $\sqrt[50]{x}$ dépasse $\ln x$.

39 a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

40 a) $g: x \mapsto e^{x^2}$, $g(0) = 1$ donc $f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$

et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 0$.

b) $g(x) = e^{3x}$, $g(0) = 1$, $f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$
et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 3$.

41 Corrigé dans le manuel.

Apprendre à chercher

(page 157)

42 De $b + c \geq \sqrt{bc}$ à $a + b + c \geq 3\sqrt{abc}$

Les outils :

- Étude d'une fonction.
- Résolution d'inéquations.

Les objectifs :

- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir exploiter les variations d'une fonction.

1. $(b+c)^2 - 4bc = (b-c)^2$ donc $(b+c)^2 \geq 4bc$.

2. $(a+b+c) \geq 3\sqrt[3]{abc}$ équivaut à $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$ [1].

3. a) f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x+b+c)^3}{bcx}$.

Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{(x+b+c)^2(2x-b-c)}{bcx^2}$.

Or $x > 0, b > 0$ et $c > 0$, donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b+c}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{b+c}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f		$f\left(\frac{b+c}{2}\right)$	

$$f\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{27}{4} \frac{(b+c)^2}{bc}.$$

Or $(b+c)^2 \geq 4bc$ donc $\frac{(b+c)^2}{4bc} \geq 1$ et $f\left(\frac{b+c}{2}\right) \geq 27$.

D'où le résultat.

43 Comparaison de u^v et v^u

Les outils :

- Exploiter la croissance de la fonction exponentielle.
- Étudier une fonction.

Les objectifs :

- Savoir traduire un problème équivalent.
- Savoir exploiter les variations d'une fonction.

1. $1 < u < v$ donc $0 < \ln u < \ln v$; donc $e^{v \ln u} < e^{u \ln v}$ équivaut à $v \ln u < u \ln v$ [1].

2. a) et b) $\ln u > 0$ et $\ln v > 0$, donc [1] équivaut à

$$\frac{v}{\ln v} < \frac{u}{\ln u}.$$

3. a) On introduit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$b) f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0	$\frac{1}{e}$	0

f est strictement croissante sur $]1; e]$, donc :

- si $1 < u < v \leq e$, alors $\frac{\ln u}{u} < \frac{\ln v}{v}$ donc $u^v < v^u$;
- si $e \leq u < v$, alors $\frac{\ln u}{u} > \frac{\ln v}{v}$ donc $u^v > v^u$.

4. $u = \sqrt{n}$ et $v = \sqrt{n+1}$, $u^v = (\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ et

$$v^u = (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}};$$

- si $n = 1$, $u^v = 1$ et $v^u = \sqrt{2}$;
- si $n = 2$, $u^v < v^u$;
- si $n > 2$, $u^v > v^u$.

Pour progresser

(page 158)

Équations. Inéquations. Systèmes

44 a) $x^{\frac{1}{5}} = X$ et $X^2 - 3X + 2 = 0$, d'où $X = 1$ et $X = 2$.

Donc $x^{\frac{1}{5}} = 1$ ou $x^{\frac{1}{5}} = 2$, soit $x = 1$ ou $x = 2^5$; $\mathcal{S} = \{1; 2^5\}$.

b) $x^{\frac{1}{5}} = X$ et $X^2 - 3X + 2 \geq 0$, d'où $0 < X \leq 1$ ou $X \geq 2$; $\mathcal{S} =]0; 1] \cup [2^5; +\infty[$.

45 a) $\sqrt[3]{x} = X$, $X > 0$ et $X^2 - X - 2 = 0$, d'où $X = -1$ ou $X = 2$; $\mathcal{S} = \{2^3\}$.

b) $X^2 - X - 2 \leq 0$, d'où $0 < X \leq 2$; $\mathcal{S} =]0; 2^3]$.

46 • $x^{\frac{1}{4}} = X$, $X > 0$; $3X^2 + X - 4 < 0$,

d'où $-\frac{4}{3} < X < 1$ soit $0 < X < 1$; $\mathcal{S} =]0; 1[$.

47 • $x > 0$ et $y > 0$; $x \ln y = y \ln x$ et $y^2 = x$;

d'où $y^2 \ln y = 2y \ln y$ ou $y \ln y(y-2) = 0$;

donc $y = 2$ et $x = 4$ ou $x = 1$ et $y = 1$.

48 • $x^{\frac{3}{4}} = X > 0$ et $y^{\frac{2}{3}} = Y > 0$; $X - 3Y = 0$

et $X^2 - Y^2 = 648$, d'où $Y = 9$ et $X = 27$;

d'où $x = 81$ et $y = 27$.

49 • $x^{\frac{1}{4}} = X > 0$ et $y^{\frac{1}{4}} = Y > 0$; $X - Y^2 = 0$

et $X^3 - 32Y = 0$, d'où $Y = 2$ et $X = 4$; $x = 4^4$ et $y = 2^4$.

Limites

50 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

51 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

52 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

53 a) On pose $\frac{1}{x} = X$ d'où $f(X) = \frac{e^X - 1}{X}$;

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$ donc $\lim_{X \rightarrow 0} f(X) = 1$.

b) On pose $\frac{1}{x} \ln 2 = X$, d'où $f(X) = \frac{e^X - 1}{X} \ln 2$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$.

54 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

55 1. a) $f'(x) = 1 - x^{-\frac{2}{3}}$.

b) $f'(x) < 0$ pour $x \in]0; 1[$ car $1 - x^{-\frac{2}{3}} < 0$ si $-x^{-\frac{2}{3}} < -1$
 $x^{-\frac{2}{3}} > 1$ donc $-\frac{2}{3} \ln x > 0$ soit $\ln x < 0$ et $0 < x < 1$.

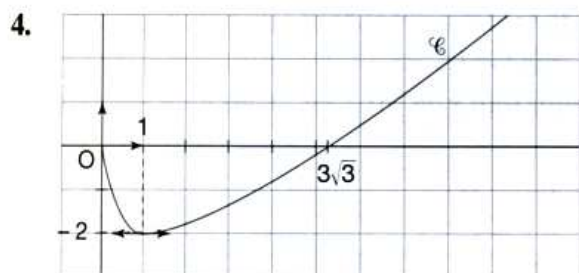
2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

b) Donc f n'est pas dérivable en $x = 0$.

3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$\nearrow$



56 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}} - 3}{3x}$.

b) Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x^{\frac{1}{3}} - 3$.

3.

x	0	27	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$

4. a) $3(1 - \ln 3) < 0$; f est strictement décroissante sur $]0; 27[$ et l'image de cet intervalle est l'intervalle $]3(1 - \ln 3); +\infty[$, donc 0 a un antécédent unique α tel que $0 < \alpha < 27$. De même, il existe β unique de $]27; +\infty[$.

b) $6 < \alpha < 7$ et $93 < \beta < 94$.

c) • Pour $0 < x < \alpha$ ou $x > \beta$, $f(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$.

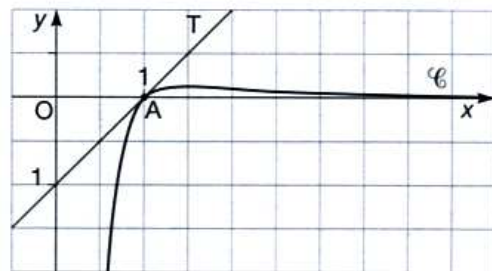
• Pour $\alpha < x < \beta$, $f(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$.

57 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$.

2. $f'(x) = \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$;

x	0	$e^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$

3. Au point A d'abscisse 1, $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, donc la tangente à $\mathcal{C}$ en A a pour équation $y = x$.



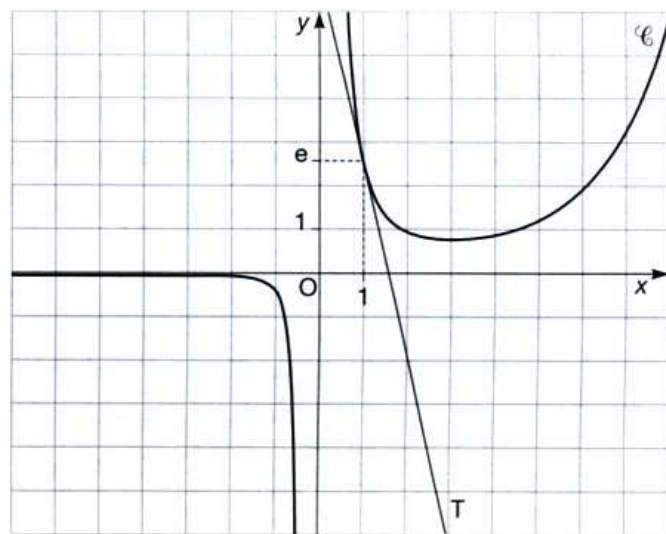
58 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées est asymptote verticale et l'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$.

2. $f'(x) = \frac{x^3 e^x - 3x^2 e^x}{x^6} = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$;

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
f	0	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f(1) = e$ et $f'(1) = -2e$. Donc la tangente en $x = 1$ a pour équation $y - e = -2e(x - 1)$ ou $y = -2ex + 3e$.



59 • 1. et 2. • Pour tout réel x , $f(x) = xe^{-x \ln 2}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$f'(x) = e^{-x \ln 2} - x \ln 2 e^{-x \ln 2} = e^{-x \ln 2}(1 - x \ln 2)$;

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$

• $g(x) = \frac{e^{x \ln 2}}{x}$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty.$$

$$g'(x) = \frac{e^{-x \ln 2} (x \ln 2 - 1)}{x^2};$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
g	0	$-\infty$	$+\infty$	$e \ln 2$

3. a) A a pour coordonnées $\left(\frac{2}{\ln 2}; \frac{2e^{-2}}{\ln 2}\right)$
et $f'\left(\frac{2}{\ln 2}\right) = -e^{-2}$, donc T a pour équation

$$y = -e^{-2}x + \frac{4}{\ln 2}e^{-2}.$$

b) $f(x) + e^{-2}x - \frac{4}{\ln 2}e^{-2} = h(x);$

donc $h(x) = xe^{-x \ln 2} + e^{-2}x - \frac{4e^{-2}}{\ln 2};$

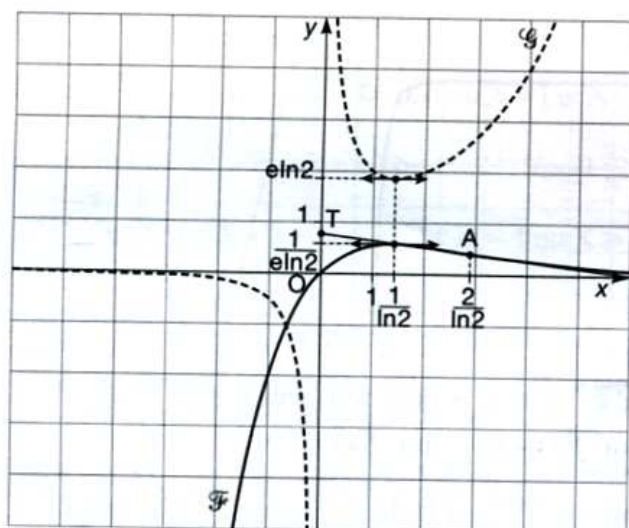
$$h'(x) = e^{-x \ln 2}(1 - x \ln 2) + e^{-2};$$

$$h''(x) = e^{-x \ln 2} \ln 2 (x \ln 2 - 2).$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{\ln 2}$	$+\infty$
$h''(x)$		-	0
h'		0	+
h		0	

Pour $x < \frac{2}{\ln 2}$, $h(x) < 0$ donc $\mathcal{F}$ est au-dessous de T et

pour $x > \frac{2}{\ln 2}$, $h(x) > 0$ donc $\mathcal{F}$ est au-dessus de T.



60 • 1. a) $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
f	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

2. $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, d'où T a pour équation $y = x - 1$.

3. $g(x) = x - 1 - f(x).$

a) $g'(x) = 1 - f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} [\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)].$

b) $g'(1) = 0$, et le signe de $g'(x)$ est celui de :

$$\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1).$$

• Sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$ et $x\sqrt{x} - 1 < 0$, donc $g'(x) < 0$;

• sur $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$ et $x\sqrt{x} - 1 > 0$, donc $g'(x) > 0$.

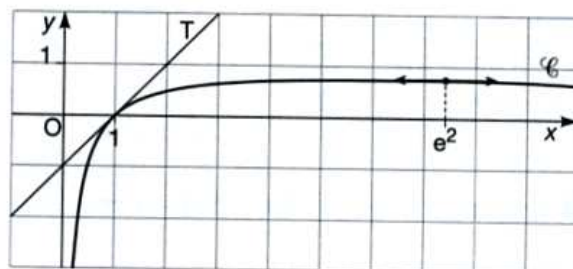
c) $g(1) = 0$;

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
g		0	+

Il résulte du tableau précédent que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

d) Ainsi pour tout x de $]0; +\infty[$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de T.

4.



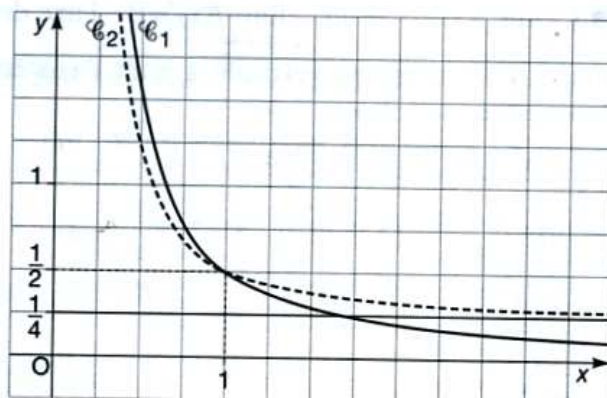
61 • 1. $f_1(x) = \frac{x+1}{4x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right);$

$$f_1'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{-2-x}{x^3}\right).$$

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		-
f_1	$+\infty$	0

• $f_2(x) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); \quad f_2'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{-2}{x^3}\right).$

x	0	$+\infty$
$f_2'(x)$		-
f_2	$+\infty$	$\frac{1}{4}$



2. $n \geq 3$, $f_n(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{x^n + 1}{x^2} \right)$ pour $x > 0$.

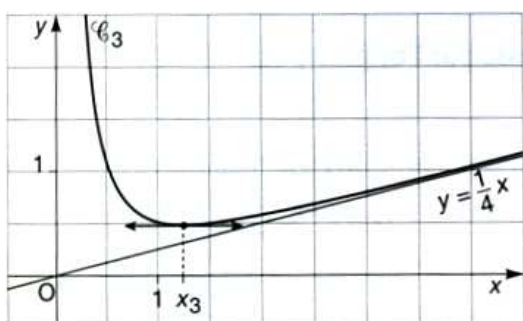
• $f'_n(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{(n-2)x^n - 2}{x^3} \right]$,

$f'_n(x) = 0$ pour $x = \left(\frac{2}{n-2} \right)^{\frac{1}{n}} = x_n$.

x	0	x_n	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	+
f_n	$+\infty$	$f_n(x_n)$	$+\infty$

• $f_3(x) = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4x^2}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f_3(x) - \frac{1}{4}x \right] = 0$, donc la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x$ est asymptote oblique en $+\infty$ à $\mathcal{C}_3$.



3. a) $\left(\frac{2}{n-2} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{n-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4-n}{n-2} \leq 0$;

- pour $n = 4$, $x_n = 1$;
- pour $n > 4$, $x_n < 1$.

b) • $x_n - \frac{1}{2}$ et $x_n^n - \frac{1}{2^n}$ ont le même signe, car :

$$x_n^n - \frac{1}{2^n} = \left(x_n - \frac{1}{2} \right) \left(x_n^{n-1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right),$$

et $x_n^{n-1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > 0$.

• $x_n^n - \frac{1}{2^n} = \frac{2}{n-2} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - n + 2}{2^n(n-2)}$.

c) $\mathcal{F}(x) = 2^{x+1} - x + 2$; $\mathcal{F}'(x) = (\ln 2)2^{x+1} - 1 > 0$.

x	0	$+\infty$
$\mathcal{F}'(x)$		+
$\mathcal{F}$	4	$+\infty$

Donc pour tout $n > 4$, $2^{n+1} - n + 2 > 0$, d'où $x_n > \frac{1}{2}$.
Il en résulte que $n > 4$, $\frac{1}{2} < x_n < 1$.

62 • 1. Pour tout réel x , $f(x) = e^{x \ln 2}$ et $g(x) = e^{2 \ln |x|}$ et $g(0) = 0$. Donc $f(x) \geq g(x)$ équivaut à $x \ln 2 \geq 2 \ln |x|$ ou encore $h(x) \geq 0$.

2. • Pour tout réel x non nul :

$$h'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{x \ln 2 - 2}{x} ;$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$;

x	$-\infty$	c	0	2	$\frac{2}{\ln 2}$	4	$+\infty$
$h'(x)$		+		-	0	+	
h	$-\infty$	0	$+\infty$	0	$2 - 2 \ln \left(\frac{2}{\ln 2} \right)$	0	$+\infty$

$$2 - 2 \ln \left(\frac{2}{\ln 2} \right) = 2 - 2 \ln 2 + 2 \ln(\ln 2) \approx -0,12.$$

3. h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un réel c unique dans $]-\infty; 0[$ tel que $h(c) = 0$.

Or $h(-1) = -\ln 2$ et $h\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4} \ln 2 - 2 \ln \frac{3}{4} \approx 0,05$,
donc c appartient à l'intervalle $]-1; -\frac{3}{4}[$.

De même, h est une bijection de l'intervalle $]0; \frac{2}{\ln 2}[$ sur l'intervalle $]2 - \ln \left(\frac{2}{\ln 2} \right); +\infty[$, donc il existe un réel a unique de $]0; \frac{2}{\ln 2}[$ tel que $h(a) = 0$.

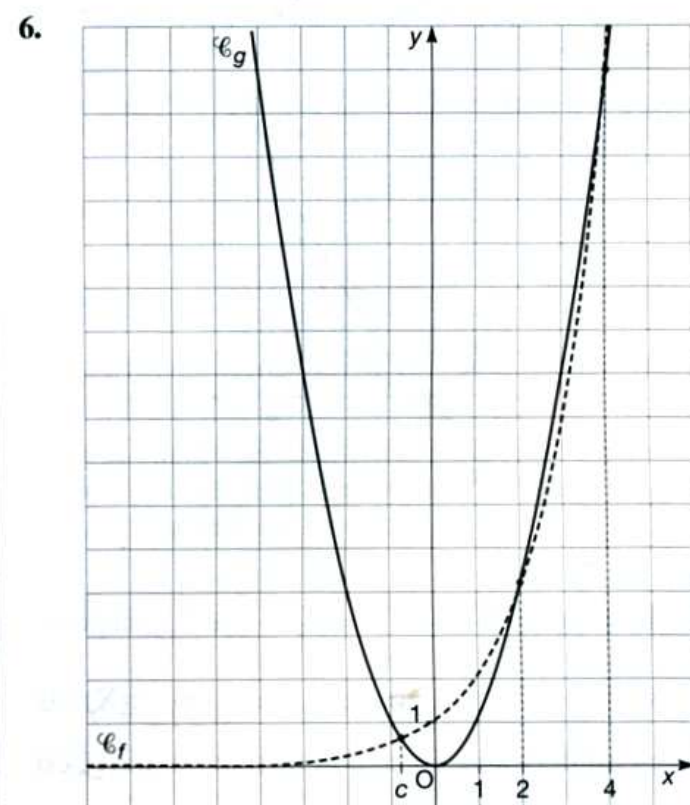
Or $h(2) = 0$ donc $a = 2$.

On démontre de même que $b = 4$.

4. Ainsi pour x de $]-\infty; c[\cup]2; 4[$, $h(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

5. À la calculatrice, $h(-0,76) \approx 0,022$ et $h(-0,77) \approx -0,11$, donc :

$$-0,77 < c < -0,79.$$



63 1. • $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$; f_n est continue en 0.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$ selon la parité de n , donc f_n n'est pas dérivable en 0 (tangente verticale en O).

2. $f_1(x) = x \ln x$; $f'_1(x) = \ln x + 1$;

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$		
$f'_1(x)$		-	0	+	
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $n \geq 2$.

a) $f'_n(x) = (\ln x)^n + n(\ln x)^{n-1}$
 $= (\ln x)^{n-1}(n + \ln x)$.

b) • n pair :

x	0	e^{-n}			1	$+\infty$	
$f'_n(x)$		+	0	-	0	+	
f_n	0	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• n impair :

x	0	e^{-n}	1	$+\infty$		
$f'_n(x)$		-	0	+	0	+
f_n	0	$\swarrow$	$-n^n e^{-n}$	$\searrow$	$+\infty$	

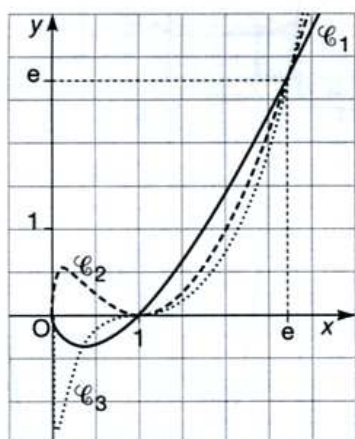
4. a) Les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par les points de coordonnées $(0; 0)$; $(1; 0)$; $(e; e)$.

b) $(f_{n+1} - f_n)(x) = x(\ln x)^n(\ln x - 1)$;

• si n pair, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ pour $x > e$;

• si n impair, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ pour $0 < x < 1$ ou pour $x > e$.

5.



64 1. $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$; on pose

$\frac{1}{x} = X$, $\tau(X) = X^3 e^{-X}$, $\lim_{x \rightarrow 0} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \tau(X) = 0$.

Donc f est dérivable en zéro et le nombre dérivé est zéro.

2. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$	0	+	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

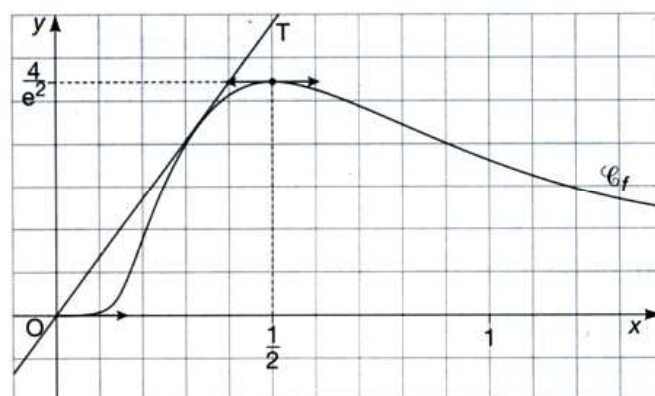
3. a) $f(x_0) = \frac{1}{x_0^2} e^{-\frac{1}{x_0}}$ et $f'(x_0) = \frac{1}{x_0^4} (1 - 2x_0) e^{-\frac{1}{x_0}}$.

Donc une équation de T est :

$$y = \frac{1}{x_0^4} (1 - 2x_0) e^{-\frac{1}{x_0}} x + \frac{1}{x_0^3} e^{-\frac{1}{x_0}} (3x_0 - 1).$$

b) T passe par l'origine pour $x_0 = \frac{1}{3}$.

4.



65 1. $f_n(x) = x^n \sqrt{x(1-x)}$, $f_n(0) = f_n(1) = 0$.

2. $f_0(x) = \sqrt{x-x^2}$, donc sur $[0; 1]$, $y^2 = x - x^2$ ou $x^2 + y^2 - x = 0$. On obtient pour $\mathcal{C}_0$ un demi-cercle de centre $(\frac{1}{2}; 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ avec $y \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$.

3. a) Pour tout x de $]0; 1[$,

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \left[n + \frac{1}{2} - x(n+1)\right]. \end{aligned}$$

b) $n \geq 1$; $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$.

Donc pour $n \geq 1$, f_n est dérivable en zéro.

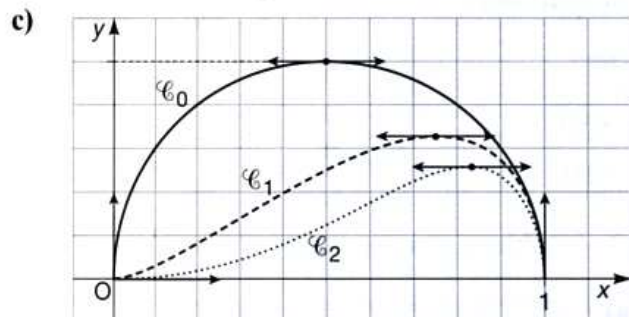
De même $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x} = +\infty$; f_n n'est pas dérivable en 1.

c)

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{n+1}{n+2}$	1
$f'_n(x)$	$+$	0	$-$
f_n	0	$f_n(\alpha)$	0

4. a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x-1)$.

b) Pour x dans $[0; 1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, donc $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_n$.



66 1. a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} - a$
ou encore $f'(x) = \frac{a}{x} [e^{a \ln x} - x]$.

b) $f'(x) > 0$ si et seulement si $a \ln x > \ln x$.
Or $a > 1$ donc $f'(x) > 0$ pour $x > 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$a-1$	0	$+\infty$

2. Il résulte que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$ donc
 $x^{a-1} \geq a(x-1)$.

Prendre toutes les initiatives

67 M et P ont respectivement pour coordonnées
 $(x; 2^x)$ et $(x; x)$. Donc $\overrightarrow{MP}$ a pour coordonnées
 $(0; x - 2^x)$.

Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2^x - x = e^{x \ln 2} - x$$

$$\varphi'(x) = \ln 2 e^{x \ln 2} - 1.$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} \geq \frac{1}{\ln 2} \text{ soit } \alpha \geq \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2}.$$

D'où le tableau de variation :

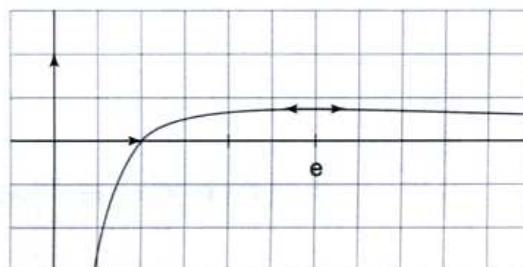
x	$-\infty$	$\frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2} = \alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$f(\alpha) = \frac{1 + \ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 0,91 > 0.$$

Il en résulte que $f(x) > 0$ pour tout réel x donc
que $MP = \varphi(x)$ et cette distance est minimale pour
 $x = \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2} > 0$ avec $x \approx 0,53$.

68 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0



Pour tout $x > 0$, $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$.

Donc pour tout entier $n \neq 0$,

$$\frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln 3}{3} \text{ et } n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}.$$

69 $f'(x) = e^{-x}(3x^2 - x^3)$.

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	$\frac{27}{e^3}$	-1

$f(x)$ s'annule donc pour deux valeurs de x , α et β telles que

$$\alpha \in]0; 3[\text{ et } \beta > 3.$$

Plus précisément :

$$1,8 < \alpha < 1,9 \text{ et}$$

$$4,5 < \beta < 4,6.$$

• $x^3 > e^x$ si et seulement si $f(x) > 0$ donc si et seulement
si $x \in]\alpha; \beta[$.

Ainsi la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$
est au-dessus de celle représentant la fonction $x \mapsto e^x$
si et seulement si $x \in]\alpha; \beta[$.

70 Pour $x > 0$,

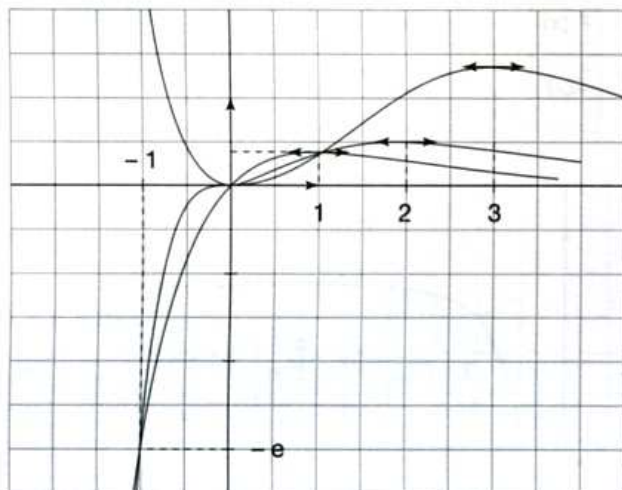
$$x^a = e^{a \ln x} \text{ et } x^b = e^{b \ln x}.$$

$x^a < x^b$ équivaut à $a \ln x < b \ln x$
soit $(a - b) \ln x < 0$.

Or $a - b < 0$ donc $x^a < x^b \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$.

71 A. 1. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	-
$f_1(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0



2. $f'_n(x) = x^{n-1}[n-x]e^{-x}$.

• n impair :

x	$-\infty$	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0	-
$f_n(x)$	$-\infty$	0	$\frac{n^n}{e^n}$	0

• n pair :

x	$-\infty$	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$\frac{n^n}{e^n}$	0

3. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n e^{-x}(x-1)$ sur $[0; +\infty[$, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ pour $x > 1$.

$f_{n+2}(x) - f_n(x) = x^n(x+1)(x-1)e^{-x}$ sur $[-\infty; 0]$ si n est pair $\mathcal{C}_{n+2}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ si $x < -1$, si n est impair $\mathcal{C}_{n+2}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ si $-1 < x < 0$.

4. Voir figure de A. 1.

B. 1. $e^{-x} > 0$ donc $x^n = e^x \Leftrightarrow x^n e^{-x} = 1$ soit $f_n(x) = 1$.

2. a) D'après le tableau il est évident que pour connaître le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 1$ on est ramené à comparer 1 et $\frac{n^n}{e^n}$.

b) $n^n = e^{n \ln n}$ donc $f_n(n) = e^{n \ln n - n}$.

3. a) $g'(x) = \ln x e^{x \ln x - x}$.

b)

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
g	1	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$

4. a) On est ramené à comparer $g(x)$ et 1.

Si n est impair et $n \geq 3$, $f_n(x) = 1$ a 2 solutions.

Si n est pair et $n \geq 4$, $f_n(x) = 1$ a 3 solutions.

Si $n = 2$, $f_n(x) = 1$ a 1 solution.

72 A. $\varphi(x) = 1 - \ln x + \ln[\ln x]$.

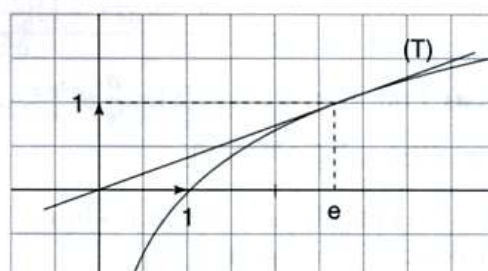
1. Pour tout réel $x > 1$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{1 - \ln x}{x \ln x}$.

2.

x	1	e	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	0

D'après le tableau pour tout $x \geq e$, $\varphi(x) \leq 0$.

B. 1. a)



b) $e^x = x^e \Leftrightarrow x = e \ln x$ ou $\ln x = \frac{x}{e}$.

Or $y = \frac{x}{e}$ est l'équation de la tangente (T) donc l'unique solution est $x = e$.

2. $f(x) = x \ln a - a \ln x$.

a) $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x} = \frac{x \ln a - a}{x}$.

x	0	1	$\frac{a}{\ln a}$	a	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\ln a$	$a \varphi(a)$	0	$+\infty$

b) $f\left(\frac{a}{\ln a}\right) = a - a \ln a + a \ln(\ln a) = a \varphi(a)$.

c) $a \varphi(a) < 0$ donc sur $]0; +\infty[$ $f(x)$ s'annule deux fois et sur $]0; +\infty[$ l'équation (E_a) a deux solutions

3. $f: x \mapsto x \ln 3 - 3 \ln x$.

x	0	1	α	$\frac{3}{\ln 3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 3$	0	$3 \varphi(3)$	0	$+\infty$

Il existe $\alpha \in]1; \frac{3}{\ln 3}[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Donc si $x \in]\alpha; 3[$, $f(x) < 0$ et la courbe représentative de $x \mapsto 3^x$ est en dessous de la courbe représentative de $x \mapsto x^3$.

73 1. $f(x) = xe^{-x \ln 3}$ donc **a)** faux, **b)** vrai, **c)** faux, **d)** vrai.

2. $f'(x) = e^{-x \ln 3} - x \ln 3$;

$e^{-x \ln 3} = e^{-x \ln 3} (1 - x \ln 3) = 3^{-x} (1 - x \ln 3)$ donc

a) vrai, **b)** faux, **c)** vrai.

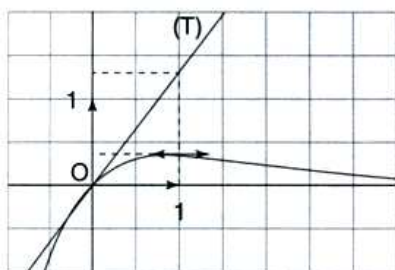
3.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e \ln 3}$	0

$e \ln 3 \approx 2,986... < 3$ et $\frac{1}{e \ln 3} > \frac{1}{3}$ donc

a) faux, **b)** vrai, **c)** vrai.

Courbe $\mathcal{C}$:



c) Vrai car la tangente T a pour équation $y = x$ et $f(x) - x = x[e^{-x \ln 3} - 1]$.

$e^{-x \ln 3} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x	-	0	+
Signe $[e^{-x \ln 3} - 1]$	+	0	-
Signe $[f(x) - x]$	-	0	-

D'où le résultat.

4. $g(x) = \ln f(x) = \ln x - x \ln 3$.

a) Vrai car pour $x > 0$, $f(x) \in]0; \frac{1}{e \ln 3}[$ donc $f(x) < 0$.

b) Vrai.

c) $g(x) = -1$ équivaut à $f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc **c)** faux.

74 1. **Vraie** car $f'(x) = -\ln 5 f(x)$ avec $f(x) = e^{-x \ln 5}$.

2. **Vraie** car pour $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$ et $\ln \sqrt{x} > 0$ donc f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{2x \ln \sqrt{x}} = \frac{1}{x \ln x}$.

3. **Vraie** car $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x > 3$ équivaut à $e^{-x \ln \sqrt{2}} > e^{\ln 3}$ soit $-x \ln 2 > 2 \ln 3$ d'où $x < -\frac{2 \ln 3}{\ln 2}$.

4. **Vraie.**

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x} \ln 2} - 1}{\frac{1}{x}}.$$

On pose $\frac{1}{x} \ln 2 = X$ et $f(x) = \frac{e^X - 1}{X} \ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(X) = \ln 2.$$

5. **Faux** car $x^a < x^b$ équivaut à $a \ln x < b \ln x$ ou $(b-a) \ln x > 0$.

$\ln x > 0$ uniquement si $x > 1$ donc pas vrai pour $x > 0$.

75 1. Voir le cours.

2. **a)** $f'(x) = x^{-\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \ln x\right)$ d'où $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^3$ et

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^3, f(e^3) = \ln e^3 \times (e^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{e}.$$

b) $f(1) = 0$ donc 1 est solution. Elle est unique car f est une bijection de $]0; e^3]$ sur $]-\infty; \frac{3}{e}]$.

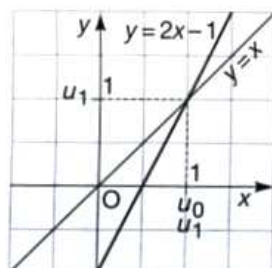
c) Si $x = e^{\frac{3}{4}}$, $f\left(e^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}}$ et $f'\left(e^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4} e^{-1}$ donc

$$y = \frac{3}{4} e^{-1} x - \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} e^{-1} x \text{ donc la tangente passe par l'origine du repère.}$$

Travaux dirigés (page 173)

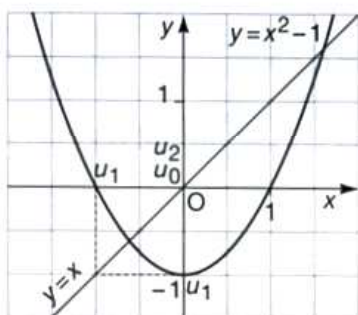
TD 1

2 a)

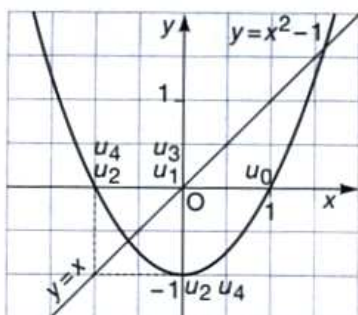


La suite (u_n) est constante : pour tout n , $u_n = 1$.

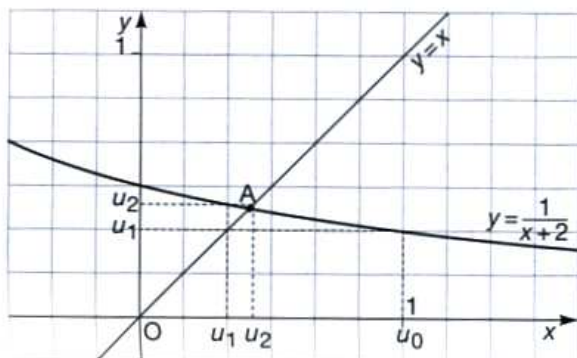
b) La suite prend (alternativement) les deux valeurs 0 et -1 . Elle ne converge pas.



c) $u_0 = 1$ puis la suite prend alternativement les deux valeurs 0 et -1 . Elle ne converge pas.

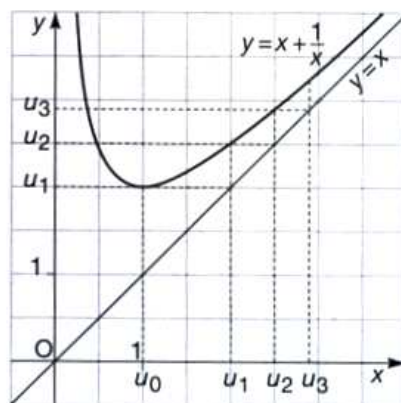


d)



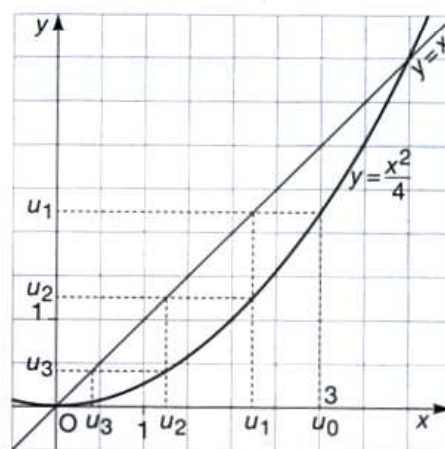
La suite est alternée et semble converger vers ℓ , abscisse du point A ($\ell = \sqrt{2} - 1$).

e)



La suite semble croissante (non majorée) et de limite $+\infty$.

f)

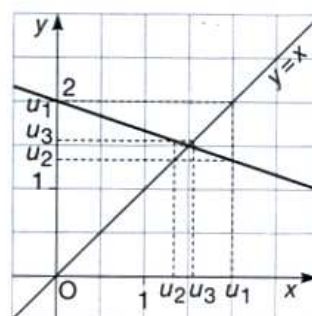


La suite semble décroissante et semble converger vers 0.

TD 2

1. La suite (u_n) semble alternée et de limite $\frac{3}{2}$.

2.



3. a) α est solution de $x = -\frac{x}{3} + 2$, soit $\alpha = \frac{3}{2}$.

$$t_{n+1} = -\frac{u_n}{3} + 2 - \frac{3}{2} = -\frac{u_n}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3}t_n.$$

La suite (t_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b) Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha = \frac{3}{2}.$$

2 1. Si $a = 1$, $u_{n+1} - u_n = b$: (u_n) est une suite arithmétique de raison b .

2. a) $a \neq 1$: Δ et d ont des coefficients directeurs différents, elles sont donc sécantes.

α est solution de $x = ax + b$, donc $a = \frac{b}{1-a}$.

b) $t_{n+1} = au_n + b - \frac{b}{1-a}$

$$= au_n + \frac{-ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = at_n.$$

La suite (t_n) est géométrique de raison a .

3. a = -1.

$$u_1 = -u_0 + b;$$

$$u_2 = -u_1 + b = u_0 = u_4 = u_6;$$

$$u_3 = u_5 = u_1.$$

On peut conjecturer que pour tout n ,

$$u_{2n} = u_0 \text{ et } u_{2n+1} = u_1.$$

Démontrons-le par récurrence.

• La propriété est vraie au rang 0.

• Supposons-la vraie au rang n .

$$u_{2(n+1)} = -u_{2n+1} + b = -u_1 + b = u_0;$$

$$u_{2(n+1)+1} = -u_{2(n+1)} + b = -u_0 + b = u_1.$$

Donc la suite est bien alternée et prend alternativement les valeurs u_0 et u_1 .

TD 3

1 1. Résulte de $0 \leq \sqrt{a} < u_0$.

2. $u_0^2 - 2u_0\sqrt{a} + a > 0 \Leftrightarrow u_0 - 2\sqrt{a} + \frac{a}{u_0} > 0$.

Il résulte du **1.** que $\frac{a}{u_0} < \sqrt{a} < u_0$ et donc que

$$u_0 + \frac{a}{u_0} < 2u_0 \text{ et donc que } \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) < u_0.$$

3. $v_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}}$

$$= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = v_n^2.$$

Récurrence « immédiate » :

La relation est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie au rang n .

$v_{n+1} = v_1^{2 \times 2^{n-1}} = v_1^{2^n}$. La relation est vraie pour tout $n \geq 1$.

$$w_n = \ln v_n = 2^{n-1} \ln v_1.$$

Comme $u_1 > \sqrt{a}$, il résulte que $0 < v_1 < 1$; alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Comme $u_n = -\sqrt{a} \frac{v_n + 1}{v_n - 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{a}$.

4. Application : $u_1 = \frac{43}{7} = 6,142\ 86$;

$$u_2 = \frac{1\ 831}{301} \approx 6,083\ 06 ; u_3 = \frac{3\ 352\ 399}{551\ 131} \approx 6,082\ 76.$$

2 1. a) $a < b$ équivaut (dans $\mathbb{R}^{+*}$) à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ qui entraîne $a < \sqrt{ab}$ et $\sqrt{ab} < b$ donc $A \in [a; b]$.

De $(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 > 0$ découle $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. Enfin,

$$\frac{a}{2} < \frac{b}{2} \text{ entraîne } \frac{a+b}{2} < b.$$

b) Dans $\mathbb{R}^{+*}$, $(a < b) \Leftrightarrow (a^2 < ab)$

$$\Leftrightarrow (a^2 + ab < 2ab)$$

$$\Leftrightarrow \left(a < \frac{2ab}{a+b}\right).$$

Dans le **a)**, on a : $2\sqrt{ab} < a + b$ donc

$$2ab < \sqrt{ab}(a+b) \text{ puis } \frac{2ab}{a+b} < A.$$

2. a) Pour tout n , $a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \times \frac{a_n+b_n}{2} = a_nb_n$.

Montrons, par récurrence, que pour tout n ,

$$a_n < \sqrt{ab} < b_n.$$

D'après la question précédente, la propriété est vraie au rang 1. Supposons la vraie au rang n . Le même raisonnement qu'à la question précédente, en remplaçant a et b respectivement par a_n et b_n nous permet de conclure que $a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1}$. La propriété est donc vraie pour tout n . En fait, on peut même conclure que pour tout n ,

$$a_n < a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1} < b_n.$$

b) Il résulte de la remarque précédente que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

3. a) Comme $a_n < a_{n+1}$, $b_{n+1} - a_{n+1} < b_{n+1} - a_n$.

Puis $b_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{a_n - b_n}{2}$, et donc

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}.$$

b) Il résulte du **a)** que $0 \leq b_1 - a_1 < \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$: la propriété est donc vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n . Le caractère positif de $b_{n+2} - a_{n+2}$ résulte de **2. a)**.

De la question **3. a)**, on déduit

$$b_{n+2} - a_{n+2} \leq \frac{1}{2}(b_{n+1} - a_{n+1})$$

et donc compte tenu de l'hypothèse de récurrence,

$b_{n+2} - a_{n+2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}(b_0 - a_0)$. La propriété est donc vraie pour tout n .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, le théorème 4 nous permet de conclure que la suite $(b_{n+1} - a_{n+1})$ converge vers 0.

Les deux suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et convergent donc vers la même limite.

c) Comme pour tout n , $a_n \leq \sqrt{ab} \leq b_n$, on a immédiatement :

$$0 \leq \sqrt{ab} - a_n \leq b_n - a_n \text{ et } 0 \leq b_n - \sqrt{ab} = b_n - a_n.$$

Comme $\sqrt{ab}(b_n - a_n) = 0$, le théorème 4 nous permet de conclure que la limite commune des suites (a_n) et (b_n) est le réel $\sqrt{ab}$.

4. a) $a = 2$ et $b = 3$; $a_1 = \frac{12}{5}$ et $b_1 = \frac{5}{2}$;

$a_2 = \frac{120}{49} \approx 2,448\,98$ et $b_2 = \frac{49}{20} = 2,45$;

$a_3 = \frac{11\,760}{4\,801} \approx 2,449\,489\,69$ et $b_3 = \frac{4801}{1\,960} \approx 2,449\,489\,8$.

TD 4

1. Tous les rectangles ont pour largeur $\frac{1}{n}$.

• Le premier rectangle inférieur (de sommet A) a pour longueur $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$ et donc pour aire :

$$\frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Le k -ième rectangle inférieur a pour longueur :

$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{n}{n+k} \text{ et pour aire } \frac{1}{n+k}.$$

Le dernier (de sommet B) a pour longueur $f(2) = \frac{1}{2}$

et donc pour aire $\frac{1}{2n}$.

En résumé : $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

• Pour S_n : la première longueur est $f(1)$ donc l'aire est $\frac{1}{n}$.

La dernière est $f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$, donc l'aire du dernier rectangle est $\frac{1}{2n-1}$.

On a bien : $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$.

$$\begin{aligned} 2. s_{n+1} - s_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

donc la suite (s_n) est croissante.

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$, donc la suite (S_n) est décroissante.

3. $S_n - s_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = 0$ et, compte-tenu des résultats de la question précédente, les suites (S_n) et (s_n) sont adjacentes et convergentes (vers $\mathcal{A}$).

4. a) $S_p - s_p \leq 10^{-2} \Rightarrow |s_p - \mathcal{A}| \leq 10^{-2}$, donc

$\frac{1}{2p} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow p \geq 50 \Rightarrow s_p$, valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près.

$\frac{1}{2p} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow p \geq 5000 \Rightarrow s_p$, valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-4} près.

b) $s_{50} = 0,688$ et $s_{500} \approx 0,6926$ donc :
 $0,6926 \leq \mathcal{A} \leq 0,6936$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 103)

1. et 2. Limite d'une suite

1 Corrigé dans le manuel.

2 $u_n > 10^6 \Leftrightarrow (\sqrt{n})^3 > (10^2)^3 \Leftrightarrow \sqrt{n} > 10^2$
 $\Leftrightarrow n > 10^4$,

donc $n_0 = 10^4$.

3 a) (u_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2} > 1$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) (u_n) est géométrique de raison $\frac{10}{10,1}$; $-1 < \frac{10}{10,1} < 1$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (théorème 1).

4 $u_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

5 Pour tout n , $u_n = \frac{2}{3^n}$.

$$\frac{2}{3^n} < 10^{-4} \Leftrightarrow 3^n > 20\,000.$$

$3^9 = 19\,683$ donc à partir de l'indice $n = 10$, $u_n < 10^{-4}$.

6 Pour tout n , $u_n = 2^n$.

$2^{49} < 10^{15} < 2^{50}$, donc à partir de l'indice $n = 50$, $u_n > 10^{15}$.

7 1. $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{6}$; $u_4 = \frac{1}{24}$;

$$u_5 = \frac{1}{120}; u_6 = \frac{1}{720}.$$

2. Pour $n \geq 1$, $n! \geq n$,

donc $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (théorème 5).

8 Pour $n \geq 1$, $-1 \leq \cos 2n \leq 1$,

donc $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, le

théorème 5 nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

9 Pour tout n ,

$$-1 \leq \cos n \leq 1, \text{ donc } n \leq n+1 - \cos n \leq n+2.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (théorème 5).

10 1.

n	1	2	3	4	5	6
u_n	-0,9	0,64	-0,343	0,1296	-0,03125	0,004

n	7	8	9	10	11
u_n	-0,000 21	0,000 25	-10^{-9}	0	10^{-11}

2. $n \geq 30 \Leftrightarrow \frac{n}{10} - 1 \geq 2 \Leftrightarrow u_n \geq 2^n$;

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (théorème 5).

11 Corrigé dans le manuel.

12 a) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x - \frac{1}{x+1}$;

or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{4} - 2 + \frac{2x}{x^2+1}$;

or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$, donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

13 a) $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto \frac{5x^2 - 3x + 7}{x^2 + x + 1}$;

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto \frac{-3x^2 + 2x + 4}{2(x+1)^2}$;

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{3}{2}$.

14 a) $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto \frac{10x-3}{x^2+1}$;

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto \frac{2x^2-1}{3x+7}$;

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

15 Corrigé dans le manuel.

16 a) $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \frac{n\pi+1}{2n+1}$ et $f: x \mapsto \sin x$.

$v_n = g(n)$ avec $g: x \mapsto \frac{\pi x + 1}{2x + 1}$; or $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

b) $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \frac{2n\pi}{3n+1}$ et $f: x \mapsto \cos x$.

$v_n = g(n)$ avec $g: x \mapsto \frac{2\pi x}{3x+1}$; or $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2\pi}{3}$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{2\pi}{3}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} f(x) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2}.$$

17 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1-n} = 0$. **b)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

18 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{2e^n + 3} = \frac{1}{2}$. **b)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 3} = -\frac{1}{3}$.

19 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$. **b)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2 + e^{-n}) = \ln 2$.

20 a) $u_n = \frac{\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}, (n \neq 0);$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc le numérateur a pour limite 1 en $+\infty$ et le dénominateur $+\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) $n \neq 0, u_n = \frac{n\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \sqrt{n} \times \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2}{n}};$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

21 a) Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ».

$$u_n = n^2 \times \frac{\left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$= n^2 \times \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le dénominateur a pour limite $2\sqrt{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $u_n = \frac{(\sqrt{2n^2 - 5} - \sqrt{2}n)(\sqrt{2n^2 - 5} + \sqrt{2}n)}{\sqrt{2n^2 - 5} + \sqrt{2}n}$

$$= \frac{-5}{\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}}.$$

$\sqrt{2n^2 - 5} = f(v_n)$ avec $v_n = 2n^2 - 5$ et $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n^2 - 5} = +\infty$.

Comme, de plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{2} = +\infty$, le dénominateur a pour limite $+\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

22 a) $u_n = \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+1)}} \times (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}} \times \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}};$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = \frac{-1}{\sqrt{n^2 + 5}(3n + \sqrt{9n^2 + 1})}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

23 • $u_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = n \times \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}, (n \neq 0),$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• $v_n = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

• $w_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} - n = \frac{1 - n}{n + 1};$

pour $n \neq 0$, $w_n = \frac{\frac{1}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -1$.

• $t_n = \frac{\frac{n^2 + 1}{n^2 + n} - 1}{\frac{1 - n}{n + 1} - 1} = 1 - \frac{n}{n^2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

24 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 4}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n} = +\infty$.

$v_n = \frac{3n^2 - 4}{n^2 + n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

$w_n = u_n - 3n = \frac{3n^2 - 4 - 3n^2 - 3}{n + 1} = \frac{-7}{n + 1},$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

25 1. Récurrence immédiate.

2. a) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 + u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = 1.$

La suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

b) $v_n = \frac{1}{3} + n, u_n = \frac{1}{\frac{1}{3} + n} = \frac{3}{1 + 3n}.$

3. $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto \frac{3}{1 + 3x};$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

26 1. a) $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}v_n.$

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) $v_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3^{n-1}}, u_n = \frac{2}{3^{n-1}} - 3.$

$$2. a) S_n = 6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right);$$

$$S'_n = S_n - 3(n+1) = 9 \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - 3n - 3.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 9 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = -\infty.$$

27 a) On ne s'intéresse au comportement des suites (u_n) et (v_n) que pour les « grandes » valeurs de n (vers $+\infty$). L'inégalité peut ne pas être vérifiée pour un nombre fini d'indice.

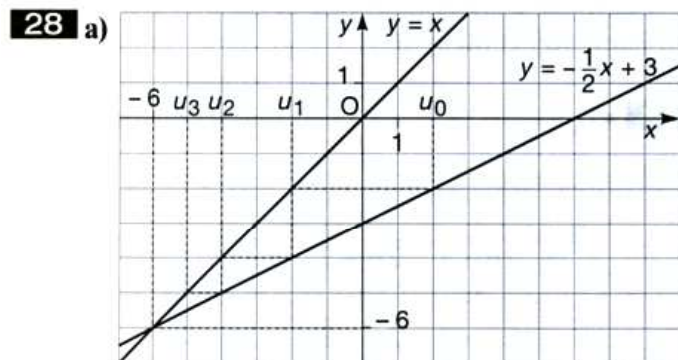
$$b) |u_n - \ell| \leq v_n \Leftrightarrow \ell - v_n \leq u_n \leq \ell + v_n.$$

c) Posons, pour tout entier n , $\ell - v_n = w_n$ et $\ell + v_n = t_n$. Par hypothèse, pour tout n supérieur à un certain entier m , $w_n \leq v_n \leq t_n$. De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$,

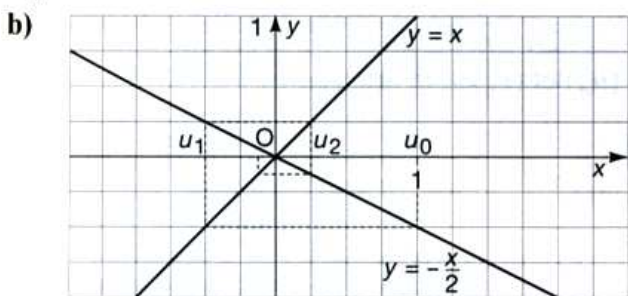
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ell.$$

Le théorème 4 permet de conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

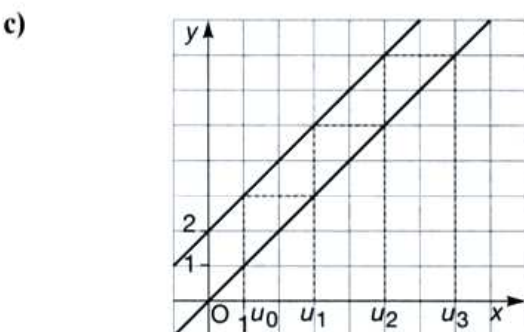
3. Suites monotones et convergence



(u_n) semble décroissante et de limite -6 .



(u_n) semble ni croissante, ni décroissante. ((u_{2n}) décroît et (u_{2n+1}) croît...) (u_n) semble converger vers 0. ((u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.)



(u_n) semble croissante et de limite $+\infty$. ((u_n) est une suite arithmétique de raison 2.)

29 • $u_5 = 4,6$; donc 0 n'est pas un majorant.

• D'autre part, $\frac{10}{n^2} > 0$, donc $u_n < 5$, et les réels 5 et 6 sont des majorants de (u_n) .

$$• u_{10\,000} = 5 - \frac{10}{10^{-8}} = 5 - 10^{-7} = 4,999\,999\,9;$$

or, $4,999\,999\,9 > 4,999\,99$, donc 4,999 99 n'est pas un majorant de (u_n) .

30 Corrigé dans le manuel.

31 1. a) Quel que soit le réel A, il existe un terme de la suite supérieur à A : $u_n > A$.

b) Quel que soit le réel A, $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir de l'indice n .

2. La suite étant non minorée, quel que soit le réel B, il existe un terme de la suite inférieur à B. La suite étant de plus décroissante, l'intervalle $] -\infty; B[$ contient tous les termes de la suite à partir de l'indice n : la suite a pour limite $-\infty$.

32 1. Pour tout $n > 0$, $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$.

$$2. a) u_n = \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

33 Corrigé dans le manuel.

$$\mathbf{34 a)} u_0 = 0 \text{ et, si } n \neq 0, u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}};$$

$$1 + \frac{1}{n^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} > 1 \Leftrightarrow 0 < u_n < 1.$$

La suite (u_n) est bornée (par 0 et 1).

b) Pour tout n , $u_n \geq 0$ et $u_n = \sqrt{1 - \frac{2}{n^2 + 1}} < 1$: (u_n) est bornée (par 0 et 1).

c) Pour tout n , $u_n < 0$.

$$\text{Pour tout } n, \sqrt{2n+3} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{2n+3}} > -\frac{2}{\sqrt{3}} : (u_n)$$

est bornée (par $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ et 0).

35 a) Pour tout n , $2^n \geq 1$, donc la suite est minorée; mais, et c'est une propriété sur $\mathbb{R}$, pour tout $M > 0$, il existe n tel que $2^n > M$: la suite n'est pas majorée.

b) $n\sqrt{3} - 2 > n$ pour $n \geq 3$, donc (u_n) n'est pas majorée, et $u_n \geq -2$ donc (u_n) est minorée.

c) Pour tout n , $u_n \geq -1$ et pour $n \geq 1$, $u_n \geq n^2$, donc (u_n) est minorée mais non majorée.

36 a) $\frac{1}{n+1}$ et n^2 sont positifs, donc $u_n \geq n^2 \geq 0$; la suite (u_n) est minorée mais non majorée.

b) $u_n \geq -1$, donc (u_n) est minorée par -1 ; $u_n \geq n-1$ donc (u_n) est non majorée.

c) • Si n est pair, $u_n = n^2$, donc la suite n'est pas majorée.

• Si n est impair, $u_n = -n^2$, qui tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite n'est pas minorée.

37 1. Pour tout n ,

$$u_n = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) < \frac{3}{2}.$$

2. Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$.

3. Théorème 7 : toute suite croissante et majorée est convergente. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$, il en résulte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}.$$

38 La fonction $f: x \mapsto x^2 - 5x + 6$ est croissante sur $[4; +\infty[$ et donc, pour tout $n \geq 4$, $n^2 - 5n + 6 \geq f(4) = 2$.

Il en résulte, pour tout $n \geq 4$, $u_n \leq \frac{1}{2}$.

4. Suites adjacentes

39 Corrigé dans le manuel.

40 • $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$: la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$: les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

41 a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

est strictement décroissante $\left(f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \right)$: la suite (u_n) est décroissante.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ est strictement croissante $\left(g'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} \right)$: la suite (v_n) est croissante.

Pour tout n ,

$$u_n - v_n = \frac{6}{n+1} \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0,$$

les deux suites sont bien adjacentes.

b) La suite (v_n) n'étant pas monotone, les deux suites ne peuvent être adjacentes.

$$\begin{aligned} \text{42 • } u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} \\ &\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0; \end{aligned}$$

la suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} \text{• } v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0; \end{aligned}$$

la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

43 • $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n} < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} \text{• } v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0; \end{aligned}$$

la suite (v_n) est croissante.

• $v_n - u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n}$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$: les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

44 • $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

$$\text{• } v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 :$$

la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$: les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

45 1. La propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n :

$$\begin{aligned} u_n \leq 1 \leq v_n &\Leftrightarrow 3u_n + 1 \leq 4 \leq 3v_n + 1 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1} : \end{aligned}$$

la propriété est vraie pour tout n .

2. Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n}{4} \geq 0$: la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n , $v_{n+1} - v_n = \frac{1-v_n}{4} \leq 0$: la suite (v_n) est décroissante.

Pour tout n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(v_n - u_n)$. Par une récurrence « immédiate », $v_n - u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n (v_0 - u_0)$ et donc $0 \leq (v_n - u_n) \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, le théorème 4 nous permet de conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ et les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent vers la même limite ℓ . De $0 \leq 1 - u_n \leq u_n - v_n$ on déduit que la limite ℓ est 1.

Apprendre à chercher

(page 180)

46 Études d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Les outils :

- Théorème de Pythagore.
- Étude d'une fonction irrationnelle.

Les objectifs :

- Savoir résoudre une équation irrationnelle.
- Savoir utiliser l'égalité $f(\ell) = \ell$ pour une fonction continue f .

1. a) Par hypothèse, le procédé peut se poursuivre indéfiniment, donc $\ell_n > 1$. De plus, ℓ_{n+1} est inscrit dans ℓ_n , donc $\ell_{n+1} < \ell_n$.

b) Une suite décroissante et minorée est convergente (théorème 7).

c) On applique le théorème de Pythagore.

Dans le triangle $A_{n+1}B_nB_{n+1}$ rectangle en B_n :

$$\ell_{n+1}^2 = (\ell_n - 1)^2 + 1 \text{ soit } \ell_{n+1} = \sqrt{1 + (\ell_n - 1)^2}.$$

2. a) $f(x) = \sqrt{1 + (x-1)^2}$.

b) f étant continue, ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

C'est donc une solution de l'équation

$$x = \sqrt{1 + (x-1)^2}, \text{ la suite étant minorée par 1, } \ell \geq 1.$$

c) Dans $\mathbb{R}^+$, $x = \sqrt{1 + (x-1)^2} \Leftrightarrow x^2 = 1 + (x-1)^2$
 $\Leftrightarrow 0 = 2 - 2x \Leftrightarrow x = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = 1$.

47 Études d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Les outils :

- Démonstration par récurrence.
- Suites adjacentes.

Les objectifs :

- Savoir montrer que deux suites sont adjacentes.

1. a) $u_1 = \frac{3}{2}$; $v_1 = 2$; $u_2 = \frac{12}{7}$; $v_2 = \frac{7}{4}$;

$u_3 = \frac{168}{97}$; $v_3 = \frac{97}{56}$.

b)

1	3		2			3
u_0	u_1	u_2	v_2	v_1		v_0

2. a) Par hypothèse, u_0 et v_0 sont strictement positifs : la proposition P_0 est vraie. Supposons P_n vraie et étudions le signe de u_{n+1} et de v_{n+1} .
 $u_n v_n > 0$ et $u_n + v_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
 Pour tout n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) $u_{n+1} v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n$.

Et ceci quel que soit n , donc, de proche en proche,

$$u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n = u_0 v_0 = ab.$$

3. • $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n - u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}$;

• $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}$.

4. a) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$
 $= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0$.

Donc, pour tout n ,

$v_n - u_n \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$;
 la suite (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

5. a) (u_n) étant croissante, $u_{n+1} \geq u_n$ et :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2v_n}{2} = \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

b) Au rang 0, $v_0 - u_0 \leq \frac{1}{2^0}(v_0 - u_0) = v_0 - u_0$.

P_0 est vraie. Supposons P_n vraie :

$$(u_n - v_n) \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0).$$

Alors $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$, d'après a) ;

donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$,

et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$.

P_{n+1} est vraie, donc, pour tout n ,

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0).$$

c) On a montré en 4. a) que $v_n - u_n$ était positif pour tout entier n , donc $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$.
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ (théorème 4) et les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite ℓ .

d) Le produit $u_n v_n$ converge donc vers ℓ^2 .

Or, pour tout n , $u_n v_n = ab$ donc

$$\ell^2 = ab.$$

De plus, les suites (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs (question 2. b), donc

$$\ell = \sqrt{ab}.$$

Pour progresser

(page 181)

Convergence

48 Corrigé dans le manuel.

49 1. Soit P_n la propriété $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

P_1 : $\frac{1}{1!} = 1$, $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$, donc $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}}$,
 P_1 est vraie. Supposons P_n vraie.

Alors $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1}$;

or, $n+1 \geq 2$, donc :

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

La propriété $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ est vraie pour tout n .

$$2. u_n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}},$$

soit $u_n \leq 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 3$.

La suite (u_n) est majorée par 3.

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, la suite (u_n) est croissante.
Étant majorée, elle converge.

50 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

2. a) $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$: P_1 est vraie. Supposons P_n vraie.

Alors $u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow u_n + \frac{1}{n} \leq 2$.

$$u_{n+1} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{n+2}{(n+1)^2};$$

or $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ car $(n+2)n < (n+1)^2$.

Donc $u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n} \leq 2$ et

$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$: P_{n+1} est vraie.

b) Pour tout n non nul, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$: la suite (u_n) est majorée par 2. Étant croissante, elle converge (théorème 7).

51 • Montrons par récurrence que :

$$0 \leq u_n - \ell \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell).$$

Par hypothèse, pour tout n , $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3} (u_n - \ell)$,

donc pour $n = 0$, $0 \leq u_1 - \ell \leq \frac{2}{3} (u_0 - \ell)$.

La propriété P_1 est vraie. Supposons-la vraie au rang n .

Alors $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3} (u_n - \ell) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (u_0 - \ell)$.

La propriété P_{n+1} est vraie, donc, pour tout entier n ,

$$0 \leq u_n - \ell \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (1 - \ell).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

• $u_n \in]\ell - 10^{-3}; \ell + 10^{-3}[\Leftrightarrow |u_n - \ell| < 10^{-3}$.

Par hypothèse, $0 \leq 1 - \ell$ et $\ell > 0$, donc $0 \leq 1 - \ell < 1$.

Il suffit donc de prendre N tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^N < 10^{-3}$.

À la calculatrice, $N = 18$.

$$\mathbf{52} \quad 1. u_p = \frac{a(2p+1) + b(2p-1)}{(2p-1)(2p+1)},$$

donc $2(a+b)p + (a-b) = 1$ quel que soit p .

$$\text{Donc } \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}.$$

$$2. S_n = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right)$$

donc $S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{1}{2}$.

53 • 1. a) Récurrence : $u_0 < 4$

Supposons $u_n < 4$, alors $3u_n + 4 < 16$ et $u_{n+1} < 4$.

La suite (u_n) est majorée par 4.

b) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$ du

signe de $-u_n^2 + 3u_n + 4$.

Or $-u_n^2 + 3u_n + 4 = (1 + u_n)(4 - u_n) > 0$ sur $] -1 ; 4[$.

Comme pour tout n , $u_n \in [0 ; 4[$, $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Croissante et majorée, la suite (u_n) converge (théorème 7) vers un réel ℓ .

La fonction $f = x \mapsto \sqrt{3x + 4}$ est continue sur $[0 ; 4]$.

Donc $\ell = f(\ell)$ soit $-\ell^2 + 3\ell + 4 = 0$ qui admet une seule solution positive 4.

2. a) Pour tout x de $[0 ; 4]$, $f(x) \in [0 ; 4]$.

$$4 - f(x) \leq \frac{1}{2}(4 - x) \Leftrightarrow f(x) \geq 2 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow f^2(x) \geq \left(2 + \frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x \geq x^2 \Leftrightarrow x \leq 4, \text{ donc pour tout entier naturel } n,$$

$$\text{on a : } 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

b) Par récurrence, $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) = \frac{1}{2^{n+1}}$,

donc, pour tout entier naturel n , $0 < |4 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ (théorème 5).

c) D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq n^2(4 - u_n) \leq \frac{n^2}{2^{n-2}}. \text{ Posons } w_n = \frac{n^2}{2^{n-2}}.$$

$$\ln w_n = 2 \ln n - n \ln 2 + 2 \ln 2 = n \left(2 \frac{\ln n}{n} - \ln 2 \right) + 2 \ln 2.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln w_n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

54 • $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$

$$= \frac{n^2(a+b+c) + n(3a+2b+c) + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

pour tout $n \geq 1$.

Donc $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \dots$$

$$+ \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$$

Donc $S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

55 • 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

2. a) $u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

3. $u_{2^1} = u_2 = \frac{3}{2} \geq \frac{2}{2}$: P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie : $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$. Alors :

$$u_{2^{n+1}} = u_{2^{n+1}} - u_{2^n} + u_{2^n} = u_{2N} - u_N + u_{2^n} \text{ avec } N = 2^n.$$

D'après la question 2. et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

P_{n+1} est vraie. Donc, pour tout $n \geq 1$, $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.

4. La suite (u_n) est croissante non majorée, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

56 • 1. $v_{n+1} = \ln[e\sqrt{u_n}] - 2 = 1 + \frac{1}{2} \ln u_n - 2 = \frac{1}{2} v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$.

2. $v_n = \frac{1}{2^n}$; $\ln u_n = 2 + \frac{1}{2^n}$.

3. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln u_n) = 2$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$.

57 • A. 1. a) • $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	e	$+\infty$

2. Pour $x > e$, $f(x) > e$.

B. 1. $u_{n+1} = f(u_n)$ et l'image par f de l'intervalle $]e ; +\infty[$ est $]e ; +\infty[$.

$u_0 = a > e$ est vrai ; si $u_n > e$, alors $f(u_0) > e$, $u_{n+1} > e$.

Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n > e$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$; or $u_n > e$, donc $\ln u_n > 1$ et $1 - \ln u_n < 0$, donc la suite est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente vers $\ell > 0$. De la continuité de f , on déduit que $f(\ell) = \ell$ ou $\ell(1 - \ln \ell) = 0$, donc $\ell = e$.

Étude de limites par comparaison

58 Corrigé dans le manuel.

59 a) Pour $n \neq 0$, $u_n = \frac{2 + \frac{\cos n}{n}}{5 + \frac{\sin n}{n}}$;

or $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$, donc

(théorème 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. Il en

résulte $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5}$.

b) $2 + \cos n \geq 1$, donc $u_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (théorème 5).

60 1. Pour tout n , $0 \leq \frac{2n^2}{n^2 + 1} \leq \frac{2n^2 + 2}{n^2 + 1} = 2$; la suite (v_n) est bornée par 0 et 2.

2. Pour tout n , $0 \times \frac{1}{2^n} \leq u_n \leq 2 \times \frac{1}{2^n}$,

soit $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, donc (théorème 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

61 Corrigé dans le manuel.

62 • Pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^2 + 1} > \frac{1}{n^2 + 2} > \dots > \frac{1}{n^2 + n} > 0,$$

$$\text{donc } 0 < u_n \leq \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$, (théorème 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

63 • 1. Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}; \end{aligned}$$

$$\text{or } 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n} > 0,$$

$$\text{donc } \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0,$$

donc (théorème 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$3. \sqrt{n} \times w_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sqrt{n+1} - 1.$$

$$w_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1.$$

64 • 1. Pour tout n , $u_{n+1} = u_n^2 + 1 \geq 1 > 0$.

2. $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1$. Or le trinôme $x^2 - x + 1$ est toujours strictement positif ($\Delta < 0$, $a > 0$); donc, pour tout n , $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

$$3. u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, u_4 = 26.$$

Or $26 > 2^4 = 16$ donc la propriété est vraie au rang 4.

Supposons-la vraie au rang $n > 4$, $u_n \geq 2^n$. Alors:

$$u_{n+1} = u_n^2 + 1 \geq (2^n)^2 + 1 = 2^{2n} + 1;$$

$$\text{or, } 2^{2n} + 1 = 2^{n+1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \text{ et, pour } n \geq 4,$$

$$2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} > 1;$$

donc $u_{n+1} > 2^{n+1}$: pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$.

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty, \text{ donc (théorème 5) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

65 • 1. a) Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

f est strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: pour

$$\text{tout réel } x > 0, f(x) < 0 \text{ et } \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

$$\text{b) Pour tout } x > 0, \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{x+1}{x} - 1 = \frac{1}{x}.$$

$$2. \text{ a) } u_n \leq \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} + \dots + \ln \frac{2n}{2n-1}$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n},$$

$$\text{et } u_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1}\right) \leq u_n + \frac{1}{2n}.$$

b) Il en résulte, pour tout entier non nul n ,

$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n} \text{ soit : } \ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \ln 2 \text{ et le}$$

théorème d'encadrement nous permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

66 1. a) La propriété est vraie pour $n = k$.
Supposons qu'elle soit vraie au rang $n > k$

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{n+1} < \frac{k^n}{n!} \text{ car } k < n+1.$$

$$\text{b) } \frac{x^n}{n!} = \frac{k^n}{n!} \times \left(\frac{x}{k}\right)^n \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

c) Comme $0 < \frac{x}{k} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$ et, (théorème d'encadrement) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

2. a) $\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{n}{n} \times \frac{n}{n-1} \times \dots \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{1}$ produit dont tous les facteurs sont supérieurs ou égaux à 1.

$$\text{b) } \frac{n^n}{n!} = n \times \frac{n^{n-1}}{n!} \geq n, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

Suites du type $u_{n+1} = au_n + b$

$$\begin{aligned} \text{67 1. } v_{n+1} &= \frac{2}{3}u_n - 1 + 3 \\ &= \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n; \end{aligned}$$

la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = 1$.

$$2. v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ (théorème 1), donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3.$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ a) } S_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^0 - 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 - 3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \\ &= -3(n+1) + \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= -3(n+1) + 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} -3(n+1) = -\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty.$$

$$\text{68 1. } u_0 = 1; u_1 = 0; u_2 = -\frac{1}{2}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{7}{8}.$$

2. a) $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2} - \alpha = \frac{1}{2}(u_n - 1 - 2\alpha)$, donc « (v_n) est géométrique » équivaut à $\alpha = 1 + 2\alpha$, soit $\alpha = -1$.

$$\text{b) } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \text{ avec } v_n = u_n + 1.$$

$$\text{Donc } v_0 = 1 \text{ et } v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, u_n = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } u_{n+1} - u_n &= -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0; \end{aligned}$$

la suite (u_n) est décroissante. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc la suite (u_n) converge vers 1.

Remarque : On aurait pu montrer que (u_n) était minorée par -1 ... De plus, le calcul des cinq premiers termes permet de conjecturer que $u_n = -\frac{2^n - 1}{2^n} = -1 + \frac{1}{2^n}$.

La démonstration par récurrence ne pose pas de problème.

$$\begin{aligned} \text{d) } u_n \in]-1 - 10^{-4}; -1 + 10^{-4}[&\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow 2^n > 10^4; \end{aligned}$$

or $2^{13} = 8192$, donc $u_n \in]-1 - 10^{-4}; -1 + 10^{-4}[$ à partir de $n = 14$.

$$\begin{aligned} \text{69 1. } v_{n+1} &= 2u_n - \frac{1}{3} - \alpha \\ &= 2\left(u_n - \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2v_n = 2(u_n - \alpha), \end{aligned}$$

donc « (v_n) géométrique » équivaut à $\alpha = \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{2}$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$.

2. (v_n) est une suite géométrique de raison $2 > 1$, donc la suite ne converge pas.

$$3. v_0 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{ donc } v_n = \frac{5}{3} \times 2^n.$$

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{5}{3} \times 2^0 + \frac{5}{3} \times 2^1 + \dots + \frac{5}{3} \times 2^n = \frac{5}{3} \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= \frac{5}{3}(2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

$$4. u_n = v_n + \frac{1}{3}, \text{ donc}$$

$$S_n = s_n + (n+1) \times \frac{1}{3} = \frac{n+1}{3} + \frac{5}{3}(2^{n+1} - 1).$$

Suites du type $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$

70 1. Soit P_n : « $u_n > 1$ ».

$u_0 = 3 > 1$. P_0 est vraie. Supposons P_n vraie.

Alors $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{u_n + 1} > 4 - 3 = 1$ donc, pour tout n , $u_n > 1$, ce qui assure l'existence de u_{n+1} .

$$2. v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1} = \frac{2u_n-4}{3u_n-3} = \frac{2}{3}v_n :$$

la suite (v_n) est géométrique.

Sa raison est $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

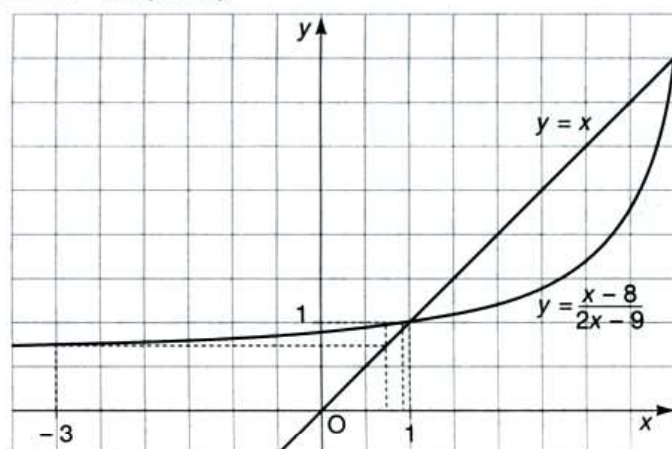
3. Comme pour tout n , $v_n \neq 1$,

$$v_n(u_n - 1) = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1},$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

71 Corrigé dans le manuel.

72 • 1. a) et b)



La suite (u_n) semble converger vers 1.

2. P_n : « $u_n < 1$ ».

$u_0 = -3 < 1$ donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 8}{\frac{u_n - 9}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{7}{18 - 4u_n};$$

$$u_n < 1 \Leftrightarrow 18 - 4u_n > 14 \Leftrightarrow \frac{7}{18 - 4u_n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} < 1.$$

Donc, pour tout entier n , $u_n < 1$.

$$3. u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 8 - 2u_n^2 + 9u_n}{2u_n - 9} = \frac{2u_n^2 - 10u_n + 8}{9 - 2u_n}.$$

L'étude de la fonction $f: x \mapsto 2x^2 - 10x + 8$ sur $]-\infty; 1[$ montre que $f(x) > 0$. De plus, $9 - 2u_n > 0$ d'après 2.

Donc, pour tout n , $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante. Étant majorée par 1, elle converge (théorème 7).

$$4. v_{n+1} = 1 - \frac{u_n - 8}{2u_n - 9} = \frac{u_n - 1}{2u_n - 9} = \frac{v_n}{9 - 2u_n}; \text{ or, } u_n < 1,$$

donc $\frac{1}{9 - 2u_n} < \frac{1}{7}$ et v_n est positif. Il en résulte que pour

tout n , $0 < v_{n+1} < \frac{1}{7}v_n$. Une récurrence immédiate

nous donne $0 < v_n < \frac{1}{7^n}v_0 = \frac{4}{7^n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{7^n} = 0$,

donc (théorème 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

5. Pour tout n , $u_n = 1 - v_n$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

$$6. u_n > 0,99 \Leftrightarrow v_n < 0,01.$$

Il suffit donc de choisir N tel que $\frac{4}{7^N} < \frac{1}{100}$, soit $7^N > 400$; $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$ donc $N = 3$.

73 • 1. Soit P_n la propriété : « $u_n > 0$ ».

• $u_1 = \frac{3}{2} > 0$: P_1 est vraie.

• Supposons P_n vraie. Alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) > 0$, donc P_{n+1} est vraie et pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$.

2. Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n} > 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} > \sqrt{2}$.

Comme $u_1 > \sqrt{2}$, pour tout $n \geq 1$, $u_n > \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} 3. \bullet \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} \\ &= u_{n+1} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \text{ donc } u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}).$$

Soit p_n la propriété « $u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^{n-1}}$ ».

• $u_1 < 1 = \frac{1}{2^0}$, donc p_1 est vraie.

• Supposons p_n vraie.

D'après le résultat précédent :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n},$$

donc p_{n+1} est vraie et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}.$$

4. Il résulte de 2. et 3. que pour tout $n \geq 1$,

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}.$$

Suites adjacentes

74 Corrigé dans le manuel.

75 • 1. • $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} \bullet v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{-n+1}{(n+1)!} \leq 0, \end{aligned}$$

(v_n) est décroissante.

$$\bullet v_n - u_n = \frac{1}{n!} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0;$$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$2. u_7 = \frac{685}{252} \approx 2,7182; v_7 = \frac{4\,567}{1\,680} \approx 2,7184.$$

Donc $\ell = 2,718$ à 10^{-3} près par défaut.

3. Supposons $\ell = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers non nuls.

Alors $u_q < \ell < v_q$, donc $q! u_q < p(q-1)! < q! v_q$.

$$\text{Or } q! v_q = q! \left(u_q + \frac{1}{q!} \right),$$

donc $q! u_q < p(q-1)! < q! u_q + 1$.

Les trois nombres ci-dessus sont des entiers naturels : cette double inégalité est impossible, car il n'y a pas d'entier entre deux entiers consécutifs. C'est une contradiction : ℓ n'est pas rationnel.

$$\mathbf{76} \bullet 1. u_1 = \frac{7}{2}; v_1 = \frac{15}{4}; u_2 = \frac{29}{8}; v_2 = \frac{59}{16}.$$

$$\begin{aligned} 2. \mathbf{a)} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

et donc $w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n$. La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$\mathbf{b)} \text{ Pour tout } n, w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n w_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

3. Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} \leq \frac{u_n - v_n}{2} = -\frac{w_n}{2} \leq 0$, donc la suite (v_n) est décroissante. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$\begin{aligned} 4. \mathbf{a)} t_{n+1} &= \frac{1}{3} \left(\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n \right) = t_n. \end{aligned}$$

La suite (t_n) est constante et égale à $\frac{11}{3}$.

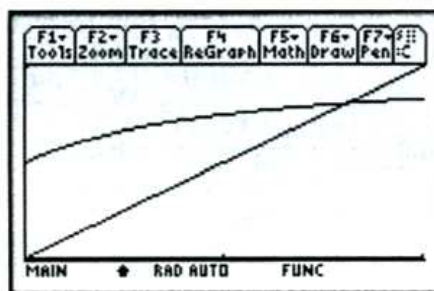
$$\mathbf{b)} \ell = \frac{11}{3}.$$

77 • 1. Pour tout x de $[0; 2]$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$.

f est donc croissante sur $[0; 2]$: $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ soit

$$\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{3} \text{ et } f(x) \text{ appartient bien à } [1; 2].$$

2.



a) (u_n) semble croissante et convergente et (v_n) semble décroissante et convergente. Elles semblent adjacentes.

b) $u_0 \in [1; 2]$. Supposons que $u_n \in [1; 2]$ alors, d'après la question 1., $u_{n+1} = f(u_n) \in [1; 2]$: pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.

$u_1 = \frac{3}{2}$ donc $u_0 \leq u_1$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. f est croissante sur $[1; 2]$ donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$, la suite (u_n) est croissante.

On démontre de même que :

– pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq 2$;

– pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$.

c) Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

Le dénominateur $(v_n + 1)(u_n + 1)$ étant toujours strictement positif (et même supérieur à 4), $v_{n+1} - u_{n+1}$ et $v_n - u_n$ sont de même signe. Par une récurrence immédiate, ils sont du signe de $v_0 - u_0$. Donc pour tout entier naturel n ,

$$v_n - u_n \geq 0 \text{ et } v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{4} (v_n - u_n).$$

d) Il en résulte (récurrence immédiate) que pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e) Pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$: le théorème d'encadrement nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : elles convergent vers un même réel α .

f étant continue, α est solution de l'équation $f(x) = x$ qui équivaut à $x^2 - x - 1 = 0$ qui admet une unique

solution dans $[1; 2]$, le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

78 • 1. Notons P_n la proposition : « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».

• $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$ donc P_0 est vraie.

• Supposons P_n vraie.

Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$, donc

P_{n+1} est vraie et pour tout n , u_n et v_n sont bien strictement positifs.

$$\begin{aligned} 2. (v_n - u_n)(v_n + u_n) &= \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2}{4} - u_{n-1}v_{n-1} \\ &= \frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{4} \geq 0; \end{aligned}$$

donc $(v_n - u_n)(v_n + u_n) \geq 0$,

soit, d'après 1., $v_n - u_n \geq 0$ et $v_n \geq u_n$.

$$\begin{aligned} 3. a) v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{2} \times \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} \times (v_n - u_n) \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n). \end{aligned}$$

b) Notons P_n la proposition : « $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (b - a)$ ».

$v_0 - u_0 = b - a = \frac{1}{2^0} (b - a)$, donc P_0 est vraie.

On suppose P_n vraie. Alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} (b - a) : P_{n+1} \text{ vraie.}$$

Donc, pour tout n , $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (b - a)$.

$$\begin{aligned} 4. \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2^n} (b - a) \right] \\ &= 0 \text{ (théorème I).} \end{aligned}$$

• Tous les termes considérés sont strictement positifs ;

$$\text{donc étudions } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}} \leq 1, \text{ car } v_n \geq u_n$$

donc $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

$$\bullet v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0, \text{ car } u_n \leq v_n;$$

donc la suite (v_n) est décroissante et les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$5. v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (5 - 2).$$

Il suffit d'avoir $\frac{3}{2^n} < \frac{1}{10^3}$ soit $2^n > 3\,000$.

Or, $2^{11} = 2\,048$ et $2^{12} = 4\,096$, donc $v_{12} - u_{12} \leq 10^{-3}$.

En fait, le calcul de u_3 et v_3 suffit pour affirmer que $\ell = 3,328$ à 10^{-3} près par défaut.

79 • 1. a) P_n : « $u_n < v_n$ ».

$u_0 = -1 < 2 = v_0$. P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie, soit $u_n < v_n$. Alors :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10} = \frac{3(u_n - v_n)}{10} < 0,$$

donc P_{n+1} est vraie et, pour tout n , $u_n < v_n$.

b) • $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} > 0$, donc (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{5} < 0$, donc (v_n) est croissante.

• D'après a), $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10} (u_n - v_n)$ donc, par récurrence immédiate, $u_n - v_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n (u_0 - v_0)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0$ (théorème I),

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$: les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$2. s_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + a \frac{u_n + 4v_n}{5} = k(u_n + av_n),$$

$$\text{d'où } u_n \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{5}\right) + v_n \left(\frac{1}{2} + \frac{4a}{5}\right) = ku_n + kav_n.$$

En identifiant, $k = \frac{1}{2} + \frac{a}{5}$ et $ak = \frac{1}{2} + \frac{4a}{5}$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{5} &= \frac{1}{2} + \frac{4a}{5} \Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{5}{2} \text{ et } k = 1 \text{ ou } a = -1 \text{ et } k = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ Donc } s_n = u_n + \frac{5}{2}v_n = u_0 + \frac{5}{2}v_0 = 4,$$

$$\text{et } t_n = u_n - v_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n (u_0 - v_0) = \frac{-3^{n+1}}{10^n}.$$

$$4. \frac{7}{2}v_n = 4 + \frac{3^{n+1}}{10^n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{8}{7}.$$

Fonctions continues et limites de suites

80 • 1. $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,449$; $u_2 \approx 2,906$; $u_3 \approx 2,984$.

2. $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f: x \mapsto \sqrt{6+x}$.

Pour tout x , $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$ donc f est strictement

croissante (ou f est la composée de deux fonctions croissantes).

• $u_0 < u_1 < 3$.

• Supposons $u_n < u_{n+1} < 3$, alors f étant strictement croissante $f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(3)$, soit $u_{n+1} < u_{n+2} < 3$, donc pour tout n , $u_n < u_{n+1} < 3$; la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle converge. Soit ℓ sa limite.

3. f étant continue sur $[0; +\infty[$, ℓ est solution positive de l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{x+6} = x$.

Dans $\mathbb{R}^+$, (E) $\Leftrightarrow x+6 = x^2$, qui a deux solutions -2 et 3 , donc $\ell = 3$.

81 • 1. $u_1 < u_2 = 2$. Supposons $u_n < u_{n+1} \leq 2$ et soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{2+x}$.

Pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-2; +\infty[$.

Donc $f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(2)$, soit $u_{n+1} < u_{n+2} \leq 2$, et ceci est donc vrai pour tout n . La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2 : elle converge vers ℓ (théorème 7).

2. f étant continue sur $[-2; +\infty[$, ℓ est solution positive de l'équation $f(x) = x$.

Soit $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow$ (dans $\mathbb{R}^+$) $x+2 = x^2$ qui admet deux solutions -1 et 2 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

82 • 1. a) $u_0 = 1 > 0$.

Supposons $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} > 0$ donc, pour tout n , $u_n > 0$.

b) $u_1 = 2$ donc $\frac{3}{2} \leq u_1 \leq 2$.

$n \geq 1$; supposons $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$. Alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{2}{3}$

et $1 + \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{3}$, soit $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{3} < 2$.

Donc, pour tout $n \geq 1$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

2. $f(x) - f(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$; pour $x \geq \frac{3}{2}$ et $y \geq \frac{3}{2}$:

$xy \geq \frac{9}{4}$, donc $\frac{1}{xy} \leq \frac{4}{9}$ et $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|$.

3. a) f étant continue et les termes (u_n) étant tous supérieurs à $\frac{3}{2}$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$,

soit $x = 1 + \frac{1}{x}$ ou encore $x^2 - x - 1 = 0$, donc $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (c'est le nombre d'or).

b) En utilisant 2., comme $\ell \geq \frac{3}{2}$:

$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|$, soit $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|$.

c) Soit P_n : « $|u_{n+1} - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|u_1 - \ell|$ » ;

$|u_1 - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^0|u_1 - \ell|$ donc P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie : $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|u_1 - \ell|$, alors :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n|u_1 - \ell|,$$

donc P_{n+1} est vraie et ainsi, pour tout n , P_n est vraie.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$, et ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

83 • A. 1. a) $f'(x) = 1 \times \frac{xe^{-x}}{4}$ et $f''(x) = \frac{1-x}{4}e^{-x}$.

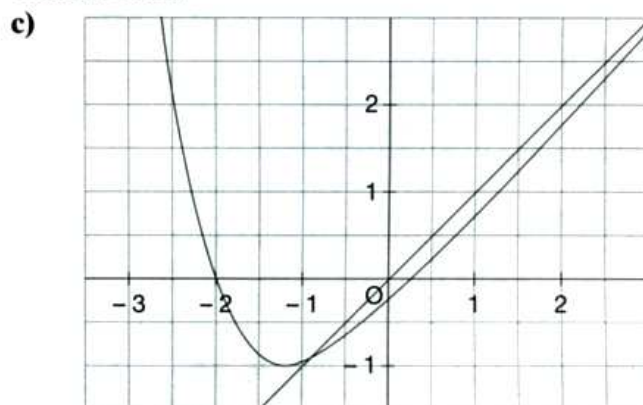
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	+	0	-
f'	$-\infty$	$1 + \frac{1}{4e}$	1

c) Sur $]-\infty; 1]$, f' est continue, strictement croissante et $0 \in]-\infty; 1 + \frac{1}{4e}]$: l'équation $f'(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$. $\alpha \approx -1,20$.

2. a) f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}\right] = 0$: la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à C.

Si $x < -1$, C est au-dessus de Δ et si $x > -1$, C est en dessous de Δ .



B. 1. La suite (u_n) semble décroissante et convergente vers -1 .

2. a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $-1 < u_n < 0$.

$u_1 = -\frac{1}{4}$: la propriété est vraie au rang 1.

Supposons la vraie au rang n .

f étant croissante sur $[-1; +\infty[$, $f(-1) < u_{n+1} < f(0)$, soit $-1 < u_{n+1} < -\frac{1}{4}$ et la propriété est vraie pour tout n .

b) $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}(u_n + 1)e^{u_n} < 0$: la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par -1 , elle est convergente.

$$\begin{aligned} \mathbf{3. a)} \quad 0 < u_{n+1} + 1 &= u_n - \frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n} + 1 \\ &= (u_n + 1) \left(1 - \frac{1}{4e^{u_n}} \right). \end{aligned}$$

Comme $u_n < 0$, $\frac{1}{e^{u_n}} > 1$ et $u_{n+1} + 1 \leq \frac{3}{4}(u_n + 1)$.

b) $u_0 = -\frac{1}{4}$ soit $0 \leq u_0 + 1 \leq 1$: la propriété est vraie au rang 0. Supposons la vraie au rang n .

D'après **a)**, $0 < u_{n+1} + 1 \leq \frac{3}{4}(u_n + 1)$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_{n+1} + 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$, le théorème 4 nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

84 • **1.** Pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} \geq 0$. f est

croissante sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ et $f(1) = 1$ donc pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$.

2. a) $u_0 > 1$. Supposons $u_n > 1$, alors $u_{n+1} = f(u_n) > 1$, donc pour tout entier n , $u_n > 1$, v_n existe et est strictement positif, donc w_n existe.

$$\mathbf{b)} \quad w_{n+1} = \ln \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \ln \left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right)^2 = 2w_n.$$

c) $w_0 = \ln \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$w_n = \ln \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n}.$$

Il en résulte que $v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n}$.

$$u_n = \frac{1}{1 - v_n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n}}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

85 • **1.** (u_n) semble décroissante et convergente vers $\ell \in]-2; -1,5[$.

2. a) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

$f(u_0) - u_0 = -1$, donc $u_1 \leq u_0$.

Supposons $u_{n+1} \leq u_n$, f étant croissante, $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ soit $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. La propriété est vraie pour tout n : la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour tout réel x , $f(x) \geq -2$, donc pour tout n , $u_n \geq -2$. $u_0 = 0$ et la suite est décroissante, donc pour tout n , $u_n \leq 0$. Décroissante et minorée, la suite est convergente.

3. a) $\varphi'(x) = e^x - 1$: φ est décroissante sur $]-\infty; 0[$, croissante sur $]0; +\infty[$.

φ atteint son minimum en 0 : $\varphi(0) = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Sur $]-\infty; 0[$, φ est strictement décroissante et continue ; $0 \in]-1; +\infty[$: l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution. Même raisonnement sur $]0; +\infty[$.

Les équations $\varphi(x) = 0$ et $f(x) = x$ étant équivalentes, cette dernière admet deux solutions et deux seulement dans $\mathbb{R}$.

b) $-1,85 \leq \ell \leq -1,84$.

86 • **1.** $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \frac{x}{2+x^2}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc si (u_n) converge, sa limite, est solution de l'équation $f(x) = x$, soit :

$$\frac{x}{2+x^2} = x \Leftrightarrow x(1-2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1+x^2) = 0.$$

La seule limite possible est donc 0.

2. $2 + u_n^2 > 2$, donc $\frac{1}{2+u_n^2} < \frac{1}{2}$ et $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.

3. Montrons par récurrence que $|u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}$.

• $|u_1| \leq \frac{|u_0|}{2}$ d'après **2**.

• Supposons $|u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}$.

Alors $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{|u_0|}{2^n} = \frac{|u_0|}{2^{n+1}}$, donc pour

tout n , $|u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. u_{n+1} et u_n sont de même signe par définition, donc (récurrence immédiate), du signe de u_0 .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2+u_n^2} - u_n = \frac{-u_n(1+u_n^2)}{2+u_n^2}, \text{ donc } u_{n+1} - u_n$$

est du signe de $-u_n$, c'est-à-dire du signe de $-u_0$.

Si $u_0 > 0$, la suite est décroissante.

Si $u_0 < 0$, la suite est croissante.

Si $u_0 = 0$, la suite est constante (égale à 0).

87 • **A.** La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \text{ est dérivable et pour tout } x \geq 0.$$

$$f'(x) = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

f est décroissante et $f(0) = 0$ donc pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) \leq 0, \text{ soit } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

La fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$ est dérivable et pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ sur $[0; +\infty[$.

g est décroissante et $g(0) = 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq x$.

B. 1. $u_1 = \frac{3}{2} > 0$: la propriété est vraie au rang 1.

Supposons la vraie au rang n : $u_n > 0$. Alors comme pour tout n le facteur $\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ est strictement positif, $u_{n+1} > 0$: la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

2. $\ln u_1 = \ln \frac{3}{2}$: la propriété est vraie au rang 1.

Supposons la vraie au rang n .

Alors $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Compte tenu de

l'hypothèse de récurrence la propriété est encore vraie au rang $n+1$ donc pour tout entier n non nul.

3. En appliquant (1) aux réels $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2}\right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$$

...

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

Et en ajoutant membre à membre, on obtient :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

$$\text{4. a) } S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

$$T_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{3}.$$

5. a) On a montré dans le 1. que tous les termes de la suite étaient strictement positifs.

Pour tout n non nul, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$: la suite (u_n)

est donc strictement croissante (voir point méthode exercice 1 p. 11).

b) La suite (S_n) est elle aussi croissante et donc majorée par sa limite 1. Il en résulte que pour tout n non nul, $\ln u_n \leq 1$ soit encore $u_n \leq e$.

Croissante et majorée, la suite (u_n) converge.

c) En utilisant les résultats des questions 3. et 4. et celui admis dans cette question :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{1}{2} T_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n,$$

$$\text{soit encore : } \frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1 \text{ et } e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e.$$

Divers

$$\text{88 1. } u_0 = 3,2 = \frac{32}{10}; u_1 = 3,243 = \frac{1}{10} \left(32 + \frac{43}{100}\right).$$

$$\text{2. } \frac{43}{100} + \dots + \frac{43}{100^n} = \frac{43}{100} \times \frac{1 - \frac{1}{100^n}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{43}{99} \left(1 - \frac{1}{100^n}\right).$$

$$\text{3. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{43}{100} + \dots + \frac{43}{100^n}\right) = \frac{43}{99}, \text{ donc :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{10} \left(32 + \frac{43}{99}\right).$$

$$\text{4. } A = \frac{3\,211}{990}.$$

$$\text{89 • 1. } u_n > 0 \text{ donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k \Leftrightarrow u_{n+1} \leq k u_n.$$

• Soit P_n : « $0 < u_n \leq k^n u_0$ ». $0 < u_0 = k^0 u_0$ donc P_0 vraie.

• Supposons P_n vraie : $0 < u_n \leq k^n u_0$.

Alors $0 < u_{n+1} \leq k u_n \leq k^{n+1} u_0$, donc P_{n+1} est vraie et pour tout n , $0 < u_n \leq k^n u_0$.

$0 < k < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ (théorème 1)

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (théorème 5).

$$\text{2. a) } u_1 = 10; u_2 = 50; u_3 = \frac{500}{3} \approx 166,66;$$

$$u_4 = \frac{1\,250}{3} \approx 416,66; u_5 = \frac{2\,500}{3} \approx 833,33.$$

On pourrait conjecturer la croissance de (u_n) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$\text{Or, } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}; \text{ donc, pour } n \geq 10,$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{10}{11} = k, \text{ donc, d'après 1., } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$; quel que soit $a > 1$, il existe n_0 tel que $a < n_0 + 1$ (n_0 est la partie entière de a) et donc, pour $n > n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{a}{n_0 + 1} < 1$ et d'après 1.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Remarque : Si $a \in [0; 1]$; la suite converge aussi vers 0 et c'est encore vrai si $a < 0$.

3. a) $u_1 > ku_0$ et si $u_n \geq k^n u_0$, alors :

$$u_{n+1} > ku_n \geq k^{n+1} u_0;$$

donc, pour tout n , $u_n \geq k^n u_0$.

Puisque $k > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty$ (théorème 1) et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ (théorème 5).}$$

b) Si $u_n \geq 1,1$ alors $u_{n+1} = u_n^2 \geq (1,1)^2 \geq 1,1$ (propriétés de $x \mapsto x^2$ sur $[1; +\infty[$); donc, pour tout n , $u_n \geq 1,1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n \geq 1,1 > 1 \text{ et d'après 3. a), } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

90 • 1. $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$, donc, pour tout n , $u_n > 0$.

2. Pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} < 1$: la suite (u_n) est décroissante.

3. Décroissante et minorée, elle converge (théorème 7).

$$4. u_0 = 1; u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}; u_3 = \frac{1}{2}; u_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

On peut conjecturer que $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ pour tout n .

$$u_0 = \frac{\sqrt{0+1}}{0+1} = 1, \text{ la propriété est vraie au rang 0.}$$

$$\text{Supposons que } u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}},$$

$$\text{donc, pour tout } n, u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

91 • 1. $u_1 = -1 < 3$. Supposons $u_n \leq 3$. Alors :

$$u_{n+1} \leq \frac{3n+3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{6n+6}{2(n+1)} = 3,$$

donc la suite est bien majorée par 3.

$$2. u_{n+1} - u_n = \left[\frac{n}{2(n+1)} - 1 \right] u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \\ = \frac{n+2}{2(n+1)} (3 - u_n) \geq 0;$$

la suite (u_n) est croissante.

Croissante et majorée, elle converge (théorème 7).

$$3. v_{n+1} = (n+1) \left[3 - \frac{n}{2(n+1)} u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right] \\ = \frac{1}{2} n (3 - u_n) = \frac{1}{2} v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 4$.

$$4. v_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ et } u_n = 3 - \frac{v_n}{n};$$

$$\text{or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$

Prendre toutes les initiatives

92 Étant adjacentes (v_n) et (w_n) convergent vers une limite commune ℓ .

$u_n = v_n - 1$: somme de deux suites convergentes, (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell - 1$.

$$\text{De même, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 - \ell.$$

$$\ell - 1 = 3 - \ell \text{ soit } \ell = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

$$\mathbf{93} \quad u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1.$$

94 a) Montrons par récurrence que pour tout n , $1 \leq u_n \leq 3$.

$u_0 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n .

$$1 \leq u_n \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq 3 + u_n \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{6}.$$

Comme $[2; \sqrt{6}] \subset [1; 3]$, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 3$.

b) $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $[-3; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3+x}.$$

Montrons par récurrence que pour tout n ,

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

$u_0 = 1$ et $u_1 = 2$: la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n : $u_n \leq u_{n+1}$.

La fonction f étant strictement croissante sur $[1; 3]$

$$(f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} > 0), \text{ il en résulte que } f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée : elle converge vers ℓ . La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{3+x} = x \Leftrightarrow 3+x = x^2$ équation qui admet une seule solution positive : $\ell = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

$$\mathbf{95} \quad \ln u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln 1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1} \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \frac{1}{1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

96 • Soit α la mesure en radian de $\widehat{ACB}$, alors :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ soit } 0 < \cos \alpha < 1.$$

$$\begin{aligned} AB &= BC \sin \alpha ; \quad AH_1 = AB \cos \alpha = BC \cos \alpha \sin \alpha ; \\ H_1 H_2 &= AH_1 \cos \alpha = BC \cos^2 \alpha \sin \alpha ; \\ H_{n-1} H_n &= H_{n-2} H_{n-1} \cos \alpha = BC \cos^n \alpha \sin \alpha . \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n = BC \sin \alpha \times \frac{1 - \cos^{n+1} \alpha}{1 - \cos \alpha} ,$$

et, puisque $0 < \cos \alpha < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{n+1} \alpha = 0$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{BC \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} .$$

97 a) Montrons par récurrence que pour tout n , $1 \leq u_n \leq 4$ (conjecture à la calculatrice).
 $u_0 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n .

$$2 \leq u_n \leq 4 \Leftrightarrow 2 + \ln 2 \leq 2 + \ln u_n \leq 2 + \ln 4 .$$

Comme $[2 + \ln 2 ; 2 + 2 \ln 2] \subset [1 ; 4]$, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 4$.

b) $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
 $f(x) = 2 + \ln x$.

Montrons par récurrence que pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$.
 $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$: la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n : $u_n \leq u_{n+1}$. La fonction f étant strictement croissante sur $[1 ; 4]$ ($f'(x) = \frac{1}{x} > 0$), il en résulte que $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
 Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée : elle converge vers ℓ , la fonction f étant continue sur $]0 ; +\infty[$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$2 + \ln x = x \Leftrightarrow \ln x - x + 2 = 0 .$$

Étudions sur $[1 ; 4]$ la fonction g définie par :

$$g(x) = \ln x - x + 2 .$$

$g'(x) = \frac{1-x}{x} < 0$ sur $[1 ; 4]$ donc g est strictement décroissante. $g(1) = 1$ et $g(4) = 2 \ln 2 - 2 < 0$. Il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha = 3,146\,19 \text{ à } 10^{-5} \text{ près par défaut} .$$

Problèmes

(page 189)

98 • 1. $v_n = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} , \text{ (pour } n \neq 0 \text{)} ;$$

et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

2. a) • Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 1 - \cos x$ donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante.

Or $f(0) = 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

• $g'(x) = f(x) \geq 0$ donc g est croissante.

Puisque $g(0) = 0$, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

• $h'(x) = g(x) \geq 0$ donc h est croissante.

Puisque $h(0) = 0$, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$.

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \leq n \times n^3 = n^4$. Pour tout $x \geq 0$,

d'après **a)**, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, donc pour tout entier k ,

$$1 \leq k \leq n , \quad \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin \frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} . \text{ En sommant}$$

pour k de 1 à n , $v_n - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \leq u_n \leq v_n$;

or, $\sum k^3 \leq n^4$ donc $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n - \frac{1}{6n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$

et (théorème d'encadrement (5)), $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

99 • 1. Si (u_n) est constante, alors pour tout n :

$$u_n = \frac{3}{35} u_n + \frac{2}{35} u_n = \frac{1}{7} u_n \text{ et donc } u_n = 0 .$$

Une suite de S est constante : la suite nulle.

2. Si (u_n) est arithmétique, de raison r , alors :

$$u_n + 2r = \frac{3}{35} (u_n + r) + \frac{2}{35} u_n .$$

u_n est, pour tout n , une fonction (constante) de r donc (u_n) est constante donc nulle.

3. Si (u_n) est géométrique, de raison q , de même (u_n) est, pour tout n , une fonction (constante) de q , donc (u_n) est constante donc nulle.

$$4. \frac{3}{35} \left[\alpha \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} + \beta \left(-\frac{1}{5} \right)^{n+1} \right] + \frac{2}{35} \left[\alpha \left(\frac{2}{7} \right)^n + \beta \left(-\frac{1}{5} \right)^n \right]$$

$$= \alpha \left[\frac{3}{35} \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} + \frac{2}{35} \left(\frac{2}{7} \right)^n \right]$$

$$+ \beta \left[\frac{3}{35} \left(-\frac{1}{5} \right)^{n+1} + \frac{2}{35} \left(-\frac{1}{5} \right)^n \right]$$

$$= \alpha \left(\frac{2}{7} \right)^n \left[\frac{3}{35} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{35} \right] + \beta \left(-\frac{1}{5} \right)^n \left[\frac{3}{35} \left(-\frac{1}{5} \right) + \frac{2}{35} \right]$$

$$= \alpha \left(\frac{2}{7} \right)^n \times \frac{4}{49} + \beta \left(-\frac{1}{5} \right)^n \times \frac{1}{25}$$

$$= \alpha \left(\frac{2}{7} \right)^{n+2} + \beta \left(-\frac{1}{5} \right)^{n+2} .$$

La suite appartient bien à S .

$$4. \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = -\frac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \frac{2}{7} \alpha - \frac{1}{5} \beta = -\frac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 10\alpha - 7\beta = -4 \end{cases}$$

D'où $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

100 Partie A

1. $\varphi'(x) = \frac{x+1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$: φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. La fonction φ étant continue, $\varphi(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution β .
 $\varphi(0,27) \times \varphi(0,28) < 0 : 0,27 \leq \beta \leq 0,28$.

2. $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$.

x	0	β	1	α_n	$+\infty$
f'(x)	-	0		+	
f(x)	0	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et de plus, $f([1; +\infty[) = [0; +\infty[$ donc, pour tout naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

2. a) $f(e^n) = n \times \frac{e^n}{e^n + 1} \leq n = f(\alpha_n)$. f étant croissante sur $[1; +\infty[$, $e^n \leq \alpha_n$.

b) $f(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n \ln(\alpha_n) = n(\alpha_n + 1)$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha_n) = n + \frac{n}{\alpha_n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}.$$

Pour tout n non nul, $0 \leq \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \leq \frac{n}{e^n}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{e^n} = 1.$$

3. a) $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n) = \frac{n}{e^n}$.

b) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(t) = (1+t) \ln(1+t) - t.$$

g est dérivable. Pour tout $t \geq 0$, $g'(t) = \ln(1+t) \geq 0$.
 g est donc croissante et comme $g(0) = 0$, il en résulte :
pour tout $t \geq 0$, $0 \leq (1+t) \ln(1+t) - t$.

La fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(t) = (1+t) \ln(1+t) - t - \frac{t^2}{2}$$

est dérivable. Pour tout $t \geq 0$, $h'(t) = \ln(1+t) - t$.

$$h''(t) = \frac{1}{1+t} - 1 \leq 0 \text{ donc } h' \text{ est décroissante.}$$

Comme $h'(0) = 0$, pour tout $t \geq 0$, $h'(t) \leq 0$.

h est donc décroissante et comme $h(0) = 0$, il en résulte : pour tout $t \geq 0$, $(1+t) \ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$.

c) $0 \leq (1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n) - \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2}$ donc

$$0 \leq \frac{n}{e^n} - \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2}. \text{ De la première inégalité, il résulte}$$

$$\varepsilon_n \leq \frac{n}{e^n} \text{ soit } \frac{\varepsilon_n^2}{2} \leq \frac{n^2}{2e^{2n}}.$$

d) Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq n - \varepsilon_n e^n \leq \frac{n^2}{2e^{2n}}$ et donc

$$0 \leq e^n + n - \alpha_n \leq \frac{n^2}{2e^{2n}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n + n - \alpha_n) = 0.$$

C'est nouveau au bac

(page 190)

101 1. a et d.

2. a et b.

3. a, c et d.

102 1. F ; 2. V ; 3. V ; 4. F**103** 1. F ; 2. F ; 3. V**104** 1. F ; 2. V ; 3. F**105** 1. Cours.

2. a) Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$.

La suite (u_n) est donc croissante.

b) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, comme $\lim_{x \rightarrow \ell} e^{-x} = e^{-\ell}$ (théorème 2)

alors ℓ est solution de l'équation $\ell = \ell + e^{-\ell}$.

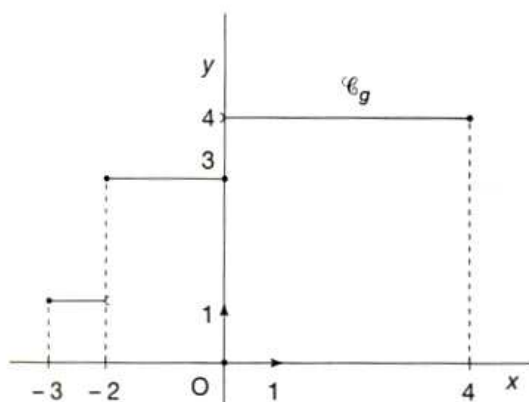
c) Cette dernière égalité est impossible car, quel que soit ℓ , $e^{-\ell}$ est non nul. La suite (u_n) n'est donc pas convergente.

Activités (page 192)

ACTIVITÉ 1

2 Exemples

1. $I(f) = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 4 \times 4 = 23$.



2. Fig. 1 : $I(g) = 2 \times (-1) + 2 \times 3 + 2 \times 2 = 8$.

Fig. 2 : $I(g) = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times (-2) = 0$.

ACTIVITÉ 2

1. Cas $n = 5$.

a) $I(g_5) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \times f(0) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right] = s_5 \end{aligned}$$

De même, $I(h_5) = s_5$.

b) Les fonctions en escalier g_5 et h_5 sont positives, donc $I(g_5)$ exprime l'aire en u.a. du domaine violet, $I(h_5)$ celui de la réunion des domaines violet et vert et enfin $I(h_5) - I(g_5)$ celui du domaine vert.

2. Cas général

$$\begin{aligned} \text{a) } s_n &= \frac{1}{n} \times 0^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ s_n &= \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2]. \end{aligned}$$

De même : $S_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]$.

$$\text{b) } s_n = \frac{1}{n^3} \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\text{et } S_n = \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Pour tout entier n ($n \geq 2$) :

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2n^4 + n^3}{2n^4 + n^3 - 3n^2 - n + 1}.$$

Or le trinôme $X \mapsto -3X^2 - X + 1$ est négatif sur l'intervalle réel $\left] \frac{\sqrt{13}-1}{6} ; +\infty \right[$, ainsi

$0 < 2n^4 + n^3 - 3n^2 - n + 1 < 2n^4 + n^3$ donc $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$ et la suite à termes positifs (s_n) est croissante.

$$\text{De même : } \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{2n^4 + 7n^3 + 6n^2}{2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1}.$$

Or $2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1$

$$= (2n^4 + 7n^3 + 6n^2) + (3n^2 + 5n + 1)$$

et $3n^2 + 5n + 1 > 0$

donc $2n^4 + 7n^3 + 6n^2 < 2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1$;

ainsi $\frac{S_{n+1}}{S_n} < 1$ et la suite à termes positifs (S_n) est décroissante.

$$\text{c) } S_n - s_n = \frac{1}{n} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = 0.$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Or $s_n = S_n - (S_n - s_n)$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = \frac{1}{3}.$$

Note : un calcul direct à partir de l'expression de s_n permet aussi d'obtenir ce résultat.



TD 1

L'objectif de ce TD est le calcul des aires de domaines plans définis à partir de courbes représentatives de fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Le lien entre intégrale et aire est ici l'élément essentiel.

1. f est paire donc $\mathcal{C}_f$ admet (Oy) comme axe de symétrie.

$$2. f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0 \text{ d'où}$$

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}.$$

3. En raison de la symétrie, il suffit de calculer l'aire du « demi-domaine » obtenu pour $x \in [0; \sqrt{2}]$.

$$\text{Ainsi } \mathcal{A} = 2 \left[\int_0^1 f(t) dt - \int_1^{\sqrt{2}} f(t) dt \right] \text{ (en u.a.)}.$$

$$\text{Or } 1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm}^2 \text{ donc } \mathcal{A} = 4 \left[\int_0^1 f(t) dt - \int_1^{\sqrt{2}} f(t) dt \right]$$

$$\text{(en cm}^2\text{)}; \text{ d'où } \mathcal{A} = \frac{48 - 16\sqrt{2}}{5} \text{ cm}^2.$$

2 1. a) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + xe^{-x}) = +\infty.$$

$$\bullet f'(x) = e^{-x}(1-x) + 1; f''(x) = e^{-x}(x-2).$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f'	$\swarrow \quad \searrow$ $1 - e^{-2} (> 0)$		

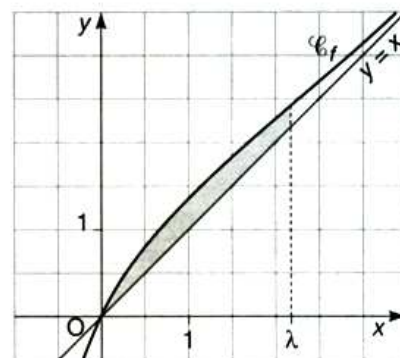
Ainsi pour tout réel x , $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$+\infty$

$$\text{b) } f(x) - x = xe^{-x} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Ainsi Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. Le signe de $f(x) - x$ est celui de x donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ sur $]-\infty; 0[$, au-dessus de Δ sur $]0; +\infty[$ et Δ coupe $\mathcal{C}_f$ en $O(0; 0)$.

c)



2. a) Lorsque λ est un réel positif,

$$\mathcal{A}(\lambda) = 4 \times \int_0^\lambda (f(x) - x) dx = 4 \int_0^\lambda xe^{-x} dx \text{ (en cm}^2\text{)}.$$

Par intégration par parties,

$$\mathcal{A}(\lambda) = [-4xe^{-x}]_0^\lambda + 4 \int_0^\lambda e^{-x} dx,$$

$$\text{soit } \mathcal{A}(\lambda) = 4(-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1).$$

$$\text{b) } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4 \text{ cm}^2.$$

TD 2

L'objectif de ce TD est le calcul des volumes de solides :

- à partir de la section par un plan perpendiculaire à un axe,
- par l'utilisation d'une homothétie de l'espace,
- par la révolution d'un domaine plan autour d'un axe.

1 1. La section est un disque centré sur l'axe (Oz) dont le rayon r est tel que $r^2 + z^2 = R^2$. D'où $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$. Le volume de la boule est alors $\mathcal{V} = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz$.

$$2. \text{ Ainsi } \mathcal{V} = 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3} \text{ (en u.v.)}.$$

2 1. Par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{OH'}{OH} = \frac{z}{h}$, ABC a pour image A'B'C'; les aires

$$\text{sont alors dans le rapport } k^2, \text{ d'où } S(z) = S \times \frac{z^2}{h^2}.$$

$$2. \text{ Ainsi } \mathcal{V} = \int_0^h S \times \frac{z^2}{h^2} dz = \frac{S}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h \text{ donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3} Sh.$$

3 1. La section est un disque centré sur l'axe (Ox) et de rayon $r = f(x)$.

$$2. S(x) = \pi f^2(x) \text{ soit } S(x) = \pi x.$$

$$3. \mathcal{V} = \int_0^4 S(x) dx = \pi \int_0^4 x dx \text{ donc } \mathcal{V} = 8\pi \text{ (en u.v.)}.$$

L'objectif de ce TD est la mise en évidence de :

- L115a divergence de la suite définie par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ (série harmonique).

- La convergence de la suite définie par $v_n = S_n - \ln n$ vers un réel γ .

Deux outils essentiels mis en œuvre à cette occasion :

- la comparaison d'une suite et d'une intégrale ;
- l'exploitation de deux suites adjacentes pour établir la convergence.

1. Conjonctures : (S_n) semble strictement croissante de limite $+\infty$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$. Ainsi

$S_{n+1} - S_n > 0$ donc (S_n) est strictement croissante.

b) Par comparaison d'aires, $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx$ soit $S_n \geq \ln(n+1)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

3. a) Pour tout entier, $n \geq 2$,

$$u_{n+1} - u_n = (S_n - S_{n-1}) - (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b) D'après l'inégalité indiquée, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

d'où $\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$ soit $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Donc (u_n) est croissante. [1]

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n =$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

D'après l'inégalité indiquée,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

d'où $\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$ soit $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

Donc (v_n) est décroissante. [2]

b) $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. [3]

D'après [1], [2] et [3], (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergent vers un même réel γ .

Encadrement : $0,57 < \gamma < 0,58$.

L'objectif de ce TD est la recherche de primitives lorsque la technique habituelle par lecture inverse du tableau de dérivation ne s'applique pas.

Deux méthodes sont abordées :

- l'utilisation de l'intégration par parties ;
- le calcul approché des valeurs prises par une primitive par la méthode des rectangles.

Les élèves découvrent alors l'existence de fonctions définies par une intégrale et dont les valeurs sont obtenues par tabulation.

1. Par intégration par parties :

$$F(x) = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \cos t \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{2t} \sin t dt,$$

$$\text{d'où } F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} G(x);$$

$$G(x) = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \sin t \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{2t} \cos t dt,$$

$$\text{d'où } G(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} F(x).$$

$$2. \text{ On en déduit : } F(x) = e^{2x} \left[\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right] - \frac{2}{5},$$

$$\text{et } G(x) = e^{2x} \left[-\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x \right] + \frac{1}{5}.$$

$$3. \text{ Les fonctions : } x \mapsto e^{2x} \left[\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right] - \frac{2}{5}$$

$$\text{et } x \mapsto e^{2x} \left[-\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x \right] + \frac{1}{5}$$

sont des primitives de f et g sur $\mathbb{R}$, du type indiqué.

Application : Il s'agit de rechercher une primitive du type $x \mapsto e^{-2x} [A \cos(3x) + B \sin(3x)]$.

$$F(x) = e^{-2x} \left[-\frac{2}{13} \cos(3x) + \frac{3}{13} \sin(3x) \right]$$

$$\text{et } G(x) = e^{-2x} \left[-\frac{3}{13} \cos(3x) - \frac{2}{13} \sin(3x) \right].$$

2 1. a) La parité de f est immédiate donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

$f'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}}$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$; de plus, $f(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0^+$.

b) Pour tout réel $x \geq 0$, $F(x)$ exprime l'aire en u.a. du domaine $\mathcal{D} : \begin{cases} 0 \leq t \leq x \\ 0 \leq y \leq f(t) \end{cases}$; $F(-x)$ exprime

l'opposé de l'aire en u.a. du domaine

$\mathcal{D}' : \begin{cases} -x \leq t \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(t) \end{cases}$; or $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont même aire,

donc $F(-x) = -F(x)$ et F est impaire.

c) Pour tout réel x de $[0; +\infty[$,

$F'(x) = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ainsi $F' > 0$ et F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La limite de F en $+\infty$ correspond à l'aire « sous la courbe » $\mathcal{C}_f$ sur $[0; +\infty[$,

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

2. a) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n - v_n = \frac{a}{n} [f(0) - f(a)] = \frac{a}{n} \left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right].$$

b) Pour tout n , $u_n - v_n > 0$. On cherche alors un

entier n tel que $\frac{a}{n} \left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right] < 10^{-2}$

$$\text{soit } n > 10^2 a \left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right].$$

On peut prendre pour $n(a)$ l'entier :

$$n(a) = E \left[10^2 a \left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right] \right] + 1.$$

c) Tableau des encadrements obtenus à la calculatrice :

a	$n(a)$	$F(a) \in \dots$
0,25	1	[0,24 ; 0,25]
0,5	6	[0,475 ; 0,485]
1	40	[0,85 ; 0,86]
1,5	102	[1,08 ; 1,09]
2	173	[1,19 ; 1,20]
3	297	[1,245 ; 1,255]

TD 5

L'objectif de ce TD est de relier les notions de cinématique au calcul intégral :

- expression intégrale de la distance parcourue par un mobile sur un axe ;
- vitesse moyenne et valeur moyenne de la fonction vitesse.

1. Pour tout t de $[0; +\infty[$, $y'(t) = v(t)$. Donc v est une primitive de y sur $[0; +\infty[$.

$$2. \Delta(t_1; t_2) = y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} y'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Application numérique :

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \Delta(0; 10) &= \int_0^{10} (t+1)e^{\frac{t}{10}} dt, \\ &= \left[10(t+1)e^{\frac{t}{10}} \right]_0^{10} - 10 \int_0^{10} e^{\frac{t}{10}} dt \end{aligned}$$

d'où $\Delta(0; 10) = 10e + 90$, soit $\Delta(0; 10) \approx 117$ m.

$$2. 1. V_M = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(t_1; t_2)}{t_2 - t_1}.$$

2. La valeur moyenne de la fonction v sur $[t_1; t_2]$ est :

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \frac{\Delta(t_1; t_2)}{t_2 - t_1} = V_M.$$

Application numérique :

$$V_M = \frac{1}{10} \int_0^{10} v(t) dt = \frac{\Delta(0; 10)}{10} = e + 9,$$

soit $V_M \approx 11,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 214)

1. et 2. Notions d'intégrale. Extensions

1 a) $I(f) = 10$; b) $I(f) = -16 + \sqrt{6}$; c) $I(f) = -3$.

$$2. 1. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \text{et } I(f) = \frac{3}{2}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } 0 \leq x < \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \text{si } \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{et } I(f) = 3 - \sqrt{6}.$$

$$3. 1. I(f) = \frac{17}{4} \quad 2. I(f) = \frac{5}{2}.$$

4 Dessin 1

1. $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ et $y \geq 0$.

$\mathcal{C}_f$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$.

2. $I(f) = 2\pi$.

Dessin 2

1. $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ et $y-1 \geq 0$.

$\mathcal{C}_f$ est le demi-cercle de centre $A(1; 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 1$.

2. $I(f) = \pi + 2\sqrt{2}$.

5 Corrigé dans le manuel.

3. Encadrement. Valeur moyenne

6 a) Pour tout x de $[1; 2]$:

$$x \leq x^2 \Rightarrow xe^x \leq x^2e^x \Rightarrow I \leq J.$$

b) Pour tout t de $[0; 1]$: $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{t}{1+t^2} \Rightarrow I \geq J$.

c) Pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ x^2 \leq x \end{cases} \Rightarrow x^2 \sin x \leq x \sin x \Rightarrow I \leq J.$$

7 a) Pour tout t de $[\frac{1}{2}; 1]$:

$$\begin{aligned} \ln t > \ln\left(\frac{1}{2}\right) &\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t \, dt \geq -\ln 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 dt \\ &\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t \, dt \geq -\frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

b) Pour tout x de $[1; 2]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^3} &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{2} \int_1^2 dx \\ &\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Pour tout t de $[\frac{\pi}{2}; \pi]$:

$$-1 \leq \sin(t^2 + 1) \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t^2 + 1) dt \leq \frac{\pi}{2},$$

(inégalité de la moyenne).

8 Corrigé dans le manuel.

9 Les résultats s'obtiennent en utilisant l'inégalité de la moyenne.

a) Pour tout t de $[0; 1]$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^3} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \leq 1.$$

b) Pour tout x de $[0; 2]$:

$$e^{-4} \leq e^{-x^2} \leq 1 \Rightarrow 2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq 2.$$

c) Pour tout x de $[2; 4]$: $\ln 3 \leq \ln(x^2 - 1) \leq \ln 15 \Rightarrow$

$$2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2\ln 3 + 2\ln 5.$$

10 1. Pour tout t de $[0; 1]$, $1 + t^{n+1} \leq 1 + t^n$ d'où $\int_0^1 (1 + t^{n+1}) dt \leq \int_0^1 (1 + t^n) dt$ soit $I_{n+1} \leq I_n$.

Donc (I_n) est décroissante.

2. D'autre part $I_n \geq 0$. (I_n) est décroissante, minorée par 0 donc (I_n) est convergente.

11 $\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Or, $\mathcal{C}_f$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$, donc $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ et $\mu = \frac{\pi}{4}$.

12 a) $\int_1^4 f(x) dx = 3\mu = 6$;

b) $\int_3^1 f(x) dx = -2\mu = -2\ln 2$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \mu = \frac{1}{2}$.

13 a) Pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \mu \leq 1. \end{aligned}$$

b) Pour tout x de $[1; e]$:

$$0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_1^e \ln x dx \leq e - 1 \Rightarrow 0 \leq \mu \leq 1.$$

c) Pour tout x de $[1; \sqrt{2}]$: $e \leq e^{x^2} \leq e^2 \Rightarrow$

$$e(\sqrt{2} - 1) \leq \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2} dx \leq e^2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow e \leq \mu \leq e^2.$$

Commentaire : Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, ($a < b$), bornée par les réels m et M , d'après l'inégalité de la moyenne,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

$$\text{d'où } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M, \text{ donc } m \leq \mu \leq M.$$

(Ceci justifie le nom d'« inégalité de la moyenne ».)

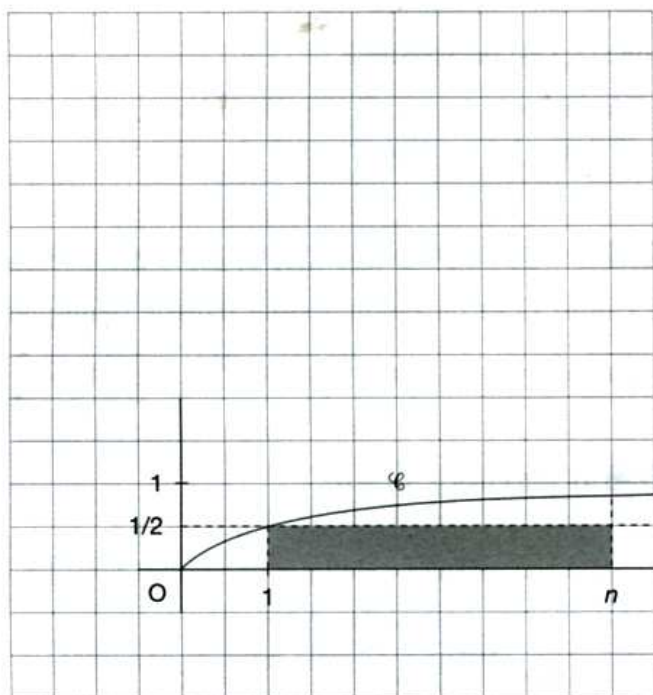
14 1. Pour tout x de $[n; n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

D'après l'inégalité de la moyenne : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

2. D'après le théorème d'encadrement, (I_n) converge vers 0.

15 1. $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(t) dt - \int_0^n f(t) dt = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

Or $f \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi (u_n) est croissante.



2. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^n f(t) dt$ d'où $u_n > \int_1^n f(t) dt$. [1]

Or f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc pour tout $t \geq 1$, $f(t) \geq f(1)$ soit $f(t) \geq \frac{1}{2}$.

Par intégration sur $[1; n]$, $\int_1^n f(t) dt \geq \int_1^n \frac{1}{2} dt$ soit $\int_1^n f(t) dt \geq \frac{n-1}{2}$ [2]. D'après [1] et [2], $u_n > \frac{n-1}{2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Ainsi (u_n) est divergente.

Remarque : Le graphique illustre la minoration de u_n qui exprime l'aire sous la courbe sur $[0; n]$ par l'aire du rectangle coloré.

4. et 5. Primitives

16 a) $F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$.

b) $F'(x) = \cos x - x \sin x = f(x)$.

17 a) $F'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = f(x)$.

b) $F'(x) = \frac{x-1+x}{[x(x-1)]^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = f(x)$.

18 a) $F'(x) = \ln x - 1 + x \times \frac{1}{x} = \ln x = f(x)$.

b) $F'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = f(x)$.

19 Corrigé dans le manuel.

20 a) Oui, car $G(x) - F(x) = 4$.

b) Oui, car $G(x) - F(x) = 1$.

21 a) Oui, car $G(x) - F(x) = \frac{-3}{2}$.

b) Oui, car $G(x) - F(x) = \frac{3}{2}$.

22 Non, car $G - F$ n'est pas constante sur I :

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad G\left(-\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

23 a) $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$.

b) $F(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3}$.

c) $F(x) = x + \frac{1}{x}$.

24 a) $F(x) = -\frac{1}{x^2}$.

b) $F(x) = \frac{3}{x}$.

c) $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - x$.

25 a) $F(x) = 2\sqrt{2x+1}$.

b) $F(x) = 2\sqrt{x^2-1}$.

c) $F(x) = -2\sqrt{-x^2-5x+6} - x$.

26 a) $F(x) = \frac{2\sqrt{x}}{3} - \frac{4}{3x} - x\sqrt{2}$.

b) $F(x) = 2\sqrt{x-1}$.

c) $F(x) = -4\sqrt{1-x} - x$.

27 a) $F(x) = \frac{1}{4}(x+2)^4$.

b) $F(x) = \frac{1}{18}(x-1)^6$.

c) $F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4$.

d) $F(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^6$.

28 a) $F(x) = \frac{1}{8}(1+x^2)^8$.

b) $F(x) = -\frac{1}{(x+4)^2}$.

c) $F(x) = -\frac{1}{3(3x-1)}$.

29 a) $F(x) = -\frac{1}{x^2-x+3}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{2(x^2-2x-3)}$.

c) $F(x) = -\frac{2}{3(x^3+8)^2}$.

30 a) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

b) $F(x) = 3\sin x + \cos(2x) + x$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

31 a) $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$.

b) $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{3}{2}\sin^2 x + 8\sin x$.

c) $F(x) = 2\tan x - x$.

32 a) $F(x) = \ln(x-4)$. b) $F(x) = \ln(4-x)$.
c) $F(x) = \ln(x-x^2)$.

33 a) $F(x) = -e^{-x+1}$. b) $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-2}$.
c) $F(x) = -e^{-\frac{x}{2}}$. d) $F(x) = -e^{\cos x}$.

34 a) $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 - 2x^2 + x - \frac{42}{5}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$; $I =]0; +\infty[$.

c) $F(x) = -\frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}$; $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

35 a) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{2}{3}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $F(x) = 4\sin\frac{x}{2} + 6\cos\frac{x}{2} - 5\sqrt{2}$; $I = \mathbb{R}$.

36 Corrigé dans le manuel.

37 a) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} - \frac{e^{-2}}{3}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{5}{4}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $F(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln 3 = \ln\left(\frac{x^2-1}{3}\right)$;
 $I =]1; +\infty[$.

6. Calculs d'intégrales

38 a) $I = -4$. b) $I = -6$.

c) $I = \frac{23}{6} - \ln 2$. d) $I = 1 - 2\ln 2$.

39 a) $I = 4$. b) $I = 4$. c) $I = \frac{6}{5}$. d) $I = 1$.

40 a) $I = \frac{15}{8}$. b) $I = 2$. c) $I = \frac{\ln 6}{4}$.

41 a) $I = 2\sqrt{5} - 2$. b) $I = \frac{3}{7}$. c) $I = \frac{1}{2}$. d) $I = 0$.

42 Corrigé dans le manuel.

43 a) $I = \ln 2 - \frac{1}{3}\ln 5$. b) $I = \frac{5}{3}(e^3 - 1)$.

c) $I = \frac{e^7 - e}{3}$. d) $I = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

44 $I = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} + \ln 3$;

$$J = \int_{2x}^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 x dx = -\ln 2 - \frac{3}{8}.$$

45 a) $I = \int_1^e (\ln t + t - \ln t) dt = \int_1^e t dt = \frac{e^2 - 1}{2}$.

b) $J = \int_1^1 \ln(1+t^2) dt = 0$.

c) $K = \int_1^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^1 \cos 2t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t dt$
 $= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6} + \pi} \cos 2t dt = 0$.

46 1. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{x-3} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{x+3}$,

$\left(a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{6}\right)$.

2. $I = \frac{1}{6} \left(\int_{4x-3}^5 \frac{1}{x} dx - \int_{4x+3}^5 \frac{1}{x} dx \right)$
 $= -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln 7 = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$.

47 1. $f(x) = 4x - 17 + \frac{52}{x+3}$,

$(a = 4, b = -17, c = 52)$.

2. $I = \int_2^0 (4x - 17) dx + 52 \int_{2x+3}^0 \frac{1}{x} dx$
 $= 26 + 52 \ln 3 - 52 \ln 5$.

48 Corrigé dans le manuel.

49 1. $1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$.

2. $I = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$.

50 Zoom sur le théorème 9

1. Cette condition assure l'existence de chaque terme dans la formule.

2. a) $I = \int_0^1 f(t) dt$ est bien définie puisque la fonction f est continue sur $[0; 1]$.

En posant $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = t$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$ les hypothèses ne sont pas vérifiées pour u et u' sur $[0; 1]$ (par exemple u et u' ne sont pas définies en 0). D'où l'impossibilité d'appliquer le théorème 9.

b) Par contre pour tout $\alpha > 0$, les conditions sont vérifiées sur l'intervalle fermé d'extrémités α et 1.

Par intégration par parties,

$$I(\alpha) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 t dt = -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4}.$$

Note : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} l(\alpha) = -\frac{1}{4}$. On définit alors la valeur de l par

$$l = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} l(\alpha) = -\frac{1}{4}.$$

51 a) $I = \frac{e^2 + 1}{4}.$

(Poser $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = x$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$.)

b) $I = e^2 + 1.$

(Poser $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t$.)

52 a) $I = -2.$

(Poser $u(x) = x - 1$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$.)

b) $J = 2e - 1.$

(Poser $u(x) = x + 2$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^x$, $v(x) = e^x$.)

53 a) $I = \frac{\pi}{3}$. (Poser $u(x) = 3x$, $u'(x) = 3$, $v'(x) = \sin(3x)$,

$v(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x)$.)

b) $J = 3 - 5e^{-1}.$

(Poser $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v'(x) = e^{-x}$, $v(x) = -e^{-x}$.)

54 Corrigé dans le manuel.

55 $F(x) = \int_{\pi}^x t \cos t dt = x \sin x + \cos x + 1.$

(Poser $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t$.)

56 $F(x) = \int_1^x t^2 \ln t dt = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}.$

(Poser $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = t^2$, $v(t) = \frac{t^3}{3}$.)

57 $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1.$

(Poser $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = \frac{1}{t^2}$, $v(t) = -\frac{1}{t}$.)

58 $F(x) = \int_0^x 2te^{-\frac{t}{2}} dt = -4xe^{-\frac{x}{2}} - 8e^{-\frac{x}{2}} + 8.$

(Poser $u(t) = 2t$, $u'(t) = 2$, $v'(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, $v(t) = -2e^{-\frac{t}{2}}$.)

Apprendre à chercher

(page 218)

59 Rechercher une primitive

Les outils :

- Intégration par parties.
- Dérivations successives.
- Relations fonctionnelles.

Les objectifs :

- Calculer une primitive.
- Prévoir une double intégration par parties.
- Établir des relations entre dérivées successives.

1. a) f est continue sur $\mathbb{R}$ d'où le résultat d'après le théorème 7.

b) Poser $u(t) = \sin(2t)$, $u'(t) = 2\cos(2t)$, $v(t) = e^t$, $v'(t) = e^t$, d'où le résultat par intégration par parties.

2. a) Par une seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(2t) dt &= e^x \cos(2x) - 1 + 2 \int_0^x e^t \sin(2t) dt \\ &= e^x \cos(2x) - 1 + 2F(x). \end{aligned}$$

b) $F(x) = e^x \sin(2x) - 2[e^x \cos(2x) - 1 + 2F(x)]$, d'où :

$$F(x) = -\frac{2}{5} e^x \cos(2x) + \frac{1}{5} e^x \sin(2x) + \frac{2}{5}.$$

3. a) $f'(x) = e^x [2\cos(2x) + \sin(2x)]$;

$f''(x) = e^x [4\cos(2x) - 3\sin(2x)]$.

b) $f(x) = -\frac{1}{5} f''(x) + \frac{2}{5} f'(x)$, $\left(a = -\frac{1}{5}, b = \frac{2}{5}\right)$.

c) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par :

$$x \mapsto -\frac{1}{5} f'(x) + \frac{2}{5} f(x) = e^x \left[-\frac{2}{5} \cos(2x) + \frac{1}{5} \sin(2x) \right].$$

Note : On retrouve (à une constante près) l'expression du 2. b).

60 Primitives de $x \mapsto Q(x)e^{-x}$

Les outils :

- Identification de deux écritures polynomiales.
- Dérivation.
- Forme intégrale d'une primitive.
- Intégration par parties.

Les objectifs :

- Prouver l'existence d'une primitive d'un type donné.
- Calculer sur des polynômes.
- Prévoir une triple intégration par parties.

1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &\Leftrightarrow e^{-x}(P'(x) - P(x)) = e^{-x}(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &\Leftrightarrow P'(x) - P(x) = x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

2. Immédiat : $d(P) \leq 3$.

Note : Il est aisé de prouver qu'en fait, $d(P) = 3$.

3. Pour tout réel x ,

$$-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + c - d = x^3 + x^2 + x + 1;$$

par identification des coefficients : $a = -1$, $b = -4$, $c = -9$, $d = -10$ et $P(x) = -x^3 - 4x^2 - 9x - 10$.

4. On vérifie aisément que $x \mapsto P(x)e^{-x}$ a pour dérivée $x \mapsto f(x)$. Ainsi $F : x \mapsto (-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)e^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

6. Par trois intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x (t^3 + t^2 + t + 1)e^{-t} dt \\
&= [-e^{-t}(t^3 + t^2 + t + 1)]_0^x + \int_0^x e^{-t}(3t^2 + 2t + 1) dt \\
&= -e^{-x}(x^3 + x^2 + x + 1) + 1 + G(x) \quad [1]; \\
G(x) &= \int_0^x e^{-t}(3t^2 + 2t + 1) dt \\
&= [-e^{-t}(3t^2 + 2t + 1)]_0^x + \int_0^x e^{-t}(6t + 2) dt \\
&= -e^{-x}(3x^2 + 2x + 1) + 1 + H(x) \quad [2]; \\
H(x) &= \int_0^x e^{-t}(6t + 2) dt = [-e^{-t}(6t + 2)]_0^x + 6 \int_0^x e^{-t} dt \\
&= -e^{-x}(6x + 2) + 2 + 6(-e^{-x} + 1) \quad [3].
\end{aligned}$$

D'où $F(x) = e^{-x}(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10) + 10$.
 F est la primitive de f , sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0 d'où
 $x \mapsto e^{-x}(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)$ est une primitive du type cherché.

61 Une suite d'intégrales

Les outils :

- Intégration par parties.
- Calcul algébrique.
- Encadrements d'intégrales.

Les objectifs :

- Savoir calculer le terme général d'une suite d'intégrales.
- Savoir établir puis exploiter une relation de récurrence.
- Savoir prouver la convergence d'une suite.

$$1. I_0 = \frac{\pi}{2}; I_1 = 1.$$

2. a) Pour tout entier n ($n \geq 2$) :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1} t dt \\
&= [-\cos t \sin^{n-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t dt \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t dt,
\end{aligned}$$

$$\text{soit } I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

$$b) \text{ D'où } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3. Pour tout entier $k \geq 1$:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2}; \quad I_{2k-2} = \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4}; \dots;$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2; \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0.$$

4. a) Pour tout entier n , $\sin^n x > 0$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc $I_n > 0$.

b) Par multiplication membre à membre et simplification :

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0,$$

$$\text{soit } I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Note : On peut exprimer I_{2k} à l'aide de la notation factorielle :

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) De même :

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k-2}{2k-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times I_1,$$

$$\text{soit } I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k-2}{2k-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1.$$

Note : On peut exprimer I_{2k+1} à l'aide de la notation factorielle :

$$I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Prolongement :

1. a) Pour tout x de $[0; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin x \leq 1$, d'où le rangement des puissances successives :

$$0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \leq 1.$$

b) Par intégration de ces inégalités sur $[0; \frac{\pi}{2}]$,

$$0 < I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} \leq 1.$$

$$\text{D'où } \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geq 1 \text{ et } \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}};$$

$$\text{or, } \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \text{ d'après 2. b),}$$

$$\text{donc } 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

2. D'après 4. :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left[\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \right]^2 \times (2n+1) \times \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{D'où } u_n = \left[\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \right] \times \frac{2}{\pi} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}.$$

Pour progresser

(page 220)

Calculs de primitives

$$62 \text{ a) } F(x) = \frac{1}{10}(x^2 + 2x - 1)^5.$$

$$b) F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(2x^2 - 2x + 1)^2}.$$

$$c) F(x) = -\sqrt{x^2 - 2x + 2}. \quad d) F(x) = -\frac{1}{12}(-2x + 1)^6.$$

63 a) $F(x) = \frac{2}{3} \ln(3x+1)$. b) $F(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3-1)$.

c) $F(x) = \frac{1}{3} \ln(1-x^3)$. d) $F(x) = \ln(-\sin x)$.

64 a) $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}$. b) $F(x) = -\frac{2}{3} e^{-3x+2}$.

c) $F(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{x}}$. d) $F(x) = e^{\frac{2x+1}{x+1}}$.

65 • a) $F(x) = x \sin x$. b) $F(x) = \frac{-\sin x}{x}$.

c) $F(x) = \frac{-\ln x}{x}$. d) $F(x) = x \sqrt{x+1}$.

66 • a) $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$. b) $F(x) = \ln(\ln x)$.

c) $F(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

67 • Corrigé dans le manuel.

68 • 1. $u'(x) = \frac{\cos^4 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x}$
 $= \frac{\cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

2. D'où $v(x) = \frac{1}{3} \left[u'(x) + \frac{2}{\cos^2 x} \right]$. Les primitives de v sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ sont définies par $x \mapsto \frac{1}{3} [u(x) + 2 \tan x] + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Or $V(0) = 0$, donc $k = 0$ et $V(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{\sin x}{\cos^3 x} + 2 \tan x \right]$.

69 $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$; $F(x) = x + \ln(x-1)$.

70 $f(x) = 2 + \frac{3}{2x+1}$; $F(x) = 2x + \frac{3}{2} \ln(-2x-1)$.

71 $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x-2}$; $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(x-2)$.

72 a) $F(x) = \ln(x-3) + \ln(x+3) = \ln(x^2-9)$.

b) $F(x) = \ln(3-x) + \ln(x+3) = \ln(9-x^2)$.

c) $F(x) = \ln(3-x) + \ln(-3-x) = \ln(x^2-9)$.

73 $f(x) = 1 + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$;

$F(x) = x + \ln(-x-2) - \frac{1}{x+2}$.

74 $f(x) = 2x + 1 - \frac{7}{(x+3)^2}$; $F(x) = x^2 + x + \frac{7}{x+3}$.

75 • Corrigé dans le manuel.

76 • $f(x) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{(x+1)^2}$;

$F(x) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x+1}$.

77 • $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)^3}$;

$F(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(x+1)^2}$.

78 • $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$;

$F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{(x+1)^3}$.

79 $f(x) = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$;

$F(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.

80 $f(x) = \sin x(1 + \sin^2 x) = \sin x(2 - \cos^2 x)$
 $= 2 \sin x - \sin x \cos^2 x$;

$F(x) = -2 \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$.

81 $f(x) = \sin x [\sin^2 x \cos 2x]$
 $= \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x$
 $= \sin x [\cos^2 x - \cos^4 x]$;

$F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x$.

82 • $f(x) = \cos x [\sin^4 x \cos^4 x]$
 $= \cos x \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 = \cos x [\sin^4 x - 2 \sin^6 x + \sin^8 x]$;

$F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x$.

Pour les exercices 83 à 85, la linéarisation à l'aide des nombres complexes a été abordée au chapitre 12, TD 3, page 332, mais elle peut aussi être traitée à partir des formules :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad [1].$$

83 $f(x) = \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$;

$F(x) = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x)$.

84 Exemple de linéarisation à l'aide des formules [1].

$$f(x) = \cos^4 x = [\cos^2 x]^2 = \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right]^2$$

$$= \frac{1}{4} [1 + 2 \cos(2x) + \cos^2(2x)]$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) ;$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) .$$

$$\textbf{85} \bullet f(x) = \sin^2 x \cos^4 x = \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right]^2 \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^4$$

$$= -\frac{1}{64} (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

$$= -\frac{1}{64} [e^{6ix} + e^{-6ix} + 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) - 4]$$

$$= -\frac{1}{32}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{32}\cos(2x) + \frac{1}{16} ;$$

$$F(x) = -\frac{1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{1}{16}x .$$

86 • Corrigé dans le manuel.

$$\textbf{87} \bullet 1. f'(x) = e^{2x}(2\cos x - \sin x) ;$$

$$f''(x) = e^{2x}(3\cos x - 4\sin x) .$$

$$2. f(x) = -\frac{1}{5}f''(x) + \frac{4}{5}f'(x) , \left(a = -\frac{1}{5} ; b = \frac{4}{5} \right) .$$

$$3. F(x) = -\frac{1}{5}f'(x) + \frac{4}{5}f(x) ,$$

$$\text{d'où } F(x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x + \sin x) .$$

$$\textbf{88} \bullet F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} ;$$

$$F'(x) = e^{2x}[2ax^3 + (2b + 3a)x^2 + (2c + 2b)x + 2d + c] .$$

Pour tout réel x ,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}, c = \frac{3}{4}, d = -\frac{3}{8} .$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) e^{2x} .$$

Calculs d'intégrales

$$\textbf{89} \quad I = \frac{15}{4} ; J = \frac{5}{48} . \quad \textbf{90} \quad I = \frac{1}{2} ; J = 0 .$$

$$\textbf{91} \quad I = \frac{\ln 5}{2} ; J = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2 .$$

$$\textbf{92} \quad I = -\frac{4}{3} ; J = 3(2 - \sqrt{2}) .$$

$$\textbf{93} \quad I = -\frac{2}{\pi} ; J = \frac{\pi}{6} .$$

$$\textbf{94} \quad I = \frac{e^7 - e^5}{3} ; J = e^{\frac{1}{2}} - e .$$

$$\textbf{95} \bullet I = \frac{2}{3} ; J = \frac{5\pi}{24} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} .$$

$$\textbf{96} \bullet \bullet a = 1, b = -1, c = -1, I = 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6} ;$$

$$\bullet a = 1, b = -2, c = 3, J = 3\ln 2 - \frac{5}{2} .$$

$$\textbf{97} \bullet I = \ln 2 ; J = \ln 2 .$$

$$\textbf{98} \bullet \frac{2x}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x-1} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{x+2}, \text{ d'où :}$$

$$I = \frac{4}{3}\ln 5 - 2\ln 2 .$$

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{2x + 3} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{2x + 3}, \text{ d'où } J = \frac{9}{2} - \frac{5}{8}\ln 3 .$$

$$\textbf{99} \quad \textbf{a)} f \text{ impaire : } I = 0 . \quad \textbf{b)} f \text{ impaire : } I = 0 .$$

$$\textbf{100} \quad \textbf{a)} f \text{ impaire : } I = 0 . \quad \textbf{b)} f \text{ impaire : } I = 0 .$$

$$\textbf{101} \quad 1. I_1 = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} .$$

$$2. I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \text{ d'où :}$$

$$I_2 = (I_1 + I_2) - I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2} .$$

102 • Corrigé dans le manuel.

$$\textbf{103} \bullet f(x) = (1-x)e^x ; f'(x) = -xe^x ;$$

$$f''(x) = (-x-1)e^x ; \text{ d'où } f(x) + f''(x) = 2f'(x) .$$

$f(x) = 2f'(x) - f''(x)$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = 2f(x) - f'(x) = (2-x)e^x$. D'où :

$$I = F(1) - F(0) = e - 2 .$$

$$\textbf{104} \bullet f(x) = x\sin x ; f'(x) = \sin x + x\cos x ;$$

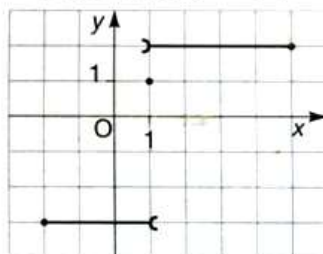
$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x ; \text{ d'où } f(x) + f''(x) = 2\cos x .$$

$f(x) = 2\cos x - f''(x)$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = 2\sin x - f'(x) = \sin x - x\cos x$. D'où :

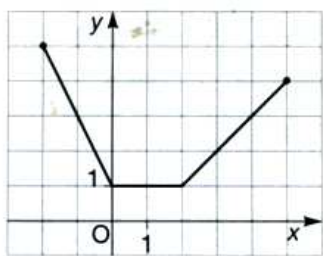
$$I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 1 .$$

Calculs à l'aide des aires

$$\textbf{105} \quad \textbf{a)} I(f) = -3 \times 3 + 2 \times 4 = -1 .$$



b) $I(f) = 6 + 2 + \frac{15}{2} = \frac{31}{2}$.



106 Dessin 1 : $I(f) = 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2$.

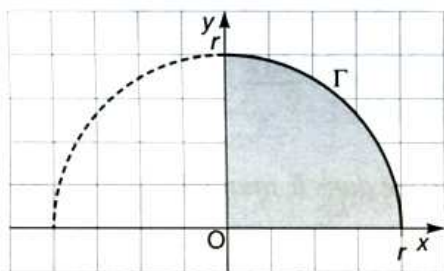
Dessin 2 : $I(f) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Dessin 3 : $I(f) = -2 + \frac{1}{2} + \ln 4 = -\frac{3}{2} + 2 \ln 2$.

107 Corrigé dans le manuel.

108 1. Γ est le quart de cercle de centre O et de rayon r situé dans le premier quadrant.

2. $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4}$; $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{2}$.

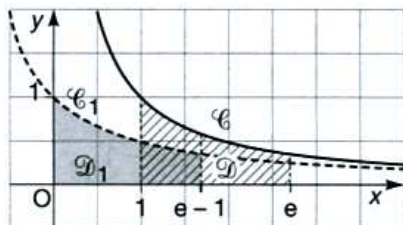


109 1. $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$; $f_2(x) = \frac{1}{x} - 1$.

2. On utilise une interprétation par les aires.

• $\mathcal{D}_1$ est l'image de $\mathcal{D}$ par T_{-i} donc :

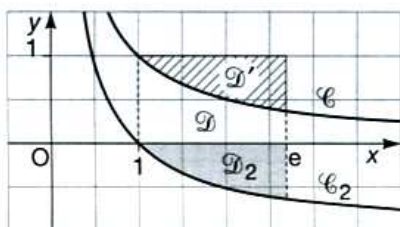
$$I_1 = \text{aire}(\mathcal{D}_1) = \text{aire}(\mathcal{D}) = \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1.$$



• $\mathcal{D}_2$ est l'image de $\mathcal{D}'$ par T_{-j} donc :

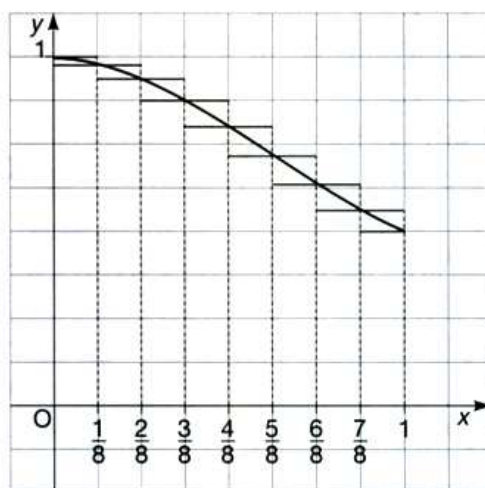
$$I_2 = -\text{aire}(\mathcal{D}_2) = -\text{aire}(\mathcal{D}').$$

Or, $\text{aire}(\mathcal{D}') = (e-1) - \text{aire}(\mathcal{D}) = e-2$ donc $I_2 = 2-e$.



Remarque : Un calcul direct à partir des expressions de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ permet d'obtenir le résultat.

110 • 1.



2. a) $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k}{8}\right) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 f\left(\frac{k}{8}\right)$,

soit $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \frac{64}{64+k^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \frac{64}{64+k^2}$,

donc $8 \sum_{k=1}^8 \frac{1}{64+k^2} \leq \mathcal{A} \leq 8 \sum_{k=0}^7 \frac{1}{64+k^2}$.

b) Amplitude : $\frac{1}{8} [f(0) - f(1)] = \frac{1}{16}$.

3. $0,753 \leq I \leq 0,816$.

111 • 1. f est décroissante et positive sur $[0; 3]$. Par la méthode des rectangles :

$$A = \frac{3}{n} [f(0) - f(3)] = \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \text{ d'où } A < \frac{21}{10n}.$$

2. Il suffit que $\frac{21}{10n} \leq 10^{-2}$ donc $n \geq 210$. On peut prendre $n_0 = 210$.

3. À la calculatrice, à l'aide du programme du TD 4, page 212 : $1,8135 \leq I \leq 1,8234$.

Remarque : La condition est seulement suffisante; la précision peut être obtenue avant le rang 210.

112 • 1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

2. La fonction aire est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

3. Pour tout x de $[0; 1[\cup]1; 2]$, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Pour tout h tel que $0 < h < 1$,

$$T(h) = \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \frac{1+h - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{h} = 1,$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = 1$.

Pour tout h tel que $-1 < h < 0$,

$$T(h) = \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \frac{\frac{(1+h)^2}{2} - \frac{1}{2}}{h} = 1 + \frac{h}{2},$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = 1.$$

Ainsi F est dérivable en 1 avec $F'(1) = 1 = f(1)$. F est donc une primitive de f sur $[0; 2]$.

$$\textbf{113} \bullet 1. f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2. • En évaluant les aires des trapèzes indiqués, on définit $F(x)$.

$$\text{Si } -1 \leq x < 0, F(x) = -\frac{(x+2)(-x)}{2} = \frac{x^2}{2} + x.$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 1, F(x) = \frac{(-x+2)x}{2} = \frac{-x^2}{2} + x.$$

• Pour tout x de $[-1; 0[\cup]0; 1]$, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

• Pour tout $h > 0$ dans $]0; 1]$,

$$T(h) = \frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{\frac{-h^2}{2} + h}{h} = 1 - \frac{h}{2},$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = 1.$$

• Pour tout $h < 0$ dans $[-1; 0[$,

$$T(h) = \frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{\frac{h^2}{2} + h}{h} = 1 + \frac{h}{2},$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = 1.$$

F est donc dérivable en 0 avec $F'(0) = 1 = f(0)$. Ainsi F est la primitive de f sur $[-1; 1]$ telle que $F(0) = 0$.

Intégration par parties

$$\textbf{114} F(x) = \int_1^x \ln(t^2) dt = 2 \int_1^x \ln t dt = 2(x \ln x - x + 1);$$

(voir l'exercice résolu 9, page 205).

Note : Une intégration par parties sans transformation de $\ln(t^2)$ est aussi possible.

$$\begin{aligned} \textbf{115} F(x) &= \int_0^x (2t+1) \sin t dt \\ &= [-(2t+1) \cos t]_0^x + 2 \int_0^x \cos t dt \\ &= -(2x+1) \cos x + 1 + 2 \sin x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{116} \bullet F(x) &= \int_0^x \ln(t+2006) dt \\ &= [(t+2006) \ln(t+2006)]_0^x - \int_0^x dt \\ &= (x+2006) \ln(x+2006) - 2006 \ln 2006 - x. \end{aligned}$$

Note : Ne pas oublier que le choix d'une primitive (à une constante près) peut faciliter les calculs.

$$\begin{aligned} \textbf{117} \bullet F(x) &= \int_{-1}^x (t+1)^2 e^{2t} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} (t+1)^2 e^{2t} \right]_{-1}^x - \int_{-1}^x (t+1) e^{2t} dt \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 e^{2x} - G(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } G(x) &= \left[\frac{1}{2} (t+1) e^{2t} \right]_{-1}^x - \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{2t} dt \\ &= \frac{1}{2} (x+1) e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } F(x) = e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{e^{-2}}{4}.$$

118 • Corrigé dans le manuel.

$$\begin{aligned} \textbf{119} \bullet F(x) &= \int_1^x (\ln t)^2 dt = [t(\ln t)^2]_1^x - 2 \int_1^x \ln t dt \\ &= x(\ln x)^2 - 2G(x). \end{aligned}$$

Or $G(x) = \int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1$ (voir l'exercice résolu 9, page 205), donc

$$F(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - 2.$$

$$\begin{aligned} \textbf{120} \bullet 1. a) F(x) &= [t \cos(\ln t)]_1^x + \int_1^x \sin(\ln t) dt \\ &= x \cos(\ln x) - 1 + G(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) G(x) &= [t \sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x \cos(\ln t) dt \\ &= x \sin(\ln x) - F(x). \end{aligned}$$

$$2. F(x) = \frac{1}{2} [x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - 1];$$

$$G(x) = \frac{1}{2} [-x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) + 1].$$

$$\begin{aligned} \textbf{121} \bullet 1. I &= [-e^{1-t} \cos t]_0^1 - \int_0^1 e^{1-t} \sin t dt \\ &= -\cos 1 + e - J. \end{aligned}$$

$$\bullet J = [-e^{1-t} \sin t]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt = -\sin 1 + I.$$

$$2. I = \frac{1}{2} (\sin 1 - \cos 1 + e) \text{ et } J = \frac{1}{2} (-\sin 1 - \cos 1 + e).$$

$$\textbf{122} \bullet 1. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$I = [\ln(x + \sqrt{x^2-1})]_{\sqrt{2}}^2 = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

$$\begin{aligned} 2. I + J &= \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} \right) dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= [x \sqrt{x^2-1}]_{\sqrt{2}}^2 - \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2-1} dx \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - J. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } J = \frac{1}{2} [2\sqrt{3} - \sqrt{2} - I] = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

Note : Dans l'intégration par parties, écrire :

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = x \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

123 • 1. $K = [e^x \cos(2x)]_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^x \sin(2x) dx$
 $= e^\pi - 1 + 2K.$

Or $K' = [e^x \sin(2x)]_0^\pi - 2 \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx = -2K,$
 donc :

$$K = e^\pi - 1 - 4K, \text{ d'où } K = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

2. $I + J = \int_0^\pi e^x dx = e^\pi - 1;$

$$I - J = \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx = K.$$

$$\text{D'où : } I = \frac{1}{2}(e^\pi - 1 + K) = \frac{3}{5}(e^\pi - 1),$$

$$J = \frac{1}{2}(e^\pi - 1 - K) = \frac{2}{5}(e^\pi - 1).$$

3. $I = \int_0^\pi e^x \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^x dx + \frac{1}{2} K$
 $= \frac{1}{2}(e^\pi - 1) + \frac{1}{2} \times \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{3}{5}(e^\pi - 1).$

De même :

$$J = \int_0^\pi e^x \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^x dx - \frac{1}{2} K = \frac{2}{5}(e^\pi - 1).$$

124 • 1. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$

b) $I = [\ln(x + \sqrt{x^2+2})]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}).$

2. a) $J + 2I = \int_0^2 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^2 \sqrt{x^2+2} dx = K.$

b) $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx = [x\sqrt{x^2+2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$
 $= \sqrt{3} - J.$

c) $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1 + \sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2});$

$$K = J + 2I = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}).$$

125 • 1. Pour tout $x > 1,$

$$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1}.$$

a) Pour tout $x > 1,$

$$G(x) = -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1)$$

$$= -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1).$$

2. Pour tout $x > 1, F(x) = -\frac{1}{x^2-1}.$

3. $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \times \ln x dx.$

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2},$ alors

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x^2-1};$ d'où par intégration par parties :

$$I = \left[-\frac{\ln x}{x^2-1} \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx$$

$$= -\frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 2}{3} + [G(x)]_2^3$$

$$= -\frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 2}{3} - \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 8 + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$$

$$\text{donc } I = \frac{17}{6} \ln 2 - \frac{13}{8} \ln 3.$$

Encadrement. Théorème de la moyenne

126 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ implique $0 \leq x^n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ et

$$0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \text{ implique } 0 \leq \sin(2x) \leq 1, \text{ donc}$$

$$0 \leq x^n \sin(2x) \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

Par intégration sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$

127 1. $x \mapsto \tan x$ est la primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ de $x \mapsto 1 + \tan^2 x,$ qui s'annule en 0, d'où l'écriture intégrale.

2. a) Pour tout t de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right],$

$$0 \leq \tan t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \tan^2 t \leq 2.$$

b) Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right],$ d'après l'inégalité de la moyenne sur $[0; x]:$

$$x \leq \int_0^x (1 + \tan^2 t) dt \leq 2x, \text{ soit } x \leq \tan x \leq 2x.$$

128 • Corrigé dans le manuel.

129 • 1. $u'(x) = 1 - e^{-x};$

x	0		1
$u'(x)$	0	+	
u	0		e^{-1}

$u(x) \geq 0,$ donc $e^{-x} \geq 1 - x.$

• $v'(x) = -1 + x + e^{-x} = u(x)$;

x	0	1
$v'(x)$	0	+
v	0	$\frac{1}{2} - e^{-1}$

$v(x) \geq 0$, donc $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.
Ainsi pour tout x de $[0; 1]$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ [1].

2. $x \in [0; 1] \Rightarrow x^2 \in [0; 1]$

$\Rightarrow 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$

$\Rightarrow \frac{1 - x^2}{1 + x} \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq \frac{1 - x^2}{1 + x} + \frac{x^4}{2(1 + x)}$.

D'où $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1 + x)}$ [2].

3. a) Vérification immédiate.

b) Pour tout x de $[0; 1]$, d'après [2] et 3. a) :

$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq 1 - x + \frac{1}{2} \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1 + x} \right)$.

Par intégration sur $[0; 1]$: $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2} \ln 2$, d'où
 $0,5 \leq I \leq 0,56$; $I \approx 0,53$ (à 3×10^{-2} près).

130 • 1. a) $g'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$;

x	0	1
$g'(x)$	$\frac{1}{2}$	+
g	$\ln 2$	$\ln(1 + e)$

$T_A : y = \frac{1}{2}x + \ln 2$.

b) $P\left(1; \frac{1}{2} + \ln 2\right)$; aire(OIPA) = $\ln 2 + \frac{1}{4}$ u.a.;

aire(OIBA) = $\frac{\ln 2 + \ln(1 + e)}{2} = \ln[\sqrt{2(1 + e)}]$ u.a.

2. aire(OIPA) $\leq \int_0^1 g(x) dx \leq$ aire(OIBA), soit :

$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln[\sqrt{2(1 + e)}]$.

3. $J = [x \ln(1 + e^x)]_0^1 - \int_0^1 \ln(1 + e^x) dx$

$= \ln(1 + e) - \int_0^1 g(x) dx$

D'où l'encadrement :

$\ln(1 + e) - \ln[\sqrt{2(1 + e)}] \leq J \leq \ln(1 + e) - \ln 2 - \frac{1}{4}$,

soit $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) \leq J \leq \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) - \frac{1}{4}$.

131 • 1. a) $I_1 = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$; $I_0 + I_1 = \int_0^1 dx = 1$;

$I_0 = 1 - \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$.

b) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 e^{nx} dx = \frac{e^n - 1}{n}$.

2. Pour tout x de $[0; 1]$, $\frac{1}{1 + e} \leq \frac{1}{1 + e^x} \leq \frac{1}{2}$ et

$e^{nx} > 0$, d'où $\frac{e^{nx}}{1 + e} \leq \frac{e^{nx}}{1 + e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$.

Par intégration sur $[0; 1]$, $\frac{e^n - 1}{(1 + e)n} \leq I_n \leq \frac{e^n - 1}{2n}$.

3. • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{(1 + e)n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e} \times \left[\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} \right] = +\infty$,
donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

• $\frac{1 - e^{-n}}{(1 + e)n} \leq \frac{I_n}{e^n} \leq \frac{1 - e^{-n}}{2n}$, d'après le théorème

d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$.

132 • 1. a) $I_1 = \int_0^2 (2 - x)e^x dx$ d'où par intégration par parties $I_1 = e^2 - 3$.

2. Pour tout réel x de $[0; 2]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$,
 $0 \leq (2 - x)^n \leq 2^n$ d'où $0 \leq (2 - x)^n e^x \leq 2^n e^x$.

Par intégration sur $[0; 2]$,

$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^2 (2 - x)^n e^x dx \leq \frac{2^n}{n!} \int_0^2 e^x dx$

soit $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$ [1].

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{1}{(n + 1)!} \int_0^2 (2 - x)^{n+1} e^x dx$
d'où par intégration par parties

$I_{n+1} = \left[\frac{1}{(n + 1)!} (2 - x)^{n+1} e^x \right]_0^2 + \frac{(n + 1)}{(n + 1)!} \int_0^2 (2 - x)^n e^x dx$

soit $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!}$.

4. On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$, $1 + \frac{2}{1!} + I_1 = 3 + e^2 - 3 = e^2$ donc la formule

est vraie au rang 1.

Supposons la formule vraie pour un entier n , $n \geq 1$,

c'est-à-dire, $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$, alors

$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!}$ soit en utilisant l'hypothèse de récurrence

$I_{n+1} = e^2 - \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) - \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!}$ d'où

$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!} + I_{n+1} = e^2$ donc la
formule est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi la formule est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$$5. a) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

$\frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n+1 \geq 4 \Leftrightarrow n \geq 3$. Puisque u_n est positif, on en déduit que pour $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

b) Dans ces conditions pour tout $n > 3$:

$$u_4 \leq \frac{1}{2} u_3$$

$$u_5 \leq \frac{1}{2} u_4$$

$$\dots$$

$$u_n \leq \frac{1}{2} u_{n-1}.$$

Par multiplication de ces inégalités entre réels > 0 puis simplification, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3$.

$$\text{Ainsi } 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3.$$

Note : Cet encadrement peut aussi être obtenu par récurrence.

6. a) Par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Mais [1] s'écrit $0 \leq I_n \leq u_n (e^2 - 1)$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

b) Or $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} = e^2 - I_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$.

Calculs d'aires et de volumes

$$133 \quad 1. \mathcal{A} = 4 \int_0^1 f(x) dx = \frac{26}{3} \text{ cm}^2.$$

$$2. \mathcal{A} = 4 \int_1^4 f(x) dx = \frac{8}{3} \text{ cm}^2.$$

$$134 \quad 1. \mathcal{A} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

$$2. \mathcal{A} = -4 \int_{-2}^0 f(x) dx = 24 + 4e^{-1} - 4e \text{ cm}^2$$

(f négative sur $[-2; 0]$).

$$135 \quad 1. \mathcal{A} = -4 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \ln(1+t) dt$$

$$= -4 \left([(1+t) \ln(1+t)]_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 dt \right)$$

$$= -4 \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2 - 2 \ln 2 \text{ cm}^2$$

(f négative sur $[-\frac{1}{2}; 0]$).

$$2. \mathcal{A} = 4 \int_{-1}^{\ln 2} f(x) dx = 4 \left([-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\ln 2} + \int_{-1}^{\ln 2} e^{-x} dx \right)$$

$$= 4 \left[-\frac{1}{2}(\ln 2 + 1) - \frac{1}{2} + e \right] = 4(e-1) - 2 \ln 2 \text{ cm}^2.$$

$$136 \quad \text{aire}(\mathcal{D}_1) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \text{ u.a.};$$

$$\text{aire}(\mathcal{D}_2) = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \text{aire}(\mathcal{D}_1) = \frac{5}{12} \text{ u.a.};$$

$$\text{aire}(\mathcal{D}_3) = 1 - \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) = \frac{1}{3} \text{ u.a.}.$$

$$137 \quad \bullet \quad u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}n^2 \right) dx.$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} - n^2 x \right]_n^{n+1} = \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{3} \right)$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}$, donc (u_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

$$138 \quad \text{Dans }]-2; +\infty[, \ln(x+2) - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq e - 2.$$

$$\mathcal{A} = - \int_{-1}^{e-2} f(x) dx + \int_{e-2}^e f(x) dx$$

$$= F(e) - 2F(e-2) + F(-1) \text{ avec } F \text{ primitive sur } [-1; e] \text{ de la fonction :}$$

$$x \mapsto f(x) = \ln(2+x) - 1.$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(2+x)$ est définie par :

$$G(x) = \int_0^x \ln(t+2) dt = [(t+2) \ln(t+2)]_0^x - \int_0^x dt$$

$$= (x+2) \ln(x+2) - 2 \ln 2 - x.$$

Ainsi on peut prendre $F(x) = (x+2) \ln(x+2) - 2x$, d'où on déduit que $\mathcal{A} = (e+2) \ln(e+2) - 6 \text{ u.a.}$

139 •

$$\mathcal{A} = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = F(4) - 2F(1) + F(-1)$$

avec F primitive de f sur $[-1; 4]$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x}$ est définie par $F(x) = \int_{-1}^x (t^2 - 1)e^{-t} dt$.

Par double intégration par parties :

$$F(x) = [-(t^2 - 1)e^{-t}]_{-1}^x + 2 \int_{-1}^x te^{-t} dt$$

$$= -(x^2 - 1)e^{-x} + 2G(x);$$

$$G(x) = [-te^{-t}]_{-1}^x + \int_{-1}^x e^{-t} dt = -xe^{-x} - e^{-x},$$

d'où $F(x) = -(x+1)^2 e^{-x}$.

Ainsi $\mathcal{A} = (8e^{-1} - 25e^{-4}) \text{ u.a.}$

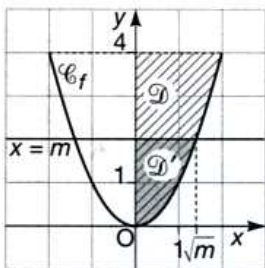
140 • Corrigé dans le manuel.

141 • $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à (Oy), donc m est tel que l'aire de $\mathcal{D}$ est la moitié de celle de $\mathcal{D}'$.

$$\int_0^{\sqrt{m}} (m-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4-x^2) dx,$$

soit $\frac{2}{3} m \sqrt{m} = \frac{8}{3}$, d'où :

$$m^3 = 16 \text{ et } m = 16^{\frac{1}{3}}.$$



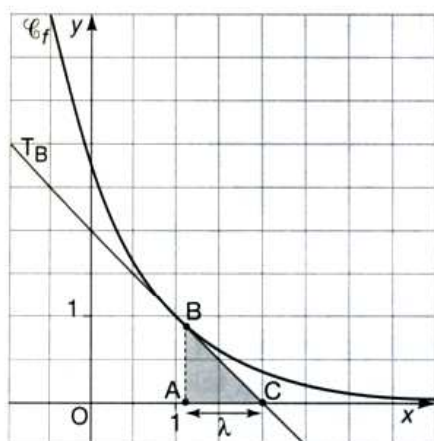
142 • 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$,

d'où le résultat. Pour tout réel x , $f(x) - (x-2) > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de d .

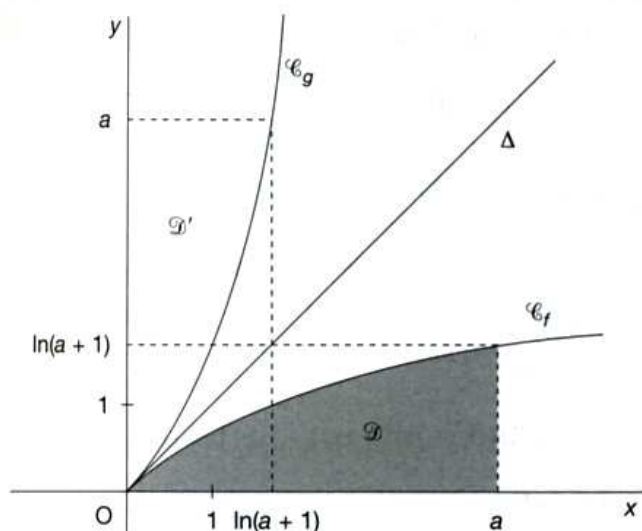
2. $S_1 = \int_0^\lambda [f(x) - (x-2)] dx = \int_0^\lambda e^{1-x} dx = (e - e^{1-\lambda})$ u.a.

3. Équation de la tangente T_B : $y = -e^{1-\lambda}(x-\lambda) + e^{1-\lambda}$, d'où $C(1+\lambda; 0)$.

$S_2 = \frac{1}{2} e^{1-\lambda}$ u.a., d'où $S_1 + 2S_2 = e$ (indépendant de λ).



143 • 1. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g'(x) = e^x$.



Ainsi $f'(0) = g'(0) = 1$ et $f(0) = g(0) = 0$.

D'où $\Delta: y = x$ est tangente commune en O.

La courbe $C_{\ln}$ est en dessous de sa tangente $T: y = x-1$ au point d'abscisse 1 donc pour tout $t > 0$, $\ln t \leq t-1$.

En posant $t = x+1$ avec $x \in [0; +\infty[$, on obtient $\ln(x+1) \leq x$ donc C_f est en dessous de Δ .

Autre méthode : Étudier le signe de $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$ sur $[0; +\infty[$ à partir des variations de φ .

2. La symétrie d'axe Δ est définie par :

$$M(x; y) \mapsto M'(x'; y') \text{ avec } x' = y \text{ et } y' = x.$$

Pour tout $x \geq 0$:

$$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow y = \ln(1+x) \Leftrightarrow e^y = 1+x \Leftrightarrow x = e^y - 1 \\ \Leftrightarrow y' = e^x - 1 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in C_g.$$

Ainsi C_f et C_g sont symétriques par rapport à Δ .

3. a) Tracés des représentations graphiques.

b) $I(a)$ exprime l'aire en u.a. du domaine $\mathcal{D}$ et en raison de la symétrie, $\text{aire}(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{D}')$.

$$\begin{aligned} \text{aire}(\mathcal{D}') &= \int_0^{\ln(a+1)} (a - (e^x - 1)) dx \\ &= \int_0^{\ln(a+1)} a dx - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx \end{aligned}$$

d'où $I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx$.

Or $\int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln(a+1)} = a - \ln(a+1)$

donc $I(a) = (a+1) \ln(a+1) - a$.

c) Par intégration par parties,

$$I(a) = [(x+1) \ln(x+1)]_0^a - \int_0^a dx = (a+1) \ln(a+1) - a.$$

Note : Poser $u(x) = \ln(x+1)$, $v'(x) = 1$ alors $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ et choisir $v(x) = x+1$.

144 • 1. Conditions :

$$f(1) = 0, f'(1) = 0, \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}.$$

$$\text{D'où le système } \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b=0 \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{3} + c = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b=0 \\ 3a+5b+15c=5 \end{cases}$$

Ainsi $a = \frac{5}{8}$, $b = -\frac{5}{4}$, $c = \frac{5}{8}$.

145 • 1. $\mathcal{C}_f: y = 1 + x - xe^{-x^2+1}$.

On pose $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$;

dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}_f: Y = X - Xe^{-X^2+1}$.

$\mathcal{C}_f$ représente la fonction $X \mapsto X - Xe^{-X^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$; celle-ci est impaire donc I est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x^2+1}$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} -e \frac{u^{\frac{1}{2}}}{e^u} = 0 \text{ (en posant } u = x^2).$$

Donc $d: y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x + 1)$ $= -xe^{-x^2+1}$	-	0	-
position	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de d	point commun	$\mathcal{C}_f$ en-dessous de d

3. a) $\mathcal{A}(\lambda) = 4 \int_0^\lambda xe^{-x^2+1} dx = 2(-e^{-\lambda^2+1} + e) \text{ cm}^2$.

b) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 2e \text{ cm}^2$.

c) $|\mathcal{A}(\lambda) - \mathcal{A}| = 2e^{-\lambda^2+1}$.

D'où $2e^{-\lambda^2+1} \leq 10^{-2}$ donc $\lambda \geq \sqrt{1 - \ln \frac{1}{200}}$.

On pourra prendre $\lambda_0 = \sqrt{1 + \ln(200)} \approx 2,51$.

146 • Corrigé dans le manuel.

147 • 1. $f(x) = ke^{-x}$ avec k défini par $f(0) = e$ d'où $k = e$. Ainsi $f(x) = e^{1-x}$.

2. Pour $t \in [1; e]: e^{1-x} = t \Leftrightarrow x = 1 - \ln t$.

Note : $0 \leq x \leq 1$.

3. a) La section du solide par un plan perpendiculaire à (Oy) en $M(0; t)$ avec $t \in [1; e]$ est un disque de rayon $x = 1 - \ln t$ (voir 2.) et d'aire $S(t) = \pi(1 - \ln t)^2$.

Ainsi $V = \int_1^e S(t) dt = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$.

b) $\int_1^e (1 - \ln t)^2 dt = [t(1 - \ln t)^2]_1^e + 2 \int_1^e \ln(1 - t) dt$
 $= -1 + 2 \int_1^e (1 - \ln t) dt \quad [1].$

[poser : $u(t) = (1 - \ln t)^2$, $v'(t) = 1$, $u'(t) = -\frac{2}{t}(1 - \ln t)$,
 $v(t) = t$].

$\int_1^e (1 - \ln t) dt = [t(1 - \ln t)]_1^e + \int_1^e dt = e - 2 \quad [2].$

Ainsi d'après [1] et [2], $\int_1^e (1 - \ln t)^2 dt = 2e - 5$

d'où $V = \pi(2e - 5) u.v.$

148 • 1. En raison de la symétrie par rapport au plan passant par O et perpendiculaire à (Oy) , il suffit de raisonner avec un plan de coupe défini pour $0 \leq y \leq r$.

La section est une couronne circulaire centrée sur (Oy) d'aire : $\pi[(d + r')^2 - (d - r')^2] = 4\pi dr'$.

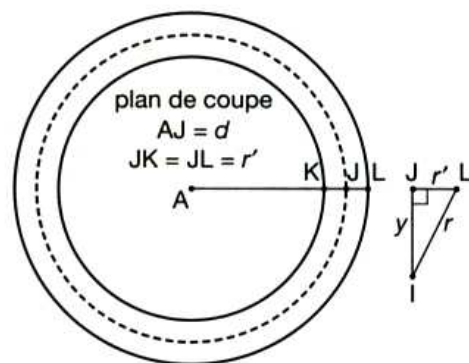
Or r' est tel que $r'^2 = r^2 - y^2$

donc $S(y) = 4\pi d \sqrt{r^2 - y^2}$.

2. $V = 2 \int_0^r S(y) dy = 8\pi d \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 8\pi d \times \frac{\pi r^2}{4}$,

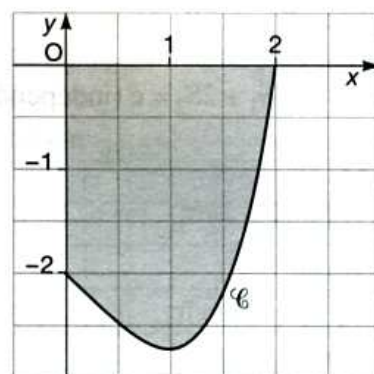
donc $V = 2\pi^2 dr^2$.

(Voir l'exercice 108 pour le calcul de l'intégrale.)



149 • 1. $f'(x) = e^x(x - 1)$.

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
f	-2	$-e$	0



2. $\mathcal{A} = - \int_0^2 f(x) dx$.

Par intégration par parties $\mathcal{A} = e^2 - 3 \approx 4,39 \text{ cm}^2$.

3. a) Les réels a, b, c sont tels que pour tout réel x , $G'(x) = f^2(x)$, soit :

$$e^{2x}[2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c] = e^{2x}(x - 2)^2,$$

d'où, par identification, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = \frac{13}{4}$.

b) La section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe (Ox) est un disque d'aire $S(x) = \pi f^2(x)$.

$V = \int_0^2 S(x) dx = \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \frac{\pi(e^4 - 13)}{4} \approx 32,671 \text{ cm}^3$.

150 • 1. $V = \pi \int_\alpha^\beta f^2(x) dx = \pi \int_\alpha^\beta (ax^2 + bx + c) dx$
 $= \pi \left[\frac{a}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{b}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) \right]$
 $= \frac{\pi(\beta - \alpha)}{6} [2a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 3b(\beta + \alpha) + 6c]$
 $= \frac{\pi h}{6} [2a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 3b(\beta + \alpha) + 6c].$

D'autre part :

$B_1 + B_2 + 4B_3 = \pi[a\alpha^2 + b\alpha + c] + \pi[a\beta^2 + b\beta + c]$
 $+ 4\pi \left[a \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + b \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + c \right]$
 $= \pi[2a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c]$

Ainsi $V = \frac{h}{6} (B_1 + B_2 + 4B_3)$.

2. Il s'agit d'une application avec $f(x) = 12 \sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}}$,

$(P(x) = 144 + \frac{x^2}{4})$. $R_1 = 12 \sqrt{1 + \frac{36^2}{24^2}} = 6\sqrt{13}$;

$R_2 = 12 \sqrt{1 + \frac{12^2}{24^2}} = 6\sqrt{5}$; $R_3 = 12 \sqrt{1 + \frac{(-12)^2}{24^2}} = 6\sqrt{5}$.

D'après la formule « des trois niveaux » :

$V = 8[\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + 4\pi R_3^2] = 10\,944\pi$,
soit $V \approx 34\,382 \text{ m}^3$.

Calcul intégral dans d'autres sciences

151 1. $W = R \times I_e^2 \times T = R \int_0^T i^2(t) dt$ donc

$I_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt$ donc I_e^2 est la valeur moyenne de i^2 sur $[0; T]$.

2. $I_e^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$.

Or $\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$

donc $\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt$
 $= \frac{T}{2} - \left[\frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{T}{2}$.

Ainsi $I_e^2 = \frac{I_m^2}{2}$ donc $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

152 • $x_G = \frac{1}{M} \int_0^r mx \sqrt{r^2 - x^2} dx$
 $= \frac{m}{M} \times \left[-\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r = \frac{m}{M} \times \frac{r^3}{3}$.

Or $\frac{m}{M} = \frac{1}{S} = \frac{4}{\pi r^2}$ donc $x_G = \frac{4r}{3\pi}$.

D'où la position de G sur la droite d'équation $y = x$.

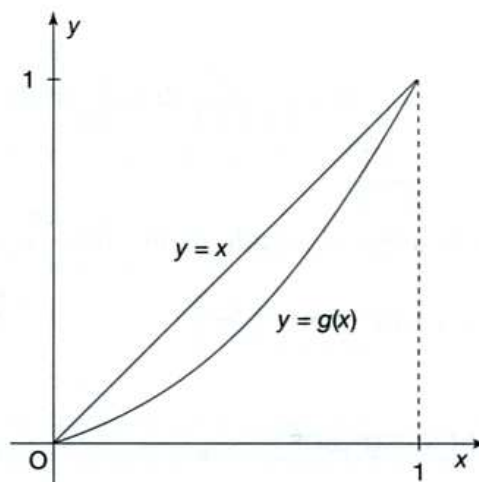
153 • A. 1. $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ donc g vérifie [1].

$g'(x) = e^x - 1(x+1)$; $g'(x) > 0$ sur $[0; 1]$ donc g vérifie [2].

2. Pour tout x de $[0; 1]$, $g(x) - x = x \frac{e^x}{e} - x = \frac{x}{e} (e^x - e)$.

Or pour $0 \leq x \leq 1$, on a $\frac{x}{e} \geq 0$ et $e^x \leq e$ soit $e^x - e \leq 0$
donc $g(x) - x \leq 0$. Ainsi g vérifie [3].

3. Représentation graphique



B. 1. La fonction différence $x \mapsto x - f(x)$ est continue et positive sur $[0; 1]$ donc $I = \int_0^1 (x - f(x)) dx$.

2. $I_g = \int_0^1 (x - g(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 g(x) dx$
 $= \frac{1}{2} - \int_0^1 g(x) dx$.

Par intégration par parties

$\int_0^1 g(x) dx = [xe^{x-1}]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx = e^{-1}$

d'où $I_g = \frac{1}{2} - e^{-1}$.

3. a) Pour tout entier n , $n \geq 2$, les fonctions f_n sont telles que :

• $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ [1].

• $f'_n(x) = 2 \times \frac{nx^{n-1}(1+x) - x^n}{(1+x)^2} = \frac{2x^{n-1}[n + (n-1)x]}{(1+x)^2}$

donc $f'_n(x) \geq 0$ et f_n est croissante sur $[0; 1]$ [2].

• $f_n(x) - x = \frac{2x^n}{1+x} - x = \frac{2x^n - (x^2 + x)}{1+x}$.

Or pour tout x de $[0; 1]$,

$x^2 + x \geq 2x^2$ d'où $2x^n - (x^2 + x) \leq 2x^n - 2x^2$

soit $2x^n - (x^2 + x) \leq 2x^2(x^{n-2} - 1) \leq 0$

donc $f_n(x) - x \leq 0$ [3].

b) $I_n = \int_0^1 (x - f_n(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f_n(x) dx$
 $= \frac{1}{2} - u_n$.

c) Pour tout t de $[0; 1]$,

$t^{n+1} \leq t^n$ et $1+t > 0$ d'où $\frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{t^n}{1+t}$.

D'où par intégration $\int_0^1 \frac{2t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t} dt$

soit $u_{n+1} \leq u_n$.

Ainsi (u_n) est décroissante.

d) Pour tout t de $[0; 1]$, $0 < \frac{1}{1+t} \leq 1$ et $t^n \geq 0$

$$\text{d'où } 0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

$$\text{e) Par intégration : } 0 \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 2t^n dt$$

$$\text{soit } 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$\text{donc d'après 3. b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

Suites et intégrales

154 1. a) Pour tout t de $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(t) + f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{t+1} + \frac{t^n}{t+1} = \frac{t^n(t+1)}{t+1} = t^n.$$

b) Par intégration sur $[0; 1]$,

$$\int_0^1 f_{n+1}(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 t^n dt$$

$$\text{d'où } u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

b) Pour tout t de $[0; 1]$, $t^{n+1} \leq t^n$ et $1+t > 0$

$$\text{donc } \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{t^n}{1+t} \text{ puis par intégration sur } [0; 1],$$

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Ainsi (u_n) est décroissante.

$$\text{3. a) D'après 1. b), } u_n = \frac{1}{n+1} - u_{n+1}, \text{ or } u_{n+1} \geq 0$$

$$\text{donc } u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{D'où l'encadrement } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b) D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.

155 • Corrigé dans le manuel.

156 • 1. a)

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$$

$$= [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{e}.$$

b) Pour tout x de $[0; 1]$, $0 \leq 1-x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$, donc :

$$0 \leq \frac{1}{n!} (1-x)e^{-x} \leq \frac{1}{n!} e^{-x}.$$

$$\text{Par intégration sur } [0; 1], 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx.$$

D'où $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} (1 - e^{-1})$ et, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{c) } I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left([-(1-x)^{n+1} e^{-x}]_0^1 \right. \\ &\quad \left. - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} [1 - (n+1)n! I_n] = \frac{1}{(n+1)!} - I_n. \end{aligned}$$

2. a) $\frac{1}{e} + (-1)I_1 = 0 = a_1$ donc la relation est vraie au rang 1. On suppose la relation vraie pour un entier $n \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)!} - I_n \right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}, \end{aligned}$$

donc elle est vraie au rang $n+1$.

D'où le résultat pour tout n ($n \geq 1$).

$$\text{b) Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

157 • 1. $I_0 = 1$; $J_0 = 1$.

$$\text{2. a) } I_n = [-e^{-nx} \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx = 1 - nJ_n;$$

$$J_n = [e^{-nx} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n.$$

$$\text{b) } \begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \text{ d'où } I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2} \text{ et}$$

$$J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2}.$$

$$\text{3. } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - e^{-n\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{n} + n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}}{\frac{1}{n} + n} = 0.$$

158 • 1. a) $\varphi'(t) = \frac{1}{(t+2)^2}$.

t	0	2
$\varphi'(t)$		+
φ	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

b) Pour tout t de $[0; 2]$, $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$, d'où par intégration sur $[0; 2]$,

$$\frac{3}{2} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} dt \leq \int_0^2 \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} dt \leq \frac{7}{4} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} dt$$

$$\text{soit : } \frac{3}{2}n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \quad [1].$$

c) On pose $h = \frac{2}{n}$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = 2.$$

Par passage à la limite dans [1], $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$.

2. a) Pour tout t de $[0; 2]$,

$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2} = \frac{2(t+2)-1}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}.$$

$$I = \int_0^2 \varphi(t) dt = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{t+2} \right) dt = [2t - \ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln 2.$$

b) La fonction $t \mapsto e^{\frac{t}{n}}$ est strictement croissante sur

$[0; 2]$: pour tout t de $[0; 2]$, $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$; d'où, puisque $\varphi(t) > 0$:

$$\varphi(t) \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{2}{n}}.$$

Par intégration sur $[0; 2]$, $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$.

c) D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers I . Ainsi $\ell = 4 - \ln 2$.

159 • 1. a) Pour tout x de $]1; e[$, $0 < \ln x < 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $(\ln x)^n > 0$ et $1 - \ln x > 0$, d'où $(1 - \ln x)(\ln x)^n > 0$, soit $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b) $I_n - I_{n+1} = \int_1^e [(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1}] dx > 0$, donc (I_n) est décroissante.

c) Pour tout $n \geq 1$ et tout x de $[1; e]$, $(\ln x)^n \geq 0$, donc $I_n \geq 0$.

(I_n) est décroissante minorée par 0, donc elle converge.

$$\mathbf{2. a)} I_1 = \int_1^e \ln t dt = [t \ln t]_1^e - \int_1^e dt = 1.$$

b) Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx \\ &= [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx \\ &= e - (n+1)I_n \quad [1]. \end{aligned}$$

$$\mathbf{c)} I_2 = e - 2 \approx 0,718; I_3 = -2e + 6 \approx 0,563; I_4 = 9e - 24 \approx 0,464.$$

3. a) D'après [1], $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ et $I_{n+1} \geq 0$, donc :

$$(n+1)I_n \leq e.$$

Ainsi $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et, d'après le théorème d'encadrement, (I_n) converge vers 0.

b) D'après [1], $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = e$.

D'où $nI_n = e - (I_n + I_{n+1})$; or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n + I_{n+1}) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = e$.

160 • 1. Par intégration par parties, $I = 1 - 2e^{-1}$.

$$\mathbf{2. a)} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

D'où l'idée de penser à la méthode des rectangles.

$$\mathbf{b)} f'(x) = e^{-x}(1-x).$$

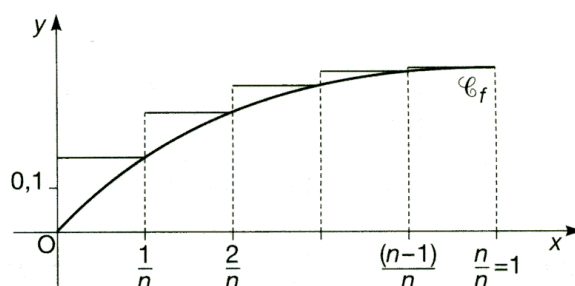
x	0	1
$f'(x)$		0
f	0	e^{-1}

f est continue, strictement croissante sur $[0; 1]$.

S_n représente la somme des aires des rectangles supérieurs associés à la subdivision de $[0; 1]$ en n sous-intervalles de même amplitude.

La suite (S_n) converge donc vers

$$I = \int_0^1 f(x) dx = 1 - 2e^{-1}.$$



161 • 1. Pour tout x de $[0; 1]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad [1].$$

$$\begin{aligned} \text{En outre } \frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \right) &= \frac{n^2 - n(x+n) + x(x+n)}{n^2(x+n)} \\ &= \frac{x^2}{n^2(x+n)} \end{aligned}$$

est positif donc $\frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \quad [2].$

D'où l'encadrement $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$.

$$\mathbf{2. a)} J_n = \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

b) Par intégration sur $[0; 1]$ des inégalités du 1.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dx$$

soit $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq J_n \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$U(n+1) - U(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

$$\text{Or } \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{2n^2 - 2n(n+1) + n+1}{2n^2(n+1)}$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1-n}{2n^2(n+1)} \leq 0.$$

Ainsi $U(n+1) - U(n) \leq 0$ et la suite U est décroissante.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$V(n+1) - V(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right).$$

Or d'après l'encadrement du 2. b) appliqué au rang $n+1$:

$$\ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n+1} \text{ donc } \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \geq 0.$$

Ainsi $V(n+1) - V(n) \geq 0$ et la suite V est croissante.

5. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$U(n) - V(n) = -\ln(n) + \ln(n+1) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U(n) - V(n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = 0.$$

Ainsi les suites U et V sont adjacentes, donc elles convergent vers un même réel noté γ .

Par exemple $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} U(n)$. D'où $0,57 \leq \gamma \leq 0,58$;

une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par excès est 0,58.

162 • 1. Pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2(x+1)}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (1 + x \ln x) - \ln(x+1) \right] = +\infty.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	$+\infty$	0

$$2. \bullet \int_1^\alpha \ln \frac{x}{x+1} dx = \left[x \ln \frac{x}{x+1} \right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \alpha \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} - \ln(\alpha+1) + 2 \ln 2.$$

$$\bullet \int_1^\alpha f(t) dt = \int_1^\alpha \frac{1}{t} dt + \int_1^\alpha \ln \frac{t}{t+1} dt$$

$$= \ln \alpha + \alpha \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} - \ln(\alpha+1) + 2 \ln 2$$

$$= (\alpha+1) \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) + 2 \ln 2.$$

3. a) Pour tout x de $[k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$;

d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

$$b) \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln(k+1) - \ln k = -\ln \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k} - f(k).$$

D'après 3. a), $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - f(k) \leq \frac{1}{k}$, d'où :

$$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ soit } 0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. a) Vérification immédiate.

b) $S_n =$

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1},$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.

c) D'après 3. b), $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$,

$$0 \leq f(n+1) \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)};$$

$$0 \leq f(2n) \leq \frac{1}{2n(2n+1)};$$

d'où la sommation : $0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq S_n$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^{2n} f(k) \right) = 0.$$

5. a) D'après 3. b), $f(k) = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$.

Par sommation des relations écrites pour $k = n$ à $k = 2n$,

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \text{ et, en utilisant la}$$

relation de Chasles, $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx$, soit :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \ln(2n+1) + \ln n,$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

$$\text{b) Ainsi } u_n = \sum_{k=n}^{2n} f(k) + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right), \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

$$\text{163 : 1. } F'(x) = \ln(1 + e^{-2x}) \text{ sur } [0; +\infty[.$$

$F' > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc F est strictement croissante.

2. Pour tout t de $[1; 1+a]$, $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ (décroissance de la fonction inverse sur $[1; 1+a]$).

D'après le théorème de la moyenne,

$$\frac{a}{1+a} \leq \int_1^{1+a} \frac{1}{t} dt \leq a \text{ soit :}$$

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a.$$

3. On pose $a = e^{-2t}$ ($a > 0$), d'où :

$$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}.$$

Par intégration sur $[0; x]$:

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt, \text{ soit}$$

$$\left[-\frac{1}{2} \ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \leq F(x) \leq \left[-\frac{1}{2} e^{-2t}\right]_0^x, \text{ donc :}$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

4. Par passage à la limite en $+\infty$: $\frac{1}{2} \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

5. a) Sur $[n; n+1]$, la fonction $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$ est décroissante, d'où $0 \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq \ln(1+e^{-2n})$ et, d'après l'inégalité de la moyenne, $0 \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n})$.

b) D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.

$$6. S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \ln(1+e^{-2t}) dt$$

$$= \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt$$

(d'après la relation de Chasles), soit $S_n = F(n+1)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n+1) = \ell$, donc (S_n) converge vers ℓ .

164 : 1. Pour $n \geq 2$, $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$. Par comparaison des aires :

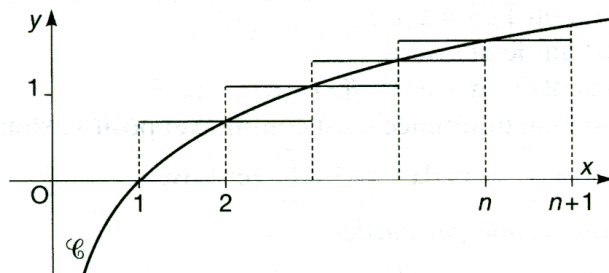
$$\int_1^n \ln t dt \leq \sum_{k=2}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln t dt.$$

(La première intégrale est majorée par la somme des aires des rectangles « supérieurs » alors que la

seconde est minorée par celle des rectangles « inférieurs ».)

$$\text{D'où } \int_1^n \ln t dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln t dt \quad [1].$$

Note : Cet encadrement est encore vérifié par $n = 1$.



$$2. \text{ Pour tout entier } n \geq 2, u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} = \frac{\ln(n!)}{n \ln n}.$$

Pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \ln t dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x dt = x \ln x - x + 1.$$

Donc, d'après [1] :

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n,$$

d'où par division par $n \ln n > 0$:

$$1 - \frac{n-1}{n \ln n} \leq u_n \leq \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{1}{\ln n} \quad [2].$$

$$\text{Or } \frac{n-1}{n \ln n} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\ln n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n \ln n} = 0. \text{ De plus :}$$

$$\frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{(n+1) \left[\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]}{n \ln n}$$

$$= \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n},$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} = 1.$$

Ainsi les termes extrêmes de l'inégalité [2] ont pour limite 1 et, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 1.

Prendre toutes les initiatives

165 Notons $f(x) = -x^2 + 4x = x(4-x)$

et $g(x) = kx(4-x)$. Ainsi $g = kf$.

Ces deux fonctions polynômes ont pour racines 0 et 4.

La condition de partage implique $k > 0$.

f et g sont continues et positives sur $[0; 4]$

$$\text{donc } a(\mathcal{D}) = \int_0^4 f(x) dx \text{ et}$$

$$a(\mathcal{D}') = \int_0^4 g(x) dx = k \int_0^4 f(x) dx = k \times a(\mathcal{D}).$$

Il s'agit de trouver k tel que $a(\mathcal{D}') = \frac{1}{2} a(\mathcal{D})$

$$\text{soit } k \times a(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} a(\mathcal{D}) \text{ donc } k = \frac{1}{2}.$$

166 • Déterminons une équation de la tangente T.

$$f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + e^{-x}(1-x).$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + e^{-x}(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ainsi T est tangente à $\mathcal{C}$ au point A(1 ; $1 + e^{-1}$).

T est la droite passant par A et de coefficient directeur 1 d'où T : $y = x + e^{-1}$.

• T est au-dessus de $\mathcal{C}$.

$$\text{Posons } \varphi(x) = x + e^{-1} - f(x) = e^{-1} - xe^{-x}.$$

La fonction différence φ est continue et positive donc

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_0^1 \varphi(x) dx = e^{-1} - \int_0^1 xe^{-x} dx.$$

Par intégration par parties

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}.$$

Ainsi $\text{aire}(\mathcal{D}) = 3e^{-1} - 1$ donc $\text{aire}(\mathcal{D}) > 0,1$.

167 • Posons $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $x \in [0; 1]$ et notons C_f sa courbe dans un repère orthonormal.

$$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + x \text{ et } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ et } y \geq 0.$$

C_f est le demi-cercle de centre I($\frac{1}{2}; 0$) et de rayon

$r = \frac{1}{2}$ situé dans le demi-plan $\mathcal{P} : y \geq 0$.

L'intégrale exprime l'aire du demi-disque « supérieur »

$$\text{associé : } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}.$$

168 • Sur $]0; 1]$, la fonction $\ln$ est continue et négative donc $\mathcal{A}(\alpha) = - \int_{\alpha}^1 \ln x dx = \int_1^{\alpha} \ln x dx$.

$$\text{Par intégration par parties :}$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = [x \ln x]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} 1 dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1.$$

La fonction $\mathcal{A} : \alpha \mapsto \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$ définie sur $]0; 1]$ est dérivable sur $]0; 1]$ et $\mathcal{A}'(\alpha) = \ln \alpha$.

x	0	1
$\mathcal{A}'(\alpha)$		0
$\mathcal{A}(\alpha)$	1	0

Note : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \ln \alpha = 0$ donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\alpha) = 1$.

Ainsi il n'existe pas de réel α dans $]0; 1]$ tel que $\mathcal{A}(\alpha) = 2$.

169 • Cherchons à encadrer u_n .

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0; 1]$,

$0 \leq 1-t \leq 1$ d'où $0 \leq (1-t)^n \leq 1$ et puisque $e^{-t} > 0$ on obtient $0 \leq (1-t)^n e^{-t} \leq e^{-t}$.

Par intégration sur $[0; 1]$,

$$0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^{-t} dt \leq \int_0^1 e^{-t} dt \text{ d'où}$$

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{-t} dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-t} dt.$$

Ainsi $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!} (1 - e^{-1})$. D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.

170 • $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. S_n exprime la somme des aires des rectangles colorés (en u.a.).

Par comparaison d'aires,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &\leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

$$\text{soit } S_n \leq \ln(2n) - \ln(n) \leq S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

$$\text{donc } S_n \leq \ln 2 \leq S_n + \frac{1}{2n}.$$

$$\text{D'où l'encadrement, } \ln 2 - \frac{1}{2n} \leq S_n \leq \ln 2.$$

D'après le théorème d'encadrement (S_n) converge vers $\ln 2$.

171 • $\mathcal{B}$ est l'aire entre la droite (OM) : $y = tx$ et la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ sur l'intervalle $[0; t]$.

$$\mathcal{B} = \int_0^t (tx - x^2) dx = \left[\frac{tx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^t = \frac{t^3}{6}.$$

Notons H et K les projetés orthogonaux de M et N sur l'axe (Ox).

Alors $\mathcal{A} = \text{aire (OHM)} - \text{aire (OKM)} - \text{aire (MHKN)}$

$$\text{soit } \mathcal{A} = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{16} - \frac{5t^3}{16} = \frac{t^3}{8}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{\frac{t^3}{6}}{\frac{t^3}{8}} = \frac{4}{3}.$$

Problèmes

(page 232)

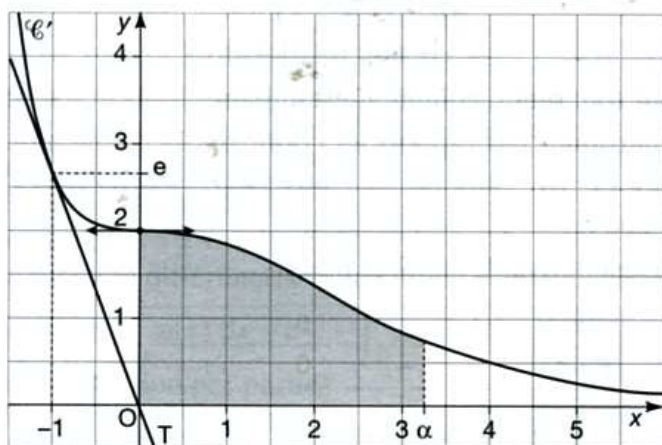
172 • 1. a) Pour tout k ($k \geq 0$), f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{b) } f'_k(x) &= 1 - \frac{2ke^x}{(1+ke^x)^2} \\ &= \frac{1+k^2e^{2x}}{(1+ke^x)^2}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} [f_k(x) - x]^2 + 1 &= \left(\frac{1-ke^x}{1+ke^x} \right)^2 + 1 = \frac{2+2k^2e^{2x}}{(1+ke^x)^2} \\ &= \frac{2(1+k^2e^{2x})}{(1+ke^x)^2}. \end{aligned}$$

2. $T: y = -ex$.



3. a) F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ équivaut à, pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$, soit :

$$e^{-x}[-ax^2 + (2a-b)x + b-c] = e^{-x}(x^2 + 2x + 2),$$

d'où $a = -1$, $b = -4$, $c = -6$.

$$\text{Ainsi } F(x) = (-x^2 - 4x - 6)e^{-x}.$$

b) $\mathcal{A}(\alpha) = 4 \int_0^\alpha f(x) dx = 4[(-\alpha^2 - 4\alpha - 6)e^{-\alpha} + 6] \text{ cm}^2.$

Note : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 24 \text{ cm}^2.$

174 • Partie A

1. $g'(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	+	0
g	0	$1 - \ln 2$	$-\infty$

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, g est continue strictement décroissante et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

$g(\frac{7}{4}) \approx 0,106$ et $g(2) \approx -0,009$ sont de signes contraires, donc $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. a) $T_2: y = -\frac{12}{25}x + \frac{64}{25} - \ln 5.$

b) $x_0 = \frac{16}{3} - \frac{25}{12} \ln 5$, d'où $v_1 = 1,980$ et $v_2 = 0,181$.

$g(v_1) \approx 1,4 \times 10^{-4}$ et $g(v_2) \approx -3,4 \times 10^{-4}$ sont de signes contraires, donc $1,980 < \alpha < 1,981$.

c) $g(x) \geq 0$ sur $[0; \alpha]$; $g(x) < 0$ sur $] \alpha; +\infty[$.

Partie B

1. Taux d'accroissement de f en 0 : lorsque $x \neq 0$,

$$T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}.$$

On pose $h = x^2$, $\lim_{x \rightarrow 0} T(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. f est une fonction impaire, il suffit d'étudier ses variations sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2};$

f' est du signe de g .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0
f	0	$f(\alpha)$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0.$$

2. • On pose pour tout x de $] -1; +\infty[$,

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x; \quad \varphi'(x) = -\frac{x}{1+x};$$

x	-1	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
φ		0	$-\infty$

Ainsi pour tout x de $] -1; +\infty[$,

$$\varphi(x) \leq 0 \text{ donc } \ln(1+x) \leq x \text{ [1].}$$

• $T_0: y = x$. La position de $\mathcal{C}_f$ et T_0 est déterminée par le signe de la fonction différence :

$$d: x \mapsto f(x) - x = \frac{\ln(x^2 + 1) - x^2}{x}.$$

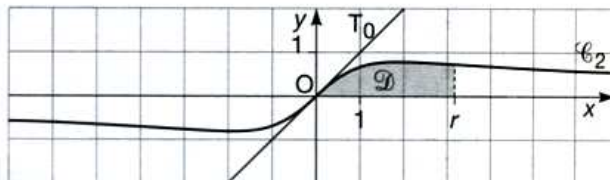
Or pour tout réel x , $x^2 > -1$, donc d'après [1] :

$$\ln(x^2 + 1) - x^2 \leq 0;$$

le signe de $d(x)$ est l'opposé de celui de x .

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_0 sur $] -\infty; 0[$, en-dessous sur $] 0; +\infty[$ et T_0 coupe $\mathcal{C}_f$ en O.

Note : $\mathcal{C}_f$ « traverse » sa tangente en O ; l'origine O est un point d'inflexion.



Partie C

1. Pour $r > 0$, $F(r) = \int_0^r f(t) dt = \text{aire}(\mathcal{D})$. f est impaire donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à O. Si $\mathcal{D}'$ est le domaine symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à O :

$$F(-r) = \int_0^{-r} f(t) dt = -\int_{-r}^0 f(t) dt = \text{aire}(\mathcal{D}').$$

D'où $F(-r) = F(r)$. Ainsi F est paire.

x	0	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	0	+
F	0	

2. D'après B. 2., pour tout t de $[0; 1]$, $0 \leq f(t) \leq t$,
d'où par intégration, $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$.

3. Pour tout réel $t \geq 1$,

$$0 \leq 1 \leq t^2 \Rightarrow t^2 \leq t^2 + 1 \leq 2t^2$$

$$\Rightarrow \ln(t^2) \leq \ln(t^2 + 1) \leq \ln(2t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2 + 1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t} \quad [2].$$

4. • Pour $x \geq 1$, $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = F(1) + \int_1^x f(t) dt.$$

Or, pour tout t de $[1; x]$, d'après [2],

$$\frac{2\ln t}{t} \leq f(t) \leq \frac{\ln 2}{t} + \frac{2\ln t}{t},$$

d'où, par intégration sur $[1; x]$,

$$2J(x) \leq \int_1^x f(t) dt \leq \ln 2 \times \ln x + 2J(x),$$

et, en ajoutant $F(1)$ à chaque membre :

$$F(1) + 2J(x) \leq F(x) \leq F(1) + \ln 2 \times \ln x + 2J(x),$$

soit $F(1) + (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) + \ln 2 \times \ln x + (\ln x)^2$ [3].

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

• Pour $x \geq 1$, d'après (3),

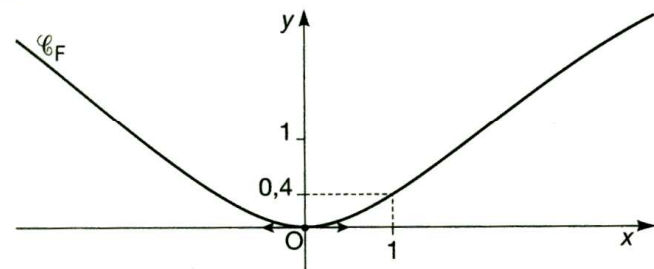
$$\frac{F(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} + \ln 2 \times \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \right)^2 = 0, \text{ donc, d'après le}$$

théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

5.

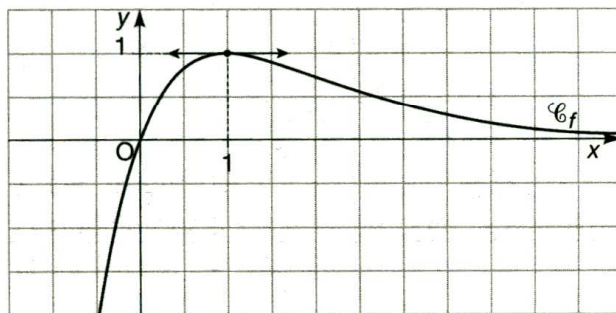


175 • Partie A

1. • $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times x e^{-x} = 0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\infty$	1	0



2. Par intégration par parties,

$$I_1 = \int_0^1 f(x) dx = [-x(e^{1-x})]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = e - 2.$$

Partie B

1. a) Sur $[0; 1]$, $0 \leq 1-x \leq 1$, d'où $1 \leq e^{1-x} \leq e$,
puis :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n.$$

b) $J_n = \frac{1}{n+1}$.

c) Par intégration de l'inégalité 1. a) sur $[0; 1]$,

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

2. Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \\ &= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \\ &= -1 + (n+1) I_n. \end{aligned}$$

3. a) $k_{n+1} = (n+1)!e - I_{n+1} = (n+1)!e + 1 - (n+1)I_n$
 $= (n+1)(n!e - I_n) + 1 = (n+1)k_n + 1$.

b) $k_1 = e - I_1 = 2$. Ainsi $k_1 \in \mathbb{N}$.

On suppose qu'il existe un entier n ($n \geq 1$) tel que $k_n \in \mathbb{N}$; alors $k_{n+1} = (n+1)k_n + 1$ donc $k_{n+1} \in \mathbb{N}$.
D'où le résultat.

c) Pour tout $n \geq 2$, $0 < \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} < 1$ donc $I_n \notin \mathbb{N}$.

Par l'absurde : si $n!e \in \mathbb{N}$, alors $I_n = n!e - k_n \in \mathbb{N}$,
ce qui contredit le résultat précédent.

Donc $n!e \notin \mathbb{N}$.

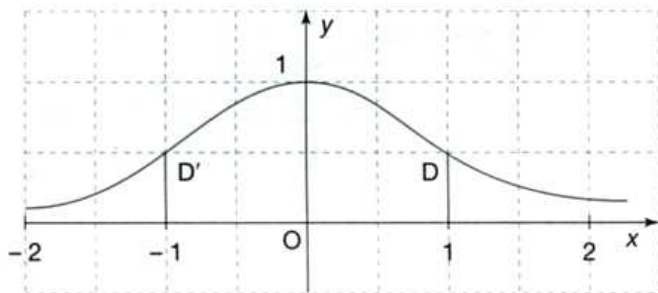
4. a) Si $n \geq q$, alors q divise $n!$ et donc $\frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$.

b) Si e était un rationnel $\frac{p}{q}$, alors pour $n \geq q$, on aurait

$$n!e = \frac{n!p}{q} \text{ entier, ce qui est absurde d'après 3. c).}$$

Donc e est irrationnel.

176 • 1. a) F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F(0) = 0$; ainsi $F' = f$.
 f est paire donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à (Oy) .
 F n'est pas paire.



Contre-exemple :

$$F(-1) = -\text{aire}(D') = -\text{aire}(D) = -F(1).$$

2. a) b) c) Par dérivation d'une fonction composée,

$$G'(x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1.$$

$G(x) = x + k$; or $G(0) = 0$ donc $k = 0$; ainsi pour tout x de I , $G(x) = x$.

$$F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) b) c) } H'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} + \frac{2}{(x+2)^2} \\ &\quad \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+2)^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi H est constante sur $\mathbb{R}^+$ de valeur

$$H(0) = F(1) + F(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Alors } F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = H(1) = \frac{\pi}{4}.$$

177 1. **Faux.** f est continue sur $]-\infty; 0[$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

Note : $F(x) = \ln(-x) + k$.

2. **Faux.** Contre-exemple : sur $\mathbb{R}$, $h = fg$ avec $f(x) = 2x$, $g(x) = 3$.

$$H(x) = 3x^2 + k, F(x) = x^2 + k_1, G(x) = 3x + k_2$$

d'où $H \neq FG$.

3. **Faux.** En effet, $[F(2x-1)]' = 2 \times f(2x-1)$.

4. **Vrai.** Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto f(t)$ vérifient les hypothèses du théorème d'intégration par parties et de plus $f(a) = f(b) = 0$.

$$\text{Alors } \int_a^b t f'(t) dt = [t f(t)]_a^b - \int_a^b f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

178 • 1. a) f est dérivable sur $[1; +\infty[$ donc f est continue sur $[1; +\infty[$.

$$\text{b) } f'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}.$$

$f'(t) = 0$ lorsque $t = 1$, et pour tout $t > 1$, $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

2. a) $\mathcal{A}(1) = 0$.

b) Pour $x_0 \geq 1$ et $h > 0$:

$\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ représente l'aire colorée.

Cette aire peut être encadrée par les aires des rectangles « inférieur » et « supérieur » :

$$h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

$$\text{d'où } f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h). [1]$$

c) Pour $x_0 > 1$ et $h < 0$ tel que $x_0 + h \geq 1$:

de même, l'encadrement s'écrit

$$-h \times f(x_0 + h) \leq \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0)$$

$$\text{d'où } f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$$

$$\text{soit } f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0). [2]$$

d) f est continue en x_0 donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Par le théorème d'encadrement, on déduit de [1] et [2]

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 et $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.

Finalement $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $\mathcal{A}' = f$ donc $\mathcal{A}$ est une primitive de f sur $[1; +\infty[$.

Activités (page 236)

ACTIVITÉ 1

1. Résultats :

PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF.

Huit résultats.

• $2 \times 2 \times 2 = 8$.

2. a) Il y a deux choix pour remplir la case 1, et pour chacun de ces choix, il y a deux choix pour remplir la case 2.

Donc $2 \times 2 = 4$ façons de remplir les deux premières cases.

Pour chacune de ces façons, il y a deux façons de remplir la case 3.

b) Donc 4×2 façons de remplir les trois cases.

3. Exercices

1. On trouve $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ pour l'exemple 2 et $5 \times 4 \times 3 = 60$ pour l'exemple 3.

2. $9 \times 1 \times 9 \times 9 = 729$.

ACTIVITÉ 2

1. $n_1 = 5 \times 4 \times 3$.

2. a) $n_2 = 3 \times 2 \times 1$.

b) Pour chaque sous-ensemble de 3 éléments de E (au nombre de $\binom{5}{3}$) on associe n_2 listes différentes, chaque liste étant obtenue une seule fois. En effet, deux sous-ensembles distincts n'ayant pas les mêmes éléments, les listes formées à partir de ces sous-ensembles sont distinctes.

On obtient ainsi toutes les listes sans répétitions à trois éléments de E.

Il s'ensuit que $n_1 = \binom{5}{3} \times n_2$ et $\binom{5}{3} = 10$.

Travaux dirigés (page 245)

TD 1

1. $4 \times 4 \times 4 = 64$.

2. a) $1 \times 1 \times 1 = 1$;

b) $1 \times 1 \times 4 = 4$;

c) $4 \times 1 \times 1 = 4$;

d) $4 \times 1 \times 4 = 16$.

2. 1. $4 \times 3 \times 2 = 24$.

2. a) $1 \times 1 \times 1 = 1$;

b) $1 \times 1 \times 2 = 2$;

c) $2 \times 1 \times 1 = 2$;

d) $3 \times 1 \times 2 = 6$.

3. 1. $\binom{4}{3} = 4$.

2. $\binom{1}{1} \times \binom{3}{2} = 3$; $\binom{2}{2} \times \binom{2}{1} = 2$.

TD 2

1. Main obtenue deux fois par ce procédé : roi de carreau, puis roi de trèfle, as de carreau, as de trèfle et 10 de pique.

En effet, cette main peut aussi être obtenue en choisissant d'abord le roi de trèfle, puis le roi de carreau et as de carreau, as de trèfle et 10 de pique. Ici, il faut dénombrer en distinguant les ensembles contenant exactement un roi, puis deux rois, trois rois, et enfin quatre rois.

Il est plus simple de dénombrer l'ensemble complémentaire, c'est-à-dire les mains n'ayant pas de roi.

D'où le résultat $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$.

2. a) Il faut tenir compte de l'as de cœur, qui possède les deux qualités. Il y a deux possibilités :

- soit on prend l'as de cœur et il faut prendre un as qui ne soit pas de cœur (il y en a trois) et trois autres cartes qui ne soient ni un as, ni un cœur (il y en a vingt-et-une) ;
- soit on prend deux as qui ne sont pas l'as de cœur, un cœur qui ne soit pas un as et deux autres cartes qui ne soient ni un as ni un cœur.

On obtient :

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{3} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{2} = 3\,990 + 4\,410 = 8\,400.$$

b) En procédant de façon identique :

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} = 1\,428.$$

2 1. a) $10^4 = 10\,000$; $9^4 = 6\,561$.

b) $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

2. a) Il y a $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$ codes (la division par 2 est due à la présence des deux 0).

b) Le temps d'attente après le n -ième essai est de 2^n .

On est amené à calculer :

$$2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2(2^{n-1} - 1),$$

et à résoudre $2(2^{n-1} - 1) \leq 24 \times 60$.

On trouve $n \leq 10$, donc on pourra faire dix essais au maximum en vingt-quatre heures.



Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 247)

1. Listes d'éléments d'un ensemble

1 Corrigé dans le manuel.

2 a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{8 \times 9 \times 10} = \frac{1}{6}$; c) 0.

3 a) 20 ; b) 126 ; c) 84.

4 a) $(n+1)n$; b) $(2n+1)(2n)$;

c) $\frac{n}{(n+1)!}$; d) $\frac{1}{n(n+1)}$.

5 $A = \frac{10!}{3!}$; $B = \frac{9!}{3!4!}$; $C = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$.

6 (a, b, c, d) (a, c, b, d) (a, d, b, c)
 (a, b, d, c) (a, c, d, b) (a, d, c, b)
 (b, a, c, d) (b, c, a, d) (b, d, a, c)
 (b, a, d, c) (b, c, d, a) (b, d, c, a)
 (c, a, b, d) (c, b, a, d) (c, d, a, b)
 (c, a, d, b) (c, b, d, a) (c, d, b, a)
 (d, a, b, c) (d, b, c, a) (d, c, a, b)
 (d, a, c, b) (d, b, a, c) (d, c, b, a)

7 $20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116\,280$.

Liste de 4 éléments sans répétition.

8 1. Choix successifs sans remise : $12! = 479\,001\,600$.

2. $8 \times 7 \times 6 = 336$.

Liste de 3 éléments sans répétition.

9 1. $5! = 120$.

2. $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$.

3. Il y a sept lettres, donc $7!$ anagrammes, mais la présence de deux E signifie qu'il n'y a que $\frac{7!}{2!}$ anagrammes différents. Donc $\frac{7!}{2!} = 2\,520$.

Note : S'il y a trois lettres identiques, on divise par $3!$.

10 1. Choix successifs avec remise : 10^4 ou liste de 4 éléments avec répétitions.

2. Choix successifs avec remise ou liste de 6 éléments avec répétitions : 10^6 .

11 1. $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 676\,000$.

2. $1 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 67\,600$.

3. $10 \times 1 \times 1 \times 26 \times 26 = 6\,760$.

4. $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 1 = 26\,000$.

12 1. Liste de 3 éléments avec répétitions ou tirages successifs avec remise : 6^3 .

2. Principe des cases :

a) $\underbrace{6} \times 1 \times 1 = 6$

choix du chiffre.

b) $6 \times 5 \times 4 = 120$.

c) $\binom{6}{1} \times \binom{3}{2} \times \binom{6}{5} = 6 \times 3 \times 6 = 108$.

Choix du chiffre choix des tirages où apparaissent ces chiffres choix du chiffre pour le tirage restant

13 1. $3 \times 2 \times 1 = 6$. 2. $3 \times 3 \times 3 = 27$.

14 1. 0. 2. $5^4 = 625$.

2. Combinaisons

15 A = 15 ; B = 495 ; C = $\frac{1}{4}$; D = $\frac{25}{14}$;
E = $\frac{1}{10}$; F = 56 ; G = 1.

16 Corrigé dans le manuel.

17 a) $\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0, n \geq 2$
 $\Leftrightarrow n = 9$ ou $n = -8$ et $n \geq 2$.

Donc $n = 9$ est la seule valeur possible.

b) $\frac{3(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2} = 14 \times \frac{n(n-1)}{2}$ et $n \geq 4$

$\Leftrightarrow n(n-1) \left[\frac{(n-2)(n-3)}{8} - 7 \right] = 0$ et $n \geq 4$

$\Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 1$ ou $n^2 - 5n - 50 = 0$ et $n \geq 4$

$\Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 10$ ou $n = -5$ et $n \geq 4$.

Donc $n = 10$.

18 1. $\binom{6}{3} = 20$.

2. $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, b, e\}$; $\{a, b, f\}$;
 $\{a, c, d\}$; $\{a, c, e\}$; $\{a, c, f\}$; $\{a, d, e\}$;
 $\{a, d, f\}$; $\{a, e, f\}$; $\{b, c, d\}$; $\{b, c, e\}$;
 $\{b, c, f\}$; $\{b, d, e\}$; $\{b, d, f\}$; $\{b, e, f\}$;
 $\{c, d, e\}$; $\{c, d, f\}$; $\{c, e, f\}$; $\{d, e, f\}$.

19 $\binom{20}{3} = 1\,140$.

20 Corrigé dans le manuel.

21 1. $\binom{12}{2} = 66$ droites.

2. $12 \times 11 = 132$ vecteurs.

3. $\binom{12}{3} = 220$ triangles.

22 1. $16 \times 15 \times 14 \times 13 = 43\,680$.

2. $\binom{16}{4} = 1\,820$.

23 1. $\binom{29}{4} = 23\,751$.

2. $\binom{15}{2} \times \binom{14}{2} = 9\,555$.

24 1. a) $\binom{3}{1}^7 = 2\,187$.

b) $\binom{3}{1}^{15} = 14\,348\,907$.

2. a) 6 réponses exactes seulement ou 7 réponses exactes.

$\binom{7}{6} \times \binom{2}{1} + \binom{1}{1}^7 = 15$

b) 12 réponses exactes seulement ou 13 exactes ou 14 exactes ou 15 exactes.

$\binom{15}{12} \times \binom{2}{1}^3 + \binom{15}{13} \times \binom{2}{1}^2 + \binom{15}{14} \times \binom{2}{1} + \binom{1}{1}^{15} = 4\,091$.

3. Formules

25 1. $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

2. $\binom{43}{6} = 6\,096\,454$.

26 $\frac{n!}{(n-3)!3!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 3n(n-1)$.

éq. à $\frac{n-2}{6} + \frac{1}{2} = 3$

éq. à $n = 17$.

27 a) $(2+x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$.

b) $(1-2x)^7 = 1 - 14x + 84x^2 - 280x^3 + 560x^4 - 672x^5$
 $+ 448x^6 - 128x^7$.

c) $(2x+y)^5 = 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.

28 a) $(1+2i)^6 = 117 + 44i$.

b) $(3-4i)^5 = -237 + 3\,116i$.

c) $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 = e^{i4\theta} + 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta}$
 $+ 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-i4\theta}$
 $= e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6$
 $= 2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6$.

29 $5^n = (4+1)^n$
 $= 4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}4 + 1$
 $= 4 \times K + 1$.

Apprendre à chercher

(page 249)

30 Dénombrer sur un quadrillage

Les outils :

- Les combinaisons.

Les objectifs :

- Savoir imaginer une méthode pour dénombrer.

1. Le quadrilatère obtenu a ses côtés parallèles, et possède un angle droit donc c'est un rectangle.

2. a) Si on prend un rectangle, il est associé à un ensemble de deux droites verticales et de droites horizontales. Donc il y a autant de rectangles que de choix

d'ensembles de deux droites verticales et d'ensembles de deux droites horizontales.

b) Pour chaque choix : $\binom{6}{2} = 15$ façons.

c) Il y a donc $15 \times 15 = 225$ rectangles.

3. On choisit un point parmi trente-six possibles, puis le sommet opposé pour lequel il n'y a que vingt-cinq choix (il faut que ce sommet ne soit pas sur la verticale et l'horizontale passant par le premier sommet). De plus, chaque rectangle ainsi obtenu est compté quatre fois.

D'où le résultat : $36 \times 25 \times \frac{1}{4} = 225$.

31 Démontrer une formule

Les outils :

- Les combinaisons.
- La formule du binôme.

Les objectifs :

- Savoir mettre en œuvre différents moyens pour démontrer une formule.

Première solution

1. $E = A \cup B$, $(A \cap B = \emptyset)$,

$$n(A) = a, n(B) = b, n(E) = a + b.$$

Tout sous-ensemble de E à p éléments en contient k qui appartiennent à A ; donc $p - k$ appartiennent à B .

On choisit k éléments de A parmi a et $p - k$ éléments de B parmi b , k entier naturel de 0 à p . Ceci est possible car $k \leq p$ et donc $k \leq a$ et $0 \leq p - k \leq b$, donc $p - k \leq b$.

2. En dénombrant de deux façons :

$$\underbrace{\binom{a}{0} \times \binom{b}{p}}_{k=0} + \underbrace{\binom{a}{1} \times \binom{b}{p-1}}_{k=1} + \dots + \underbrace{\binom{a}{k} \times \binom{b}{p-k}}_{k=p} + \dots + \underbrace{\binom{a}{p} \times \binom{b}{0}}_{k=p} = \binom{a+b}{p}.$$

Deuxième solution

1. • Le coefficient de x^p pour le premier membre provient des produits $x^k \times x^{p-k}$ issus de $(1+x)^a$ et de $(1+x)^b$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.

Le coefficient de x^k dans $(1+x)^a$ est $\binom{a}{k}$, celui de x^{p-k} dans $(1+x)^b$ est $\binom{b}{p-k}$.

Donc le coefficient de $x^k \times x^{p-k}$ est $\binom{a}{k} \times \binom{b}{p-k}$; en additionnant ces coefficients, on obtient celui de x^p soit : $\binom{a}{0} \times \binom{b}{p} + \binom{a}{1} \times \binom{b}{p-1} + \dots + \binom{a}{p} \times \binom{b}{0}$.

• $\binom{a+b}{p}$ est le coefficient de x^p du second membre.

2. D'où l'égalité par identification des coefficients.

Pour progresser

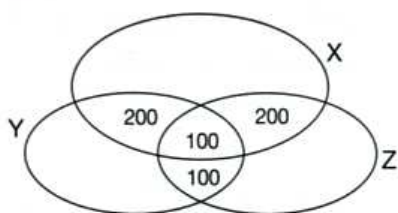
(page 250)

Dénombrement

32 Un diagramme éclaire la situation : il y a 100 personnes qui lisent les trois revues, ou encore :

$$n(X \cap Y \cap Z) = 100.$$

On identifie les lecteurs aux revues.



1. Soit on complète le schéma, soit on traduit à l'aide d'ensembles.

Deux revues uniquement (deux au moins mais pas trois) :

- avec X et Y : 20 %, donc 200 ;
- avec Y et Z : 10 %, donc 100 ;
- avec X et Z : 20 %, donc 200 ;

soit 500 personnes.

2. Il faut dénombrer ceux qui ne lisent qu'une seule revue :

- X : $600 - (200 + 200 + 100) = 100$;

• Y : $500 - (200 + 100 + 100) = 100$;

• Z : $500 - (200 + 100 + 100) = 100$.

Donc 100 personnes lisent les trois revues, 500 deux et 300 une seule, donc 100 personnes ne lisent aucune des trois revues.

33 1. $85 = 39\,768$. 2. $95 = 59\,049$. 3. C'est justifié.

34 1. $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{20}{1} = 480$.

roi dame 2 valets dernière carte
parmi les 20 restantes

2. As de pique et 2 trèfles ou as de pique et 3 trèfles ou as de pique et 4 trèfles

$$\binom{8}{2} \times \binom{23}{2} + \binom{8}{3} \times \binom{23}{1} + \binom{8}{4} = 8\,442.$$

3. Roi de carreau et 1 autre carreau ou un roi non carreau et 2 carreaux non roi.

$$1 \times \binom{7}{1} \times \binom{24}{3} + \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} + \binom{21}{2} = 27\,399.$$

35 1. a) Il y en a exactement le nombre de parties à deux éléments parmi n éléments ie $\binom{n}{2}$.

b) Il faut et il suffit d'enlever le nombre de côtés de P_n au nombre précédent.

$$\text{ie } \binom{n}{2} - n.$$

2. On résout $\binom{n}{2} - n = n$.

$$\text{ie } \binom{n}{2} = 2n.$$

ie $n = 5$.

$$\mathbf{36} \bullet 1. 2^8 = 256 \quad 2. 2^6 = 64 \quad 3. \binom{8}{4} = 70.$$

37 • 1. • *Quinte flush* : pour une couleur donnée, il y en a neuf. Donc $9 \times 4 = 36$ mains.

• *Carré* : il y a $\binom{4}{4}$ façons de prendre quatre cartes d'une valeur donnée; ce choix peut se faire de treize façons; la cinquième carte peut être choisie parmi quarante-huit.

D'où $\binom{4}{4} \times 13 \times 48$ façons d'obtenir un carré (624 mains).

• *Full* : il y a $\binom{4}{3}$ façons de choisir trois cartes d'une valeur donnée et treize choix pour cette valeur; il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir deux cartes d'une valeur donnée pour laquelle il y a douze choix possibles.

D'où $4 \times 13 \times 6 \times 12 = 3\,744$ mains.

• *Quinte* : il y a neuf « hauteurs » de quinte. (Elles peuvent se terminer du 6 à l'as.) Pour toute quinte (par exemple 2, 3, 4, 5, 6), il y a 4^5 choix, mais il faut ôter les quatre quinte flushs. D'où $9 \times (4^5 - 4) = 9\,180$ mains.

• *Brelan* : il y a $\binom{4}{3} = 4$ façons de choisir trois cartes d'une même valeur, et treize choix pour chaque valeur. Les quatrième et cinquième cartes sont prises parmi les douze valeurs restantes, et sont de deux valeurs différentes, donc :

$$\begin{array}{c} \binom{12}{2} \times 4 \times 4 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \text{choix des deux valeurs} \quad \text{choix de la couleur de la 4^e carte} \quad \text{choix de la couleur de la 5^e carte} \end{array}$$

D'où $4 \times 13 \times 66 \times 4 \times 4 = 54\,912$ choix.

Attention : Ne pas faire :

$$\begin{array}{c} 48 \times 44 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{choix de la 4^e carte} \quad \text{choix de la 5^e carte} \end{array}$$

car on compte deux fois chaque choix.

2. Le principe est respecté.

$$\mathbf{38} \bullet 1. 3^5 = 243.$$

2. Une façon.

$$3. 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 10.$$

$$\begin{array}{c} \underbrace{\quad \quad \quad} \quad \downarrow \quad \searrow \\ \text{bonnes} \quad \text{mauvaise} \quad \text{choix de l'item} \\ \text{réponses} \quad \text{réponse} \quad \text{« mauvaise réponse »} \end{array}$$

39 • 1. Il faut et il suffit d'aller 9 fois sur la droite et 4 fois vers le bas : il reste à les placer au cours du trajet.

$$\binom{13}{4} \times \binom{9}{9} = 715.$$

on descend 4 fois pour le reste on avance à droite

$$2. \binom{7}{1} \times \binom{6}{3} = 140.$$

on descend une fois pour aller de A à C on descend 3 fois pour aller de C à B

40 • 1. 3 boules rouges ou 3 boules jaunes.

$$\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$$

$$2. \binom{4}{3} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 24$$

3. C'est l'événement contraire de la réunion des deux précédents :

$$\binom{9}{3} - (5 + 24) = 55.$$

41 • On place 1 rouge et 1 blanche dans l'urne B puis on tire simultanément 3 boules de 3 couleurs différentes :

$$\binom{5}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{4}{1} = 40.$$

$$\mathbf{42} \bullet 1. 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 3^3 \times 2^3 = 216.$$

$$2. \binom{3}{2} \times 2^3 = 24.$$

3. C'est le contraire du 2. : $216 - 24 = 192$.

43 • Une façon de voir : n joueurs rencontrent n autres joueurs. Le nombre de choix de n joueurs parmi $2n$ est $\binom{2n}{n}$. À partir de là, on organise les rencontres des n joueurs du groupe A et des n joueurs du groupe B. Il y a $n!$ rencontres possibles.

Cependant, des séries de n rencontres ont été comptabilisées plusieurs fois. En effet, toute permutation d'un élément x qui rencontrait y donne le même premier tour. Ces permutations (2) pour chacune des n rencontres sont au nombre de $2n$, d'où :

$$\frac{\binom{2n}{n} \times n!}{2^n} = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \text{ rencontres possibles.}$$

Note : On peut dénombrer ainsi. Pour le premier joueur, il y a $2n - 1$ choix ; pour le deuxième joueur (ne rencontrant pas le premier), il y a $2n - 3$ choix ; ... ; donc :

$$(2n - 1) \times (2n - 3) \times (2n - 5) \times \dots \times 3 \times 1 \text{ rencontres.}$$

Il faut alors prouver le résultat par récurrence.

44 • Soit N un nombre de n chiffres exactement (donc le 1^{er} chiffre à gauche n'est pas 0) et comportant exactement deux 8.

1^{er} cas : Un des deux 8 peut être le 1^{er} chiffre de N , ce qui donne $n - 1$ possibilités de placer le 2^e 8, les $n - 2$ autres chiffres étant quelconques, distincts de 8. Il y a ainsi exactement $(n - 1)9^{n-2}$ nombres N de ce

premier type. Par exemple, pour $n = 6$, on peut choisir $N = 32\ 805$.

2^e cas : Aucun des deux 8 n'est le 1^{er} chiffre de N , ce qui donne C_{n-1}^2 possibilités de placer les deux 8, le 1^{er} chiffre étant quelconque parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, et les $n - 3$ autres chiffres quelconques distincts de 8.

Il y a ainsi exactement $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 8 \cdot 9^{n-3}$ nombres N de ce deuxième type.

Finalement, le nombre demandé est :

$$(n-1)9^{n-2} + 4(n-1)(n-2)9^{n-3},$$

c'est-à-dire $(4n+1)(n-1)9^{n-3}$.

45 : Un entier constitué avec les trois chiffres a, b, c s'écrit $10^2 \square + 10 \square + \square$ où chaque case contient a, b ou c sans répétition. Et lorsqu'une case a été remplie, on obtient 2 entiers possibles. Il s'ensuit que la somme de tous ces entiers est :

$$2 \times (10^2(a+b+c) + 10(a+b+c) + a+b+c) = 222(a+b+c).$$

Formules

46 • 1. $A_3 = (2 + \sqrt{3})^3 + (2 - \sqrt{3})^3$
 $= (8 + 12\sqrt{3} + 6 \times 3 + \sqrt{3}^3) + (8 - 12\sqrt{3} + 6 \times 3 - \sqrt{3}^3)$
 $= 16 + 36 = 52 \in \mathbb{N}.$

$A_4 = (2 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})^4$
 $= 16 + 32\sqrt{3} + 24 \times 3 + 8\sqrt{3}^3 + \sqrt{3}^4$
 $+ 16 - 32\sqrt{3} + 24 \times 3 - 8\sqrt{3}^3 + \sqrt{3}^4$
 $= 32 + 24 \times 6 + 18 = 194 \in \mathbb{N}.$

2. $(2 + \sqrt{3})^n =$

$$2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \times \sqrt{3} + \dots + \binom{n}{p} 2^{n-p} \times \sqrt{3}^p + \dots + \sqrt{3}^n;$$

$$(2 - \sqrt{3})^n = 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} \times \sqrt{3} + \dots + (-1)^p \binom{n}{p} 2^{n-p} \times \sqrt{3}^p + \dots + (-1)^n \sqrt{3}^n.$$

Si p est impair, $(-1)^p = -1$ et les termes s'annulent.

Si p est pair, la somme est $2 \binom{n}{p} \times 2^{n-p} \times \sqrt{3}^p$ et $\sqrt{3}^p$ est un entier. Donc $A_n \in \mathbb{N}$.

47 • 1. a) $f(x) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{p}x^p$
 $\dots + \binom{n}{p}x^p.$

b) $f'(x) = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}x + \dots + p \binom{n}{p}x^{p-1} + \dots + n \binom{n}{n}x^{n-1},$
d'où :

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}x + 3 \binom{n}{3}x^2 + \dots + n \binom{n}{n}x^{n-1}.$$

2. Avec $x=1$, $\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + p \binom{n}{p} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}.$

48 • 1. On tire les trois boules 1, 2, 3 = 1 tirage.

• On tire la boule 4 et 2 boules parmi les 3 boules 1, 2, 3 $\binom{3}{2}$ tirages.

2. On tire la boule k et 2 boules parmi les $k-1$ restantes $\binom{k-1}{2}$ tirages.

3. a) En faisant varier k de 3 à 7 dans le **2.** on obtient tous les tirages possibles :

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}.$$

b) On peut démontrer par récurrence que :

$n \backslash p$	0	1	2	3
0	1			
1		1		
2			1	
3			3	1
4			6	
5			10	
6			15	
7				35

$$\begin{aligned} & \binom{p}{p} \\ & + \binom{p}{p+1} \\ & + \dots \\ & + \binom{p}{n} = \binom{p+1}{n+1} \end{aligned}$$

49 • 1. $\binom{2n}{n}.$

2. $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$; or, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$, donc $\binom{n}{p}^2$ résultats contiennent exactement p boules blanches.

3. La somme : $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$

$\downarrow$
0 boule
blanche

$\downarrow$
1 boule
blanche

$\downarrow$
 n boules
blanches

est égale au nombre de façons de choisir n boules parmi $2n$. D'où $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$

50 : La formule résulte de l'inversion des choix :
– soit on choisit p parmi n , puis q parmi p , et enfin r parmi q ;
– soit r parmi n , puis $q-r$ parmi $n-r$, et enfin $p-q$ parmi $n-q$.

51 : Dans les conditions de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{(p-k)!k!} \\ &= \binom{n}{p} \binom{p}{k} \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{p} \binom{p}{k}$
 $= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}$
 $= \binom{n}{p} 2^p.$

52 a) Il y a $\binom{12}{5} = 792$ mains de 5 cartes dans E : **Faux**.

b) On tire les trois autres cartes parmi les 10 restantes, il y a donc $\binom{10}{3}$ mains : **Faux**.

c) • Mains de 7 cartes contenant un carré :

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{choix du carré}} \times \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{choix des 3 autres cartes}} = 168 \text{ mains.}$$

• Mains de 5 cartes contenant un carré :

$$\binom{3}{1} \times \binom{8}{1} = 24 \text{ mains.}$$

et $\frac{168}{7} = 24$; **Vrai**.

53 1. $6 \times 5 \times 4 = 120$ réponse **c.** d'après le principe des cases.

2. a) Nombres inférieurs à 500 :

tous ceux qui commencent par 1 : $5 \times 4 = 20$

avec tous ceux qui commencent par 2 : $5 \times 4 = 20$

avec tous ceux qui commencent par 3 : $5 \times 4 = 20$

avec tous ceux qui commencent par 4 : $5 \times 4 = 20$

donc 80 : **Vrai**.

b) Ce sont ceux qui finissent par 2 ; 4 ou 6, il y en a donc $3 \times 20 = 60$: **Vrai**.

c) Ce sont ceux qui finissent par 5, il y en a donc 20 : **Faux**.

54 1. C'est le contraire de n'avoir aucun as, donc

$$\binom{32}{3} - \binom{28}{3} = 4\,960 - 3\,276 = 1\,684 \text{ façons.}$$

Or $4 \times \binom{31}{3} \neq 1\,684$: **Faux**.

2. La valeur exacte est difficile à établir en terminale (voir Les Nombres de Bell) mais on peut se convaincre que c'est **faux** en commençant à écrire de telles poules (on peut, par exemple, écrire une répartition puis faire

des permutations d'équipes entre les poules) et constater qu'on en obtient plus de 30 « assez vite ».

3. a) Vrai, on « remplit » 3 cases avec les 5 chiffres.

b) Faux, $5 \times 4 \times 3$ choix.

c) Cela revient d'après le principe des cases à choisir une lettre et la position de 1 et 2 et choisir le 3^e chiffre

donc $\binom{3}{1} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} = 45$ codes, **Faux**.

d) Cela revient à choisir la lettre et le 1^{er} chiffre :

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 15 \text{ codes, Vrai.}$$

55 1. a) Cf. cours page 242.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \\ &= \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \\ &= \underbrace{\binom{n-1}{k-1}} + \underbrace{\binom{n-1}{k}} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

2. a) $\binom{n-2}{k}$ tirages.

b) C'est l'événement contraire du précédent donc $\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k}$.

c) Le tirage contient exactement une boule rouge ou exactement deux boules, il y a donc

$$\binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1} + \binom{2}{2}\binom{n-1}{k-2} \text{ tirages.}$$

$$\text{Soit } 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

$$\text{D'après le 1.b)} \quad \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}$$

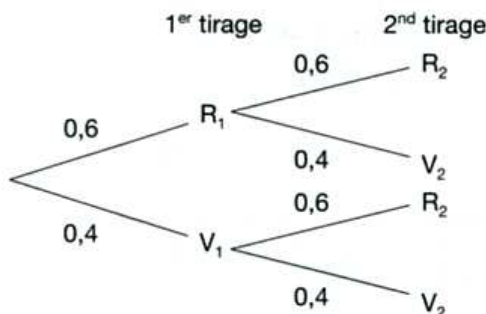
$$\text{donc } 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} - \binom{n-2}{k}.$$

On retrouve donc bien le même résultat qu'au **2.b)**.

Travaux dirigés (page 265)

TD 1

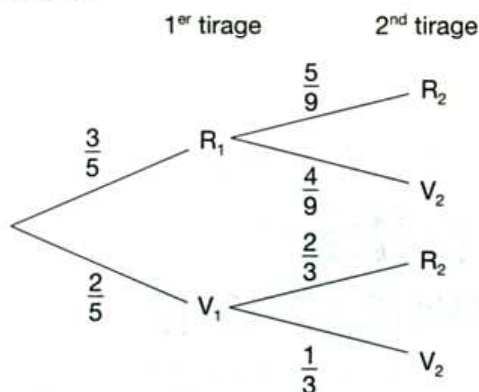
1. a) Arbre.



b) $p(B) = 0,6^2 + 0,4^2 = 0,52$, $p(D) = 1 - p(B) = 0,48$.

Note : par utilisation de l'arbre, $p(D) = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48$.

2. a) Arbre.

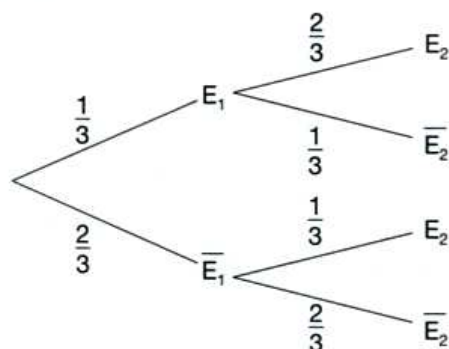


b) $p(B') = \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$,

$p(D') = 1 - p(B') = \frac{8}{15}$.

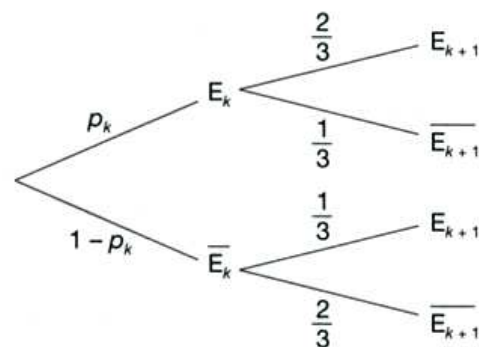
Note : par utilisation de l'arbre, $p(D') = \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

2 1. a) Arbre.



b) $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

2. a) Arbre.



b) $p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1-p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

3. a) Notons H_n la proposition : « $p_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$ ».

• H_1 est vraie.

• On suppose que H_n est vraie pour un entier n , $n \geq 1$.

Alors $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})] + \frac{1}{3}$
 $= \frac{1}{2}[\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3}] = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^{n+1}})$

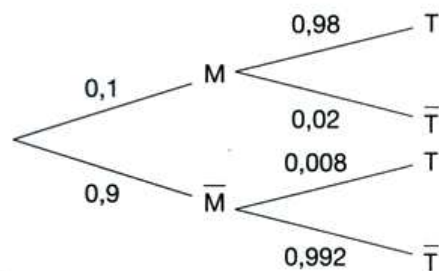
donc H_{n+1} est vraie.

• Ainsi H_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$. Avec le processus indiqué, la probabilité de tirer une boule blanche tend vers $\frac{1}{2}$.

TD 2

2 1.



2. a) $p(M \cap T) = 0,1 \times 0,98 = 0,098$.

$p(T) = 0,1 \times 0,98 + 0,9 \times 0,008 = 0,1052$.

b) Valeur diagnostique $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} \approx 0,932$.

3. a) $p(\bar{M} \cap T) = 0,9 \times 0,008$
 $= 0,0072$.

b) $p(M \cap \bar{T}) = 0,1 \times 0,02$
 $= 0,002$.

c) E : « erreur de test ».

$p(E) = p(M \cap \bar{T}) + p(\bar{M} \cap T)$
 $= 0,0092$.

4. a) Valeur diagnostique :

$$p_T(M) = \frac{0,98x}{0,98x + 0,008(1-x)}$$

$$= \frac{245x}{243x + 2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} p_T(M) = 0$.

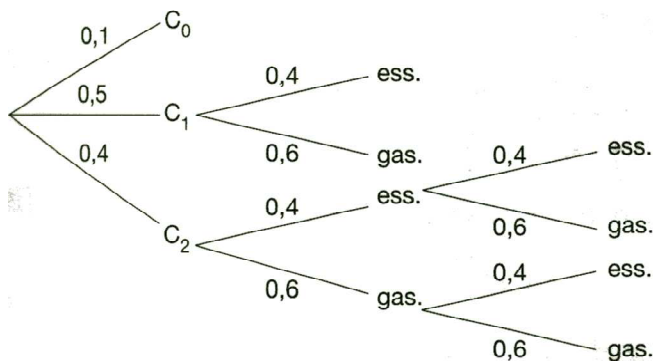
Pour $x \in]0; 1[$,

$$p_T(M) > 0,9 \Leftrightarrow x > \frac{18}{263}$$

(À partir d'un pourcentage de malades d'environ 6,85 % de la population.)

TD 3

1. a) Arbre ci-après.



b) $p(C_1 \cap E) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$.

c) $p_{C_2}(E) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,48$;

$p(C_2 \cap E) = 0,48 \times 0,4 = 0,192$.

d) $p(E) = p(C_1 \cap E) + p(C_2 \cap E) = 0,392$.

2. a) Les valeurs de Y sont : 0, 1, 2.

$Y = y_i$	0	1	2
$p(Y = y_i)$	0,544	0,392	0,064

X \ Y	0	1	2	loi de X
0	0,1	0	0	0,1
1	0,3	0,2	0	0,5
2	0,144	0,192	0,064	0,4
loi de Y	0,544	0,392	0,064	1

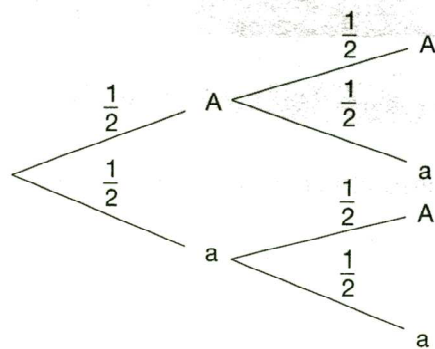
d) Il n'y a pas indépendance. Par exemple,

$p(X = 0 \text{ et } Y = 1) = 0$,

alors que $p(X = 0) \times p(Y = 1) \neq 0$.

TD 4

1



$p(AA) = \frac{1}{4} = p(aa); p(Aa) = \frac{1}{2}$.

2 1. $x_0 = 0; y_0 = 1; z_0 = 0$.

2. $x_1 = \frac{1}{4}; y_1 = \frac{1}{2}; z_1 = \frac{1}{4}$.

3. $p_{(AA)_n}((AA)_{n+1}) = 1; p_{(Aa)_n}((AA)_{n+1}) = \frac{1}{4}$;

$p_{(Aa)_n}((Aa)_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Donc :

• $x_{n+1} = p((AA)_{n+1}) = p((AA)_n) \times 1 + p((Aa)_n) \times \frac{1}{4}$
 $= x_n + \frac{1}{4} y_n$;

• $y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$;

• $z_{n+1} = 1 - (x_n + \frac{1}{4} y_n + \frac{1}{2} y_n) = 1 - x_n - \frac{3}{4} y_n$.

3 1.

n	x_n	y_n	z_n
0	0	1	0
1	0,25	0,5	0,25
2	0,375	0,25	0,375
3	0,4375	0,125	0,4375
4	0,46875	0,0625	0,46875
5	0,484375	0,03125	0,484375
6	0,4921875	0,015625	0,4921875
7	0,49609375	0,0078125	0,49609375
8	0,49804688	0,00390625	0,49804688
9	0,49902344	0,00195313	0,49902342
10	0,49951172	0,00097656	0,49951171

2. (y_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$;

$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. $x_n - x_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{1}{4} y_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{1}{2}$.

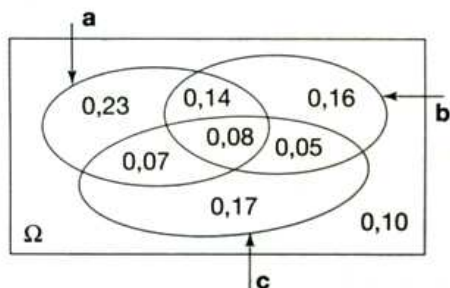
Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 269)

1. Rappels sur les probabilités

1 Ω : ensemble des élèves de TS du lycée.



a) $p_1 = 0,56$.

b) $p_2 = 0,1$.

2 Ω : ensemble des listes avec répétitions de 4 éléments de $\{-1; +1\}$ d'où $2^4 = 16$ issues possibles.

a) $\binom{4}{2} = 6$ issues favorables (tableaux avec deux $+1$ et deux -1) d'où $p_1 = \frac{3}{8}$.

b) Deux choix pour la case 1 puis un seul choix pour les trois autres, d'où 2 issues favorables, $p_2 = \frac{1}{8}$.

3 1. Ω = ensemble des listes de 4 éléments distincts de l'ensemble des six boules.

$$p(A) = \frac{2 \times 4 \times 1 \times 3}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{15};$$

$$p(B) = \frac{(4 \times 2) \times (4 \times 3 \times 2)}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

Note : pour une issue de B, on choisit la case contenant la boule blanche (4 choix), on y place une boule blanche (2 possibilités) puis on complète les trois autres cases par des boules noires ($4 \times 3 \times 2$ possibilités).

2. Ω : ensemble des listes avec répétitions de 4 éléments de l'ensemble des six boules.

$$p(A) = \frac{2^2 \times 4^2}{6^4} = \frac{4}{81}; p(B) = \frac{(4 \times 2) \times 4^3}{6^4} = \frac{32}{81}.$$

4 1. Ω : ensemble des combinaisons de deux boules parmi neuf.

$$p(R) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}; p(C) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{18}.$$

2. Ω : ensemble des listes avec répétitions de 2 éléments de l'ensemble des neuf boules.

$$p(R) = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81}; p(C) = \frac{4^2 + 2^2 + 3^2}{9^2} = \frac{29}{81}.$$

5 Corrigé dans le manuel.

6 Ω : ensemble des combinaisons de trois cartes parmi trente-deux.

$$a) p_1 = \frac{4 \times \binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{7}{155}.$$

$$b) p_2 = \frac{8 \binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{1}{155}.$$

7 Ω : ensemble des listes de 3 éléments distincts de l'ensemble des vingt chevaux.

$$1. p_1 = \frac{1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{6840}.$$

$$2. p_2 = \frac{3! - 1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{1368}.$$

8 1. a) Loi de X

x_i	80	50	0	$-10a$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$2. a) E(X) = 0 \Leftrightarrow 12 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

b) $a > 2$ (en €).

9 1. Loi de N

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(N = k)$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{6}{2^6}$	$\frac{15}{2^6}$	$\frac{20}{2^6}$	$\frac{15}{2^6}$	$\frac{6}{2^6}$	$\frac{1}{2^6}$

$$2. E(X) = 3; \sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

10 Ω : ensemble des combinaisons de trois boules parmi dix.

$$1. p(A) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}; p(B) = \frac{5 \times 3 \times 2}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4}.$$

2. a) Loi de X

k	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$

$$b) E(X) = \frac{259}{120} \approx 2,16.$$

2. et 3. Probabilités conditionnelles

11 1. Immédiat en utilisant la loi des nœuds.

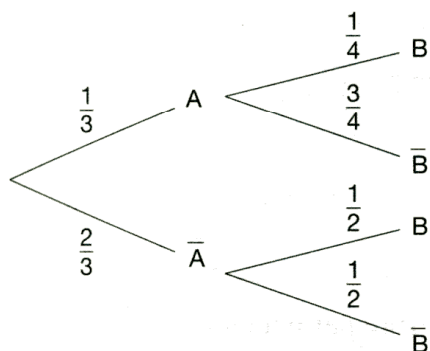
$$2. p(A \cap B) = \frac{1}{12}; p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}; p(\bar{A} \cap B) = \frac{4}{15};$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{2}{5}.$$

$$12. p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1}{5}; p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2}{5}.$$

13 Corrigé dans le manuel.

14 L'arbre s'impose, on le complète au fur et à mesure :



$$\text{D'où } p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

15 L'arbre permet de donner toutes les réponses (on peut aussi utiliser les formules).

$$1. p_A(B) = \frac{4}{5}; p_B(A) = \frac{8}{15}.$$

$$2. p(A \cup B) = \frac{17}{20};$$

$$p_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{A})} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(A)} = \frac{3}{20} \times 2 = \frac{3}{10}.$$

16 1. Tableau de la commande

	D	$\bar{D}$	total
A	48	1 152	1 200
B	24	776	800
total	72	1 928	2 000

$$2. a) p(D) = \frac{72}{2\,000} = 0,036; p(A \cap D) = \frac{48}{2\,000} = 0,024$$

$$; p_D(A) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}.$$

$$b) p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 0,964; p(\bar{D} \cap B) = \frac{776}{2\,000} = 0,388;$$

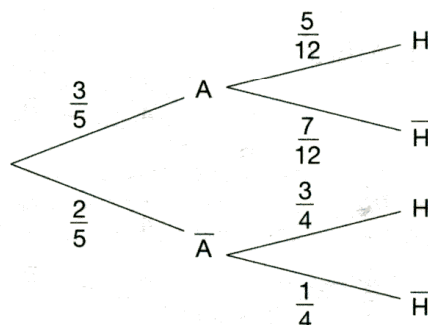
$$p_{\bar{D}}(B) = \frac{776}{1\,928} = \frac{97}{241}.$$

$$17. 1. p(A) = \frac{3}{5}, p(H) = \frac{275}{500} = \frac{11}{20},$$

$$p_A(H) = \frac{125}{300} = \frac{5}{12}, p_H(A) = \frac{125}{275} = \frac{5}{11}.$$

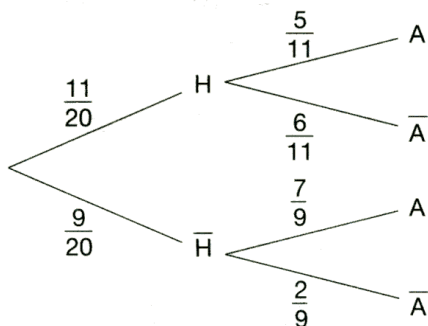
2. Arbre 1

$$\text{Note : } p_{\bar{A}}(H) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}.$$

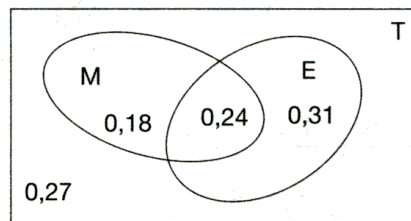


3. Arbre 2

$$\text{Note : } p_{\bar{H}}(A) = \frac{175}{225} = \frac{7}{9}.$$



18 L'univers est l'ensemble T des élèves de terminale et il y a équiprobabilité.



$$1. p(M \cup E) = p(M) + p(E) - p(M \cap E)$$

$$1 - 0,27 = 0,42 + 0,55 - p(M \cap E)$$

$$\text{d'où } p(M \cap E) = 0,24.$$

$$2. a) p_M(E) = \frac{p(M \cap E)}{p(M)} = \frac{4}{7}.$$

$$b) p_E(M) = \frac{p(M \cap E)}{p(E)} = \frac{24}{55}.$$

19 Ω : ensemble de la population. Il y a équiprobabilité.

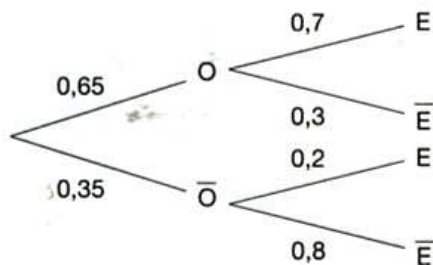
Notons O : « la personne est opposée à la construction du barrage ».

E : « la personne est écologiste ».

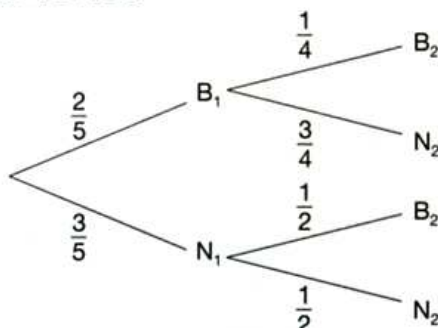
$$1. p(O \cap E) = p(O) \times p_O(E) = 0,65 \times 0,7 = 0,455.$$

$$2. p(\bar{O} \cap E) = p(\bar{O}) \times p_{\bar{O}}(E) = 0,35 \times 0,2 = 0,07.$$

$$3. p(E) = p(O \cap E) + p(\bar{O} \cap E) = 0,525.$$



20 1. et 2. Arbre



3. a) $p(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

b) $p(N_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

c) A : « tirage d'une boule blanche et d'une noire ».

$p(A) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$.

Note : A est l'événement contraire de $(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)$.

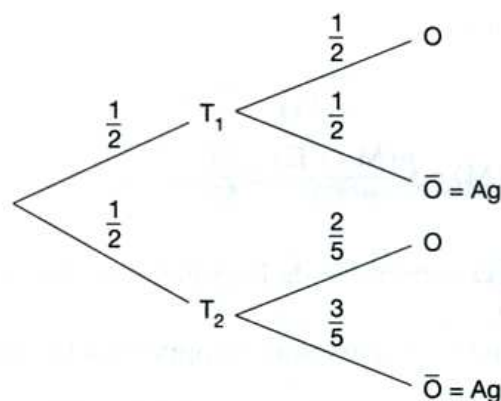
21 Ω : ensemble des combinaisons de deux boules parmi cinq. Il y a équiprobabilité des tirages.

1. $p(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$; $p(B) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$.

2. $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$.

22 Corrigé dans le manuel.

23 1.



2. $p(O \cap T_1) = \frac{1}{4}$; $p(O \cap T_2) = \frac{1}{5}$.

3. $p(O) = p(O \cap T_1) + p(O \cap T_2) = \frac{9}{20}$.

4. $p_O(T_1) = \frac{p(O \cap T_1)}{p(O)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{5}{9}$.

24 1. $p(F \cap S) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532$;

$p(F \cap M) = 0,12 \times 0,33 = 0,0396$.

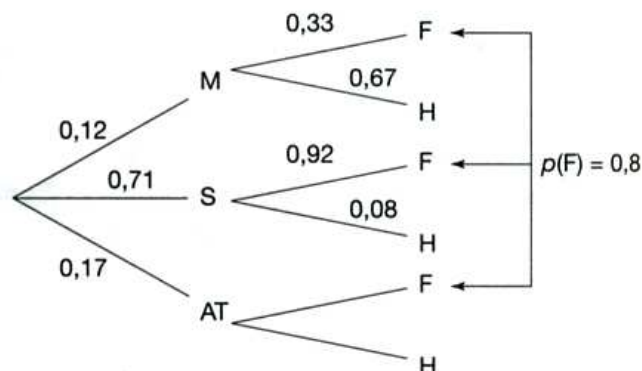
2. a) D'après la formule des probabilités totales

$p(F \cap M) + p(F \cap S) + p(F \cap AT) = p(F)$

d'où $p(F \cap AT) = p(F) - p(F \cap M) - p(F \cap S)$

$p(F \cap AT) = 0,8 - 0,0396 - 0,6532 = 0,1072$.

b) $p_{AT}(F) = \frac{p(F \cap AT)}{p(AT)} = \frac{0,1072}{0,17} \approx 0,63$.



25 Un arbre permet de répondre à la question.

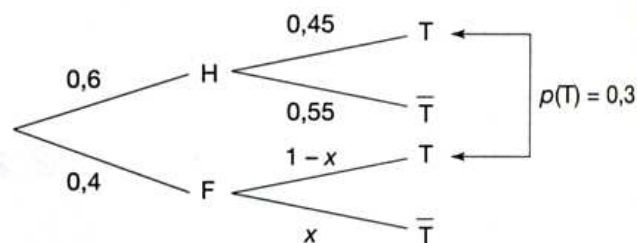
Notons $x = p_F(\bar{T})$ la probabilité cherchée.

D'après la formule des probabilités totales

$p(H \cap T) + p(F \cap T) = P(T)$

d'où $0,6 \times 0,45 + 0,4 \times (1 - x) = 0,3$

donc $x = 0,925$.



4. Indépendance

26 1. $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$;

$p(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (la seule issue de $A \cap B$ est « le roi de cœur »).

2. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ donc A et B sont indépendants.

27 Corrigé dans le manuel.

28 • $p(A) = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$, $p(B) = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$;

$p(A \cap B) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$.

Ainsi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ donc A et B sont indépendants.

$$\bullet p(A \cap \bar{B}) = \frac{8}{96} = \frac{1}{12}.$$

On vérifie que $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B})$ donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.

$$\bullet p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{56}{96} = \frac{7}{12}.$$

On vérifie que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$ donc $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Note : Ce résultat est général. Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi ainsi que $\bar{A}$ et B. (Voir n° 84.)

29 $\Omega : \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ est alors muni de la loi de probabilité :

k	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$

$$1. a) p(A) = \frac{4}{7}, p(B) = \frac{6}{7}; p(C) = \frac{1}{3}.$$

$$b) p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{5}{6}.$$

2. $p_A(B) \neq p(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$p(A \cap C) = \frac{4}{21}$. Ainsi $p(A \cap C) = p(A) \times p(C)$ donc A et C sont indépendants.

30 On remplit en utilisant $p_{i,j} = p_i \times p_j$.

X \ Y	0	1	2	loi de X
0	0,12	0,2	0,08	0,4
1	0,06	0,1	0,04	0,2
2	0,12	0,2	0,08	0,4
loi de Y	0,3	0,5	0,2	1

31 1.	x_i	0	1
	$p(X = x_i)$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$
	y_i	0	1
	$p(Y = y_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$2. a) \frac{1}{32}; \quad b) \frac{3}{32}; \quad c) \frac{7}{32}.$$

X \ Y	0	1	loi de X
0	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{7}{8}$
1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$
loi de Y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

4. Il y a bien indépendance.

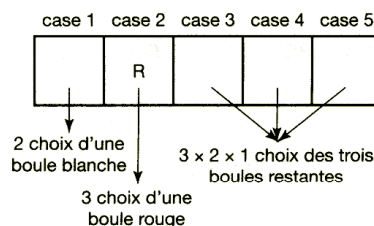
32 Ω : ensemble des listes de 5 éléments distincts de l'ensemble des cinq boules (ensemble des permutations).

Il y a $5! = 120$ issues possibles.

k	1	2
$p(X = k)$	$\frac{3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{5}$	$\frac{2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{10}$

k	3
$p(X = k)$	$\frac{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{1}{10}$

Note : la technique du remplissage de case permet de dénombrer les issues d'un événement. Par exemple : « $X = 2$ » signifie « obtenir la première boule rouge au deuxième tirage ».



k	5	4
$p(Y = k)$	$\frac{2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{2}{5}$	$\frac{3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{10}$

k	3	2
$p(Y = k)$	$\frac{3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1}{120} = \frac{1}{5}$	$\frac{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}{120} = \frac{1}{10}$

Note : on peut utiliser la même technique. Il suffit de remarquer que : « $Y = k$ » signifie « obtenir la dernière boule bleue au k^{e} tirage » c'est-à-dire aussi « placer B dans la case k pour la première fois lorsqu'on remplit les cases dans l'ordre contraire ».

2. « $X = 1$ » $\cap$ « $Y = 2$ » est impossible donc de probabilité nulle.

Ainsi $p(\text{« } X = 1 \text{ »} \cap \text{« } Y = 2 \text{ »}) \neq p(X = 1) \times p(Y = 2)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Expériences indépendantes

33 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, or A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,63$. D'où $p(A \cup B) = 0,9 + 0,7 - 0,63 = 0,97$.

$$\mathbf{34} \quad p(A) = \frac{8}{32} \times \frac{8}{32} \times \frac{8}{32} = \frac{1}{64};$$

$$p(B) = \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{512}.$$

C est la réunion des événements représentés par les chemins

$\rightarrow D \rightarrow R \rightarrow R; \rightarrow R \rightarrow D \rightarrow R; \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow D$

$$\text{d'où } p(C) = 3 \left(\frac{4}{32} \times \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} \right) = \frac{3}{512}.$$

35 a) Il y a indépendance, donc $p_1 = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.

b) $p_2 = 0,15 \times 0,4 \times 0,3 = 0,018$.

c)

nombre de machines vendues			nombre de possibilités
M_1	M_2	M_3	
0	0	5	3
0	1	4	6
0	2	3	6
1	1	3	3
1	2	2	3

D'où $p = 0,05 \times 0,05 \times 0,04 \times 3 + 0,05 \times 0,15 \times 0,06 \times 6 + 0,05 \times 0,4 \times 0,3 \times 6 + 0,15 \times 0,15 \times 0,3 \times 3 + 0,15 \times 0,4 \times 0,4 \times 3$
 $= 0,13\ 125$.

Apprendre à chercher

(page 273)

36 Conditionnement : bien choisir l'arbre

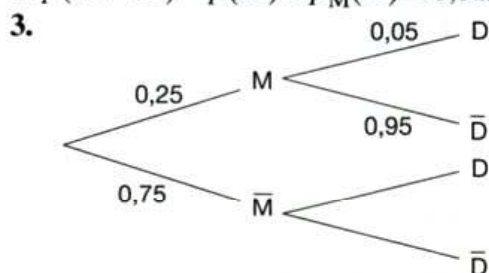
Les outils :

- Arbres pondérés.
- Probabilités conditionnelles.

Les objectifs :

- Savoir traduire des données de statistiques en probabilités.
- Savoir calculer la probabilité conditionnelle d'un événement.

2. $p(M \cap D) = p(M) \times p_M(D) = 0,0125$.



4. $p(D) = p(D \cap M) + p(D \cap \bar{M})$

$\Leftrightarrow 0,02 = 0,25 \times 0,05 + 0,75 p_{\bar{M}}(D)$

soit $p_{\bar{M}}(D) = 0,01$.

37 Plusieurs lancers de dé

Les outils :

- Épreuves répétées et indépendance.

Les objectifs :

- Savoir calculer la probabilité d'un événement.

2. b) $\frac{5}{6} \bar{A} \frac{5}{6} \bar{A} \dots \bar{A} \frac{1}{6} A$

c) D'où la probabilité : $\frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5^7}{6^8}$.

Pour progresser

(page 274)

Rappels sur les probabilités

38 a) $\frac{4 \times \binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{44}{4\ 165}$. b) $\frac{13 \times \binom{4}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{1}{20\ 825}$.

c) $\frac{13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{192}{20\ 825}$. d) $\frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}}{\binom{52}{4}} = \frac{36}{270\ 725}$.

39 Il y a $\binom{49}{6}$ possibilités, une seule issue favorable :

a) $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\ 983\ 816}$.

b) $\frac{\binom{6}{5} \times \binom{1}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{2\ 330\ 636}$.

c) $\frac{\binom{6}{5} \times \binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{3}{166\ 474}$.

d) $\frac{\binom{6}{4} \times \binom{1}{1} \times \binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{15}{332\ 948}$.

40 Le lancer simultané des trois dés peut être assimilé à trois lancers successifs d'un tel dé.

• Chaque dé a au moins une face rouge visible donc A est certain : $p(A) = 1$.

• B signifie que la face bleue est cachée pour chaque dé : $p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

• C signifie que pour chaque dé la face cachée est bleue ou jaune : $p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Autre solution :

dé 1	dé 2	dé 3

Ω est l'ensemble des 4^3 triplets de faces muni de la loi équirépartie.

Par exemple, C contient 2^3 issues d'où $p(C) = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{8}$.

41 Corrigé dans le manuel.

42 Ω : ensemble des listes de lettres distinctes de {A, D, M, N, O, R, Y} muni de la loi équirépartie.

1. $p_1 = \frac{1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{210}$.

2. Les issues favorables peuvent être obtenues en remplissant les cases de droite à gauche.

$p_2 = \frac{3 \times 6 \times 5}{7 \times 6 \times 5} = \frac{3}{7}$.

case 1	case 2	case 3
↓	↓	↓
5 choix	6 choix	3 choix

3. On dénombre $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$ issues favorables. $p_3 = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$.

43 Ω : ensemble des combinaisons de 4 gants parmi 20 muni de la loi équirépartie.

a) Il y a $\binom{20}{4} = 4\,845$ combinaisons possibles, d'où

$p(A) = \frac{\binom{10}{2}}{4\,845} = \frac{3}{323}$.

b) $\bar{B}$: « aucune paire ». Notons n le nombre d'issues favorables à $\bar{B}$.

Nombre de listes de gants associés à des paires distinctes deux à deux :

$p = 2 \binom{10}{2} \times 2 \binom{9}{1} \times 2 \binom{8}{2} \times 2 \binom{7}{1} = 80\,640$.

Il suffit alors de remarquer que $4!n = p$ d'où $n = 3\,360$.

Ainsi $p(\bar{B}) = \frac{3\,360}{4\,845} = \frac{224}{323}$ d'où $p(B) = \frac{99}{323}$.

44 1.

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,01	0,035	0,065625	0,09625	0,126875

x_i	7	8	9	10	11	12
p_i	0,1625	0,161875	0,13125	0,100625	0,07	0,04

2. $E(X) = 7,5$; $V(X) \approx 5,375$; $\sigma(X) \approx 2,318$.

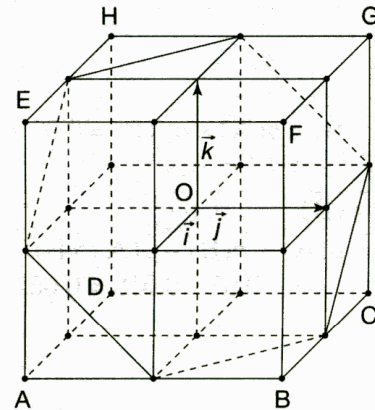
45 • 1. $A(1; -1; -1)$ donc $p_A = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

2. E_1 signifie que M est l'un des points de coordonnées $(-1; 0; 0)$, $(0; 0; 0)$ ou $(1; 0; 0)$.

$p(E_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3. a) $\mathcal{P} : x + y + z = 0$.

b) La section du cube par le plan $\mathcal{P}$ est un hexagone.



c) Les sommets de l'hexagone ont pour coordonnées : $(1; -1; 0)$, $(1; 0; -1)$, $(0; 1; -1)$, $(-1; 1; 0)$, $(-1; 0; 1)$, $(0; -1; 1)$.

$p(E_2) = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$.

4. $\mathcal{B} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,25$.

Les points du réseau qui n'appartiennent pas à $\mathcal{B}$ sont les sommets du cube.

Ainsi $p(\bar{E}_3) = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ donc $p(E_3) = \frac{7}{8}$.

Conditionnement. Indépendance

46 Calcul direct dans l'univers des faces noires où chaque face est équiprobable : $p = \frac{2}{3}$.

Remarque : on peut aussi raisonner sur l'univers des jetons $\Omega = \{J_{NN}, J_{NB}, J_{BB}\}$.

Notons N_1 : « une face au moins est noire » et N_2 : « deux faces noires ».

On cherche $p_{N_1}(N_2) = \frac{p(N_1 \cap N_2)}{p(N_1)}$.

Or $p(N_1 \cap N_2) = p(J_{NN}) = \frac{1}{3}$ et

$p(N_1) = 1 \times p(J_{NN}) + \frac{1}{2} \times p(J_{NB})$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

donc $p_{N_1}(N_2) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

b) $p_2 = 0,15 \times 0,4 \times 0,3 = 0,018$.

c)

nombre de machines vendues			nombre de possibilités
M_1	M_2	M_3	
0	0	5	3
0	1	4	6
0	2	3	6
1	1	3	3
1	2	2	3

D'où $p = 0,05 \times 0,05 \times 0,04 \times 3 + 0,05 \times 0,15 \times 0,06 \times 6 + 0,05 \times 0,4 \times 0,3 \times 6 + 0,15 \times 0,15 \times 0,3 \times 3 + 0,15 \times 0,4 \times 0,4 \times 3 = 0,13125$.

Apprendre à chercher

(page 273)

36 Conditionnement : bien choisir l'arbre

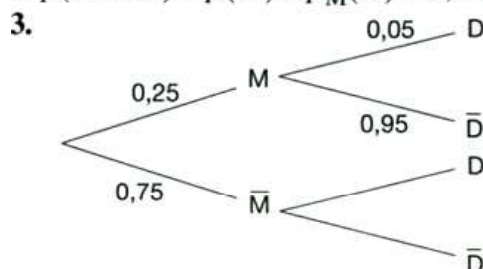
Les outils :

- Arbres pondérés.
- Probabilités conditionnelles.

Les objectifs :

- Savoir traduire des données de statistiques en probabilités.
- Savoir calculer la probabilité conditionnelle d'un événement.

2. $p(M \cap D) = p(M) \times p_M(D) = 0,0125$.



4. $p(D) = p(D \cap M) + p(D \cap \bar{M})$

$\Leftrightarrow 0,02 = 0,25 \times 0,05 + 0,75 p_{\bar{M}}(D)$,

soit $p_{\bar{M}}(D) = 0,01$.

37 Plusieurs lancers de dé

Les outils :

- Épreuves répétées et indépendance.

Les objectifs :

- Savoir calculer la probabilité d'un événement.

2. b) $\frac{5}{6} \bar{A} \frac{5}{6} \bar{A} \dots \bar{A} \frac{1}{6} A$

c) D'où la probabilité : $\frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5^7}{6^8}$.

Pour progresser

(page 274)

Rappels sur les probabilités

38 a) $\frac{4 \times \binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{44}{4165}$ b) $\frac{13 \times \binom{4}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{1}{20825}$

c) $\frac{13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{192}{20825}$ d) $\frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}}{\binom{52}{4}} = \frac{36}{270725}$

39 Il y a $\binom{49}{6}$ possibilités, une seule issue favorable :

a) $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$

b) $\frac{\binom{6}{5} \times \binom{1}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{2330636}$

c) $\frac{\binom{6}{5} \times \binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{3}{166474}$

d) $\frac{\binom{6}{4} \times \binom{1}{1} \times \binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{15}{332948}$

40 Le lancer simultané des trois dés peut être assimilé à trois lancers successifs d'un tel dé.

• Chaque dé a au moins une face rouge visible donc A est certain : $p(A) = 1$.

• B signifie que la face bleue est cachée pour chaque dé : $p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

• C signifie que pour chaque dé la face cachée est bleue ou jaune : $p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Autre solution :

dé 1	dé 2	dé 3

Ω est l'ensemble des 4^3 triplets de faces muni de la loi équirépartie.

Par exemple, C contient 2^3 issues d'où $p(C) = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{8}$.

41 Corrigé dans le manuel.

42 Ω : ensemble des listes de lettres distinctes de {A, D, M, N, O, R, Y} muni de la loi équirépartie.

$$1. p_1 = \frac{1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{210}.$$

2. Les issues favorables peuvent être obtenues en remplissant les cases de droite à gauche.

$$p_2 = \frac{3 \times 6 \times 5}{7 \times 6 \times 5} = \frac{3}{7}.$$

case 1	case 2	case 3
↓	↓	↓
5 choix	6 choix	3 choix

3. On dénombre $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$ issues favorables. $p_3 = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$.

43 Ω : ensemble des combinaisons de 4 gants parmi 20 muni de la loi équirépartie.

a) Il y a $\binom{20}{4} = 4\,845$ combinaisons possibles, d'où

$$p(A) = \frac{\binom{10}{2}}{4\,845} = \frac{3}{323}.$$

b) $\bar{B}$: « aucune paire ». Notons n le nombre d'issues favorables à $\bar{B}$.

Nombre de listes de gants associés à des paires distinctes deux à deux :

$$p = 2 \binom{10}{2} \times 2 \binom{9}{1} \times 2 \binom{8}{2} \times 2 \binom{7}{1} = 80\,640.$$

Il suffit alors de remarquer que $4!n = p$ d'où $n = 3\,360$.

$$\text{Ainsi } p(\bar{B}) = \frac{3\,360}{4\,845} = \frac{224}{323} \text{ d'où } p(B) = \frac{99}{323}.$$

44 1.

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,01	0,035	0,065625	0,09625	0,126875

x_i	7	8	9	10	11	12
p_i	0,1625	0,161875	0,13125	0,100625	0,07	0,04

2. $E(X) = 7,5$; $V(X) \approx 5,375$; $\sigma(X) \approx 2,318$.

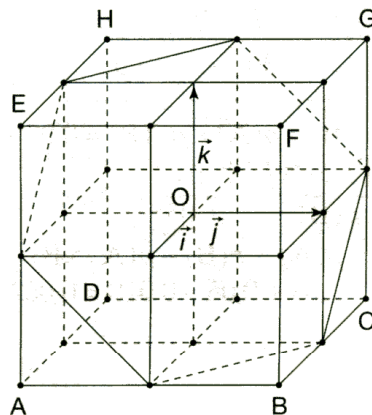
45 • 1. $A(1; -1; -1)$ donc $p_A = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

2. E_1 signifie que M est l'un des points de coordonnées $(-1; 0; 0)$, $(0; 0; 0)$ ou $(1; 0; 0)$.

$$p(E_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

3. a) $\mathcal{P} : x + y + z = 0$.

b) La section du cube par le plan $\mathcal{P}$ est un hexagone.



c) Les sommets de l'hexagone ont pour coordonnées : $(1; -1; 0)$, $(1; 0; -1)$, $(0; 1; -1)$, $(-1; 1; 0)$, $(-1; 0; 1)$, $(0; -1; 1)$.

$$p(E_2) = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}.$$

4. $\mathcal{B} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,25$.

Les points du réseau qui n'appartiennent pas à $\mathcal{B}$ sont les sommets du cube.

$$\text{Ainsi } p(\bar{E}_3) = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{ donc } p(E_3) = \frac{7}{8}.$$

Conditionnement. Indépendance

46 Calcul direct dans l'univers des faces noires où chaque face est équiprobable : $p = \frac{2}{3}$.

Remarque : on peut aussi raisonner sur l'univers des jetons $\Omega = \{J_{NN}, J_{NB}, J_{BB}\}$.

Notons N_1 : « une face au moins est noire » et N_2 : « deux faces noires ».

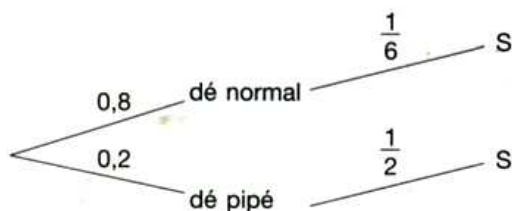
$$\text{On cherche } p_{N_1}(N_2) = \frac{p(N_1 \cap N_2)}{p(N_1)}.$$

$$\text{Or } p(N_1 \cap N_2) = p(J_{NN}) = \frac{1}{3} \text{ et}$$

$$p(N_1) = 1 \times p(J_{NN}) + \frac{1}{2} \times p(J_{NB}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } p_{N_1}(N_2) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

47 1.



$$p(S) = \frac{0,8}{6} + \frac{0,2}{2} = \frac{0,7}{3} = \frac{7}{30}.$$

2. Appelons P l'événement «le dé est pipé».

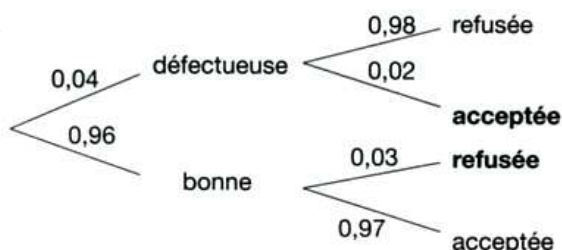
$$p_S(P) = \frac{p(P \cap S)}{p(S)} = \frac{0,1}{\frac{7}{30}} = \frac{3}{7}.$$

48 1. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,03 \times 0,6 = 0,018$.

$$2. p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,018}{0,05} = 0,36.$$

$$3. p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,03 + 0,05 - 0,018 = 0,062.$$

49 1.



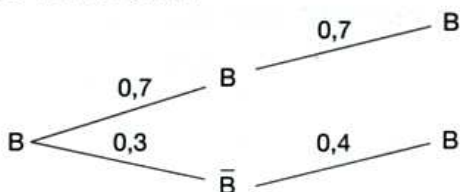
Il y a erreur pour les deux événements écrits en gras :

$$p(E) = 0,04 \times 0,02 + 0,96 \times 0,03 = 0,0008 + 0,0288 = 0,0296.$$

2. La probabilité est :

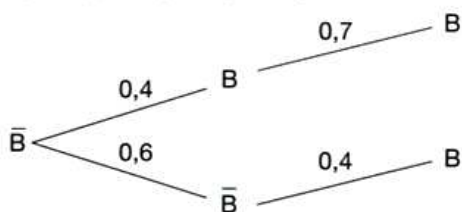
$$\frac{0,04 \times 0,02}{0,04 \times 0,02 + 0,96 \times 0,97} \approx 0,00086.$$

50 1. B : Il fait beau.



$$p = 0,7 \times 0,7 + 0,3 \times 0,4 = 0,61.$$

2.



$$p' = 0,4 \times 0,7 + 0,6 \times 0,4 = 0,52.$$

51 Corrigé dans le manuel.

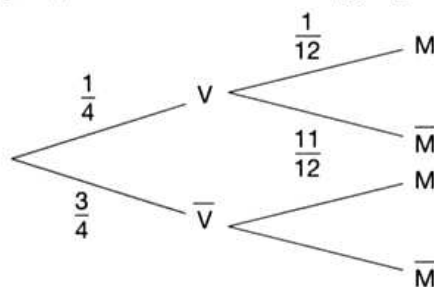
52 • V : individu vacciné, M : individu malade. On cherche $p_{\bar{V}}(M)$.

$$p(M \cap \bar{V}) = p(\bar{V}) \times p_{\bar{V}}(M) = p(M) \times p_M(\bar{V})$$

$$\text{d'où } \frac{3}{4} p_{\bar{V}}(M) = \frac{1}{5} p(M). \quad [1]$$

D'après la formule des probabilités totales,

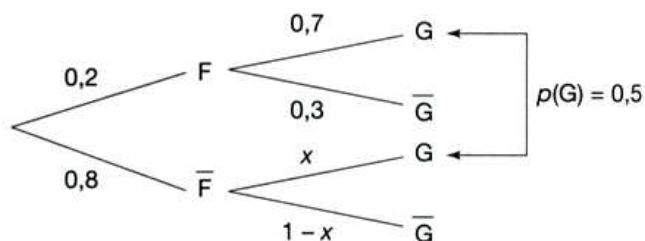
$$p(M) = \frac{1}{48} + \frac{3}{4} p_{\bar{V}}(M) \text{ soit } p(M) = \frac{1}{48} + \frac{1}{5} p(M).$$



D'où $p(M) = \frac{5}{192}$. On déduit alors de [1],

$$\frac{3}{4} p_{\bar{V}}(M) = \frac{1}{192} \text{ donc } p_{\bar{V}}(M) = \frac{1}{144}.$$

53 • Posons $x = p_{\bar{F}}(G)$.



D'après la formule des probabilités totales,

$$p(F \cap G) + p(\bar{F} \cap G) = p(G) \text{ soit } 0,14 + 0,8x = 0,5 \text{ donc } x = 0,45.$$

$$a) p(F \cap G) = 0,2 \times 0,7 = 0,14.$$

$$b) p(F \cup G) = p(F) + p(G) - p(F \cap G) = 0,2 + 0,5 - 0,14 = 0,56.$$

$$c) p(\bar{F} \cup \bar{G}) = 1 - p(F \cap G) = 0,44.$$

$$\text{Autre solution : } p(\bar{F} \cap \bar{G}) = 0,8 \times 0,55 = 0,44.$$

$$d) p_G(F) = \frac{p(F \cap G)}{p(G)} = \frac{0,14}{0,5} = 0,28.$$

$$e) p_{\bar{G}}(F) = \frac{p(F \cap \bar{G})}{p(\bar{G})} = \frac{0,2 \times 0,3}{0,5} = 0,12.$$

$$\mathbf{54} \bullet \text{ A. 1. } 5 \times 5 = 25. \quad 2. \frac{5 \times 1}{25} = \frac{1}{5}. \quad 3. \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

$$4. 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8}.$$

Soit onze jours.

$$\text{B. } p(E) = \frac{1}{5}; p_E(F) = \frac{4 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{4};$$

$$p_{\bar{E}}(F) = \frac{3}{16}; p(F \cap E) = p(E) \times p_E(F) = \frac{1}{20};$$

$$p(F \cap \bar{E}) = p(\bar{E}) \times p_{\bar{E}}(F) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{20}.$$

$$\text{D'où } p(F) = p(F \cap E) + p(F \cap \bar{E}) = \frac{1}{5}.$$

55 • 1. La probabilité qu'il ne tombe pas en panne est : $(1 - 0,1)(1 - 0,05)(1 - 0,03) = 0,82935$, d'où la probabilité cherchée est $1 - 0,82935 = 0,17065$.

2. Le couple AA' tombe en panne si A et A' tombent en panne avec donc une probabilité égale à $(0,1)(0,1) = 0,01$. Donc la probabilité cherchée est : $1 - (1 - 0,01)(1 - 0,05)(1 - 0,03) = 0,087715$.

56 • 1. a) $p_1 = \frac{5^n + 5^n}{10^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$;

$$p_2 = \frac{n \times 5 \times 5^{n-1}}{10^n} = \frac{n}{2^n}.$$

b) $A \cap B$ signifie « une boule blanche et $n - 1$ noires »

donc $p(A \cap B) = p_2 = \frac{n}{2^n}$. $p(A) = 1 - p_1 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

B signifie « aucune boule blanche ou une seule boule

blanche » d'où $p(B) = \frac{5^n}{10^n} + p_2 = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$.

2. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow 2^n n = (2^n - 2)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = n+1.$$

3. a) $u_2 = -1, u_3 = 0, u_4 = 3$.

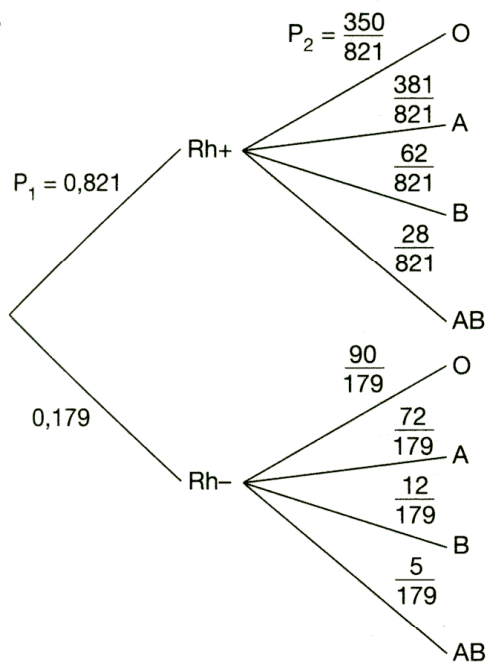
b) $u_{n+1} - u_n = 2^{n-1} - 1$. Or $n \geq 2$ donc $2^{n-1} - 1 \geq 1$. Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

4. A et B indépendants $\Leftrightarrow u_n = 0 \Leftrightarrow n = 3$.

57 • 1. a) $P_1 = 0,35 + 0,381 + 0,062 + 0,028 = 0,821$.

P_2 est tel que $P_1 \times P_2 = 0,35$ donc $P_2 = \frac{350}{821}$

b) Arbre.



2. a) $p(O) = p(O \cap Rh+) + p(O \cap Rh-)$

soit $p(O) = 0,821 \times \frac{350}{821} + 0,179 \times \frac{90}{179} = 0,44$.

À partir du tableau : 44 % + 9 % = 44 %.

b) $p_O(Rh+) = \frac{p(O \cap Rh+)}{p(O)} = \frac{0,35}{0,44} = \frac{35}{44} \approx 0,795$.

3. a) E : « au moins une personne parmi les n est du groupe O ».

$\bar{E}$: « les n personnes ne sont pas du groupe O », d'où $p(\bar{E}) = 0,56^n$. Ainsi $p = p(E) = 1 - 0,56^n$.

b) $p \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,56^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,56^n \leq 0,001$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,56}. \text{ D'où } n_0 = 12.$$

58 • 1. $p(R_1) = (1 - p(A_1)) \times 0,2 = 0,12$.

2. $p(R_2) = p(A_1) \times (1 - p(A_2)) \times 0,2 = 0,056$;

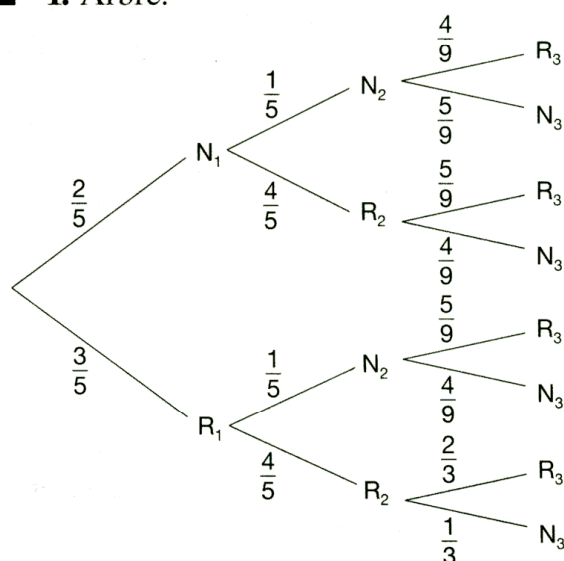
$p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0,176$.

3. $p_R(R_1) = \frac{p(R_1 \cap R)}{p(R)} = \frac{p(R_1)}{p(R)} = \frac{0,12}{0,176} \approx 0,682$.

4. L'événement contraire « Les vingt personnes refusent » a pour probabilité $(1 - 0,176)^{20}$.

La probabilité cherchée est donc $1 - (0,824)^{20} \approx 0,979$.

59 • 1. Arbre.



2. a) $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$;

$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$.

b) D'après la formule des probabilités totales,

$p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_3 \cap N_2) + p(N_1 \cap N_3 \cap R_2)$

$p(N_1 \cap N_3) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{14}{75}$.

c) $p(R_1 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_3 \cap N_2) + p(R_1 \cap N_3 \cap R_2)$

$p(R_1 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{75}$.

3. D'après la formule des probabilités totales,

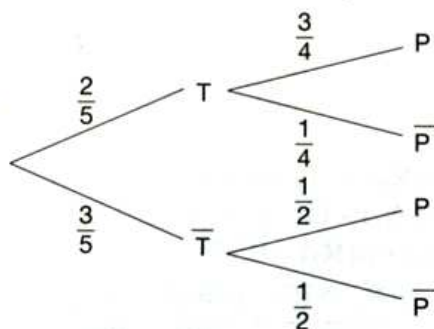
$p(N_3) = p(N_1 \cap N_3) + p(R_1 \cap N_3)$ d'où $p(N_3) = \frac{2}{5}$.

4. $p(N_1) \times p(N_3) \neq p(N_1 \cap N_3)$ donc N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5. $p_{N_3}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap N_3)}{p(N_3)} = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{15}$.

60 • 1. a) $p(P) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$.

$$\text{b) } p_P(T) = \frac{p(T \cap P)}{p(P)} \text{ soit } p_P(T) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$



$$2. \text{ a) } p_{\bar{T}}(E) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

$$\text{b) } p_T(\bar{E}) = 1 - p_T(E) \text{ soit } p_T(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } p(\bar{T} \cap E) + p(T \cap \bar{E}) &= p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(E) + p(T) \times p_T(\bar{E}) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{16} + \frac{2}{5} \times \frac{175}{256} = \frac{199}{640} \\ &\approx 0,311. \end{aligned}$$

$$\text{61} \bullet 1. p(R) = 0,85, p(D) = 0,2, \\ p(R \cap D) = p(R) \times p_R(D) = 0,85 \times 0,12 = 0,102.$$

$$2. \text{ a) } p(\bar{R} \cap \bar{D}) = p(\bar{R} \cup \bar{D}).$$

$$\text{Or } p(R \cup D) = p(R) + p(D) - p(R \cap D) = 0,948 \\ \text{donc } p(\bar{R} \cap \bar{D}) = 0,052.$$

$$\text{b) } p_D(R) = \frac{p(R \cap D)}{p(D)} = 0,51.$$

$$3. \text{ a) } p(V \cap D) = p(V) \times p_V(D) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$$

b) L'événement contraire signifie qu'aucun des cinq dossiers est du type « V et D » ; il a pour probabilité $0,76^5$. Donc la probabilité cherchée est $1 - 0,76^5 \approx 0,746$.

62 • 1.

parents	AA	Aa	aa
AA	AA	AA 1/2 Aa 1/2	Aa
Aa	AA 1/2 Aa 1/2	AA 1/4 Aa 1/2 aa 1/4	Aa 1/2 aa 1/2
aa	Aa	Aa 1/2 aa 1/2	aa

2. a) La descendance AA à la première génération provient de couples (AA, AA), (AA, Aa) ou (Aa, AA), ou (Aa, Aa). Soit :

$$p_1 = p_0^2 + 2 \times p_0 q_0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} q_0^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2.$$

Pour trouver r_1 , il suffit de permuter p en r , soit :

$$r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } p_1 - r_1 &= \left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2 - \left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2 \\ &= (p_0 - r_0)(p_0 + r_0 + q_0); \end{aligned}$$

$$\text{or, } p_0 + r_0 + q_0 = 1,$$

$$\text{donc } p_1 - r_1 = p_0 - r_0 = \alpha.$$

$$\text{c) On peut écrire } p_0 = \alpha + r_0 \text{ et } q_0 = 1 - r_0 - p_0,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } p_1 &= \left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - r_0\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(\alpha + 1)^2; \end{aligned}$$

$$\text{de la même façon, } r_1 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 \text{ et } q_1 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2).$$

En procédant de la même façon,

$$p_2 = \frac{1}{4}(\alpha + 1)^2, r_2 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 \text{ et } q_2 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2).$$

Ce qui prouve que (p_n) , (q_n) et (r_n) sont des suites constantes dès que $n \geq 1$. Leur valeur ne dépend que de $p_0 - r_0 = \alpha$. Voici quelques valeurs obtenues pour Excel.

n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,6	0,2	0
1	0,25	0,5	0,25	0
2	0,25	0,5	0,25	0
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,4	0,2	0,4	0
1	0,25	0,5	0,25	0
2	0,25	0,5	0,25	0
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,6	0,2	0
1	0,25	0,5	0,25	0
2	0,25	0,5	0,25	0
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,3	0,3	0,4	-0,1
1	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
2	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,4	0,1	0,5	-0,1
1	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
2	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,5	0,3	-0,1
1	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
2	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,5	0,2	0,3	0,2
1	0,36	0,48	0,16	0,2
2	0,36	0,48	0,16	0,2
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,8	0	0,2
1	0,36	0,48	0,16	0,2
2	0,36	0,48	0,16	0,2

Variables aléatoires. Indépendance

63 1. a) Loi de N :

k	$-r$	n
$p(N = k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

b) $E(N) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2r}{3} + \frac{n}{3} = 0 \Leftrightarrow n = 2r.$

2. a) La réponse au QCM est la répétition, cinq fois de la même épreuve (réponse à une question) ; les réponses étant supposées indépendantes.

Notons A l'événement « 4 réponses justes ».

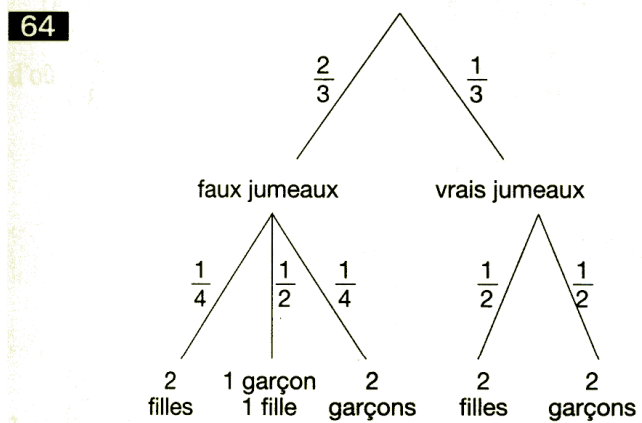
A est représenté par 5 chemins :

$\rightarrow F \rightarrow J \rightarrow J \rightarrow J \rightarrow J ; \rightarrow J \rightarrow F \rightarrow J \rightarrow J \rightarrow J ; \dots$

D'où $p(A) = 5 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}.$

b) Alors $n = 2, r = 1$ d'où la note 7.

64



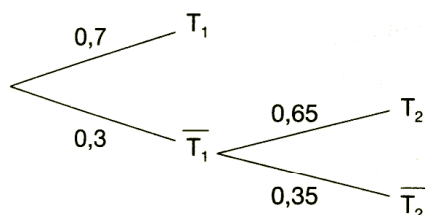
x_i	2	1	0	2	0
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Loi de X :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

65 1. $p(T_1) = 0,7$;

$p(C) = p(T_1) + p(\bar{T}_1 \cap T_2) = 0,7 + 0,3 \times 0,65 = 0,895.$



2. a) Loi de X :

k	$a - 1000$	$a - 1050$	-1050
$p(X = k)$	0,7	0,195	0,105

$E(X) = 0,895a - 1015.$

b) Condition : $E(X) > 0$. Bénéfice à partir d'un prix de vente de 1 135 e.

66 • Corrigé dans le manuel.

67 • 1. Loi de X :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

2. a) $p_{\bar{T}}(G) = p(X \geq 2) = \frac{28}{220} = \frac{7}{55} ;$

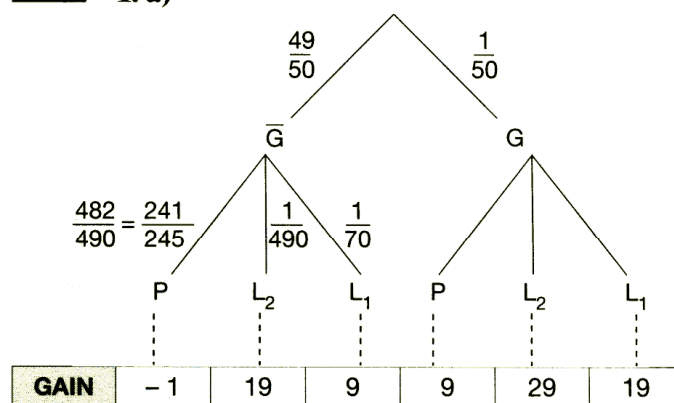
$p(G \cap \bar{T}) = p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(G) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{55} = \frac{63}{550}.$

b) $p(T \cap G) = p(T) \times p_T(G) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}.$

c) $p(G) = p(G \cap \bar{T}) + p(G \cap T) = \frac{63}{550} + \frac{1}{20} = \frac{181}{1100}.$

d) $p_G(T) = \frac{p(G \cap T)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{181}{1100}} = \frac{55}{181}.$

68 • 1. a)



b) $1 - \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{490}\right) = \frac{482}{490} = \frac{241}{245}.$

c) Voir l'arbre ci-dessus.

2. a) $p(X = 19) = \frac{1}{250} = p(G \cap L_1) + p(\bar{G} \cap L_2)$
 $= p(G) \times p_G(L_1) + p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(L_2)$
 $= p_G(L_1) \times \frac{1}{50} + \frac{49}{50} \times \frac{1}{490}.$

D'où $p_G(L_1) = \frac{1}{10}.$

b) $p(X = 9) = \frac{2}{125} = p(G \cap P) + p(\bar{G} \cap L_1)$
 $= p(G) \times p_G(P) + p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(L_1)$
 $= \frac{1}{50} \times p_G(P) + \frac{1}{70} \times \frac{49}{50},$

d'où $p_G(P) = \frac{1}{10}.$

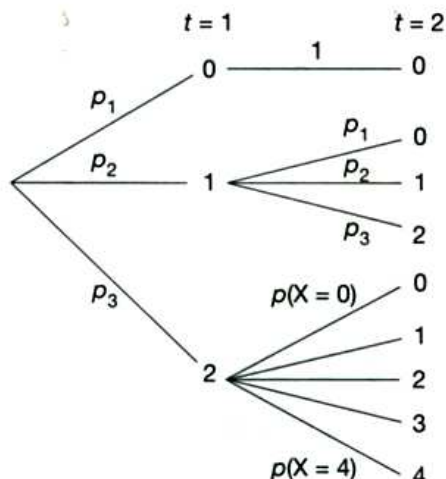
x_i	-1	9	19	29
p_i	$\frac{241}{250}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{2}{125}$

$E(X) = -0,28 \text{ e.}$

69 1. a) X prend les valeurs : 0; 1; 2; 3; 4.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	p_1^2	$2p_1p_2$	$p_2^2 + 2p_1p_3$	$2p_2p_3$	p_3^2

2. a)



b) $p_{A_1}(B_2) = p_3$, puis $p(A_1 \cap B_2) = p_2p_3$;

$$p(B_2) = p_2p_3 + p_3(p_2^2 + 2p_1p_3) = p_3(p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3).$$

y_i	0	1
$p(Y = y_i)$	$p_1 + p_2p_1 + p_3p_1^2$	$p_2^2 + p_3(2p_1p_2)$

y_i	2	3	4
$p(Y = y_i)$	$p_3(p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3)$	$p_3(2p_2p_3)$	p_3^3

70 1. $p(H) = 3 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$;

$$p(V) = \frac{1}{28};$$

$$p(D) = 2 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{42};$$

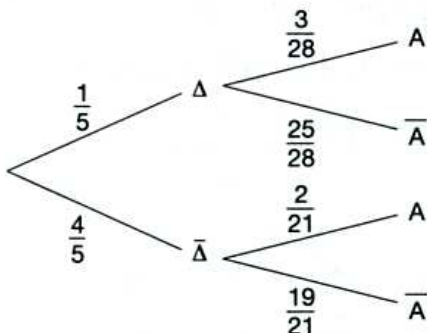
$$p(N) = 1 - (p(H) + p(V) + p(D)) = \frac{19}{21}.$$

$$2. E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{14} + \frac{\alpha}{42} - \frac{38}{21} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 16.$$

$$3. a) p_{\Delta}(H) = p_{\Delta}(V) = p_{\Delta}(D) = \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}.$$

$$b) p_{\Delta}(H \cup V \cup D) = p_{\Delta}(H) + p_{\Delta}(V) + p_{\Delta}(D) = \frac{3}{28}.$$

4.



$$p(A) = p(\Delta \cap A) + p(\bar{\Delta} \cap A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{28} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{21} = \frac{41}{420}.$$

$$5. p_A(\Delta) = \frac{p(\Delta \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{3}{28}}{\frac{41}{420}} = \frac{9}{41}.$$

Suites et probabilités

71 1. $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$.

$$2. p_n = p_{n-1} \times \frac{1}{3} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5} \text{ pour } n \geq 2.$$

$$3. \bullet u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{65} \\ = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15}u_n;$$

$$\bullet u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}.$$

$$4. u_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}, \text{ donc } p_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{13}.$$

72 1. a) $v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4$

$$= 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4$$

$$= \frac{52}{10} - \frac{39}{10}u_n - 4 = -\frac{39}{10}u_n + \frac{12}{10}$$

$$= -\frac{3}{10}(13u_n - 4) = -\frac{3}{10}v_n.$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $-\frac{3}{10}$,

$$v_1 = 13a - 4, \text{ donc } v_n = (13a - 4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

$$b) u_n = (v_n + 4)\frac{1}{13}, \text{ donc } u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

c) Puisque $\left|-\frac{3}{10}\right| < 1$, la limite de $\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ est nulle et alors la limite de (u_n) est $\frac{4}{13}$.

2. a) $p_{n+1} = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$

$$= p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\bar{E}_n) \times p_{\bar{E}_n}(E_{n+1})$$

$$= p_n \times \frac{1}{10} + q_n \times \frac{4}{10}$$

$$b) p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{10} + (1 - p_n) \times \frac{4}{10} = -\frac{3}{10}p_n + \frac{4}{10}$$

$$c) p_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1};$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{4}{13} = p, \text{ donc } p \text{ ne dépend pas de } a.$$

73 • 1. a) $p_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

b) $p_n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{1000}$
 $\Leftrightarrow (n+1)! \geq 1000$
 $\Leftrightarrow n \geq 6$.

2. a) $q_n = 1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 1$.

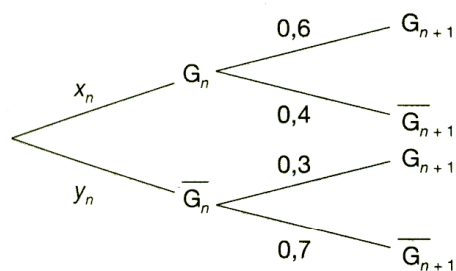
74 •

1. $p(G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)$
 $= 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,3$
 $= 0,45$;

$p(\overline{G_2}) = 0,55$.

2. $\begin{cases} p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ p(\overline{G_{n+1}}) = p(G_n \cap \overline{G_{n+1}}) + p(\overline{G_n} \cap \overline{G_{n+1}}) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$.



3. a) Pour tout $n \geq 1$, $v_n = x_n + y_n = p(G_n) + p(\overline{G_n}) = 1$.
Donc (v_n) est constante de valeur 1.

b) $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1}$
 $= 2,4x_n + 1,2y_n - 1,2x_n - 2,1y_n$
 $= 1,2x_n - 0,9y_n$
 $= 0,3(4x_n - 3y_n)$.

$w_{n+1} = 0,3w_n$. Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 0,5$.

Ainsi $w_n = 0,5 \times 0,3^{n-1}$.

4. $4x_n - 3y_n = w_n \Leftrightarrow 4x_n - 3(1 - x_n) = w_n$

$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{7} [3 + w_n]$.

Ainsi $x_n = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{7}$. Lorsque n devient grand, la probabi-

lité que Laura gagne la n ème partie tend vers $\frac{3}{7}$.

75 • 1. $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; $p_3 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$;

$p_4 = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

2. a) $p(B_n) = \frac{1}{3}$.

b) $p(U_n) = (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

c) $p_n = p(B \cap U_n) = p(B) \times p(U_n)$ (indépendance)

d'où $p_n = (n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. a) Preuve par récurrence.

– La formule est vraie pour $n = 2$.

– Supposons la formule vraie pour un entier n ($n \geq 2$).

Alors $S_{n+1} = S_n + p_{n+1}$

$= 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) - \frac{n}{4} \right]$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$.

Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$ donc pour tout n ($n \geq 2$).

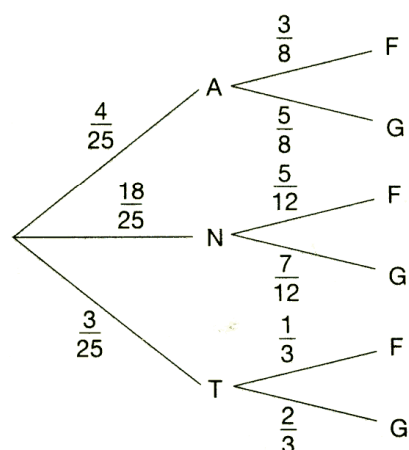
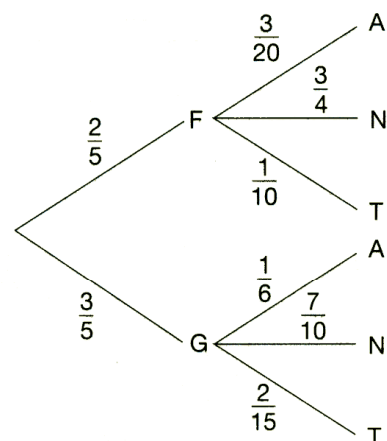
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left(\ln \frac{2}{3} + \frac{\ln n}{n}\right)} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

Prendre toutes les initiatives

76 Deux arbres possibles.



77 • A : « appel de deux médecins »

Le nombre d'issues favorables à A :

$$n = \binom{3}{2} \times (2^4 - 2) = 42.$$

Note : $\binom{3}{2}$ choix des deux médecins ; pour chacun d'eux, 2^4 listes possibles dont 2 donnent un seul médecin.

$$p(A) = \frac{42}{3^4} = \frac{14}{27} \text{ donc } p(\bar{A}) = \frac{13}{27}.$$

A est le plus favorable.

78 • A signifie que soit deux zones sont atteintes, soit une seule.

$$A_1 : \text{« une zone atteinte » ; } p(A_1) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{81}.$$

$$A_2 : \text{« deux zones atteintes ».}$$

Il existe $\binom{3}{2} \times (2^5 - 2) = 90$ chemins associés d'où

$$p(A_2) = 90 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{30}{81}.$$

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) = \frac{31}{81}.$$

79 • A. Notons $\bar{G}$ « aucun billet gagnant ».

$$\begin{aligned} p(\bar{G}) &= \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} \\ &= \frac{(100-k)(99-k)\dots(91-k)}{100 \times 99 \times \dots \times 91} \\ &= \frac{100-k}{100} \times \frac{99-k}{99} \times \dots \times \frac{91-k}{91} \\ &= \left(1 - \frac{k}{100}\right) \left(1 - \frac{k}{99}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{91}\right) \quad [1] \end{aligned}$$

B. Notons $\bar{G}'$ « aucun billet gagnant ».

$$p(\bar{G}') = \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10} = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^{10}.$$

Par comparaison des facteurs de [1] et [2],

$$p(\bar{G}') > p(\bar{G}) \text{ et donc } p(G') < p(G).$$

La stratégie A. est la meilleure pour obtenir au moins un billet gagnant.

Problèmes

(page 283)

80 • 1. a) $p(D) = \frac{\text{aire}(D)}{400} = \frac{\pi}{400}.$

b) $p(S_1) = \frac{\text{aire}(S_1)}{400} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\pi(9^2 - 1^2)}{400} = \frac{\pi}{40}.$

2. a) $p(R) = \frac{\text{aire}(R)}{400} = \frac{400 - 81\pi}{400} = 1 - \frac{81\pi}{400}.$

Loi de X :

x_k	-4	1	2	3	4	5
$p(X=x_k)$	$1 - \frac{81\pi}{400}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$

x_k	6	7	8	10
$p(X=x_k)$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{400}$

$$E(X) = \frac{347\pi}{200} - 4 \quad (E(X) \approx 1,45).$$

b) Notons X_1 la variable aléatoire donnant le gain pour le premier jeu et X_2 celle pour le second. Le tableau indique les événements qui réalisent $X_1 + X_2 < 0$.

D'où en raison de l'indépendance de X_1 et X_2 ,

$$p(X_1 + X_2 < 0) = \left(1 - \frac{81\pi}{400}\right)^2 + 6 \times \frac{\pi}{40} \left(1 - \frac{81\pi}{400}\right)$$

$$p(X_1 + X_2 < 0) \approx 0,304.$$

$$\text{Ainsi } p(X_1 + X_2 \geq 0) \approx 0,696.$$

$X_2 \backslash X_1$	-4	1	2	3	4	...
-4	-8	-3	-2	-1	0	
1	-3	2	3	4		
2	-2	3	4			
3	-1	4				
4	0					
...						

c) A : « au moins un des n points dans D ».

$$\bar{A} : \text{« aucun des } n \text{ points dans D » ; } p(\bar{A}) = \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)^n.$$

$$\text{Doù } p_n = p(A) = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)^n.$$

$$p_n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)}.$$

$$\text{D'où } n_0 = 293.$$

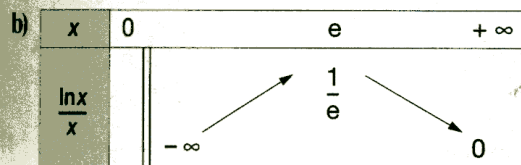
81 • 1. Il y a une analyse si les r individus sont indemnes : $p(X_r = 1) = p^r$,

sinon il y a $r+1$ analyses : $p(X_r = r+1) = 1 - p^r$.

$$\text{D'où } E(X_r) = r + 1 - rp^r.$$

2. Il faut évaluer $\frac{r - E(X_r)}{r} = p^r - \frac{1}{r}.$

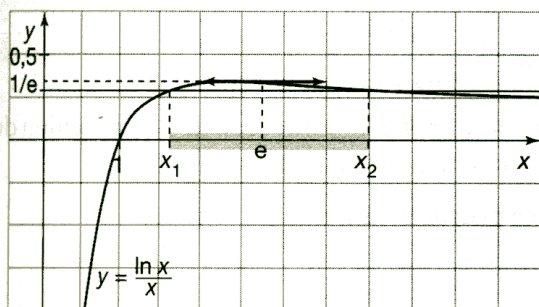
3. a) « $p^x - \frac{1}{x} > 0$ et $x > 0$ » $\Leftrightarrow$ « $\frac{\ln x}{x} > \ln\left(\frac{1}{p}\right)$ ».



L'inéquation n'a des solutions que si $\ln\left(\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{e}$, soit :

$$\frac{1}{p} \leq e^{\frac{1}{e}} \text{ ou encore } p \geq e^{-\frac{1}{e}}.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est un intervalle I borné (cf. graphique).



C'est nouveau au bac (page 284)

82 • 1. b) $\xrightarrow{0,4} N \xrightarrow{0,4} N \xrightarrow{0,4} N \quad p_0 = (0,4)^3$

2. b) $\xrightarrow{\frac{3}{5}} B \xrightarrow{\frac{2}{4}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} B \quad p_3 = 0,1$

3. c) $\xrightarrow{\frac{3}{5}} B \xrightarrow{\frac{2}{4}} N \xrightarrow{\frac{2}{4}} N$;

$\xrightarrow{\frac{2}{5}} N \xrightarrow{\frac{3}{5}} B \xrightarrow{\frac{2}{4}} N$;

$\xrightarrow{\frac{2}{5}} N \xrightarrow{\frac{2}{5}} N \xrightarrow{\frac{3}{5}} B \quad p_1 = 0,336.$

4. c) $p_4 = p_1 + p_0 = 0,43.$

5. b) c) Loi de X :

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	0,064	0,366	0,47	0,1

$E(X) = 1,606$ donc $E(X) \neq \frac{8}{5}$,

$\sigma(X) \approx 0,7528$ donc $75 < \sigma(X) < 76.$

$\sigma^2(X) = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$

83 1. Faux. Si A et B sont deux événements incompatibles tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = 0$ tandis que $p(A) \times p(B) \neq 0.$

2. Faux. Si A est un événement tel que $0 < p(A) < 1$ alors $p(A \cap \bar{A}) = 0$ tandis que

$$p(A) \times p(\bar{A}) = p(A)(1 - p(A)) \neq 0.$$

• Si $p \geq 0,7$, alors $p \geq e^{-\frac{1}{e}}.$

• Si $p < 0,69$, alors $p < e^{-\frac{1}{e}}$ et il n'y a pas de solution.

4. • $\frac{\ln x}{x} > \ln\frac{1}{0,9}$, on vérifie que pour $x \in [1,126; 33,2]$, l'inéquation est vérifiée et la plus grande valeur entière solution est 33.

• Avec $p = 0,99$, on a $I = [1,02; 643,4]$ et $r_{\max} = 643.$

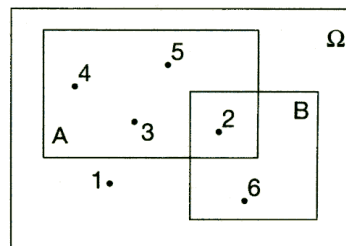
Note : Par tabulation pour les valeurs entières de x de la fonction $x \mapsto p^x - \frac{1}{x}$; $2 \leq x \leq r_{\max}$. On obtient alors la valeur de r rendant la taille optimale. $p = 0,9$, $r = 4$; $p = 0,99$, $r = 11.$

3. Vrai. Si $B \subset A$ alors $B \cap A = B.$

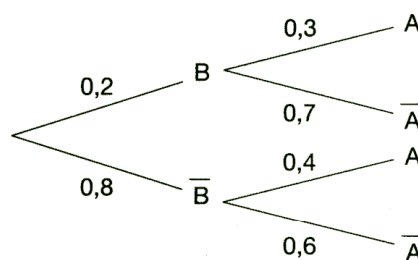
$$\text{Ainsi } p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1.$$

4. Faux. Contre-exemple : lancer d'un dé équilibré

$$p(A) = \frac{2}{3}, p(B) = \frac{1}{3}, p(B) = 1 - p(A) \text{ et } B \neq \bar{A}.$$



5. Vrai.



$$p(A \cap B) = 0,2 \times 0,3 = 0,06 ;$$

$$p(A) = 0,2 \times 0,3 + 0,8 \times 0,4 = 0,38 ;$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,38 + 0,2 - 0,06 = 0,52.$$

6. Vrai. Ω : ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $y \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Tous les couples sont équiprobables.

« $S = 10$ » est l'ensemble $\{(4; 6), (6; 4), (5; 5)\}$. D'où la probabilité conditionnelle cherchée : $\frac{1}{3}$.

7. Vrai. A : « au moins un pile durant les dix lancers »

$$p(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1\,024} \text{ donc } p(A) > 1 - \frac{1}{1\,000}.$$

84 • 1. a) D'après la formule des probabilités totales, $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)$ d'où

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B).$$

Or A et B sont indépendants donc

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A) \times p(B).$$

b) Cette égalité s'écrit aussi

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times (1 - p(B)) = p(A) \times p(\bar{B})$$

donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.

On a prouvé que si A et B sont indépendants, alors il en est de même de A et $\bar{B}$.

En appliquant ce résultat à $\bar{B}$ et A , on conclut que $\bar{B}$ et $\bar{A}$ sont aussi indépendants.

2. Ω : ensemble des triplets d'éléments de $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tous ces triplets sont équiprobables.

$$\bar{A} : \text{« obtenir aucun 6 »} ; p(\bar{A}) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}.$$

$\bar{B}$: « les nombres affichés sont tous différents » ;

$$p(\bar{B}) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{5 \times 4 \times 3}{6^3} = \frac{5}{18}.$$

$$\text{Or } p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) = \frac{625}{1\,944} \text{ donc}$$

$$p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) \neq p(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

Ainsi $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ne sont pas indépendants.

On en déduit par la contraposée de la proposition du 1. que A et B ne sont pas indépendants.

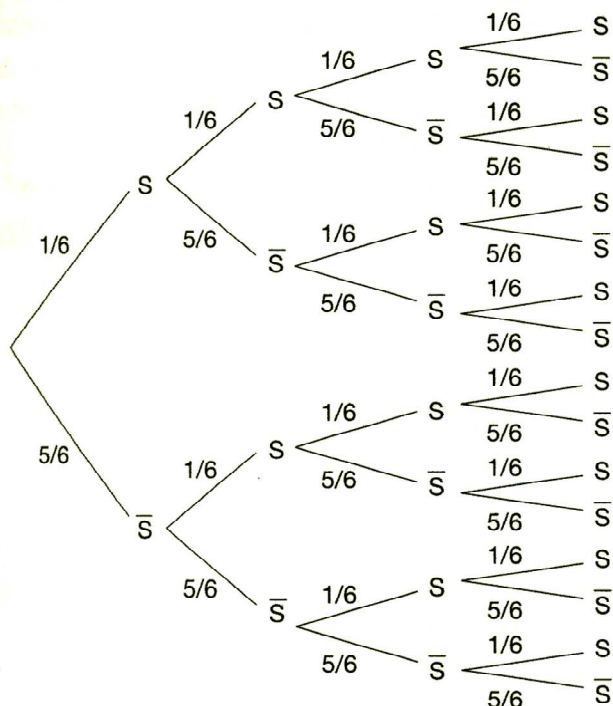
Note : on peut aussi raisonner par l'absurde.

Activités (page 286)

ACTIVITÉ 1

1. X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

2. Arbre



3. a) $P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$;

$P(X=4) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$.

b) $P(X=1) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324}$;

$P(X=3) = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{324}$.

c) $P(X=2) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$.

d) Loi de X .

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

4. a) Nombre de listes :

sans S : 5^4 ;

avec un S : $\binom{4}{1} \times 5^3$;

avec deux S : $\binom{4}{2} \times 5^2$;

avec trois S : $\binom{4}{3} \times 5$;

avec quatre S : 1.

b) Chaque issue de l'événement $X = k$ correspond à une liste contenant k lettres S et $4 - k$ lettres $\bar{S}$ et en raison de l'équiprobabilité, chacune de ces listes a pour probabilité $\frac{1}{6^4}$. Il y a $\binom{4}{k} \times 5^{4-k}$ telles listes.

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(X=k) &= \binom{4}{k} \times 5^{4-k} \times \frac{1}{6^4} = \binom{4}{k} \times \frac{5^{4-k}}{6^4} \\ &= \binom{4}{k} \times \frac{1}{6^k} \times \frac{5^{4-k}}{6^{4-k}} \\ &= \binom{4}{k} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k} . \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la loi de X .

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{k=0}^4 P(X=k) &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &\quad + \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \end{aligned}$$

On reconnaît la formule du binôme donc

$$\sum_{k=0}^4 P(X=k) = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^4 = 1.$$

ACTIVITÉ 2

1. $P(X < 6) = 0,85$.

2. $P(3 \leq X \leq 5) = 0,125 + 0,225 = 0,35$.

3. $P(X > 7) = 0,05 + 0,05 = 0,1$.



TD 1

1. Loi de X

k	0	1
$p(X=k)$	$\frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{57}{203}$	$\frac{\binom{10}{1} \times \binom{20}{2}}{\binom{30}{3}} = \frac{95}{203}$

k	2	3
$p(X=k)$	$\frac{\binom{10}{2} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{45}{203}$	$\frac{\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{6}{203}$

2. Loi de Y

L'expérience est la répétition de trois épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.

L'épreuve de Bernoulli est caractérisée par l'événement S « tirage d'une boule blanche » de probabilité $p = \frac{1}{3}$.

Y indique le nombre de réalisations de S donc Y suit une loi de $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{3}\right)$.

k	0	1
$p(Y=k)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	$\binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

k	2	3
$p(Y=k)$	$\binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

3. Tableau des différences

k	0	1
$p(X=k) - P(Y=k)$	$\approx -0,0155$	$\approx 0,0235$

k	2	3
$p(X=k) - P(Y=k)$	$\approx -0,0005$	$\approx -0,0075$

2. Loi de X_1

k	0	1	2	3
$p(X_1=k)$	$\frac{13\,134}{44\,551}$	$\frac{19\,900}{44\,551}$	$\frac{9\,900}{44\,551}$	$\frac{1\,617}{44\,551}$

2. Loi de Y_1

La loi de Y_1 est aussi une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{3}\right)$.
(Les proportions de boules blanches et noires n'ont pas changé).

3. Tableau des différences

k	0	1
$p(X_1=k) - P(Y_1=k)$	$\approx -0,001488$	$\approx 0,002235$

k	2	3
$p(X_1=k) - P(Y_1=k)$	$\approx -0,000005$	$\approx -0,000742$

TD 2

1. Moyenne : 597,4 ; Variance : 99,24.

2. a) $P(X=10) = 0,45^{10} \approx 0,00034$.

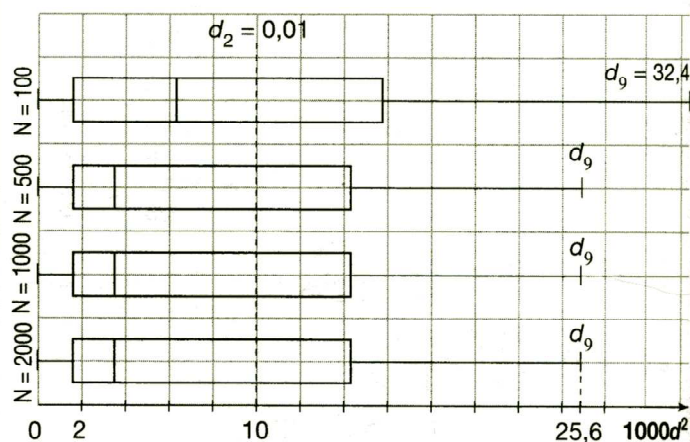
b) La variable aléatoire N donnant le nombre de pains de masse inférieure à 585 g suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,12)$.

$$P(N \leq 2) = 0,88^{12} + 10 \times 0,88^9 \times 0,12 + 45 \times 0,88^8 \times 0,12^2 \approx 0,891.$$

TD 3

$$1. 2. d^2 = \frac{0,0025}{0,5} + \frac{0,0025}{0,5} = 0,01.$$

3.



5. • Pour A : $d^2 = 0,0196$.

• Pour B : $d^2 = 0,0036$.

• Pour C : $d^2 = 0,04$.

Au risque de 10%, les résultats de A et B sont en adéquation avec les résultats d'une pièce équilibrée, ce qui n'est pas le cas de C.

2 a) $d^2 = 0,01$, valeur qui dépasse 0,002704. On ne peut donc pas accepter, au seuil de risque de 10%, que la pièce soit équilibrée.

Note : Les fréquences sont les mêmes qu'au 1. 2. (ainsi que la valeur de d^2), mais les valeurs de n ne sont pas les mêmes.

b) $d^2 = 0,0036$; $d^2 > d_9$. La conclusion est la même.

3. $P(X = 50) \approx 0,079\,59$; $P(X \leq 40) \approx 0,028\,44$;

$$P(X > 70) = 1 - P(X \leq 70) \approx 1,608 \times 10^{-5};$$

$$P(45 \leq X \leq 55) = P(X \leq 55) - P(X \leq 44) \approx 0,728\,75.$$

2. a) $P(X \leq 530) - P(X \leq 469) \approx 0,946\,32.$

b) La probabilité d'un tel résultat est de l'ordre de $P(X = 450)$, soit $0,000\,17$. Ce qui est peu probable.

3. En supposant que le nombre X de NON suit la loi binomiale telle que $n = 1000$ et $P = 0,5$, alors :

$$P(X \leq 400) \approx 1,3 \times 10^{-10},$$

ce qui représente un événement pratiquement impossible.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 303)

1. et 2. Expérience de Bernoulli.

Loi binomiale

1. Soit a le nombre de boules blanches :

$$p = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}.$$

2. Loi de X : X suit une loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{3}{4}\right)$.

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

2. « Lancer six dés parfaits » peut être assimilé à « lancer six fois de suite le même dé ».

X : nombre de sortie du 6.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(6; \frac{1}{6}\right)$.

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11\,664}.$$

3. N : nombre de tirs dans la cible.

N suit la loi $\mathcal{B}(10; 0,5)$.

$$P(N = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}.$$

4. X : nombre de rois lors des huit tirages.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{8}\right)$.

$$P(X = 5) = \binom{8}{5} \times \left(\frac{1}{8}\right)^5 \times \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7^4}{8^7}.$$

5. « Lancer six pièces de monnaie équilibrées » peut être assimilé à « lancer six fois de suite une même pièce ».

X : nombre de pile.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(6; \frac{1}{2}\right)$.

a) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{11}{32}.$$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}.$

6. X : nombre de réponses vraies.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10};$$

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Or $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ donc les deux probabilités sont égales.

7. Loi de X : X suit une loi $\mathcal{B}(6; 0,4)$.

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	0,046 656	0,186 624	0,311 04	0,276 48

k	4	5	6
$p(X = k)$	0,138 24	0,036 864	0,004 096

8. $E(X) = np$ donc $p = \frac{3}{10}.$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 P(X = k) = \left(\frac{7}{10}\right)^{10} + 10 \times \left(\frac{3}{10}\right) \times \left(\frac{7}{10}\right)^9$$

$$+ 45 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^8 + 120 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^7 \approx 0,649\,6.$$

$$P(X \geq 7) \approx 0,010\,6.$$

9. $\sigma^2(X) = np(1 - p)$ donc $n = 25.$

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 P(X=k)$$

$$= 0,8^{25} + 25 \times 0,2 \times 0,8^{24} + 300 \times 0,2^2 \times 0,8^{23}$$

$$\approx 0,0982.$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,9018.$$

10 X : nombre de sorties d'un numéro impair. X suit une loi $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{2}\right)$.

A : « au moins trois fois un nombre pair ».

$\bar{A}$ signifie « $X \leq 2$ » ;

$$P(\bar{A}) = \sum_{k=0}^2 P(X=k)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{37}{256}$$

$$\text{d'où } P(A) = \frac{219}{256}.$$

11 Corrigé dans le manuel.

12 Expérience de Bernoulli d'ordre 20 associés à la probabilité de succès $p = 0,1$ (achat).

X : nombre d'acheteurs. X suit une loi $\mathcal{B}(20; 0,1)$.

$$1. P(X=0) = 0,9^{20} \approx 0,1216.$$

$$2. P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - 0,9^{20} - 20 \times 0,1 \times 0,9^{19} \approx 0,6083.$$

3. Loïs de probabilité continues

13 1. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1, positive et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1 \text{ donc } f \text{ est une densité de probabilité.}$$

$$2. P(X \geq 0,5) = \int_{0,5}^1 3x^2 dx = 0,875;$$

$$P(X < 0,1) = \int_0^{0,1} 3x^2 dx = 0,001;$$

$$P(0,2 < X < 0,8) = \int_{0,2}^{0,8} 3x^2 dx = 0,504.$$

$$14. 1. I(x) = \int_0^a 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_0^a = 1 - e^{-a^2}$$

$$\text{d'où } \lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = 1.$$

2. f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et d'après 1.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1.$$

3. Pour m positif :

$$P(X \leq m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^m 2xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-m^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-m^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow m = \sqrt{\ln 2}.$$

15 1. λ est défini par :

$$\int_{-1}^1 \lambda(1-x^2) dx = 1.$$

$$\text{Or } \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3} \text{ donc } \frac{4}{3} \lambda = 1, \text{ ainsi } \lambda = \frac{3}{4}.$$

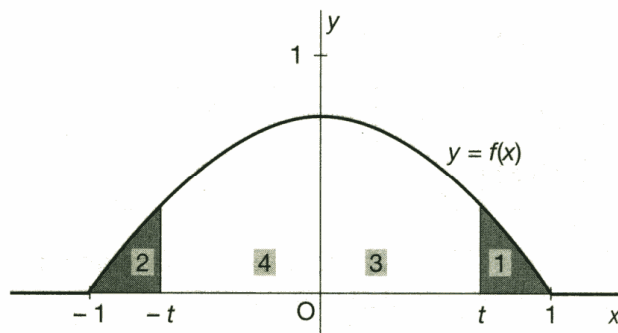
2. a) La fonction densité est une fonction paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$P(X \geq t) = \int_t^1 f(t) dt = \text{aire (1) et}$$

$$P(X \leq -t) = \int_{-1}^{-t} f(t) dt = \text{aire (2).}$$

Les deux domaines sont symétriques par rapport à l'axe (Oy) donc ils ont la même aire.

Ainsi $P(X \geq t) = P(X \leq -t)$.



$$b) P(0 \leq X \leq t) = \int_0^t f(t) dt = \text{aire (3)}$$

$$\text{et aire (3)} = \frac{1}{2} - \text{aire (1)} = \frac{1}{2} - P(X \geq t).$$

$$\text{Ainsi } P(0 \leq X \leq t) = \frac{1}{2} - P(X \geq t).$$

4. Loïs uniforme et exponentielle

$$16. 1. P(X < 3) = \frac{\text{longueur de } [0; 3[}{\text{longueur de } [0; 10]} = \frac{3}{10}.$$

$$2. P(X > 6) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$3. P(3 < X < 8) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

17 Corrigé dans le manuel.

18 a) Bruno arrive entre 12 h et 12 h 20.

$$P(0 \leq d < 20) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

b) Bruno arrive entre 12 h 40 et 13 h.

$$P(40 < d \leq 60) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

c) Bruno arrive entre 12 h 20 et 12 h 25.

$$P(20 \leq d < 25) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}.$$

19 a) $P(T > 300) = 1 - P(T \leq 300)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_0^{300} 0,005e^{-0,005t} dt \\ &= 1 - (1 - e^{-0,005 \times 300}) \\ &= e^{-1,5} \approx 0,223. \end{aligned}$$

b) $P(T \leq 365) = \int_0^{365} 0,005e^{-0,005t} dt$

$$= 1 - e^{-1,825} \approx 0,839.$$

c) $P(365 \leq T \leq 730) = \int_{365}^{730} 0,005 \times e^{-0,005t} dt$

$$= e^{-1,825} - e^{-3,65} \approx 0,135.$$

20 1. Par hypothèse $P(X > 60) = 0,942$ soit $e^{-60\lambda} = 0,942$ d'où $\lambda = -\frac{1}{60} \ln(0,942) \approx 0,001$.

2. $P(240 \leq X \leq 300) = \int_{240}^{300} \lambda e^{-\lambda t} dt$

$$= e^{-240\lambda} - e^{-300\lambda} \approx 0,046.$$

Apprendre à chercher

(page 305)

25 Plusieurs lancers de deux pièces de monnaie

Les outils :

- Loi binomiale.
- Événements contraires (ou complémentaires).

Les objectifs :

- Savoir calculer des probabilités.

1. a) FF, FP, PF, PP. b) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}$. c) $p = \frac{1}{4}$.

2. a) Trois succès et sept échecs, donc $(X = 3)$.

b) $p(A) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

3. $\bar{B}$: 0 fois « deux pile »,

$$p(\bar{B}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}, \text{ d'où } p(B) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

26 La roue de la fortune

Les outils :

- Variable aléatoire.
- Espérance.
- Loi binomiale.

5. Lois sans mémoire

21 1. $P(X \geq 5 / X \geq 2) = P(X \geq 3) = 0,452$.

2. X est alors une loi exponentielle de paramètre λ .
Or $P(X \geq 3) = 0,452$ donc $e^{-3\lambda} = 0,452$

d'où $\lambda = -\frac{1}{3} \ln(0,452)$.

Ainsi $P(X \leq 5) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-5\lambda} \approx 0,734$.

22 1. $P(T \geq 2\,000 / T \geq 1\,000) = P(T \geq 1\,000)$
 $= 1 - 0,095 = 0,905$.

2. T est une loi exponentielle de paramètre λ .

$P(X \leq 1\,000) = 0,095$ soit $1 - e^{-1\,000\lambda} = 0,095$

d'où $\lambda = -\frac{1}{1\,000} \ln(0,905)$.

Alors la demi-vie est $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ soit $\tau \approx 6\,944$ (en h).

23 Corrigé dans le manuel.

24 B : la durée de vie du système dépasse 1 000 h. Les durées de vie de chaque composant sont des variables aléatoires de même type et deux à deux indépendantes.

B signifie que chaque composant fonctionne au moins 1 000 h donc $P(B) = P(X \geq 1\,000)^3$.

$P(B) = (e^{-1\,000\lambda})^3$ avec $\lambda = 10^{-4}$ soit

$P(B) = e^{-0,3} \approx 0,741$.

Les objectifs :

- Savoir interpréter l'espérance dans un jeu.

1. • Aucun dé ne marque c : $Y = -1$.

• un dé marque c : $Y = 1$.

• deux dés marquent c : $Y = 2$.

• trois dés marquent c : $Y = 3$.

2. a) On lance trois dés, le résultat est, pour chaque dé, c ou $\bar{c}$. On réalise une expérience de Bernouilli

avec $p = \frac{1}{6}$; $n = 3$. Donc X suit une loi $\mathcal{B}(n; p)$

b) $Y = -1$, donc $X = 0$;

$Y = 1$, donc $X = 1$;

$Y = 2$, donc $X = 2$;

$Y = 3$, donc $X = 3$.

c) • $P(Y = -1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$;

• $P(Y = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$;

• $P(Y = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2$;

$$\bullet P(Y = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^5.$$

y_i	-1	1	2	3
$p(Y = y_i)$	$\frac{125}{6^3}$	$\frac{75}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$

$$\bullet E(Y) = \frac{-125 + 75 + 30 + 3}{6^3} = \frac{-17}{6^3}.$$

d) Sur un grand nombre de cycles de 216 parties, le joueur perdra en moyenne $\frac{-17}{6^3} \times 216$ jetons, soit 17 jetons.

27 Fonctionnement d'un système de communication

Les outils :

- Variables aléatoires
- Calcul algébrique : inéquation.

L'objectif :

- Étudier la fiabilité d'un système sous condition.

2. a) Le système à cinq composants fonctionne lorsque au moins trois composants fonctionnent.

$p_5 = P(X_5 \geq 3)$ donc

$$p_5 = P(X_5 = 3) + P(X_5 = 4) + P(X_5 = 5)$$

$$p_5 = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5.$$

b) Le système à trois composants fonctionne lorsque au moins deux composants fonctionnent.

$$p_3 = P(X_3 \geq 2) \text{ donc } p_3 = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3.$$

c) $p_5 > p_3$

$$\Leftrightarrow 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 > 3p^2(1-p) + p^3$$

$$\Leftrightarrow 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) - 3p^2(1-p) - p^3(1-p)$$

$$(1+p) > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(1-p)[10p(1-p) + 5p^2 - 3 - p(1+p)] > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(1-p)(-6p^2 + 9p - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow -3p^2(1-p)(p-1)(2p-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(1-p)^2(2p-1) > 0.$$

d) Donc $p > \frac{1}{2}$. Le système à cinq composants est pré-

férable à celui à trois dans le cas où $p \in]0,5; 1[$.

Prolongement : Dans le cas général de systèmes à $2k+1$ et $2k-1$ ($k \geq 2$), composants,

$$p_{2k+1} - p_{2k-1} = \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1).$$

$$\text{Ainsi } p_{2k+1} - p_{2k-1} > 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}.$$

D'où la généralisation du résultat établi lorsque $k=2$

28 Combien d'enfants pour avoir une fille ?

Les outils :

- Loi binomiale.
- Événements contraires.
- Calcul algébrique : inéquation.

L'objectif :

- Optimiser sous condition probabiliste.

1. Mise en place d'une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{B}(n; 0,5)$.

2. a) $\bar{A}$: « avoir n garçons lors de n naissances ».

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ donc } P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{b) } P(A) \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(0,01)}{\ln 2}.$$

D'où l'entier n minimum : $n_0 = 7$.

29 Fonctionnement d'un feu tricolore

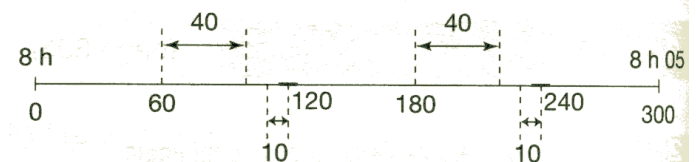
Les outils :

- Représentation graphique.
- Loi uniforme.

L'objectif :

- Calculer des probabilités.

1. Représentation graphique :



2. a) A : « Attente de moins de 10 s ».

A signifie :

« $T \in [0; 60[$ ou $T \in]110; 180[$ ou $T \in]230; 300[$ » (réunion d'événements incompatibles).

$$\text{b) } P(A) = \frac{60}{300} + \frac{70}{300} + \frac{70}{300} = \frac{2}{3}.$$

3. B : « Attente de plus de 20 s ».

$$P(B) = P(60 < T < 100) + P(180 < T < 220)$$

$$= \frac{40}{300} + \frac{40}{300} = \frac{4}{15}.$$

Pour progresser

(page 307)

Loi binomiale

30 1. On utilise la loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0,92$ (pas de défaut).

$$P(X = 10) = (0,92)^{10} \approx 0,4344.$$

$$2. P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= \binom{10}{7} \times (0,92)^7 \times (0,08)^3 + \binom{10}{8} \times (0,92)^8 \times (0,08)^2 + \binom{10}{9} \times (0,92)^9 \times 0,08 + (0,92)^{10} \approx 0,994.$$

31 B gagne le tournoi s'il gagne cinq parties au moins. On utilise la loi binomiale avec $n = 9$, $p = 0,4$.
 $P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$
 $\approx 0,2666$.

32 X : nombre de Pile. X suit une loi $\mathcal{B}(20; 0,5)$.
Y : gain en e.

$$P(Y = 1) = P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11)$$

$$= \binom{20}{9} \times 0,5^{20} + \binom{20}{10} \times 0,5^{20} + \binom{20}{11} \times 0,5^{20}$$

$$\approx 0,4966.$$

$$P(Y = -1) = 1 - P(Y = 1) \approx 0,5034.$$

$E(Y) = P(Y = 1) - P(Y = -1) < 0$ donc le jeu n'est pas équitable.

33 1. Pour une journée, un client achète (succès) avec une probabilité $p = \frac{1}{15}$, d'où la répétition de dix épreuves identiques et indépendantes.
Donc le nombre d'acheteurs suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{15}$.

$$2. \bullet P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{15}\right)^k \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}.$$

$$\bullet P(X = 0) \approx 0,5016;$$

$$\bullet P(X = 1) \approx 0,3583;$$

$$\bullet P(X = 5) \approx 0,00024.$$

$$3. E(X) = n \times p = \frac{2}{3}.$$

4. Y : gain en e.

$$Y = 100X, \text{ donc } E(Y) = 100 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{3} \text{ e.}$$

34 1. X suit une loi $\mathcal{B}(100; 0,02)$.

$$2. P(X = 0) = 0,98^{100} \approx 0,1326;$$

$$P(X = 1) = 100 \times 0,02 \times 0,98^{99} \approx 0,2707;$$

$$P(X = 2) = 4\,950 \times 0,02^2 \times 0,98^{98} \approx 0,2734.$$

35 1. X : nombre de succès ;

X suit une loi $\mathcal{B}\left(5; \frac{1}{3}\right)$.

A : « au moins deux succès ».

$$P(A) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right] = \frac{131}{243}.$$

$$2. 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,1}{\ln \left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Ainsi $n \geq 6$.

36 Corrigé dans le manuel.

37 1. La même épreuve (test du microprocesseur) est répétée cinquante fois de façon indépendante, et $p = 0,05$ donc X suit une loi $\mathcal{B}(50; 0,05)$.

2. Tableau de valeurs $0 \leq k \leq 15$.

k	P(X = k)	P(X < k)
0	0,076944975	0,076944975
1	0,202486777	0,279431752
2	0,26110137	0,540533123
3	0,219874838	0,760407961
4	0,135975229	0,89638319
5	0,065840637	0,962223827
6	0,025989725	0,988213552
7	0,008598105	0,996811657
8	0,002432359	0,999244015
9	0,000597421	0,999841437
10	0,000128917	0,999970354
11	2,46732E-05	0,999995027
12	4,22041E-06	0,999999248
13	6,49294E-07	0,999999897
14	0,03153E-08	0,999999987
15	1,14082E-08	0,999999999

$$3. P(X = 3) \approx 0,220.$$

$$4. P(X \leq k) > 0,999 \Leftrightarrow k \geq 8.$$

38 • Appelons A l'événement « On a obtenu six fois "face" », B l'événement « Les trois premiers tirages sont FPF ».

$$1. P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

• $A \cap B$ est l'événement « FPF puis il y a quatre "face" dans les sept autres tirages ».

$$P(A \cap B) = p \times (1-p)p \times \binom{7}{4} p^4 \times (1-p)^3.$$

$$\bullet P(A) = \binom{10}{6} p^6 \times (1-p)^4.$$

$$\bullet \text{D'où } P_A(B) = \frac{35p^6(1-p)^4}{210p^6(1-p)^4} = \frac{1}{6}.$$

2. Le résultat est :

$$P(A \cap B') = (1-p)p(1-p) \binom{7}{5} p^5 (1-p)^2.$$

$$P_A(B') = \frac{21p^6(1-p)^4}{210p^6(1-p)^4} = \frac{1}{10}.$$

39 • R est l'événement « un lot est remboursable ».
 $p(R) = 1 - (0,992)^{12} - 12(0,992)^{11} \times 0,008 \approx 0,004$.

« Un seul lot sur les trois est remboursable » a pour probabilité : $3 \times (0,004) \times (0,996)^2 \approx 0,012$.

40 • On désigne par p_3 la probabilité pour un trimoteur et p_5 pour un cinq moteurs de terminer leur vol.

$$p_3 = p^3 + 3p^2(1-p);$$

$$p_5 = p^5 + 5p^4(1-p) + 10p^3(1-p)^2;$$

$$p_3 - p_5 = p^3 + 3p^2(1-p) - p^5 - 5p^4(1-p) - 10p^3(1-p)^2$$

$$= p^2(p-1)^2(3-6p).$$

$$\text{Donc } p_3 \leq p_5 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}.$$

41 • 1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p .

Donc : $p(X = 0) = (1 - p)^3 = q^3$;

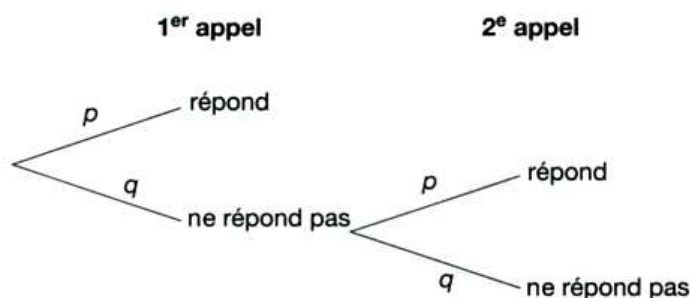
$p(X = 1) = 3(1 - p)^2 p = 3q^2 p$;

$p(X = 2) = 3(1 - p)p^2 = 3qp^2$ et $p(X = 3) = p^3$.

2. • Un arbre permettrait la visualisation des valeurs de Y conditionnées par celles de X. C'est un procédé long. Chaque probabilité est obtenue par des formules du type : $p(Y = 0) = p(X = 0 \text{ et } Y = 0) + p(X = 1 \text{ et } Y = 0) + p(X = 2 \text{ et } Y = 0)$.

Il vaut mieux renoncer, mais on arrive au résultat.

• Il faut faire un arbre : pour un correspondant, il y a deux possibilités au premier appel, puis éventuellement deux autres au deuxième appel.



Ainsi, la probabilité qu'un correspondant réponde au second appel est pq .

Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et pq , d'où la loi de Y.

y_i	0	1	2	3
$p(Y = y_i)$	$(1 - pq)^3$	$3(1 - pq)^2 pq$	$3(1 - pq)(pq)^2$	$(pq)^3$

Remarque : $1 - pq = q + p^2$.

3. a) Le problème est de connaître la probabilité qu'un correspondant réponde au premier ou au second appel.

Or, la probabilité qu'un correspondant réponde au premier ou au second appel est :

$$p + pq = p(1 + q) = (1 - q)(1 + q) = 1 - q^2.$$

Ce qui permet de répondre à la question.

b) Les formules donnent :

$$E(X) = 3p = 1; E(Y) = 3pq = \frac{2}{3}; E(Z) = 3(1 - q^2) = \frac{5}{3}.$$

On peut remarquer que $E(X) + E(Y) = E(Z)$.

$$c) P(Z = 3) > 0,5 \Leftrightarrow (1 - q^2)^3 > 0,5 \Leftrightarrow 1 - q^2 > \sqrt[3]{0,5}$$

$$\Leftrightarrow q < \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,5}}$$

$$P(Z = 3) > 0,5 \Leftrightarrow (1 - p) < \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,5}}$$

$$\Leftrightarrow p > 1 - \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,5}}.$$

D'où la valeur cherchée : $p_{\min} \approx 0,55$.

42 • 1. Loi de X_i

k	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p = q$	p

$$2. a) X = \sum_{i=1}^n \text{ prend les valeurs } 0, 1, 2, \dots, n.$$

b) Chaque X_i prend la valeur 1 lorsque S est réalisé à la $i^{\text{ème}}$ épreuve, 0 sinon, donc leur somme indique le nombre de succès sur les n épreuves. (Les X_i servent de « compteur »).

$$c) X \text{ suit une loi } \mathcal{B}(n; p). E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np.$$

Note : on a prouvé le résultat donné dans le cours p. 290.

43 • 1. X suit une loi $\mathcal{B}\left(30; \frac{1}{3}\right)$.

2. Tableau de valeurs.

k	$P(X = k)$	$P(X < k)$
0	5,2151E-06	5,2151E-06
1	7,82264E-05	8,34415E-05
2	0,000567142	0,00060583
3	0,002646661	0,003297244
4	0,00893248	0,012229724
5	0,023224448	0,035454172
6	0,048384267	0,083838438
7	0,082944457	0,166782896
8	0,119232657	0,286015553
9	0,145728803	0,431744356
10	0,153015243	0,584759599
11	0,139104767	0,723864365
12	0,110124607	0,833988972
13	0,076240112	0,910229085
14	0,04628864	0,956517724
15	0,024687275	0,981204999
16	0,011572216	0,992777159
17	0,004765007	0,997542166
18	0,001720697	0,999262863
19	0,000543378	0,999806241
20	0,000149429	0,99995567
21	3,55783E-05	0,999991248
22	7,27738E-06	0,999998525
23	1,26563E-06	0,999999791
24	1,84571E-07	0,99999976
25	2,21486E-08	0,99999998
26	2,12967E-09	1
27	1,57753E-10	1
28	8,45107E-12	1
29	2,91416E-13	1
30	4,85694E-15	1

$$3. m = E(X) = 30 \times \frac{1}{3} = 10.$$

$P(X = k)$ maximale pour $k = 10$.

44 • La probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{2}{3}$ ($\frac{1}{3}$ pour une face blanche).

1. Il faut B B B B N, d'où la probabilité : $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^5}$.

2. $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243}$.

3. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$; $p = \frac{2}{3}$, d'où :

$P(X = k) = \binom{5}{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$ pour $k = 0, 1, \dots, 5$.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

45 • 1. a) Deux feux verts :

$$0,75 \times 0,5 = 0,375 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

b) $1 - 0,25 \times 0,5 = 1 - 0,125 = 0,875 = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$.

2. X suit la loi binomiale de paramètres :

$$n = 5 \text{ et } p = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

D'où $P(X = k) = \binom{5}{k} \times (0,75)^k \times 0,25^{5-k}$; $k = 0, \dots, 5$.

• $P(X = 0) = \frac{1}{1\,024}$; • $P(X = 1) = \frac{15}{1\,024}$;

• $P(X = 2) = \frac{45}{512}$; • $P(X = 3) = \frac{135}{512}$;

• $P(X = 4) = \frac{405}{1\,024}$; • $P(X = 5) = \frac{243}{1\,024}$.

46 • A. 1. $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{21}$.

2. $P(E_1) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{28}$; $P(E_2) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{20}{21}$.

3.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

B. 1. $\binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{21}\right)^2 \times \left(\frac{20}{21}\right)^3 \approx 0,02$.

2. On est amené à résoudre : $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n > 0,95$,

soit $n > \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)}$..., d'où $n_0 = 62$.

47 • 1. Remplir une grille de loto-foot est une expérience de Bernoulli d'ordre 13 dont l'épreuve est définie par S « bon pronostic pour un match » de probabilité $p = \frac{1}{3}$. Ainsi N suit une loi $\mathcal{B}\left(13; \frac{1}{3}\right)$.

2. $P(G) = \sum_{k=10}^{13} P(N = k)$
 $= \binom{13}{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{13}{11} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$
 $+ \binom{13}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{13}$
 $\approx 0,0016$

48 • 1. $a + b$ ne prend jamais la valeur -4 donc $a + b + 4 \neq 0$. Ainsi G existe.

2. Ω : ensemble des trente couples de jetons. Tous les couples sont équiprobables.

a) E_1 signifie que $a = 0$. $P(E_1) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

E_2 signifie que $a = 0$ et $b \geq 0$ (du signe de 4).

$P(E_2) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

b) E_3 signifie que a et b sont strictement positifs (du signe de 4).

$P(E_3) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

3. a) X suit une loi $\mathcal{B}\left(n; \frac{2}{5}\right)$.

$E(X) = 4 \Leftrightarrow \frac{2n}{5} = 4 \Leftrightarrow n = 10$.

b) I : « au moins un des barycentres est strictement intérieur à ABC ».

$P(I) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

$P(I) > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0,001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,001}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$.

Ainsi $n_0 = 14$.

49 • 1. a) A : « les douze groupes sont présents un jour donné ». $P(A) = \left(\frac{7}{8}\right)^{12}$ d'où $0,20 < P(A) < 0,21$.

b) La répétition 30 fois de l'épreuve de Bernoulli définie par l'événement $\bar{A}$ « les douze groupes ne se présentent pas tous un jour donné », de probabilité $p \approx 0,8$, de façon indépendante, définit une expérience de Bernoulli d'ordre 30.

« $X = 30$ » signifie que chaque jour du mois, les douze groupes ne sont pas tous présents au départ.

« $X = 0$ » signifie que durant le mois, douze groupes sont toujours présents au départ.

Ainsi X suit une loi $\mathcal{B}(30; p)$. $E(X) = 30p \approx 2,4$. Sur une grande série de telles expériences, indépendantes, la moyenne des jours où les douze groupes ne se sont pas présentés durant un mois est 2,4.

c) « $S = 11$ » signifie que 11 groupes sont présents ce jour-là. $P(S = 11) = \binom{12}{1} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{11} \times \frac{1}{8} \approx 0,35$.

S suit une loi $\mathcal{B}\left(12; \frac{7}{8}\right)$ donc

$$E(X) = 12 \times \frac{7}{8} = 10,5 \text{ (crédits)}.$$

2. a) $p_{13} = \left(\frac{7}{8}\right)^{13} \approx 0,18$.

b) Loi de R.

k	2	0
$P(R = k)$	p_{13}	$1 - p_{13}$

Note : $\frac{1}{2}$ R suit une loi de Bernoulli.

$$E(R) = 2p_{13} \approx 0,36.$$

c) G : variable aléatoire donnant le gain journalier. Notons N la variable aléatoire donnant le nombre de groupes présents un jour donné.

N suit une loi $\mathcal{B}\left(13; \frac{7}{8}\right)$.

Chaque groupe présent apporte un crédit et le coût de l'activité de substitution est R donc $G = N - R$.

Ainsi $E(G) = E(N) - E(R)$.

$$\text{D'où } E(G) = \sum_{k=0}^{13} kP(N=k) - 2p_{13}$$

$$\text{soit } E(G) = \sum_{k=0}^{13} k \binom{13}{k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^k \times \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2p_{13}.$$

$$E(G) = 13 \times \frac{7}{8} - 2\left(\frac{7}{8}\right)^{13} \approx 11,02 \text{ (crédits)}.$$

d) L'espérance de gain a augmenté donc la décision est rentable.

Lois continues

50 a) f positive sur $\mathbb{R}$, f continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1 et pour tout $b \geq 1$,

$$\int_1^b f(x) dx = \int_1^b \frac{3}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b^3}.$$

$$\text{D'où } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = 1.$$

Ainsi f définit une densité de probabilité.

b) f positive et continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $b \geq 0$,

$$\int_1^b f(x) dx = \int_0^b x e^{-x} dx = 1 - e^{-b} - b e^{-b} \text{ (intégration par parties).}$$

$$\text{D'où } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = 1.$$

Ainsi f définit une densité de probabilité.

51 A : durée d'attente en min ; T : temps écoulé en min entre 10 h et l'arrivée du bus.

$$1. P(A \geq 10) = P(T \geq 10) = \frac{30-10}{30} = \frac{2}{3}.$$

2. L'événement « $T \geq 15$ » est réalisé. Dire que l'attente dure au moins 10 min supplémentaires signifie « $T \geq 25$ ».

On cherche la probabilité conditionnelle

$$P(T \geq 25 / T \geq 15) = \frac{P(T \geq 25 \text{ et } T \geq 15)}{P(T \geq 15)}.$$

$$\text{Or } P(T \geq 25 \text{ et } T \geq 15) = P(T \geq 25) = \frac{30-25}{30} = \frac{1}{6}$$

$$\text{et } P(T \geq 15) = \frac{1}{2} \text{ donc } P(T \geq 25 / T \geq 15) = \frac{1}{3}.$$

52 Corrigé dans le manuel.

53 • 1. Aire(ABM) = t^2 d'où

$$P(S \leq 0,25) = P(t^2 \leq 0,25) = P(-0,5 \leq t \leq 0,5) = \frac{1}{2}.$$

$$P(S > 0,5) = P\left(t^2 > \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(-1 \leq t < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1\right)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P(S = 1) = P(t^2 = 1) = P(t = -1 \text{ ou } t = 1) = 0.$$

$$2. \text{ Pour } \tau \geq 0, P(S \leq \tau) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(t^2 \leq \tau) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(-\sqrt{\tau} \leq t \leq \sqrt{\tau}) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{1}{4}.$$

54 • 1. $P(T \leq 70) = 1 - e^{-\lambda \times 70}$, d'où :

$$1 - e^{-\lambda \times 70} = 0,05 \Leftrightarrow e^{-\lambda \times 70} = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,95}{70} (\approx 0,000733).$$

$$2. P(T > 30) = e^{-\frac{\ln 0,95}{70} \times 30} \approx 0,978.$$

$$\mathbf{55} \bullet 1. \text{ a) } P(X < 1000) = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5568} \times 1000} \approx 0,117.$$

$$\text{b) On écrit que } 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5568} \times x} = 0,2$$

soit $x \approx 1792,5$ années.

$$2. \text{ a) } P(T < 1000) = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 1000} \approx 1.$$

$$\text{b) On écrit que } 1 - e^{-\frac{\ln 2}{30} \times t} = 0,2 \text{ soit } t \approx 9,66 \text{ années.}$$

56 • 1. T : temps de réparation en h.

$$P(T \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-1} \approx 0,368.$$

2. T est sans mémoire :

$$P(T \geq 10 / T \geq 9) = P(T \geq 1) = e^{-\lambda} = e^{-0,5} \approx 0,606.$$

58 1. Le système a une durée de vie inférieure à t si et seulement si les deux composants ont une durée de vie inférieure à t :

$$P(T \leq t) = P(T_1 \leq t) \times P(T_2 \leq t).$$

$$2. P(T \leq t) = (1 - e^{-\lambda t}) \times (1 - e^{-\lambda t}) = (1 - e^{-\lambda t})^2.$$

$$3. P(T > 365) = 1 - P(T \leq 365) = 1 - (1 - e^{-\lambda \times 365})^2 \approx 0,00135.$$

$$4. p(T' \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^3, \text{ d'où :}$$

$$p(T' > 365) = 1 - (1 - e^{-\lambda \times 365})^3 \approx 0,002.$$

59 1. $P(X > 10) = 0,286 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0,286$
 $\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,286}{10}.$

Ainsi $\lambda \approx 0,125$.

$$2. P(X \leq 0,5) = 1 - e^{-0,5\lambda} \approx 0,061.$$

3. La loi de X est sans mémoire donc

$$P(T \geq 10 / T \geq 8) = P(X \geq 2) = e^{-2\lambda} \approx 0,779.$$

4. A : au moins un appareil a une durée de vie supérieure à 10 ans.

$$P(A) = 1 - [P(X \leq 10)]^{15} = 1 - (1 - 0,286)^{15} \approx 0,994.$$

5. On cherche l'entier n tel que $1 - (1 - 0,286)^n \geq 0,999$.

$$\text{D'où } n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,714} \text{ donc } n_0 = 21.$$

60 1. a) $P(50 \leq D \leq 100) = e^{-50\lambda} - e^{-100\lambda} \approx 0,248.$

$$\text{b) } P(D \geq 300) = e^{-300\lambda} \approx 0,026.$$

2. D est sans mémoire donc

$$P(T \geq 375 / T \geq 350) = P(X \geq 25) = e^{-25\lambda} \approx 0,737.$$

3. a) Par intégration par parties

$$I(A) = \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = -Ae^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{soit } I(A) = 82 - 82e^{-\frac{A}{82}} - Ae^{-\frac{A}{82}}.$$

$$\text{b) } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\frac{A}{82}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} Ae^{-\frac{A}{82}} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = 82.$$

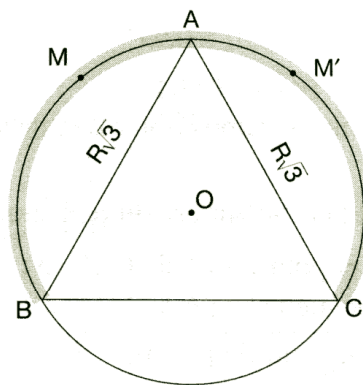
Note : Cette distance moyenne n'est autre que $E(D) = \frac{1}{\lambda}$ (espérance d'une variable aléatoire de type exponentiel).

4. a) X_d traduit le nombre de réalisations de S lors de la répétition de N_0 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes associées à S « l'autocar ne subit aucun incident pendant d km » de probabilité $p = P(D \geq d) = e^{-\lambda d}$.

Donc X_d suit une loi $\mathcal{B}(N_0; e^{-\lambda d})$.

$$\text{b) } E(X_d) = N_0 e^{-\lambda d}.$$

61 1. a) M doit être sur les arcs $[\widehat{AB}]$ ou $[\widehat{AC}]$.

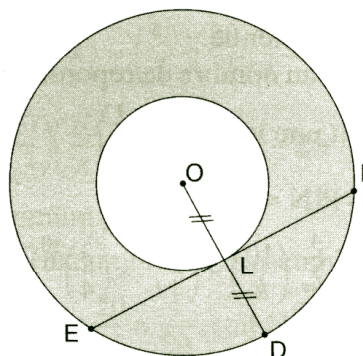


b) D'où la probabilité : $P = \frac{2}{3}.$

2. Si $EF = R\sqrt{3}$, L est le milieu du rayon $[OD]$.

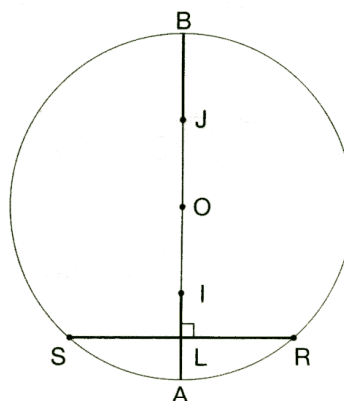
Pour que $0 \leq X \leq R\sqrt{3}$, il faut et il suffit que L soit à l'extérieur du cercle de rayon $\frac{R}{2}$.

$$\text{Donc } P' = \frac{\text{aire de la couronne}}{\text{aire du disque de rayon } R} = \frac{3}{4}.$$



3. Notons $[AB]$ le diamètre tel que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{SR}$. Soit L' le milieu de la corde. $0 \leq X \leq R\sqrt{3}$ si et seulement si $L' \in [AI] \cup [BJ]$.

$$\text{Donc } P'' = \frac{1}{2}$$



Prendre toutes les initiatives

62 Notons $p = P(D) = 0,01$.

A : « le paquet contient au moins deux objets défectueux ».

$\bar{A}$: « le paquet contient aucun ou un objet défectueux ».

$$P(\bar{A}) = 0,99^{10} + 10 \times 0,01 \times 0,99^9.$$

Ainsi $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,0043$.

$P(A) < 0,01$ donc la proposition est réaliste.

63 Non ! X : partie entière du réel choisi.

$P(X = 10) = 0$ et pour tout k de $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$,

$$P(X = k) = \frac{\text{longueur } [k; k+1[}{\text{longueur de } [1; 10]} = \frac{1}{9}.$$

64 • $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5$ donc $\lambda = \frac{1}{5}$.

X : nombre de moteurs n'ayant pas d'incident durant les deux premières années.

X suit une loi $\mathcal{B}(100; p)$ avec $p = P(T \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-\frac{2}{5}}$.

Le nombre cherché est $E(X) = 100p = 100e^{-\frac{2}{5}} \approx 67$.

65 • N : Note obtenue.

La note est égale au nombre de réponses justes sur les dix. Ainsi N suit une loi $\mathcal{B}(10; \frac{1}{4})$.

$$P(N \geq 5) = 1 - P(N \leq 4)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \approx 0,0781.$$

66 • N : Note obtenue.

X : nombre de réponses justes ;

X suit une loi $\mathcal{B}(10; \frac{1}{4})$.

$$N = X - 0,5(10 - X) = 1,5X - 5.$$

$$N \geq 5 \Leftrightarrow 1,5X - 5 \geq 5 \Leftrightarrow X \geq \frac{20}{3}.$$

Puisque X ne prend que des valeurs entières $N \geq 5$ signifie $X \geq 7$.

$$P(N \geq 5) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \approx 0,0035.$$

Note : Il a 22 fois moins de chances « d'avoir la moyenne » qu'avec le protocole du 65.

67 • X : nombre de « Face » durant les n lancers.

X suit une loi $\mathcal{B}(n; \frac{1}{2})$.

A : obtenir un nombre impair de « Face ».

Notons I l'ensemble des entiers impairs inférieurs ou égaux à n .

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i \in I} P(X = i) = \sum_{i \in I} \binom{n}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left[\sum_{i \in I} \binom{n}{i} \right] \cdot [1] \end{aligned}$$

Or d'après la formule du binôme

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$$

donc en séparant les termes d'indices pairs et impairs.

$$0 = \sum_{j \in \bar{I}} \binom{n}{j} - \sum_{i \in I} \binom{n}{i} \text{ d'où } \sum_{i \in I} \binom{n}{i} = \sum_{j \in \bar{I}} \binom{n}{j}$$

La somme de toutes les combinaisons vaut 2^n d'où

$$\sum_{i \in I} \binom{n}{i} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}. \text{ Ainsi d'après [1], } P(A) = \frac{1}{2}.$$

Note : Un calcul direct à partir du développement de $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^n$ par la formule du binôme est aussi possible.

Problèmes

(page 313)

68 • 1. • $P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{38} \quad (0,079);$

• $P(B) = 1 - \frac{\binom{14}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{99}{190} \quad (0,521);$

• $P(C) = \frac{\binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{9}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{61}{190} \quad (0,321).$

2. $P_{\bar{C}}(B) = p \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{6 \times 14}{190} \times \frac{190}{129} = \frac{28}{43} \quad (0,651).$

3. • $P(E_0) = \left(\frac{129}{190}\right)^3 \approx 0,313;$

• $P(E_1) = 3 \times \left(\frac{61}{190}\right) \times \left(\frac{129}{190}\right)^2 \approx 0,444;$

• $P(E_2) = 3 \times \left(\frac{61}{190}\right)^2 \times \left(\frac{129}{190}\right) \approx 0,210;$

• $P(E_3) = \left(\frac{61}{190}\right)^3 \approx 0,033.$

69 • 1. $E(S_n) = np = 10$ donc $p = \frac{10}{n}$.

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{10}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$$

2. a) $P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{10}{n}\right)^n$ donc

$$\ln[P(S_n = 0)] = n \ln \left(1 - \frac{10}{n}\right) = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}}.$$

Posons $u = -\frac{10}{n}$ d'où $\ln(P(S_n = 0)) = -10 \times \frac{\ln(1+u)}{u}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u = 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P(S_n = 0)) = -10.$$

La fonction exp est continue en -10 donc

$$P(S_n = 0) = e^{-10}.$$

b) $P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$

$$= \binom{n}{k} \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1} \times \left(\frac{10}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n-k}{k+1} \times \frac{10}{n} \times \left(\frac{10}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \left(\frac{10}{n}\right)^{k+1} \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k-1}$$

$$= \binom{n}{k+1} \times \left(\frac{10}{n}\right)^{k+1} \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-(k+1)}$$

$$\text{donc } P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1} = P(S_n = k+1).$$

c) k est fixé ;

supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \times \frac{10^k}{k!}$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-k}{n-10} = 1$ et d'après l'égalité du 2. b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k+1) = \frac{10}{k+1} \times e^{-10} \times \frac{10^k}{k!} \text{ soit}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k+1) = e^{-10} \times \frac{10^{k+1}}{(k+1)!}.$$

d) Récurrence immédiate : la propriété est vraie au rang 0 (voir 2. a)) et si elle est vraie au rang k , elle se transmet au rang $k+1$ (voir 2. b)).

3. $P(S_n \geq 3) = 1 - P(S_n \leq 2)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(S_n \geq 3) &= 1 - e^{-10} \left(1 + \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!}\right) \\ &= 1 - 61e^{-10} \approx 0,9972. \end{aligned}$$

70 • 1. $P(X = k) = \binom{50}{k} \left(\frac{20}{N}\right)^k \left(\frac{N-20}{N}\right)^{50-k}$.

2. $f'(x) = 2 \left(\frac{20}{x^2}\right) \left(\frac{20}{x}\right)^3 \left(1 - \frac{20}{x}\right)^{45} \left(-2 + \frac{25 \times 20}{x}\right)$.

D'où un maximum pour $x = 250$.

3. a) $N = 250$ (maximum de vraisemblance).

b) La proportion : $\frac{20}{N} = \frac{4}{50}$, soit $N = 250$.

C'est nouveau au bac

(page 314)

71 • 1. a), d) $P(T < t) = P(T \geq t)$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

2. a) $P(T < 1) = 0,18 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda} = 0,18$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,82$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lambda &= -\ln\left(\frac{41}{50}\right) = \ln\left(\frac{50}{41}\right) \\ &= \ln 2 + 2 \ln 5 - \ln 41. \end{aligned}$$

3. a), d) T est sans mémoire donc

$$P(T \geq 3 / T \geq 2) = P(T \geq 1) = e^{-\lambda}.$$

4. d) Par intégration par parties

$$I(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{d'où } E(T) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Ainsi } E(T) = \frac{1}{0,2} = 5.$$

72 • 1. Vrai. N : nombre de « Face ». N suit une loi

$$\mathcal{B}\left(20; \frac{1}{2}\right).$$

$$P(N = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20};$$

$$P(N = 15) = \binom{20}{15} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5;$$

$$\text{or } \binom{20}{5} = \binom{20}{15} \text{ d'où le résultat.}$$

2. Faux. De même $P(N = 5) = \binom{20}{5} \times 0,6^5 \times 0,4^{15}$ et

$$P(N = 15) = \binom{20}{15} \times 0,6^{15} \times 0,4^5 \text{ donc}$$

$$P(N = 5) \neq P(N = 15).$$

3. Faux. X : nombre de réponses justes. X suit une loi

$$\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{3}\right).$$

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^4 P(X=k)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} \approx 0,21.$$

4. **Vrai.** X suit une loi $\mathcal{B}\left(4k; \frac{3}{4}\right)$ donc

$$E(X) = 4k \times \frac{3}{4} = 3k.$$

5. **Faux.** A : « tirer au moins une vis défectueuse ».
 $P(A) = 1 - 0,99^n$.

$$P(A) > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,99^n > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 0,99^n < 0,01$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,99}.$$

D'où $n \geq 459$.

Note : on peut aussi tester la valeur 100.

Pour $n = 100$, $P(A) = 1 - 0,99^{100} \approx 0,634$.

73 • 1. Par définition, pour tout $t \geq 0$,

$$P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$\text{D'où } P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = e^{-\lambda t}.$$

Pour tout $t \geq 0, h \geq 0$,

$$P(T \geq t+h / T \geq t) = \frac{P((T \geq t+h) \text{ et } (T \geq t))}{P(T \geq t)}$$

$$= \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

Ainsi T est une loi « sans vieillissement ».

2. Application :

$$\text{a) } P(T \geq 400 / T \geq 200) = P(T \geq 200)$$

$$= 1 - P(T < 200) = 0,5.$$

$$\text{b) } P(200 \leq T \leq 400)$$

$$= P((T \geq 200) \cap (T \leq 400))$$

$$= P(T \geq 200) \times P(T \leq 400 / T \geq 200).$$

$$\text{Or } P(T \leq 400 / T \geq 200) = 1 - P(T > 400 / T \geq 200)$$

$$= 1 - 0,5 = 0,5$$

et $P(T \geq 200) = 0,5$ donc :

$$P(200 \leq T \leq 400) = 0,5 \times 0,5 = 0,25.$$

c) Par hypothèse $P(T < 200) = \frac{1}{2}$ soit $1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

$$P(83 \leq T \leq 400) = \int_{83}^{400} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-83\lambda} - e^{-400\lambda}$$

$$\approx 0,5 \text{ (arrondi à } 10^{-4} \text{ près).}$$

74 • 1. Par définition, pour tout $t \geq 0$,

$$P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$\text{D'où } P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = e^{-\lambda t}.$$

Pour tout $t \geq 0, h \geq 0$,

$$P(T \geq t+h / T \geq t) = \frac{P((T \geq t+h) \text{ et } (T \geq t))}{P(T \geq t)}$$

$$= \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

Ainsi T est une loi « sans vieillissement ».

2. Application :

$$\text{a) } P(T \geq 400 / T \geq 200) = P(T \geq 200)$$

$$= 1 - P(T < 200) = 0,5.$$

$$\text{b) } P(200 \leq T \leq 400)$$

$$= P((T \geq 200) \cap (T \leq 400))$$

$$= P(T \geq 200) \times P(T \leq 400 / T \geq 200).$$

$$\text{Or } P(T \leq 400 / T \geq 200) = 1 - P(T > 400 / T \geq 200)$$

$$= 1 - 0,5 = 0,5$$

et $P(T \geq 200) = 0,5$ donc :

$$P(200 \leq T \leq 400) = 0,5 \times 0,5 = 0,25.$$

c) Par hypothèse $P(T < 200) = \frac{1}{2}$ soit $1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

$$P(83 \leq T \leq 400) = \int_{83}^{400} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-83\lambda} - e^{-400\lambda} \approx 0,5$$

(arrondi à 10^{-4} près).

Activités (page 316)

ACTIVITÉ 1

1. a) $y_4 = i \times 5$, $y_5 = i \times (-2)$.
 2. b) $z_4 = 1 + i \times 2$, $z_5 = -3,2 + i \times 4$.

2. $2 + 4i$; $-6 + 10i$; $1 + i$; $-8 + 6i$; -2 ; $7 - 24i$;
 $-i$; -5 ; $(aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Travaux dirigés (page 331)

TD 1

1. $P(-1) = 0$.
 2. $Q(z) = z^2 - 4z + 7$;
 $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$;
 $\{-1, 2 + \sqrt{3}i, 2 - \sqrt{3}i\}$.
 3. $a = -1$, $b = 2 + \sqrt{3}i$,
 $c = 2 - \sqrt{3}i$;
 $|b - a| = \sqrt{12}$, $|c - a| = \sqrt{12}$ et $|b - c| = \sqrt{12}$.
 2. 1. Les nombres a_i sont réels donc $\overline{a_i} = a_i$ et, en appliquant le théorème 1, $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$.
 2. Si z_0 est racine, $\overline{z_0}$ est également racine avec $z_0 \neq \overline{z_0}$ et on peut factoriser par $(z - z_0)$ et $(z - \overline{z_0})$.
 3. $i\sqrt{3}$ est solution, donc $-i\sqrt{3}$ est racine et on peut factoriser par $(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 + 3$;
 $Q(z) = z^2 - 6z + 21$.
 $a = i\sqrt{3}$,
 $b = -i\sqrt{3}$;
 $c = 3 + 2\sqrt{3}i$,
 $d = 3 - 2\sqrt{3}i$.
 Cercle de centre I d'affixe $z_I = 3$ et de rayon $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

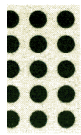
TD 2

1. Formule de Moivre ; 2 car $\cos k\theta = 1$ et $\sin k\theta = 0$.
 3. $(1 + u + \dots + u^n)(1 - u) = 1 - u^{n+1}$;
 en utilisant les formules d'Euler p. 326,

$$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} \left(e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} - e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)} \\ &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \left(\frac{2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{2i \sin\frac{\theta}{2}} \right) \\ \text{D'où } C_n &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{n\theta}{2} \\ \text{et } S_n &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin\frac{n\theta}{2}. \end{aligned}$$

TD 3

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}; \\ \cos^3 2x &= \frac{1}{4} \cos(6x) + \frac{3}{4} \cos(2x) \\ \sin^4 x \cos^2 x &= -\frac{1}{32} \cos(2x) + \frac{1}{32} \cos(6x) - \frac{1}{16} \cos(4x) \\ &\quad + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$



Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 333)

1. L'ensemble des nombres complexes

- 1** $z_D = \sqrt{3} + 3i$.
- 2. a)** AOCD est un parallélogramme car $OC = AD$ et $(OC) \parallel (AD)$.
- 3.** $|z_A| = 2$; $|z_B| = 2$; $|z_C| = 2$.
Ainsi A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.
- 4.** $z_E = z_D + z_B = 2i = z_C$ donc $D = C$.
- 2 a)** $x = 2$, donc $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 3 + 2 + 4i = 5 + 4i$.
- b)** $x = -i$, donc $z_1 = 2 + (-i)i = 3$ et $z_2 = 3 - i + 4i = 3 + 3i$.
- c)** $x = 1 + 2i$, donc :
 $z_1 = 2 + (1 + 2i)i = i$ et $z_2 = 3 + 1 + 2i + 4i = 4 + 6i$.

3 Corrigé dans le manuel.

4 $z_1 = 8 - i$; $z_2 = 2i$; $z_3 = 14$; $z_4 = 7 - 24i$.

5 $z_1 = 6 + 4i$; $z_2 = 11 - 2i$; $z_3 = 1$.

6 $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$; $z_3 = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$.

7 $z_1 = -2i$; $z_2 = 7 + i$; $z_3 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

8 $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i$; $z_2 = \frac{234 + 182i}{169} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$.

9 1. $\text{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = 3$; $\text{Re}(iz_1) = -2$;

$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{3}{10}$.

2. $\text{Im}\left(z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3\right) = -4,5$; $\text{Im}(z_1 z_2) = 7i$.

3. $|z_1| = \sqrt{13}$; $|z_2| = \sqrt{10}$; $|z_1 z_2| = \sqrt{130}$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{13}{10}}$.

10 1. $(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = (2i)^4 = 2^4$.

2. Il est sur la demi-droite $[O\vec{i})$.

11 $f(z) = z^2 - z = (x + iy)^2 - (x + iy)$
 $= (x^2 - y^2 + 2ixy) - (x + iy)$
 $= (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y)$.

12 1. $z = \frac{3-i}{1+i} = 1 - 2i$. **2.** $z = \frac{1+3i}{5}$.

3. $z = \frac{-1+i}{2}$ ou $z = \frac{-3}{i} = 3i$.

4. $z \neq 1$, $z + 1 = 2iz - 2i \Leftrightarrow z = \frac{-1-2i}{1-2i} = \frac{3-4i}{5}$.

13 $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$, donc :

• $P(i) = -i + (-2 + 3i)(-1) + (13 - i)(i) + (-6 - 10i)$
 $= -3 - i$ donc i n'est pas racine de P ;

• $P(3) = 27 + (-2 + 3i)9 + (13 - i)(3) + (-6 - 10i)$
 $= 42 + 14i$ donc 3 n'est pas racine de P .

$(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 + i)^3 = -2 + 2i$,

• $P(1 + i) = (-2 + 2i) + (-2 + 3i)(2i) + (13 - i)(1 + i)$
 $+ (-6 - 10i)$
 $= 0$ donc $1 + i$ est racine de P .

14 1. $(-i ; 2 - 2i)$; **2.** $(1 + i ; 2 - i)$; **3.** $(-1 ; 4i)$.

15 Corrigé dans le manuel.

2. Conjugué d'un complexe

16 a) $\bar{z} = 3 + 4i$. **b)** $\bar{z} = \frac{1}{-i-1} = \frac{-1+i}{2}$.

c) $\bar{z} = \frac{3+i}{1-i} = 1 + 2i$.

17 1. $z_1 + z_2$ représente $2\text{Re}(z_1)$ puisque $z_2 = \bar{z}_1$.
Pour la même raison, $z_1 - z_2 = 2i\text{Im}(z_1)$.

2. Par le calcul, $z_1 + z_2 = \frac{8}{5}$ et $z_1 - z_2 = \frac{6i}{5}$.

18 Corrigé dans le manuel.

19 1. $Z = (x + iy) - 2(x - iy) + 2 = (-x + 2) + i3y$.

2. $Z = 0 \Leftrightarrow y = 2$; $z = x + 2i$.

20 1. $Z - \bar{Z} = iz + \bar{z} - 3 - 2i - (-i\bar{z} + z - 3 + 2i)$
 $= (\bar{z} - z) + i(z + \bar{z}) - 4i$
 $= -iy + 2ix - 4i$
 $= 2i(x - y - 2)$.

2. Cela équivaut à $Z = \bar{Z}$ ie $Z - \bar{Z} = 0$
donc $0 = x - y - 2$ ie $y = x - 2$.

21 a) $\bar{z} = \frac{-1+i}{2}$, donc $z = \frac{-1-i}{2}$.

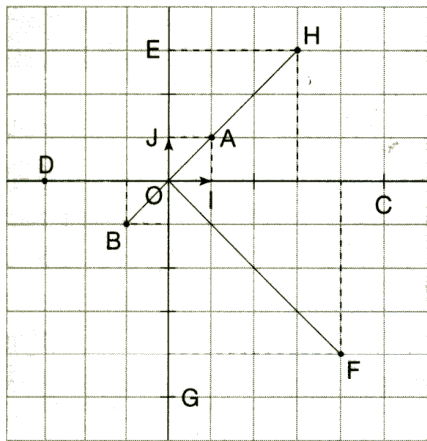
b) $z_1 = \frac{-1+i}{2}$ ou $\bar{z}_2 = \frac{-i+2}{i} = -1 - 2i$, soit $z_2 = -1 + 2i$.

c) $\bar{z} \neq 1$, $\bar{z} = \frac{1+i}{1-i} = i$ et $z = -i$.

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

22 $\arg z_A = \frac{\pi}{4}$, $\arg z_B = \frac{-3\pi}{4}$, $\arg z_C = 0$, $\arg z_D = \pi$,

$\arg z_E = \frac{\pi}{2}$, $\arg z_F = -\frac{\pi}{4}$, $\arg z_G = -\frac{\pi}{2}$, $\arg z_H = \frac{\pi}{4}$.



23 $z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right);$

$z_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right);$

$z_3 = 4\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right);$

$z_4 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right);$

$z_5 = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right);$

$z_6 = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right).$

24 Corrigé dans le manuel.

25 $z_A = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0);$

$z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right);$

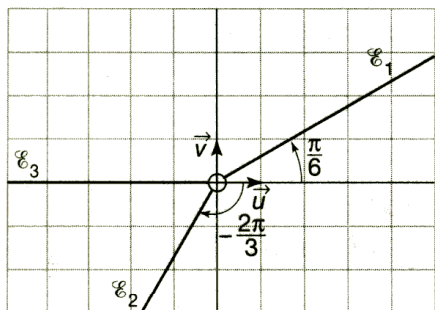
$z_C = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right);$

$z_D = -1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi);$

$z_E = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right);$

$z_F = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$

26



27 a) $z = 4 - 3i; |z| = 5; \cos \theta = \frac{4}{5}; \sin \theta = -\frac{3}{5};$
 $\theta = -0,64 \text{ rad.}$

b) $z = 1 + 2i; |z| = \sqrt{5}; \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}};$
 $\theta = 1,11 \text{ rad.}$

c) $z = -2 + i; |z| = \sqrt{5}; \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}};$
 $\theta = 2,68 \text{ rad.}$

4. Modules et arguments

28 $-z = r(\cos(\alpha + \pi) + i \sin(\alpha + \pi));$

$\bar{z} = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha));$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha));$

$z^3 = r^3(\cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha));$

$z^p = r^p(\cos(p\alpha) + i \sin(p\alpha));$

$\frac{1}{z^p} = \frac{1}{r^p}(\cos(-p\alpha) + i \sin(-p\alpha)).$

29 a) $|z| = 4; \arg z = -\frac{\pi}{2}.$

b) $|z| = 3; \arg z = \frac{\pi}{6} + \pi.$

c) $|z| = 4; \arg z = -\frac{2\pi}{5}.$

d) $|z| = 1; \arg z = \frac{\pi}{6}.$

30 Corrigé dans le manuel.

31 a) $\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right);$

b) $\cos \left(\frac{6\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{6\pi}{5} \right);$

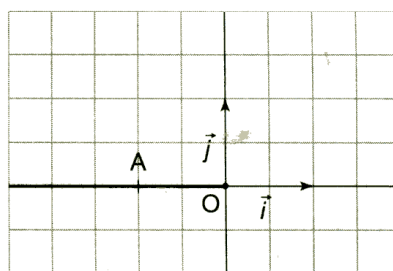
c) $\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} \right) \right) =$
 $\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{13\pi}{36} \right) + i \sin \left(\frac{13\pi}{36} \right) \right).$

d) $\left[\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right]^{2006} =$
 $(\sqrt{2})^{2006} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$

32 Corrigé dans le manuel.

33 1. $\arg(iz) = \arg i + \arg z \quad (z \neq 0)$
 $= \frac{\pi}{2} + \arg z.$

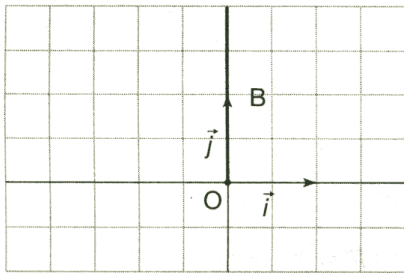
Ainsi $\arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$ éq. à $\arg z = \pi$ et ceci revient à dire que M est un point de la demi-droite]OA) où A(-1; 0).



$$2. \arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \arg z - \arg(1+i) \quad (z \neq 0)$$

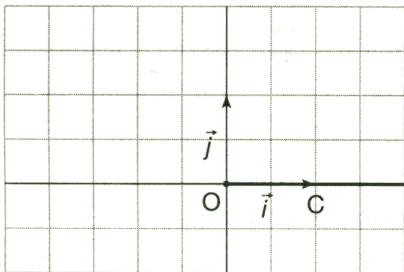
$$= \arg z - \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$ éq. à $\arg z = \frac{\pi}{2}$ et ceci revient à dire que M est un point de la demi-droite]OB) où B(0; 1).



$$3. \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (z \neq 0).$$

Ainsi $\arg(z) = \arg(\bar{z})$ éq. à $\arg(z) = 0$ et ceci revient à dire que M est un point de la demi-droite]OC) où C(1; 0).



5. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

34 Corrigé dans le manuel.

$$\mathbf{35} \quad z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}};$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}};$$

$$z_3 = (\sqrt{2}-1)e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{5\pi}{4}};$$

$$z_4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}};$$

$$z_5 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}.$$

$$\mathbf{36} \quad \mathbf{a)} \quad z = \frac{6e^{i0}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}};$$

$$\mathbf{b)} \quad z = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}};$$

$$\mathbf{c)} \quad z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}};$$

$$\mathbf{d)} \quad z = 12e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 12e^{-3i\frac{\pi}{4}};$$

$$\mathbf{e)} \quad z = \left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1024e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$\mathbf{f)} \quad z = \frac{\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = 2^7 \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}} e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{-i\pi}} = 128e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\mathbf{37} \quad \mathbf{1. a)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(-1-i)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\mathbf{b)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{13\pi}{12}}.$$

$$2. \text{ Donc } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11\pi}{12} (2\pi), \text{ d'où :}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{38} \quad \mathbf{1. c} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}},$$

$$d = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2. $b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_{\overline{OA}} = 1$ et $z_{\overline{BC}} = 1$ donc OACB est un parallélogramme.

$|OA| = |a| = 1$ et $|OB| = |b| = 1$ donc OABC est un losange.

$$\mathbf{39} \quad z_1 = e^{i\pi}e^{i\alpha} = e^{i(\pi+\alpha)}, |z_1| = 1 \text{ et } \arg(z_1) = \pi + \alpha;$$

$$z_2 = \cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha); |z_2| = 1 \text{ et } \arg(z_2) = \pi - \alpha;$$

$$z_3 = -i(\cos \alpha + i\sin \alpha) = e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha} = e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}, |z_3| = 1 \text{ et } \arg(z_3) = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

6. Équation du second degré à coefficient réels

40 Corrigé dans le manuel.

$$\mathbf{41} \quad \mathbf{1.} \Delta = -4, \{1 + \sqrt{2} - i; 1 + \sqrt{2} + i\}.$$

$$\mathbf{2.} \Delta = -4 \sin^2 \theta, \{\cos \theta + i\sin \theta; \cos \theta - i\sin \theta\}.$$

$$\mathbf{42} \quad z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de } z^2 - 2z + 5 = 0.$$

$$\mathcal{S} = \{(1-2i; 1+2i); (1+2i; 1-2i)\}.$$

43 Recherche d'ensemble**Les outils :**

- Nombres complexes conjugués.
- Module d'un complexe.
- Équation d'un cercle.

Les objectifs :

- Savoir choisir parmi des équivalences la mieux adaptée au problème.
- Savoir trouver analytiquement un lieu géométrique.

1. a) En utilisant les propriétés de la conjugaison :

$$\overline{Z_1} = \overline{\left(\frac{u - \bar{u}z}{1 - z}\right)} = \frac{\bar{u} - u\bar{z}}{1 - \bar{z}} = \frac{\bar{u} - u\bar{z}}{1 - \bar{z}}.$$

b) $Z_1 = \overline{Z_1}$ équivaut à $\frac{u - \bar{u}z}{1 - z} = \frac{\bar{u} - u\bar{z}}{1 - \bar{z}}$ ou encore à :

$$u - u\bar{z} - \bar{u}z + \bar{u}z\bar{z} = \bar{u} - u\bar{z} - \bar{u}z + u\bar{z}\bar{z},$$

soit à $(u - \bar{u})(1 - z\bar{z}) = 0$ ou $(u - \bar{u})(1 - |z|^2) = 0$.

2. a) Si $u - \bar{u} = 0$ (c'est-à-dire lorsque u est réel), alors tout nombre complexe, différent de 1, convient.

b) Si $u - \bar{u} \neq 0$, alors $z \in \mathcal{E}_1$ équivaut à $|z| = 1$, c'est-à-dire que M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, privé du point A d'affixe 1.

3. En posant $z = x + iy$:

$$Z = \frac{(x + iy) + i}{x + iy - i} = \frac{(x + iy + i)(x - iy + i)}{x^2 + (y - 1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2ix}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

4. a) $z \in \mathcal{E}_2$ équivaut à $\operatorname{Re}(Z_2) = 0$ soit $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

b) $\mathcal{E}_2$ est le cercle trigonométrique.

44 Suites et complexes**Les outils :**

- Conjugués, module et argument d'un nombre complexe non nul.
- Opérations sur modules et arguments.

Les objectifs :

- Savoir calculer une somme.
- Savoir vérifier que cette somme est un entier.

1. Puisque $(\overline{u^n}) = \bar{u}^n$, S_n est bien la somme de deux complexes conjugués et $S_n = 2 \operatorname{Re}(u^n)$.

2. a) $|u| = \sqrt{2}$ et $\arg u = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$.

b) $u = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$;

$$u^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right);$$

$$S_n = (\sqrt{2})^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

3. $S_n = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow n = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$

4. a) On note $s_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$; $s_0 = 1, s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, etc.

$$s_{n+8} = \cos\left(n\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = s_n.$$

b) $S_0 = 2, S_1 = 2, S_2 = 0, S_3 = -4, S_4 = -8, S_5 = -8, S_6 = 0, S_7 = 16$. Puis, comme :

$$S_{n+8} = \sqrt{2}^{n+8} \cos\left[(n+8)\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}^{n+2} (\sqrt{2})^8 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 16 S_n$$

et puisque S_n est un entier pour $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$, S_n est entier pour tout nombre entier.

Pour progresser

(page 337)

Calculs dans $\mathbb{C}$

45 **1.** $Z = 2z^2 - 2z + 4 = 2(x^2 - y^2 + 2ixy) - 2(x + iy) + 4$
 $= (2x^2 - 2y^2 - 2x + 4) + i(4xy - 2y) = X + iY.$

D'où $X = 2x^2 - 2y^2 - 2x + 4$ et $Y = 4xy - 2y$.

2. Z est réel équivaut à $Y = 0$, soit $2y(2x - 1) = 0$.

Si on appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble solution,

$z \in \mathcal{E}$ équivaut à $z = \frac{1}{2} + iy$ ($y \in \mathbb{R}$) ou $z = x$ ($x \in \mathbb{R}$).

46 **1.** $Z = 2\bar{z} - 2 + 6i = 2x - 2iy - 2 + 6i$
 $= (2x - 2) + i(-2y + 6).$

2. $Z = z \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = x \\ -2y + 6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2 + 2i.$

47 • **1.** $Z + \bar{Z} = \frac{10|z|^2 - 7(z + \bar{z}) + 4}{|z|^2 - (z - \bar{z}) + 1}.$

2. Z imaginaire pur équivaut à $Z + \bar{Z} = 0$ donc à $10|z|^2 - 7(z + \bar{z}) + 4 = 0$ et $z \neq 1$.

Cela revient à $10(x^2 + y^2) - 14x + 4 = 0$ et $(x; y) \neq (1; 0)$.

Or $10(x^2 + y^2) - 14x + 4 = 0$

s'écrit $(x - 0,7)^2 + y^2 = 0,09$.

Ainsi Z imaginaire pur équivaut à m appartient au cercle de centre $(0,7; 0)$ et de rayon 0,3 privé du point d'affixe 1.

48 • **1.** $-1, -i, 1, 1, i.$

2. La suite est périodique de période 4.

3. a) $1 + i, 0, i, 1 + i.$

b) $S_n - i S_n = (1 + i + \dots + i^n) - (i + i^2 + \dots + i^n + i^{n+1})$
 $= 1 - i^{n+1}.$

c) Alors $S_n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} = \frac{1+i}{2} (1 - i^{n+1}).$

En remplaçant successivement, on obtient : 1, 1 + i, i, 0.

49 • $z_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta, z_2 = 28 + 96i.$

50 • 1. $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \frac{(z - u\bar{z})(1 - \bar{u})}{(1 - u)(1 - \bar{u})}$
 $= \frac{z - \bar{u}z - u\bar{z} + \bar{z}}{(1 - u)(1 - \bar{u})} \text{ car } u\bar{u} = 1.$

Ce nombre est égal à son conjugué, donc il est réel.

2. Réciproque : $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel équivaut à $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}}$

ou $(z - \bar{z})(1 - u\bar{u}) = 0.$

Comme z est non réel $z - \bar{z} \neq 0$ donc $u\bar{u} = 1$ et la réciproque est vraie.

Équations dans $\mathbb{C}$

51 $(z - 1 - 2i)(z - 3 + 5i) = z^2 + (-4 + 3i)z + (13 + i);$
 $p = -4 + 3i, q = 13 + i.$

52 • On pose $Z = z^2.$

1. $\Delta = 1; Z_1 = -1$ et $Z_2 = -2$, d'où $\{i; -i; \sqrt{2}i; -\sqrt{2}i\}.$

2. $\Delta = 1600; Z_1 = 36$ et $Z_2 = -4$, d'où $\{6; -6; 2i; -2i\}.$

53 1. $(1 + i)^6 = [(1 + i)^2]^3 = (2i)^3 = -8i.$

2. a) $(1 + i)^3$ est solution car $(1 + i)^6 = [(1 + i)^3]^2 = -8i.$

b) $(-z)^2 = z^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc $-(1 + i)^3$ est aussi solution et $-(1 + i)^3 = -2i(1 + i) = 2 - 2i.$

3. $(1 + i)^2$ est solution.

54 • 1. $2 + 2i.$

2. $\frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$ (l'équation équivaut à $\begin{cases} 2z + i\bar{z} = 5 - 4i \\ -iz + 2\bar{z} = 5 + 4i \end{cases}.$

55 • 1. $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i.$

2. Cela équivaut à $-iz + 3i + 3 = 1 - i$

ou $-iz + 3i + 3 = 1 + i.$

Or $-iz + 3i + 3 = 1 - i$ équivaut à $z = 4 - 2i$

et $-iz + 3i + 3 = 1 + i$ équivaut à $z = 2 - 2i.$

Il y a donc deux solutions $4 - 2i$ et $2 - 2i.$

56 • 1. $\Delta = -4 \cos^2 \theta, \{e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}\}.$

2. $OA = |e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}| = 1.$

$OB = |e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}| = 1.$

$AB = |e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} - e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}| = |2i \cos \theta| = 2|\cos \theta|.$

Ainsi OAB est équilatéral équivaut à $|\cos \theta| = \frac{1}{2}$

soit à $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2n'\pi, n' \in \mathbb{Z} \right\}.$

57 2. $\{2i; \sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i\}.$

58 1. • $\Delta = -3; \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}.$

• $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1).$ Ainsi $z^3 - 1 = 0$ équivaut

à $z = 1$ ou $z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$

2. a) D'après le 1. $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$ donc

$j^2 = -1 - j = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$

$j^{2006} = j^{3 \times 668} j^2 = j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$

b) $S = 1 + j + j^2 + \dots + j^{2006} = \frac{1 - j^{2007}}{1 - j} \text{ car } j \neq 1$

$= \frac{1 - j^{3 \times 669}}{1 - j} = 0 \text{ car } j^3 = 1.$

59 • 1. $P(z) = z^4 + (a + 4)z^3 + (2a + 4a + b)z^2$
 $+ (2a^2 + 4b)z + 2ab,$

donc $a = -4$ et $b = 5.$

2. $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8) = 0; \Delta_1 = -4$ et $\Delta_2 = 48,$
donc : $\{2 + i; 2 - i; 2 + 2\sqrt{3}; 2 - 2\sqrt{3}\}$

60 • a) $P(z) = (z - 1)(z + 1)(z + i)(z - i).$

b) $\{1; -1; -i; i\}.$

c) En posant $Z = \frac{2z + 1}{z - 1}, (z \neq 1),$

$Z \in \{1; -1; i; -i\}$ et $z \in \left\{ -2; 0; \frac{-1 - 3i}{5}; \frac{-1 + 3i}{5} \right\}.$

61 • 1. $f(ib) = b^4 - 38b^2 + 261 + i(10b^3 - 90b).$

2. $f(ib) = 0$ éq. à $\begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0 \\ \text{et} \\ 10b^3 - 90b = 0 \end{cases}$ éq. à $\begin{cases} b = -3 \\ \text{ou} \\ b = 3 \end{cases}$

Ainsi $-3i$ et $3i$ sont des imaginaires purs solutions.

3. $\alpha = -10 \quad \beta = 29.$

4. $f(3) = 0$ équivaut à $z^2 + 9 = 0$ ou $z^2 - 10z + 29 = 0$ ce qui équivaut à $z = -3i$ ou $z = 5 - 2i$ ou $z = 5 + 2i.$

62 • 1. Variations de f sur $\mathbb{R} :$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
f	$-\infty$	M	m	$+\infty$

$$\alpha = \frac{-5 - \sqrt{10}}{3}, M = f(\alpha) \approx 7,3,$$

$$\beta = \frac{-5 + \sqrt{10}}{3}, m = f(\beta) \approx 2,6.$$

D'après l'étude des variations, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution réelle, située dans $]-\infty; \alpha[$.
Puisque $f(-4) = 0$, il s'agit de -4 .

2. a) $r \in \mathbb{R}$;

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 + 5r^3 + 5r^2 + 4r = 0 \\ r^3 + 5r^2 + 5r + 4 = 0 \end{cases}$$

Le système équivaut à : $r^3 + 5r^2 + 5r + 4 = 0$, d'où $r = -4$.

$$b) r \in \mathbb{R}; P(ir) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r^2(r-5)(2r-1) = 0 \\ (2r-1)(4-5r^2) = 0 \end{cases}$$

L'unique solution du système est $r = \frac{1}{2}$.

La solution imaginaire pure est donc $\frac{1}{2}i$.

$$c) P(z) = (z+4)\left(z - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + z + 1);$$

$$\mathcal{S} = \left\{-4; \frac{1}{2}i; j; \bar{j}\right\}.$$

63 • 1. • $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ est immédiat.

• Si $P(\alpha) = 0$, alors $\overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0$ et $P(\bar{\alpha}) = 0$.

2. $1+i$ et $1-i$.

3. $Q(z) = z^2 - 2z + 2$; $P(z) = Q(z) \times (z^2 - 4z - 13)$;
 $\mathcal{S} = \{1+i; 1-i; 2+3i; 2-3i\}$.

64 • 1. • P est à coefficients réels donc :

$$P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

• Zéro n'est pas racine de P .

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^4} P(\alpha) : \text{si } P(\alpha) = 0, \text{ alors } P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0.$$

2. $P(1+i) = 0$, donc autres racines :

$$\overline{1+i} = 1-i; \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}; \text{ ainsi que } \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{1+i; 1-i; \frac{1-i}{2}; \frac{1+i}{2}\right\}.$$

3. $P(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})(z-\beta)(z-\bar{\beta})$ avec :

$$\alpha = 1+i \text{ et } \beta = \frac{1+i}{2}.$$

En regroupant les facteurs conjugués :

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right).$$

Modules et arguments

65 $1 \leq r \leq 2$ et $\theta \in [0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

66 ① $\theta = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$; ② $\theta = \frac{3\pi}{4} [\pi]$; ③ $r = 2$;

④ $r \leq 2$; ⑤ $r \leq 2$ et $\theta \in [2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;

⑥ $1 \leq r \leq 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4} [\pi]$.

67 • 1. $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') + (z-z')(\bar{z}-\bar{z}')$

$$= 2z\bar{z} + 2z'\bar{z}'$$

$$= 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

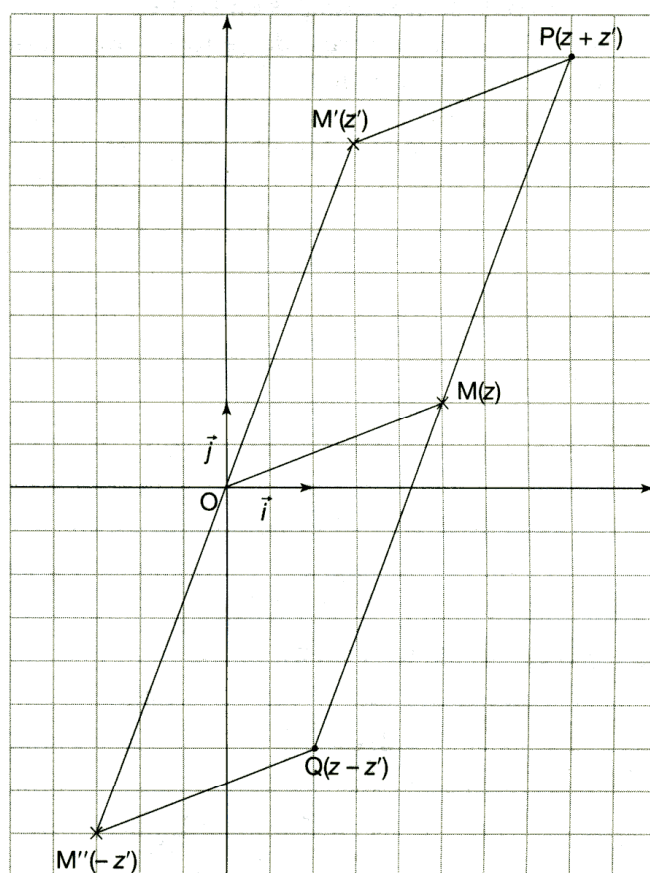
2. Notons M, M', P, M'', Q les points d'affixes respectives $z, z', z+z', -z', z-z'$ alors $OMPM'$ et $OMQM''$ sont des parallélogrammes.

L'égalité du 1. se traduit par

$$OP^2 + OQ^2 = 2(OM^2 + OM'^2) \text{ or } OQ = MM'$$

donc cela revient à $OP^2 + MM'^2 = 2(OM^2 + OM'^2)$.

Ainsi dans un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.



68 • 1. • $|z_1 z_2| = |ac - bd + i(ad + bc)|$
 $= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$

• $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$

Ainsi $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$

2. Avec $a = 5$; $b = 3$; $c = 11$ et $d = 1$ le 1. s'écrit
 $38^2 + 52^2 = 34 \times 122.$

69 • 1. a) $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

b) $1 + u = 1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 $= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right]$

2. a) OMPI est un parallélogramme car $z_P = z_M + z_I$.
b) Notons H le milieu de [OP] et [HI], alors $z_P = 2z_H$ (car $x_P = 2x_H$ et $y_P = 2y_H$). De plus le triangle OMI est isocèle en O et $OM = OI = 1$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

Ainsi $OH = \cos \frac{\theta}{2}$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OH}) = \frac{\theta}{2}$. Il en résulte que

$$z_H = \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right] \text{ d'où le résultat.}$$

70 • 1. $E(\frac{\pi}{2}) : z^2 - 2z + 5 = 0; \Delta = -16, \{1 - 2i; 1 + 2i\}$.

$$E(\frac{\pi}{6}) : z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0; \Delta = -4,$$

$$\{1 + \sqrt{3} - i; 1 + \sqrt{3} + i\}.$$

2. b) ABCD trapèze isocèle.

ABD rectangle en B.

c) ABD et ACD sont rectangles en B et C.

A, B, C, D sont sur le cercle de centre le milieu de [AD] d'affixe 1 et de rayon 2.

3. a) $\Delta = -16 \sin^2 \theta$;

$$\{1 + 2 \cos \theta - 2i \sin \theta; 1 + 2 \cos \theta + 2i \sin \theta\}.$$

$$\text{b) } |1 + 2 \cos \theta - 2i \sin \theta - 1|^2 = |2 \cos \theta - 2i \sin \theta|^2 = 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta = 4.$$

$$\text{Donc } |1 + 2 \cos \theta - 2i \sin \theta - 1| = 2$$

$$\text{et de même } |1 + 2 \cos \theta + 2i \sin \theta - 1| = 2.$$

Ce qui prouve que les points en question sont des points de $E(\theta)$.

$$\text{71} \bullet 1. \bullet z_1 = 2(1 + i), z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\bullet z_2 = 2i, z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\bullet z_3 = -1 + i, z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$\bullet z_4 = -1, z_4 = 1(\cos \pi + i \sin \pi).$$

$$\bullet z_5 = -\frac{1}{2}(1 + i), z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

$$2. \text{ a) } \Delta_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(1 + i)(z_{n+1} - z_n) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta_n.$$

b) (Δ_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\Delta_1 = 2\sqrt{2}$.

c) On en déduit que $\Delta_n = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$, puis :

$$\Delta_n < 10^{-2} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{n-4} > 100 \Leftrightarrow n \geq 18.$$

$$\text{72} \bullet 1. |z_n| = \left| \left(\frac{3}{4} \right)^n (-1 + i\sqrt{3}) \right| = \left(\frac{3}{4} \right)^n |-1 + i\sqrt{3}| = 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$\text{et } |z_n| = OM_n \text{ donc } OM_n = 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} OM_n = 0$ et M_n se rapproche de 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

$$2. z_n = -\left(\frac{3}{4} \right)^n + i \left(\frac{3}{4} \right)^n \sqrt{3} \text{ donc } \operatorname{Re}(z_n) < 0$$

$$\text{et } \operatorname{Im}(z_n) = -\sqrt{3} \operatorname{Re}(z_n)$$

donc M_n appartient à la demi-droite Δ .

$$\text{73} \bullet 1. z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i \right) z_n, z_n = z_0 \left(\frac{1}{2}i \right)^n.$$

$$\bullet z_0 = (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right);$$

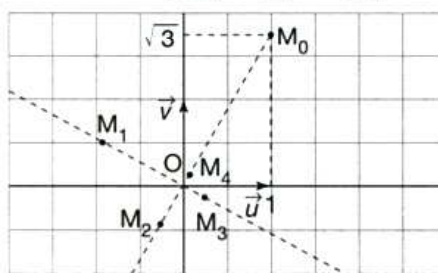
$$\bullet z_1 = (1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right);$$

$$\bullet z_2 = (1 + i\sqrt{3}) \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right);$$

$$\bullet z_3 = (1 + i\sqrt{3}) \left(-\frac{i}{8} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8} = \frac{1}{4} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right);$$

$$\bullet z_4 = (1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{16} \right) = \frac{1}{8} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

2.



$$3. OM_n = |z_n| = \left| \left(\frac{1}{2}i \right)^n (1 + i\sqrt{3}) \right| = \frac{1}{2^n} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$4. \text{ a) Comme } z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i \right) z_n,$$

$$\arg(z_{n+1}) = \arg \left(\frac{1}{2}i \right) + \arg z_n,$$

$$\text{soit } (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}).$$

Donc on obtient $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \frac{\pi}{2}$ et le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle en O.

À l'aide du théorème de Pythagore :

$$M_n M_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^n} \right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}.$$

b) L_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{5}$, de raison $\frac{1}{2}$.

$$L_n = \sqrt{5} \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right);$$

$$\frac{1}{2} \in]-1; 1[, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 2\sqrt{5}.$$

74 • 1. Vrai pour $n = 1$.

Supposons vrai pour $n, n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (a_n + ib_n)(a + ib) \\ &= (a_n a - b_n b) + i(a_n b + ab_n). \end{aligned}$$

en posant $a_{n+1} = a_n a - b_n b$ et $b_{n+1} = a_n b + ab_n$,

$z^{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$ donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, pour tout entier $n, n \geq 1$, la propriété est vraie.

2. Si $p = a^2 + b^2$ en posant $z = a + ib$ alors $p = |z|^2$.

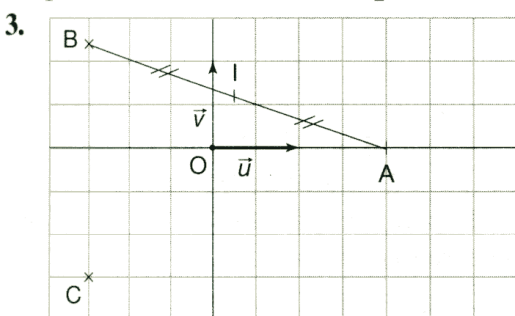
D'après le 1. $p^n = (|z|^2)^n = |z^n|^2 = a_n^2 + b_n^2$ et p^n s'écrit aussi comme la somme de deux carrés d'entiers.

75 • 1. • $P(2) = 0$ donc on peut mettre $z - 2$ en facteur dans $P(3)$.

$$\bullet a = 2\sqrt{2}; b = 4, P(z) = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4).$$

• $P(z) = 0$ équivaut à $z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ ce qui équivaut à $z = 2$ ou $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

$$2. z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2e^{3i\pi/4}; z_2 = 2e^{-3i\pi/4}.$$



$$4. z_3 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\bullet (\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4} \text{ et } OAB \text{ isocèle en } O \text{ donc } (\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}.$$

$$\bullet |z_3| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$5. z_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} e^{3i\pi/8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{donc } \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

Formes trigonométrique et exponentielle

76 1. Cercle de centre O et de rayon 3.

2. Demi-droite]OA) où $A(1; 1)$.

3. Droite (OB) où $B(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$$\bullet 1. a) e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 1 + e^{i\theta} \text{ donc}$$

$$z = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

$$b) \theta \in]-\pi; \pi[\text{ et } \frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ implique } \cos \frac{\theta}{2} > 0;$$

$$r = 2 \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z = \frac{\theta}{2}.$$

$$2. Z = \frac{1 + e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} (2 \cos \frac{\theta}{2})}{e^{i\theta}} = e^{-i\frac{\theta}{2}} (2 \cos \frac{\theta}{2});$$

$$|Z| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg Z = -\frac{\theta}{2}.$$

$$\bullet 1. \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right)}{1 + \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right)^2} = \frac{2 \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}},$$

$$\text{soit } \frac{2t}{1+t^2} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{2i \sin \theta}{2 \cos \theta} = i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

$$\bullet \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{4}{2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

$$\bullet \frac{2t}{1-t^2} = \frac{4i \sin \theta}{4} = i \sin \theta.$$

$$2. \text{ Comme } t = \frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = i \tan \frac{\theta}{2}, \left\{ \begin{array}{l} \frac{2i \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = i \tan \theta \\ \frac{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\cos \theta} \\ \frac{2i \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = i \sin \theta \end{array} \right.$$

et les résultats proposés en découlent.

$$\bullet 79 \bullet 1. z_1 = \sqrt{2} e^{-i\pi/6}, z_2 = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}, z = e^{i\pi/12}.$$

$$2. z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4};$$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}.$$

$$3. \text{ L'équation équivaut à } \cos \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Deux solutions dans } [-\pi; \pi]: -\frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{5\pi}{12}.$$

$$\bullet 80 \bullet 1. 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha} = 0.$$

$$A + B = AB - 1 \text{ donc } A \text{ et } B \text{ sont solutions de } X^2 + X - 1 = 0.$$

2. $\alpha^4 = \bar{\alpha}$, $A = \alpha + \bar{\alpha} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$.

3. $X^2 + X - 1 = 0$ a pour solutions :

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

A est l'un de ces réels. $A > 0$ car $\frac{2\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$, d'où :

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

81 • 1. $S - e^{i\frac{\pi}{5}} S = (1 - e^{i\frac{5\pi}{5}}) = 2$ d'où $S = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}}$.

$$\begin{aligned} 2. S &= \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{10}} \left(-e^{i\frac{\pi}{10}} + e^{-i\frac{\pi}{10}} \right)} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{10}}}{-2i \sin \frac{\pi}{10}} \\ &= \frac{-i \left(\cos \frac{\pi}{10} - i \sin \frac{\pi}{10} \right)}{-\sin \frac{\pi}{10}} \\ &= 1 + \frac{i}{\tan \frac{\pi}{10}}, \end{aligned}$$

d'où $C = 1$ et $S = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{10}}$.

82 • 1. a) $u = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\bar{u} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $S_n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^n$

$$S_n = \sqrt{2}^n \left[e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}} \right] \text{ (d'après Moivre)}$$

$$S_n = \sqrt{2}^{n+2} \cos n\frac{\pi}{4} \text{ (d'après formules d'Euler)}.$$

c) $S_n = 0$ équivaut à $\cos n\frac{\pi}{4} = 0$ donc à n est du type $4k + 2$ où $k \in \mathbb{Z}$.

d) Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ alors $\cos \left(n\frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(p\frac{\pi}{2} \right)$ ainsi $\cos \left(n\frac{\pi}{4} \right)$ vaut -1 ; 0 ou 1 .

Il s'ensuit que S_n vaut $-\sqrt{2}^{n+2}$; 0 ou $\sqrt{2}^{n+2}$ et S_n est bien un entier relatif.

2. a) • $(1 + i)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} i^k$

$$\bullet (1 - i)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-i)^k.$$

b) • $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1} = 0$

• $i^{2p} + (-i)^{2p} = 2(-1)^p.$

c) • $u^{24} + \bar{u}^{24} = \lambda_{24} \cos \left(24\frac{\pi}{4} \right) = \lambda_{24} = 2^{13}$ d'après le 1. b).

$$\begin{aligned} \bullet u^{24} + \bar{u}^{24} &= \sum_{k=0}^{24} \binom{24}{k} [i^k + (-i)^k] \\ &= \sum_{k=0}^{24} \binom{24}{2p} 2(-1)^p \text{ d'après le 2. b).} \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=0}^{24} \binom{24}{2p} 2(-1)^p = 2^{13}$

donc $\sum_{k=0}^{24} \binom{24}{2p} (-1)^p = 2^{12}.$

Recherche d'ensemble de points

83 • 1. $x' + iy' = (x + iy)^2 - 2(1 + i)(x + iy)$

équivaut à $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 2x + 2y \\ y' = 2xy - 2x - 2y \end{cases}$

2. M' sur l'axe des abscisses équivaut à $y = 0$ ie à

$2xy - 2x - 2y = 0$ donc à $y = \frac{x}{x-1}$. $\mathcal{H}$ est donc la courbe représentative de la fonction h :

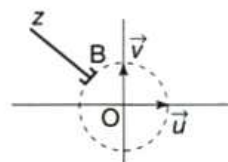
$$\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x-1}.$$

84 • 1. $|z'| \times |z| = 2$ et $\arg z' = \pi - \arg z$.

2. a) $M \in D \Leftrightarrow |z| \leq 2, (z \neq 0) \Leftrightarrow |z'| \geq 1$.

M' décrit donc le plan complexe privé de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1 .



b) $M \in]OA] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < |z| \leq 2 \\ \arg z = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \geq 1 \\ \arg z' = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

M' décrit la demi-droite $[Bz)$ avec $(\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ et $OB = 1$.

85 • Avec $z = x + y$, x et y réels,

$$z + \frac{1}{z} = x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + iy \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

Ainsi $z + \frac{1}{z}$ est réel équivaut à $y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$

donc à $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$.

L'ensemble est donc la réunion de l'axe des abscisses et du cercle unité.

86 • 1. $X = \frac{x^2 + y^2 + 3x - 2}{(1+x)^2 + y^2}$; $Y = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2}$.

2. L'axe des réels privé du point $A(-1)$.

3. Le cercle de centre $\Omega \left(-\frac{3}{2}; 0 \right)$ de rayon $\frac{1}{2}$, privé de A .

87 • 1. a) Z réel équivaut à $\text{Im}(Z) = 0$
donc à $2y - x + 4 = 0$.

L'ensemble est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$.

b) Z imaginaire pur équivaut à $\text{Re}(Z) = 0$ donc à $(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. L'ensemble est donc le cercle de centre $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

88 • 1. Deux invariants O et le milieu B de $[OA]$.

$$2. a) \frac{z^2}{i-z} = \frac{(x+iy)^2}{i-x-iy} = \frac{(x^2-y^2+2ixy)(-x-i+iy)}{x^2+(1-y)^2}.$$

D'où le résultat.

b) M' sur l'axe des imaginaires purs équivaut à :

$$M \neq A, x(x^2 + y^2 - 2y) = 0.$$

L'ensemble cherché est la réunion de l'axe des imaginaires purs et du cercle de centre $A(i)$, de rayon 1, A exclu.

$$\begin{aligned} 89 \bullet 1. \bullet Z &= \frac{2ix - 2y - i}{x + 1 + iy} \\ &= \frac{-3y + i(2x^2 + 2y^2 + x - 1)}{(x+1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \text{Re}(Z) = \frac{-3y}{(x+1)^2 + y^2},$$

$$\text{Im}(Z) = \frac{2x^2 + 2y^2 + x - 1}{(x+1)^2 + y^2},$$

$$\bar{Z} = \frac{-3y - i(2x^2 + 2y^2 + x - 1)}{(x+1)^2 + y^2}.$$

$$\bullet |Z| = \sqrt{Z\bar{Z}} = \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 - 4x + 1}{x^2 + y^2 + 2x + 1}}.$$

$$\bullet |Z| = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 3y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

L'ensemble $\mathcal{C}_1$ est donc le cercle de centre I , d'affixe 1, de rayon 1.

b) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

L'ensemble $\mathcal{C}_2$ est donc la droite d'équation $y = 0$, privée du point $A(-1; 0)$.

$$90 \bullet 1. z = re^{i\theta} \Rightarrow Z = \frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} = \frac{1}{r^2} e^{-2i\theta}.$$

$\bullet Z_0$ donné non nul,

$$\frac{z}{Z_0} = \frac{1}{Z_0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \frac{1}{|Z_0|} \\ 2\theta = -\arg Z_0 [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{|Z_0|}} \\ \theta = -\frac{1}{2} \arg(Z_0) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

z_0 existe toujours mais il n'est pas unique.

3. a) $z = e^{i\theta}, Z = e^{-2i\theta}$.
Si $(\vec{u}, \vec{OM}) = \theta$, alors $(\vec{u}, \vec{OM}) = -2\theta$.

$$\begin{aligned} b) z = Z &\Leftrightarrow e^{i\theta} = e^{-2i\theta} \\ &\Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\text{soit } \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

4. a) On note $(\vec{u}, \vec{u}^*) = \alpha$.

$$m \in d^* \Leftrightarrow \theta = \alpha [2\pi] \Leftrightarrow -2\theta = -2\alpha [4\pi].$$

M appartient à la demi droite d_1^* avec $(\vec{u}, \vec{u}_1^*) = -2\alpha$.

$$b) M \in d^* \Leftrightarrow -2\theta = \alpha [2\pi] \Leftrightarrow \theta = -\frac{\alpha}{2} [\pi].$$

Donc m appartient à la droite d_2 passant par O telle que $(\vec{u}, \vec{u}_2^*) = -\frac{\alpha}{2}$.

$$91 \bullet 1. Z = \frac{r^3 e^{i3\alpha}}{2 + r^3}, \text{ soit } \rho = \frac{r^3}{2 + r^3} \text{ et } \theta = 3\alpha.$$

2. a) $m \in \mathcal{C} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{3} \Rightarrow M$ appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon $\frac{1}{3}$. Comme α est quelconque, θ est quelconque et l'ensemble est $\mathcal{C}'$.

$$b) m \in [OT] \Rightarrow \arg z = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow \arg Z = -\frac{3\pi}{4} [6\pi].$$

Donc l'ensemble est la demi-droite $[OT')$ avec $T'(-1-i)$.

$$3. a) f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}, f'(x) = \frac{6x^2}{(2+x^3)^2} > 0; f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+; f(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \text{ donc :}$$

$$f(\mathbb{R}_+) = [0; 1[.$$

b) Donc lorsque m est un point quelconque, M est un point dont le module est inférieur strictement à 1 et le point M est un point du disque ouvert de centre O et de rayon 1.

92 • 1. $\forall z, f(z) = e^y \cdot e^{i\pi x}$ donc :

$$\bullet f(0) = e^0 e^{i0} = 1$$

$$\bullet f(i) = e^i e^{i0} = e$$

$$\bullet f(-i) = e^{-1} e^{i0} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet f(1+i) = e^1 e^{i\pi} = -e$$

$$\bullet f(1-i) = e^{-1} e^{i\pi} = -\frac{1}{e}.$$

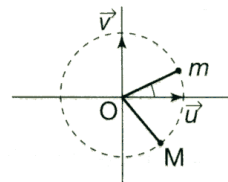
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e^y \neq 0$ et $e^{i\pi x} \neq 0$ donc $e^y e^{i\pi x} \neq 0$.
Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \bullet |f(z)| &= |e^y e^{i\pi x}| = |e^y| |e^{i\pi x}| \\ &= |e^y| \text{ car } |e^{i\pi x}| = 1 \\ &= e^y \text{ car } e^y > 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| = e^y$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{Arg}(f(z)) &= \arg(e^y e^{i\pi x}) \\ &= \arg(e^y) + \arg(e^{i\pi x}) \\ &= 0 + \pi x \text{ car } e^y \in]0; +\infty[. \end{aligned}$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, \arg(f(z)) = \pi x$.



$$\begin{aligned} 3. a) \forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, f(z + z') &= e^y + y' e^{i\pi(x+x')} \\ &= e^y e^{y'} e^{i\pi x} e^{i\pi x'} \\ &= e^y e^{i\pi x} \times e^{y'} e^{i\pi x'} \\ &= f(z) \times f(z'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z - z') &= e^{y-y'} e^{i\pi(x-x')} = e^y e^{-y'} e^{i\pi x} e^{-i\pi x'} \\ &= \frac{e^y e^{i\pi x}}{e^{y'} e^{i\pi x'}} = \frac{f(z)}{f(z')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \forall n \in \mathbb{Z}, f(nz) &= e^{ny} e^{i\pi nx} && \text{D'après Moivre.} \\ &= (e^y)^n (e^{i\pi x})^n \\ &= (e^y e^{i\pi x})^n = f(z)^n. \end{aligned}$$

$$4. a) \bullet M(z) \in L \text{ éq. à } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ éq. à } M(z) \in [AD] \text{ ou } M(z) \in [BC].$$

Conclusion : $L = [AD] \cup [BC]$.

• Dire que $M(f(z))$ où $z \in L$ éq. à dire que

$$\begin{cases} |f(z)| = e \\ \text{et} \\ -\pi \leq \text{Arg}(f(z)) \leq \pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |f(z)| = e^{-1} \\ \text{et} \\ -\pi \leq \text{Arg}(f(z)) \leq \pi \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble des points $N(f(z))$ où z est l'affixe d'un point de L est la **réunion** du cercle de rayon e et de centre O et du cercle de rayon e^{-1} de centre O .

$$b) \bullet M(z) \in K \text{ éq. à } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \text{ éq. à } M(z) \text{ appartient (au sens large) du carré } ABCD$$

Conclusion : $K =$ intérieur du carré $ABCD$.

• Dire que $M(f(z))$ où $z \in K$ éq. à dire que

$$\begin{cases} e^{-1} \leq |f(z)| \leq e \\ -\pi \leq \text{Arg}(f(z)) \leq \pi \end{cases}$$

Ce qui équivaut à dire que $M(z)$ est dans la couronne délimitée par les cercles de centre O et de rayon e^{-1} et e .

Prendre toutes les initiatives

93 • $Z^n + \bar{Z}^n = r^n e^{in\theta} + r^n e^{-in\theta} = r^n 2 \cos n\theta$ d'après Euler, et par récurrence :

$$Z_n = 2^n r^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos \theta \cos 2\theta \dots \cos n\theta.$$

$$\begin{aligned} 94 \quad 1 - e^{i\theta} &= e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \right) \\ &= e^{\frac{i\theta}{2}} \left[-2i \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ &= -2ie^{\frac{i\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\bullet |1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \text{ et } \frac{\theta}{2} \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right[\text{ donc } \sin \frac{\theta}{2} > 0$$

$$\text{donc } |1 - e^{i\theta}| = 2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Arg}(1 - e^{i\theta}) &= \arg(-2i) + \arg\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right) + \arg\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \\ \arg(1 - e^{i\theta}) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + 0 \left(\arg\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) = 0 \text{ car } \sin \frac{\theta}{2} > 0 \right) \\ \arg(1 - e^{i\theta}) &= \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

95 • $z = 0$ est solution.

• Pour $z \neq 0$, posons $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } z^2 &= (z^6)^{\frac{1}{3}} \text{ équivaut à } r^4 e^{-8i\theta} = 1 \text{ donc à } r = \pm 1 \text{ et } \\ \theta &= \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi les solutions sont les complexes de l'ensemble

$$\{0; e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \mathbb{Z}; -e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

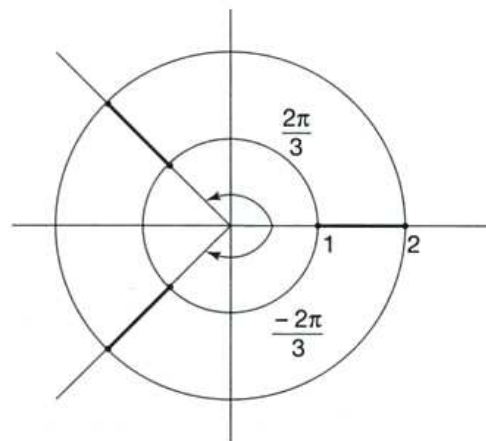
96 Posons $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z^3 &= r^3 e^{3i\theta} \text{ donc } z^3 \text{ réel et } 1 \leq z^3 \leq 8 \\ \text{équivaut à } 3\theta &= 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 \leq r^3 \leq 8 \\ \text{donc à } \theta &= \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 \leq r \leq 2. \end{aligned}$$

L'ensemble des z solutions est donc l'ensemble :

$$\{r, 1 \leq r \leq 2; k e^{\frac{2i\pi}{3}}, 1 \leq k \leq 2; k' e^{\frac{4i\pi}{3}}, 1 \leq k' \leq 2\}.$$

L'ensemble des points est donc :



$$97 \quad z' = -1 + \frac{i}{\tan \varphi}; |z'|^2 = \frac{i}{\sin^2 \varphi}, \text{ donc } |z'| = \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$\text{car } \varphi \in]0; \pi[, \varphi \neq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } z' = \frac{i}{\sin \varphi} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

98 Supposons qu'il existe z complexe tel que

$$|1 + z| < \frac{1}{2} \text{ et } |1 + z^2| \leq 1.$$

Avec $z = x + iy$, x et y réels, on obtient :

$$\bullet |1 + z^2| < 1 \text{ équivaut à } (x^2 + y^2) + 2(x^2 - y^2) < 0$$

ce qui implique $x^2 \leq y^2$

et

• $|1+z| < \frac{1}{2}$ équivaut à $x^2 + y^2 + 2x + \frac{3}{4} < 0$.

Ainsi ces deux conditions impliquent $2x^2 + 2x + \frac{3}{4} < 0$ d'où la contradiction.

99 • z est un complexe de module 1, $z \neq 1$, donc $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$.

En résolvant $e^{i\theta} = \frac{x+i}{x-i}$ on obtient $x = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ qui est un réel.

Ainsi en posant $x = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ on a bien $z = \frac{x+i}{x-i}$, x réel.

100 • $r \in \mathbb{R}$;

$$P(ir) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3r(r-4) = 0 \\ (r^2+18)(4-r) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r = 4.$$

• $P(z) = (z-4i)Q(z)$, avec $Q(z) = z^2 - 3z - 18$;
 $\mathcal{S} = \{4i; -3; 6\}$.

Problèmes

(page 348)

103 • A. 1. • $E_1 = \mathbb{R} - \{1\}$, $\gamma(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$;

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$\gamma(x)$		+	0	-	
γ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
			$+\infty$	4	$+\infty$

$$\gamma(E_1) =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[.$$

• $E_2 = \mathbb{R} - \{0\}$, $\psi(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\psi'(x)$		+	
ψ	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
		$+\infty$	$+\infty$

$$\psi(E_2) = \mathbb{R}.$$

B. 1. $f(z) = 3$

$$\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{3+i\sqrt{3}}{2}; \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \right\} = \left\{ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}; \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} \right\}.$$

2. a) $Z = \frac{(1+e^{i\theta})^2}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + 2 + e^{i\theta} = 2 \cos \theta + 2 = 2(1 + \cos \theta).$

101 • $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = e^{i\beta}$,

$$\begin{aligned} \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} &= \frac{(e^{i\alpha} + e^{i\beta})^2}{e^{i(\alpha+\beta)}} \\ &= \frac{\left[e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)} \right) \right]^2}{e^{i(\alpha+\beta)}} \\ &= 4 \cos^2 \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

102 • $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)} \right]$

$$e^{ia} + e^{ib} = 2e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cos \left(\frac{a-b}{2} \right).$$

$$\text{Donc } |e^{ia} + e^{ib}| = 2 \left| \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \right|$$

$$\arg(e^{ia} + e^{ib}) = \begin{cases} \frac{a+b}{2} & \text{si } \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) > 0 \\ \frac{a+b}{2} + \pi & \text{si } \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) < 0 \end{cases}.$$

Donc quand $\theta \in \mathbb{R}$, Z est réel et $Z \in [0; 4]$.

3. a) $Z = X + iY = \frac{(x^2 - y^2 + 2ixy)}{(x-1) + iy}$
 $= \frac{x^3 + y^2x - x^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{y(x^2 + y^2 - 2x)}{(x-1)^2 + y^2}.$

b) $m \in (OA) - \{A\} = d$, donc :

$$Z = \frac{z^2}{z-1} \text{ avec } z \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

D'après la partie A, Z est réel avec

$$Z \in]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[.$$

c) $m \in \Delta$ donc $z = 1 + iy$ avec $y \neq 0$.

$$Z = \frac{1 - y^2 + 2iy}{iy} = 2 + i \frac{y^2 - 1}{y}, M \text{ appartient donc à la}$$

droite d'équation $x = 2$. De plus, d'après la partie A, $\psi(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$ donc l'ensemble est la droite toute entière.

d) M décrit $(O; \vec{u})$ donc $Y = 0$ ou $y(x^2 + y^2 - 2x) = 0$ d'où m appartient à la droite d'équation $y = 0$ ($z \in \mathbb{R} - \{1\}$) ou m appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

104 • A. 1. $F(1) = A + B$; $F(i) = (A - B)i$

2. D'après le 1., $A + B = 0$ et $(A - B)i = 0$ donc $A = B = 0$.

B. 1. $(f_{a,b})(f_{a,b}(z)) = a(az + b\bar{z}) + b(a\bar{z} + bz) = (a^2 + b^2)z + 2ab\bar{z}.$

2. $f_{a,b}$ involutive équivaut à a et b vérifient $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$.

3. D'après le système précédent il y a 4 $f_{a,b}$ involutives : $f_{0,1} : z \mapsto \bar{z}$; $f_{0,-1} : z \mapsto -\bar{z}$; $f_{1,0} : z \mapsto z$ et $f_{-1,0} : z \mapsto -z$.

C. 1. Oui car $(g \circ g)(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} z \right) = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} z = z$.

2. $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ et $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$.

3. a) $M' = M$ équivaut à $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = y \end{cases}$

donc à $\begin{cases} y = (\sqrt{2}-1)x \\ y = \frac{1}{1+\sqrt{2}}x \end{cases}$

or $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ donc Δ est la droite d'équation

$y = (\sqrt{2}-1)x$ qui est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$.

4. Pour tout point M du plan,

$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = x' - x + (\sqrt{2}-1)(y' - y)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) - x + (\sqrt{2}-1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) - y \right) = 0.$$

Donc $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$.

5. a) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}((1+\sqrt{2})x+y)$; $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x+(\sqrt{2}-1)y)$

b) $I \in \Delta$ car $(\sqrt{2}-1)x_1 = (\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}}{4}((1+\sqrt{2})x+y)$
 $= \frac{\sqrt{2}}{4}(x+(\sqrt{2}-1)y) = y_1$.

6. M' est l'image de M dans la symétrie d'axe Δ .

C'est nouveau au bac (page 344)

105 1. $z^2 = 2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$
 $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$, réponse b.

2. $z^2 = 2\sqrt{2}(1-i) = 2\sqrt{2}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$, réponse b.

3. Posons $z = re^{i\theta}$, $r > 0$.

Alors $z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ équivaut à $r^2 = 4$ et $2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mais $x_z < 0$ et $y_z > 0$ donc $\theta = \frac{7\pi}{8}$ convient, réponse a.

106 1. Faux, contre-exemple $z = 1$.

2. Faux si $r < 0$.

3. Faux, contre-exemple $\theta = \pi$. $e^{i\pi} = -1$ et $e^{-i\pi} = -1$.

4. Vrai, $Z = 2iz$ équivaut à $\frac{Z}{z} = 2i$ donc à $\left| \frac{Z}{z} \right| = 2$

et $\arg\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5. Faux si $n \neq 0$, posons $z = (1+i)^n$ alors $\bar{z} = (1-i)^n$

donc $Z_n = \frac{z - \bar{z}}{2} = \frac{2i\text{Im}(z)}{2} = i\text{Im}(z)$

donc Z_n est un imaginaire pur si $n \neq 0$.

107 1. • Posons $Z = \frac{z}{z'}$, alors $z'Z = z$

et d'après le prérequis $\arg z = \arg z' + \arg Z$

donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

• Prenons $z = 1$ et $z' = z^2$ dans le 1. alors

$\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = \arg 1 - \arg z^2 = -\arg z^2$ car $\arg 1 = 0$.

En appliquant le prérequis avec $z = z'$ on en tire

$$\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2\arg z.$$

2. a) M décrit d privé de 0 équivaut à $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$;

ainsi cela revient à $\arg(z') = -\frac{2\pi}{3}$ donc M' décrit demi-droite privée de 0 dirigée par $\vec{t}$ tel que

$$(\vec{u}, \vec{t}) = -\frac{2\pi}{3}.$$

b) M' décrit d privé de 0 équivaut $\arg(z') = \frac{\pi}{3}$; ain
cela revient à $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$ donc M décrit la der
droite privée de 0 dirigée par $\vec{s}$ tel que $(\vec{u}, \vec{s}) = -\frac{\pi}{6}$.

Activités (page 346)

ACTIVITÉ 1

1. $z_A = 2 + i, z_B = 1 + i$.

2. $r = \frac{OB}{OA} = \frac{|z_B|}{|z_A|} = \frac{|z_B|}{|z_A|} = |Z|$.

$\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$
 $= \arg(z_B) - \arg(z_A)$
 $= \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg Z \text{ (modulo } 2\pi).$

3. $Z = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i, r = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

ACTIVITÉ 2

1. $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}_1$ équivaut à $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}_1$,
 d'où $z' = z + a$.

2. $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, d'où $z' = kz$.

3. 2. a) $z = x + iy, z' = -y + ix$. Conjecture : $z' = iz$.

b) $M(r; \theta), M' = (r'; \theta'), r = r', \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi).$

$z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'} \text{ d'où } z' = re^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = re^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}$

soit $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.

On retrouve $z' = iz$.

c) • $t = -\frac{\pi}{2}, z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z = -iz$.

• $t = \frac{\pi}{3}, z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

• $t = -\frac{\pi}{4}, z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z$.

Travaux dirigés (page 355)

TD 1

1. Par le quart de tour $R_{\left(P; -\frac{\pi}{2}\right)} : A \mapsto B$;

$b - p = -i(a - p) \text{ d'où } p = \frac{1}{2}[a(1 + i) + b(1 - i)].$

2. De même : $q = \frac{1}{2}[b(1 - i) + c(1 + i)]$;

$r = \frac{1}{2}[c(1 + i) + d(1 - i)]; s = \frac{1}{2}[a(1 + i) + d(1 - i)].$

3. $p + r = \frac{1}{2}[(1 + i)(a + c) + (1 - i)(b + d)] = q + s$.

D'où $q - p = r - s$; $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme.

TD 2

2. 1. a) R a pour affixe $r = i(a - p)$.

b) Par la rotation $R_{\left(Q; \frac{\pi}{2}\right)} : R \mapsto P$;

d'où $p - q = i(r - q)$.

On en déduit que $q = \frac{a(1 + i)}{2}$ (indépendant de p).

c) Or $P_0(a)$ et $Q_0(ia)$, donc Q est le milieu de $[P_0R_0]$.

2. Par la rotation $R_{\left(S; \frac{\pi}{2}\right)} : P \mapsto R$;

d'où $r - s = i(p - s)$.

On en déduit que $s = \left(p - \frac{a}{2}\right)(1 - i)$ [1].

Remarque : On peut aussi obtenir l'affixe s de S en remarquant que S est tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ d'où $s = p + r - q$.

3. a) On pose $s = x + iy, (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$.

De la relation [1] on déduit :
$$\begin{cases} x = p - \frac{a}{2} \\ y = -\left(p - \frac{a}{2}\right) \end{cases} [2].$$

b) On note Σ le lieu du point S.

Si $M \in \Sigma$, alors ses coordonnées sont telles que $y = -x$, donc S est contenu dans la droite Δ d'équation $y = -x$.

Mais M décrit-il toute la droite Δ ?

p décrit l'intervalle $[0; a]$ et :

$$0 \leq p \leq a \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \leq p - \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

M ne décrit que le segment de Δ défini pour les abscisses dans $\left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$.

Ainsi $\Sigma = [AB]$ avec $A\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ et $B\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.

TD 3

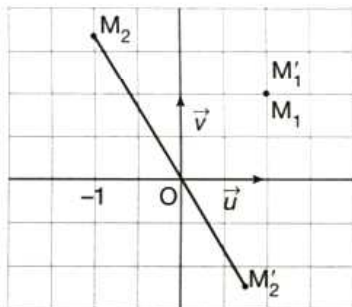
1 1. Pour $z \neq 0$, $z' = \frac{k}{\bar{z}} = \frac{k}{\bar{z}z} z = \frac{k}{|z|^2} z$ avec $\frac{k}{|z|^2} \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{d'où } \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM} \quad [1].$$

2. a) • Si $k > 0$, $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont non nuls, colinéaires de même sens, donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$ et en considérant les normes dans [1], $OM' \times OM = k$.

• Si $k < 0$, $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont non nuls, colinéaires de sens contraires, donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi$ et $OM' \times OM = |k| = -k$.

b) Application : $M'_1 = M_1$; $\overrightarrow{OM'_2} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{OM}$.



3. De [1] on déduit que M' est sur (OM) et :

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM}^2 = k \quad [2].$$

4. L'image de M' a pour affixe $\frac{k}{z'} = \frac{k}{\frac{k}{\bar{z}}} = \bar{z}$ donc l'image de M' est M .

Commentaire : L'inversion est une transformation involutive du plan privé de O : $\Phi \circ \Phi = \text{Id}$.

2 1. M désigne un point d'affixe z , $z \neq 0$.

$$M = \Phi(M) \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1.$$

L'ensemble des points invariants est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

2. a) M' est le projeté orthogonal de T sur (OM) donc :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}.$$

T est le projeté orthogonal de M sur (OT) donc :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT}^2 = OT^2.$$

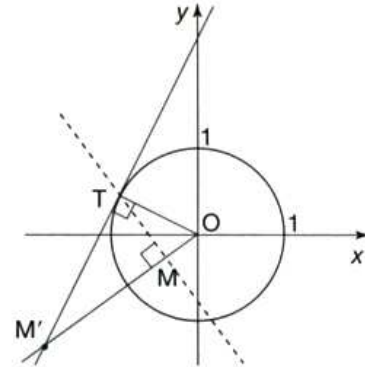
b) $M' \in (OM)$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = OT^2 = 1$; d'après [2] :
 $M' = \Phi(M)$.

3. Lorsque M est intérieur à $\mathcal{C}$, $M \neq O$:

– la perpendiculaire à (OM) coupe en M le cercle $\mathcal{C}$ en deux points T et T' ;

– (OM) coupe la perpendiculaire en T à (OT) en M' . Ainsi, $(M'T)$ est tangente en T au cercle $\mathcal{C}$; d'après

2.2., $M = \Phi(M')$ et d'après **1.4.**, $M' = \Phi(M)$.



3 2. a) Pour tout $z \neq 0$:

$$|z - i| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z'} - i \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |1 - iz'| = |z'|$$

$$\Leftrightarrow |(-i)(z' + i)| = |z'| \Leftrightarrow |z' + i| = |z'|.$$

Or, deux complexes conjugués ont même module d'où :

$$|z - i| = 1 \Leftrightarrow |z' - i| = |z'|.$$

Géométriquement, $AM = 1$ équivaut à $AM' = OM'$ d'où Γ' est la médiatrice de $[OA]$.

b) Pour tout $z \neq 0$:

$$|z - i|^2 = 2 \Leftrightarrow (z - i)(\bar{z} + i) = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z'} - i\right)\left(\frac{1}{z'} + i\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - iz')(1 + iz') = 2z'\bar{z}' \Leftrightarrow z'\bar{z}' + iz'\bar{z}' - iz'\bar{z}' - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z' + i)(\bar{z}' - i) - 2 = 0 \Leftrightarrow (z' + i)(\bar{z}' - i) = 2,$$

$$\text{soit } |z - i|^2 = 2 \Leftrightarrow |z' + i|^2 = 2.$$

Géométriquement, $AM^2 = 2 \Leftrightarrow BM'^2 = 2$,

soit $AM = \sqrt{2} \Leftrightarrow BM' = \sqrt{2}$, d'où Σ' est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

3. a) M désigne un point d'affixe z , $z \neq 0$;

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow AM^2 = AO^2 \Leftrightarrow |z - a|^2 = |a|^2$$

$$\Leftrightarrow (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = a\bar{a} \Leftrightarrow z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z = 0.$$

$$\text{b) } z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z'} \times \frac{1}{z'} - \frac{a}{z'} - \frac{\bar{a}}{z'} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - a\bar{z}' - \bar{a}z' = 0.$$

Ainsi $M(z)$ appartient à Γ équivaut à dire que $M'(z')$ appartient à l'ensemble des points d'affixe z' tels que :

$$1 - a\bar{z}' - \bar{a}z' = 0.$$

c) On pose $z' = X + iY$:

$$1 - \overline{az'} - \overline{az'} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - (\alpha + i\beta)(X - iY) - (\alpha - i\beta)(X + iY) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\alpha X - 2\beta Y = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha X + \beta Y = \frac{1}{2}.$$

d) D'après b) et c), Γ' est la droite d'équation :

$$\alpha X + \beta Y - \frac{1}{2} = 0.$$

Note : Par hypothèse, $\alpha \neq 0$, donc α et β ne sont pas simultanément nuls. $\vec{OA}(\alpha; \beta)$ est un vecteur normal à Γ' et donc Γ' est perpendiculaire à (OA) .

TD 4

1. a) Dans $\mathbb{C}^*$:

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$b) \bullet \theta_0 = 1, \theta_1 = \frac{2\pi}{3},$$

$$\theta_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Donc $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sont solutions de l'équation

$$z^3 = 1.$$

• Lorsque $k = 3p$ ($p \in \mathbb{Z}$),

$$\theta_k = \frac{2 \times 3p\pi}{3} = 2p\pi = \theta_0 \text{ (modulo } 2\pi);$$

lorsque $k = 3p + 1$,

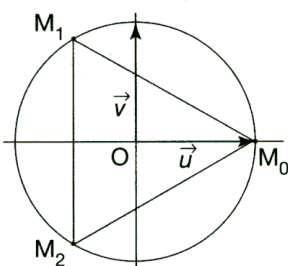
$$\theta_k = \frac{2 \times (3p + 1)\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2p\pi = \theta_1 \text{ (modulo } 2\pi);$$

lorsque $k = 3p + 2$,

$$\theta_k = \frac{2 \times (3p + 2)\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2p\pi = \theta_2 \text{ (modulo } 2\pi).$$

Ainsi les seules solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont celles indiquées ci-dessus.

c) La rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ a pour



écriture complexe $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

Par $R : M_0 \mapsto M_1, M_1 \mapsto M_2, M_2 \mapsto M_0$; R conserve les longueurs donc $M_0M_1 = M_1M_2 = M_2M_0$ et le triangle $M_0M_1M_2$ est équilatéral.

$$d) 1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Commentaire : La notion de suite géométrique complexe permet de retrouver ce résultat.

$S = 1 + j + j^2$ est la somme des trois premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison j ($j \neq 1$),

$$\text{d'où } S = \frac{1 - j^3}{1 - j}; \text{ or } j^3 = 1 \text{ donc } S = 0.$$

j est de module 1 donc $j\bar{j} = |j|^2 = 1$; d'où $j\bar{j} = j^3$

$$\text{donc } \bar{j} = j^2; \text{ or, } \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \text{ donc } j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$2. \text{ « ABC équilatéral direct » } \Leftrightarrow a - b = e^{i\frac{\pi}{3}} (c - b);$$

$$\text{or, } j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ donc :}$$

$$\text{« ABC équilatéral direct » } \Leftrightarrow a - b = -j^2(c - b) \\ \Leftrightarrow a + b(-1 - j^2) + cj^2 = 0,$$

$$\text{soit « ABC équilatéral direct » } \Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0.$$

$$3. a) M = M' \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \text{ réel} \Leftrightarrow M \in (Ox).$$

Donc $M \neq M'$ signifie que $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

b) Sous cette hypothèse, R, M et M' sont distincts deux à deux.

$M \in \Delta \Leftrightarrow RMM'$ équilatéral direct

$$\Leftrightarrow 1 + zj + \bar{z}j^2 = 0 \Leftrightarrow zj + \bar{z}j = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(zj) = -\frac{1}{2}.$$

Posons $z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \neq 1$ et $y \neq 0$, alors

$$\operatorname{Re}(zj) = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y).$$

$$\text{Ainsi, } M \in \Delta \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 1 = 0.$$

Donc Δ est la droite d'équation $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$, privée du point $R(1; 0)$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 360)

1. et 2. Affixe d'un vecteur

$$1 \quad 2. \overrightarrow{AB}(3), \overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right), \overrightarrow{BC}\left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i\right).$$

3. $AB^2 = 9, AC^2 = \frac{5}{2}, BC^2 = \frac{17}{2}$. ABC n'est pas un triangle rectangle.

$$2 \quad 2. \overrightarrow{AB}\left(\frac{4}{3} + 4i\right), \overrightarrow{AC}\left(\frac{8}{3} + 8i\right).$$

3. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc A, B et C sont alignés.

$$3 \quad 2. \overrightarrow{AB}(3,5 - 0,5i), \overrightarrow{DC}(3,5 - 0,5i) \text{ donc } ABCD$$

est un parallélogramme; de plus, $AB = AD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ donc $ABCD$ est un losange.

4 1. $|z_A| = |z_B| = 4$ donc $OA = OB = 4$.

2. O centre de gravité de ABC $\Leftrightarrow \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$
d'où :

$$z_C = -z_B - z_A = -4.$$

3. $AB = AC = BC = 4\sqrt{3}$ donc ABC est équilatéral.

5 1. $Z = 0$.

2. $z_G = \frac{a+b+c}{3} = 2+i.$

3. $\frac{a'+b'+c'}{3} = 2+i = z_G.$

6 $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$

d'où $\begin{cases} AC = AB \\ (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

7 $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ d'où $(\overline{AB}, \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}.$

$\overline{AB}(3; 4), \overline{AC}(4; -3), \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0.$

8 Corrigé dans le manuel.

9 1. $-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; 0; \pi.$

2. $\bullet \overline{FA}(3-2i); \theta$ est tel que $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

et $\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, d'où $\theta \approx -0,588.$

$\bullet \overline{AD}(-5-i); \theta = -2,944.$

Commentaire : Pour $\cos^{-1}$ l'intervalle de définition (calculatrice) est $[0; \pi]$; pour $\sin^{-1}$, il est de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; il faut veiller à ajuster le résultat dans le bon intervalle.

10 2. $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2};$

$(\overline{BC}, \overline{BA}) = \frac{\pi}{3}; (\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\pi}{6}.$

3. ABC est un triangle rectangle en B (demi-triangle équilatéral).

11 1. $\Omega A = |a - \omega| = |3 - 4i| = 5; \Omega B = \Omega C = \Omega D = 5.$

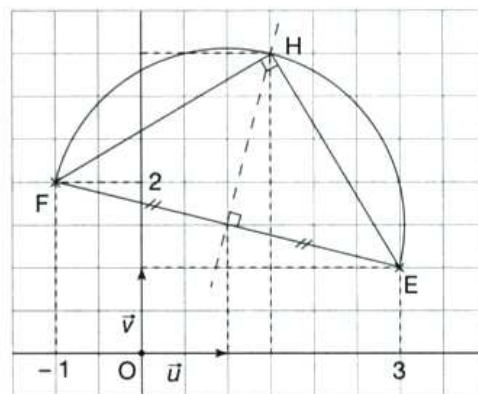
2. a) $e = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$

b) $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i.$

b) De l'égalité des arguments, on déduit :
 $(\overline{ED}, \overline{EA}) = (\overline{EA}, \overline{EC}).$

(EA) est la bissectrice de $\widehat{DEC}.$

12 1.



2. a) $|Z| = \frac{HE}{HF} = 1, \arg Z = (\overline{HF}, \overline{HE}) = \frac{\pi}{2}.$

b) $Z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ d'où $z_E - z_H = i(z_F - z_H).$

$z_H = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i.$

13 1. Une égalité entre vecteurs équivaut à celle de leurs affixes.

2. Si G est barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ alors pour tout point M :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

3. Si $M = O$ alors

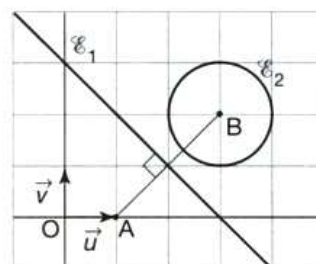
$$3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OA_1} - 2\overrightarrow{OA_2} + 5\overrightarrow{OA_3} - 3\overrightarrow{OA_4}.$$

D'où $z_G = \frac{3z_1 - 2z_2 + 5z_3 - 3z_4}{3}.$

Ainsi $z_G = 8 + \frac{4}{3}i.$

14 a) Médiatrice de [AB] : $\mathcal{E}_1.$

b) Cercle de centre B et de rayon 1 : $\mathcal{E}_2.$



15 1. $M \in \Gamma_B \Leftrightarrow BM \leq OB \Leftrightarrow |z - z_B| \leq |z_B|$
 $\Leftrightarrow |z - 2 - i| \leq \sqrt{5}.$

2. $M \in \Gamma_C \Leftrightarrow |z + 2 - i| \leq 2\sqrt{2}.$

3. L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'intersection des deux disques.

16 1. a) $M \in \Delta \Leftrightarrow |z - a| = |z - b|$
 $\Leftrightarrow |z - (-i)| = |z - 2 - i|.$

b) $M \in \Delta' \Leftrightarrow |z - 2 - 2i| = |z + 1 - 3i|.$

c) Cet ensemble est l'intersection des médiatrices Δ et Δ' , il est constitué du centre du cercle circonscrit à ABC .

2. a) $M \in P \Leftrightarrow |z + i| \geq |z - 2 - i| \Leftrightarrow AM \geq BM$.

P est le demi-plan de frontière Δ (incluse) contenant B .

b) P' est le demi-plan de frontière Δ' (incluse) contenant B .

c) $P \cap P'$ est un secteur angulaire.

17 Corrigé dans le manuel.

18 1. $A(3 - 2i)$ est l'origine de d_1 .

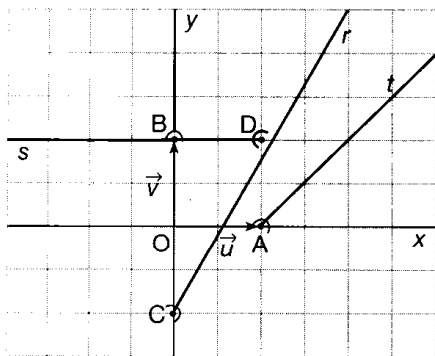
$$M \in d_1 \Leftrightarrow \arg(z - z_A) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z - 3 + 2i) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. M \in d_2 \Leftrightarrow \arg(z - 2 - i) = \pi;$$

$$M \in d_3 \Leftrightarrow \arg(z - 1 - 3i) = -\frac{3\pi}{4};$$

$$M \in d_4 \Leftrightarrow \arg(z + 1 + 2i) = \frac{3\pi}{4}.$$

19 $d_1 =]At)$; $d_2 =]By)$; $d_3 =]Cr)$; $d_4 =]Ds)$.



3. Écritures complexes des transformations

20 1. $z' = -1 + 4i$.

2. $z' = 3 + 3i$.

21 1. $z' = i\sqrt{2}$.

2. $z' = 1 - 7i$.

22 1. $z' = -\frac{7}{2} + i\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $z' = 1 - i$.

23 1. Translation de vecteur $\vec{w}(-1 + 3i)$.

2. Rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3. Homothétie de centre O et de rapport 2.

4. Réflexion d'axe (Ox) .

24 1. Symétrie de centre $I(1)$.

2. Rotation de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. Translation de vecteur $\vec{w}(4 - 3i)$.

4. Rotation de centre $\Omega(-1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

25 1. $\overline{AB}(2 + 3i)$; $z' = z + 2 + 3i$.

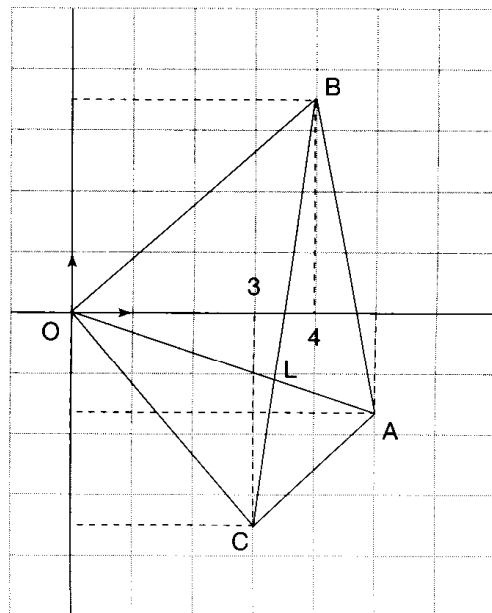
2. $k = -\frac{3}{2}$; $z' = -\frac{3}{2}z$.

26 1. Centre : $\Omega(i)$; angle : $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. $z' - 1 - i = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - 1 - i)$.

27 Corrigé dans le manuel.

28 1.



2. $b = e^{i\frac{\pi}{3}}a$ donc $b = 4 + 2i\sqrt{3}$.

$c = a - \frac{1}{2}b$ donc $c = 3 - 2i\sqrt{3}$.

3. a) $\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{OB}$ donc les droites (OB) et (AC) sont parallèles.

Les triangles LOB et LAC sont dans la configuration de Thalès donc homothétiques par h .

b) Rapport : $k = -\frac{1}{2}$. Notons ℓ l'affixe de L .

Par $h : O \mapsto A$ donc $a - \ell = -\frac{1}{2}(0 - \ell)$ d'où $\ell = \frac{2}{3}a$.

Ainsi $\ell = \frac{10}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

29 1. On vérifie que $b - c = i(a - c)$. Par la rotation $R_{\left(C; \frac{\pi}{3}\right)} : A \mapsto B$ donc ABC est un triangle rectangle isocèle en C .

2. a) Rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) $a' = 4(1 + i\sqrt{3})$, $b' = -2(1 + \sqrt{3}) + 2i(1 - \sqrt{3})$,

$c' = 2(\sqrt{3} - i)$.

3. a) $p = 2i(1 + \sqrt{3})$, $q = -(1 + \sqrt{3})(1 + i)$,

$r = 4 + \sqrt{3} - i$ d'où $e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p) = 4 + \sqrt{3} - i(3 + 2\sqrt{3}) = r - p$.

b) Par la rotation $R_{\left(P; \frac{\pi}{3}\right)} : Q \mapsto R$ donc PQR est un triangle équilatéral direct.

30 1. a) Par $R_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)} : N \mapsto A, B \mapsto Q$.

b) $a = in$ donc $n = -ia$; $q = ib$.

2. a) $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$ donc $r = n + q$.

b) D'où $r = i(b - a)$.

c) $\frac{r}{b - a} = i$ d'où par interprétation géométrique du module et d'un argument du quotient

$$\begin{cases} OR = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Apprendre à chercher

(page 363)

31 Étudier une configuration

Les outils :

- Écriture complexe d'une rotation.
- Interprétation géométrique d'un quotient.

Les objectifs :

- Établir une relation entre des distances.
- Démontrer l'orthogonalité de deux droites.

1. Par $R_{\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto B'$ donc $b' = -ib$.

Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)} : C \mapsto C'$ donc $c' = ic$;

$$m = \frac{b + c}{2}.$$

2. $Q = \frac{c' - b'}{m} = 2i$, d'où par interprétation géométrique :

$$\begin{cases} \frac{B'C'}{AM} = 2 \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

32 Recherche géométrique d'ensembles

Les outils :

- Argument d'un quotient
- Interprétation géométrique d'un argument
- Angles orientés et colinéarité ou orthogonalité de vecteurs.

Les objectifs :

- Déterminer des ensembles de points
- Exploiter l'argument d'un quotient
- Caractériser des ensembles de points à l'aide des angles orientés.

1. Pour $z \neq a$ et $z \neq b$,

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg \left(\frac{z - b}{z - a} \right).$$

2. a) « z' réel » signifie « soit $z' = 0$, soit lorsque $z' \neq 0$, $\arg z' = 0$ ou $\arg z' = \pi$ ».

D'où « $z' \in \mathbb{R}$ » équivaut à « $M = B$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$ ».

b) Δ est la droite (AB) privée de A. (Par hypothèse $M \neq A$).

3. « z' imaginaire pur »

signifie « soit $z' = 0$, soit lorsque $z' \neq 0$,

$$\arg z' = \frac{\pi}{2}$$

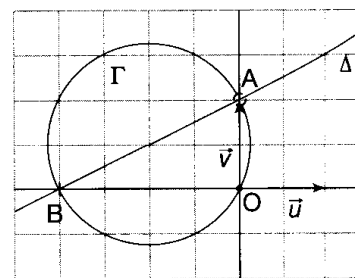
$$\text{ou } \arg z' = -\frac{\pi}{2} \text{ »}.$$

« z' imaginaire pur »

équivaut à « $M = B$

$$\text{ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} \text{ »}.$$

Γ est le cercle de diamètre [AB] privé de A.



33 Utiliser des quarts de tour

Les outils :

- Relations dans un parallélogramme
- Écriture complexe d'une rotation
- Caractérisation d'un triangle rectangle isocèle.

Les objectifs :

- Reconnaître des figures clés associées à un quart de tour
- Traduire une propriété géométrique à l'aide d'une transformation.

1. a) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ donc $b = a + c$.

b) Par $R_{\left(C; -\frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto M$ donc $m - c = -i(b - c)$ d'où

$$m = c - ia.$$

c) Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto N$ donc $n - a = i(b - a)$ d'où

$$n = a + ic.$$

2. $n = im$. Ainsi par $R_{\left(D; \frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto N$ donc DMN est un triangle rectangle isocèle direct en D.

34 Trouver des lieux géométriques

Les outils :

- Argument d'un quotient.
- Caractérisation d'une demi-droite ouverte par $\arg(z - a) = \theta$.

Les objectifs :

- Déterminer un ensemble de points.
- Utiliser des conditions angulaires.
- Examiner des cas particuliers.

1. a) $M = M' \Leftrightarrow z(1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
 $M = M'' \Leftrightarrow z(1-z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$.
 b) Lorsque $z \neq 0$ et $z \neq 1$,

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = \arg\left(\frac{z^2 - z}{iz - z}\right) = \arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right);$$

M, M', M'' alignés équivaut à $\arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right) = 0$ ou π [1].

c) $\arg(i-1) = \frac{3\pi}{4}$, donc la condition [1] s'écrit aussi $\arg(z-1) - \arg(i-1) = 0$ ou π , donc M, M', M'' alignés équivaut à $\arg(z-1) = \frac{3\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$ [2].

2. L'ensemble des points M définis par [2] est la droite passant par I , dirigée par $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{\pi}{4}$, privée de I . Or O et I sont, d'après 1. a), aussi deux solutions particulières donc Δ est la réunion de cette droite d et de l'origine O .

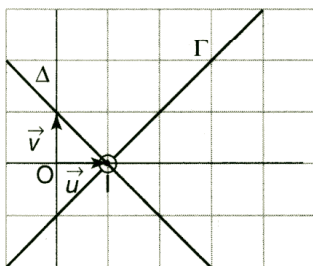
3. $M \in \Gamma$ équivaut à $M' \neq M, M'' \neq M$ et :

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } +\frac{\pi}{2},$$

soit $M \neq O, M \neq I$ et $\arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $+\frac{\pi}{2}$,

et donc $M \neq O, M \neq I$ et $\arg(z-1) = \frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$.

Ainsi Γ est la droite passant par I dirigée par $\vec{t}$ tel que $(\vec{u}, \vec{t}) = \frac{\pi}{4}$, privée de I .



35 Longueur d'une ligne brisée

Les outils :

- Interprétation géométrique des complexes.
- Suite géométrique, somme des termes.

Les objectifs :

- Établir un programme de construction.
- Calculer la longueur d'une ligne polygonale.
- Examiner la convergence d'une suite.

1. a) **Conjecture** : les triangles $OA_k A_{k+1}$ sont rectangle en O .

b) Pour tout entier naturel k , $a_{k+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)a_k$, donc :

$$\begin{cases} |a_{k+1}| = \frac{1}{2}|a_k| \\ \arg a_{k+1} = \frac{\pi}{2} + \arg a_k \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} OA_{k+1} = \frac{1}{2}OA_k \\ (\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1)$$

c) Connaissant A_k , la construction de A_{k+1} est immédiate d'après (1).

$$\begin{aligned} 2. a) A_{k+1}A_{k+2} &= |a_{k+2} - a_{k+1}| = \left|\frac{1}{2}ia_{k+1} - \frac{1}{2}ia_k\right| \\ &= \frac{1}{2}|a_{k+1} - a_k| = \frac{1}{2}A_kA_{k+1} \end{aligned}$$

soit $d_{k+1} = \frac{1}{2}d_k$.

b) (d_k) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $d_0 = 4\sqrt{5}$.

c) L_n est la somme des n premiers termes de cette suite géométrique ;

$$L_n = 8\sqrt{5} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 8\sqrt{5}.$$

Prolongement : on pose $s_k = \text{aire}(OA_k A_{k+1})$, (s_k) est une suite géométrique de raison $q' = \frac{1}{4}$ et de premier terme $s_0 = 16$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$

Pour progresser

(page 365)

Vecteurs et affixes

$$\begin{aligned} 36 \quad ABCD \text{ parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\Leftrightarrow b - a = c - d \\ &\Leftrightarrow a + c = b + d. \end{aligned}$$

Note : Cette équivalence peut aussi être établie à partir de la propriété caractéristique des diagonales.

37 1. b) $OA = OB$ donc OAB est un triangle isocèle.

$$c) (\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{8}.$$

$$2. a) z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

$$b) \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$38 \quad 1. a) a = 1, b = 3, c = 3 + i.$$

$$b) \alpha = \arg c = \arg(3+i), \beta = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{2+i}{2}\right).$$

$$2. \alpha + \beta = \arg \frac{(3+i)(2+i)}{2}, \text{ d'où } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

$$39 \quad \alpha = \arg d = \arg(8+i), \beta = \arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{5+i}{3}\right)$$

$$\gamma = \arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{2+i}{2}\right).$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg \frac{(8+i)(5+i)(2+i)}{2} \text{ d'où } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

40 Corrigé dans le manuel.

Ainsi $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{a}\right) = \arg z = 0 \text{ ou } \pi [2\pi]$

donc $M' \in (OA)$.

Par hypothèse, $A \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ donc d'après **B. 1. c)** le triangle OMM' est rectangle en M' , ainsi M' est le projeté orthogonal de M sur (OA) (droite confondue avec (OM')).

Ensemble de points

45 1. $M \in \Gamma \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + 3i|^2 = 2$

$$\Leftrightarrow |(x-2) + i(-y+3)|^2 = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2;$$

Γ est le cercle $\mathcal{C}(I; \sqrt{2})$ avec $I(2+3i)$.

2. $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - 2 - 3i| = \sqrt{2}$. On retrouve $\mathcal{C}(I; \sqrt{2})$.

46 1. $M \in \Delta \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + i|^2 = |z + 3 - 2i|^2$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (-y+1)^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 5x - y + 4 = 0.$$

Δ est la droite d'équation $5x - y + 4 = 0$.

2. $M \in \Delta \Leftrightarrow |z - 2 - i| = |z + 3 - 2i|$.

Δ est la médiatrice de $[AB]$, où $A(2+i)$, $B(-3+2i)$.

47 Corrigé dans le manuel.

48 • a) $\Gamma : (x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$;

$\Gamma = \mathcal{C}(I; 5)$ avec $I(-3-4i)$.

b) $\Gamma : 4x - 6y - 15 = 0$;

Γ : médiatrice de $[AB]$ avec $A(2+i)$, $B(4-2i)$.

49 • On suppose $M \in \Gamma$ soit $z\bar{z} = 1$.

Note : Sous cette hypothèse, nécessairement $z \neq -\frac{1}{2}i$.

$$\text{Alors } z'z' = \frac{z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) + 4}{4z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) + 1} = 1, \text{ donc } M' \in \Gamma.$$

On suppose $M' \in \Gamma$ d'où $|z + 2i|^2 = |1 - 2iz|^2$.

Note : Par hypothèse, $z \neq -\frac{1}{2}i$.

On en déduit $(z+2i)(\bar{z}-2i) = (1-2iz)(1+2i\bar{z})$, d'où :
 $z\bar{z} = 1$ donc $M \in \Gamma$.

Remarque : $M \in \Gamma \Leftrightarrow M' \in \Gamma$.

50 • Corrigé dans le manuel.

51 • a) $m \in \Delta$ où Δ est la médiatrice de $[AB]$,
 $A(3+i)$, $B(-2i)$ (méthode géométrique).

i) $m \in \Gamma$ où Γ est le cercle d'équation
 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 8$ (méthode analytique).

) $m \in \Gamma$ où Γ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$

travé de $A(-2i)$ et $B(3+i)$ défini par $(\overrightarrow{mA}, \overrightarrow{mB}) = \frac{\pi}{2}$
(méthode géométrique).

52 • 1. a) $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (x+iy)^2 - 4 = 4 - (x-iy)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

) Vérification immédiate : $A \in \mathcal{H}$, $B \in \mathcal{H}$, $C \in \mathcal{H}$.

2. a) La rotation r a pour écriture complexe $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} z$
d'où :

$$a' = \sqrt{2}(1-i), b' = \frac{1}{2}[-3\sqrt{2} - \sqrt{10} + i(3\sqrt{2} - \sqrt{10})],$$

$$c' = \frac{1}{2}[-3\sqrt{2} + \sqrt{10} + i(3\sqrt{2} + \sqrt{10})].$$

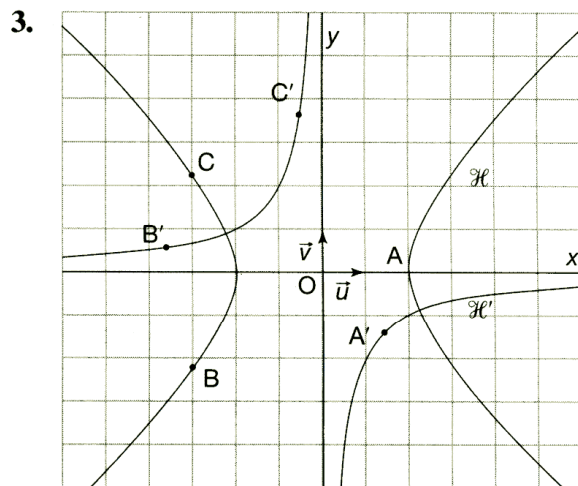
$$\text{b) } z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} z \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}} z'$$

$$\Leftrightarrow x + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x' + iy').$$

$$\text{D'où les relations : } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}.$$

$$M' \in \mathcal{H}' \Leftrightarrow M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 4 \Leftrightarrow x'y' = -2.$$



53 • 1. a) $(z-7i)(z+i) = z^2 - 6iz + 7$.

b) Dans $\mathbb{C} - \{3i\}$: $f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 6iz + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow (z-7i)(z+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 7i \text{ ou } z = -i.$$

f admet deux points invariants $B(-i)$ et $C(7i)$.

2. a) Σ est le cercle de centre $A(3i)$ et de rayon 4.

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow AM = 4 \Leftrightarrow |z - 3i| = 4.$$

Ainsi $z - 3i = 4e^{i\theta}$ soit $z = 3i + 4e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

Note : La condition $M \neq B$ et $M \neq C$ signifie que

$\theta = \arg(z - 3i) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ est tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

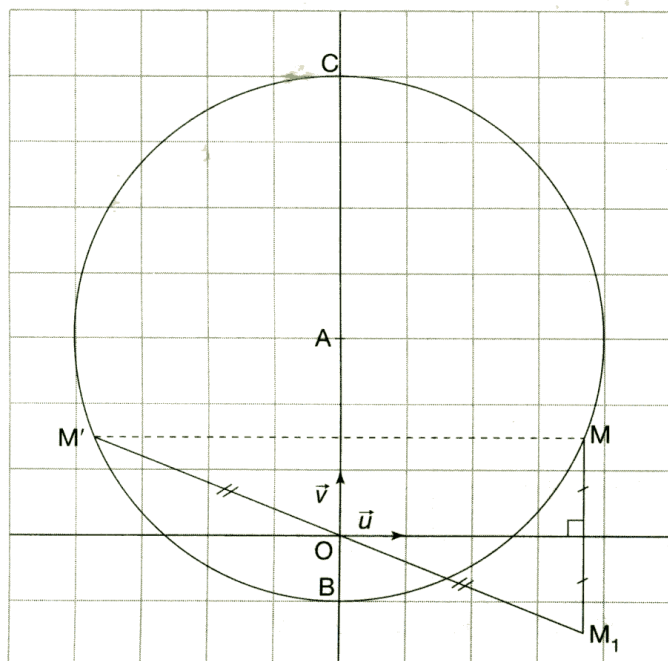
$$\text{b) } z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i} = \frac{3i(3i + 4e^{i\theta}) - 7}{4e^{i\theta}} = 3i - 4e^{-i\theta} = 3i + 4e^{i(\pi-\theta)}.$$

Ainsi $|z' - 3i| = 4$ donc $M' \in \Sigma$.

$$\text{c) } z' + \bar{z} = 3i + 4e^{i(\pi-\theta)} - 3i + 4e^{-i\theta} = 4(e^{i(\pi-\theta)} + e^{-i\theta}) = 4(-e^{-i\theta} + e^{-i\theta}) = 0$$

donc $z' = -\bar{z}$.

Construction de M' :



Pour tout point $M(z)$ de $\Sigma - \{B, C\}$, plaçons $M_1(\bar{z})$ symétrique de M par rapport à l'axe réel ; alors l'égalité $z' = -\bar{z}$ se traduit par $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM_1}$ ce qui prouve que M' est le symétrique de M_1 par rapport à O .

Remarque : Notons $S_{(Ox)}$ la réflexion d'axe réel et S_O la symétrie de centre O .

$$\text{Alors } M \xrightarrow{S_{(Ox)}} M_1 \xrightarrow{S_O} M'.$$

$$\text{Ainsi } M' = (S_O \circ S_{(Ox)})(M).$$

Or $S_O \circ S_{(Ox)} = S_{(Oy)}$ donc M' est le symétrique de M par rapport à (Oy) .

3. Notons Γ le cercle de centre $A(3i)$ et de rayon r ($r > 0$) et Γ' l'image de Γ par f .

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow z = 3i + re^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

M' et Γ' signifie qu'il existe $M \in \Gamma$ tel que $M' = f(M)$ donc $M' \in \Gamma'$ équivaut à

$$z' = \frac{3i(3i + re^{i\theta}) - 7}{re^{i\theta}} = 3i - \frac{16}{r}e^{-i\theta} = 3i + \frac{16}{r}e^{i(\pi - \theta)}$$

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $\pi - \theta$ décrit $\mathbb{R}$ donc Γ' est le cercle de centre A et de rayon $\frac{16}{r}$.

54 • Notons a, b, c les affixes de A, B, C .

1. a) $b' = 1 + i = b$ et $c' = -1 + i = c$. Ainsi B et C sont invariants par f .

b) Pour tout $z \neq i$, $(z' - i)(z - i) = 1$. (Immédiat)

c) Par interprétation géométrique : $AM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 [2\pi]$.

D' est tel que : $AD' = \frac{1}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (demi-diagonale du carré unité) et $(\vec{u}, \overrightarrow{AD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{4}$.

2. Notons Γ le cercle de centre A et de rayon r et Γ' son image.

$$M \in \Gamma_A \Leftrightarrow z = i + re^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

$$M' \in \Gamma' \text{ équivaut à } z' = \frac{i(i + re^{i\theta}) + 2}{re^{i\theta}} = i + \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$ alors $-\theta$ décrit $\mathbb{R}$ donc Γ' est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{r}$.

3. a) Si $z = iy$ ($y \neq 1$) alors $z' = \frac{-y + 2}{i(y - 1)} = i\frac{y - 2}{y - 1}$ est imaginaire pur.

Remarque : $u : t \mapsto \frac{t - 2}{t - 1}$ est une bijection de $\mathbb{R} - \{1\}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

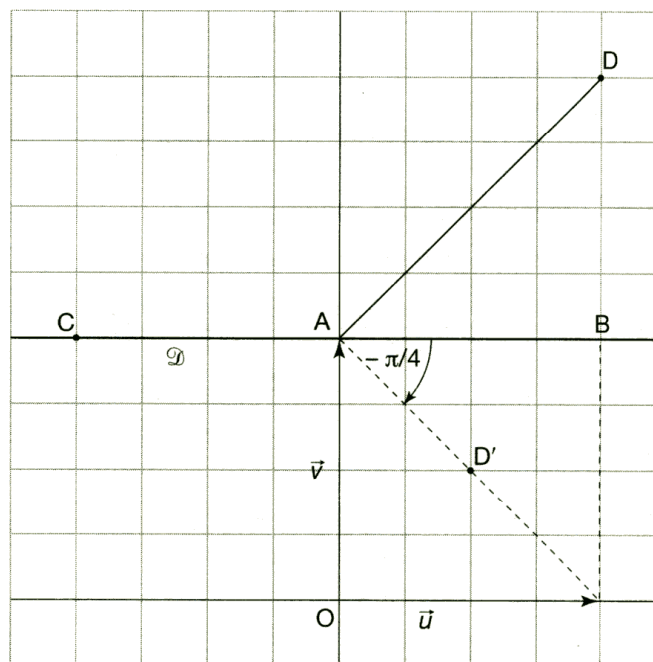
t	$-\infty$	1	$+\infty$
u'	$+$		$+$
u	1	$+\infty$	1

Si z décrit $i\mathbb{R} - \{i\}$ alors z' décrit lui aussi $i\mathbb{R} - \{i\}$. Ainsi l'image de l'axe imaginaire pur privé de A est lui-même.

b) Tout point de $\mathcal{D} - \{A\}$ a une affixe du type $z = x + i$

$$(x \neq 0) ; \text{ alors } z' = \frac{1 + ix}{x} = \frac{1}{x} + i.$$

Si x décrit $\mathbb{R}^*$ alors $\frac{1}{x}$ décrit $\mathbb{R}^*$. Ainsi l'image de $\mathcal{D} - \{A\}$ est $\mathcal{D} - \{A\}$.



55 • ① : Les régions ① et ② sont définies comme l'intersection d'un demi-plan, dont la frontière est la médiatrice de $[OA]$, et du disque de centre A et de rayon AO .

$$\textcircled{1} : \begin{cases} |z| \leq |z - 1 + 2i| \\ |z - 1 + 2i| \leq \sqrt{5} \end{cases} \quad \textcircled{2} : \begin{cases} |z| \geq |z - 1 + 2i| \\ |z - 1 + 2i| \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

② : Les régions ① et ② sont définies comme l'intersection d'un disque et de l'extérieur d'un autre.

$$\textcircled{1} : \begin{cases} |z - 1| \leq \sqrt{2} \\ |z - 2 + i| \geq \sqrt{5} \end{cases} \quad \textcircled{2} : \begin{cases} |z - 1| \geq \sqrt{2} \\ |z - 2 + i| \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

56 1. Calcul immédiat.

2. a) $\vec{w}$ colinéaire à $\vec{w}' \Leftrightarrow xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow \overline{ZZ}'$ réel $\Leftrightarrow \overline{ZZ}' = ZZ'$.

b) $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{w}' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$
 $\Leftrightarrow \overline{ZZ}'$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{ZZ}' = -ZZ'$.

3. Application : $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\text{a) } M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \bar{z} \times \frac{1}{z} = z \times \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \bar{z}^2 - z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = z \text{ ou } \bar{z} = -z.$$

Donc $\mathcal{E}$ est la réunion de l'axe réel et de l'axe des imaginaires pur privée de O.

$$\text{b) } M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{z} \times \frac{1}{z} = -z \times \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \bar{z}^2 + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z} + iz)(\bar{z} - iz) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -iz \text{ ou } \bar{z} = iz.$$

On pose $z = x + iy$, $\bar{z} = -iz$ équivaut à $y = x$ et $\bar{z} = iz$ équivaut à $y = -x$.

Donc $\mathcal{F}$ est la réunion des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ privée de O.

57 1. a) $\Phi(i; 3) = 0$, $\Phi(1 + 2i; -2 + 2i) = 4$,

$$\Phi(2 + i; -3 + 2i) = -8, \Phi\left(e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 0.$$

b) $\overline{\Phi(z; z')} = \Phi(\bar{z}; \bar{z}')$ donc $\Phi(z; z') \in \mathbb{R}$.

2. a) $\Phi(z; z') = 2(xx' + yy')$.

b) $M \in \Delta \Leftrightarrow \Phi(z; 1 + i) = 2\sqrt{2}$.

Δ est la droite d'équation $y = -x + \sqrt{2}$.

3. a) $\Phi(z; z') = 2rr' \cos(\theta - \theta')$. b) $\Phi(z; z) = 2r^2$.

c) $M \in \Gamma \Leftrightarrow \Phi(z; z) = 2 \Leftrightarrow r = 1$. Γ est le cercle $\mathcal{C}(O; 1)$.

d) Γ et Δ ont un seul point commun $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ils sont tangents en I.

58 1. a) $O \mapsto B$; le point d'affixe $2-i$ a pour image C.

b) $z = 1$ ou $z = -1$.

Autrement dit les points d'affixes 1 et -1 sont invariants.

$$2. z' = \frac{1 + iz}{z + i} = \frac{i(z - i)}{z + i}. \text{ D'où, par interprétation géométrique du module et d'un argument, } OM' = \frac{AM}{BM} [1]$$

et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \pmod{2\pi} [2]$.

3. Si M est sur (Ox) alors $MA = MB$ (car (Ox) est la médiatrice de [AB]), donc, d'après [1], $OM' = 1$.

Ainsi $M' \in \mathcal{C}(O; 1)$.

4. Si M est sur $\mathcal{C}(O; 1)$, cercle de diamètre [AB], privé de A et B, $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ d'où, d'après [2] :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 0 \text{ ou } \pi \pmod{2\pi}.$$

Ainsi $M' \in (Ox)$.

59 1. a) $M = A$ ou $M' = A \Leftrightarrow z = 1$ ou $z^3 = 1$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \text{ ou } z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}.$$

b) Lorsque $M \neq A$ et $M' \neq A$, c'est-à-dire $z \neq 1$, $z \neq j$ et $z \neq \bar{j}$, alors :

A, M et M' alignés $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^3 - 1}{z - 1}\right) = 0$ ou π
 $\Leftrightarrow \arg[z^2 + z + 1] = 0$ ou $\pi \Leftrightarrow z^2 + z + 1$ réel.

On pose $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

A, M et M' alignés $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$ réel
 $\Leftrightarrow y(2x + 1) = 0$.

Dans ce cas, l'ensemble des points M est la réunion des droites (Ox) : $y = 0$ et Δ : $x = -\frac{1}{2}$, privée des points A(1), J(j) et J'(j).

c) A, J et J' sont des solutions possibles pour M d'après a), donc l'ensemble Γ cherché est la réunion des droites (Ox) et Δ .

2. A, M, M' alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z}^3 - 1) = (\bar{z} - 1)(z^3 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1)(\bar{z}^2 + \bar{z} + 1) = (\bar{z} - 1)(z - 1)(z^2 + z + 1)$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1)[z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1)(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = \bar{z} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}.$$

On retrouve Γ .

60 1. a) $x' = x^2 - y^2 - 2x + 2y$ et $y' = 2xy - 2x - 2y$.

Note : si $x = 1$ alors $y' = -2$ et donc z' n'est pas réel. Ainsi z' réel implique $x \neq 1$.

$$\text{b) } z' \text{ réel} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y(x - 1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x - 1}.$$

Donc $\mathcal{H}$ est la représentation graphique de la fonction h .

2. a) $OA = |a| = 2\sqrt{2}$ donc $A \in \Gamma$.

$h(x_A) = y_A$ donc $A \in \mathcal{H}$.

b) T_A a pour coefficient directeur $h'(2) = -1$ donc pour vecteur directeur $\vec{w}(1; -1)$.

Or $\overrightarrow{OA}(2; 2)$ donc $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{w} = 0$. Ainsi T_A est aussi tangente au cercle Γ en A. $\mathcal{H}$ et Γ sont tangents en A.

3. a) Conjecture : B et C semblent être les points d'intersection de Γ et $\mathcal{H}$.

$$\text{b) } r : z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z \text{ d'où les affixes}$$

$$b = e^{i\frac{2\pi}{3}} a = -1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1),$$

$$c = e^{i\frac{2\pi}{3}} b = -1 + \sqrt{3} + i(-\sqrt{3} - 1).$$

c) $OB = OC = 2\sqrt{2}$ donc B et C sont sur Γ .

$h(x_B) = y_B$ et $h(x_C) = y_C$ donc B et C sont sur $\mathcal{H}$.

$$r(C) \text{ pour affixe } e^{i\frac{2\pi}{3}} c = 2 + 2i = a.$$

$r(A) = B$, $r(B) = C$, $r(C) = A$ et r conserve les distances donc $AB = BC = CA$. ABC est un triangle équilatéral.

61 1. Si $(x; y) \neq (0; -2)$ alors :

$$X = \operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2},$$

$$Y = \operatorname{Im}(Z) = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}.$$

2. a) $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $-x + 2y + 4 = 0$ privée de B. $\mathcal{F}$ est le cercle de centre $\Omega\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé de B.

3. • Lorsque $M \neq A$ et $M \neq B$,
 Z réel $\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0$ ou π
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires
 $\Leftrightarrow M \in (AB) - \{A; B\}$.

Lorsque $M = A$, $Z = 0$ réel ; ainsi $\mathcal{C} = (AB) - \{B\}$.

• Lorsque $M \neq A$ et $M \neq B$,

Z imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2}$
 $\Leftrightarrow M \in \Gamma - \{A; B\}$

où Γ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Lorsque $M = A$, $Z = 0$ imaginaire pur ; ainsi $\mathcal{F} = \Gamma - \{B\}$.

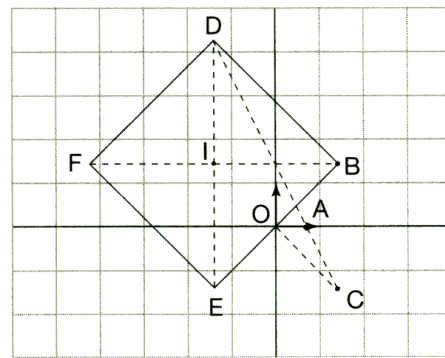
4. Lorsque $z \neq -2i$, $[f(z) - 1][z + 2i] = -2 - i$ d'où :

$$|f(z) - 1| \times |z + 2i| = \sqrt{5}.$$

On note $I(1)$; par interprétation géométrique,

$$IM' \times BM = \sqrt{5}.$$

Ainsi, $M \in \mathcal{C}(B, \sqrt{5}) \Rightarrow M' \in \mathcal{C}(I, 1)$.



65 • Corrigé dans le manuel.

66 • **1. a)** Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)} : B \mapsto C$

donc $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

b) Par $R_{\left(D; \frac{\pi}{3}\right)} : E \mapsto F$ donc $f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d)$.

2. a) Par $T_{\overrightarrow{DE}} : B \mapsto G$ donc $g = b + e - d$.

b) Par $T_{\overrightarrow{DC}} : F \mapsto H$ donc $h = f + c - d$.

3. a) $h - a = c - a + f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a + e - d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$

b) Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)} : G \mapsto H$; ainsi AGH est un triangle équilatéral direct.

67 • **1. a)** $z_A = a, z_M = im, z_C = -c, z_I = \frac{1}{2}im$.

b) B est tel que $z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$ donc $z_B = c + 2im$.

2. a) $Z = \frac{z_A - z_I}{z_B}$ soit :

$$Z = \frac{1}{2} \times \frac{2(ac - m^2) - im(c + 4a)}{c^2 + 4m^2}.$$

b) $AB = AC \Leftrightarrow |z_B - z_A|^2 = |z_C - z_A|^2$
 $\Leftrightarrow (c - a)^2 + 4m^2 = (-c - a)^2 \Leftrightarrow m^2 = ac$.

c) Ainsi $\text{Re}(Z) = 0$, Z est imaginaire pur, donc :
 $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{IA}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(OB) \perp (IA)$.

68 • Corrigé dans le manuel.

69 • **1.** $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}c, z_I = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})c}{3}$.

2. $z_D = tc, z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_D = te^{-i\frac{\pi}{3}}c$.

Par $R_{\left(C; \frac{\pi}{3}\right)} : D \mapsto F$ d'où $z_F - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C)$ donc

$$z_F = c(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} + te^{i\frac{\pi}{3}}).$$

Ainsi, $z_J = \frac{z_B + z_D + z_E}{3} = \frac{tc(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})}{3}$,

$$z_K = \frac{z_C + z_D + z_F}{3} = \frac{c[2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + t(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})]}{3}.$$

Configurations – Transformations

62 • **1.** A et B sont symétriques par rapport à l'axe réel donc $a = \bar{b}$.

$$h - k = x_A + iy_M - (x_M + iy_A) = x_A - x_M - i(y_A - y_M) = \overline{a - m}.$$

2. a) $(OB) \perp (MA)$ d'où $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{b) } \arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = \arg\left[\overline{\left(\frac{a - m}{b}\right)}\right] = -\arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{KH}) = \pm \frac{\pi}{2}$; ainsi $(OA) \perp (HK)$.

63 • **1. a)** $z_B = ia, z_D = ic$.

D'autre part, $z_E - a = i(z_D - a)$ donc $z_E = a - c - ia$.

$$\text{b) } z_I = \frac{1}{2}a(1 + i), z_J = \frac{1}{2}c(1 + i), z_K = \frac{1}{2}(a - c)(1 - i).$$

2. On vérifie aisément que $z_K - z_I = i(z_J - a)$; d'où on déduit $IK = AJ$ et $(IK) \perp (AJ)$.

64 • **1.** $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

2. $d - a = -3(c - a)$ d'où $d = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$.

3. $e = -ic$ d'où $e = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

$$\text{4. a) } Z = \frac{d - b}{e - b} = -i.$$

b) I est le milieu de $[BF]$ et $[DE]$ donc BDFE est un parallélogramme ; de **4. a)**, on déduit que $BD = BE$ et $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{2}$ donc le parallélogramme BDFE est un carré.

$$3. z_K - z_I = \frac{c[1 - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + t(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})]}{3},$$

$$z_J - z_I = \frac{c[-(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}) + t(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})]}{3}.$$

$$\text{D'où } e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I) = \frac{c[-(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}) + t(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})]}{3};$$

$$\text{or, } -(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -i\sqrt{3} = 1 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ donc :}$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I) = z_K - z_I.$$

Par $R_{(I; \frac{\pi}{3})} : J \mapsto K$ donc IJK est équilatéral direct.

70 • 1. a) $A(-a), B(-ia), C(a), D(ia)$.

$\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC}, t \in [0; 1]$, d'où :

$$z_M = z_B + t(z_C - z_B) \text{ donc } z_M = at - ia(1 - t).$$

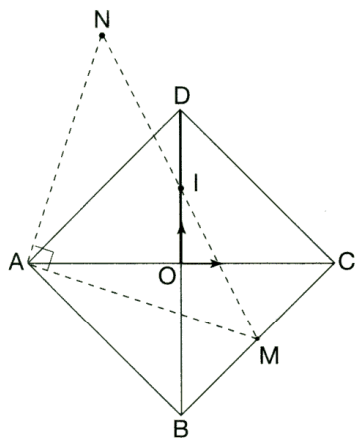
$R_{(A; \frac{\pi}{2})} : M \mapsto N$ d'où :

$$z_N - z_A = i(z_M - z_A) \text{ donc } z_N = -at + ia(1 + t).$$

b) $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $a(1 - i)$ et $\overrightarrow{DN}$ a pour affixe $-ta(1 - i)$, d'où $\overrightarrow{DN} = -t\overrightarrow{DC}$ et les points C, D et N sont alignés.

2. a) $z_I = \frac{z_M + z_N}{2} = iat.$

b) Ainsi, $z_I = tz_D, t \in [0; 1]$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{OI} = t\overrightarrow{OD}, t \in [0; 1]$. Le lieu du point I est le segment [OD].



71 • 1. $z_P = z + 1$ donc $P = T_u^-(M)$.

$$z_Q = z^2 = e^{2i\theta} \text{ d'où } \begin{cases} OQ = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OQ}) = 2\theta \end{cases}$$

Q est à l'intersection du cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ et de la demi-droite $]Ot)$ dont un vecteur directeur $\vec{w}$ est tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = 2\theta$. (OM) est bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ})$ donc Q est l'image de A par la réflexion $S_{(OM)}$.

2. Lorsque θ décrit $[0; 2\pi[$, M décrit le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ donc P décrit le cercle image par T_u^- soit $\mathcal{C}(A, 1)$.

3. a) $s = (1 + z) + z^2 = z_P + z_Q$ d'où $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$; ainsi S est tel que OPSQ est un parallélogramme.

b) Conjecture : O, M, S alignés.

c) Pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$,

$$Z = \frac{1 + z + z^2}{z} = \frac{1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} = 1 + 2\cos\theta.$$

Ainsi Z est réel.

• Si $S = O$ alors O, M, S sont évidemment alignés.

$$S = O \Leftrightarrow 1 + z + z^2 = 0 \Leftrightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } z = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

• Si $S \neq O$ alors dans $[0; 2\pi[$, $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ et $\theta \neq \frac{4\pi}{3}$ donc $Z = 1 + 2\cos\theta$ est un réel non nul.

Ainsi $\arg Z = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OS}) = 0$ ou π donc O, M et S sont alignés.

72 • 2. a) $R_{(M_1; \frac{\pi}{2})} : B \mapsto M$ d'où $z - z_1 = i(i - z_1)$;

$R_{(M_2; \frac{\pi}{2})} : M \mapsto A$ d'où $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

b) D'où les expressions :

$$z_1 = \frac{z + 1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2}(z + 1),$$

$$z_2 = \frac{1 - iz}{1 - i} = \frac{-i(z + i)}{1 - i} = \frac{1 - i}{2}(z + i).$$

3. a) $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z + 1| = |z + i|$. Δ est la médiatrice de $[A'B']$ ($\Delta : y = x$).

b) $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2 - z_1|^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|z + 1|^2 = |-iz|^2$$

$$\Leftrightarrow |z + 1|^2 = 2|z|^2.$$

c) On pose $z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z + 1|^2 = 2|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |(x + 1) + iy|^2 = 2|x + iy|^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$$

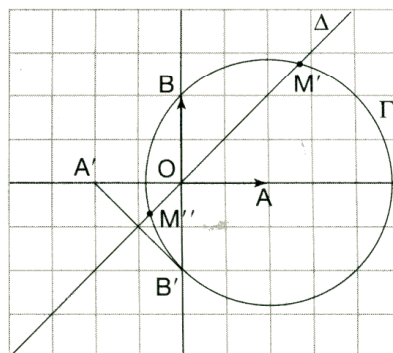
$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2.$$

Ainsi, Γ est le cercle de centre A(1) et de rayon $\sqrt{2}$.

d) OM_1M_2 est équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = OM_2 \\ OM_1 = M_1M_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow M \in \Delta \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Il existe deux points solutions M' et M'' .



73 1. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}\right)$ et de rayon

$\frac{1}{2}$. Pour tout M de $\mathcal{C}$, $IM = \frac{1}{2}$ donc $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

2. $R_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto L$ donc $l = im$.

$R_{\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto P$ d'où $p - 1 = -i(m - 1)$

donc $p = -im + 1 + i$.

3. Ω milieu de $[PL]$ a pour affixe $\omega = \frac{p+l}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Ainsi $\left|\omega - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ donc $\Omega \in \mathcal{C}$.

Ω est le milieu du demi-cercle supérieur $[\widehat{OA}]$.

Remarque : Pour $M \neq O$ et $M \neq A$, $\widehat{MLP} = \widehat{MLO} + \widehat{OMA} + \widehat{AMP} = \pi$ et puisque Ω est le milieu de $[PL]$, les points M, L, P, Ω sont alignés. Ainsi M et Ω sont les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et (PL) .

4. a) $KN = |n - k| = |i - 2im| = |-2i| \left|m - \frac{1}{2}\right| = 2 \left|m - \frac{1}{2}\right|$.

Or $M \in \mathcal{C}$ donc $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ d'où $KN = 1$ est constant.

b) $Z_{\Omega N} = (1 - i)m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $Z_{\Omega K} = (1 + i)m - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
d'où $Z_{\Omega K} = iZ_{\Omega N}$.

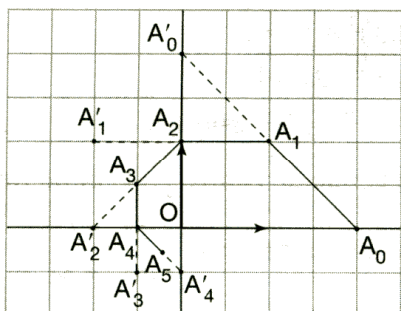
Ainsi ΩNK est un triangle rectangle isocèle en Ω .

5. $\Omega N = \left|(1 - i)\left(m - \frac{1}{2}\right)\right| = |1 - i| \left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $N \in \Gamma$ cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suites de points et complexes

74 1.



2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, A_{n+1} est le milieu de $[A_n A'_n]$ donc :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + iz_n}{2} = \frac{1+i}{2} z_n.$$

b) $r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$; (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 2$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\theta_{n+1} = \frac{\pi}{4} + \theta_n$; (θ_n) est une suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = 0$ et de raison $r = \frac{\pi}{4}$.

c) $r_n = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; $\theta_n = n \frac{\pi}{4}$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$; lorsque n tend vers $+\infty$, le point A_n tend vers l'origine O .

e) Puisque pour tout n , $r_n \neq 0$, les points A_n et O sont distincts.

O, A_0, A_n alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n}) = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow \theta_n = k\pi$$

$$\Leftrightarrow n = 4k$$

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $d_n = A_n A_{n+1}$.

Pour $n \geq 1$,

$$d_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n - z_{n-1}| = \frac{\sqrt{2}}{2} d_{n-1}.$$

b) $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k$. Or (d_k) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = A_0 A_1 = \sqrt{2}$ et de raison

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ donc } L_n = \sqrt{2} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right].$$

Or $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} + 1)$.

75 1. a) $r_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n r_0$. b) $\theta_n = \theta_0 + \frac{2n\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } z_0 z_1 z_2 = 8 &\Leftrightarrow r_0 e^{i\theta_0} \times \frac{2}{3} r_0 e^{i\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right)} \\ &\quad \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 r_0 e^{i\left(\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right)} = 8 \end{aligned}$$

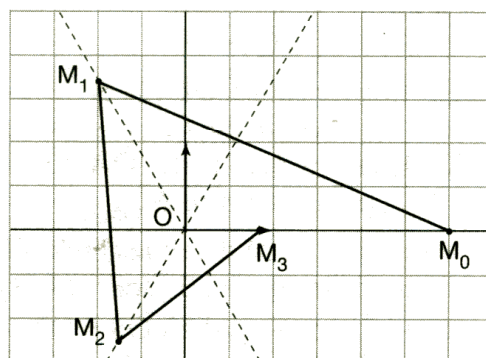
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} r_0\right)^3 e^{3i\theta_0} = 8.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \left(\frac{2}{3} r_0\right)^3 = 8 \\ 3\theta_0 = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} ; \text{ or } \theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{donc } \begin{cases} r_0 = 3 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $z_0 = 3$, $z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z_2 = \frac{4}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

2. a)



b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $d_n = \|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$d_n = |z_{n+1} - z_n| = |r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} - r_n e^{i\theta_n}|$$

$$= \left| \frac{2}{3} r_n e^{i(\theta_n + \frac{2\pi}{3})} - \frac{2}{3} r_{n-1} e^{i(\theta_{n-1} + \frac{2\pi}{3})} \right|$$

$$= \left| \frac{2}{3} e^{\frac{2i\pi}{3}} |r_n e^{i\theta_n} - r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}| \right| = \frac{2}{3} |z_n - z_{n-1}| = \frac{2}{3} d_{n-1}.$$

Ainsi (d_n) est une suite géométrique de premier

terme $d_0 = M_0 M_1 = \sqrt{19}$ et de raison $q = \frac{2}{3}$.

$$\text{D'où } d_n = \sqrt{19} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{c) } L_n = \sum_{k=0}^n d_k \text{ (somme de } n+1 \text{ termes consécutifs de}$$

la suite géométrique (d_k));

$$L_n = \sqrt{19} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\sqrt{19} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right].$$

Or $0 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 3\sqrt{19}$.

Prendre toutes les initiatives

76 On choisit un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Notons : $A(a)$, $B(b)$, $C(-b)$, $M(m)$, $N(n)$.

$$R_{\left(M, \frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto A \text{ d'où } a - m = i(b - m)$$

$$\text{donc } m = \frac{1}{2}(1+i)(a - ib).$$

$$R_{\left(N, \frac{\pi}{2}\right)} : A \mapsto C \text{ d'où } -b - n = i(a - n)$$

$$\text{donc } n = \frac{1}{2}(1+i)(-b - ia).$$

D'où $n = -im$. Ainsi $R_{\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto N$ donc le triangle

OMN est rectangle isocèle en O.

77 On choisit un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Notons $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$, $Q(q)$.

$$R_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)} : A \mapsto B \text{ d'où } b = ia; \text{ de même } d = ic.$$

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{a(1+i)}{2}, n = \frac{b+c}{2} = \frac{ia+c}{2},$$

$$p = \frac{c+d}{2} = \frac{c(1+i)}{2}, q = \frac{a+d}{2} = \frac{a+ic}{2}.$$

$$\text{Alors } n - m = \frac{c-a}{2} \text{ et } p - q = \frac{c-a}{2} \text{ donc } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} [1];$$

$$\text{de plus, } q - m = \frac{i(c-a)}{2} = i(n-m) \text{ donc } MQ = MN$$

$$\text{et } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2} [2].$$

On déduit de [1] et [2] que MNPQ est un carré.

78 • Posons $r = |z|$ et $r' = |z'|$, alors $r' = \frac{2r}{1+r^2}$.

$$\text{Notons que : } r' \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2r}{1+r^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1+r^2-2r \geq 0 \\ \Leftrightarrow (1-r)^2 \geq 0.$$

Alors, pour tout r ($r \in [0; +\infty[$), $r' \leq 1$ donc pour tout point M, son image M' appartient au disque $\mathcal{D}(O; 1)$.

Note : Le résultat peut aussi être établi à partir des variations de la fonction $r \mapsto \frac{2r}{1+r^2}$ sur $[0; +\infty[$.

79 • On choisit un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Notons $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$, $D'(d')$, $P(p)$, $Q(q)$, $R(r)$, $S(s)$.

Alors $a' = ia$, $b' = ib$, $c' = ic$, $d' = id$.

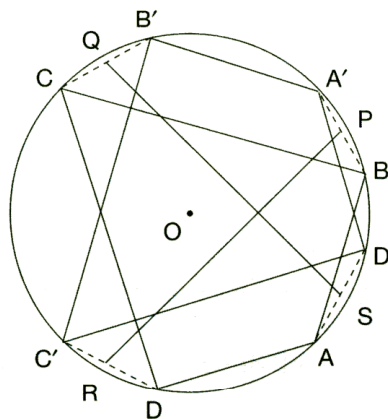
$$\text{D'où } p = \frac{b+a'}{2} = \frac{ia+b}{2}, q = \frac{c+b'}{2} = \frac{c+ib}{2},$$

$$r = \frac{d+c'}{2} = \frac{ic+d}{2}, s = \frac{a+d'}{2} = \frac{a+id}{2}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QS}$ ont pour affixes :

$$r - p = \frac{1}{2}[d - b + i(c - a)] \text{ et } s - q = \frac{1}{2}[a - c + i(d - b)].$$

Ainsi $s - q = i(r - p)$ d'où par interprétation géométrique : $PR = QS$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QS}) = \frac{\pi}{2}$.



80 • On choisit un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Notons $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$, $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$.

$$\text{Alors } a' = e^{i\frac{\pi}{3}}a, b' = e^{i\frac{\pi}{3}}b, c' = e^{i\frac{\pi}{3}}c.$$

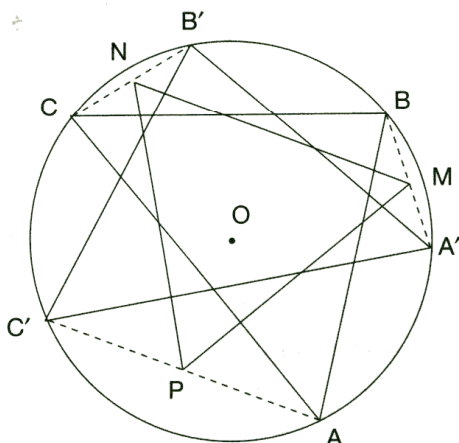
$$\text{D'où } m = \frac{a'+b}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{\pi}{3}}a + b\right],$$

$$n = \frac{b'+c}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{\pi}{3}}b + c\right], p = \frac{c'+a}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{\pi}{3}}c + a\right].$$

Pour démontrer que MNP est un triangle équilatéral prouvons que $R_{\left(M, \frac{\pi}{3}\right)} : N \mapsto P$.

$$n - m = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{i\pi}{3}} (b - a) + c - b \right]$$

$$\text{et } p - m = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{i\pi}{3}} (c - a) + a - b \right].$$



Note : il s'agit de comparer $p - m$ et $e^{\frac{i\pi}{3}} (n - m)$. Il est judicieux ici d'utiliser le nombre $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ et ses propriétés :

$$j^3 = 1, 1 + j + j^2 = 0 \text{ et } -j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\pi}{3}} (n - m) &= \frac{1}{2} (-j^2) [-j^2(b - a) + c - b] \\ &= \frac{1}{2} [j(b - a) - j^2(c - b)] \\ &= \frac{1}{2} [-j^2c + (j + j^2)b - ja] \\ &= \frac{1}{2} [-j^2c - b + (1 + j^2)a] \\ &= \frac{1}{2} [-j^2(c - a) + a - b] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{\frac{i\pi}{3}} (c - a) + a - b \right] = p - m. \end{aligned}$$

Ainsi $R_{\left(M, \frac{\pi}{3}\right)} : N \mapsto P$ donc le triangle MNP est équilatéral.

81 : Notons Γ l'ensemble cherché. M' a pour affixe $z' = iz$.

• Si $M = B$ ou $M' = B$ alors B, M et M' sont évidemment alignés.

Cette condition signifie $z = i$ ou $z = 1$. Ainsi A(1) et B(i) sont deux points de Γ . [1]

• Si $M \neq B$ et $M' \neq B$ alors :

« B, M, M' alignés » $\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) = 0$ ou π

$$\text{ou } \pi \Leftrightarrow \arg \left(\frac{i(z - 1)}{z - i} \right) = 0 \text{ ou } \pi$$

$$\text{ou } \pi \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z - 1}{z - i} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB] privé de A et de B. [2]

Finalement, d'après [1] et [2], Γ est le cercle de diamètre [AB].

82 : Note : $M = M'$ ou $M = M''$ ou $M' = M'' \Leftrightarrow z(z - 1) = 0$ ou $z(z - 1)(z + 1) = 0$ ou $z^2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1; 0; 1\}$.

Ainsi M, M' et M'' sont deux à deux distincts si et seulement si $z \in \mathbb{C} - \{-1; 0; 1\}$.

Sous cette condition :

• $MM'M''$ triangle rectangle en M

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z + 1) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $M \in \Delta - \{A\}$ où Δ est la droite d'équation $x = -1$ et A le point d'affixe -1 .

• $MM'M''$ triangle rectangle en M'

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'M''}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^3 - z^2}{z - z^2} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg(-z) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi + \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z) = \pm \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $M \in (Oy) - \{O\}$.

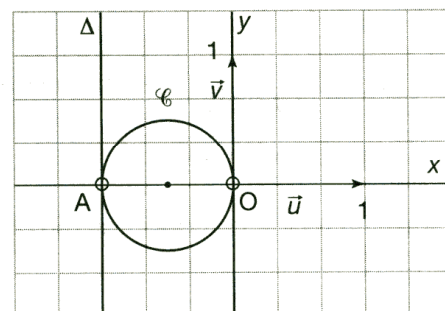
• $MM'M''$ rectangle en M''

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M''M}, \overrightarrow{M''M'}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^2 - z^3}{z - z^3} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z}{z + 1} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $M \in \mathcal{C} - \{O, A\}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [OA].

Finalement l'ensemble cherché est la réunion de (Oy) et $\mathcal{C}$ privée des points O et A.



83 : On suppose que ABC est équilatéral avec ses sommets à coordonnées entières.

• Si ABC est direct, par $R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} : B \mapsto C$; donc les

affixes sont telles que $c - a = e^{\frac{i\pi}{3}} (b - a)$.

On pose $c - a = \delta + i\gamma$ et $b - a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ entier

Ainsi, $\delta + i\gamma = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\alpha + i\beta)$ équivaut à :

$$\begin{cases} 2\delta = \alpha - \beta\sqrt{3} & [1] \\ 2\gamma = \alpha\sqrt{3} + \beta & [2] \end{cases}$$

Les entiers α et β ne sont pas simultanément nuls (sinon $A = B$). On suppose par exemple que $\alpha \neq 0$; d'après [2], $\sqrt{3} = \frac{2\gamma - \beta}{\alpha}$; ainsi $\sqrt{3}$ serait un rationnel ce qui est faux. (Si $\alpha = 0$, on utilise [1] avec $\beta \neq 0$.)

Problèmes

(page 373)

84 • 1. a) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0$ car $\omega^5 = 1$.

b) Cette somme s'écrit aussi $1 + \alpha + \beta$ donc $\alpha + \beta = -1$.

$$\alpha\beta = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$$

$$= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \alpha + \beta$$

donc $\alpha\beta = -1$.

c) Les complexes α et β sont tels que $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$

donc ils sont les solutions de l'équation du second degré $(X - \alpha)(X - \beta) = 0$, c'est-à-dire $X^2 + X - 1 = 0$ [1].

$$\text{d)} \alpha = \omega + \omega^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

$$\text{Note : } \beta = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

e) L'équation [1] admet pour solutions $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc α est la racine

$$\text{positive et } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

$$\text{Note : } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\beta}{2} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

2. a) La rotation $R_{\left(O; \frac{2\pi}{5}\right)}$ a pour écriture complexe

$$z' = \omega z.$$

Ainsi $A_0 \mapsto A_1$, $A_1 \mapsto A_2$, $A_2 \mapsto A_3$, $A_3 \mapsto A_4$, $A_4 \mapsto A_5$, $A_5 \mapsto A_0$, d'où le résultat.

b) $\omega^4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = \bar{\omega}$ donc A_1 et A_4 sont symétriques par rapport à l'axe réel. (A_1A_4) coupe cet axe en H l'abscisse $x_H = \operatorname{Re}(\omega) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ d'où $\overrightarrow{OH} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\vec{u}$.

c) Le rayon de Γ est $r = \Omega B = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega O} = \frac{\sqrt{5}}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = \alpha\vec{u};$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega O} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = \beta\vec{u}.$$

Puisque $\alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on obtient l'égalité $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OH}$, donc H est le milieu de $[OM]$.

• Si ABC est indirect, on obtient la même contradiction à partir de $R_{\left(A; -\frac{\pi}{3}\right)}$. Ainsi, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

$$\begin{aligned} \text{d)} } A_0A_1^2 &= \left| 1 - e^{\frac{2i\pi}{5}} \right|^2 = \left(1 - \cos\frac{2\pi}{5} \right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{5} \\ &= 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

La longueur du côté du pentagone est :

$$L = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

3. La construction ci-après résulte immédiatement des résultats du 2. On construit $\mathcal{C}$ puis le cercle Γ et le point M. La médiatrice de $[OM]$ coupe $\mathcal{C}$ en A_1 et A_4 . On obtient enfin A_2 et A_3 avec le compas.

4. a) Par construction, les triangles AKO, ABO, BOI sont équilatéraux donc

$$\widehat{KOI} = \widehat{KOA} + \widehat{AOB} + \widehat{BOI} = 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi.$$

b) $I(1; 0), J(0; 1), K(-1; 0), B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (KC): y = x + 1$.

c) $C(\alpha; \alpha + 1)$ d'où $\overrightarrow{BC}\left(\alpha - \frac{1}{2}; \alpha + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

$$\text{or } BC^2 = 1 \text{ donc } \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \text{ [1].}$$

$$\text{[1] équivaut à } 2\alpha^2 + (1 - \sqrt{3})\alpha + 1 - \sqrt{3} = 0.$$

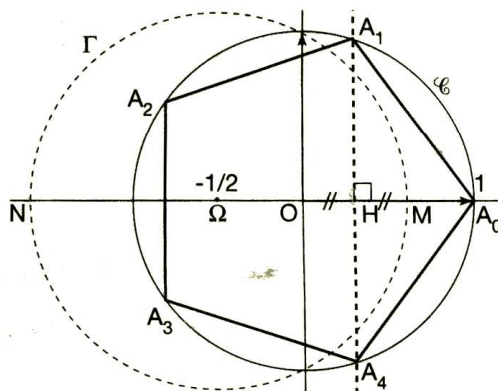
$$\text{Comme } \alpha > 0, \text{ on obtient } \alpha = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}.$$

$$\text{d)} } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = \cos(\widehat{ABC});$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = XX' + YY' = \frac{1}{2} - \alpha.$$

e) Dans un pentagone régulier, $\widehat{ABC} = 108^\circ$; par la méthode de Dürer : $\widehat{ABC} \approx 108,37^\circ$.

La construction de Dürer est inexacte.



85 1. $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

$(1-j)(1+j+j^2) = 1-j^3 = 0$, or $1-j \neq 0$
donc $1+j+j^2 = 0$.

$-j^2 = -e^{i\frac{4\pi}{3}} = -e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$-j = e^{i\pi} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. a) $A' = r_C(B)$ donc

$a' = c + e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c) = 8j^2 - j^2(6j-8j^2)$
 $= -6 + 8(j^2+j) = -6-8 = -14$.

Ainsi a' est réel.

b) De même :

$b' = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a) = 8 - j^2(8j^2-8)$
 $= -8j + 8(1+j^2) = -8j-8j = -16j$;

$c' = b + e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b) = 6j - j^2(8-6j) = -8j^2 + 6(1+j)$
 $= -8j^2 - 6j^2 = -14j^2$.

C'est nouveau au bac

(page 374)

86 1. $Z_{\overline{AB}} = -1-4i$, $Z_{\overline{AC}} = 4,08-1,02i$.

Ainsi $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = XX' + YY' = 0$ donc $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

Une seule réponse exacte **b)**.

2. Notons A et B les points d'affixes respectives -2 et $4i$. Par hypothèse $M \neq A$.

• Soit Δ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z|=1$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \left| \frac{z-z_B}{z-z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM$.

Ainsi Δ est la médiatrice de $[AB]$.

Une seule réponse exacte **b)**.

• Soit Γ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' est un réel. Par hypothèse $M \neq A$.

– Pour $z \in \mathbb{C} - \{-2; 4i\}$ c'est-à-dire $M \neq A$ et $M \neq B$:

z' réel $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 0$ ou $\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ ou π .

Sous cette condition, l'ensemble des points M est la droite (AB) privée de A et B.

– Lorsque $z = 4i$ alors $z' = 0$ est réel. Ainsi le point B appartient aussi à Γ .

Finalement $\Gamma = (AB) - \{A\}$.

Une seule réponse exacte **c)**.

87 1. **Vrai.**

Par $R_{\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)} : A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto A$; d'après la propriété de conservation de la distance $AB = BC = CA$.

2. Faux.

c) (AA') est l'axe réel donc $O \in (AA')$. D'autre part,

$b' = -\frac{8}{3}b$ et $c' = -\frac{7}{4}c$ d'où $\overline{OB'} = -\frac{8}{3}\overline{OB}$

et $\overline{OC'} = -\frac{7}{4}\overline{OC}$.

De ces relations de colinéarité on déduit que :

$O \in (BB')$ et $O \in (CC')$.

Ainsi (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes en O.

3. a) $S_0 = OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 22$.

b) Pour tout point $M(z)$,

$(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j = a + bj^2 + cj - z(1+j+j^2)$
 $= a + bj^2 + cj$ d'où

$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |8 + 6j^3 + 8j^3| = 22$.

c) Pour tout point M, $S_M = |a-z| + |b-z| + |c-z|$; or $|j|=1$ donc $|b-z| = |(b-z)j^2|$ et $|c-z| = |(c-z)j|$ d'où $S_M = |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j|$.

D'après l'inégalité sur les modules

$S_M \geq |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j|$ soit $S_M \geq 22$.

Ainsi $S_M \geq S_0$ donc S_M est minimale lorsque $M = O$.

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que

$\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$.

$A \in \Delta$ mais $\arg(z-i)$ n'est pas défini lorsque $z=i$, ainsi $A \notin \mathcal{E}$. [En fait, $\mathcal{E}$ est la demi-droite ouverte d'origine A dirigée par w].

3. Faux.

$OM' = |z'| = \left| \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right| |z| = \frac{\sqrt{10}}{5} OM$. Ainsi pour tout point $M \neq O$, $OM' \neq OM$ donc T n'est pas une rotation.

4. Vrai.

La symétrie S_A n'est autre que la rotation $R_{(A, \pi)}$ d'où une écriture complexe $z' - i = e^{i\pi}(z-i)$ soit $z' = -z + 2i$.

5. Vrai.

Par $R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto N$ d'où $n-a = i(m-a)$.

Ainsi $a = \frac{1}{2}(1+i)(n-im) = 1+i$.

88 1. Pour tous points $A(a)$, $B(b)$, $M(z)$ deux à deux distincts :

$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \arg(z-b) - \arg(z-a)$
 $= (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM})$

d'où d'après la relation de Chasles,

$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

2. a) Notons Δ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est un réel strictement négatif.

$A \neq B$ et par hypothèse $M \neq A$; en outre $M \neq B$ signifie $Z \neq 0$. Alors :

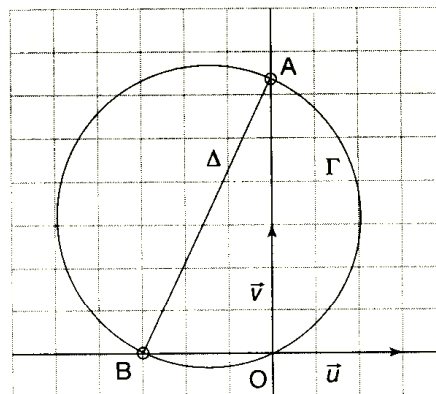
$M \in \Delta \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z-b}{z-a} \right) = \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$. Ainsi Δ est le segment ouvert $]A, B[$.

b) Notons Γ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est un imaginaire pur non nul.

Sous les conditions précédentes :

$M \in \Gamma \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z-b}{z-a} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pm \frac{\pi}{2}$.

Ainsi Γ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B .



Activités (page 376)

ACTIVITÉ 1

- 1** 3. $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2 + (2+2)^2}$
 $= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$;
 de même, $AC = AD = BC = BD = CD = 4\sqrt{2}$: les faces du tétraèdre sont des triangles équilatéraux.

- 2** 3. a) (AB) , perpendiculaire au plan P , est orthogonale à toutes les droites de ce plan et, en particulier, $(AB) \perp d$.
 b) d est orthogonale à (AB) et à (BC) , deux droites sécantes du plan (ABC) , donc d est perpendiculaire à (ABC) .
 c) d , étant perpendiculaire au plan (ABC) , est orthogonale à toutes les droites de ce plan et, en particulier, $d \perp (AC)$.

ACTIVITÉ 2

1. $A(3; 0; 0)$, $B(3; 3; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(0; 0; 0)$,
 $E(3; 0; 3)$, $F(3; 3; 3)$, $G(0; 3; 3)$, $H(0; 0; 3)$.
 2. a) (AB) est perpendiculaire à (BC) et (BF) , deux droites du plan (BCG) : (AB) est donc perpendiculaire à ce plan et orthogonale à toutes les droites de ce plan, donc $(AB) \perp (FG)$.
 b) $\overrightarrow{AB}(0; 3; 0)$, $\overrightarrow{FG}(3; 0; 0)$.
 c) $xx' + yy' + zz' = 0$.

3. a) $(BF) \perp (ABC)$ donc $(BF) \perp (AC)$.

- b) $\overrightarrow{BF}(0; 0; 3)$, $\overrightarrow{AC}(-3; 3; 0)$.

- c) $xx' + yy' + zz' = 0$.

4. a) (DF) et (HB) ne sont pas perpendiculaires, car $DBFH$ est un rectangle non carré.

- b) $\overrightarrow{DF}(3; 3; 3)$,

- $\overrightarrow{HB}(3; 3; -3)$.

- c) $xx' + yy' + zz' = 9 + 9 - 9 = 9$.

5. a) $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 3\right)$.

- b) $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 3\right)$.

- c) $xx' + yy' + zz' = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 9 = 0$.

On peut conjecturer que (BI) et (DF) sont perpendiculaires.

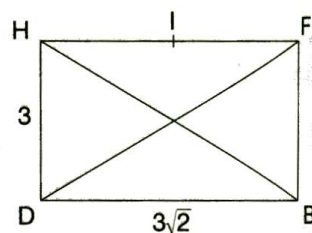
6. b) Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{k})$ avec $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{DB}$ $\left(\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \overrightarrow{DB}\right)$:

$$B(3\sqrt{2}; 0), I\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 3\right), F(3\sqrt{2}; 3),$$

$$\overrightarrow{BI}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 3\right), \overrightarrow{DF}(3\sqrt{2}; 3).$$

$$D'où \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DF} = -9 + 9 = 0$$

donc $(BI) \perp (DF)$.



Travaux dirigés (page 387)

TD 1

- 1** 1. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.
 b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0$.
 c) Même méthode qu'en b).
 d) ICD est isocèle : la médiane (IJ) est aussi hauteur.
 2. a) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot \overrightarrow{CD}$
 $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
 De même, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

(AG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD) . Donc (AG) est perpendiculaire au plan (BCD) .

b) Droites passant par un sommet et le centre de gravité de la « face opposée ».

3. a) O est le barycentre de $(A, 1)$, $(G, 3)$, donc $O \in (AG)$.

$$\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}; AG = a \frac{\sqrt{6}}{3}; AO = a \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

- b) O est le barycentre de $(I, 2)$, $(J, 2)$.

c) $OA = OB = a\frac{\sqrt{6}}{4}$, $OI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (triangle AOB par exemple).

d) $OA = OB = OC = OD$.

O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

4. a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{3a^2}{8}$; $\cos \alpha = -\frac{a^2}{8}$; $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

b) $\alpha \approx 109,5^\circ$.

c) Par symétrie.

2 a) $109,5^\circ$.

b) $a = 1,78 \times 10^{-10}$ m.

TD 2

1. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$
 $= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) +$
 $\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})$
 $= \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$
 $= 0$.

2. Donc si $(AB) \perp (CD)$ et $(AC) \perp (BD)$, par exemple, alors, d'après 1. :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

2 1. a) (AA') est la hauteur issue de A, du tétraèdre. (AA') est orthogonale à toute droite du plan (BCD) , donc à (CD) .

(CD) est orthogonale à (AA') et (AB) , droites sécantes du plan (ABA') : (CD) est perpendiculaire au plan (ABA') et (CD) est orthogonale à (BA') .

b) (BC) est perpendiculaire au plan (ADA') (car (BC) orthogonale à (AD) et (AA')).

D'où $(BC) \perp (DA')$.

Donc (DA') est hauteur du triangle BDC.

c) Même méthode qu'en a) et b).

d) $(AA') \perp (DC)$ et $(A'K) \perp (DC)$, donc $(AK) \perp (DC)$.

Or $(AA') \perp (DC)$; on déduit $(AB') = (AK)$.

(AA') et (BB') sont deux hauteurs du triangle ABK. Elles sont coplanaires... et sécantes.

e) De même, (AA') et (CC') sont sécantes, ainsi que (BB') et (CC') .

$C \notin (ABK)$; (CC') coupe (ABK) en un point unique qui est sur (AA') et (BB') : c'est H.

De même pour (DD') .

2. $(BA') \perp (CD)$ et $(AA') \perp (CD)$, donc (CD) est perpendiculaire à $(AA'B)$.

Conséquence : (CD) est orthogonale à (AB) .

Même méthode pour les deux autres paires d'arêtes.

TD 3

1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ soit encore

$$(bc)x + (ac)y + (ab)z - abc = 0$$

2. $h = \frac{|abc|}{\sqrt{a^2b^2c^2}}$, d'où

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

3. $V = \frac{1}{3}S$, $h = \frac{1}{3} \times c \times \frac{ab}{2}$ d'où $S = \frac{abc}{2h}$

4. $S^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4h^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \times \frac{a^2b^2c^2}{4}$

$$= \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4}$$

$$= (\text{aire OAB})^2 + (\text{aire OBC})^2 + (\text{aire OAC})^2.$$

« Théorème de Pythagore dans l'espace » : Dans un trièdre trirectangle, le carré de l'aire de la face non rectangle est égale à la somme des carrés des aires des trois faces rectangles.

TD 4

2 1. Les points A, B et C vérifient l'équation

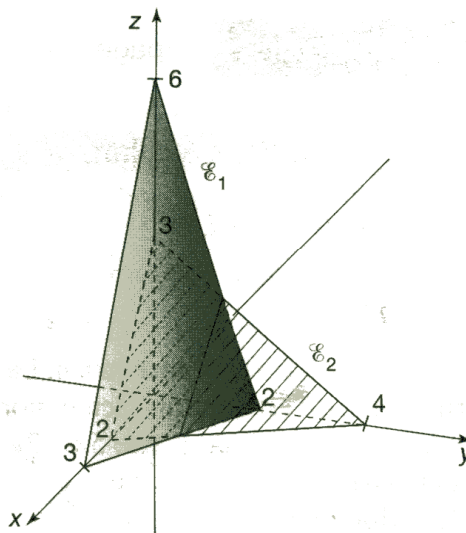
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1.$$

Ces points n'étant pas, par construction, alignés, ils déterminent un unique plan P dont une équation est donc $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

Des deux demi-espaces de frontière P, celui qui nous intéresse est celui qui contient le point O, donc d'inéquation $2x + 3y + 6z - 6 \leq 0$.

D'où le système :
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 2x + 3y + 6z - 6 \leq 0 \end{cases}$$

2, 3 et 4. Par le calcul, $D \in \mathcal{E}_1$, $E \notin \mathcal{E}_1$, $F \in \mathcal{E}_1$, $G \in \mathcal{E}_1$. L'ensemble $\mathcal{E}_2$ est le tétraèdre (de sommet O) hachuré.



1 Notons P le plan médiateur du segment $[AB]$. Le milieu M est équidistant de A et B .

Soit N un point du plan P , ($N \notin (AB)$). Les points A , B et N ne sont pas alignés. La droite (AB) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan P donc en particulier à la droite (MN) .

Il en résulte que la droite (MN) est (dans le plan (ANB)) la médiatrice du segment $[AB]$ et donc que N est équidistant des extrémités A et B : tout point de P est équidistant de A et B .

Réciproquement, soit N un point de l'espace ($N \notin (AB)$) équidistant de A et B . Dans le plan (ABN) , (NM) est perpendiculaire à (AB) et passe (bien sûr...) par le milieu M de $[AB]$, donc (NM) est contenue dans le plan P et N appartient à P . Tout point équidistant de A et B appartient au plan P .

Conclusion, P est l'ensemble des points de l'espace équidistants des extrémités A et B .

2 1. $M(3; 0; 1)$.

2. (AB) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan P donc, vectoriellement, $\vec{MN} \cdot \vec{AB} = 0$. Le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur normal au plan P .

3. $\vec{AB}(2; 2; -4)$ d'où une équation de P s'écrit :

$$2x + 2y - 4z + d = 0.$$

P passe par le point M donc :

$$2 \times 3 + 2 \times 0 - 4 \times 1 + d = 0,$$

soit $d = -2$ et $2x + 2y - 4z - 2 = 0$.

Une équation cartésienne de P est $x + y - 2z - 1 = 0$.

4. a) $\vec{CD}(-7; 4; 4)$ donc une équation du plan médiateur de $[CD]$ est de la forme $-7x + 4y + 4z + d = 0$. Ce

plan passe par le milieu $M(\frac{1}{2}; 0; 3)$ de $[CD]$ donc :

$$-\frac{7}{2} + 12 + d = 0, \text{ soit } d = -\frac{17}{2}$$

et une équation est $-7x + 4y + 4z - \frac{17}{2} = 0$.

b) $\vec{EF}(5; -7; -2)$, $M(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -1)$ et $5x - 7y - 2z - 4 = 0$

est une équation du plan médiateur de $[EF]$.

3 1. $P_1 : -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0;$

$$P_2 : x - 5y - 3z + \frac{3}{2} = 0;$$

$$P_3 : -3x + 3y - 2z + 5 = 0.$$

2. Ω est, d'après la partie 1, équidistant des quatre points A , B , C et D : c'est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

$$3. \begin{cases} -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0 \\ x - 5y - 3z + \frac{3}{2} = 0 \\ -3x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet comme unique triplet solution les coordonnées $(\frac{13}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{1}{2})$ du centre Ω .

$$4. r^2 = A\Omega^2 = \frac{9}{16} + \frac{25}{16} + \frac{25}{4} = \frac{134}{16} \text{ donc } r = \frac{\sqrt{134}}{4}.$$

5. $(x - \frac{13}{4})^2 + (y - \frac{5}{4})^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{134}{16}$ est une équation de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 394)

1. Produit scalaire dans le plan

1 Corrigé dans le manuel.

2 $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{u} \perp \vec{t}$ et $\vec{v} \perp \vec{s}$.

3 a) $\vec{u}(2; 5)$ est un vecteur normal à d . Le vecteur $\vec{u}(5; -2)$ orthogonal à $\vec{n}$ est donc un vecteur normal à Δ . Δ admet donc une équation du type $5x - 2y + c = 0$. $A(5; 3)$ appartenant à Δ , $25 - 6 + c = 0$ et donc $c = -19$. D'où une équation de Δ : $5x - 2y - 19 = 0$.

b) $\vec{n}(1; -3)$ est normal à d et $\vec{u}(3; 1)$ est normal à Δ qui admet une équation de la forme $3x + y + c = 0$.

$A(-1; 2) \in \Delta$ d'où $c = 1$ et une équation est $3x + y + 1 = 0$.

4 a) $\vec{AB}(-5; 1)$ est normal à la médiatrice de $[AB]$. Celle-ci admet donc une équation de la forme :

$$-5x + y + c = 0.$$

Elle passe par le milieu $I(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ d'où $-5 \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + c = 0$ et $c = 6$ et $-5x + y - 6 = 0$ est une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

b) $\overrightarrow{AB}\left(7; -\frac{8}{3}\right)$ est un vecteur normal à la médiatrice d de $[AB]$ qui admet une équation de la forme :

$$7x - \frac{8}{3}y + c = 0.$$

Elle passe par $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$. Une équation est donc :

$$7x - \frac{8}{3}y + \frac{269}{18} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{5 } \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}) \\ &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} \\ &= 0 + 2 \cdot CJ^2 - 2 \cdot BI^2 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont orthogonaux et les droites (DJ) et (CI) sont perpendiculaires.

6 Corrigé dans le manuel.

$$\text{7 } \overrightarrow{AB}(4; 2) \text{ et } AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AC}(8; -2) \text{ et } AC = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{BC}(4; -4) \text{ et } BC = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{28}{4\sqrt{85}} = \frac{7\sqrt{85}}{85} \text{ et } \widehat{BAC} = 41^\circ \text{ (arrondi au degré), puis } \widehat{ABC} = 108^\circ \text{ et } \widehat{ACB} = 31^\circ.$$

$$d(A, (BC)) = \frac{|-4 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \text{ et } BC = 4\sqrt{2} \text{ donc}$$

l'aire est égale à 12 (unités d'aire).

2. Produit scalaire dans l'espace

8 Corrigé dans le manuel.

$$\text{9 } \overrightarrow{AB}(-1; 1; -4) \text{ et } AB = 3\sqrt{2};$$

$$\overrightarrow{AC}(-2; 0; -1) \text{ et } AC = \sqrt{5};$$

$$\overrightarrow{BC}(-1; -1; 3) \text{ et } BC = \sqrt{11}.$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ d'où } \widehat{BAC} = 51^\circ;$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{22}}{11} \text{ d'où } \widehat{ABC} = 31^\circ;$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{-1}{\sqrt{55}} \text{ d'où } \widehat{ACB} = 98^\circ.$$

10 Corrigé dans le manuel.

$$\begin{aligned} \text{11 } AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}) \\ &= 2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

Dans un tétraèdre régulier, $AB^2 = BC^2 = CD^2 = DA^2$ et il résulte que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Les arêtes $[AC]$ et $[DB]$ sont orthogonales.

On démontre de même que $[AB]$ et $[CD]$ d'une part, $[AD]$ et $[BC]$ d'autre part, sont orthogonales.

$$\text{12 } \bullet \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} a^2.$$

• Le triangle SAC est rectangle en S (théorème de Pythagore), donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$ et $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AS} = -a^2$.

$$\text{13 } \bullet \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EA} = 0;$$

$$\bullet \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} a^2;$$

$$\bullet \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GJ} = 0;$$

$$\bullet \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IE} = \frac{1}{4} a^2;$$

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD} &= (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH}) \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JG} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{JD} \\ &= \overrightarrow{JG} \cdot \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GH} = -\frac{1}{4} a^2 + a^2 = \frac{3}{4} a^2. \end{aligned}$$

$$\text{14 } \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20 + 1 - 18 = 3;$$

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -5 - 4 + 9 = 0;$$

$$\bullet \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 + 4 - \frac{45}{2} = -\frac{21}{2};$$

$$\bullet \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

3. Orthogonalité dans l'espace

$$\text{15 } \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -2 \neq 0 : \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas orthogonaux.}$$

$$\text{16 } \vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0 : \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

17 Corrigé dans le manuel.

$$\text{18 } \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha\sqrt{3} + \frac{2}{3}\alpha + 1.$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \alpha\sqrt{3} + \frac{2}{3}\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{3\sqrt{3} + 2}.$$

$$\text{19 } \overrightarrow{AB}(-2; 7; 5) \text{ et } \vec{u}(-4; 1; -3).$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 8 + 7 - 15 = 0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et la droite d est orthogonale à la droite (AB).

$$\text{20 } \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \text{ donc } C \text{ appartient bien à } (AB).$$

De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$: le point C est bien le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).

$$\text{21 } \overrightarrow{AB}(2; 0; -2), \overrightarrow{AC}(-1; -2; -1), \overrightarrow{DE}(2; -2; 2). \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.}$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$: le vecteur $\overrightarrow{DE}$ orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

22 $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(1; 5; 1)$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc le vecteur $\vec{v}$ est normal au plan (ABC).

23 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(10^2 - 8^2 - 6^2) = 0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

24 Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Donc, si $(\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} - \vec{v})$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

4. Équation cartésienne d'un plan

25 1. $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.

2. a) a, b et c sont les coordonnées, dans cet ordre, du vecteur $\vec{u}$. Les coordonnées de A vérifient l'équation ce qui permet d'obtenir d .

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : tout vecteur orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre.

Avec le vecteur $\vec{v}$ on obtient l'équation (équivalente) :

$$kax + kby + kcz + kd = 0$$

3. Cours.

26 Corrigé dans le manuel.

27 a) $2x - 3y - z + c = 0$ et $2\sqrt{2} + 6 - 5 + c = 0$, donc : $c = -1 - 2\sqrt{2}$,

et une équation de P est $2x - 3y - z - 1 - 2\sqrt{2} = 0$.

b) $\sqrt{3}x + 2y + c = 0$ et $-6 + c = 0$, donc $c = 6$ et une équation de P est $\sqrt{3}x + 2y + 6 = 0$.

28 a) $\mathcal{Q} : 2x - y + 3z - 7 = 0$.

b) $\mathcal{Q} : x + 2y + 3z - 8 = 0$.

29 Corrigé dans le manuel.

30 a) $d(A; P) = \frac{|10 + 3 + 12 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{20}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{7}$.

b) $d(A; P) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Apprendre à chercher

(page 396)

31 Plans perpendiculaires

Les outils :

- Produit scalaire dans l'espace.
- Équation de plan, vecteur normal à un plan.
- Résolution d'un système linéaire 2×2 .

Les objectifs :

- Savoir déterminer un vecteur normal à un plan.
- Savoir déterminer une équation de plan.

1. a) $\vec{u}(1; -1; 3)$.

b) $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$;

$\vec{n}$ est normal à $\mathcal{Q}$ donc orthogonal à tout vecteur directeur d'une droite contenue dans le plan $\mathcal{Q}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$.

2. a) En ajoutant membre à membre :

$$2a + 5c = 0, \text{ d'où } c = -\frac{2a}{5},$$

et en retranchant membre à membre :

$$-2b + c = 0, \text{ d'où } b = \frac{c}{2} = -\frac{a}{5}.$$

b) Pour $a = 5$, on trouve $\vec{n}(5; -1; -2)$.

32 Une recherche d'ensemble

Les outils :

- Centre de gravité.
- Produit scalaire.
- Équation d'une sphère.

Les objectifs :

- Savoir déterminer un lieu (double inclusion).
- Savoir traduire analytiquement des relations vectorielles.

1. $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de [MN].

Donc $[1] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$ ce qui signifie que (AB) passe par I.

2. a) $AB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AB^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN})$
 $= AB^2 + AI^2 + \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN} = 0$;

soit $AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 - IM^2 = 0$ et $[2] \Leftrightarrow IM^2 = \frac{5}{4}AB^2$.

b) Il en résulte $IM = IN = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$ et M et N appartiennent à la sphère de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}AB$.

3. Réciproquement, si M et N sont des points diamétralement opposés de S' , alors la relation [2] est vérifiée (d'après les équivalences de 2. a)).

Et, puisque $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ et I est le milieu de [MN], A est le centre de gravité du triangle MNB donc [1] est vérifiée.

4. Deuxième solution

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' + a = 0 \\ y + y' = 0 \\ z + z' = 0 \end{cases}$$

$$AB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow a^2 + xx' + yy' + zz' = 0.$$

En exprimant x' , y' et z' en fonction de x , y et z , et puisque I a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0} \\ AB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + x(-x-a) - y^2 - z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax + y^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow IM^2 = \frac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow IM = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Donc M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

b) Réciproquement, M et M' sont diamétralement

$$\text{opposés, donc } \begin{cases} x + x' + a = 0 \\ y + y' = 0 \\ z + z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0}$$

et [1] est vérifiée.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= xx' + yy' + zz' = x(-x-a) - y^2 - z^2 \\ &= -(x^2 + ax) - y^2 - z^2 \\ &= -\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 - z^2 + \frac{a^2}{4} = -IM^2 + \frac{a^2}{4} \\ &= -\frac{5}{4}a^2 + \frac{a^2}{4} = -a^2 = -AB^2, \end{aligned}$$

et [2] est bien vérifiée.

Pour progresser

(page 397)

Distances, angles et orthogonalité

33 Corrigé dans le manuel.

34 1. $\cos \widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{OA \times OB} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$

De même, $\cos \widehat{BOC} = \cos \widehat{COA} = \frac{1}{2}$.

2. a) Cela résulte des égalités $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OC'}$.

b) $OA = OB' = OC' = AB' = AC' = B'C' = \sqrt{2}$: les triangles OAB' , OAC' et $OB'C'$ sont équilatéraux.

35 1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.

2. a) $A'(6; 8; 0)$; $B'(4; 9; 0)$ et $C'(5; 7; 0)$.

b) $\cos \widehat{B'A'C'} = \frac{1}{\sqrt{10}} \neq 0$: dans l'espace, la projection orthogonale ne conserve pas nécessairement l'orthogonalité.

36 A se projette en G, B en D et C en F.

37 • $x = \vec{i} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times OA \times \cos \alpha$;

$y = \vec{j} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times OA \times \cos \beta$;

$z = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times OA \times \cos \gamma$.

$OA^2 = x^2 + y^2 + z^2 = OA^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$,
d'où :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

38 • 2. • $\overrightarrow{OE}\left(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OA}\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$;

• $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4}$;

• $OE \times OA = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} \times \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}$
 $= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$;

• $\cos \alpha = \frac{OE \cdot OA}{OE \times OA} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

3. $\cos \alpha = \frac{9 - 100 - 4}{9 + 100 + 4} = -\frac{95}{113}$ et $\alpha \approx 147,2^\circ$.

4. $a = b = c$; $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ indépendamment des dimensions du cube et $\alpha \approx 109^\circ$.

39 • a) $d(A; \mathcal{Q}) = \frac{|2 - 2 - 3 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Une équation de $\mathcal{Q}$ est $y - z - 1 = 0$, donc :

$$d(A; \mathcal{Q}) = \frac{|0 + 1 - 1 - 1|}{\sqrt{0 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

40 • 1. Dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:
 $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$,
 $F(2; 0; 1)$, $G(2; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $I(1; 0; 0)$.

2. $\overrightarrow{IF}(1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{IH}(-1; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires.
Soit $M(x; y; z)$ un point du plan (IFH).

$$\overrightarrow{IM} = \alpha \overrightarrow{IF} + \beta \overrightarrow{IH} \text{ se traduit par } \begin{cases} x - 1 = \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$$

Soit $x + 2y - z - 1 = 0$.

3. $d(G; (\text{IFH})) = \frac{|2 + 2 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. Soit K le projeté orthogonal de G sur (IH) :

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ HK} \Leftrightarrow \text{HK} = 1,$$

$$\text{puis } \text{KG}^2 = \text{HG}^2 - \text{HK}^2 \Leftrightarrow \text{KG}^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow \text{KG} = \sqrt{3}.$$

Or $\sqrt{3} \neq \frac{\sqrt{6}}{3}$ donc le projeté orthogonal de G sur (IJH) n'appartient pas à la droite (IH).

41 • 1. $d(M; \mathcal{P}) = d(M; \mathcal{Q})$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 2z - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|2x - y + 2z + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y - 2z - 1| = |2x - y + 2z + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ \text{ou} \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M(x; y; z) \in \Pi \cup \Pi'.$$

2. $\vec{n}_{\Pi}(3; 1; 0)$ et $\vec{n}_{\Pi'}(1; -3; 4)$; $\vec{n}_{\Pi} \cdot \vec{n}_{\Pi'} = 0$, donc $\Pi \perp \Pi'$.

42 • 1. $\vec{n}_P(1; 1; -2)$, $\vec{n}_Q(1; 1; 1)$; $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow P \perp Q$.

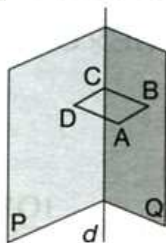
$$2. d(A; P) = \frac{|2 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

$$d(A; P) = \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

3. ABCD est un rectangle, donc :

$$\begin{aligned} d^2(A; d) &= AC^2 \\ &= AB^2 + AD^2 \\ &= \frac{6}{9} + \frac{75}{9} \\ &= 9, \end{aligned}$$

donc $d(A; d) = 3$.



43 • a) $\mathcal{P}_2: 2x + z - 5 = 0$.

b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 2 = 0$: les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

$$c) d(B, \mathcal{P}_1) = \frac{|-1 - 0 - 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$$

$$d(B, \mathcal{P}_2) = \frac{|-2 + 0 + 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$d) d^2(B, d) = d^2(B, \mathcal{P}_1) + d^2(B, \mathcal{P}_2) = \frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2},$$

$$\text{d'où } d(B, d) = \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

44 • 1. • $I = J \Leftrightarrow A, B, C$ et D coplanaires, donc $I \neq J$.

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 2 \overrightarrow{MI} = 2 \overrightarrow{MJ} \\ &\Leftrightarrow I = J, \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$$

$$\Leftrightarrow M \in P_1,$$

plan médiateur du segment [IJ].

$$2. AB = CD \text{ donc : } MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$$

$$\Leftrightarrow 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 MJ^2 + \frac{CD^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = MJ^2 \Leftrightarrow MI = MJ.$$

Donc $P_1 = P_2$.

$$\mathbf{45} \bullet 1. \mathcal{V}(\text{ABDM}) = \frac{1}{3} \times AM \times \mathcal{A}(\text{ADB}) = \frac{1}{6a}$$

$$2. a) \overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD}.$$

$$b) \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} + 0$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + 2} AM^2 = \frac{1}{a^2 + 2}.$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2 + 2} AD^2 = \frac{1}{a^2 + 2}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{a^2 + 2} - \frac{1}{a^2 + 2} = 0.$$

c) On démontre l'égalité $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ de la même manière en exprimant $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DB}$.

d) (BK) et (DK) sont deux hauteurs du triangle BDM : K est l'orthocentre du triangle BDM.

$$3. \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 + 0 = 0.$$

De même, $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0 + 0 = 0$. Orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDM), la droite (AK) est perpendiculaire à ce plan.

4. a) En appliquant le théorème de Pythagore dans

$$\text{les triangles ADM et ABM, } BM = DM = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}.$$

Ou, peut-être plus dans l'esprit de l'énoncé : K est le barycentre du système $\{(M, a^2); (I, 2)\}$ avec I milieu de [BD] donc la hauteur (AK) est aussi médiatrice de [BD].

$$AI^2 = \left(\frac{1}{a^2} + 1\right) - \frac{1}{2} = \frac{2 + a^2}{2a^2} \text{ donc}$$

$$\text{Aire (BDM)} = \frac{1}{2} AI \times BD = \frac{1}{2} \times \frac{2 + a^2}{2a^2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a}$$

$$b) \text{ Dans } \mathbb{R}^{++}, \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a} = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\mathcal{V}(\text{ABDM}) = \frac{1}{6\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} AK \text{ et } AK = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Équation cartésienne d'un plan

$$\mathbf{46} \text{ a) } 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$b) x - 3y + 3z + 5 = 0.$$

47 a) $\vec{AB}(-1; 1; 1)$, et soit $\vec{u}(1; 1; 1)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc la droite (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

• Notons $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$.

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = -a + b + c = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = a + b + c = 0$, d'où $a = 0$ et $b = -c$. Le vecteur $\vec{v}(0; 1; -1)$ est normal au plan $\mathcal{Q}$ qui admet une équation de la forme $y - z + d = 0$.

A appartenant à $\mathcal{Q}$, $d = 0$ et $y - z = 0$.

b) Avec les mêmes notations, $\vec{AB}(0; -2; 1)$ et $\vec{u}(1; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires et (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

• $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -2b + c = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = a + c = 0$, d'où si on choisit $b = 1$, le vecteur $(-2; 1; 2)$ est normal à $\mathcal{Q}$. Puis :

$$-2x + y + 2z + d = 0 \text{ et } d = 0,$$

$-2x + y + 2z = 0$ est une équation du plan $\mathcal{Q}$.

c) Avec les mêmes notations, $\vec{AB}(-1; -2; 2)$ et $\vec{u}(2; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires et (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

• $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -a - 2b + 2c = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2a + c = 0$ d'où, si on choisit $a = 1$, le vecteur $(1; -\frac{5}{2}; -2)$ est normal à $\mathcal{Q}$.

Puis $x - \frac{5}{2}y - 2z + d = 0$ et $d = \frac{7}{2}$: $x - \frac{5}{2}y - 2z + \frac{7}{2} = 0$ est une équation du plan $\mathcal{Q}$.

48 1. Le vecteur $\vec{k}(0; 0; 1)$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}_1(1; -\sqrt{3}; 0)$ normal à $\mathcal{P}_1$, donc (Oz) est parallèle à $\mathcal{P}_1$. De même, $\vec{k}$ est orthogonal à $\vec{n}_2(\sqrt{3}; -1; 0)$, normal à $\mathcal{P}_2$, donc (Oz) est parallèle à $\mathcal{P}_2$.

$\vec{k}$ étant un vecteur normal à (xOy) , celui-ci est perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$$2. \bullet d_1 : \begin{cases} x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc d_1 passe par $A(-\sqrt{3}; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}_1(\sqrt{3}; 1; 0)$.

$$\bullet d_2 : \begin{cases} x\sqrt{3} - y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x\sqrt{3} + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc d_2 passe par $B(0; 1; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}_2(1; \sqrt{3}; 0)$.

$$3. \vec{u}\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right) \text{ et } \vec{v}(1; \sqrt{3}; 0);$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}),$$

$$\text{soit } 2 = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \times \sqrt{1 + 3} \times \cos(\vec{u}, \vec{v}),$$

$$\text{d'où } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } (\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ.$$

49 • 1. a) $CF = CH = FH = \sqrt{2}$.

b) • $AC = AH = \sqrt{2}$; $GC = GH = 1$; $IC = IH$ (car I est le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral CFH), donc A , G et I appartiennent bien au plan médiateur du segment $[CH]$.

• $AC = AF = \sqrt{2}$; $GC = GF = 1$; $IC = IF$, donc A , G et I appartiennent bien au plan médiateur du segment $[CF]$.

$$c) \begin{cases} (AG) \perp (CH) \\ (AG) \perp (CF) \end{cases} \Rightarrow (AG) \perp (CFH).$$

$$\begin{cases} (AI) \perp (CH) \\ (AI) \perp (CF) \end{cases} \Rightarrow (AI) \perp (CFH), \text{ donc } (AG) = (AI).$$

2. $F(0; 0; 0)$, $E(1; 0; 0)$, $G(0; 1; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $A(1; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$, $D(1; 1; 1)$, $H(1; 1; 0)$ et $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

a) $CF = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} = FH = CH$.

b) Le plan médiateur de $[CH]$ a pour vecteur normal $\vec{CH}(1; 0; -1)$ et passe par le milieu de $[CH]$ de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

$x - z = 0$ est une équation de ce plan médiateur, vérifiée par les coordonnées des points A , G et I .

De la même manière, $y + z - 1 = 0$ est une équation du plan médiateur de $[CF]$, vérifiée par les coordonnées de A , G et I .

c) $\vec{AG} \cdot \vec{FC} = 0$ et $\vec{AG} \cdot \vec{FH} = 0$: $\vec{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFH) , donc $(AG) \perp (CFH)$.

D'autre part, $\vec{AI} = \frac{2}{3} \vec{AG}$, donc (AG) passe par I .

Sphères

50 1. $\vec{\Omega A}(-3; 1; -2)$ et $\Omega A = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$.

2. $\vec{\Omega M}(x - 2; y + 1; z - 3)$;

$$\Omega M^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2.$$

$$3. \Omega M^2 = \Omega A^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 14.$$

51 Corrigé dans le manuel.

52 1. $\Omega A^2 = 2$ et $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$.

2. $\Omega A^2 = 66$ et $x^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 66$.

3. $\Omega A^2 = 9$ et $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$.

53 • 1. $\Omega\left(2; \frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $AB = \sqrt{36 + 9 + 9} = 3\sqrt{6}$, $r = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ et une équation de la sphère est :

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}.$$

2. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) + (y - 5)(y - 2) + (z - 5)(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 + y^2 - 7y + 10 + z^2 - 7z + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}.$$

54 • 1. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 11$

2. $\mathcal{P}_A : x + 3y - z - 13 = 0$;

$\mathcal{P}_B : x + 3y - z + 9 = 0$.

55 • $d(A; \mathcal{P}) = \frac{|2 - 4 + 6 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

Donc la sphère cherchée a pour équation :

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{14}.$$

56 • 1. $2 - 2 + 2z - 4 = 0$ soit $z = 2$.

2. $\vec{n}(1; -2; 2)$ est normal à $\mathcal{P}$ et de norme 3, d'où :
 $\vec{n}_1(1; -2; 2)$ et $\vec{n}_2(-1; 2; -2)$.

3. $(A\Omega_1)$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et $A\Omega_1 = 3$;
 S_1 est tangente en A à $\mathcal{P}$.

4. $\Omega_1(3; -1; 4)$, $\Omega_2(1; 3; 0)$ et $r = 3$, d'où :
 $S_1 : (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9$;
 $S_2 : (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$.

Recherche d'ensemble

57 • 1. Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB). Puisque $AB = 8$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -12 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -12 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = -\frac{3}{16} \overrightarrow{AB}.$$

L'ensemble cherché est le plan perpendiculaire à (AB) passant par H.

2. Soit I le milieu de [AB].

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IM}) = -\frac{AB^2}{4} + IM^2.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -12 \Leftrightarrow -\frac{64}{4} + IM^2 = -12 \Leftrightarrow IM^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow IM = 2$$

$$\Leftrightarrow M \in S \text{ (où } S \text{ est la sphère de centre I et de rayon 2)}.$$

58 • Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, 2) et I le milieu de [AB].

a) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [GI].$$

b) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$
 $\Leftrightarrow M \text{ appartient au plan perpendiculaire à (AB) et passant par G.}$

c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = 0$ [1].
 Soit K le barycentre de (B, 1) et (C, -2).

[1] $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (-\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = 0 \Leftrightarrow M \text{ appartient à la sphère de diamètre } [AK].$

Demi-espaces

59 A(4; 0; 0), B(0; 2; 0) et C(0; 0; 3) ne sont pas alignés et définissent un plan.

• Soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à (ABC) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -4a + 2b = 0;$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -4a + 3c = 0.$$

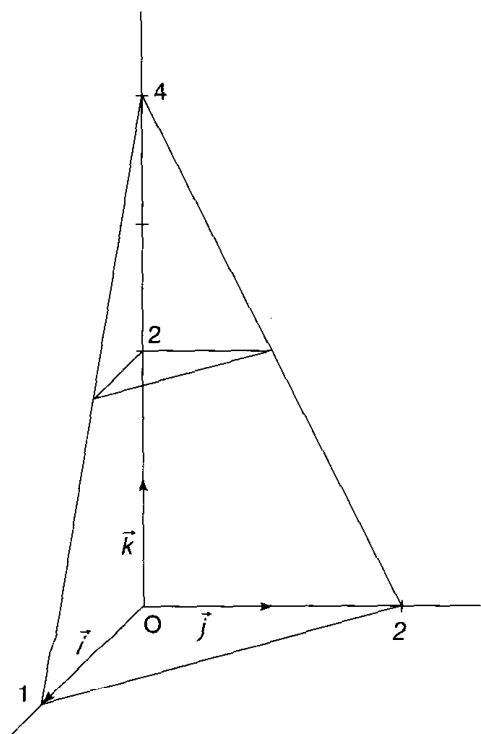
En choisissant $a = 3$, $\vec{n}(3; 6; 4)$ et une équation du plan (ABC) est $3x + 6y + 4z - 12 = 0$ (que l'on pouvait obtenir directement en utilisant la remarque faite dans « Comprendre » page 385). Le tétraèdre OABC est caractérisé par le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x > 0, y > 0, z > 0 \\ 3x + 6y + 4z - 12 < 0 \end{cases}$$

60 • $6x + 3y + 4z - 12 = 0$ est une équation du plan (ABC) et $2x + 3y + z - 6 = 0$ est une équation du plan (ACD), d'où le système d'inéquations caractérisant le tétraèdre ABCD :

$$\begin{cases} x > 0 \\ z > 0 \\ 2x + 3y + z - 6 > 0 \\ 6x + 3y + 4z - 12 < 0 \end{cases}$$

61 •



Prendre toutes les initiatives

62 Oui, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1. On a deux possibilités $\vec{w}$ et $-\vec{w}$.

Les coordonnées $(x; y; z)$ de $\vec{w}$ (et de $-\vec{w}$) vérifient :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -4x \\ 18x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{w} \left(\frac{\sqrt{2}}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{6}; -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

63 • $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 2 = 0$: les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

$$d(A, \mathcal{P}_1) = \frac{7}{\sqrt{6}}; d(A, \mathcal{P}_2) = \sqrt{5}$$

$$d^2(A, \Delta) = d^2(A, \mathcal{P}_1) + d^2(A, \mathcal{P}_2) = \frac{79}{6}$$

$$\text{d'où } d(A, \Delta) = \sqrt{\frac{79}{6}}$$

64 • $\overrightarrow{AB}(-4; 1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; 3; -1)$ ne sont pas colinéaires.

$$D \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -3 \\ x + 3y = 1 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution : les points A, B,

C et D ne sont pas coplanaires (le couple $(-\frac{7}{2}; \frac{3}{2})$

est solution du système composé des deux dernières équations mais n'est pas solution de la première équation).

I appartient aux plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ médiateurs respectivement des segments $[AB], [AC]$ et $[AD]$.

Les coordonnées $(x; y; z)$ de I sont solutions du

$$\text{système : } \begin{cases} -4x + y + z - 3 = 0 \\ -2x + 3y - z + 3 = 0 \\ -3x + y - 5z + \frac{9}{2} = 0 \end{cases}$$

Problèmes

(page 401)

66 Partie A :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: le triangle ABC est rectangle en A.

2. $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}(1; 1; 1)$ normal au plan $\mathcal{P}$: (AB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et $1 + 1 + 1 - 3 = 0$: le plan $\mathcal{P}$ passe par A.

3. $\mathcal{P}' : x - z - 1 = 0$.

$$4. \Delta \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Choisissons $x = 1$, alors $M(1; 2; 0)$: le vecteur $\overrightarrow{AM}(-2; 4; -2)$ est un vecteur directeur de Δ .

Partie B :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$: la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

$$2. \mathcal{V}(ABDC) = \frac{1}{3} \times AD \times \frac{AB \times AC}{2} = 27.$$

$$3. \cos \widehat{BDC} = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC} = \frac{54}{54\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. a) S = \frac{1}{2} DB \times DC \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27.$$

Le point I a pour coordonnées $(-\frac{3}{4}; -\frac{9}{8}; \frac{9}{8})$.

65 • $\vec{v}$ et $\vec{n}(2; -1; -1)$ normal au plan $\mathcal{P}$, ne sont pas orthogonaux : la droite d coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point $B(x; y; z)$ et se projette orthogonalement selon une droite d' sur le plan $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{v} \Leftrightarrow \exists k / \overrightarrow{AB} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -k \\ y - 2 = -k \\ z + 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 2 - k \\ z = k - 1 \end{cases}$$

$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2(2 - k) - (2 - k) - (k + 1) + 3 = 0$, d'où $k = 3$ et $B(-1; -1; 2)$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n} \Leftrightarrow \exists k / \overrightarrow{AH} = k\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2k \\ y - 2 = -k \\ z + 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = 2 - k \\ z = -k - 1 \end{cases}$$

$H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2(2k + 2) - (2 - k) - (-k + 1) + 3 = 0$, d'où $k = -1$ et $H(0; 3; 0)$.

La droite d se projette en (BH) sur le plan $\mathcal{P}$.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}}{BA \times BH} = \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ et } \alpha \approx 28,125^\circ.$$

b) Soit d la distance de A au plan (BDC) :

$$\mathcal{V}(ABDC) = \frac{1}{3} \times d \times 27 = 27 \text{ d'où } d = 3.$$

67 • 1. $AB = BC = CA = a\sqrt{2}$: ABC est équilatéral.

2. $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 + 0 = 0$.

(OH) est orthogonale à (AB) et par hypothèse à (IC) donc au plan (ABC) et en particulier à (BC).

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$.

3. L'introduction d'un repère judicieusement choisi n'arrive qu'à la question 4...

$$\mathcal{V}(ABDC) = \frac{1}{3} \times OC \times \frac{OA \times OB}{2} = \frac{1}{3} \times OH \times \frac{IC \times AB}{2}$$

$$OH = \frac{OA \times OB \times OC}{IC \times AB} = \frac{a^3}{a\sqrt{6} \times a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

4. a) Cela résulte de la nature de H : isobarycentre des points A, B et C.

b) $D(-\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; -\frac{a}{3})$ d'où :

$$\overrightarrow{DA}(\frac{4a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}) \text{ et } DA = a\sqrt{2}.$$

De même, $DB = DC = a\sqrt{2}$: ABCD est régulier.

c) (OH) est contenue dans les plans médiateurs de [AB], [BC] et [CA] : $\Omega \in (OH)$.

Comme $\overrightarrow{O\Omega}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OH}$, les coordonnées de Ω sont de la forme $(x; x; x)$.

$$\Omega A^2 = \Omega D^2 \Leftrightarrow (a - x^2) + 2x^2 = 3\left(-\frac{a}{3} - x\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}.$$

$$\text{Donc } \Omega\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{6}\right).$$

Problèmes

(page 401)

68 1. b) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB})$; $G(2; 3; 0)$.

2. a) $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$
 $\Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de diamètre [CG].

b) $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) + y(y-3) + z(z-4) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 4z = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}.$

3. Notons $\mathcal{C}$ l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{25}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(0; \frac{3}{2}; 2\right)$, de rayon $\frac{5}{2}$, dans le plan (yOz) .

4. $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$
 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = 24$
 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}) + GO^2 + 2GA^2 - 3GB^2 = 24$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}) = 0.$

Or, le vecteur $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $(12; -18; 0)$, donc :

$MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \vec{u} = 0$,
 avec $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc le plan passant par le point G et de vecteur normal $\vec{u}$.

C'est nouveau au bac

(page 402)

69 1. b - 2. a - 3. c - 4. a ; b - 5. a.

70 1. F - 2. V - 3. V - 4. V - 5. V.

71 1. Cours.

2. $\frac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|x-y-z-3|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x+1=0$

ou $2y+2z-3=0$.

Activités (page 404)

ACTIVITÉ 1

Exemple 1 :

1. On résout le système formé de [2] et [3] :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 - z \\ x + y = 2 + z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 2y - z \\ 1 + 3y - z = 2 + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2y - z \\ y = \frac{1 + 2z}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5 + z}{3} \\ y = \frac{1 + 2z}{3} \end{cases}$$

Par substitution dans [1] : $2\left(\frac{5+z}{3}\right) - \frac{1+2z}{3} + 3z = 0$,

d'où : $z = -1$, puis $x = \frac{4}{3}$ et $y = -\frac{1}{3}$.

2. (S) admet le triplet $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$ pour unique solution.

Exemple 2 :

$$1. \begin{cases} L_1 + L_2 : 2x + 2y = -2 \\ L_2 + L_3 : 2x = 2 \end{cases}$$

2. D'où $x = 1, y = -2, z = 1$.

S'il existe des solutions, alors seul le triplet $(1; -2; 1)$ peut en être une.

3. Réciproquement, le triplet $(1; -2; 1)$ est bien solution.

Ainsi (S) admet le triplet $(1; -2; 1)$ pour unique solution.

Exemple 3 :

1. Par la méthode de Gauss, (S) équivaut à :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ainsi (S) admet le triplet $(1; 2; 3)$ pour unique solution.

Travaux dirigés (page 415)

TD 1

1. a) G barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$ est aussi celui de $(A, 1), (K, 3)$ (règle d'associativité).

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AK}.$$

b) Même raisonnement pour les autres médianes : G est situé aux trois quarts de chacune d'elles en partant du sommet.

2. a) G barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$ est aussi celui de $(I, 2), (J, 2)$ (règle d'associativité). Ainsi G est le milieu de la bimédiane [IJ].

b) Même raisonnement pour les autres bimédianes d'où le résultat.

2 1. a) $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{BC}$ équivaut à P est le barycentre de

$$\left(B, \frac{4}{5}\right), \left(C, \frac{1}{5}\right), \text{ donc de } (B, 4), (C, 1).$$

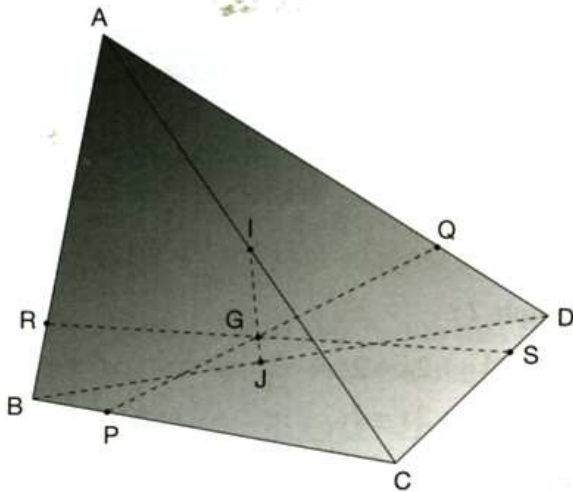
De même, Q est celui de $(A, 1), (D, 3)$.

b) G est le barycentre de $(P, 5), (Q, 4)$ (règle d'associativité), donc $G \in (PQ)$.

2. De même, R est le barycentre de $(A, 1), (B, 4)$ et S celui de $(C, 1), (D, 3)$, donc G est le barycentre de $(R, 5), (S, 4)$; ainsi $G \in (RS)$. Ainsi (PQ) et (RS) sont sécantes en G.

3. I est le milieu de [AC] ; on note J le barycentre de $(B, 4), (D, 3)$; G est le barycentre de $(I, 2), (J, 7)$ (nouvelle utilisation de la règle d'associativité).

Ainsi $J \in (BD)$ et $J \in (IG)$; (IG) et (BD) sont sécantes en J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{7} \overrightarrow{BD}$.



TD 2

1 2. a) Lorsque $m = 0$, $G_0 = O$.

b) Lorsque $m = 1$, G_1 est le barycentre de $(O, 1)$, $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, -2)$.

$$\overrightarrow{G_1 O} + \overrightarrow{G_1 A} + \overrightarrow{G_1 B} - 2 \overrightarrow{G_1 C} = \vec{0},$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{G_1 O} + 2 \overrightarrow{G_1 I} - 2 \overrightarrow{G_1 C} = \vec{0}, \text{ donc } \overrightarrow{OG_1} = 2 \overrightarrow{CI}.$$

c) Pour tout réel m de $[0; 1]$,

$$\overrightarrow{G_m O} + m \overrightarrow{G_m A} + m \overrightarrow{G_m B} - 2m \overrightarrow{G_m C} = \vec{0},$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{G_m O} + 2m \overrightarrow{G_m I} - 2m \overrightarrow{G_m C} = \vec{0},$$

$$\text{soit } \overrightarrow{OG_m} = 2m \overrightarrow{CI}.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{OG_m} = m \overrightarrow{OG_1}, m \in [0; 1].$$

Le lieu de G_m est le segment $[OG_1]$.

2 Méthode 1

1. Pour tout réel m de $[0; 1]$, d'après le théorème d'associativité, P_m est le barycentre de $(I, 2m)$, $(F, 2m)$, $(C, 4 - 4m)$, donc $P_m \in (FIC)$.

2. Par une nouvelle application du théorème d'associativité, P_m est le barycentre de $(J, 4m)$, $(C, 4 - 4m)$ soit de (J, m) , $(C, 1 - m)$.

$$m \overrightarrow{P_m J} + (1 - m) \overrightarrow{P_m C} = \vec{0},$$

$$\text{d'où } m(\overrightarrow{P_m J} - \overrightarrow{P_m C}) + \overrightarrow{P_m C} = \vec{0}, \text{ donc } \overrightarrow{CP_m} - m \overrightarrow{CJ} = \vec{0}.$$

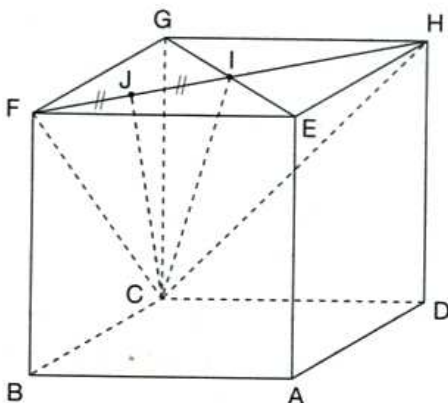
3. Pour tout réel m

de $[0; 1]$,

$$\overrightarrow{CP_m} = m \overrightarrow{CJ}$$

donc le lieu de P_m est le segment

$[CJ]$.



Méthode 2

1. P_m a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}m; \frac{1}{4}m; m\right)$.

2. D'où une représentation paramétrique du lieu de P_m :

$$\begin{cases} X_m = \frac{3}{4}m \\ Y_m = \frac{1}{4}m, m \in [0; 1] \\ Z_m = m \end{cases}$$

Ce lieu est le segment d'extrémités les points

$$C(0; 0; 0) \text{ et } C'\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 1\right).$$

3. On vérifie aisément que $J = C'$ et on retrouve que le lieu de P_m est $[CJ]$.

TD 3

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{1. a)} \quad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad (\text{immédiat}).$$

$$\mathbf{b)} \quad M(x; y; z) \in \mathcal{P}_V \Leftrightarrow \overrightarrow{VM} \cdot \overrightarrow{AV} = 0.$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{P}_V : (x - m)(m - a) + (y - n)(n - b) + z(-c) = 0.$$

$$\text{Or, } m^2 + n^2 = 1, \text{ donc}$$

$$\mathcal{P}_V : (m - a)x + (n - b)y - cz - 1 + am + bn = 0.$$

$$\mathbf{2. a)} \quad \mathcal{P}_I : (1 - a)x - by - cz - 1 + a = 0;$$

$$\mathcal{P}_J : -ax + (1 - b)y - cz - 1 + b = 0;$$

$$\mathcal{P}_K : -ax - (1 + b)y - cz - 1 - b = 0.$$

$$\mathbf{b)} \quad \begin{cases} (1 - a)x - by - cz = 1 - a \\ -ax + (1 - b)y - cz = 1 - b \\ -ax - (1 + b)y - cz = 1 + b \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} x = -a \\ y = -b \\ z = \frac{a^2 + b^2 - 1}{c} \end{cases}$$

D'où les coordonnées de F .

$$\mathbf{3.} \quad \overrightarrow{FV} \begin{pmatrix} m + a \\ n + b \\ \frac{a^2 + b^2 - 1}{c} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AV} \begin{pmatrix} m - a \\ n - b \\ -c \end{pmatrix}$$

d'où $\overrightarrow{FV} \cdot \overrightarrow{AV} = 0$, puisque $m^2 + n^2 = 1$; ainsi pour tout point V de Γ , $F \in \mathcal{P}_V$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 418)

1. Caractérisations barycentriques

1 a) $t = \frac{1}{2}$. b) $t = \frac{3}{5}$. c) $t = -1$.

2 a) $\alpha = 5, \beta = 2$. b) $\alpha = 3, \beta = -1$. c) $\alpha = 4, \beta = -3$.

3 Dessin 1 :

A : barycentre de (B, 5), (C, -3);

B : barycentre de (A, 2), (C, 3);

C : barycentre de (A, -2), (B, 5).

Dessin 2 :

A : barycentre de (B, 2), (C, 1);

B : barycentre de (A, 3), (C, -1);

C : barycentre de (A, 3), (B, -2).

4 a) $x = 1, y = 1$. b) $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}$.

5 a) $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = -1$. b) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$.
c) $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -4$. d) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$.

6 Corrigé dans le manuel.

7 1. I décrit le segment [BC].

2. D'après le théorème d'associativité, M est le barycentre (A, 1), (I, 1) donc le milieu de [AI].

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AI}$ donc M est

l'image de I dans l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

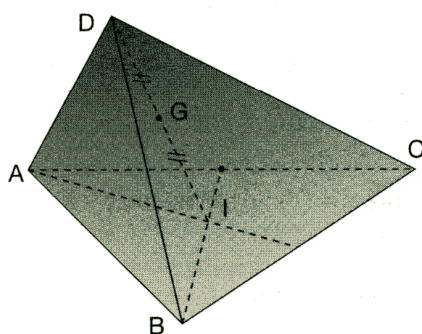
Le lieu du point M est l'image de [BC] par h c'est-à-dire le « segment des milieux » [JK].

8 $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$.

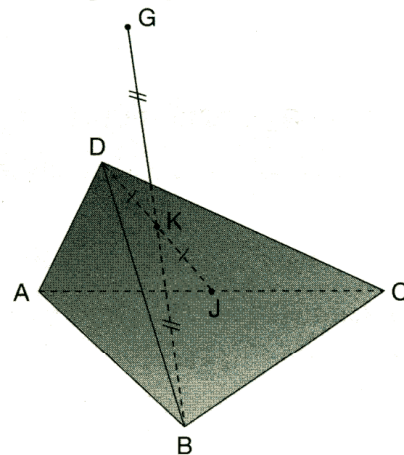
G est le barycentre de (A, 1), (B, 2), donc $\lambda = 2$.

9 $a = 4, b = 1, c = 1, d = 2$.

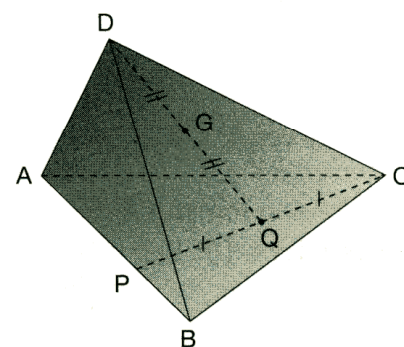
10 a) G : barycentre de (I, 3), (D, 3) avec I centre de gravité de ABC. Donc G est le milieu de [ID].



b) G : barycentre de (J, -2), (D, -2), (B, 2) avec J milieu de [AC]; G : barycentre de (K, -4), (B, 2) avec K milieu de [JD]. Ainsi $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BK}$. Donc G est le symétrique de B par rapport à K.



c) G : barycentre de (P, 3), (C, 3), (D, 6) avec P barycentre de (A, 1), (B, 2); G : barycentre de (Q, 6), (D, 6) avec Q milieu de [PC]. Donc G est le milieu de [DQ].



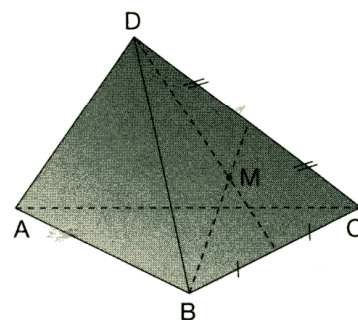
11 1. $\overrightarrow{AE} = a \overrightarrow{AD}$ donc E est le barycentre de (A, 1 - a), (D, a). De même, F est le barycentre de (B, 1 - a), (C, a).

2. a) Soit G le barycentre de (A, 1 - a), (B, 1 - a), (C, a), (D, a). D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de (E, 1), (F, 1). Donc $G = H$, milieu de [EF].

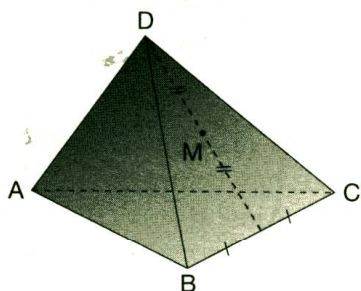
b) Mais H est aussi barycentre de (I, 2 - 2a), (J, 2a), donc I, J et H sont alignés.

12 a)

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$;
M est l'isobarycentre de B, C, D donc $M \in (BCD)$.



b) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}$; M est le barycentre de (B, 1), (C, 1), (D, 2) donc $M \in (BCD)$.



2. Représentation paramétrique d'une droite

13

a) $d : \begin{cases} x = -1 \\ y = t + 2, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$

b) $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$

14

a) $(AB) : \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

b) $[AB] : \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1, t \in [0; 1] \\ z = t \end{cases}$

c) $[AB) : \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1, t \in [0; +\infty[\\ z = t \end{cases}$

d) $[BA) : \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = -2t + 3, t \in [0; +\infty[\\ z = -t + 1 \end{cases}$

15 a) (E_1) : demi-droite d'origine $A(1; 0; -2)$ dirigée par $\vec{u}(2; 3; -1)$.

b) (E_2) : segment $[AB]$ avec $A(1; 0; -2)$ et $B(3; 3; -3)$.

c) (E_3) : segment $[AB']$ avec $A(1; 0; -2)$ et $B'(-1; -3; -1)$.

Note : ce segment est le symétrique de $[AB]$ par rapport à A.

d) (E_4) : demi-droite d'origine $A(1; 0; -2)$ dirigée par le vecteur $-\vec{u}(-2; -3; 1)$.

16 1. $\vec{u}(-2; -1; 1)$, $I(1; 1; -2)$.

2. $A \in d, (t = -1), B \notin d$.

3. $M(-4011; -2005; 2004)$.

17 Corrigé dans le manuel.

18

a) $d' : \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 3, t \in \mathbb{R} \\ z = 9 \end{cases}$

b) $d' : \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = 3t - 3, t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 9 \end{cases}$

c) $d' : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 3, t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 9 \end{cases}$

19 Oui : $d = (A; \vec{u})$ avec $\vec{u}(2; 1; -3)$ et $A(-1; 0; 1)$; d' a pour vecteur directeur $\vec{u}' = -3\vec{u}$ et $A \in d', (s = \frac{2}{3})$, donc $d = d'$.

20 1. Les droites (AJ) et (CI) ont pour représentations paramétriques

$$(AJ) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}; (CI) : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}s + 1 \\ y = 1 \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

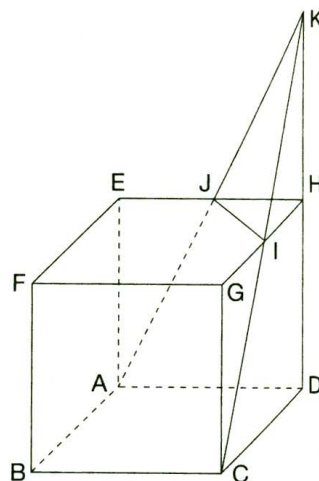
2. La résolution du système conduit à : $s = t = 2$.

Ainsi (AJ) et (CI) sont sécantes au point $K(0; 1; 2)$.

3. Dans le triangle EGH,

$$\vec{JI} = \frac{1}{2}\vec{EG} \text{ soit } \vec{JI} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

Ainsi les points A, C, I, J sont coplanaires et ACIJ est un trapèze de bases $[AC]$ et $[IJ]$, donc (AJ) et (CI) sont sécantes en un point K.



Remarque : (AJ) et (CI) sont contenues respectivement dans les plans (AEH) et (CGH) sécants suivant la droite (DH) donc K appartient aussi à (DH). Considérons l'homothétie h de centre I et de rapport -1 telle que $G \mapsto H$. La droite (GC) a pour image sa parallèle passant par H c'est-à-dire (DH); ainsi l'image de C est à l'intersection de (CI) et (DH), c'est donc K. D'où $\vec{HK} = -\vec{GC} = -\vec{HD}$; ainsi H est le milieu de $[DK]$.

21 $d = (A; \vec{u})$ avec $\vec{u}(2; -4; 3)$ et $A(-1; 1; 2)$.

d' a pour vecteur directeur $\vec{u}' = -\frac{1}{6}\vec{u}$ et $A \in d', (t = -3)$, donc $d = d'$.

$$1. (IK) : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$(FJ) : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}s + 1 \\ y = s \\ z = -s + 1 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

$$2. \begin{cases} -t + 1 = -\frac{1}{2}s + 1 \\ \frac{1}{2} = s \\ t = -s + 1 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution.}$$

Donc (IK) et (FJ) ne sont pas sécantes. Or $\overrightarrow{IK}(-1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{FJ}(-\frac{1}{2}; 1; -1)$ ne sont pas colinéaires, donc (IK) et (FJ) ne sont pas parallèles. Donc I, J, K, L sont non coplanaires.

3. Dans le triangle BCD, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$; donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{FH}$.
Ainsi $H \in (IJF)$ et $K \notin (IJF)$.

3. et 4. Intersections de plans et de droites

23 a) $\vec{n}_1(1; 1; 0)$ et $\vec{n}_2(1; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$$d : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$d = (A; \vec{u})$ avec $A(1; 1; 0)$ et $\vec{u}(-1; 1; 1)$.

b) $\vec{n}_1(-1; 1; 1)$ et $\vec{n}_2(2; -1; 2)$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$$d : \begin{cases} x = -3t + 4 \\ y = -4t + 7 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$d = (A; \vec{u})$ avec $A(4; 7; 0)$ et $\vec{u}(-3; -4; 1)$.

24 1.

$$d' : \begin{cases} x = 2t + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a) d et d' ont même vecteur directeur $\vec{u}(2; 0; 1)$.

b) $A(-1; 2; 1) \in d$ mais $A \notin d'$, donc d est strictement parallèle à d' .

26 Intersection :

- de $\mathcal{P}$ et de $(O; \vec{i})$: $I(2; 0; 0)$;
- de $\mathcal{P}$ et de $(O; \vec{j})$: $J(0; 3; 0)$;
- de $\mathcal{P}$ et de $(O; \vec{k})$: $K(0; 0; -6)$.

27 a) $\overrightarrow{AB}(2; 0; -4)$, $\vec{n}(1; 1; 1)$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -2$.
Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$, d et $\mathcal{P}$ sont sécants en I.

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{Donc } I(2; 2; -3).$$

b) $\vec{u}(1; -2; 0)$, $\vec{n}(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{6})$ d'où $\vec{u} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{6}$.

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, d et $\mathcal{P}$ sont sécants en I.

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } I(0; 3; 0).$$

28 a) $\vec{n}(1; -1; 2)$, $\vec{u}(2; 1; -3)$; $\vec{u} \cdot \vec{n} = -5$.

d et $\mathcal{P}$ sont sécants en $I(-1; 0; 1)$.

b) $\vec{n}(2; 3; -1)$, $\vec{u}(1; 2; 8)$; $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

d et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

Or $A(1; 1; -3) \in d$ et $A \notin \mathcal{P}$, donc $d \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

29 1. a) d : droite passant par $A(-1; 0; 1)$ et dirigée par $\vec{u}(4; 2; 3)$;

$\mathcal{P}$: plan d'équation $x + y - 2z = 1$ de vecteur normal $\vec{n}(1; 1; -2)$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. De plus, $A \in d$ et $A \notin \mathcal{P}$, donc d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \emptyset$.

2. Par substitution des trois premières équations dans la quatrième, $0t - 3 = 1$, donc (S) n'a pas de solution.

30 a) Un seul point commun : $I(2; 1; -1)$.

b) Un seul point commun : $J(-8; 13; 22)$.

$$\mathbf{31} \text{ a) Une droite commune } d : \begin{cases} x = -\frac{7}{5}t \\ y = \frac{1}{5}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) Une droite commune } d : \begin{cases} x = -\frac{7}{5}t + 1 \\ y = \frac{1}{5}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

32 a) $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$. **b)** $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$.

33 • Système (S) : $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont strictement parallèles; $\mathcal{P}_1$ est sécant à $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.
L'ensemble des solutions de (S) est $\mathcal{S} = \emptyset$.

34 1. $\vec{n}_2(3; 2; -4)$ et $\vec{n}_3(3; -5; 13)$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivant d .

$$d: \begin{cases} x = -\frac{2}{7}t + 1 \\ y = \frac{17}{7}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$d = (A; \vec{u})$ avec $A(1; 0; 0)$ et $\vec{u}(-2; 17; 7)$.

2. Pour tout point M de d ,

$$2x - y + 3z = -\frac{4}{7}t + 2 - \frac{17}{7}t + 3t = 2,$$

donc $M \in \mathcal{P}_1$; ainsi $d \subset \mathcal{P}_1$.

3. L'ensemble des solutions de (S) est constitué des triplets $\left(-\frac{2}{7}t + 1; \frac{17}{7}t; t\right)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Il est représenté par la droite d commune aux trois plans.

35 1. $\vec{n}_1(1; -1; -2)$, $\vec{n}_2(2; 3; 1)$, $\vec{n}_3(3; 2; -1)$.

Ces vecteurs normaux pris deux à deux ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants deux à deux.

2. Intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. d = (A; \vec{u}) \text{ avec } A(1; 1; 0) \text{ et}$$

$\vec{u}(1; -1; 1)$.

3. $\vec{u} \cdot \vec{n}_3 = 0$. De plus, $A \in d$ et $A \notin \mathcal{P}_3$ donc d est strictement parallèle à $\mathcal{P}_3$.

Ensemble des solutions du système : $\mathcal{S} = \emptyset$.

36 1. a) $\vec{n}(2; -1; 0)$ et $\vec{n}'(3; 1; -1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite Δ .

$$b) M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = 5x + 5 \end{cases} \text{ d'où } \Delta: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 5 \\ z = 5\alpha + 5 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. a) **Vrai** ! Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 5)$ et $\mathcal{Q}$ pour vecteur normal $\vec{v}(5; -5; 1)$ d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Ainsi $\Delta \parallel \mathcal{Q}$.

b) **Faux** ! Δ' a pour vecteur directeur $\vec{u}'(-3; 1; 2)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc Δ et Δ' ne sont pas parallèles.

$$\text{En outre, le système } \begin{cases} \alpha = -3\beta \\ 2\alpha + 5 = 1 + \beta \\ 5\alpha + 5 = 2 + 2\beta \end{cases}$$

n'a pas de solution donc Δ et Δ' sont non coplanaires.

37 1. a) $\mathcal{P}_0: y + z + 3 = 0$, $\mathcal{P}_1: x + y + 4 = 0$. Or $\vec{n}_0(0; 1; 1)$ et $\vec{n}_1(1; 1; 0)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont sécants suivant une droite Δ .

$$b) M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 3 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y - 3 \\ x = -y - 4 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \Delta: \begin{cases} x = -t - 4 \\ y = t \\ z = -t - 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c) $A \in \Delta$ ($t = -4$) et $B \in \Delta$ ($t = -5$).

d) $A \in \mathcal{P}_m$ et $B \in \mathcal{P}_m$ donc $(AB) = \Delta$ est contenue dans $\mathcal{P}_m$.

$$2. \mathcal{P}_1: x + 2y + z + 7 = 0,$$

$$\mathcal{P}_m: mx + y + (1 - m)z + m + 3 = 0. \vec{n}_1(1; 2; 1) \text{ et } \vec{n}_m(m; 1; 1 - m) \text{ sont tels que } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_m = 3.$$

Ainsi pour tout m , $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_m \neq 0$ donc il n'existe aucun plan $\mathcal{P}_m$ orthogonal à $\mathcal{P}_1$.

$$\text{Pour } m_1 \neq \frac{1}{2}, \mathcal{P}_{m_1} \perp \mathcal{P}_{m_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{m_1} \cdot \vec{n}_{m_2} = 0 \\ \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 + (1 - m_1)(1 - m_2) = 0 \text{ soit}$$

$$\mathcal{P}_{m_1} \perp \mathcal{P}_{m_2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{m_1 - 2}{2m_1 - 1}.$$

38 1. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(1; 3; -1)$.

$\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ passe par A d'où $\mathcal{P}: x + 3y - z + 4 = 0$.

$$2. H(x; y; z) \text{ est tel que } \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \\ x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}. \text{ Ainsi } H(1; -1; 2) \text{ d'où } AH = \sqrt{6}.$$

Note : AH représente la distance du point A à la droite Δ de l'espace.

39 Prouver un alignement**Les outils :**

- Colinéarité de vecteurs.
- Propriétés de l'isobarycentre.
- Géométrie analytique.

Les objectifs :

- Prouver un alignement.
- Calculer un coefficient de colinéarité.

1. a) D'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}. [1]$$

b) I est le centre de gravité de BDE donc pour tout point M, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = 3 \overrightarrow{MI}$.

D'où, lorsque M = A, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3 \overrightarrow{AI}$. [2]

c) D'après [1] et [2], $\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{AI}$ d'où l'alignement de A, G et I.

2. a) $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (AG) d'où

$$(AG) : \begin{cases} x = t \\ y = t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

b) $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

c) Ainsi $I \in (AG)$ et $t = \frac{1}{3}$.

40 Trouver un point de concours**Les outils :**

- Relations vectorielles et barycentres.
- Barycentre de deux points et alignement.
- Règle d'associativité.

Les objectifs :

- Établir des relations barycentriques.
- Prouver le concours de trois droites.

1. a) $\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB}$ donc le point P est le barycentre de (A, 1 - x), (B, x).

b) De même, Q est le barycentre de (A, 1 - x), (D, x); R celui de (C, 1 - x), (D, x); S celui de (B, x), (C, 1 - x).

2. a) Soit G le barycentre de (A, 1 - x), (B, x), (C, 1 - x), (D, x).

L'existence est assurée car la somme des coefficients est 2, donc non nulle.

b) D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de (P, 1), (R, 1) mais aussi de (Q, 1), (S, 1) et de (I, 2 - 2x), (J, 2x). Ainsi (PR), (QS) et (IJ) concourent en G.

41 Trouver l'intersection de trois plans**Les outils :**

- Appartenance d'un point à un plan d'équation donnée.
- Intersection de plans.
- Système linéaire.

Les objectifs :

- Définir l'intersection de trois plans.
- Résoudre un système linéaire.

1. Solution 1

a) A, C, G, E appartiennent à $\mathcal{P}_1 : x - y = 0$.

b) A, B, G, H appartiennent à $\mathcal{P}_2 : y - z = 0$.

A, F, G, D appartiennent à $\mathcal{P}_3 : x - z = 0$.

c) $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ contient A et G, d'où :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (AG).$$

2. Solution 2

$$a) \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

b) Ainsi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = d$, où d est la droite définie par :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

$$d = (A; \vec{u}) \text{ avec } \vec{u}(1; 1; 1).$$

42 Trouver un lieu dans l'espace**Les outils :**

- Relations vectorielles.
- Décomposition d'un vecteur sur une base.
- Caractérisation du milieu d'un segment.

Les objectifs :

- Étudier un lieu dans l'espace.
- Caractériser analytiquement l'intérieur d'un parallélogramme.

1. a) Lorsque M = A et M' = C, I = E ;

$$M = B \text{ et } M' = C, I = F ;$$

$$M = A \text{ et } M' = D, I = G ;$$

$$M = B \text{ et } M' = D, I = H.$$

Donc E, F, G, H sont des points de $\mathcal{L}$.

b) Dans les triangles ABC et ABD, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ et

$$\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \text{ donc } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}.$$

Ainsi EFHG est un parallélogramme.

2. a) I est le milieu de [MM'] donc $2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EM'}$.

$$\text{Or } \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM'} \\ = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM'}$$

$$\text{donc } 2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM'} [1].$$

b) $M \in [AB]$ et $M' \in [CD]$ donc il existe des réels x et y dans $[0; 1]$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM'} = y\overrightarrow{CD}$.

c) D'après [1], $2\overrightarrow{EI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD}$

$$\text{d'où } \overrightarrow{EI} = x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) \text{ soit } \overrightarrow{EI} = x\overrightarrow{EF} + y\overrightarrow{EG}$$

avec $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

Ainsi $\mathcal{L}$ est contenu dans l'intérieur du parallélogramme EFHG.

3. a) $\overrightarrow{EJ} = a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{EG}$ ($a \in [0; 1], b \in [0; 1]$) s'écrit

$$\overrightarrow{EJ} = \frac{a}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{2}\overrightarrow{CD} \text{ d'où } 2\overrightarrow{EJ} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}.$$

b) Notons M le point de [AB] tel que $\overline{AM} = a\overline{AB}$ et M' celui de [CD] tel que $\overline{CM'} = b\overline{CD}$. Alors $2\overline{EJ} = \overline{AM} + \overline{CM'}$.

c) On en déduit que :

$$2\overline{EJ} = \overline{AE} + \overline{EJ} + \overline{JM} + \overline{CE} + \overline{EJ} + \overline{JM'}$$

$$\text{soit } \overline{JM} + \overline{JM'} = \vec{0}.$$

Donc J est le milieu de [MM'].

Ainsi l'intérieur du parallélogramme EFGH est contenu dans $\mathcal{L}$.

Finalement, le lieu $\mathcal{L}$ cherché est l'intérieur du parallélogramme EFHG (frontières comprises).

Pour progresser

(page 424)

Barycentres

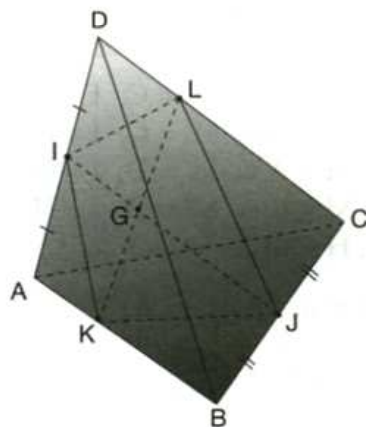
43 I est le barycentre de (A, 3), (B, 1), (C, 1), (D, 1). K est le barycentre de (A, 3), (B, -2), (C, -2), (D, -2).

44 1. a) Par utilisation du théorème d'associativité, G est le barycentre de (I, 4), (J, 2), donc G, I, J sont alignés.

b) Or K est le barycentre de (A, 2), (B, 1), et L celui de (C, 1), (D, 2), donc G est aussi le barycentre de (K, 3), (L, 3). Ainsi G, K, L sont alignés.

Note : G est le milieu de [KL].

2. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes, donc I, J, K, L sont coplanaires.



45 1. a) $M\left(\frac{2}{t+4}; \frac{1}{t+4}; \frac{1}{t+4}\right), J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$

$$\text{b) (AJ) : } \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{4}t, t \in \mathbb{R}. \\ z = \frac{1}{4}t \end{cases}$$

c) $M \in (AJ)$ avec $\lambda = \frac{4}{t+4}.$

2. J est le barycentre de (B, 2), (C, 1), (D, 1); d'après le théorème d'associativité, M est le barycentre de (A, t), (J, 4), d'où $M \in (AJ)$ avec $\overline{AM} = \frac{4}{t+4} \overline{AJ}.$

46 1. a) ABPC est un parallélogramme, donc :

$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{AC},$$

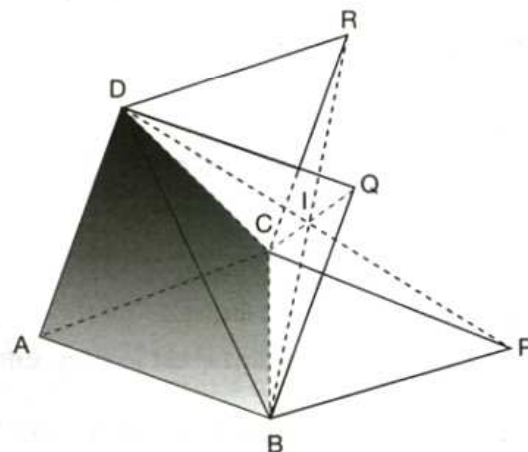
d'où P est le barycentre de (A, -1), (B, 1), (C, 1).

b) De même, Q est le barycentre de (A, -1), (B, 1), (D, 1) et R celui de (A, -1), (C, 1), (D, 1).

2. Soit I le barycentre de (A, -1), (B, 1), (C, 1), (D, 1); d'après le théorème d'associativité, I est le barycentre de (P, 1), (D, 1), mais aussi de (Q, 1), (C, 1) et de (R, 1), (B, 1).

Ainsi les droites (DP), (CQ) et (BR) concourent en I et I est le milieu de [DP], [CQ] et [BR].

Remarque : Il s'agit de trois des diagonales du parallélépipède défini par $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}.$



47 1. a) $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AG}$ (règle du parallélépipède).

$$\overline{AG} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} = -1 + 1 + 0 = 0.$$

$$\text{b) } \overline{AG} \cdot \overline{BE} = \overline{AB} \cdot \overline{BE} + \overline{AD} \cdot \overline{BE} + \overline{AE} \cdot \overline{BE} = -1 + 0 + 1 = 0.$$

c) $\overline{AG} \perp \overline{BD}$ et $\overline{AG} \perp \overline{BE}$ donc $(AG) \perp (BDE).$

2. $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = 3\overline{AI}$, donc $I \in (AG)$; de plus, $I \in (BDE)$, donc I est le point d'intersection de (AG) et (BDE). De plus, I est le point de [AG] tel que $\overline{AI} = \frac{1}{3} \overline{AG}.$

3. a) $(BDE) : x + y + z = 1.$

Note : Utiliser le résultat de l'exercice 66 ou du chapitre 14 p. 385.

b) $\vec{n}(1; 1; 1)$, vecteur normal à (BDE), est un vecteur directeur de Δ , d'où :

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = t + 1, t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}. \text{ Donc } J\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

d) La distance de H au plan (BDE) est :

$$HJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Note : Cette distance peut être obtenue à partir de l'équation de (BDE) (voir chapitre 14), $d(H; (BDE)) = \frac{|x_H + y_H + z_H - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Ensemble de points

48 Corrigé dans le manuel.

$$\begin{aligned} \text{49 } \vec{u} &= \vec{MA} + 2(\vec{MA} + \vec{AB}) - 3(\vec{MA} + \vec{AC}) \\ &= 2\vec{AB} - 3\vec{AC} \text{ (indépendant de M); } \\ \vec{v} &= 2\vec{MI}, \text{ avec I milieu de [DE].} \end{aligned}$$

1. $M \in \Delta \Leftrightarrow \vec{u}$ colinéaire à $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{IM}$ colinéaire à $\vec{u}$.
Donc Δ est la droite passant par I et dirigée par le vecteur $2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.

$$2. M \in \Gamma \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \Leftrightarrow \vec{IM} = \frac{1}{2} \|\vec{u}\|.$$

Donc Γ est la sphère de centre I, et de rayon :

$$r = \frac{1}{2} \|2\vec{AB} - 3\vec{AC}\|.$$

50 • 1. G_1 est le barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, -1) :

$$2\vec{G_1A} + \vec{G_1B} - \vec{G_1C} = \vec{0}, \text{ donc } \vec{AG_1} = -\frac{1}{2}\vec{BC}.$$

G_{-1} est le barycentre de (A, 2), (B, -1), (C, 1) :

$$2\vec{G_{-1}A} - \vec{G_{-1}B} + \vec{G_{-1}C} = \vec{0}, \text{ donc } \vec{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\vec{BC}.$$

2. a) Pour tout réel k de $[-1; 1]$,

$$(k^2 + 1)\vec{G_kA} + k\vec{G_kB} - k\vec{G_kC} = \vec{0},$$

$$\text{d'où } \vec{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \vec{BC}.$$

b) Pour tout $x \in [-1; 1]$, $f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$;

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

x	-1	1
$f'(x)$	0	0
f	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

c) Lorsque k décrit $[-1; 1]$, le coefficient $-\frac{k}{k^2 + 1}$

décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ image de $[-1; 1]$ par f .

Ainsi l'ensemble des points G_k est le segment $[G_1G_{-1}]$ de la droite parallèle à (BC) passant par A.

3. $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \|2\vec{MG_1}\| = \|2\vec{MG_{-1}}\| \Leftrightarrow \vec{MG_1} = \vec{MG_{-1}}$.
 $\mathcal{E}$ est le plan médiateur de $[G_1G_{-1}]$.

4. Pour tout point M, $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = -\vec{AB} - \vec{AC} = 2\vec{IA}$ où I est le milieu de [BC].

$M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \|2\vec{MG_1}\| = \|2\vec{IA}\| \Leftrightarrow G_1M = IA$.

$\mathcal{F}$ est la sphère de centre G_1 et de rayon $R = IA$.

5. a) $G_1(0; 0; 0)$ donc $G_1 = O$; $G_{-1}(0; 0; 4)$.

$\mathcal{E}$, plan médiateur de $[G_1G_{-1}]$, a pour équation $z = 2$;

$\mathcal{F}$, sphère de centre $O = G_1$ et de rayon $R = IA = \sqrt{6}$, a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

$$\text{Le système } \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont sécants suivant le cercle Γ :

$x^2 + y^2 = 2$ situé dans le plan $\mathcal{E}$.

b) Rayon de Γ : $r = \sqrt{2}$.

51 • 1. a) G_1 est le barycentre de (I, 2), (C, -1), (D, 1), d'où $2\vec{G_1I} - \vec{G_1C} + \vec{G_1D} = \vec{0}$,

$$\text{donc } \vec{IG_1} = \frac{1}{2} \vec{CD}.$$

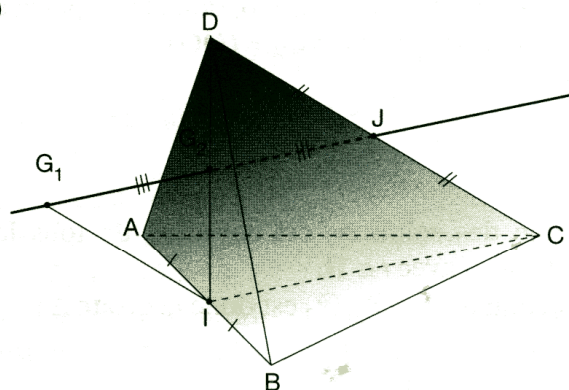
b) G_2 est le barycentre de (I, 2), (D, 2), donc G_2 est le milieu de [ID] et $\vec{IG_2} = \frac{1}{2} \vec{ID}$.

$$c) \vec{G_2J} = \vec{IJ} - \vec{IG_2} = \frac{1}{2}(\vec{IC} + \vec{ID}) - \frac{1}{2} \vec{ID} = \frac{1}{2} \vec{IC};$$

$$\vec{G_2G_1} = \vec{IG_1} - \vec{IG_2} = \frac{1}{2} \vec{CD} - \frac{1}{2} \vec{ID} = \frac{1}{2} \vec{CI}.$$

Ainsi $\vec{G_2J} = -\vec{G_2G_1}$ donc G_2 est le milieu de $[JG_1]$.

d)



2. a) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^*$.

b) Pour tout point P,

$$2m\vec{PG_m} = \vec{PA} + \vec{PB} + (m-2)\vec{PC} + m\vec{PD}.$$

Si $P = I$, $m \overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{2} \overrightarrow{IC} + \frac{m}{2} \overrightarrow{ID}$;

ainsi $a = \frac{m-2}{2}$ et $b = \frac{m}{2}$.

Donc $G_m \in \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le plan (ICD).

c) Pour tout $m \neq 0$, $m \overrightarrow{JG_m} = m \overrightarrow{JI} + m \overrightarrow{IG_m}$;

or J est le milieu de [CD] donc $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$;

ainsi $m \overrightarrow{JG_m} = -\frac{m}{2} (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + \frac{m-2}{2} \overrightarrow{IC} + \frac{m}{2} \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CI}$
(vecteur constant).

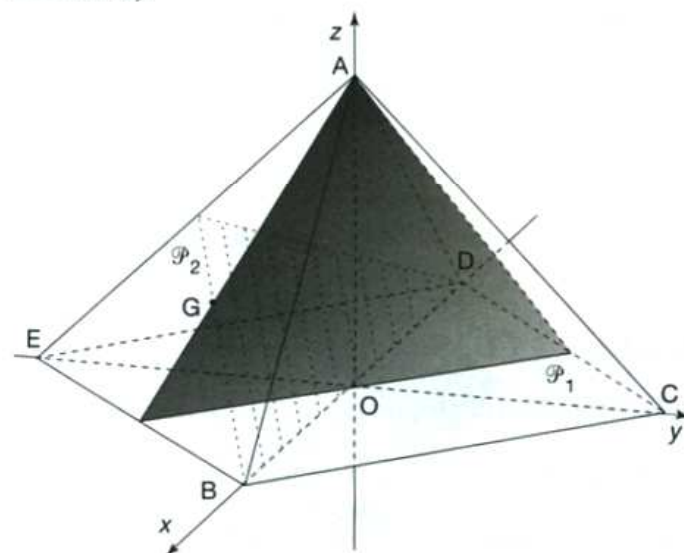
d) Pour tout $m \neq 0$, $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m} \overrightarrow{CI}$.

Lorsque m décrit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{m}$ décrit $\mathbb{R}^*$, donc $\mathcal{F}$ est la droite passant par J et dirigée par $\overrightarrow{CI}$, privée de J.

Note : D'après 1. c), $\mathcal{F}$ n'est autre que la droite (JG₂), privée de J.

Intersections d'ensembles

52 1. a)



b) $O(0; 0; 0)$ et $G(\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ sont tels que $x + y = 0$ et $y + z = 0$, donc ils appartiennent à $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

c) O et G sont tels que $x - z = 0$, donc ils appartiennent à $\mathcal{P}_3$. Ainsi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (OG)$.

$$2. (S) \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est constitué de tous les triplets $(t; -t; t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

L'intersection de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ est donc la droite Δ :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

$O \in \Delta$ et $G \in \Delta$, donc $\Delta = (OG)$.

53 • Corrigé dans le manuel.

54 • 1. $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

(ABC) : $x + y + z = 1$ (voir l'exercice 66).

$\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal à (ABC).

Or $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \vec{n}$, donc $(OG) \perp (ABC)$.

2. a) (A'B'C') a pour équation $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, soit :

$3x + 3y + 2z = 6$ (voir l'exercice 66).

b) $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$ d'où une représentation paramétrique

$$\text{de la droite (AC)} : \begin{cases} x = -k + 1 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

c) $\vec{n}'(3; 3; 2)$ vecteur normal à (A'B'C') ; $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}' = -1$.
Puisque $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}' \neq 0$, (AC) et (A'B'C') sont sécants en un point K ; $K(4; 0; -3)$.

$$3. a) \text{ De même : (BC)} : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t + 1, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

(BC) et (A'B'C') sont sécants en $L(0; 4; -3)$.

b) $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{A'B'}(-2; 2; 0)$, $\overrightarrow{KL}(-4; 4; 0)$ sont colinéaires, d'où le parallélisme des droites (AB), (A'B') et (KL).

c) $K \in (ABC) \cap (A'B'C')$; $L \in (ABC) \cap (A'B'C')$, donc les plans distincts (ABC) et (A'B'C') sont sécants suivant la droite (KL).

55 • 1. $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(0; 3; 5)$ sont non colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés.

2. a) $M \in (DH) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\text{b) Ainsi } M(x; y; z) \in (DH) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + z + 11 = 0 \\ 3y + 5z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y = 62 - 5x \\ 13z = -19 + 3x \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de (DH) :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ 13y = 62 - 5\lambda \\ 13z = -19 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. a) D et E(2; 4; -1) sont sur (DH). On peut choisir $\vec{n} = \overrightarrow{DE}$ d'où $\vec{n}(13; -5; 3)$.

b) (ABC) est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par B(0; 0; 1) d'où (ABC) : $13x - 5y + 3z - 3 = 0$.

H projeté orthogonal de D sur (ABC) est tel que

$$\begin{cases} x = \lambda \\ 13y = 62 - 5\lambda \\ 13z = -19 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ainsi H(2; 4; -1).

Note : H n'est autre que le point E utilisé en 3.a).

56 • 1. $\overrightarrow{AB}(2; -6; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; -5; -2)$ sont non colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la perpendiculaire au plan (ABC) passant par D. Alors $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y + 12 = 0 \\ -x - 5y - 2z + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{3} + 2 \\ z = -\frac{4}{3}x + 1 \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t + 2 \\ z = -\frac{4}{3}t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le plan (ABC) admet pour vecteur normal un vecteur directeur de Δ , par exemple $\vec{n}(3; 1; -4)$ (ABC) est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par C(1; -1; 1) d'où (ABC) : $3x + y - 4z + 2 = 0$.

D' projeté orthogonal de D sur (ABC) est tel que

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t + 2 \\ z = -\frac{4}{3}t + 1 \\ 3x + y - 4z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Ainsi } D'(0; 2; 1).$$

57 • 1. a) $\vec{n}_1(1; -2; 3)$ et $\vec{n}_2(1; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$$\text{b) } M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3z + 5 \\ 3y = -6 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{5z}{3} \\ y = -2 + \frac{2z}{3} \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -2 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t \end{cases}$$

2. Δ admet pour vecteur directeur $\vec{n}(-5; 2; 3)$.

Ainsi $\mathcal{R}$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A(2; 5; -2) donc $\mathcal{R} : -5x + 2y + 3z + 6 = 0$.

58 • $\overrightarrow{AB}(1; -1; 1)$ est un vecteur directeur de (AB) et $\vec{n}_m(m; 1; m)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$.

$$\text{a) } (AB) // \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

b) $(AB) \perp \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}_m$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{n}_m = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\begin{cases} m = \lambda \\ -1 = \lambda \end{cases}$$

Ainsi $(AB) \perp \mathcal{P}_m$ dans le seul cas où $m = -1$.

c) $\mathcal{P}_m$ contient (AB) peut se traduire par : $(AB) // \mathcal{P}_m$ et $B \in \mathcal{P}_m$.

La 1^{re} condition est assurée dans le seul cas où $m = \frac{1}{2}$; or $B \notin \mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$ donc il n'y a pas de solution.

59 • Cherchons une représentation paramétrique de d .

$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -x + 3 \\ z = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 3 \\ z = -2x \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t - 3, t \in \mathbb{R}. \\ z = -2t \end{cases}$$

$\vec{u}(1; -1; -2)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}(1; 1; -1)$ un vecteur normal à $\mathcal{R}$.

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc d coupe $\mathcal{R}$.

Leur point d'intersection I est tel que

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t - 3 \\ z = -2t \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \\ z = -3 \end{cases}. \text{ Ainsi } I\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; -3\right).$$

60 • 1. a) Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2; 3; 2)$

$$\text{d'où } \Delta : \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = 3t \\ z = 2t + 8 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(3; 2; -2)$. $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles. Leur intersection est définie par le système :

$$\begin{cases} 2t + 8 = -5 + 3s \\ 3t = 1 + 2s \\ 2t + 8 = -2s \end{cases}. \text{ Ce système n'a pas de solution}$$

donc $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.

$$\text{2. a) Le vecteur } \vec{n}(2; -2; 1) \text{ est tel que } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}.$$

Donc $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$.

En outre $\mathcal{P}$ passe par A(8; 0; 8) d'où $\mathcal{P} :$

$$2x - 2y + z - 24 = 0.$$

b) Pour tout point M(-5 + 3s; 1 + 2s; -2s) de $\mathcal{D}$, la distance de M au plan $\mathcal{P}$ est

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|2(-5 + 3s) - 2(1 + 2s) - 2s - 24|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 12.$$

(valeur indépendante de M).

c) $\vec{n}(2; -2; 1)$ et $\vec{k}(0; 0; 1)$ sont des vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}$ et (xOy) .

Ils sont non colinéaires donc $\mathcal{P}$ et (xOy) sont sécants suivant une droite d définie par :

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2x - 2y + z - 24 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z = 0 \\ y = x + 12 \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de d :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 12, t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

3. Le centre Ω de $\mathcal{S}$ est un point de la perpendiculaire Δ' à $\mathcal{P}$, passant par C, tel que $C\Omega = 6$.

$\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur directeur de Δ' d'où Δ' :

$$\begin{cases} x = 2t + 10 \\ y = -2t + 1, t \in \mathbb{R}. \\ z = t + 6 \end{cases}$$

Posons $\Omega(x; y; z)$. La condition $C\Omega = 6$ équivaut à $(x - 10)^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = 36$ soit $t^2 = 4$.

D'où deux points possibles obtenus pour $t = -2$ et $t = 2$: $\Omega_1(6; 5; 4)$ et $\Omega_2(14; -3; 8)$.

$\mathcal{P}$ détermine deux demi-espaces $\mathcal{E}_1$:

$2x - 2y + z - 24 < 0$ et $\mathcal{E}_2 : 2x - 2y + z - 24 > 0$.

Or $O \in \mathcal{E}_1$ et on vérifie que $\Omega_1 \in \mathcal{E}_1$ alors que $\Omega_2 \in \mathcal{E}_2$ donc le seul point qui convient est $\Omega = \Omega_1$. Équation de la sphère $\mathcal{S} : (x - 6)^2 + (y - 5)^2 + (z - 4)^2 = 36$.

61 • 2. • (BC) : $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2t + 6, t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$

Intersection de (BC) et (OA) :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 2t + 6 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ x = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc (BC) et (OA) sont sécantes en $E(6; 0; 0)$.

• (AB) : $\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = 4t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Intersection de (AB) et (OC) :

$$\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = 4t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 0 \\ y = 8 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc (AB) et (OC) sont sécantes en $F(0; 8; 0)$.

Note : (OA) = (Ox) est définie comme l'intersection de deux plans :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \text{ de même, pour } (OC) = (Oy) : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. a) (SEF) : $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{4} = 1$, soit $4x + 3y + 6z - 24 = 0$

(voir l'exercice 66).

b) $A'(1; 0; 3)$.

c) $\mathcal{P}$ a même vecteur normal que (SEF), donc a une équation du type $4x + 3y + 6z + d = 0$;

or $A' \in \mathcal{P}$ d'où $d = -22$;

ainsi $\mathcal{P} : 4x + 3y + 6z - 22 = 0$.

4. a) Intersection de $\mathcal{P}$ et (SO) :

$$\begin{cases} 4x + 3y + 6z - 22 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{11}{3} \end{cases};$$

donc $O'(0; 0; \frac{11}{3})$.

Note : (SO) = (Oz) : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

b) Intersection de (SC) et $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 6t + 6 \\ z = -4t \\ 4x + 3y + 6z - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = \frac{8}{3} \end{cases};$$

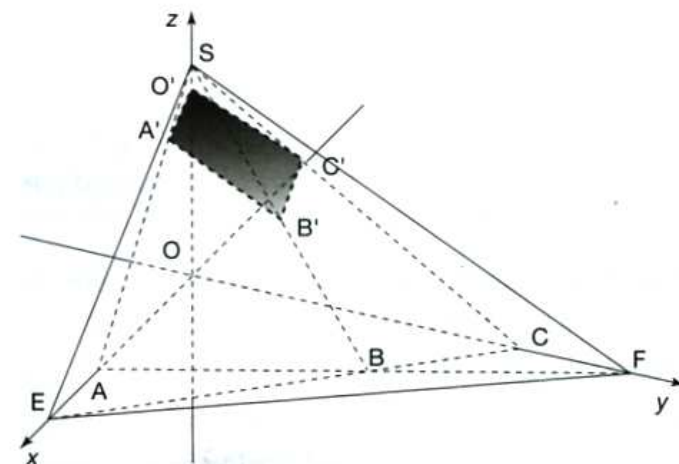
donc $C'(0; 2; \frac{8}{3})$.

c) Intersection de (SB) et $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = -4t + 4 \\ 4x + 3y + 6z - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}; \text{ donc } B'(1; 2; 2).$$

5. $\overrightarrow{O'A'}(1; 0; -\frac{2}{3})$ et $\overrightarrow{C'B'}(1; 0; -\frac{2}{3})$,

donc $O'A'B'C'$ est un parallélogramme.



62 • 1. $\vec{u}_1(1; 1; 0)$ et $\vec{u}_2(1; -1; 0)$ d'où $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ donc $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

$\vec{u}_1 \perp \vec{k}$ et $\vec{u}_2 \perp \vec{k}$ donc Δ_1 et Δ_2 sont contenues dans deux plans perpendiculaires à l'axe $(O; \vec{k})$; ces deux plans sont strictement parallèles donc $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

$$2. \Delta_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \Delta_2 : \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = -1 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

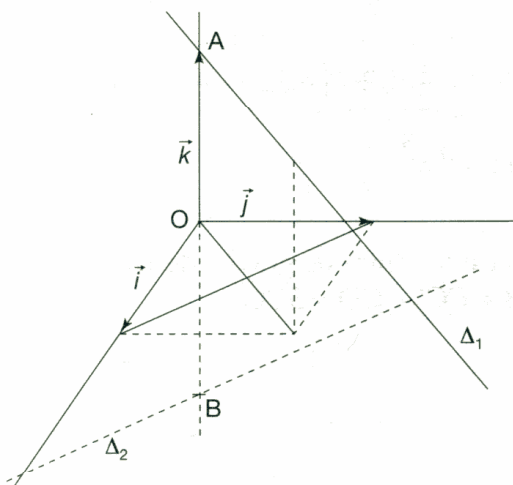
3. a) Le projeté orthogonal H de M sur Δ_1 est défini

$$\text{par } \begin{cases} H \in \Delta_1 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où le système } \begin{cases} x_H = t \\ y_H = t \\ z_H = 1 \\ x_H - x + y_H - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} t = \frac{x+y}{2} \\ x_H = y_H = \frac{x+y}{2} \\ z_H = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MH^2 &= \left(\frac{x+y}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} - y\right)^2 + (1-z)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x-y)^2 + (1-z)^2. \end{aligned}$$



Le projeté orthogonal K de M sur Δ_2 est défini par

$$\begin{cases} K \in \Delta_2 \\ \overrightarrow{MK} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \text{ d'où } x_K = \frac{x-y}{2}, y_K = \frac{y-x}{2}, z_K = -1.$$

$$\begin{aligned} MK^2 &= \left(\frac{x-y}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2} - y\right)^2 + (-1-z)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^2 + (1+z)^2. \end{aligned}$$

$$b) M \in (E) \Leftrightarrow MH^2 = MK^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 + (1-z)^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + (1+z)^2$$

$$\text{d'où } M \in (E) \Leftrightarrow xy + 2z = 0 [1].$$

4. a) Les plans orthogonaux à (AB) sont du type $\mathcal{P}_k$:

$$z = k. (E) \cap \mathcal{P}_k \text{ est défini par } \begin{cases} xy + 2z = 0 \\ z = k \end{cases}.$$

• Si $k \neq 0$, $\begin{cases} xy = -2k \\ z = k \end{cases}$. L'intersection est donc l'hyperbole d'équation $xy = -2k$ contenue dans $\mathcal{P}_k$.

• Si $k = 0$, $\begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Ainsi l'intersection de (E) avec $\mathcal{P}_0$ est la réunion des axes (Oy) et (Ox) .

b) Les plans orthogonaux à $(O; \vec{i})$ sont du type

$$\mathcal{Q}_k : x = k. (E) \cap \mathcal{Q}_k \text{ est défini par } \begin{cases} xy + 2z = 0 \\ x = k \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} z = -\frac{k}{2}y \\ x = k \end{cases}.$$

L'intersection est donc la droite d'équation $z = -\frac{k}{2}y$ contenue dans $\mathcal{Q}_k$.

Les plans orthogonaux à $(O; \vec{j})$ sont du type $\mathcal{R}_k : y = k$. L'intersection de $\mathcal{R}_k$ avec (E) est la droite d'équation

$$z = -\frac{k}{2}x \text{ contenue dans le plan } \mathcal{R}_k.$$

Résolutions de systèmes

$$63 \text{ Par hypothèse : } \begin{cases} 2b + 3c + 4p = 7,30 \\ 3b + 2c + 5p = 8,40 \end{cases}$$

Par combinaison linéaire $3L_1 - 2L_3 : 5c + 2p = 5,10$.

$$64 \begin{cases} a - b + c = 10 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 22 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi } P(x) = 4x^2 - 5x + 1.$$

$$65 \text{ 1. Pour tout réel } x, x^2 = \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma$$

$x^2 = \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta + \gamma$.

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}.$$

$$2. P(x) = x^2(x+1)^{2006}.$$

Or d'après 1. $x^2 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$

$$\text{donc } P(x) = (x+1)^{2008} - 2(x+1)^{2007} + (x+1)^{2006}.$$

D'où une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2009}(x+1)^{2009} - \frac{1}{1004}(x+1)^{2008} + \frac{1}{2007}(x+1)^{2007}.$$

$$66 \bullet (ABC) \text{ est une équation du type } \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \text{ (avec } (\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)).$$

Les points A, B, C appartiennent à ce plan d'où le

$$\text{système : } \begin{cases} \alpha a + \delta = 0 \\ \beta b + \delta = 0 \\ \gamma c + \delta = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\alpha = -\frac{\delta}{a}$; $\beta = -\frac{\delta}{b}$; $\gamma = -\frac{\delta}{c}$, $\delta \in \mathbb{R}^*$ (car $O \notin (ABC)$).

Lorsque $\delta = -1$, on obtient une équation du plan (ABC) sous la forme : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

67 • Corrigé dans le manuel.

68 • 1. $\mathcal{P}_1$ plan médiateur de [AB] passe par

$I(3; 1; -\frac{1}{2})$ milieu de [AB] et admet $\overrightarrow{AB}(-2; 2; 5)$

pour vecteur normal donc $\mathcal{P}_1: -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0$
soit $\mathcal{P}_1: 4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

2. a) Le système $\begin{cases} 4x - 4y - 10z = 13 \\ 2x - 10y - 6z = 7 \\ 3x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$ admet un uni-

que triplet solution d'où $E(2; 0; -\frac{1}{2})$.

b) $E \in \mathcal{P}_1$ donc $EA = EB$; de même $EB = EC$ et $EC = ED$.

Ainsi $EA = EB = EC = ED$ donc A, B, C, D sont sur une sphère de centre E et de rayon $r = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

69 • x, y, z désignent respectivement le nombre de pièces de 1 €, 0,50 € et 0,20 € ($x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{N}$).

$$\begin{cases} x + y + z = 49 \\ x + 0,5y + 0,2z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}z - 9 \\ y = 58 - \frac{8}{5}z \end{cases}$$

Or x, y, z ne peuvent prendre que des valeurs entières positives, d'où les conditions :

$$\begin{cases} 15 \leq z \leq \frac{145}{4} \\ z \text{ multiple de } 5 \end{cases}$$

Il existe cinq valeurs possibles du paramètre z :

15, 20, 25, 30, 35.

On vérifie que les triplets associés sont bien solutions, d'où cinq combinaisons possibles :

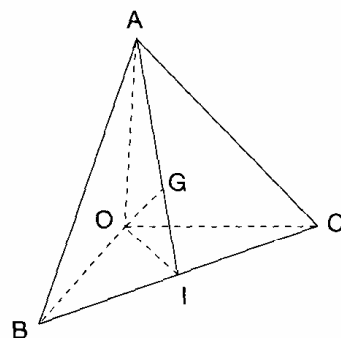
(0; 34; 15), (3; 26; 20), (6; 18; 25), (9; 10; 30), (12; 2; 35).

Prendre toutes les initiatives

70 Considérons le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = a\vec{k}$.

Alors $G(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ d'où $OG = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Remarque : D'autres solutions par étude de configuration sont bien sûr possibles.



Prouvons d'abord l'orthogonalité de (OG) et (ABC).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{3}(-a^2 + a^2) = 0 \text{ et de même } \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{aligned}$$

d'où $(OG) \perp (ABC)$.

• Exploitions ensuite le calcul du volume du tétraèdre OABC de deux façons.

$$V = \frac{1}{3} \text{aire}(OBC) \times OA \text{ et } V = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times OG$$

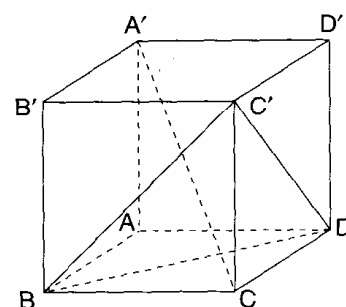
$$\text{d'où l'égalité } OG = \frac{\text{aire}(OBC)}{\text{aire}(ABC)} \times OA.$$

$$\text{Or } \text{aire}(OBC) = \frac{a^2}{2} \text{ et }$$

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \times \left(a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc } OG = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

71 G est le centre de gravité de $BC'D$ d'où $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CG}$.



Or d'après la règle du parallélépipède, $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA'}$ donc $\overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{CG}$.

Ainsi les points C, A' et G sont alignés et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA'}$ d'où $k = \frac{1}{3}$.

Remarque : Une solution analytique est possible.

Le choix du repère orthonormal $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'})$ est alors judicieux.

72 • 1. Considérons le repère orthonormal $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = a\vec{k}$.

76 • $\Sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ et $\mathcal{P}_m : x + y + z = m$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 1)$. Ainsi $\vec{n} = \vec{OI}$ donc $\mathcal{P}_m$ est tangent à Σ aux points d'intersection de Σ avec (OI). D'où le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}.$$

Ces plans sont tangents à Σ respectivement en

$$A\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ et}$$

$$B\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

$A \in \mathcal{P}_m$ équivaut à $m = 3 - \sqrt{3}$ et $B \in \mathcal{P}_m$ équivaut à $m = 3 + \sqrt{3}$.

Ainsi $\mathcal{P}_m$ est tangent à Σ si et seulement si $m = 3 \pm \sqrt{3}$.

Note : Σ est « au-dessus » de $\mathcal{P}_m$ lorsque $m = 3 - \sqrt{3}$, « en-dessous » de $\mathcal{P}_m$ lorsque $m = 3 + \sqrt{3}$.

Application : On considère le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{OA} = a\vec{i}$, $\vec{OB} = a\vec{j}$, $\vec{OC} = a\vec{k}$.

D'après la question précédente, la sphère Σ est inscrite dans le tétraèdre défini par les plans de base et le plan $\mathcal{P}_{3+\sqrt{3}}$.

Les sommets sont O, D($3 + \sqrt{3}; 0; 0$), E($0; 3 + \sqrt{3}; 0$) et F($0; 0; 3 + \sqrt{3}$).

Considérons l'homothétie de centre O qui transforme D en A ; elle transforme E en B, F en C et la sphère Σ inscrite dans ODEF en la sphère Σ' inscrite dans OABC.

Le rapport (positif) d'homothétie est $k = \frac{OA}{OD}$ soit

$$k = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}. \text{ Ainsi le centre } \Omega \text{ de } \Sigma' \text{ est tel que } \vec{O\Omega} = k\vec{OI}.$$

Problèmes

(page 429)

77 • 1. (AM) coupe (BC) en A', barycentre de (B, β), (C, γ). D'après le théorème d'associativité, M est le barycentre de (A, α), (A', $\beta + \gamma$), d'où :

$$\alpha \vec{MA} + (\beta + \gamma) \vec{MA'} = \vec{0}.$$

Ainsi $\vec{MA} = -\frac{\beta + \gamma}{\alpha} \vec{MA'}$ et, en considérant les normes :

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}.$$

2. De même : $\frac{MB}{MB'} = \frac{\gamma + \alpha}{\beta}$ et $\frac{MC}{MC'} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } S &= \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right). \end{aligned}$$

3. a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		-	0
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		2	$+\infty$

b) Les résultats énoncés découlent immédiatement du tableau de variations de f.

4. a) $S = f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + f\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + f\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$. La valeur minimale de S (si elle existe) est au moins 6 et cette valeur est atteinte uniquement lorsque $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$, d'où le résultat.

b) «S minimale» équivaut à «M centre de gravité de ABC».

78 • 1. a) $\vec{DJ}\left(2; 0; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{IJ}\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$, d'où

$$DJ = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ et } IJ = \frac{3}{2}.$$

b) $\vec{IJ} \cdot \vec{DJ} = IJ \times DJ \times \cos \widehat{IJD}$;

$$\text{or, } \vec{IJ} \cdot \vec{DJ} = \frac{9}{4} \text{ donc } \cos \widehat{IJD} = \frac{3}{\sqrt{17}}; \widehat{IJD} \approx 43,3^\circ.$$

2. $\vec{DI}(1; -1; 0)$, d'où $\vec{DI} \cdot \vec{IJ} = 0$. Ainsi (DI) $\perp$ (IJ).

3. a) D(0; 1; 0), I(1; 0; 0), J(2; 1; $\frac{1}{2}$); (DIJ) a une équation de type $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ 2a + b + \frac{1}{2}c + d = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = 4d \end{cases} \quad d \in \mathbb{R}^*$$

Ainsi (DIJ) : $x + y - 4z - 1 = 0$.

$$\text{b) } d(H; (DIJ)) = \frac{|x_H + y_H - 4z_H - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$4. \mathcal{V} = \frac{1}{3} \text{ aire}(\text{DIJ}) \times d(H; (DIJ)).$$

$$\text{Or, } \text{aire}(\text{DIJ}) = \frac{1}{2} DI \times IJ = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \text{ donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3}.$$

5. a) •(HDI) a une équation du type $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$, où $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$.

$$\begin{cases} \alpha + d = 0 \\ \beta + d = 0 \\ \beta + \gamma + d = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = -d \\ \beta = -d, d \in \mathbb{R}^* \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi (HDI) : $x + y - 1 = 0$.

• $\vec{n}(1; 1; 0)$, vecteur normal à (HDI), dirige d .

$$\text{D'où } d : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1, t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = \frac{1}{2} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \cdot \text{Ainsi } J' \left(1; 0; \frac{1}{2} \right).$$

c) Méthode 1 : calcul direct; $\overline{JJ'}(-1; -1; 0)$ donc $JJ' = \sqrt{2}$.

Méthode 2 : utilisation d'une équation de (HDI);

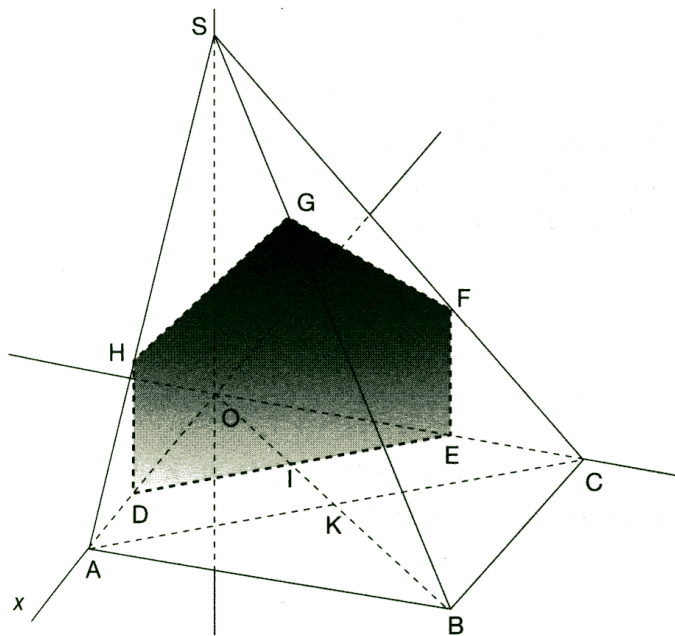
$$JJ' = \frac{|x_J + y_J - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Méthode 3 : utilisation du volume $\mathcal{V}$;

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \text{aire(HDI)} \times JJ' \text{ donc } JJ' = \frac{3\mathcal{V}}{\text{aire(HDI)}};$$

$$\text{or, aire(HDI)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } JJ' = \sqrt{2}.$$

79 • 1. a) La section est un pentagone.



b) $D(t; 0; 0)$, $H(t; 0; 1-t)$, $E(0; t; 0)$, $F(0; t; 1-t)$.
 $\overline{DH} = \overline{EF}$ et $\overline{DH} \perp \overline{DE}$ donc DEFH est un rectangle.
 $\text{Aire(DEFH)} = (1-t)t\sqrt{2}$.

c) G est à l'intersection de (SB) et $\mathcal{P}$ donc ses coordonnées sont telles que :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = -k + 1 \\ x + y = t \end{cases} \quad \text{d'où } G\left(\frac{t}{2}; \frac{t}{2}; 1 - \frac{t}{2}\right).$$

$$\text{Aire(FGH)} = \frac{t^2\sqrt{2}}{4}.$$

d) Aire de la section : $\mathcal{A}(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} (4t - 3t^2)$.

2. Sur $]0; 1[$, $\mathcal{A}'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 - 3t)$.

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$\mathcal{A}'(t)$	+	0	-
$\mathcal{A}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 0)$; $\vec{k}(0; 0; 1)$ et $\overline{AC}(-1; 1; 0)$ sont non colinéaires et tels que $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overline{AC} = 0$, donc $\mathcal{P}$ admet $\vec{k} = \overline{OS}$ et $\overline{AC}$ pour vecteurs directeurs.

Le centre de gravité de OAC est $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$, il appartient au plan $\mathcal{P} : x + y = \frac{2}{3}$, d'où le résultat.

Remarque : Une solution géométrique peut aussi être envisagée en utilisant l'homothétie de centre O et de rapport $t = \frac{2}{3}$.

C'est nouveau au bac

(page 430)

80 • 1. $\vec{n}(1; 1; -3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc un vecteur directeur de d . De plus d passe par $S(1; -2; 0)$.

a) et c) ne conviennent pas (vecteur directeur).

b) ne convient pas ($S \notin d$).

Seule la réponse d) est exacte.

2. L'intersection de d et $\mathcal{P}$ est définie par le système :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \\ x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} t = -\frac{14}{11} \\ x = \frac{8}{11} \\ y = -\frac{25}{11} \\ z = \frac{9}{11} \end{cases}$$

Seule la réponse **d)** est exacte.

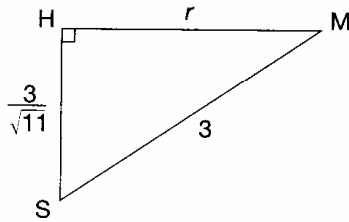
3. La distance du point S au plan 3 est

$$d(S; \mathcal{P}) = \frac{|x_S + y_S - 3z_S + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3(1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Seule la réponse **b)** est exacte.

4. $d(S; \mathcal{P}) < 3$ (rayon de Σ) donc l'intersection de Σ et de $\mathcal{P}$ est un cercle.

Ce cercle a pour centre le projeté orthogonal H de S sur le plan $\mathcal{P}$.



$$r = \sqrt{90} = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

Seule la réponse **b)** est exacte.

81 1. Vrai. I est le barycentre de (B ; 1), (C ; 1) et d'après le théorème d'associativité G est le barycentre de (A ; 2), (I ; 2), (D ; -3) donc G, A, I, D sont coplanaires.

2. a) Vrai. $\vec{n}_1(1; 2; -1)$ et $\vec{n}_2(2; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$$\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z + \frac{9}{5} \\ y = \frac{3}{5}z - \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{d'où } d : \begin{cases} x = -t + \frac{9}{5} \\ y = 3t - \frac{2}{5} \\ z = 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\vec{n}(-1; 3; 5)$ est un vecteur directeur de d . De plus $A \in \mathcal{P}_1$ et $A \in \mathcal{P}_2$ donc d passe par A.

$$\text{b) Vrai. } \begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 7 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

c) Faux. $A \in \mathcal{P}$ et $A \in d$.

Remarque : $\vec{n}(2; 1; -1)$ et $\vec{u}(1; -1; 1)$ sont tels que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc $d \parallel \mathcal{P}$. Or A est commun donc $d \subset \mathcal{P}$.

Travaux dirigés (page 432)

TD 1

1 Question 1

I et J ont pour images P et Q par $h(M, 2)$, donc :

$$\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

B et A sont les images de I et J par $h(C, 2)$, donc :

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

AMCQ et AMBR sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BR}$. On déduit que $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BR}$ donc que AQPBR est un parallélogramme et que [AP] et [BQ] ont même milieu L. Même chose pour [BQ] et [CR].

Question 2

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (propriété du centre de gravité).

$\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{HR} = \vec{0}$ (propriété du centre de gravité).

b) $\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LC} = \vec{0}$,

donc $3\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}$,

et, de même, $3\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{LR}$.

$3(\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{LH}) = (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LP}) + (\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LQ}) + (\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LR})$.

Or, L est le milieu de [AP], [BQ] et [CR], donc :

$$\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{LH} = \vec{0} \text{ et L est le milieu de [GH].}$$

Question 3

• G(3) est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et H(3) celui de (P, 1), (Q, 1), (R, 1) d'où le résultat.

• De même, L(2) est le barycentre de (A, 1), (P, 1) ou (B, 1), (Q, 1) ou (C, 1), (R, 1). Donc l'isobarycentre de A, B, C, P, Q, R est L, qui est aussi l'isobarycentre de G et H, donc L est le milieu de [GH].

a) $2\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} =$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \vec{0},$$

donc G est le centre de gravité du triangle IJK.

b) H est le centre de gravité du triangle PQR donc, pour tout point M, $3\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$.

$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MJ}$, $\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MK}$, donc :

$$3\overrightarrow{MH} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK}) = 2 \times 3\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{MG}.$$

Il en résulte que les points M, G, H, L sont alignés.

2 Question 1 : Voir la solution de 1.

Question 2

a) $h(I) = P$, $h(J) = Q$, $h(K) = R$. Donc l'image de G, centre de gravité du triangle IJK, est H.

Donc $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) $h_1(A) = P$; $h_1(B) = Q$; $h_1(C) = R$. Donc $h_1(G) = H$ et $\overrightarrow{LH} = -\overrightarrow{LG}$, donc L est le milieu de [HG].

Question 3

M, H, G d'une part, et L, H, G d'autre part, sont alignés. D'où le résultat.

3 1. A(0; 0), B(1; 0), C(0; 1),

$$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), J\left(0; \frac{1}{2}\right), K\left(\frac{1}{2}; 0\right), G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

2. P(1 - a; 1 - b); Q(-a; 1 - b);

$$R(1 - a; -b); H\left(\frac{2}{3} - a; \frac{2}{3} - b\right).$$

3. • Le milieu L de [AP] a pour coordonnées $\left(\frac{1-a}{2}; \frac{1-b}{2}\right)$. Il est aussi le milieu de [BQ] et [CR].

• Le milieu de [GH] a pour coordonnées

$$\left(\frac{1-a}{2}; \frac{1-b}{2}\right), \text{ c'est donc L.}$$

• $\overrightarrow{MG}\left(\frac{1}{3} - a; \frac{1}{3} - b\right)$ et $\overrightarrow{MH}\left(\frac{2}{3} - 2a; \frac{2}{3} - 2b\right)$, donc :

$$\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MG}$$

et les points M, G, H sont alignés.

4 Il suffit de reprendre le déroulement des questions du 3.

TD 2

1 Question 1

a) $\widehat{DAK} = \widehat{DAI} = 45^\circ$, d'où le résultat.

$$AB = a\sqrt{2} \text{ donc } AI = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$AD = a + c \text{ donc } AK = \frac{(a+c)\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Donc } IK^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{(a+c)^2}{2} = a^2 + ac + \frac{c^2}{2}.$$

b) $DJ = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $DA = a + c$, $\widehat{ADC} = 45^\circ$ donc :

$$AJ^2 = \frac{c^2}{2} + (a+c)^2 - c\sqrt{2}(a+c)\cos 45^\circ$$

$$= \frac{c^2}{2} + a^2 + 2ac + c^2 - ac - c^2 = a^2 + ac + \frac{c^2}{2}.$$

D'où le résultat.

Question 2

a) $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK}$, donc :

$$2\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}.$$

J milieu de [DC] donc $2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 4\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AJ} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}) \\ &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AE}) \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OD} \\ &= ac - ac - c(a+c) + c(a+c) = 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2 1. $r(A) = B$ et $r(C) = D$ donc $AC = BD$ et les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

2. $(\Omega I) \parallel (BD)$ et $(\Omega J) \parallel (AC)$, d'où le résultat. De plus,

$$\Omega I = \frac{1}{2} BD \text{ et } \Omega J = \frac{1}{2} CA, \text{ donc } \Omega I = \Omega J.$$

3. $r_1(K) = A$ et $r_1(I) = J$ donc $AJ = IK$ et (AJ) et (IK) sont perpendiculaires.

3 A(a; 0) et C(0; c); B(0; a); D(-c; 0); E(a; -a-c).
Il en résulte que I a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$,

$$J\left(-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}\right), K\left(\frac{a-c}{2}; -\left(\frac{a+c}{2}\right)\right).$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{IK} \left(-\frac{c}{2}; -a - \frac{c}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{AJ} \left(-\frac{c}{2} - a; \frac{c}{2}\right), \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AJ} \text{ et } \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$$

et les droites (IK) et (AJ) sont perpendiculaires.

4 1. $z_A = a$; $z_B = ai$; $z_C = ci$; $z_D = -c$; $z_E = a - i(a+c)$;
 $z_I = \frac{a}{2}(1+i)$; $z_J = \frac{c}{2}(-1+i)$; $z_K = \frac{a-c}{2} - i\left(\frac{a+c}{2}\right)$.

$$\text{2. } z_K - z_I = -\frac{c}{2} - i\left(a + \frac{c}{2}\right) \text{ et } z_J - z_A = -\left(\frac{c}{2} + a\right) + i\frac{c}{2},$$

d'où le résultat.

3. Donc $|z_K - z_I| = |z_J - z_A|$ et

$$\arg(z_K - z_I) = \frac{\pi}{2} + \arg(z_J - z_A),$$

donc $IK = AJ$ et (AJ) et (IK) sont perpendiculaires.

TD 3

1 1. a) B a pour coordonnées (a; 0) et D(0; a); P(a; m).
Comme P décrit [BC], alors $0 \leq m \leq a$.

b) $N(x; a)$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AN} = ax + am = 0$ donc :
 $x = -m$ et $N(-m; a)$.

c) I a pour coordonnées $\left(\frac{a-m}{2}; \frac{a+m}{2}\right)$.

2. a) Le point I est un point de la droite d'équation :
 $x + y - a = 0$.

C'est la droite [BD].

Or $0 \leq m \leq a$ et $0 \leq a-m \leq a$, donc $0 \leq \frac{a-m}{2} < \frac{a}{2}$.
Ainsi le lieu de I est le segment [OD].

2 1. P, C, B alignés donc $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC}$ et $P \in [BC]$ donc :
 $\lambda \in [0; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{2. a) } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AN} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AD} = 0. \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} < 0$ et $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AD} > 0$, donc :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda BC^2, \text{ donc } \overrightarrow{DN} = \lambda \overrightarrow{CD}.$$

b) $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IP} = \lambda \overrightarrow{BI} + \lambda \overrightarrow{IC}$ donc $\overrightarrow{IP} = \lambda \overrightarrow{IC} + (1-\lambda)\overrightarrow{IB}$.

De même, à partir de $\overrightarrow{DN} = \lambda \overrightarrow{CD}$, il vient :

$$\overrightarrow{IN} = (1+\lambda)\overrightarrow{ID} - \lambda \overrightarrow{IC}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}, \text{ donc } (1-\lambda)\overrightarrow{IB} + (1+\lambda)\overrightarrow{ID} = \vec{0}, \text{ soit :}$$

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \lambda(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB}) = \vec{0}$$

ou

$$2\overrightarrow{IO} = 2\lambda \overrightarrow{BO} \text{ et } \overrightarrow{OI} = \lambda \overrightarrow{OD}.$$

3. Les points I, O, D sont alignés donc I appartient à la droite (OD). De plus, $\lambda \in [0; 1]$ donc le lieu de I est le segment [OD].

3 1. a) Par r , la droite (AP) a pour image la droite (AN). De plus, $r(B) = D$ donc la droite (BC) a pour image la droite perpendiculaire à (BC) passant par D, c'est-à-dire la droite (DC). Donc P étant à l'intersection des droites (BC) et (AP) son image $r(P)$ est l'intersection des droites (DC) et (AN) c'est-à-dire N.

b) Le triangle PAN est donc rectangle isocèle en A.

2. a) s a pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) L'image de P par s est le point I milieu de [PN].

3. Le lieu de I est donc l'image de [BC] par s. Or $s(B) = O$ et $s(C) = D$. C'est donc le segment [OD].

TD 4

1 1. A(1; 1; 1), B(1; 1; 0), D(0; 1; 1), E(1; 0; 1),
F(1; 0; 0), $M\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$, $N\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$.

$$\text{2. } \overrightarrow{MN} \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \overrightarrow{EG}(-1; 0; -1), \overrightarrow{FC}(-1; 1; 0);$$

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$ et $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$ donc (MN) est bien la perpendiculaire commune à (EG) et (FC).

2 (MN) est l'image de (OJ) par l'homothétie de centre

G et de rapport $\frac{2}{3}$ donc (MN) et (OJ) sont parallèles.

De plus, dans le triangle HFB, d'après le théorème des milieux, (OJ) et (HB) sont parallèles.

2. a) (EG) est perpendiculaire à (HF) (diagonales d'un carré).

(BF) est perpendiculaire au plan (EFGH), donc à (EG). Il en résulte que (EG) est perpendiculaire à (HF) et (BF), donc au plan (BHF).

On montre de même que (FC) est perpendiculaire à (BHG).

b) Donc (BH) est perpendiculaire à (EG) et (FC). Or (BH) est parallèle à (MN), d'où le résultat.

$$\mathbf{3} \quad 1. \quad 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{GN} - 3\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GB} \\ = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GC},$$

$$\text{donc } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH}).$$

$$2. \quad \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{GE} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GE}) \\ = \frac{1}{3} (GF^2 - GH^2) = 0.$$

Donc (MN) est perpendiculaire à (GE).
Même démonstration pour $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$.

Corrigés des exercices

Pour progresser

(page 438)

1 A - 1. a) ID = AJ; CD = AD.

Les triangles CDI et DAJ sont rectangles et ont deux côtés égaux; ils sont donc isométriques.

b) Il résulte de la question précédente que :

$\overrightarrow{ADJ} = \overrightarrow{DCI}$ et $\overrightarrow{DIC} = \overrightarrow{DJA}$,
donc $\overrightarrow{DIC} + \overrightarrow{IDJ} = \overrightarrow{DIC} + \overrightarrow{DCI} = 90^\circ$, d'où le résultat.

2. À partir des triangles BCJ et IAB, la démonstration est identique. Donc (BI) et (DJ) sont deux hauteurs de CIJ. Donc H est l'orthocentre.

B - 1. a) $r(A) = B$ et $r(D) = A$ donc [AB] est l'image du segment [AD] par r . L'image de I par r est le point I' de [AB] tel que AI = I'B. Donc I' = J.

b) $r(C) = D$ et $r(I) = J$ donc CI = DJ et (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

2. On démontre de même que (BI) et (CJ) sont perpendiculaires et ainsi H est l'orthocentre du triangle CIJ.

$$\mathbf{C - 1. a)} \quad \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ}) \\ = \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AJ}.$$

$$\mathbf{b)} \quad \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA} = DI \times DA \text{ et } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AJ} = -AB \times AJ.$$

Or, DI = AJ et DA = AB, donc $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0$ et les droites sont perpendiculaires.

2. La démonstration est identique.

D - 1. a) L'affixe de I est im et celle de J, $a - m$.

b) $\overrightarrow{CI}$ a pour affixe $im - a(1 + i) = z_1$;

$\overrightarrow{DJ}$ a pour affixe $a - m - ai = (1 - i)a - m = z_2$.

L'affixe de $\overrightarrow{CI}$ s'écrit aussi :

$$-i \left[-m + \frac{(1+i)a}{i} \right] = -i [-m + (1-i)a], \text{ donc } z_1 = -iz_2,$$

$$\text{c'est-à-dire } |z_1| = |z_2| \text{ et } \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc CI = DJ et les droites sont perpendiculaires.

2. On démontre de même que (BI) et (CJ) sont perpendiculaires, d'où le résultat.

$$\mathbf{2} \quad \mathbf{A} - \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = \theta;$$

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 - 2 AD \times DF \times \cos(\alpha + \theta);$$

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2 AB \times BE \times \cos(\alpha + \theta).$$

Or, AD = BC = BE et AB = DC = DF, donc AF = AE et le triangle FAE est isocèle.

B - 1. C a pour affixe $b + d = c$.

F est l'image C par $r(D; \alpha)$, donc $z_F - d = e^{i\alpha}(c - d) = e^{i\alpha}b$ et $z_F = e^{i\alpha}b + d$.

De même, E est l'image de C par $r(B; -\alpha)$ donc :

$$z_E - b = e^{-i\alpha}(c - b) = e^{-i\alpha}d,$$

$$\text{soit } z_E = e^{-i\alpha}d + b = e^{-i\alpha}[d + be^{i\alpha}].$$

$$2. \text{ D'où } z_E = e^{-i\alpha}z_F; |z_E| = |z_F| \text{ et } AE = AF.$$

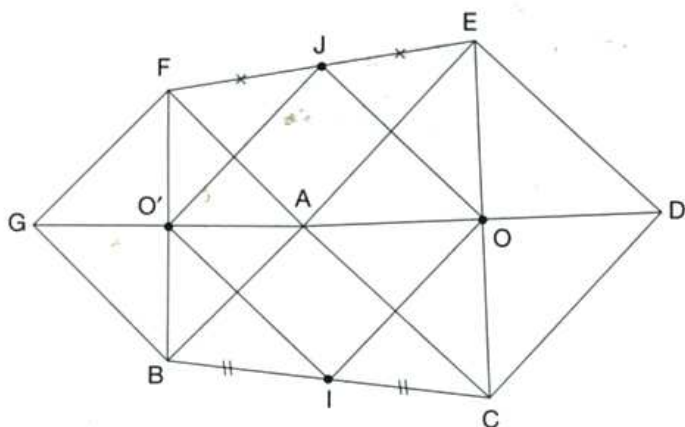
C - 1. $s(C) = A$ et $s(B) = D$, donc CG = AE car $s(G) = E$.

2. a) La symétrie centrale conserve les distances et les angles orientés, donc DG = BE = AD et $(\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DA}) = \alpha$. D'où $r(G) = A$, $r(C) = F$ donc CG = AF = AE, d'où le résultat.

3 A - 1. $r(F) = B$ et $r(C) = E$ donc FC = BE et les droites (FC) et (BE) sont perpendiculaires.

Dans les triangles FEC et FBC, O'I et OJ sont les droites des milieux donc $IO' = OJ = \frac{FC}{2}$ et $OJ \parallel FC \parallel O'I$.

On démontre de même dans les triangles BCE et BFE que $IO = O'J = \frac{BE}{2}$ et $OI \parallel O'J \parallel BE$. Donc OIO'J est un carré.



B - I a pour affixe $\frac{b+c}{2}$; **E** a pour affixe ci donc **O** a pour affixe $\left(\frac{1+i}{2}\right)c$. Le point **F** a pour affixe $-ib$ et **O'** a pour affixe $\left(\frac{1-i}{2}\right)b$ donc $\overline{IO}$ a pour affixe $\frac{ic-b}{2}$ et $\overline{O'J}$ a pour affixe $\frac{ic-b}{2}$ donc $\overline{IOJO'}$ est un parallélogramme. De plus $\overline{OJ}$ a pour affixe $\frac{ib+c}{2}$ soit $z_{OJ} = iz_{OI}$ donc $OJ = OI$ et $OJ \perp OI$, ainsi $OIOJ$ est un carré.

4 A - 1. a) **P** a pour coordonnées $(a; y)$ et $\overline{AP} \cdot \overline{DM} = 0$ d'où $a(m-y) = 0$ et $y = m$.

b) **I** a donc pour coordonnées $x_1 = \frac{a+m}{2}$ et $y_1 = \frac{m}{2}$.

2. a) **I** est un point de la droite d d'équation $x - y = \frac{a}{2}$.

b) $m \in [0; a]$ donc $x_1 \in \left[\frac{a}{2}; a\right]$; il en résulte que **I** décrit le segment $[EF]$ tel que **E** a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ et **F** $\left(a; \frac{a}{2}\right)$.

B - 1. a) $r(D) = A$ donc l'image de (DM) est la droite perpendiculaire à (DM) passant par **A**, c'est-à-dire la droite (AP) . De plus l'image de (AB) est (BC) donc l'image de **M** intersection de (AB) et (DM) est l'intersection de (AP) et (BC) c'est-à-dire **P**. Donc le triangle MOP est rectangle isocèle.

2. s a pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'image de **A** par **s** est le milieu **E** de $[AB]$ et celle de **B** est le milieu **F** de $[BC]$ donc lorsque **M** décrit le segment $[AB]$, **I** décrit le segment $[EF]$.

Conformément à ce qui est demandé à l'élève, nous fournissons plusieurs solutions pour les exercices 5 à 9.

5 • Première solution

En prenant le repère, $(B; \overline{BC}, \overline{BA})$, **A**, **C**, **A'** ont respectivement pour coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(0; -1)$.

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \frac{2}{3}(\overline{BC} - \overline{BA}) \\ &= \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{2}{3}\overline{BC},\end{aligned}$$

donc **D** a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Notons $(x; 0)$ les coordonnées de **O**.

Alors $\overline{OD}\left(\frac{2}{3}-x; \frac{1}{3}\right)$ et $\overline{AD}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Or, $\overline{OD}$ et $\overline{AD}$ sont deux vecteurs colinéaires donc :

$$\left(\frac{2}{3}-x\right) \times \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 8 - 12x - 2 = 0,$$

donc $x = \frac{1}{2}$ et **O** est le milieu de $[BC]$.

Deuxième solution

Notons h_1 l'homothétie de centre **A'** et de rapport 2

et h_2 l'homothétie de centre **D** et de rapport $-\frac{1}{2}$, alors :

$$h_1(B) = A \text{ et } h_2(A) = C.$$

Donc $(h_2 \circ h_1)(B) = C$ et $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport -1 qui transforme **B** en **C** et dont le centre est aligné avec **A'** et **D**.

Donc le centre est **O** et **O** est le milieu de $[BC]$.

Troisième solution

Dans le triangle $A'AC$, **B** est le barycentre de $(A, 1)$, $(A', 1)$ et **D** celui de $(A, 1)$ et $(C, 2)$. Donc, avec le théorème d'associativité, le barycentre de $(A', 1)$, $(A, 1)$, $(C, 2)$ est un point de (BC) et $(A'D)$. C'est donc **O**, barycentre de $(B, 2)$, $(C, 2)$. C'est le milieu de $[BC]$.

6 • Première solution

$2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$, donc :

$$\begin{aligned}2\overline{AM} \cdot \overline{LK} &= \overline{AB} \cdot \overline{LK} + \overline{AC} \cdot \overline{LK} \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{AC} \cdot \overline{HA} \\ &= \overline{AH} \cdot (\overline{AB} - \overline{AC}) = \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0.\end{aligned}$$

Donc (AM) et (LK) sont deux droites perpendiculaires.

Deuxième solution

Une solution analytique est possible en prenant un repère orthonormal $(A; \vec{i}, \vec{j})$ avec $B(b; 0)$ et $C(0; c)$, $b > 0$, $c > 0$.

Alors **M** a pour coordonnées $\left(\frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ et la droite (BC) a pour équation $cx + by - bc = 0$.

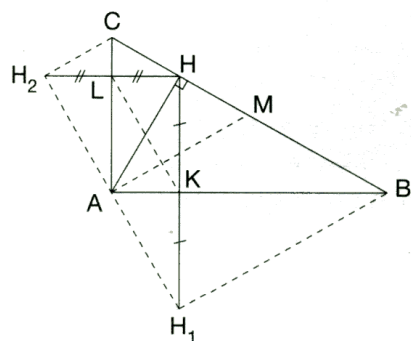
(AH) , perpendiculaire à (BC) , a pour équation $bx - cy = 0$.

Le point **H**, intersection de ces droites, a pour coordonnées $\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}; \frac{cb^2}{b^2+c^2}\right)$.

Donc $\overline{LK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}; \frac{-cb^2}{b^2+c^2}\right)$.

Il est colinéaire à $\vec{u}(c; -b)$, donc $\vec{u} \cdot \overline{AM} = 0$ et $(LK) \perp (AM)$.

Troisième solution



On note H_1 et H_2 les symétriques de H par les réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs (AB) et (AC) .

$s_1(A) = A$, $s_1(B) = B$ donc A , H_1 , H_2 sont alignés et $AH_1 = AH_2$.

De plus, $(AH_1) \perp (H_1B)$ et $(CH_2) \perp (H_2A)$.

Donc CH_2H_1B est un trapèze rectangle et (AM) est la droite des milieux. Donc $(AM) \perp (H_1H_2)$ et $(H_1H_2) \parallel (LK)$, d'où le résultat.

7 • Première solution

Choisissons le repère $(C; \vec{i}, \vec{j})$ tel que D a pour coordonnées $(a; 0)$ et $B(0; a)$.

Alors M a pour coordonnées $(m; 0)$, $0 \leq m \leq a$, et N a pour coordonnées $(0; -m)$.

Donc $\vec{NA}$ a pour coordonnées $(a; a + m)$.

La droite d passant par M et perpendiculaire à (AN) a pour vecteur normal $\vec{NA}$, donc une équation de la forme $ax + (a + m)y + \lambda = 0$.

Or $M \in d$, donc $am + \lambda = 0$ et $\lambda = -am$.

Il en résulte que d a pour équation :

$$ax + (a + m)y - am = 0,$$

ou encore $ax + ay + m(y - a) = 0$.

Cette droite passe donc par le point fixe $A'(-a; a)$.

Deuxième solution

Le plan est orienté et $(\vec{CD}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$.

On note r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Alors

$r(N) = M$ et $r(A) = A'$ tel que B est le milieu de $[AA']$. Donc l'image de (AN) est la perpendiculaire à (AN) passant par M , c'est-à-dire (MA') . D'où le point fixe A' .

8 • Première solution

Prenons un repère orthonormal $(A; \vec{i}, \vec{j})$ tel que B et D ont pour coordonnées $(a; 0)$ et $(0; a)$, $a > 0$.

La droite (BD) a pour équation $x + y - a = 0$.

Appelons m , avec $0 \leq m \leq a$, l'abscisse de M .

Son ordonnée est $a - m$. Donc P et Q ont respectivement pour coordonnées $(m; 0)$ et $(0; a - m)$.

Donc $\vec{MC}$ a pour coordonnées $(a - m; m)$ et $\vec{PQ}(-m; a - m)$.

Ainsi $MC = PQ$ et $\vec{MC} \cdot \vec{PQ} = 0$, donc les droites (MC) et (PQ) sont perpendiculaires.

La médiatrice Δ_m de $[PQ]$ passe par le point de coordonnées $\left(\frac{m}{2}; \frac{a - m}{2}\right)$ et admet $\vec{PQ}$ pour vecteur normal.

Une équation de Δ_m est de la forme :

$$-mx + (a - m)y + \lambda = 0,$$

$$\text{et } -\frac{m^2}{2} + \left(\frac{a - m}{2}\right)^2 + \lambda = 0, \text{ donc } \lambda = -\frac{a^2}{2} + am.$$

$$\Delta_m \text{ a pour équation } -mx + (a - m)y - \frac{a^2}{2} + am = 0.$$

$$\Delta_0: ay - \frac{a^2}{2} = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{2}; \quad \Delta_a: -ax + \frac{a^2}{2} = 0 \text{ ou } x = \frac{a}{2}.$$

Ces deux droites ont pour point commun $O\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ et on vérifie que O est un point fixe de Δ_m .

Deuxième solution

• Le triangle DQM est rectangle isocèle, donc :

$$DQ = QM = AP.$$

Le plan est orienté et $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Notons r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors :

$$r(D) = A \text{ et } r(A) = B.$$

Donc $[AD]$ a pour image par r le segment $[AB]$.

Or $DQ = AP$, donc $r(Q) = P$ et le triangle QOP est rectangle isocèle donc la médiatrice de $[PQ]$ passe par O .

$$\begin{aligned} \vec{MC} \cdot \vec{PQ} &= \vec{MC} \cdot (\vec{PA} + \vec{AQ}) = \vec{MC} \cdot \vec{PA} + \vec{MC} \cdot \vec{AQ} \\ &= \vec{PB} \cdot \vec{PA} + \vec{QD} \cdot \vec{AQ} \\ &= -PA \times PB + AQ \times QD \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc (MC) et (PQ) sont deux droites perpendiculaires.

9 • Première solution : avec les transformations (spécialité)

Notons h_1 l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{2}{3}$

et h_2 l'homothétie de centre I et de rapport -1 ,

alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $-\frac{2}{3}$ et

$$(h_2 \circ h_1)(A) = h_2(B) = D.$$

Le centre est donc aligné avec I et E et avec A et D ,

$$\text{c'est donc } J. \text{ Ainsi } \vec{JD} = -\frac{2}{3}\vec{JA}.$$

Notons h_3 l'homothétie de centre J et de rapport $-\frac{2}{3}$

et h_4 l'homothétie de centre F qui transforme D en C

donc de rapport $\frac{3}{2}$. Donc $h_4 \circ h_3$ a pour rapport -1 , et :

$$(h_4 \circ h_3)(A) = h_4(D) = C.$$

Le centre de $h_4 \circ h_3$ est aligné avec F et J et avec A et C , c'est donc K , car $\vec{KC} = \vec{AK}$. Ainsi F , J , K sont alignés.

Deuxième solution

Considérons le système $(A, 2)$, $(E, 1)$, $(D, 3)$.

Le barycentre de $(A, 2)$, $(E, 1)$ est B et celui de $(B, 3)$, $(D, 3)$ est I , donc le barycentre de $(A, 2)$, $(D, 3)$ est J , aligné avec I et E .

De même, en considérant le système, $(F, 1)$, $(C, 2)$, $(A, 2)$, D est le barycentre de $(F, 1)$, $(C, 2)$ et J celui de $(D, 3)$ et $(A, 2)$, donc J est le barycentre de $(F, 1)$, $(C, 2)$, $(A, 2)$. Ainsi (FJ) coupe (AC) au barycentre de $(C, 2)$, $(A, 2)$, c'est-à-dire K et F, J, K sont alignés.

10 • 1. (FH) est perpendiculaire à (GE) et (AE) donc au plan $GEAC$ et en particulier à (AG) .

On démontre de même que (FC) est perpendiculaire au plan $BGHA$ donc à (GA) .

Ainsi (GA) est perpendiculaire à (FH) et (FC) donc au plan FCH .

$$\begin{aligned} \text{De plus } 3 \overrightarrow{GI} &= \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

Ainsi G, I, A sont alignés et (GA) coupe le plan FCH en I .

2. H a pour coordonnées $(1; 1; 0)$ et $C(0; 1; 1)$ donc le plan FHC a pour équation $x - y + z = 0$.

De plus G et A ont respectivement pour coordonnées $(0; 1; 0)$ et $(1; 0; 1)$ donc $\overrightarrow{GA}$ a pour coordonnées $(1; -1; 1)$.

Il en résulte que $\overrightarrow{GA}$ est un vecteur normal au plan FHC .

I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{GI}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

donc $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{GA}$, d'où le résultat.

Problèmes de synthèse (obligatoire)

1 • **A. 1. a)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0$.

b) $f'_1(x) = \frac{1+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$
$f_1(x)$	0	$1 - \sqrt{2}$	1	2

c) T_0 est la tangente au point O et $f'_1(0) = 1$ donc T_0 a pour équation $y = x$.

$$f_1(x) - x = 1 - x + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1-x)[\sqrt{1+x^2} - 1]}{\sqrt{1+x^2}}.$$

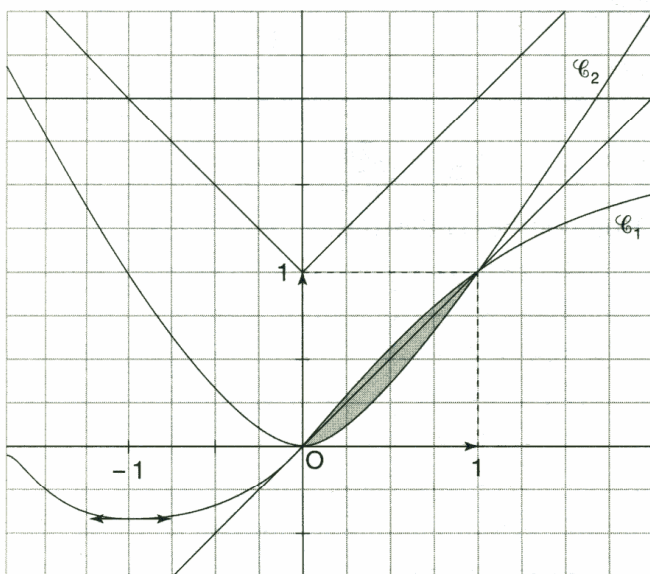
Or pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} \geq 1$. Donc $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de T_0 pour $x < 1$.

2. a) $f_2(-x) = f_2(x)$ donc f_2 est paire.

b) $f_2(x) - x - 1 = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}} - x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}} - x \right) = 0$.

Donc la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_2$ en $+\infty$.

c) $f'_2(x) = \frac{x(x^2 + 3)}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$



x	0	1	$+\infty$
$f'_2(x)$	0	$+$	$+$
$f_2(x)$	0	1	$+\infty$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

donc si $x \in]0; 1[$, $f_1(x) > f_2(x)$

donc $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$.

B. 1. Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ la suite est stationnaire.

2. a) Pour tout $x > 1$, $f_1(x) > 1$ (voir tableau) donc si $u_n > 1$, $u_{n+1} > 1$, de plus $u_0 > 1$ donc par récurrence pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n = \frac{(u_n - 1)}{\sqrt{1+u_n^2}} [1 - \sqrt{1+u_n^2}]$

$u_n > 1$, $1 - \sqrt{1+u_n^2} < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers ℓ , tel que

$$\ell = 1 + \frac{\ell - 1}{\sqrt{1+\ell^2}}.$$

Il résulte que $\ell = 1$.

3. La démonstration est identique à la question précédente et $\ell = 1$.

C. 1. a) $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, $v'(x) = 1$ d'où $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

et $v(x) = x$ donc $I = [x\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Il en résulte que $I = \sqrt{2} - J$.

b) $J + K = \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = I$.

D'où $J + K = \sqrt{2} - J$ soit $J = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - K)$.

2. $g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

donc $K = [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$

et $J = \frac{1}{2}[\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$.

$$\begin{aligned}
 3. \mathcal{A} &= 4 \left[\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x)) dx \right] = 4 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx - 4J \\
 &= 4 \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - 2\sqrt{2} + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \\
 &= 2\sqrt{2} - 4 + 2 \ln(1 + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

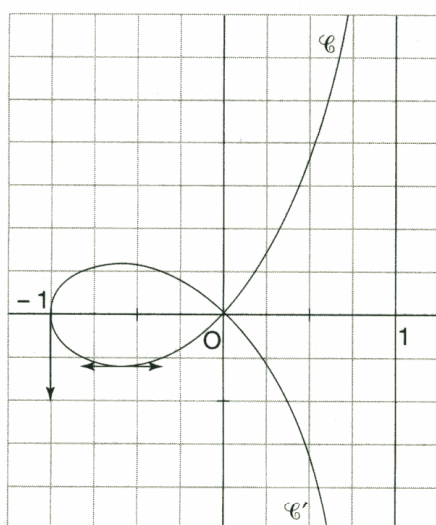
2 • A. 1. a)
$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{x\sqrt{x+1}}{(\sqrt{1-x})(x+1)} = \frac{x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\infty$.

Ainsi f n'est pas dérivable en $x = -1$.

b)
$$f'(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{(1-x)^2 \sqrt{1-x}}$$

x	-1	$\frac{1}{2}(1\sqrt{5})$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}(1\sqrt{5})\sqrt{5-2}$	$+\infty$



2. a) Voir figure.

b) $y^2 = \frac{x^2(1+x)}{1-x}$ d'où $y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ou $y = -x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
donc $\Gamma = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$.

B. 1. a) Δ a pour équation $y = tx$ et (γ) a pour équation $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Donc P a pour coordonnées $(-1; -t)$, M a pour coordonnées

données $\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}; \frac{t(t^2-1)}{t^2+1} \right)$ et $Q \left(\frac{-2}{1+t^2}; \frac{-2t}{1+t^2} \right)$.

D'où $\overline{PQ}$ a pour coordonnées $\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}; \frac{t(t^2-1)}{t^2+1} \right)$

donc $\overline{OM} = \overline{PQ}$.

2. On construit d et (γ) et à chaque droite (Δ) on obtient P et Q. On construit alors M tel que $\overline{OM} = \overline{PQ}$.

C. 1. M a pour coordonnées $(\cos \theta; \sin \theta)$ et H a pour abscisse $\cos \theta$ et pour ordonnée y avec $\overline{BH} \cdot \overline{OM} = 0$ soit $y \sin \theta + \cos \theta(1 + \cos \theta) = 0$ d'où

$$y = \frac{-\cos \theta(1 + \cos \theta)}{\sin \theta}.$$

2. $y^2(1-x) - x^2(1+x) = 0$;

$\frac{\cos^2 \theta(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} (1 - \cos \theta) - \cos^2 \theta(1 + \cos \theta)$ est égal

à $\frac{\cos^2 \theta(1 + \cos \theta)^2(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} - \cos^2 \theta(1 + \cos \theta) = 0$

donc $H \in (\Gamma)$.

3. Le point B de (Γ) n'est pas orthocentre de OMB.

3 • A. 1. $f_n(1) = 0$ et $\frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = \frac{-x^n}{\sqrt{1-x}}$ donc

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_n(x)}{x-1} = -\infty$ donc f_n n'est pas dérivable en $x = 1$.

2. a) Pour $n \geq 1$, $f'_n(x) = nx^{n-1}\sqrt{1-x} - \frac{x^n}{2\sqrt{1-x}}$
$$= \frac{x^{n-1}[2n - x(2n+1)]}{2\sqrt{1-x}}.$$

n pair

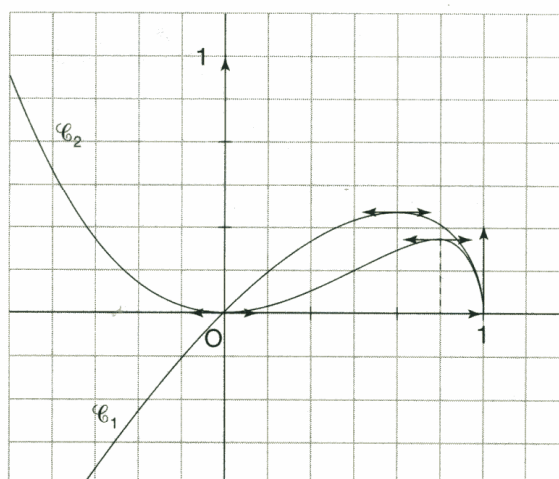
x	$+\infty$	0	$\frac{2n}{2n+1}$	1
$f'_n(x)$	-	0	+	-
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$f_n(\alpha_n)$	0

n impair

x	$-\infty$	0	$\frac{2n}{2n+1}$	1
$f'_n(x)$	+	0	+	-
$f_n(x)$	$-\infty$	0	$f_n(\alpha_n)$	0

b) $f'_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2n}{2n+1}$.

3. Voir courbes ci-dessous.



B. 1. $f_1(x) = x\sqrt{1-x}$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'_n(x)$		+	0	-
$f_n(x)$	$-\infty$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0

Si $k > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ pas de solution ;

si $k = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ une solution $x = \frac{2}{3}$;

si $0 < k < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ deux solutions telles que $0 < x_1 < x_2 < 1$;

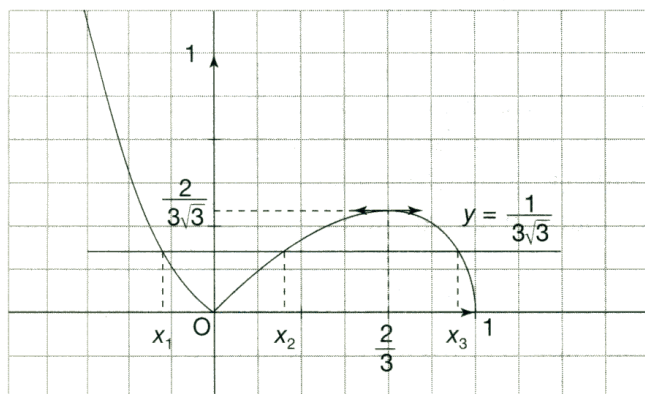
si $k = 0$ deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$;

si $k < 0$ une seule solution $x_1 < 0$.

2. Notons ϕ la fonction $x \mapsto |x\sqrt{1-x}|$. Son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0

Sa courbe :



Donc d'après le tableau, il existe trois solutions x_1, x_2, x_3 telles que :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 ; 0 < x_2 < \frac{2}{3} \text{ et } \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

$$3. -1 < u_1 = \frac{3}{2}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) < -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} < u_2 = \frac{3}{2}\left(x_2 - \frac{1}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \frac{1}{2} < u_3 = \frac{3}{2}\left(x_3 - \frac{1}{3}\right) < 1.$$

D'où l'existence d'un θ_i unique de $[0 ; \pi]$ pour chaque u_i tel que $u_i = \cos \theta_i$.

4. a) $2 \cos \theta_i = 3x_i - 1$ donc $x_i = \frac{1}{3}(2 \cos \theta_i + 1)$ avec $x_i^2(1-x_i) = \frac{1}{27}$, donc $(2 \cos \theta_i + 1)^2(2 - 2 \cos \theta_i) = 1$ ou encore $4 \cos^3 \theta_i - 3 \cos \theta_i = \frac{1}{2}$ soit $\cos 3\theta_i = \frac{1}{2}$.

b) $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ a pour solution $\theta_1 = \frac{7}{9}\pi$; $\theta_2 = \frac{5}{9}\pi$ et $\theta_3 = \frac{\pi}{9}$ donc $[0 ; \pi]$.

Soit $x_1 \approx -0,177\,36$; $x_2 \approx 0,217\,57$; $x_3 \approx 0,959\,79$.

C. Calcul d'une intégrale

1. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x} \, dx$. Or $x-1 \leq 0$ donc $I_{n+1} < I_n$ et la suite (I_n) est décroissante.

De plus $x^n\sqrt{1-x} \geq 0$ donc $I_n \geq 0$ et la suite I_n est minorée par zéro.

2. a) D'après la partie A. et les tableaux de variation $f_n(x) \leq f_n(\alpha)$ donc $I_n \leq \int_0^1 f_n(\alpha_n) \, dx$.

Soit $I_n \leq [f_n(\alpha_n)x]_0^1 = f_n(\alpha_n)$.

b) $f_n(\alpha_n) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

3. a) $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

b) $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$ soit $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.

$$I_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} \, dx - \frac{2}{3} n \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx.$$

Soit $I_n = \frac{2}{3}nI_{n-1} - \frac{2}{3}nI_n$ ou $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

c) Pour $x = 0$, $I_0 = \frac{2^2 1!}{3!} = \frac{2}{3}$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Si $I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$ alors

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} \times \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$\text{soit } I_{n+1} = \frac{2^{2n+3}(n+1)!(n+1)!2(n+2)}{(2n+3)!(2n+4)(2n+5)} = \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!}.$$

Donc la proposition est vraie pour tout entier naturel n .

4 • **A. 1.** $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}$, elle-même en dessous de $\mathcal{C}_0$.

2. $S(x) - S_0(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} \leq 0$ et $S(x) - S_1(x) = \frac{\cos x \sin^2 x}{1 - \sin x} \geq 0$ donc $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{C}_0$ donc $S_1(x) \leq S(x) < S_0(x)$.

B. 1. a) $I_0 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx = 1$;

$$I_1 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x + \cos x \sin x \, dx$$

$$= \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \, dx = [-\ln(1 - \sin x)]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \ln 2.$$

b) $S_1(x) \leq S(x) \leq S_0(x)$.

Il en résulte que $I_1 \leq I \leq I_0$.

2. a) $I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \sin^{n+1}(x) \, dx$

$$= \left[\frac{1}{n+2} \sin^{n+2} x \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

b) La proposition est vraie pour $n = 0$ car $I_0 = 1$.

Si $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ alors

$$I_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$$

donc la proposition est vraie pour tout entier naturel.

3. a) $A_{n+1} - A_n = I_{2n+2} - I_{2n}$

$$= (-1)^{2(n+2)} \left(\frac{1}{2n+23} - \frac{1}{2n+2} \right) < 0$$

donc la suite (A_n) est décroissante. On démontre de même que la suite (B_n) est croissante.

b) $A_n - B_n = I_{2n} - I_{2n+1} = \frac{1}{2n+2}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - B_n) = 0$.

Les deux suites sont donc adjacentes et ont la même limite.

4. a) $S(x) - S_n(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x(1 - \sin^{n+1} x)}{1 - \sin x}$

$$= \sin^{n+1} x S(x).$$

De plus $S(x) - S_{2n+1}(x) = \sin^{2n+2} x$,

$S(x) \geq 0$ et $S(x) - S_{2n}(x) = \sin^{2n+1} x$,

$S(x) \leq 0$ d'où $S_{2n+1}(x) \leq S(x) \leq S_{2n}(x)$.

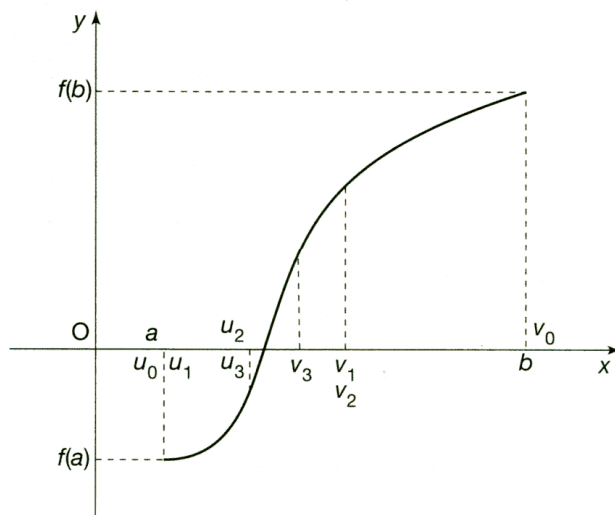
Il en résulte que

$$I_{2n+1} \leq \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x) \, dx \leq I_{2n},$$

soit $B_n \leq \ln 2 \leq A_n$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \ln 2$.

5 • A.



1. $u_{n+1} - u_n = 0$ ou $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$.

• Démontrons par récurrence que $v_n > u_n$.

$v_0 = b, u_0 = a, b > a$ donc $v_0 > u_0$.

Supposons $v_n > u_n$, avec $u_n < \frac{u_n + v_n}{2} < v_n$.

Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$, $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, donc :

$$v_{n+1} > u_{n+1}.$$

Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$, donc :

$$u_{n+1} < v_{n+1}.$$

Il en résulte que, pour tout $n \geq 0$, $v_n - u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante. On démontre de même que la suite (v_n) est décroissante.

• De plus, en tenant compte des résultats précédents,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2} (v_n - u_n) \text{ donc } v_n - u_n = \frac{1}{2^n} (b - a),$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Les suites sont adjacentes.

2. a) f continue donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(c)$.

D'après les résultats précédents, $f(u_n) \leq 0$, donc $f(c) \leq 0$.

b) On démontre de même que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(c)$ avec $f(c) \geq 0$. D'où $f(c) = 0$.

B. 1. $g(a) = f(a) - y < 0$; $g(b) = f(b) - y > 0$.

g est continue, donc d'après la partie A, il existe c de $[a; b]$ tel que $g(c) = 0$, d'où $f(c) = y$.

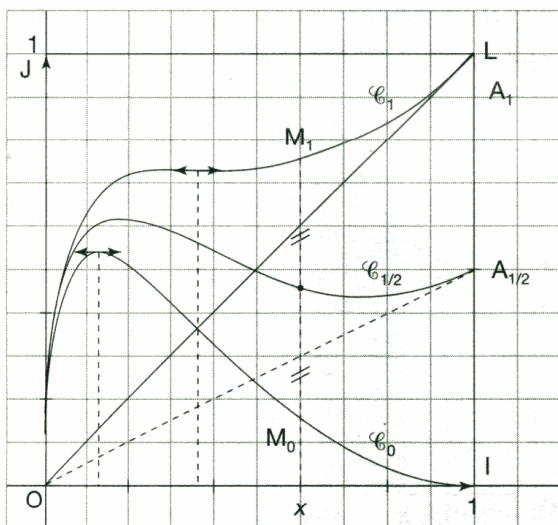
2. Même raisonnement.

6 • A. I. 1. a) $f_0(x) = x(\ln x)^2, f'_0(x) = \ln x [\ln x + 2]$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\ln x)^2 = +\infty$ donc f_0 n'est pas dérivable en $x = 0$ et la tangente à $\mathcal{C}_0$ au point O est verticale.

2. a)

x	0	e^{-2}	1
$f'_0(x)$		+	-
$f_0(x)$	0	$4e^{-2}$	0



II. 1. a) $f'_k(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x + k = [\ln x + 1]^2 + k - 1$.

b) $\mathcal{A}_k$ a pour coordonnées $(1; k)$, $f'_k(1) = k$ donc la tangente en $\mathcal{A}_k$ à $\mathcal{C}_k$ a pour équation $y = k(x - 1) + k = kx$. C'est donc la droite (OA_k) .

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(x)}{x} = +\infty$ donc f_k n'est pas dérivable en $x = 0$.

La tangente à $\mathcal{C}_k$ en O est donc verticale.

3. a) $f_1(x) - f_0(x) = x \geq 0$ donc $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_0$.

b) $f'_1(x) = (\ln x + 1)^2$.

x	0	e^{-1}	1
$f'_1(x)$		+	+
$f_1(x)$	0	$2e^{-2}$	1

4. a) $\frac{1}{2} [f_0(x) + f_1(x)] = \frac{1}{2} [2(\ln x)^2 + x]$

$$= (\ln x)^2 + \frac{1}{2}x = f_{\frac{1}{2}}(x).$$

b) D'où la construction de $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$. Pour $x \in [0; 1]$, M_0 et M_1 sont les points de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$, le milieu de $[M_0M_1]$ est un point de $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

B. 1. a) $v(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = x$ d'où $u'(x) = \frac{2}{x} \ln x$ et

$v(x) = \frac{x^2}{2}$ donc $I(a) = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 x \ln x \, dx$.

On pose $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$ donc

$\int_a^1 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x^2 \right]_a^1 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_a^1$. Il en résulte que :

$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} (\ln \alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{2} (\ln \alpha) + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = \frac{1}{4}$.

2. a) $S_k(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x (\ln x)^2 + dx + k \int_{\alpha}^1 x \, dx$

$$= I(\alpha) + \frac{k}{2} - \frac{\alpha^2}{2} k$$

donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_k(\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$.

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_0(\alpha) = \frac{1}{4}$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_{\frac{1}{2}}(\alpha) = \frac{1}{2}$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_1(\alpha) = \frac{3}{4}$.

D'où le résultat.

7 • A. 1. $f(x) = \ln e^x (1 + e^{-2x}) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

2. • $f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0$

donc la droite $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$.

• Pour tout $x > 0$,

$1 + e^{-2x} > 1$ donc $f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x}) > 0$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d .

• $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

B. 1. $F(x)$ représente en unités d'aire, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$, la droite d et les droites d'équations $X = 0$ et $X = x$ avec $x > 0$.

2. Pour tout x de I , $F'(x) = \ln(1 + e^{-2x}) > 0$ donc F' est strictement croissante sur I .

3. a) Pour tout x de I on pose $\varphi(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{1+x}$ et $\Psi(x) = \ln(1 + x) - x$.

$\varphi'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0$ et $\Psi'(x) = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ d'où les

tableaux de variation :

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	+
$\varphi(x)$	0	$+\infty$

x	0	$+\infty$
$\Psi'(x)$	0	-
$\Psi(x)$	0	$-\infty$

Il en résulte que $\varphi(x) \geq 0$ et $\Psi(x) \leq 0$, donc

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

b) On pose $X = e^{-2x}$ avec $X > 0$

donc $\frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \leq \ln(1 + e^{-2x}) \leq e^{-x}$

donc $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \, dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} \, dt$

d'où $\left[-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2t}) \right]_0^x \leq F(x) \leq \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^x$

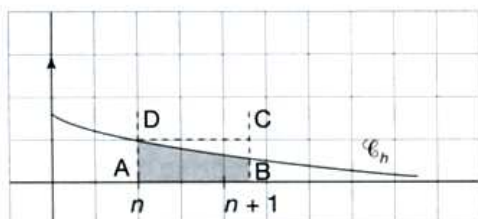
soit $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$

d'où $\frac{1}{2} \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

5. a) $h'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

x	0	$+\infty$
$h'(x)$		-
$h(x)$	$\ln 2$	0



b) u_n représente l'aire du domaine hachuré, donc

$$u_n \leq \text{aire ABCD}$$

or aire ABCD = $\ln(1 + e^{-2n})$ et $u_n \geq 0$
donc $0 \leq u_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

6. a) $S_n = \int_0^1 \ln(1 + e^{-2t}) dt + \dots + \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$
 $= \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt = F(n+1)$.

Donc la suite S_n converge vers ℓ .

8 • 1. a) $u'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ donc $u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x^2}$

et u est solution de (E).

b) $f = h + u$ est solution de (E) si et seulement si
 $h - h' + u - u' = \frac{e^x}{x^2}$. Or $u - u' = \frac{e^x}{x^2}$ donc $h - h' = 0$.

c) $h(x) = ke^x$ donc $f(x) = ke^x + \frac{e^x}{x} = \frac{kx+1}{x} e^x$.

2. a) $f'_k(x) = ke^x + \frac{e^x(x-1)}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} [kx^2 + x - 1]$.

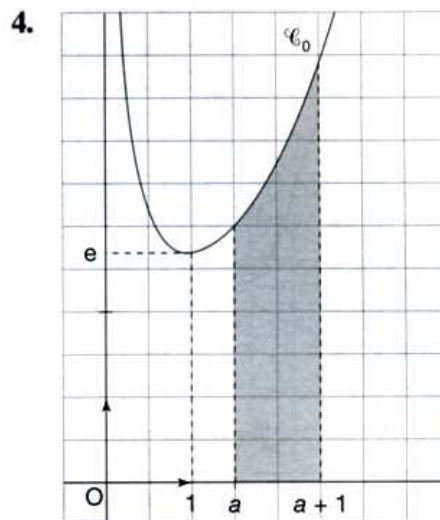
$f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow kx^2 + x - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 4k$, donc si $k < -\frac{1}{4}$
l'équation n'a pas de solution, $kx^2 + x - 1 < 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Si $k = -\frac{1}{4}$ l'équation a une solution unique $x = 2$.

Si $-\frac{1}{4} < k < 0$ l'équation a deux solutions dans $]0; +\infty[$
car la somme et le produit des racines sont positifs.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = -\infty$ si $k \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$ si
 $k = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = -\infty$.

3. (1) est $\mathcal{C}_0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; (2) est $\mathcal{C}_{-0,15}$ car la
dérivée s'annule pour deux valeurs de x ; (3) est $\mathcal{C}_{-0,25}$
car $f'_k(x) < 0$ sauf pour $x = 2$ où $f'_k(x) = 0$.
(4) est $\mathcal{C}_{-1}$ car $f'_k(x) < 0$ pour tout $x > 0$.



a) $\mathcal{A}(a)$ est en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré.

b) $\mathcal{A}(a) = F(a+1) - F(a)$
donc $\mathcal{A}'(a) = f_0(a+1) - f_0(a)$

$$= \frac{e^{a+1}}{a+1} - \frac{e^a}{a} = \frac{e^a [ae - a - 1]}{a(a+1)}.$$

a	0	$\frac{1}{e-1}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
$f_m(x)$			

c) Il en résulte de la question précédente que cette
aire est minimale pour $a = \frac{1}{e-1}$.

9 • A. 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = +\infty$.

b) $f'_m(x) = \frac{(2mx+1)(2mx-1)}{2x}$

x	0	$\frac{1}{2m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
f_m	$+\infty$	$\frac{1}{2} \ln 2m$	$+\infty$

- Si $m > \frac{1}{2}$, $\ln 2m > 0$ et l'équation n'a pas de solution.
- Si $m = \frac{1}{2}$, $\ln 2m = 0$ et $f_m(x) = 0$ a une solution unique $x = 1$.
- Si $0 < m < \frac{1}{2}$, l'équation a deux solutions.

2. S_m a pour coordonnées $x = \frac{1}{2m}$ et $y = \frac{1}{2} \ln 2m$ donc

S_m appartient à la courbe Γ d'équation $y = -\frac{1}{2} \ln x$. Réciproquement $m > 0$, donc $x > 0$ et S_m décrit toute la courbe (Γ).

3. a) $f_m(x) + \frac{1}{2} \ln x = m^2 x^2 - \frac{1}{4}$. C_m est au-dessus de (Γ) pour $x > \frac{1}{2m}$.

B. 1. a) M a pour coordonnées $(a; \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln a)$ et $H(a; 0)$. La droite (AH) a pour équation $y = -\frac{1}{a}x + 1$ et (γ) a pour équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Il en résulte que K a pour coordonnées $(\frac{2a}{1+a^2}; \frac{a^2-1}{a^2+1})$.

b) La tangente en M a pour coefficient directeur $\frac{a^2-1}{2a}$ et la droite (OK) a également pour coefficient directeur $\frac{a^2-1}{2a}$. D'où le résultat.

2. a) $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x) dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x) dx$ et

du fait que $\frac{1}{n} f(\frac{p+1}{n}) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f(\frac{p}{n})$.

Il résulte que $S_n - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq S_n$.

b) $I(\frac{1}{n}) = \int_{\frac{1}{n}}^1 (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x) dx$
 $= [\frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}(x \ln x - x)]_{\frac{1}{n}}^1$

$I(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^3} - \frac{1}{4n} - \frac{\ln n}{2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

10 • A. 1. a) $g'(x) = e^x - 1$.

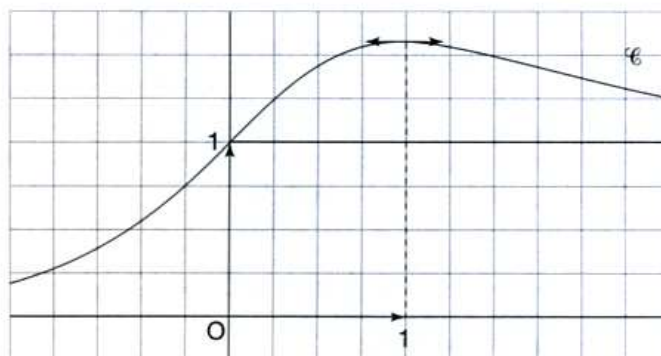
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

b) Pour tout réel x , $g(x) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 1$ donc a fortiori $e^x - x > 0$ et l'expression $\frac{e^x}{e^x - x}$ est définie pour tout réel x .

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

b) $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{e}{e-1}$	1



B. 1. a) u_n est en unités d'aire, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = n$ et $y = 0$.

b) $u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

c) $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x - x}$ donc $u_n = \int_0^n dx + \int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx$
 $= n + \int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx$.

d) $\frac{x}{e^x - x} > 0$ donc $\int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx > 0$ et pour tout entier n , $u_n \geq n$. Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) $v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{e^x - x} dx \geq 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

b) En étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x - \frac{e^x}{2}$ on démontre que $\varphi(x) \geq 0$ d'où le résultat.

Il résulte que $\frac{1}{e^x - x} \leq 2e^{-x}$ donc $v_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$.

c) $2x = u(x)$, $v'(x) = e^{-x}$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = -e^{-x}$.
 $\int_0^n 2xe^{-x} dx = [-2xe^{-x}]_0^n + 2 \int_0^n e^{-x} dx$
 $= -2ne^{-n} + 2 - 2e^{-n}$

soit $v_n \leq 2 - 2e^{-n}(n+1)$.

d) $e^{-n}(n+1) > 0$ donc $v_n \leq 2$. La suite v_n est croissante et majorée donc convergente.

11 • A. 1. $f'(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 1}{x}$ < 0 sur $]0; 1]$ donc f est strictement décroissante sur $]0; 1]$.

2. a) $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (\frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}) dx$
 $= [\frac{x^4}{12} + \frac{2x}{3} - x \ln x]_{\lambda}^1 = \frac{3}{4} - \frac{\lambda^4}{12} - \frac{2}{3} \lambda + \lambda \ln \lambda$.

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \frac{3}{4}.$$

B. 1. a) En considérant l'aire des rectangles et en tenant compte que f est strictement décroissant, le résultat est immédiat soit :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1+k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1)$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(t) dt.$$

En tenant compte de (1) par addition il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] &\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \\ &\leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

2. a) De (2) il résulte que :

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \quad (3)$$

or $f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = 0$ donc $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$

$$b) \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n^4} + \frac{1}{n} \ln n - \frac{1}{3n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}.$$

3. a) Pour $n = 1$, $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 1 = 1^3$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Supposons que $1^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ alors

$$\begin{aligned} 1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \text{ donc} \end{aligned}$$

la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$$b) \ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \dots + \ln \frac{n}{n} = \ln \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{n^n} = \ln \frac{n!}{n^n}.$$

$$\begin{aligned} c) S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{3n^3} - \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3n^4} \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{12n^4} - \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{3}$$

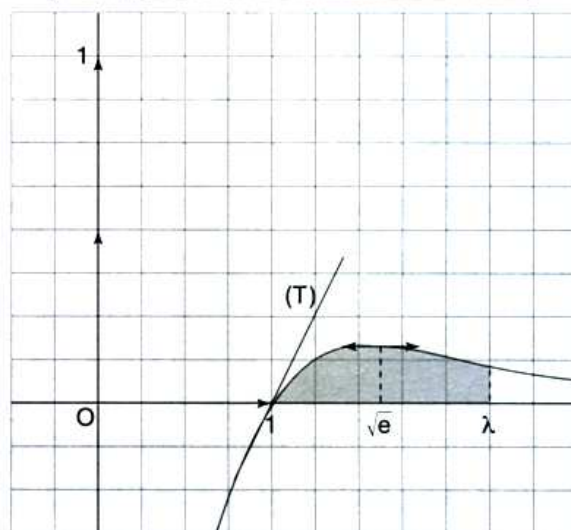
$$d) \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{n^2(n+1)^2}{12n^4} - \frac{1}{3} - S_n \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -1$$

$$\text{Or } \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \ln u_n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}.$$

$$12 \bullet \text{ A. 1. a) } f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}; f'_1(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

x	1	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2e}$	$\searrow 0$



$$2. a) I_1(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

$$u(x) = \ln x, v'(x) = \frac{1}{x^2}, u'(x) = \frac{1}{x}; v(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\text{donc } I_1(\lambda) = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^{\lambda} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^{\lambda}.$$

$$\text{soit } I_1(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} + 1.$$

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_1(\lambda) = 1.$$

$$\text{B. 1. a) } f'_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^{n-1} [n - 2 \ln x]}{x^3} \text{ avec } n \geq 2 \text{ et}$$

$$f'_1(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

D'où le tableau pour $n \geq 2$.

x	1	$e^{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow -\infty$

$$b) f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{1}{n!} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

$$2. a) x > 1, \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\ln x}{n+1}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} b) \text{ D'après (1) } f_{n+1}\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) &= f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \times \frac{n+1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) = y_{n+1}. \end{aligned}$$

La fonction f_n est strictement décroissante sur

$$\left[e^{\frac{n}{2}}; +\infty \right] \text{ donc } f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leq f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) \text{ d'où}$$

$$2y_{n+1} \leq y_n \text{ et } y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n.$$

c) Par récurrence on établit le résultat. En effet $y_1 = \frac{1}{2e}$

donc la proposition est vraie pour $n = 1$. Si $y_n \leq \frac{1}{e} \times \frac{1}{2^n}$.

$$\text{alors } y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n \text{ donc } y_{n+1} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi la proposition est vraie pour tout entier $n \geq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

$$\text{C. 1. a) } I_{k+1}(x) = \int_1^x \frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^2} dt,$$

$$u(t) = (\ln t)^{k+1}, v'(t) = \frac{1}{t^2} \text{ donc } u'(t) = \frac{k+1}{t} (\ln t)^k \text{ et } v(t) = -\frac{1}{t}.$$

$$\text{Donc } I_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!} \left[-\frac{1}{t} (\ln t)^{k+1} \right]_1^x + \frac{1}{k!} \int_1^x \frac{(\ln t)^k}{t^2} dt$$

$$\text{soit } I_{k+1}(x) = -\frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x} + I_k(x). \quad (2)$$

b) On déduit de (2) que :

$$\begin{cases} I_2(x) - I_1(x) = -\frac{1}{2!} \frac{(\ln x)^2}{x} \\ I_3(x) - I_2(x) = -\frac{1}{3!} \frac{(\ln x)^3}{x} \\ \vdots \\ I_n(x) - I_{n-1}(x) = -\frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x} \end{cases}$$

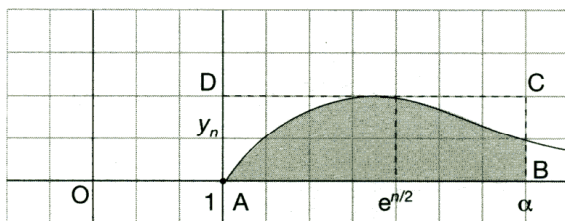
Par addition :

$$I_n(x) - I_1(x) = -\frac{1}{2!} \frac{(\ln x)^2}{x} \dots - \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x}.$$

$$\text{Or } I_1(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{donc } I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2!} \frac{(\ln x)^2}{x} \dots - \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x}.$$

2. a)



$I_n(\alpha) \leq \text{aire ABCD}$ or $\text{aire ABCD} = y_n(\alpha - 1)$

donc $0 \leq I_n(\alpha) \leq y_n(\alpha - 1)$.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = 0 \text{ car } 0 < (\alpha - 1)y_n \leq \frac{\alpha - 1}{e} \times \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{3. a) } I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} W_n(x) \text{ donc } W_n(x) = x[1 - I_n(x)].$$

$$\text{b) } \alpha \geq 1, W_n(\alpha) = \alpha[1 - I_n(\alpha)] \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n(\alpha) = \alpha.$$

$$\text{c) } u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} = W_n(e) \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

$$\text{13. A. 1. a) } f_3(x) = \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ donc la droite d d'équation $y = x$ est asymptote à Γ_3 .

$$\text{b) } f_3(x) - f_1(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{1+x^2} \text{ donc } \Gamma_3 \text{ est au-dessus}$$

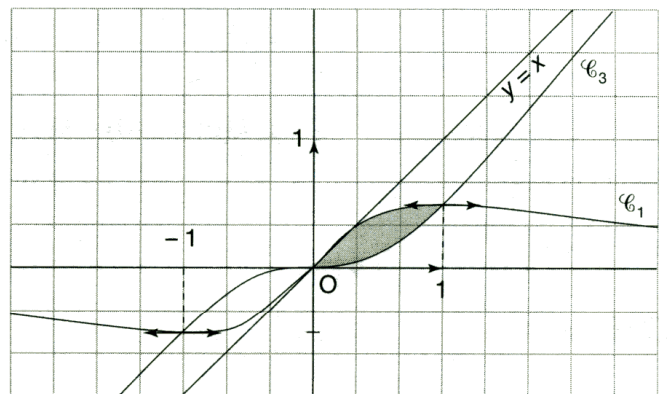
de Γ_1 pour $x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$.

$$\text{2. a) } f'_1(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \text{ et } f'_3(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	-	0	+	0
$f_1(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_3(x)$	+	0	+
$f_3(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

b) Voir courbes ci-dessous.



$$\text{3. a) } I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$I_1 + I_3 = \int_1^x x dx = \frac{1}{2} \text{ donc } I_3 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

$$\text{b) } \mathcal{A} = 4 \int_0^1 [f_1(x) - f_3(x)] dx = 4[I_1 - I_3] = 2[\ln 2 - 1 + \ln 2] = (4 \ln 2 - 2) \text{ cm}^2.$$

B. 1. a) a_n est, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par Γ_0 et les droites d'équations $x = 0$; $y = 0$ et $x = n$.

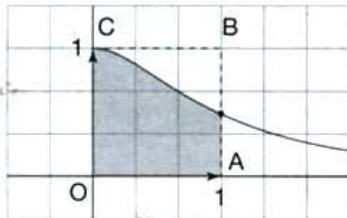
$$\text{b) } a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ or } \frac{1}{1+t^2} > 0$$

donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et la suite est croissante.

2. a) $a_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

a_1 est l'aire hachurée et $a_1 \leq \text{aire OABC}$.

De plus aire OABC = 1 donc $a_1 \leq 1$.



b) $\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t^2(1+t^2)} \leq 0$ pour tout $t \neq 0$

donc $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

$\int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_1^n \frac{1}{t^2} dt$ soit $\int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$.

3. $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$.

La suite a_n est croissante et majorée donc convergente.

C. 1. a) F est la primitive de f_0 qui s'annule en $x = 0$

et $F'(x) = f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2. a) $H(0) = F(\tan 0) = F(0) = 0$.

b) $H'(x) = f(\tan x) \times (1 + \tan^2 x) = 1$.

c) $H(x) = x + C$ or $H(0) = 0$ donc $H(x) = x$.

$F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

3. a) $k'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \times \frac{(1+x)^2}{2+2x+x^2} + \frac{2(x+2)^2}{2(x+2)^2(2+2x+x^2)} = 0$

donc $k(x) = \text{cte}$ avec $k(0) = \frac{\pi}{4}$ car $k(0) = F(0) + F(1)$

donc $k(x) = \frac{\pi}{4}$.

b) $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = k(1) = \frac{\pi}{4}$.

14 • A. 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

b) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(2x^2 + 3x + 1)^2}$, $f'(x) = 0$ sur $[0; +\infty[$ pour

$x = 1 + \sqrt{3}$ donc A a pour coordonnées $(1 + \sqrt{3}; \sqrt{3} - 3)$.

2. a) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x+1}$.

b) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_1^\lambda \left[\frac{1}{2} - f(x)\right] dx$
 $= \left[\ln(x+1) - \frac{3}{4} \ln(2x+1)\right]_1^\lambda$
 $= \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(\lambda+1)^4}{(2\lambda+1)^3}\right]$.

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$ car $\frac{(\lambda+1)^4}{(2\lambda+1)^3}$ se « comporte en $+\infty$ » comme « $\frac{\lambda}{8}$ ».

B. 1. a) $p_n = \frac{\binom{n}{2} + \binom{n+2}{2}}{\binom{2n+2}{2}} = \frac{n(n-1) + (n+2)(n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$
 $= \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 3n + 1} = f(n)$.

b) Pour tout $x \geq 1$, $2\sqrt{3} - 3 \leq f(x) < \frac{1}{2}$

donc pour $n \geq 2$, $p_n < \frac{1}{2}$.

2. a) Si $n = 3$, $p_3 = f(3) = \frac{13}{28}$ et $p_2 = \frac{7}{15}$.

n	0	1	2	$1 + \sqrt{3}$	3	$+\infty$
f_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	$2\sqrt{3} - 3 \approx 0,46$	$\frac{13}{28}$	

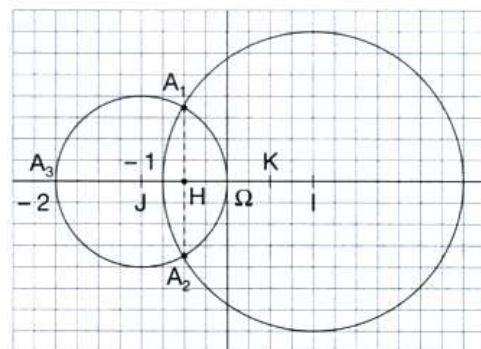
Or $\frac{7}{15} > \frac{13}{28}$ donc p_3 est la valeur minimale de p_n .

b) $p_n > 0,48 \Leftrightarrow h^2 - 11n + 12 > 0$ il en résulte que $n = 1$ ou $n \geq 10$.

C. 1. Les points qui ont pour image Ω sont ceux pour lesquels $z^2 + z + 1 = 0$ et ceux qui ont I pour image sont tels que $z^2 + 2z = 0$. En résolvant ces deux équations on obtient quatre points d'affixes respectives 0;

$-2; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces quatre points sont sur le cercle de centre J d'afixe -1 et de rayon 1. Ils sont notés $\Omega; A_3, A_2, A_1$.

2. Z réels $\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$ soit $\frac{z^2 + z + 1}{2z^2 + 3z + 1} = \frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1}{2\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1}$
d'où $(\bar{z} - z)$, $(z + \bar{z} - 2 - z\bar{z}) = 0$. Il en résulte que z est réel distinct de $-\frac{1}{2}$ et -1 ou $x^2 + y^2 - 2x = 0$. C'est-à-dire m appartient au cercle de centre I d'afixe 1 passant par A_1 et A_2 ou à l'axe des réels en étant distinct de J et M.

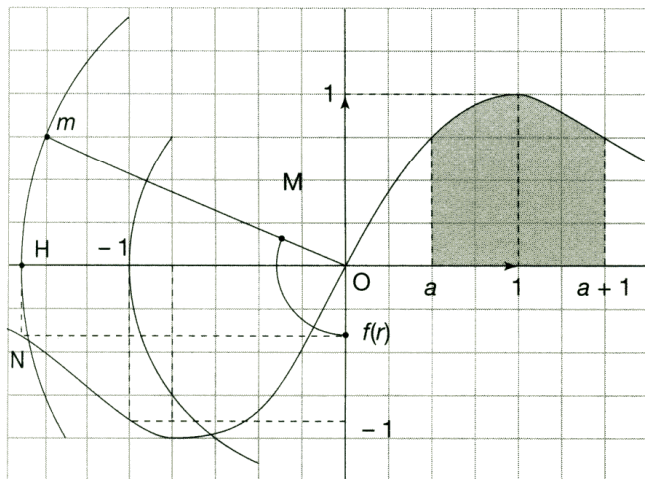


3. m décrit $[\Omega I]$ si et seulement si $z \in [0; 1]$ donc d'après A, $f(z) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ donc M décrit le segment $[KI]$, K étant le milieu de $[\Omega I]$.

15 • A. 1. $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x)^2}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



2. a) $\mathcal{A}(a) = \int_a^{a+1} \frac{2x}{1+x^2} dx = [\ln(1+x^2)]_a^{a+1}$.

$\mathcal{A}(a) = \ln(a^2 + 2a + 2) - \ln(a^2 + 1)$.

b) $\mathcal{A}'(a) = \frac{2a+2}{a^2+2a+2} - \frac{2a}{a^2+1}$
 $= \frac{2(1-a-a^2)}{(a^2+1)(a^2+2a+2)}$.

a	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$\mathcal{A}'(a)$	$+$	0	$-$
$\mathcal{A}(a)$	$\ln 2$		0

Il en résulte que $\mathcal{A}(a)$ est maximale pour $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

B. 1. m invariant si et seulement si $z = Z$ soit $z(z\bar{z} - 1) = 0$ donc $z = 0$ ou $|z| = 1$.

On obtient donc Ω et les points du cercle de centre Ω et de rayon 1.

2. a) $X + iY = \frac{2x + 2iy}{1 + x^2 + y^2}$ d'où $X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$

et $Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$.

b) $X = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 8$ donc m décrit un cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $2\sqrt{2}$.

3. a) $\rho = \frac{2|z|}{1+z\bar{z}} = \frac{2r}{1+r^2}$ de plus si $z = re^{i\theta}$,

$Z = \frac{2re^{i\theta}}{1+r^2}$ donc $\alpha \equiv \theta [2\pi]$.

b) $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M}) = (\vec{u}; \overrightarrow{\Omega m}) = \theta [2\pi]$ donc Ω, m, M sont trois points alignés.

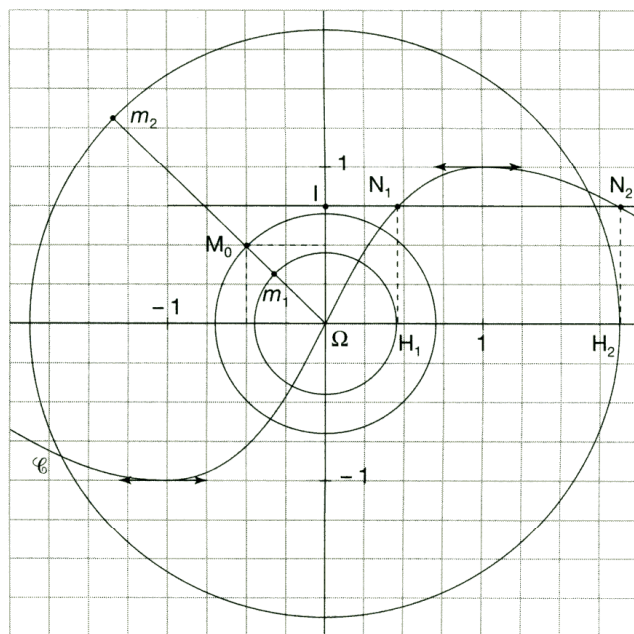
c) $OM = \frac{2r}{1+r^2} = f(r)$ donc comme $r > 0, f(r) \in]0; 1]$

donc M est un point du disque de centre Ω et de rayon 1.

C. 1. Voir la figure du A. Le cercle de centre O et de rayon $Om = r$ coupe l'axe des abscisses en H . N est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse celle de H (qui est r ou $-r$) donc l'ordonnée de N est $f(r)$ ou $f(-r)$ donc $p = |f(r)|$. On construit alors M de la demi-droite $[Om)$ tel que

$OM = |f(r)|$.

2.



a) $\Omega m_1 = \Omega H_1$ et $\Omega m_2 = \Omega H_2$, $OM_0 = OI = p = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

donc $f(r_1) = f(r_2) = p$.

De plus $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega m_1}) = (\vec{u}; \overrightarrow{\Omega m_2}) = \theta$

donc $T(m_1) = T(m_2) = M_0$.

b) $\frac{2r}{1+r^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $r^2 - 2r\sqrt{2} + 1 = 0$ et $r_1 = \sqrt{2} - 1$ et

$r_2 = \sqrt{2} + 1$ de plus $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Donc $z_{m_1} = (\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{m_2} = (\sqrt{2} + 1)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Enseignement de spécialité

Activités (page 6)

ACTIVITÉ 1

1. $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. $D(61) = \{1, 61\}$.

3. a) Les restes possibles sont 0, 1, 2, 3, 4.

$$a^2 = 25k^2 + 10kr + r^2.$$

Le reste de la division de a^2 par 5 sera le reste de la division de r^2 par 5.

r	0	1	2	3	4
reste de r^2	0	1	4	4	1

Les restes de la division de a^2 par 5 peuvent être 0, 1 ou 4.

b) Si $n = 5k + 3$ avec k entier, le reste de la division de n par 5 est 3. Donc n ne peut pas être un carré puisqu'on a vu au a) que le reste pour un carré ne peut pas être que 0, 1 ou 4.

ACTIVITÉ 2

1 On calcule a^2 dans chacun des cas. Le résultat en découle.

Les restes des divisions de a^2 et b^2 par 4 sont 0 ou 1, donc, quand on ajoute, le reste de la somme sera 0, 1 ou 2.

ACTIVITÉ 3

1. a) $1 + 7k$ (k entier compris entre 0 et 52).

b) 141.

2. Lundi : $7k + 2$; mardi : $7k + 3$, k entier naturel entre 0 et 51.

3. a) Si P est vérifiée, alors $n - p$ correspond à un nombre entier de semaines, donc $n - p = 7k$.

Si r est le reste dans la division de p par 7, on peut écrire $p = 7q + r$ avec $0 \leq r < 7$.

Il en résulte $n = 7(k + q) + r$ avec $0 \leq r < 7$.

Réciproquement, si $p = 7q + r$ et $n = 7q' + r$, par soustraction, $n - p = 7k$.

Entre les jours de rangs n et p , il s'est écoulé un nombre entier de semaines, donc n et p correspondent au même jour de la semaine.

b) $p - n = 292 - 145 = 147 = 21 \times 7$; donc il s'est écoulé un nombre entier de semaines et n et p correspondent au même jour de la semaine (un jeudi).

Travaux dirigés (page 15)

TD 1

1. $x - x' = ma$; $y - y' = na$; $z - z' = pa$, avec m, n, p entiers. Il en résulte :

$x = x' + ma$; $y = y' + na$; $z = z' + pa$ d'où par multiplication :

$xyz = x'y'z' + Ka$ avec K entier. Donc xyz et $x'y'z'$ ont le même reste dans la division par a .

2. On écrit : $x \equiv x' \pmod{a}$; $y \equiv y' \pmod{a}$; $z \equiv z' \pmod{a}$. Les propriétés des congruences permettent de conclure que : $xyz \equiv x'y'z' \pmod{a}$ ce qui prouve que xyz et $x'y'z'$ ont le même reste dans la division par a .

3 1. Les restes sont 1, 2, 3 ou 4.

$n \equiv 1 \pmod{5}$ ou $n \equiv 2 \pmod{5}$ ou $n \equiv 3 \pmod{5}$ ou $n \equiv 4 \pmod{5}$.

n	1	2	3	4
$n^4 - 1$	0	0	0	0

Conclusion : Si n n'est pas divisible par 5, alors $n^4 - 1$ est divisible par 5.

4 1. Immédiat.

2. Restes : 0, 1 ou 2.

Si $p \equiv 0 \pmod{3}$, $p + 10 \equiv 1 \pmod{3}$ et $p + 20 \equiv 2 \pmod{3}$. Seul p est divisible par 3.

Si $p \equiv 1 \pmod{3}$, $p + 10 \equiv 2 \pmod{3}$ et $p + 20 \equiv 0 \pmod{3}$. Seul $p + 20$ est divisible par 3.

Si $p \equiv 2 \pmod{3}$, $p + 10 \equiv 0 \pmod{3}$ et $p + 20 \equiv 1 \pmod{3}$. Seul $p + 10$ est divisible par 3.

TD 2

2. a) La suite (R_n) est périodique de période 6.

b) $3^6 = 729 = 7 \times 104 + 1$.

c) $3^n = 7q + R_n$ avec $0 \leq R_n < 7$. D'où :

$3^{n+6} = 3^n \times 3^6 = (7q + R_n)(7 \times 104 + 1) = 7K + R_n$ avec $0 \leq R_n < 7$. Donc R_n est bien aussi le reste de la division de 3^{n+6} par 7 et, par conséquent, $R_{n+6} = R_n$.

3. $2006 = 2004 + 2$ donc $3^{2006} + 12 \equiv 3^2 + 12 \equiv 0 \pmod{7}$.

TD 3

3 1. b) $N = 454$; $N = 31\,850$; $N = 2\,957\,525$.

2. b)

base 10	11	13	19	125
base 2	1011	1101	10011	1111101

Le nombre 6 215 en base 10 s'écrit 14 107 en base 8.

Le nombre 13 615 en base 10 s'écrit 54 460 en base 7 et 7A67 en base 12.

TD 4

1. Immédiat.

2. Pour tout entier naturel k , $10k \equiv 1 \pmod{3}$, ensuite, on raisonne comme au 1.

3. Immédiat...

4. Tout entier naturel n est de la forme

$$n = 100c + 10d + u$$

où u et d sont les chiffres des unités et des dizaines.

Or $100c \equiv 0 \pmod{4}$ et $\pmod{25}$, donc :

$$n \equiv 10d + u \pmod{4} \text{ et } \pmod{25}.$$

5. a) Lorsque $n = 2p$, $10^n = (10^2)^p \equiv 1 \pmod{11}$.

En multipliant par 10, on a $10^{2p+1} \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11}$.

b) Dans l'écriture $a = a_n 10^n + \dots + 10a_1 + a_0$, les puissances impaires sont remplacées par -1 et les puissances paires par 1.

c) $4 + 9 + 1 + 8 - (7 + 2 + 7) = 6$, donc le nombre n'est pas divisible par 11.

6. a) Soit $n = 100u + v$.

$100 \equiv 2 \pmod{7}$ donc $100u + v \equiv 2u + v \pmod{7}$.

b) • $343 \equiv 6 + 43 = 49 \equiv 0 \pmod{7}$ donc 343 est divisible par 7.

• $8751 \equiv 174 + 51 \equiv 2 + 74 + 51 = 127 \equiv 29 \equiv 1 \pmod{7}$, donc 8 751 n'est pas divisible par 7.

• $2247 \equiv 44 + 47 = 91 \equiv 0 \pmod{7}$ donc 2247 est divisible par 7.

7. $1000 \equiv 1 \pmod{37}$. On découpe le nombre en tranches de trois chiffres et on ajoute les nombres ainsi obtenus. Si le total est divisible par 37, le nombre l'est.

Exemple : 23014 est divisible par 37 car $23 + 14 = 37$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 20)

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1 $\mathcal{D}(20) =$

$\{-20; -10; -5; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 5; 10; 20\}$;

$\mathcal{D}(28) = \{-28; -14; -7; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 7; 14; 28\}$;

$\mathcal{D}(75) = \{-75; -25; -15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15; 25; 75\}$.

2 $1. n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.

2. $n^4 - 1$ est un diviseur et si $n > 2$, $(n - 1)(n + 1)$, $(n - 1)(n^2 + 1)$ sont aussi des diviseurs propres de A.

3 $5xy - y^2 = 49$ équivaut à $y(5x - y) = 49$.

y divise 49 donc $y = 1$ ou $y = 7$ ou $y = 49$.

Si $y = 1$ alors $x = 10$; si $y = 7$ alors $5x = 14$ pas de solution; si $y = 49$ alors $5x - 98$ pas de solution.

Conclusion : une seule solution qui est : $(x = 10; y = 1)$.

4 Corrigé dans le manuel.

5 Si n est solution, $n + 8 = kn$, donc $8 = n(k - 1)$. Donc n divise 8 et alors $n \in \{1; 2; 4; 8\}$. Réciproquement, si n divise 8, alors n divise $n + 8$ donc $S = \{1; 2; 4; 8\}$.

6 Si n est solution alors $n + 3$ divise la différence 7 donc $n + 3 \in \{-7; -1; 1; 7\}$ d'où :

$$n \in \{-10; -4; -2; 4\}.$$

On peut vérifier que ces quatre nombres conviennent.

$S = \{-10; -4; -2; 4\}$.

7 Si d divise a et b , alors d divise $2a + b = 6$. Donc les diviseurs possibles positifs sont ceux de 6.

8 Si d divise a et b , alors il divise $4a - 3b = 11$.
Donc les diviseurs possibles sont $d = 1$ ou $d = 11$.

9 Si d divise a et b , alors il divise $2a - 3b = 7$. Donc les diviseurs possibles sont $d = 1$ ou $d = 7$.

2. La division euclidienne

10 $118 = 23 \times 5 + 3$; $-118 = 23 \times (-6) + 20$;
 $118 = (-23) \times (-5) + 3$; $-118 = (-23) \times 6 + 20$.

11 $152 = 10 \times 15 + 2$; $152 = (-10) \times (-15) + 2$;
 $-152 = 10 \times (-16) + 8$; $-152 = (-10) \times 16 + 8$.

12 $n = 4q + q$ et $0 \leq q < 4$, donc :
 $n = 0$ ou $n = 5$ ou $n = 10$ ou $n = 15$.

13 n est solution du système :

$$\begin{cases} n = 23q + 1 \\ n = 17q + 13 \end{cases}$$

On trouve $n = 47$.

14 Corrigé dans le manuel.

15 $x = 3 \times 7 + r$ et $0 \leq r < 3$; x peut donc prendre les valeurs 21, 22, 23.

16 Les hypothèses du texte se traduisent par :
 $a + b = 444$ et $a = 4b + 24$ avec $24 < b$.

Le système $\begin{cases} a + b = 416 \\ a = 4b + 24 \end{cases}$

équivalent à $\begin{cases} 4b + 24 + b = 444 \\ a = 4b + 24 \end{cases}$

et donc à :

$$\begin{cases} a = 360 \\ b = 84 \end{cases}$$

La condition $24 < b$ est bien vérifiée. La solution est donc :

$$a = 360, b = 84.$$

17 Les hypothèses se traduisent par :
 $a + b = 416$ et $a = 4b + 61$ avec $61 < b$.

Le système $\begin{cases} a + b = 416 \\ a = 4b + 61 \end{cases}$

équivalent à $\begin{cases} 4b + 61 + b = 416 \\ a = 4b + 61 \end{cases}$

et donc à :

$$\begin{cases} a = 345 \\ b = 71 \end{cases}$$

La condition $61 < b$ est bien vérifiée. La solution est donc :

$$a = 345, b = 71.$$

$$\begin{cases} a - b = 996 \\ a = 4b + 60 \text{ équivaut à} \\ 60 < b \end{cases} \begin{cases} 4b + 60 - b = 996 \\ a = 4b + 60 \\ 60 < b \end{cases}$$

et donc à :

$$\begin{cases} a = 1\,308 \\ b = 312 \end{cases}$$

La condition $60 < b$ est bien vérifiée. La solution est donc :

$$a = 1\,308, b = 312.$$

19 $n = a(a-1)(a+1)$.

• Prouvons d'abord que n est multiple de 2.

Si a est pair, $a = 2k$ et $n = 2k(a-1)(a+1)$, donc n est multiple de 2.

Si a impair, $a = 2k + 1$ et $a + 1 = 2(k + 1)$.

D'où $n = 2a(a-1)(k+1)$, donc n est multiple de 2.

• Prouvons maintenant que n est multiple de 3.

Si $a = 3k$, alors $n = 3k(a-1)(a+1)$ qui est bien multiple de 3.

Si $a = 3k + 1$, $a - 1 = 3k$ et alors $n = 3k(a+1)a$, donc n est multiple de 3.

Si $a = 3k + 2$, alors $a + 1 = 3(k + 1)$ et donc :

$$n = 3(k+1)(a-1)a,$$

donc n est multiple de 3.

20 a) $x = 1$; b) $x = 2$; c) $x = 4$; d) $x = 6$; e) $x = 6$.

21 a) $11 \equiv 2 \pmod{9}$.

b) $24 \equiv -3 \pmod{9}$.

c) $62 \equiv -1 \pmod{9}$.

d) $85 \equiv 4 \pmod{9}$.

e) $-12 \equiv -3 \pmod{9}$.

f) $32 \equiv -4 \pmod{9}$.

22 1. $5^2 = 26 - 1 \equiv -1 \pmod{13}$.

$$5^4 = (5^2)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{13}.$$

$$2. 5^{4k} = (5^4)^k \equiv (1)^k = 1 \pmod{13}.$$

23 1. $x = -2 + 5k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

$$2. \mathcal{S} = \{102; 109; 116; 123\}.$$

24 Corrigé dans le manuel.

25 Corrigé dans le manuel.

26 a) $15^5 - 3^5 \equiv 3^5 - 3^5 \equiv 0 \pmod{12}$.

$$b) 9^{10} - 5^{10} \equiv 2^{10} - (-2)^{10} \equiv 0 \pmod{7}.$$

27 • $12^{15} \equiv 1^{15} \equiv 1 \pmod{11}$, donc le reste est 1.

• $10^7 \equiv (-1)^7 \pmod{11}$ donc le reste est 10.

• $78^{15} \equiv 1^{15} \pmod{11}$ donc le reste est 1.

• $13^{12} \equiv 2^{12} \pmod{11}$. Or $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$, donc :

$$2^{12} \equiv 4 \pmod{11} \text{ et le reste est 4.}$$

• $(-2)^{19} = (-2)^{15} \times (-2)^4$ donc $(-2)^{19} \equiv -2^4 \equiv -5 \pmod{11}$ donc le reste est 6.

28 • $706 + 1409 \equiv 6 + 9 \equiv 1 \pmod{7}$. Le reste est 1.
 • $219 \equiv 2 \pmod{7}$ donc $219^{20} \equiv 2^{20} \pmod{7}$.
 Or $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $2^{20} \equiv 2^2 \pmod{7}$. Le reste est 4.
 • $36 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $(-36)^{30} \equiv 1 \pmod{7}$. Le reste est 1.
 • $8^{35} + 6^{40} \equiv 1^{35} + (-1)^{40} \equiv 2 \pmod{7}$. Le reste est 2.
 • $125^{17} + 30^{12} \equiv (-1)^{17} + 2^{12} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
 Le reste est 0.

29 $2^4 \equiv 17 - 1 \equiv -1 \pmod{17}$;
 $6^2 = 34 + 2 \equiv 2 \pmod{17}$.
 $1\,532 = 90 \times 17 + 2$ donc $1\,532 \equiv 2 \pmod{17}$
 et $1\,532^{20} \equiv 2^{20} = (2^4)^5 \equiv (-1)^5 = -1 \equiv 16 \pmod{17}$
 donc le reste est 16.
 $346 = 340 + 6 \equiv 6 \pmod{17}$ donc
 $346^{12} \equiv 6^{12} = (6^2)^6 \equiv 2^6 = 2^4 \times 2^2 \equiv -4 \equiv 13 \pmod{17}$.
 Le reste est 13.

30 a) $5^n \equiv 1^n \pmod{4}$;
 b) $29^{2n} \equiv (-1)^{2n} = 1 \pmod{6}$.

31 a) $14^n \equiv 1^n \pmod{13}$;
 b) $12^{2n} \equiv (-1)^{2n} = 1 \pmod{13}$.

32 Corrigé dans le manuel.

33 1. $1000 \equiv 1 \pmod{111}$ donc $1000n \equiv n \pmod{111}$.
 2. $10^8 + 10^4 + 1 = 10^6 \times 100 + 10^3 \times 10 + 1$
 $\equiv 100 + 10 + 1 \equiv 0 \pmod{111}$.
 $10^{10} + 10^8 + 1 \equiv 10 + 100 + 1 \equiv 0 \pmod{111}$.

34 $5 \equiv -1 \pmod{6}$ donc, dans tous les cas,
 $5n^3 + n \equiv -n^3 + n \pmod{6}$.
 • Si $n \equiv 0 \pmod{6}$, $-n^3 + n \equiv 0 \pmod{6}$.
 • Si $n \equiv 1 \pmod{6}$, $-n^3 + n \equiv 0 \pmod{6}$.
 • Si $n \equiv 2 \pmod{6}$, $-n^3 + n \equiv -6 \equiv 0 \pmod{6}$.
 • Si $n \equiv 3 \pmod{6}$, $-n^3 + n \equiv -24 \equiv 0 \pmod{6}$.
 • Si $n \equiv 4 \pmod{6}$, $-n^3 + n \equiv -60 \equiv 0 \pmod{6}$.
 • Si $n \equiv 5 \pmod{6}$, $-n^3 + n \equiv -120 \equiv 0 \pmod{6}$.

35 On étudie tous les restes possibles en dehors de 0 :

Si $n \equiv 1 \pmod{7}$, $n^6 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
 Si $n \equiv 2 \pmod{7}$, $n^6 - 1 \equiv 64 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
 Si $n \equiv 3 \pmod{7}$, $n^6 - 1 \equiv 27^2 - 1 \equiv (-1)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

Si $n \equiv 4 \pmod{7}$, alors $n \equiv -3 \pmod{7}$ et :
 $n^6 - 1 \equiv 27^2 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
 Si $n \equiv 5 \pmod{7}$ alors $n \equiv -2 \pmod{7}$ et :
 $n^6 - 1 \equiv 64 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
 Si $n \equiv 6 \pmod{7}$, alors $n \equiv -1 \pmod{7}$ et :
 $n^6 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

36 $5 \equiv -1 \pmod{6}$ donc $n(n^2 + 5) \equiv n(n^2 - 1) \pmod{6}$.
 Ensuite, l'étude est semblable à celle faite à l'exercice 34.

Si $n \equiv 0 \pmod{6}$, $n(n^2 - 1) \equiv 0 \pmod{6}$.
 Si $n \equiv 1 \pmod{6}$, $n(n^2 - 1) \equiv 0 \pmod{6}$.
 Si $n \equiv 2 \pmod{6}$, $n(n^2 - 1) \equiv 6 \equiv 0 \pmod{6}$.
 Si $n \equiv 3 \pmod{6}$, $n(n^2 - 1) \equiv 24 \equiv 0 \pmod{6}$.
 Si $n \equiv 4 \pmod{6}$, $n(n^2 - 1) \equiv 60 \equiv 0 \pmod{6}$.
 Si $n \equiv 5 \pmod{6}$, $n(n^2 - 1) \equiv 120 \equiv 0 \pmod{6}$.

37 Corrigé dans le manuel.

38 1.

reste de n	0	1	2	3	4	5	6	7
reste de n^2	0	1	4	1	0	1	4	1
reste de $2n^2$	0	2	0	2	0	2	0	2

2.

reste de y^2 \ reste de $2x^2$	0	2
0	0	2
1	1	3
4	4	6

3. Si l'équation $2x^2 + y^2 = 5$ avait une solution, cela impliquerait que l'on peut trouver x et y tels que :
 $2x^2 + y^2 \equiv 5 \pmod{8}$.

Comme $0 \leq 5 < 8$, cela voudrait dire que 5 est le reste de la division de $2x^2 + y^2$ par 8. Or le tableau du 2. montre que le reste n'est jamais 5.
 Donc l'équation n'a pas de solution.

39 $(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = 3(a^2b + ab^2) \equiv 0 \pmod{3}$.

40 $7^{3n} = (7^3)^n = 343^n \equiv 1^n \pmod{9}$.

41 1. $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$. $3^{3n} = (3^3)^n \equiv 1^n \pmod{13}$.
 2. $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 = 3^{3n}(3^3 \times 9 + 3) + 1$
 $\equiv 1 \times (1 \times 9 + 3) \equiv 0 \pmod{13}$.

42 $9^{2n} \equiv 1 \pmod{10}$ donc chiffre des unités : 1.
 $9^{2n+1} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$ donc chiffre des unités : 9.

1. $0 < a < b < c$ a pour conséquences $ab < bc$ et $ac < bc$, donc $abc < 3bc$ et donc $a < 3$.

Donc $a = 1$ ou $a = 2$.

2. a) $a = 1$ implique $b + bc + c = bc$, soit $b + c = 0$, ce qui contredit $0 < b < c$. Donc $a = 1$ n'est pas possible.

b) $a = 2$ donc $2(b + c) = bc$. Or $b < c$ implique $2(b + c) < 4c$ et donc $bc < 4c$. Il en résulte $b < 4$.

Comme $a < b$, $2 < b < 4$, donc $b = 3$ et $c = 6$.

3. **Réciproque.** La solution $a = 2$, $b = 3$ et $c = 6$ convient car $2 \times 3 + 3 \times 6 + 6 \times 2 = 2 \times 3 \times 6$ et on a bien $0 < 2 < 3 < 6$.

44 Utiliser la division euclidienne

Les outils :

- Définition de la divisibilité.
- Division euclidienne.

Les objectifs :

- Apprendre à bien prendre en compte les deux parties de la définition de la division euclidienne.

1. $(2a - 1)^2 \geq 0$ et $(2a - 1)^2 - 4a^2 = -4a + 1 < 0$ puisque $a \geq 1$.

2. Immédiat ; $q = a^2 - 2a - 1$.

45 Divisibilité

Les outils :

- Définition des congruences.
- Règles de calcul des congruences.

Les objectifs :

- Savoir utiliser les congruences pour prouver des propriétés de divisibilité.
- Montrer la multiplicité des approches possibles.

Première solution

1. a) $r_0 = 1, r_1 = 4, r_2 = 7, r_3 = 1, r_4 = 4$.

b) $4^{3p} = (4^3)^p$ donc $4^{3p} \equiv 1^p \equiv 1 \pmod{9}$.

$4^{3p+1} = (4^3)^p \times 4$ donc :

$$4^{3p+1} \equiv 1^p \times 4 \equiv 4 \pmod{9}.$$

$4^{3p+2} = (4^3)^p \times 4^2$ donc :

$$4^{3p+2} \equiv 1^p \times 16 \equiv 7 \pmod{9}.$$

c) Si $n = 3p$, alors $A_n \equiv n \times 4 - (n + 1) + 1 \equiv 9p \equiv 0 \pmod{9}$.

Si $n = 3p + 1$ alors $A_n \equiv n \times 7 - (n + 1)4 + 1 \equiv 9p \equiv 0 \pmod{9}$.

Si $n = 3p + 2$, alors $A_n \equiv n - 7(n + 1) + 1 \equiv 9p \equiv -18p - 18 \equiv 0 \pmod{9}$.

Dans tous les cas, $A_n \equiv 0 \pmod{9}$, ce qui veut dire que A_n est divisible par 9.

Deuxième solution

1. $A_n = 4^n(3n - 1) + 1$ d'où la réponse.

2. Si $n = 3p$, alors $4^n(3n - 1) \equiv 1(9p - 1) \equiv -1 \pmod{9}$.

Si $n = 3p + 1$, alors $4^n(3n - 1) \equiv 4(9p + 2) \equiv 8 \equiv -1 \pmod{9}$.

Si $n = 3p + 2$, alors $4^n(3n - 1) \equiv 7(9p + 5) \equiv 35 \equiv -1 \pmod{9}$.

Dans tous les cas, $A_n \equiv 0 \pmod{9}$ donc A_n divisible par 9.

Troisième solution

1. a) Immédiat.

b) $A_{n+1} - A_n = (n + 1)4^{n+2} - 2(n + 1)4^{n+1} + (n + 1)4^n$
 $= (n + 1)4^n(16 - 8 + 1)$
 $= 9(n + 1)4^n \equiv 0 \pmod{9}$.

Donc pour tout naturel n , $A_{n+1} \equiv A_n \pmod{9}$. Il en résulte que si $A_n \equiv 0 \pmod{9}$, alors $A_{n+1} \equiv 0 \pmod{9}$.

On achève en vérifiant que $A_0 = 0$ donc $A_0 \equiv 0 \pmod{9}$.

Pour progresser

(page 23)

Division euclidienne

46 Soit m le quotient; $a = bm + r$ avec $0 \leq r < b$. Le minimum de m est obtenu avec $a = 10^p - 1$ et $b = 10^q - 1$, alors m a $p - q$ chiffres.

Le maximum de m est obtenu avec $a = 10^p - 1$ et b minimum, soit $b = 10^{q-1}$ et le nombre de chiffres de m est alors $p - q + 1$.

Conclusion : le quotient m a $p - q$ ou $p - q + 1$ chiffres.

47 Corrigé dans le manuel.

48 $1517 = 75b + r$ et $0 \leq r < b$.

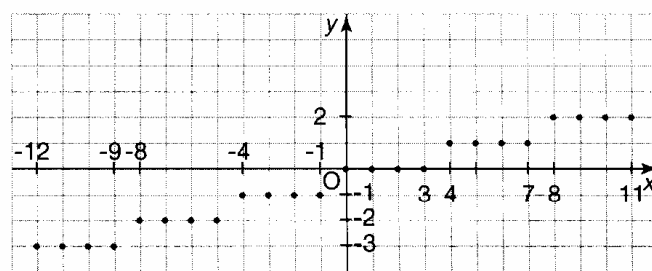
On en déduit $75b \leq 1517 < 76b$ donc $b = 20$ et $r = 17$.

49 $a = 72b + 12$ avec $12 < b$.

Il en résulte $a = 72b + 12 > 72 \times 12 + 12$, soit $a > 876$ ce qui contredit l'hypothèse $a < 300$.

50 1. $n = 4y + r$ et $0 \leq r < 4$.

2.



51 1. $n = 4q + y$ et $0 \leq y < 4$.

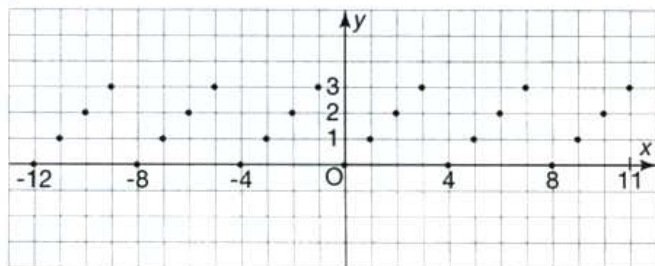
2. a) Si on ajoute 4 à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :

$$n + 4 = 4(q + 1) + y \text{ et } 0 \leq y < 4.$$

Cela démontre que la division de $n + 4$ donne $q + 1$ comme quotient et le même reste y .

En notant y_n le reste associé à n (pour adopter la notation habituelle des suites), on voit que pour tout n entier, $y_{n+4} = y_n$ ce qui montre que la suite y est périodique, de période 4.

b)



52 $3n^4 + 5n + 1 \equiv n^4 + n + 1 \pmod{2}$.

Dans les deux cas $n \equiv 0$ et $n \equiv 1$, $n^4 + n + 1 \equiv 1 \pmod{2}$ donc $3n^4 + 5n + 1$ est toujours impair. $n(n+1)$ est pair donc ce nombre ne peut diviser $3n^4 + 5n + 1$ sinon ce dernier serait pair.

53 $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Puis $a + 52 = (b + 4)q + r$ avec $0 \leq r < b + 4$.

Par soustraction on obtient $52 = 4q$, d'où $q = 13$.

54 1. $a - b = 538$ et $a = 13b + 34$ avec $34 < b$, d'où :
 $12b = 504$, d'où $b = 42$ et $a = 580$.

2. $a + b = 2\,096$ et $a = 5b + 206$ avec $206 < b$.

On en déduit $b = 315$, puis $a = 1\,781$.

55 1. $a = 5q + 3$.

$a = 15q' + r$ avec $0 \leq r < 15$. On en déduit :

$$5q + 3 = 15q' + r$$

donc $r - 3 = 5(q - 3q')$.

5 divise $r - 3$ mais comme avec $0 \leq r < 15$, les valeurs possibles de r sont 3, 8 et 13.

2. $a' = 15q + 13 = 5(3q + 2) + 3$ et comme $0 \leq 3 < 5$, 3 est le reste dans la division par 5.

56 1. $a = 6q + 4$.

$a = 18q' + r$ avec $0 \leq r < 18$. On en déduit :

$$6q + 4 = 18q' + r$$

donc $r - 4 = 6(q - 3q')$.

6 divise $r - 4$ mais comme avec $0 \leq r < 18$, les valeurs possibles de r sont 4, 10 et 16.

2. $a' = 18q + 13 = 6(3q + 2) + 1$ et comme $0 \leq 1 < 6$, le nombre 3 est le reste dans la division par 5.

57 • $a = bq + r$ avec $0 < q \leq r < b$.

D'où $a = (b + 1)q + r - q$ avec $0 \leq r - q < b$.

58 • 1. b) Le quotient reste égal à b si et seulement si :

$$a + h \text{ vérifie } bq \leq a + h < b(q + 1),$$

ce qui équivaut à :

$$bq - a \leq h < bq - a + b, \text{ soit encore } -r \leq h < b - r.$$

2. a) $r = 10$ donc $-10 \leq h < 7$.

b) $r = 6$ donc $-6 \leq h < 33$.

59 • 1.
$$\begin{cases} 0 < b^2 < a \\ a = (bc + r) \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

2. Si on avait $c < b$, on aurait $bc \leq b(b - 1)$ et comme $r < b$, on aurait $bc + r < b^2 - b + b < a$.

Ce qui implique $bc + r < a$, inégalité qui contredit l'hypothèse $a = bc + r$.

L'hypothèse $c < b$ est donc à rejeter et donc $b \leq c$.

3. Pour affirmer que b est le quotient de a par c , il faut les deux conditions suivantes :

$$a = cb + r \text{ et } 0 \leq r < c.$$

La première condition est acquise et la deuxième résulte du fait que $0 \leq r < b$ et $b \leq c$.

4. Prenons $a = 100$ et $b = 13$. On trouve alors $c = 7$ et $r = 9$. Mais si on divise 100 par $c = 7$, on trouve comme quotient 14 (différent de b) et $r = 2$.

60 • Soit h le nombre entier naturel cherché.

$$a = 625b + 8\,634 \text{ d'où } a + h = 625(b + h) + q.$$

Par soustraction on obtient : $h = 625h + q - 8\,634$ d'où :
 $624h = 8\,634 - q$.

h sera maximum pour $q = 0$. Comme h est entier sa

valeur maximale sera la partie entière de $\frac{8\,634}{624}$ qui est 13. Donc le nombre maximal que l'on peut ajouter à a et b sans changer le quotient est 13.

Pour progresser

(page 23)

Divisibilité et congruences

61 $\mathcal{D}(6n)$ contient au moins :

1, 2, 3, 6, n , $2n$, $3n$, $6n$.

62 Corrigé dans le manuel.

63 $n = 5k + 4$ avec k entier, donc

$$n^2 - 1 = 25k^2 + 40k + 16 - 1 = 5(5k^2 + 8k + 3).$$

64 $n = 7k + 2$ avec k entier, donc

$$\begin{aligned} n^3 - 1 &= 7^3k^3 + 6 \times 49k^2 + 84k + 7 \\ &= 7(49k^3 + 42k^2 + 12k + 1). \end{aligned}$$

65 $A_n = (n+1)(n+2) \dots (2n)$.

1^{re} étape : « $A_1 = 2$ est divisible par 2^1 » est vérifié.

2^e étape : Supposons que A_n est divisible par 2^n , c'est-à-dire :

$$(n+1)(n+2) \dots (2n) = k \times 2^n;$$

$$A_{n+1} = (n+2)(n+3) \dots (2n)(2n+1)(2n+2)$$

$$= A_n \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}$$

$$= 2A_n(2n+1)$$

$$= K \times 2^{n+1}.$$

Donc A_{n+1} est divisible par 2^{n+1} .

D'où le résultat.

66 Les p nombres consécutifs, en appelant a le premier, peuvent s'écrire :

$$a, a+1, \dots, a+p-1.$$

Ils constituent une suite arithmétique de raison 1 et leur somme est :

$$S = p \times \frac{a + a + p - 1}{2}.$$

Si p est impair, alors $p-1$ est pair, donc $\frac{a + a + p - 1}{2}$ est un entier et S est bien multiple de p .

67 Corrigé dans le manuel.

68 $n = 2p + 1$, $3^n + 4n + 1 = 3 \times 9^p + 8p + 4 + 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

69 $10^n(9n-1) \equiv 1^n(0-1) \equiv -1 \equiv 8 \pmod{9}$.

70 $a = n(n-4)(n+3)$ et $b = (2n+1)(n-4)$; a et b sont bien de la forme $(n-4)q$.

71 Si n est pair, $9n-1$ et $9n+1$ sont impairs, donc le produit $81n^2-1$ est impair.

Si n est impair, $9n-1$ et $9n+1$ sont deux nombres pairs consécutifs, donc le produit est divisible par 4. (Le produit est même divisible par 8, car les deux nombres pairs étant consécutifs, l'un est un multiple de 4.)

72 • a) $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.

On montre que $n(n+1)$ est toujours divisible par 2 (on examine les deux cas, n pair et n impair).

Pour la divisibilité par 3, on étudie les trois cas, $n \equiv 0, 1$ ou $2 \pmod{3}$ et on établit qu'à chaque fois, l'un des facteurs est congru à 0 modulo 3.

b) Pour 2, même chose que pour a) et pour 3, déjà vu à l'exercice résolu 5, page 11.

73 • $(x-y)(x+y) = 35$ donc $x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs de 35. Dans $\mathbb{Z}$, les diviseurs de 35 sont :

$$1, 5, 7, 35, -1, -5, -7, -35.$$

Les solutions sont données dans $\mathbb{Z}$ par les huit systèmes suivants :

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=35 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=7 \\ x+y=5 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x-y=35 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-35 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=-5 \\ x+y=-7 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x-y=-7 \\ x+y=-5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=-35 \\ x+y=-1 \end{cases}.$$

$$\mathcal{S} = \{(18; 17), (6; 1), (6; -1), (18; -17),$$

$$(-18; -17), (-6; -1), (-6; 1), (-18; 17)\}.$$

74 • Supposons qu'il existe une solution $(x; y)$ telle que $x+y = mxy$ avec x, y, m entiers naturels.

$x = y(mx-1)$ donc y divise x .

De même, $y = x(my-1)$ donc x divise y .

Il en résulte donc $x = y$.

On voit que $x = y = 0$ est une solution. En dehors de ce cas, on a $1 = mx-1$, d'où $mx = 2$. D'où $x = 1$ ou $x = 2$.

Finalement, si $(x; y)$ est solution, c'est l'un des couples $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 2)$. Réciproquement, on vérifie aisément que ces couples sont bien solutions.

$$\mathcal{S} = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2)\}.$$

75 • 1. Posons $A_n = 2^{3n} - 1$.

Pour $n = 0$, $A_0 = 0$ donc divisible par 7.

Supposons que $A_n = 2^{3n} - 1 = 7k$, avec k entier.

$$A_{n+1} = 2^{3n+3} - 1 = 8 \times 2^{3n} - 1 = 8(7k+1) - 1 = 7(8k+1).$$

Donc A_{n+1} est bien divisible par 7.

2. $2^{3n+1} - 2 = 2A_n$ et $2^{3n+2} - 4 = 4A_n$; ces deux nombres sont divisibles par 7 puisque A_n l'est.

3. Tout entier m est de la forme $3n$ ou $3n+1$ ou $3n+2$. D'après les résultats précédents :

• si $m = 3n$, alors $2^m = 7k+1$;

• si $m = 3n+1$, alors $2^m = 7k+2$;

• si $m = 3n+2$, alors $2^m = 7k+4$.

Conclusion : les restes de la division de 2^m par 7 sont 1, 2 ou 4.

76 1. On factorise les deux polynômes :

$$n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4)$$

et

$$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2).$$

2. $3n^2 + 15n + 19 = 3(n+1)(n+4) + 7$; donc si $n+1$ divise $3n^2 + 15n + 19$, alors $n+1$ divise 7, donc :

$$n = 0 \text{ ou } n = 6.$$

Réciproquement, $n = 0$ convient car 1 divise tout nombre entier.

Pour $n = 6$, $n+1 = 7$ et $3n^2 + 15n + 19 = 217$ qui est divisible par 7.

3. $n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$; donc si :
 $3n^2 + 15n + 19$

est divisible par $(n + 1)(n + 2)$, il est divisible par chacun des nombres $n + 1$ et $n + 2$. Étant divisible par $n + 1$, $n = 0$ ou $n = 6$.

• Si $n = 0$, $3n^2 + 15n + 19 = 19$ et ce nombre n'est pas divisible par $n + 2$ qui vaut 2.

• Si $n = 6$, alors $3n^2 + 15n + 19 = 217$ et $n + 2 = 8$ et 8 ne divise pas 217.

Conclusion : $3n^2 + 15n + 19$ n'est jamais divisible par $n^2 + 3n + 2$.

77 • Sans restreindre la généralité du problème, on peut supposer que a, b, c désignent les côtés du triangle rangés dans l'ordre croissant. On peut donc alors écrire que $a^2 + b^2 = c^2$.

1. Il s'agit de montrer que a, b, c ne peuvent pas être impairs tous les trois.

Supposons que a, b et c soient impairs.

a et b étant impairs, a^2 et b^2 le sont aussi et alors c^2 , somme de deux nombres impairs, est pair.

Et c ne peut être impair, d'où la contradiction.

2. Supposons qu'aucun des nombres ne soit divisible par 3. On aurait donc $a \equiv 1$ ou $a \equiv 2 \pmod{3}$, d'où $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ dans les deux cas.

De même, on aurait $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et $c^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et alors on aurait :

$$a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{3},$$

ce qui contredit $c^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Donc l'un des trois nombres a, b, c est divisible par 3.

3. Raisonnons par contradiction. Supposons qu'aucun des trois nombres a, b, c n'est divisible par 4.

Divisons ces trois nombres par 4 :

$$a = 4q + r ; b = 4q' + r' ; c = 4q'' + r''$$

avec r, r', r'' dans l'ensemble $\{1; 2; 3\}$.

Examinons les restes possibles dans la division de c^2 par 4. On peut établir facilement en examinant les trois cas que les restes possibles sont uniquement 1 ou 0 comme le montre le tableau suivant :

r''	1	2	3
reste (c^2)	1	0	1

Les restes dans la division de $a^2 + b^2$ par 4 sont donnés par le tableau suivant :

$r \backslash r'$	1	2	3
1	2	1	2
2	1	0	1
3	2	1	2

On voit tout de suite que sur les neuf cases, les quatre cases contenant 2 conduisent à une contradiction puisque le reste de c^2 ne peut pas être égal à 2.

Il nous faut maintenant examiner les deux cas :

Reste $(a^2 + b^2) = 0$ et ensuite Reste $(a^2 + b^2) = 1$.

Étude du cas Reste $(a^2 + b^2) = 0$

Ce cas implique nécessairement : $r = 2, r' = 2$ et $r'' = 2$ car on doit avoir Reste $(a^2 + b^2) = \text{Reste}(c^2)$.

L'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ donne :

$$(4q + 2)^2 + (4q' + 2)^2 = (4q'' + 2)^2,$$

$$\text{soit } 4 = 16(q''^2 + q' - q^2 - q - q'^2 - q'),$$

$$\text{soit } 1 = 4k, \text{ avec } k \text{ entier d'où la contradiction.}$$

Étude du cas Reste $(a^2 + b^2) = 1$

Ce cas implique nécessairement $r'' = 1$ ou $r'' = 3$.

Pour r et r' , il faut examiner $r = 1$ et $r' = 2$ ou bien $r = 2$ et $r' = 3$ (les cas symétriques $r = 2, r' = 1$... donnent les mêmes résultats).

Traitons le cas : $r = 1, r' = 2$ et $r'' = 1$.

L'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ donne :

$$(4q + 1)^2 + (4q' + 2)^2 = (4q'' + 1)^2,$$

$$\text{soit } 16q^2 + 16q' + 4 = 16q''^2 + 8q'' - 16q^2 - 8q, \text{ d'où on déduit une égalité du type } 4 = 8k, \text{ avec } k \text{ entier d'où la contradiction.}$$

Les autres cas se traitent de la même manière et conduisent à une contradiction.

4. Observons d'abord que si un entier n'est pas divisible par 5, alors le reste de la division par 5 de son carré ne peut être que 1 ou 4.

Si aucun des trois entiers a, b, c n'est divisible par 5, les restes possibles de la division par 5 de $a^2 + b^2$ sont donnés par le tableau ci-contre.

	1	4
1	2	0
4	0	3

Aucun résultat n'est compatible avec le reste de c^2 (qui ne peut être que 1 ou 4). Il en résulte que l'hypothèse «aucun des trois entiers a, b, c n'est divisible par 5» conduit à une contradiction, elle est donc à rejeter.

78 • 1. Faux. Si $n = 4$, on trouve $4 \times 5 \times 7$ qui n'est pas divisible par 12.

2. Faux. Si $n \leq 11$, 11 ne peut pas être le reste.

3. Vrai.

79 $a \equiv b \pmod{m}$ équivaut à $a = b + km$ (avec k entier).

Si a, b, m sont divisibles par c , l'égalité précédente équivaut à $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} + k\frac{m}{c}$. D'où la conclusion.

80 1. $a \equiv n(n^2 + 1)$. On raisonne modulo 2. Si $n \equiv 0 \pmod{2}$ alors $a \equiv 0 \pmod{2}$ et si $n \equiv 1 \pmod{2}$ alors $n^2 + 1 \equiv 0$ et donc $a \equiv 0 \pmod{2}$. Dans tous les cas, a est pair.

2. Même méthode. On raisonne modulo 3 en examinant les trois cas : $n \equiv 0, n \equiv 1, n \equiv 2$.

81 On raisonne modulo 6. Dans chacun des six cas, on s'assure que $a \equiv 0 \pmod{6}$.

82 $n^2 + n = n(n + 1)$ est divisible par 2 donc $(n^2 + n)^2 = 4k$ avec k entier. Donc $a = 5 \times 4k$ est bien divisible par 20.

83 1. Récurrence.

a) Immédiat.

b) $u_0 = 0$ est bien divisible par 6.Supposons que $u_n = 6q$. Alors

$$u_{n+1} = 6q + 3[5n(n+1) + 2].$$

Or $n(n+1)$ est pair donc : $5n(n+1) + 2 = 2k$. Il en résulte que $u_{n+1} = 6q + 6k$ et u_{n+1} est divisible par 6.

2. Par les congruences.

On raisonne modulo 6. Dans les six cas on établit que $u_n \equiv 0 \pmod{6}$.**84** Posons $u_n = 2^{3n} - 1 = 8n - 1$.

a) Par récurrence :

 $u_0 = 0$ est bien divisible par 7.Supposons $u_n = 7q$. Alors $8^n = 7q + 1$ et

$$u_{n+1} = 8^{n+1} - 1 = 8 \times (7q + 1) - 1 = 56q + 7 = 7(8q + 1).$$

Donc u_{n+1} est divisible par 7.

b) Par les congruences.

$$8^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}.$$

85 • Les trois suites 2^{3n} ; 2^{2n} ; 2^n ont toutes les trois des restes périodiques de même période 3, donc la somme est périodique. On trouve

$$\text{si } n = 3k \text{ alors } 2^{3n} + 2^{2n} + 2^n \equiv 3 \pmod{7};$$

$$\text{si } n = 3k + 1 \text{ alors } 2^{3n} + 2^{2n} + 2^n \equiv 0 \pmod{7};$$

$$\text{si } n = 3k + 2 \text{ alors } 2^{3n} + 2^{2n} + 2^n \equiv 0 \pmod{7}.$$

86 1. $57\,383 \equiv 3 \pmod{19}$ donc

$$57\,383^{114} \equiv 3^{114} \pmod{19}. \text{ Or } 3^9 \equiv -1 \pmod{19} \text{ donc :}$$

$$3^{114} \equiv (3^9)^{12} \times 3^6 \equiv 3^6 \equiv 7 \pmod{19}.$$

Le reste est 7.

$$2. 91\,234 \equiv 3 \pmod{7} \text{ donc } 91\,234^{2006} \equiv 3^{2006}.$$

$$\text{Or } 3^3 \equiv -1 \pmod{7} \text{ et } 2006 = 2004 + 2,$$

$$\text{donc } 3^{2006} \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Le reste est 2.

$$\mathbf{87} \quad 5^{2n} = 25^n \text{ donc } 5^{2n} - 14^n \equiv 3^n - 3^n \equiv 0 \pmod{11}.$$

$$\mathbf{88} \quad 50 \equiv 1 \pmod{7} \text{ donc } 50^{60} \equiv 1 \pmod{7}.$$

$$100 \equiv 2 \pmod{7} \text{ donc } 100^{99} \equiv 2^{99} \equiv (2^3)^{33} \equiv 1^{33} \pmod{7}.$$

$$\text{Donc } 50^{60} - 100^{99} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{7}.$$

$$\mathbf{89} \quad 1. 5^3 = 125 = 7 \times 17 + 6 \text{ donc } 5^{3n} \equiv 6^n \text{ et donc } 5^{3n} - 6^n \equiv 6 \pmod{17}.$$

$$2. 7^{2n+1} = 49^n \times 7. \text{ Or } 49 \equiv 1 \pmod{16}$$

$$\text{donc } 7^{2n+1} \equiv 7 \pmod{16}.$$

Il en résulte que $7^{2n+1} + 9 \equiv 16 \equiv 0 \pmod{16}$. Donc $7^{2n+1} + 9$ est divisible par 16.**90** • 1.

reste de n	0	1	2	3	4	5	6	7
reste de n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Le tableau donne les restes de n^2 modulo 8. On voit que ces restes ne peuvent être que 0, 1, 4.

$$2. (n+3)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8} \text{ équivaut à } (n+3)^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

D'après le tableau du 1., on voit que cela équivaut à $n+3 \equiv 1$ ou $n+3 \equiv 3$ ou $n+3 \equiv 5$ ou $n+3 \equiv 7 \pmod{8}$.Cela équivaut à $n \equiv 0$ ou $n \equiv 2$ ou $n \equiv 4$ ou $n \equiv 6 \pmod{8}$.
Finalement l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres pairs de $\mathbb{Z}$.**91** • 1. $3^2 \equiv -2 \pmod{11}$, donc :

$$3^4 \equiv 4 \pmod{11} \text{ et } 3^5 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}.$$

$$3^{5k+r} \equiv (3^5)^k 3^r \equiv 1^k 3^r \equiv 3^r \pmod{11}.$$

Tout entier n peut s'écrire $n = 3k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que :

$$3^n \equiv 3^r \pmod{11}.$$

Il suffit donc de trouver tous les restes modulo 11 des valeurs de 3^r pour $r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Le résultat est donné par le tableau suivant :

r	0	1	2	3	4
reste de 3^r	1	3	9	5	4

$$2. 3^n + 7 \text{ divisible par } 11 \text{ équivaut à } 3^n + 7 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Le tableau montre que cela équivaut à $r = 4$ donc $n = 5k + 4$.L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des entiers $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$.**92** • L'équation équivaut à $2^n \equiv 1 \pmod{9}$.Cherchons les restes dans la division par 9 de 2^n pour n de 0 à 10. Avec un tableur, on trouve :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
reste de 2^n mod 9	1	2	4	8	7	5	1	2	4	8	7

Les résultats précédents permettent de conjecturer que la suite des restes est périodique de période 6.

C'est-à-dire que pour tout n , $2^{n+6} \equiv 2^n \pmod{9}$. La démonstration résulte du fait que $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$.On en déduit que si r est le reste de la division de n par 6, alors $2^n \equiv 2^r \pmod{9}$.

$$\text{Donc } 2^n \equiv 1 \pmod{9} \text{ équivaut à } n \equiv 0 \pmod{6}.$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des multiples de 6, $\mathcal{S} = \{6k, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\mathbf{93} \quad 1. (n-1) + n + (n+1) = 3n.$$

2. $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$. Il suffit de prouver que $n(n^2 + 2)$ est un multiple de 3, c'est-à-dire que $n(n^2 + 2) \equiv 0 \pmod{3}$ ce qui s'obtient facilement.**94** • Si $a \equiv 0 \pmod{3}$ ou $b \equiv 0 \pmod{3}$ le résultat est acquis. Il en est de même si $a \equiv b \pmod{3}$. Il reste à étudier les cas $a \equiv 1 \pmod{3}$ et $b \equiv 2 \pmod{3}$ ainsi que $a \equiv 2 \pmod{3}$ ou $b \equiv 1 \pmod{3}$. Dans ces derniers cas, on trouve aisément que $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{3}$ d'où le résultat attendu.**95** • 1. Il est commode de faire un tableau.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

2. On voit que $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ équivaut à $x = 9k$ ou $x = 3 + 9k$ ou $x = 6 + 9k$ soit $x \equiv 0 \pmod{3}$.

De même, $x^3 \equiv 1 \pmod{9}$ équivaut à $x = 1 + 9k$ ou $x = 4 + 9k$ ou $x = 7 + 9k$ soit $x \equiv 1 \pmod{3}$.

$x^3 \equiv 8 \pmod{9}$ équivaut à $x = 2 + 9k$ ou $x = 5 + 9k$ ou $x = 8 + 9k$ soit $x \equiv 2 \pmod{3}$.

3. Par hypothèse, $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0 \pmod{9}$.

Examinons comment on peut obtenir $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0 \pmod{9}$.

Si $x^3 \equiv 0$, $y^3 \equiv 0$ et $z^3 \equiv 0 \pmod{9}$ la conclusion est acquise.

En dehors de ce premier cas, il est visible que l'un au moins des trois nombres x^3 , y^3 , z^3 doit être congru à 8 sinon avec des 0 et des 1 on n'atteindra pas 9. En envisageant tous les couples possibles, on constate que la seule possibilité est que l'un des trois nombres x^3 , y^3 , z^3 soit congru à 0, un congru à 8 et l'autre congru à 1 (en dehors du cas où tous les 3 sont congrus à 0).

Donc dans tous les cas l'un des trois nombres x^3 , y^3 , z^3 est congru à 0 $\pmod{9}$ ce qui revient à dire que x ou y ou z est congru à 0 modulo 3.

96 • 1. Étudions la suite des restes des divisions de $x^2 + x - 2$ par 7. Cette suite est périodique de période 7 puisque :

$$(x + 7)^2 \equiv x^2 \text{ et } x + 7 \equiv x \pmod{7}.$$

$x \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 + x - 2 \pmod{7}$	5	0	4	3	4	0	5

Le tableau montre que $x^2 + x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 1$ ou $x \equiv 5 \pmod{7}$.

D'où $\mathcal{E}_1 = \{x/x = 1 + 7k \text{ ou } x = 5 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Même raisonnement avec les congruences modulo 3.

$x \pmod{3}$	0	1	2
$x^2 + x - 2 \pmod{3}$	1	0	1

Le tableau montre que $x^2 + x - 2 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $x \equiv 1 \pmod{3}$. D'où $\mathcal{E}_2 = \{1 + 3k, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Si $x = 1 + 21k$, $n = (1 + 21k)^2 + 1 + 21k - 2 = 21k(21k + 3)$.

Si k est pair, $21k$ est divisible par 42 donc 42 divise n .

Si k est impair, $21k + 3$ est pair et alors 42 divise n .

Si $x = -2 + 21k$, on raisonne de la même façon.

97 • Étudions la suite des restes des divisions de $n^2 - 3n + 6$ par 5. Cette suite est périodique de période 5 puisque :

$$(n + 5)^2 \equiv n^2 \text{ et } n + 5 \equiv n \pmod{5}.$$

$n \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$n^2 - 3n + 6 \pmod{5}$	1	4	4	1	0

Le tableau montre que $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod{5}$ équivaut à $n \equiv 4 \pmod{5}$.

D'où $\mathcal{S} = \{4 + 5k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

98 • Divisons n par 3, $n = 3p + r$ avec $r \in \{0; 1; 2\}$.
 $4^n + 6n - 1 = 64^p 4^r + 18p + 6r - 1$.

Or $64 \equiv 1 \pmod{9}$, donc $4^n + 6n - 1 \equiv 4^r + 6r - 1$.

Si $r = 0$, $4^r + 6r - 1 = 0$.

Si $r = 1$, $4^r + 6r - 1 = 9$.

Si $r = 2$, $4^r + 6r - 1 = 27$.

Dans les trois cas, $4^n + 6n - 1 \equiv 4^r + 6r - 1 \equiv 0 \pmod{9}$ donc $4^n + 6n - 1$ est toujours divisible par 9.

99 • Remarquons que si n est solution alors n est impair.

On raisonne modulo 8.

Pour n impair, $n \times 7^n + 4n + 1 \equiv 0 \pmod{8}$ équivaut à :
 $n \times (-1)^n + 4n + 1 \equiv 0 \pmod{8}$ soit encore $3n + 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

L'étude de tous les cas pour n impair, montre que la solution est obtenue si et seulement si $x \equiv 5 \pmod{8}$.

Les solutions sont donc tous les nombres de la forme $x = 5 + 8k$ avec k entier naturel.

100 • Le problème revient à trouver n dans $\mathbb{N}$ tels que $(-1)^{n+1} - (n+1)(-1)^n \equiv 1 \pmod{4}$ soit encore :
 $(-1)^n(-2-n) \equiv 1 \pmod{4}$.

Il n'y a pas de solution parmi les entiers pairs.

Si n impair, l'équation devient : $2 + n \equiv 1 \pmod{4}$.

n étant un naturel, les solutions sont tous les nombres de la forme $n = 3 + 4k$ avec k entier naturel.

101 Corrigé dans le manuel.

102 • 1. a) Si m est impair, $p = 0$ et $b = m$.

Si m est pair on le divise par 2, $m = 2m_1$.

On réitère le processus jusqu'à trouver un quotient impair. Les quotients successifs $m_1, m_2, m_3, \dots$ constituent une suite d'entiers naturels strictement décroissante donc elle est finie ce qui garantit l'existence d'un quotient impair m_k . On a alors $a = 2^k m_k$.

b) Les nombres impairs inférieurs à $2n$ sont les termes de la suite arithmétique $u_k = 2k + 1$. Les impairs inférieurs à $2n$ sont numérotés de 0 à $n - 1$. Il y en a donc exactement n .

2. a) Remarquons que tous les nombres b_i sont compris entre 1 et $2n$ et sont impairs. En effet si a_k est impair alors $b_i = a_k$ et il est entre 1 et $2n$. Si a_k est pair alors b_i est obtenu par des divisions successives par 2 donc b_i est un nombre impair entre 1 et n donc entre 1 et $2n$. L'ensemble des b_i est donc constitué par $n + 1$ nombres impairs entre 1 et $2n$, d'après la question 1. b) il y en a au moins deux égaux.

b) Supposons que $b_i = b_j = d$. Alors $a_i = 2^{p_i} d$ et $b_j = 2^{p_j} d$. Si $i \leq j$ alors a_i divise a_j sinon a_j divise a_i .

103 • Une étude des restes modulo 7 de 4^n permet de conjecturer une périodicité de 3 et, pour les restes de 5^n modulo 7, une périodicité de 6. Démontrons-le.
 $4^{n+3} \equiv 4^n \times 64$, donc pour tout entier n , $4^{n+3} \equiv 4^n \pmod{7}$.

$5^{n+6} = 5^n \times 5^6$; or, $5^6 = 7 \times 2\,232 + 1$, donc pour tout entier n , $5^{n+6} \equiv 5^n \pmod{7}$.

La suite R_n des restes modulo 7 de $4^n + 5^n + 2$ est donc périodique de période 6 et est entièrement connue si on l'étudie pour n de 0 à 6 :

n	0	1	2	3	4	5	6
$4^n \pmod{7}$	1	4	2	1	4	2	1
$5^n \pmod{7}$	1	5	4	6	2	3	1
$4^n + 5^n + 2 \pmod{7}$	4	4	1	2	1	0	4

Donc $4^n + 5^n + 2 \equiv 0 \pmod{7}$ équivaut à $n \equiv 5 \pmod{6}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des entiers de la forme $n = 5 + 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

104 • 1. a) Les résultats connus sur la somme des termes d'une suite géométrique permettent d'écrire

$$u_n = \frac{3^n - 1}{2} \text{ donc } 2u_n = 3^n - 1.$$

Donc $u_n \equiv 0 \pmod{7}$ implique $2u_n \equiv 0$, soit $3^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

b) Réciproquement, si $3^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$, alors 7 divise $2u_n$. Avec un tableau donnant les restes modulo 7 de $2a$ en fonction de a , ou en déduit que $u_n \equiv 0 \pmod{7}$.

2. u_n divisible par 7 équivaut à $u_n \equiv 0 \pmod{7}$.

D'après le 1., cela équivaut à $3^n \equiv 1 \pmod{7}$. La suite des restes de $3^n \pmod{7}$ est périodique de période 6. On en déduit que l'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers de la forme $6k$ avec $k \geq 1$.

105 • 1. Le tableau suivant permet de conjecturer que la suite des restes de 7^n modulo 10 est périodique de période 4.

n	0	1	2	3	4	5
reste de $7^n \pmod{10}$	1	7	9	3	1	7

On peut le démontrer facilement :

$$7^4 = 2401, \text{ donc } 7^4 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Il en résulte que $7^{n+4} \equiv 7^n \pmod{10}$.

2. $1 + 7 + 7^2 + 7^3 \equiv 1 + 7 + 9 + 3 \equiv 0 \pmod{10}$.

L'idée est de regrouper par paquets de quatre puissances de 7 consécutives. Chaque paquet complet est congru à 0 modulo 10.

• Si $n = 4k$, alors $A \equiv 7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$.

Le chiffre des unités de A est 1.

• Si $n = 4k + 1$, alors $A \equiv 7^{4k} + 7^{4k+1} \equiv 1 + 7 \pmod{10}$.

Le chiffre des unités de A est 8.

• Si $n = 4k + 2$, alors $A \equiv 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} \equiv 1 + 7 + 9 \equiv 7 \pmod{10}$.

Le chiffre des unités de A est 7.

• Si $n = 4k + 3$, alors $A \equiv 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0 \pmod{10}$.

Le chiffre des unités de A est 0.

106 • 1. Immédiat.

2. Le résultat de la question 1. prouve que chacun des nombres $2^6, 3^6, 4^6, 5^6$ est congru à 1 modulo 7.

$$\text{Donc } S_{n+6} - S_n \equiv 2^n \times 1 + 3^n \times 1 + 4^n \times 1 + 5^n \times 1 - (2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \equiv 0 \pmod{7}.$$

3. Soit $n = 6k + r$. D'après la question précédente,

$$S_r \equiv S_{r+6} \equiv S_{r+12} \equiv S_{r+18} \equiv \dots \equiv S_{r+6k} \pmod{7}.$$

(On réitère k fois la congruence $S_m \equiv S_{m+6}$.)

4. D'après ce qui précède, S_n est divisible par 7 si et seulement si $S_r \equiv 0 \pmod{7}$.

r	0	1	2	3	4	5
reste de $S_r \pmod{7}$	4	0	5	0	5	0

On voit que S_n est divisible par 7 si n est impair.

5. $100 \equiv 2 \pmod{7}$; $101 \equiv 3 \pmod{7}$; $102 \equiv 4 \pmod{7}$; $103 \equiv 5 \pmod{7}$; il en résulte que $S_n \equiv T_n \pmod{7}$.

Donc T_n est divisible par 7 pour tout entier n impair.

107 • Soit (x, y) une solution.

Par addition, on trouve que $4x \equiv 4 \pmod{6}$.

Étudions les restes de $4x$ selon les restes possibles de x modulo 6.

$x \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
$4x \pmod{6}$	0	4	2	0	4	2

Donc $4x \equiv 4 \pmod{6}$ équivaut à :

$$[x \equiv 1 \pmod{6} \text{ ou } x \equiv 4 \pmod{6}].$$

La deuxième équation donne $y \equiv x - 3 \pmod{6}$.

Donc si (x, y) est une solution alors :

$$[x \equiv 1 \pmod{6} \text{ et } y \equiv 4 \pmod{6}] \text{ ou }$$

$$[x \equiv 4 \pmod{6} \text{ et } y \equiv 1 \pmod{6}].$$

L'ensemble des couples solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{(x, y) / x = 1 + 6k \text{ et } y = 4 + 6k' \text{ avec } (k, k') \in \mathbb{Z}^2\} \cup \{(x, y) / x = 4 + 6k \text{ et } y = 1 + 6k' \text{ avec } (k, k') \in \mathbb{Z}^2\}.$$

108 • Corrigé dans le manuel.

109 • 1. a) Si a existe et est pair alors a^2 l'est aussi et $a^2 + 9$ est impair ce qui est impossible puisque $a^2 + 9 = 2^n$.

b) Si a est solution, a est pair donc $a = 2p$ avec p entier. Donc $a^2 + 9 = 4p^2 + 4p + 10 \equiv 2 \pmod{4}$. Or $n \geq 4$ donc $2^n \equiv 0 \pmod{4}$. L'équation n'a donc pas de solution.

2. a) $3 \equiv -1 \pmod{4}$ donc $3^n \equiv (-1)^n \pmod{4}$.

Si n est pair, $3^n \equiv 1 \pmod{4}$.

Si n est impair, $3^n \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$.

b) D'après la question précédente, $a^2 + 1 \equiv 1$ ou $a^2 + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ donc $a^2 \equiv 0$ ou $2 \pmod{4}$. Il en résulte que a^2 est pair, donc a est pair également. Il en résulte que $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$ donc $3^n \equiv 1 \pmod{4}$. Cette dernière congruence équivaut à $(-1)^n \equiv 1 \pmod{4}$ ce qui impose n pair.

c) $n = 2p$. L'équation équivaut donc à : $a^2 + 9 = 3^{2p}$ soit : $(3^p - a)(3^p + a) = 0$. Si elle a une solution, $3^p + a$ divise 9. Or $n \geq 3$ implique $p \geq 2$. $p > 2$ est impossible donc

$p = 2$ et $a = 0$ ce qui implique $n = 2$ contredisant une hypothèse du texte, donc l'équation n'a pas de solution.

3. a) Si a est solution, $a^2 \equiv 2^n \pmod{3}$. Si n est impair, $a^2 \equiv 2^{2p+1} \equiv 2 \pmod{3}$.

L'étude des restes modulo 3 de a^2 montre que c'est impossible (le reste de a^2 modulo 3 est 0 ou 1 mais jamais 2). Donc n impair conduit à une impossibilité.

b) $n = 2p$. Si a est solution alors : $(5^p - a)(5^p + a) = 9$ et $5^p + a$ divise 9. L'hypothèse $n \geq 2$ implique $p \geq 1$. $p > 1$ est impossible donc $p = 1$ d'où $n = 2$ et $a = 4$.

Réciproquement $n = 2$ et $a = 4$ conviennent.

Numération

110 • $\overline{aaa} = a \times 111 \equiv 3$ et $111 = 3 \equiv 37$.

Donc $\overline{aaa} \equiv 0 \pmod{37}$.

111 1. En base huit : 205511; en base douze : 33721.

2. En base dix : 4722.

En base deux : 1001001110010.

3. $11 + 10 \times 12 + 123 = 1859$.

$$\begin{array}{r} \textbf{112} \quad \begin{array}{r} 8963 \\ 9 \\ \hline 80667 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5283 \\ 39 \\ \hline 47547 \\ \hline 15849 \\ \hline 206037 \end{array} \end{array}$$

Prendre toutes les initiatives

113 Soit pk et $p(k+1)$ deux multiples consécutifs de p . Les entiers strictement compris entre ces deux nombres sont :

$$pk + 1, pk + 2, \dots, pk + p - 1.$$

Il y en a exactement $p - 1$. Donc on peut loger au maximum $p - 1$ entiers entre deux multiples consécutifs de p .

Il en résulte que si on prend p entiers consécutifs, ils ne pourront pas être tous entre deux multiples consécutifs. Plus précisément, si a est le premier, le dernier est :

$$b = a + p - 1.$$

Si on divise a par p , on obtient $a = pq + r$ avec $0 \leq r < p$.

Si $r = 0$, a est un multiple de p et la propriété est établie.

Si $r > 0$, $b = pq + r + p - 1 = p(q+1) + r - 1$ et comme $r - 1 \geq 0$, $a < p(q+1) \leq b$. Comme les entiers entre a et b sont consécutifs, le multiple de p qui est $p(q+1)$ est l'un de ces nombres.

114 • Quel que soit l'entier n , $n > 0$, $10^n \equiv 4 \pmod{6}$. Donc $a_n 10^n \equiv 4a_n \pmod{6}$.

Dans le système décimal, un entier m s'écrit :

$$m = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0.$$

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} m &\equiv a_n \times 4 + a_{n-1} \times 4 + \dots + a_1 \times 4 + a_0 \\ &\equiv 4(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1) + a_0 \pmod{6}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $m \equiv 0 \pmod{6}$ équivaut à $4(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1) + a_0 \equiv 0 \pmod{6}$.

115 • Supposons $0 < x \leq y \leq z$.

On en déduit $\frac{x}{z} \leq \frac{y}{z} \leq 1$. La relation reliant x , y , z donne en divisant par z :

$$xy = 4\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1\right) \leq 4(1 + 1 + 1) = 12.$$

Remarquons que $xy \leq 4$ ne donne pas de solution en dehors de $x = y = z = 0$, car $xy < 4 \Rightarrow x + y < 0$.

Il reste à examiner tous les cas selon les valeurs de xy de 5 à 12 en tenant compte de la convention sur les notations : $x \leq y \leq z$. On trouve les solutions suivantes :

$$x = 1; y = 5; z = 24$$

$$x = 1; y = 6; z = 14$$

$$x = 2; y = 3; z = 10$$

$$x = 1; y = 8; z = 9$$

$$x = 2; y = 4; z = 6$$

116 • On raisonne modulo 1 001.

$10^3 \equiv -1 \pmod{1\,001}$ donc $10^{3n} \equiv (-1)^n$; $10^{6n} \equiv 1^n$; $10^{9n} \equiv (-1)^n$.

$$10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1 \equiv (-1)^n + 2 + 2(-1)^n + 1 \equiv 3(-1)^n + 3 \pmod{1\,001}.$$

Si n est pair, le reste est 6.

Si n est impair, le reste est 0.

117 • $5^5 = (5^2)^2 \times 5$ et $25 \equiv 3 \pmod{11}$ donc :

$$5^5 \equiv 9 \times 5 \equiv 1 \pmod{11}.$$

De même, $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$. Donc :

$$\begin{aligned} 5^{5n+2} + 3^{5n-1} - 7 &\equiv 1^n \times 25 + 3^{5(n-1)+4} - 7 \\ &\equiv 3 + 1^{n-1} \times 81 - 7 \equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

118 • Le problème revient à résoudre $x^2 - y^2 = 13$ avec $y \geq 0$.

$(x - y)(x + y) = 13$ donc $x - y$ divise 13. Les valeurs possibles de $x - y$ sont 13; 1; -1; -13.

Compte tenu de la condition $y \geq 0$, on trouve deux solutions qui sont les points de coordonnées $(x = -7; y = 6)$ et $(x = 7; y = 6)$.

119 • On étudie les restes possibles de la division de x^2 par 4. On trouve 0 ou 1. Pour $3y^2$, on trouve 0 et 3, donc pour $-3y^2$, les restes possibles sont 0 ou 1 ($1 \equiv -3 \pmod{4}$).

Si on construit la table d'addition pour trouver tous les restes possibles de $x^2 - 3y^2$, on trouve que les restes possibles sont 0, 1 ou 2.

$$x^2 - 3y^2 - 4z^2 \equiv x^2 - 3y^2 \pmod{4}, \text{ donc}$$

$$x^2 - 3y^2 - 4z^2 \equiv 3$$

est impossible puisqu'on a vu que les seuls restes modulo 4 de $x^2 - 3y^2$ sont 0, 1 ou 2.

120 1. a) 2. c) 3. a) 4. b)**121** 1. Vrai car $a = 5 + 121k = 5 + 11 \times 11k = 11k'$.2. Vrai car d divise $2(3a + 5b) - 3(2a + 3b) = b$ donc b divise $4b$.3. Faux. Si par exemple $q = 3$ et $r = 2$, $r^2 = 4$ ne peut pas être le reste de la division de a^2 par 3 car $4 > 3$.4. Vrai car par hypothèse $a \equiv 1$ ou $a \equiv 2 \pmod{3}$ et dans les deux cas $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$.Il en est de même pour b , donc $a^2 - b^2 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{3}$.

5. Vrai.

6. Vrai. En effet, $4n + 3$ ne peut pas être le carré d'un nombre pair. Or $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc le carré d'un nombre impair est nécessairement congru à 1 modulo 4. Un carré ne peut donc pas être de la forme $4n + 3$.7. Faux si $n \leq 11$.**122** 1. Voir le cours.

2. a)

Lettre	B	A	D	G	E
n	2	1	4	7	5
$f(n)$	3	5	9	3	1
Lettre	C	E	I	C	A

On ne peut pas déchiffrer sans ambiguïté car des lettres différentes sont codées par le même nombre (ex. : B et G).

b)

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(n)$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
Lettre	B	D	H	E	K	I	G	C	F	A

Cette grille permet le déchiffrement car g est une bijection de $\{1, 2, \dots, 10\}$ sur lui-même.

Travaux dirigés (page 45)

TD 1

1 PGCD = 54, PPCM = 2160.

3 a) 240; b) 1092.

TD 2

4 a) PGCD = 6; $u = 155$; $v = -1264$.

b) PGCD = 1; $u = -739$; $v = 3314$.

TD 3

2 1. a) Il suffit d'écrire l'égalité des composantes des deux vecteurs $\overrightarrow{A_0M}$ et $k\overrightarrow{A_0A_0'}$.

b) M appartient au cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 = N$.

En ordonnant selon les puissances de k, on trouve :

$$\left[\left(\frac{m}{d_0} - m'\right)^2 + \left(\frac{n}{d_0} - n'\right)^2\right] k^2 +$$

$$2\left[m'\left(\frac{m}{d_0} - m'\right) + n'\left(\frac{n}{d_0} - n'\right)\right] k + m'^2 + n'^2 - N = 0.$$

c) $k = 1$ solution car si $k = 1$, la relation vectorielle qui définit M donne $M = A_0$ qui est par hypothèse un point du cercle.

Remarque : Si on remplace k par 1 dans l'équation ci-dessus, on peut vérifier par le calcul en utilisant le fait que $\frac{m^2}{d_0^2} + \frac{n^2}{d_0^2} = N$ (traduction de l'appartenance de A_0 au cercle).

d) $D = [d(A_0; A_0')]^2$, immédiat en appliquant la formule donnant la distance de deux points. $\frac{m^2 + n^2}{d_0^2} = N$

car A_0 appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{N}$.

Si on développe D, et si on remplace $\frac{m^2}{d_0^2} + \frac{n^2}{d_0^2}$ par N, on trouve :

$$D = N + m'_2 + n'_2 - \frac{2(mm' + nn')}{d_0}$$

et en mettant le tout sur le dénominateur d_0 , on voit que D est bien de la forme $\frac{d_1}{d_0}$. Ce nombre est

positif et, comme il représente $D = [d(A_0; A_0')]^2$, on sait, d'après le lemme, que ce nombre est inférieur strictement à 1.

Donc $0 < d_1 < d_0$.

e) En remplaçant D par $\frac{d_1}{d_0}$, on obtient

$$k = (m'_2 + n'_2 - N) \frac{d_1}{d_0}.$$

Les valeurs de x_1 et y_1 se calculent à partir des expressions de x et y en remplaçant k par la valeur précédente.

$$x_1 = m' + (m'^2 + n'^2 - N) \frac{d_0}{d_1} \times \frac{m}{d_0} - (m'^2 + n'^2 - N) \frac{m'd_0}{d_1}$$

$$= \frac{m'd_1 + (m'^2 + n'^2 - N)(m - m'd_0)}{d_1} = \frac{m_1}{d_1}$$

$$y_1 = n' + (m'^2 + n'^2 - N) \frac{d_0}{d_1} \times \frac{n}{d_0} - (m'^2 + n'^2 - N) \frac{n'd_0}{d_1}$$

$$= \frac{n'd_1 + (m'^2 + n'^2 - N)(n - n'd_0)}{d_1} = \frac{n_1}{d_1}$$

f) Tant que $d_i > 0$, le point n'a pas de coordonnées entières, la démarche précédente génère un nouveau point. Les points successifs A_n sont tous sur le cercle et les dénominateurs d_n , strictement positifs, forment une suite d'entiers strictement décroissante. Donc, nécessairement, on obtiendra $d_n = 1$. À ce moment, A_n aura des coordonnées (a; b) entières.

2 1. Si (x_0, y_0, z_0) est solution, alors $x_0^2 + y_0^2 = Nz_0^2$ d'où :

$$\frac{x_0^2}{z_0^2} + \frac{y_0^2}{z_0^2} = N.$$

Le cercle passe par le point de coordonnées $\left(\frac{x_0}{z_0}; \frac{y_0}{z_0}\right)$.

2. Solution $(a, b, 1)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $x^2 + y^2 = Nz^2$ ait une solution est donc que N soit la somme des carrés de deux entiers.

On peut énoncer cela en disant que le cercle de rayon $\sqrt{N}$ passe par un point de coordonnées entières.

On peut dire encore, en utilisant les résultats démontrés précédemment : il faut et il suffit que le cercle de rayon $\sqrt{N}$ passe par un point de coordonnées rationnelles.

TD 4

1. a) On élève au carré et on multiplie par b^2 .

b) a^2 divise nb^2 et a^2 est premier avec b^2 , donc, d'après le théorème de Gauss, a^2 divise n .

Or, n divise a^2 donc $n = a^2$.

2. Nous venons de démontrer que si $\sqrt{n}$ est un rationnel, alors n est un carré parfait (et donc $\sqrt{n}$ entier).

En prenant la contraposée on obtient : si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

2 Même démarche : si $\sqrt[n]{n}$ est un rationnel, alors $nb^p = a^p$ avec a et b premiers entre eux. Donc a^p et b^p premiers entre eux. Il en résulte n divise a^p et, en appliquant Gauss, a^p divise n donc $n = a^p$. Puis on prend la contraposée.

3 Si $u = \frac{p}{q}$ non entier avec p et q premiers entre eux, est solution, alors $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. En multipliant par q^n , on obtient, après simplifications :

$$p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a^n q^n = 0.$$

Il en résulte que q divise p^n , d'où $q = 1$ car p^n et q sont premiers entre eux.

u est donc entier ce qui contredit l'hypothèse u non entier. Donc u est soit entier, soit irrationnel.

4 1. a) $a^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ d'où

$$(a^2 - 8)^2 = 60 \Leftrightarrow a^4 - 16a^2 + 4 = 0.$$

a vérifie l'équation $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$.

b) D'après **3**, a est entier ou irrationnel. Si a était entier, a^2 le serait aussi et $2\sqrt{15}$ serait entier, ce qui est faux. Donc a n'est pas entier, il est donc irrationnel.

2. $a = \sqrt{n} + \sqrt{m}$ est solution de l'équation :

$$x^4 - 2(n+m)x^2 + (m-n)^2 = 0,$$

donc d'après **3**, a est entier ou irrationnel.

Si a était entier, a^2 le serait aussi et alors $2\sqrt{nm}$ qui est égal à $a^2 - n - m$ serait entier. Donc $\sqrt{nm}$ serait rationnel et, d'après **1**, nm serait donc un carré parfait, ce qui contredit l'hypothèse.

Conclusion : a n'est pas entier, donc a est irrationnel.

TD 5

1 1. Immédiat.

2. On cherche les différents restes de $x^3 + 5$ modulo 9.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^3 + 5$	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5

On voit que $x^3 + 5$ n'est jamais divisible par 9. L'équation n'a pas de solution.

2 1. x, y, z ne peuvent pas être tous pairs sinon le premier membre est pair et le second impair. De même s'ils sont tous les trois impairs, le premier membre est impair et le second est pair.

2. et 3. Même démarche en raisonnant sur la parité des deux membres.

4. $z^2 + 1 = xyz - x^2 - y^2$ est multiple de 4 donc $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ ce qui conduit à :

$$4p^2 + 4p + 1 \equiv 0 \pmod{4} \text{ soit } 1 \equiv 0 \pmod{4} \text{ ce qui est impossible.}$$

L'équation donnée n'a pas de solution.

3 1. $x = 0, y = 1$.

2. Si (x, y) est une solution, $y^2 > x^4$ et comme $y \geq 0$, $y > x^2$.

3. Si (x, y) est une solution, $x^2 + 1 = (y - x^2)(y + x^2)$. $y - x^2 > 0$ donc $y - x^2 \geq 1$. Par conséquent $x^2 + 1 > 2x^2$. Il en résulte $x^2 < 1$ et donc $x = 0$ et $y = 1$.

L'équation a donc pour seule solution dans $\mathbb{N}^2$, $x = 0, y = 1$.

4 Descente infinie

1. $x = 0; y = 0, z = 0$.

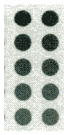
2. a) Si x ou y est nul le second membre est nul et alors $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ implique $x = y = z = 0$.

b) On étudie tous les cas (3 nombres impairs, 2 nombres impairs, 1 nombre impair parmi les nombres x, y, z). Le carré d'un entier est congru à 0 ou à 1 modulo 4. On en déduit à chaque fois une impossibilité. Donc nécessairement si (x, y, z) est solution les trois nombres sont pairs.

3. Immédiat.

4. Ils vérifient aussi la relation $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 4x_2^2y_2^2$ avec x^2, y^2 et z^2 non nuls. On peut alors leur appliquer le même raisonnement.

5. La suite x_n tend vers 0 donc on peut trouver n tel que $0 < x_n < 1$ ce qui contredit le fait que x_n est entier. Il n'existe donc pas de solution en dehors de la solution $x = 0; y = 0; z = 0$.



Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 54)

1. Plus grand commun diviseur

- 1** 1. $\mathcal{D}(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$;
 $\mathcal{D}(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$;
 $\mathcal{D}(24) \cap \mathcal{D}(18) = \{1, 2, 3, 6\}$ et $\text{PGCD}(24, 18) = 6$.
 2. $\mathcal{D}(150) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}$;
 $\mathcal{D}(240) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240\}$;
 $\mathcal{D}(150) \cap \mathcal{D}(240) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
 et $\text{PGCD}(150, 240) = 30$.
 3. $\mathcal{D}(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$;
 $\mathcal{D}(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$;
 $\mathcal{D}(60) \cap \mathcal{D}(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ et $\text{PGCD}(60, 84) = 12$.
 4. $\mathcal{D}(150) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}$;
 $\mathcal{D}(77) = \{1, 7, 11, 77\}$;
 $\mathcal{D}(150) \cap \mathcal{D}(77) = \{1\}$ et $\text{PGCD}(150, 77) = 1$.

2 a) 60; b) 156; c) 140.

3 a) $\text{PGCD} = 24$;
 diviseurs communs : $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
 b) $\text{PGCD} = 2$; diviseurs communs : $\{1, 2\}$.
 c) $\text{PGCD} = 49$; diviseurs communs : $\{1, 7, 49\}$.

4 1. $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$.
 2. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
 3. $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.

5 Corrigé dans le manuel.

6 Supposons qu'il existe une solution b . Alors b divise $4294 - 10 = 4284$ ainsi que $3521 - 11 = 3510$, donc b divise leur PGCD qui est 18.
 Or $b > 10$ et $b > 11$, donc la seule solution est $b = 18$.
 On vérifie que réciproquement, 18 convient. C'est le cas, car $4294 = 18 \times 238 + 10$ et $3521 = 18 \times 195 + 11$.

7 Supposons qu'il existe une solution b ; $a = 50 \times 12$ et $b = b' \times 12$. On sait que b' et 50 sont premiers entre eux. En outre, $260 < b < 300$ implique $260 < 12b' < 300$, d'où $\frac{65}{3} < b' < 25$. Les valeurs de b' qui vérifient ces inégalités sont 22, 23 et 24. Le seul de ces trois entiers

qui est premier avec 50 est 23. Donc s'il existe une solution, c'est $b = 23 \times 12 = 276$. On constate que cette valeur convient.

8 Corrigé dans le manuel.

2. Théorème de Bezout

9 1. Oui. 2. Non (facteur commun 7). 3. Oui.

10 $(1; 11), (5; 7), (7; 5), (11; 1)$.

11 L'ensemble des valeurs de b qui conviennent est :
 $\{23, 25, 29\}$.

12 Si d divise a et b , il divise $3b - 2a = 1$. Donc 1 est le seul diviseur commun à a et b et donc a et b sont premiers entre eux.

13 $2b - 3a = 1$. D'après le théorème de Bezout, a et b sont premiers entre eux.

14 $7b - 5a = 1$. D'après le théorème de Bezout, a et b sont premiers entre eux.

15 Corrigé dans le manuel.

16 $a^2 + ab - b^2 = 1$ ou $a^2 + ab - b^2 = -1$.
 $a^2 + ab - b^2 = 1$ peut s'écrire $a \times a + b \times (a - b) = 1$.
 $a^2 + ab - b^2 = -1$ implique : $a \times (-a) + b \times (b - a) = 1$.
 Dans les deux cas on met en évidence deux nombres u et v tels que $au + bv = 1$ donc a et b sont premiers entre eux.

17 1. Immédiat en développant de chaque côté.
 2. L'égalité précédente s'écrit :

$$(n^2 + 1) \times (n^2 + 1) + (n^3 + 2n) (-n) = 1.$$

D'après le théorème de Bezout ($u = n^2 + 1$ et $v = -n$) elle prouve que $n^2 + 1$ et $n^3 + 2n$ sont premiers entre eux.

18 Avec l'algorithme d'Euclide, on trouve :
 $x = 6$ et $y = -13$.

19 Avec l'algorithme d'Euclide, on trouve :

$$x = 11 \text{ et } y = -24.$$

3. Caractérisations et propriétés du PGCD

20 1. Les nombres 5 et 11 sont premiers entre eux, donc en appliquant le (2) du théorème 4, on peut dire que 12 est le PGCD de a et b .

2. Pour la même raison, 3 et 8 sont premiers entre eux, donc 15 est le PGCD de a et b .

3. De même, 22 et 15 sont premiers entre eux, donc 26 est le PGCD de a et b .

4. Les nombres 12 et 35 sont premiers entre eux et sont les quotients de a et b par 20. Le PGCD de a et b est 20 d'après le (2) du théorème 4.

5. Le PGCD est 12 car 32 et 75 sont premiers entre eux.

6. Le PGCD est 24 car 100 et 63 sont premiers entre eux.

21 Corrigé dans le manuel.

22 Supposons qu'il existe une solution et appelons a le plus petit.

$a = 8a'$ et $b = 8b'$ donc $a' + b' = 18$ avec a' et b' premiers entre eux. Les solutions pour a' et b' sont :

- $a' = 1$ et $b' = 17$ qui donne $a = 8$ et $b = 136$;
- $a' = 5$ et $b' = 13$ qui donne $a = 40$ et $b = 104$;
- $a' = 7$ et $b' = 11$ qui donne $a = 56$ et $b = 88$.

Les nombres cherchés sont donc, à l'ordre près, 8 et 136, ou bien 40 et 104, ou bien 56 et 88. On vérifie facilement qu'ils conviennent. Si on écrit tous les couples (a, b) , il y en a six en tenant compte de l'ordre.

23 1. u' et v' sont premiers entre eux.

2. $u'v' = 35$ donc les valeurs possibles de u' et v' sont :

- $u' = 1$ et $v' = 35$, d'où $u = 15$ et $v = 525$;
- $u' = 5$ et $v' = 7$, d'où $u = 75$ et $v = 105$;
- $u' = 7$ et $v' = 5$, d'où $u = 105$ et $v = 75$;
- $u' = 35$ et $v' = 1$, d'où $u = 525$ et $v = 15$.

On vérifie facilement que ces valeurs conviennent.

24 S'il existe une solution, $a = 17a'$ et $b = 17b'$ avec a' et b' premiers entre eux. L'hypothèse $ab = 1734$ implique $17^2 a'b' = 1734$ d'où $a'b' = 6$.

- $a' = 1$ et $b' = 6$ donne $a = 17$ et $b = 102$;
- $a' = 2$ et $b' = 3$ donne $a = 34$ et $b = 51$;
- $a' = 3$ et $b' = 2$ donne $a = 51$ et $b = 34$;
- $a' = 6$ et $b' = 1$ donne $a = 102$ et $b = 17$.

On peut vérifier facilement que toutes ces solutions conviennent.

25 $(2n + 1) - (2n) = 1$, donc, d'après le théorème de Bezout, $2n + 1$ et $2n$ sont premiers entre eux. Comme $a = n \times 2n$ et $b = n \times (2n + 1)$, il en résulte, en

appliquant le théorème 3 (partie (2)), que n est le PGCD de a et b .

26 1. $n \times n + (-1)(n^2 - 1) = 1$ donc d'après le théorème de Bezout, n et $n^2 - 1$ sont premiers entre eux.

2. Si on multiplie deux entiers par un même nombre c positif, on sait que leur PGCD est multiplié par c .

Le PGCD de n et $n^2 - 1$ est 1. Multiplions-les par $n^2 + 1$ on trouve $n^3 + n$ et $n^4 - 1$ et leur PGCD est donc $n^2 + 1$. (On pouvait aussi utiliser la caractérisation (2) du théorème 3 page 36.)

27 $a - b = p$ et p est un diviseur commun de a et b . D'après la caractérisation (3) du théorème 3 page 36, p est le PGCD de a et de b .

28 1. On applique la caractérisation (3) du théorème 3 page 36. Il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$g = (bc - a)u + bv.$$

2. On peut regrouper différemment :

$$g = a(-u) + b(cu + b).$$

Or g divise b et $bc - a$ donc g divise a et b . Comme on a montré que $g = au' + bv'$ avec $u' = -u$ et $v' = cu + b$, il en résulte d'après le théorème 3 que $g = \text{PGCD}(a, b)$.

4. Applications

29 a) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (6, 11), (12, 22), (18, 33), (24, 44)\}$.

b) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (7, 3), (14, 6)\}$.

30 $\mathcal{S} = \{(x, y) / x = -3 + 3k \text{ et } y = 4k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\}$.

31 Corrigé dans le manuel.

32 1. a et b sont premiers entre eux, donc a et b^3 sont premiers entre eux (exercice résolu 6).

2. a divise $a^2 + a$ donc a divise $7b^3$. Mais a est premier avec b^3 donc a divise 7 (théorème de Gauss).

Les seules valeurs possibles de a sont 1 ou 7.

• $a = 1$ donne $7b^3 = 2$: impossible.

• $a = 7$ donne $7b^3 = 56$ d'où $b^3 = 8$ soit $b = 2$.

$a = 7$ et $b = 2$ sont premiers entre eux et vérifient bien $a^2 + a = 7b^3$.

33 S'il existe p divisant n et $2n + 1$, alors p divise 1.

34 1. Supposons que $n - 4$ divise $n + 17$.

Or, il est clair que $n - 4$ divise $n - 4$, donc $n - 4$ divise la différence $(n + 17) - (n - 4) = 21$.

Réciproquement, si $n - 4$ divise 21, il divise la somme :
 $(n - 4) + 21 = n + 17$.

2. D'après 1., la fraction est égale à un entier si et seulement si $n - 4$ divise 21. Donc $n - 4$ est un diviseur

de 21. Les valeurs de n qui conviennent sont donc les valeurs de l'ensemble $\{5, 7, 11, 25\}$.

35 1. 1 008 divisible par 4 et par 9. Ces deux nombres sont premiers entre eux donc 1 008 est divisible par 36. Même démonstration avec 100 008.

2. Pour $n \geq 2$, 10^n est divisible par 4.

En outre $10^n + 8 \equiv 1 + 8 \equiv 1 + 8 \equiv 0 \pmod{9}$

donc $10^n + 8$ est divisible par 9.

Étant divisible par 9 et 4 (qui sont premiers entre eux) il est divisible par 36.

36 $n(n+1)$ est un multiple de 2 (envisager les deux cas, n pair, n impair), donc a est un multiple de 2.

Démontrons que a est un multiple de 3.

Si on divise n par 3, les restes possibles sont 0, 1 ou 2.

• $n = 3k$ alors $a = 3k(n+1)(n+5)$, donc a est un multiple de 3.

• $n = 3k + 1$.

Alors $n + 5 = 3k + 6$ donc $a = 3(k+2)(n+1)n$, donc a est un multiple de 3.

• $n = 3k + 2$.

Alors $n + 1 = 3(k+1)$ et $a = 3n(k+1)(n+5)$, donc a est multiple de 3.

Ainsi a est un multiple de 2 et de 3, donc c'est un multiple de 6 (car 2 et 3 premiers entre eux).

37 Il suffit de démontrer que a est divisible par 5 et par 4 car 4 et 5 sont premiers entre eux.

Or, 5 est un facteur donc a divisible par 5.

Et $n^2 + n = n(n+1)$ est divisible par 2 donc $(n^2 + n)^2$ est divisible par 4.

38 1. Si d divise $n+13$ et $n-2$, il divise la différence, donc d divise 15 et $n-2$.

Réciproquement, si d divise $n-2$ et 15, il divise la somme, donc $n-2$ et $n+13$.

Les diviseurs communs à $n+13$ et $n-2$ sont donc les mêmes que les diviseurs communs à $n-2$ et 15.

Donc $\text{PGCD}(n+13; n-2) = \text{PGCD}(n-2; 15)$.

2. La fraction est irréductible si et seulement si $n+13$ et $n-2$ n'ont pas de diviseur autre que 1. D'après la question 1., cela revient à dire que $\text{PGCD}(n-2; 15) = 1$.

L'ensemble des valeurs de n répondant à la question est donc l'ensemble des entiers n tels que $n-2$ ne soit ni un multiple de 3, ni un multiple de 5.

5. Équations

39 Seule la 2^e n'a pas de solution car le PGCD de 3 et 6 est 3 et il ne divise pas 5.

40 a) $x = -1 - 5k$ et $y = 1 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = 1 + 7k$ et $y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = -1 + 3k$ et $y = 1 + k$, $k \in \mathbb{Z}$.

41 a) $x = -1 - 5k$ et $y = 1 + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Pas de solution.

c) $x = 3 + k$ et $y = 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

42 1. $(x_0 = 2, y_0 = 2)$.

3. $x = 2 + 3k$ et $y = 2 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

43 Corrigé dans le manuel.

44 1. Pour tout entier n ,

$$5(14n + 3) + (-14)(5n + 1) = 1$$

donc $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. a) On applique 1. avec $n = 6$.

b) $u = 5$ et $v = -14$. D'où $x_0 = 10$ et $y_0 = -28$.

c) $x = 10 - 31k$ et $y = -28 + 87k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Les solutions sont données par : $x = 10 - 31k$ et $y = -28 + 87k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et x entre 0 et 100.

5. On trouve 3 points ayant pour coordonnées :

$(10; -28); (41; 115); (72; 202)$.

45 1. Immédiat.

2. Si x est solution $7x \equiv 3 \pmod{6}$ et on a vu qu' $7 \times 3 \equiv 3 \pmod{6}$. Par soustraction on obtient :

$$7(x - 3) \equiv 0 \pmod{6}.$$

3. 6 est premier avec 7 donc 6 divise $x - 3$.

4. On a vu que si x est solution alors $x = 3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $3 + 6k$ est solution ce qui est immédiat.

6. Plus petit commun multiple

46 1. PGCD = 8, PPCM = 168;

2. PGCD = 150, PPCM = 1500;

3. PGCD = 42, PPCM = 18018;

4. PGCD = 6, PPCM = 180;

5. PGCD = 20, PPCM = 5200;

6. PGCD = 41, PPCM = 246.

47 Si a est le nombre entier cherché, $a - 40$ est l'PPCM de 140 et 252. Donc $a - 40 = 1\,260$ d'où $a = 1300$.

48 $a - 11$ est un multiple commun de 18 et 48. C'est donc un multiple du PPCM de 18 et 48 qui est 144. $a - 11 = 144k$.

Il faut déterminer k pour que $500 \leq 11 + 144k \leq 1\,000$

On trouve $k \in \{4, 5, 6\}$ ce qui donne pour a :

587 ; 731 ; 875.

49 1. $uv = 60$ g donc le PGCD est $g = 6$.

2. u' et v' sont premiers entre eux.

3. $u'v'g^2 = 360$ donc $u'v' = 10$.

Les valeurs possibles de (u', v') sont :

• $u' = 1$, $v' = 10$ qui donne $u = 6$ et $v = 60$;

• $u' = 2$, $v' = 5$ qui donne $u = 12$ et $v = 30$;

• $u' = 10$, $v' = 1$ qui donne $u = 60$ et $v = 6$;

• $u' = 5$, $v' = 2$ qui donne $u = 30$ et $v = 12$.

Toutes ces valeurs conviennent.

50 1. d divise PPCM (a, b) et aussi $a + b$ donc la différence 1.

Donc PGCD $(a, b) = 1$ et donc PPCM $(a, b) = ab$.

2. S'il existe une solution (a, b) , la relation du texte équivaut à $a + b = 1 + ab$ soit encore $a - ab + b - 1 = 0$. Cette dernière relation équivaut après factorisation

à $(1 - b)(a - 1) = 0$. Donc $a = 1$ ou $b = 1$. Réciproquement si $a = 1$ et $b = k$ ou bien $a = k$ et $b = 1$, k naturel strictement positif quelconque la relation $a + b = 1 + \text{PPCM}(a, b)$ est satisfaite. Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de la forme $(1, k)$ ou $(k, 1)$, k entier non nul quelconque.

Apprendre à chercher

(page 57)

51 Trouver un PGCD

Les outils :

- Divisibilité.
- Définition et propriétés du PGCD.

Les objectifs :

- Savoir utiliser les propriétés du PGCD.
- Savoir utiliser x divise y et y divise x pour établir $x = y$.

1. Le PGCD g de a et b divise toute combinaison linéaire de a et b , donc g divise A et B . Or, on sait que tout diviseur commun à deux nombres A et B divise leur PGCD, donc g divise g' .

2. Si g' divise a et b , il divise toute combinaison linéaire de a et b donc A et B .

3. On élimine b entre les deux relations $A = pa + qb$ et $B = ra + sb$. Pour cela, on multiplie la première par s et la deuxième par $(-q)$ et on ajoute.

On obtient $(ps - qr)a = sA - qB$. Comme $ps - qr = 1$, on obtient $a = sA - qB$.

En procédant de même avec b , on trouve $b = -rA + pB$. Ainsi a et b sont des combinaisons linéaires de A et B . Donc le PGCD g' de A et B divise a et b donc aussi leur PGCD g .

Conclusion, $g = g'$.

52 Trouver deux nombres à partir d'une relation entre leur PGCD et leur PPCM

Les outils :

- PGCD et PPCM.
- Nombres premiers entre eux.
- Relation entre PGCD et PPCM.

Les objectifs :

- Savoir articuler les propriétés du PGCD et du PPCM.
- Bien comprendre la nécessité de la réciproque.

1. a) On utilise le théorème 3.

b) $\text{PPCM}(a, b) = ga'b'$ et $b = b'g$. On remplace dans la relation donnée par le texte. $9 = g(1 + a'b' - b')$ donc g divise 9. Il en résulte que $g \in \{1; 3; 9\}$.

c) 1^{er} cas : $g = 1$. On obtient alors $(a' - 1)b' = 8$.

Les nombres $a' - 1$ et b' sont des diviseurs de 8. En tenant compte du fait que a' et b' sont premiers entre eux, on obtient les solutions suivantes :

- $a' = a = 3$ et $b' = b = 4$;
- $a' = a = 5$ et $b' = b = 2$;
- $a' = a = 9$ et $b' = b = 1$.

2^e cas : $g = 3$. On obtient alors $(a' - 1)b' = 2$.

Les nombres $a' - 1$ et b' sont des diviseurs de 2. En tenant compte du fait que a' et b' sont premiers entre eux, on obtient uniquement $a' = 3$ et $b' = 1$ qui conduit à $a = 9$ et $b = 3$.

3^e cas : $g = 9$. Alors $(a' - 1)b' = 0$.

Le nombre b' ne peut pas être nul donc $a' = 1$ et b' est un naturel quelconque non nul. On en déduit $a = 9$ et $b = 9k$ avec k entier strictement positif.

En résumé, nous avons démontré que si un couple est solution, alors c'est un élément de l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{(3, 4), (5, 2), (9, 3)\} \cup \{(9, 9k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\}.$$

2. Réciproque. On peut vérifier sans difficulté que chacun des couples de $\mathcal{E}$ satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

Par exemple, avec un couple $a = 9$ et $b = 9k$, avec k dans $\mathbb{N}^*$, $g = 9$ et $m = 9k$ et on a bien $g + m = b + 9$.

53 Deux divisions euclidiennes pour un entier

Les outils :

- Division euclidienne.
- Résolution de $au + bv = c$.
- Relation entre PGCD et PPCM.

Les objectifs :

- Apprendre à démontrer une équivalence.
- Pratiquer la résolution d'équations diophantiennes $ax + by = c$.

1. S est obtenu en écrivant les divisions euclidiennes du texte.

2. On procède par substitution sur n . On montre d'abord que $S \Rightarrow S'$, puis que $S' \Rightarrow S$.

3. a) Solution particulière

Dans ce cas, on peut trouver facilement q et p pour obtenir 1. Il suffit de prendre $q = -1$ et $p = -1$. En effet $4(-1) - 5(-1) = 1$. Pour obtenir 3, on multiplie tout par 3.

Ainsi, $q = -3$ et $p = -3$ constituent une solution particulière.

En utilisant la méthode décrite au TD3, on trouve :

$$p = 4k - 3 \text{ et } q = 5k - 3.$$

Comme p et q doivent être positifs, on doit prendre $k > 0$.

b) En remplaçant dans $n = 12p + 5$, on trouve :

$$n = 60k - 31, \text{ avec } k > 0.$$

L'ensemble des valeurs de n est l'ensemble des nombres $60k - 31$ avec k entier positif.

54 Avec une suite géométrique

Les outils :

- Définition et propriétés des suites géométriques.
- Divisibilité.

Les objectifs :

- Savoir utiliser les hypothèses pour trouver des conditions nécessaires.
- Savoir utiliser le raisonnement par l'absurde.

1. La suite est strictement croissante donc $a < b < c < d$.
Il en résulte $4a < a + b + c + d = 40$ donc $a < 10$.

2. $q = \frac{b}{a}$ et a et b entiers, donc q est un rationnel.

3. $q = \frac{m}{n}$ avec n et m premiers entre eux.

$$40 = a(1 + q + q^2 + q^3) \\ = a \frac{1 - q^4}{1 - q} = \frac{a(n^4 - m^4)}{n^3(n - m)}.$$

Or, $n^4 - m^4 = (n - m)(n + m)(n^2 + m^2)$. On simplifie par le facteur $(n - m)$ et on multiplie chaque membre par n^3 . On obtient alors la relation demandée.

4. a) • S'il existe un diviseur d commun à n et $n + m$, d divise la différence m .

Donc d divise n et m .

Or n et m sont premiers entre eux et par conséquent $d = 1$. Donc n est premier avec $n + m$.

• Supposons qu'il existe d divisant n et $n^2 + m^2$.

Le nombre d , divisant n , divise n^2 .

Mais n divise aussi $n^2 + m^2$ donc la différence m^2 .
Ainsi d divise n et m^2 .

Mais n et m étant premiers entre eux, n et m^2 sont aussi premiers entre eux. Donc $d = 1$ est le seul diviseur commun de n et $n^2 + m^2$.

Ces nombres sont donc premiers entre eux.

• n est premier avec $n + m$ et aussi avec $n^2 + m^2$, donc n est premier avec le produit (exercice résolu 6).

D'après le résultat de l'exercice résolu 6, on en déduit que n^3 est premier avec $(n + m)(n^2 + m^2)$.

D'après le théorème de Gauss, on en déduit que n^3 divise a .

b) $a < 10$ et n^3 divise a , donc $n^3 < 10$.

Si $n > 2$, n^3 vaut au moins 27, donc $n = 1$ ou $n = 2$.

5. Cas $n = 1$. q est entier et on doit avoir :

$$40 = a(1 + q + q^2 + q^3).$$

• $q = 2$ ne convient pas, car alors on aurait $1 + q + q^2 = 15$, mais 15 ne divise pas 40.

• $q = 3$ donne $a = 1$.

• $q \geq 4$ implique $1 + q + q^2 + q^3 \geq 85$, ce qui est incompatible avec $40 = a(1 + q + q^2 + q^3)$.

6. Cas $n = 2$. L'égalité [1] devient $40 = (2 + m)(4 + m^2)$.

a) En remplaçant m par 1 ou 2, l'égalité n'est pas satisfaite.

Si $m \geq 3$, alors $(2 + m)(4 + m^2) > 40$, donc il n'y a aucune solution dans le cas $n = 2$.

La suite $a = 1, b = 3, c = 9, d = 27$ convient bien car $a + b + c + d = 40$.

55 Plus difficile... mais à faire

Les outils :

- Division euclidienne.
- Nombres premiers entre eux.
- Théorème de Bezout.

Les objectifs :

- Savoir tirer toutes les conséquences de la divisibilité et des inégalités des divisions euclidiennes.

2. En isolant le 1 dans le second membre, les égalités [1], [2], [3] peuvent s'interpréter comme des égalités de Bezout justifiant les conclusions de cette question.

3. a) $bq = ac - 1 < ac$, et $a < b$ implique $ac < bc$, donc $bq < ac < bc$.

On en déduit $bq < bc$,

d'où $q < c$ (car $b > 0$).

b) $cr = ab - 1 < ab < ac$ donc $cr < ac$.

Il en résulte, en divisant par c ($c > 0$), que $r < a$.

4. a) $ac = bq + 1$ donc c divise $bq + 1$.

$cr = ab - 1$ donc c divise $ab - 1$.

b) c , divisant $bq + 1$ et $ab - 1$, divise leur somme $b(a + q)$.

Or, c est premier avec b , donc c divise $a + q$.

Cela signifie qu'il existe k entier tel que

$$a + q = kc.$$

c) $a < c$ et $q < c$ donc $a + q < 2c$, soit encore, puisque $a + q = kc$, $kc < 2c$ donc $k < 2$.

Comme k ne peut pas être nul, $k = 1$ et donc $a + q = c$.

5. a) $ac = bc - ab + 1$ [4]; immédiat en suivant les indications du texte.

De la relation [4], on déduit $ab + ac = bc + 1$, puis, en utilisant [1], on remplace bc par $ap + 1$ ce qui donne :

$$a(b + c) = ap + 2.$$

b) La relation $a(b + c) = ap + 2$ peut s'écrire :

$$a(b + c - p) = 2,$$

ce qui prouve que a divise 2.

Comme on a déjà vu que $a > 1$, il en résulte que $a = 2$.

c) D'après 4. b), $r < a$ c'est-à-dire $r < 2$.

Or, $r = 0$ n'est pas possible (car on aurait $2b = 1$), donc $r = 1$.

d) [4] s'écrit $2c = bc - 2b + 1$;

[3] s'écrit $2b = cr + 1$, d'où $2c = bc - cr$;

puis en divisant par c , $2 = b - r$.

Mais on a vu que $r = 1$ donc $b = 3$.

On en déduit, avec [3], $c = 5$.

Conclusion, le triplet $(2, 3, 5)$ est la seule solution.

Diviseurs communs – PGCD Nombres premiers entre eux

56 Si d divise $2k + 1$ et $9k + 4$, alors d divise :
 $9(2k + 1) - 2(9k + 4) = 1$.

57 • $n + 1$ est premier avec n et avec $2n + 1$, donc avec le produit $n(2n + 1)$.
 Donc le PGCD de $n + 1$ et $n(2n + 1)$ est 1.

58 1. Puisque a et b sont premiers entre eux, on peut écrire $au + bv = 1$ avec u et v dans $\mathbb{Z}$.
 Par un jeu d'écriture pour introduire $a + b$, on obtient :
 $au + bu - bu + bv = 1$, c'est-à-dire :
 $(a + b)u + b(v - u) = 1$

ce qui prouve que $a + b$ et b sont premiers entre eux.
 On démontre de même que $a + b$ est premier avec a .
 $a + b$ étant premier avec a , et b est premier avec ab .

Remarque : On pourrait aussi faire la démonstration en disant que si d divise $a + b$ et a , alors...

2. D'après 1., $a + b$ est premier avec ab . On en déduit (voir l'exercice résolu 4) que $(a + b)^2$ est premier avec ab (ceci pour introduire $a^2 + b^2$).

Donc $u(a + b)^2 + vab = 1$ avec u et v dans $\mathbb{Z}$.

Donc $u(a^2 + b^2) + 2abu + vab = 1$ soit encore :

$$u(a^2 + b^2) + (2u + v)ab = 1$$

qui prouve que $a^2 + b^2$ et ab sont premiers entre eux.

Note : Vous pouvez retenir ces résultats.

59 • 1. $a = n(n - 4)(n + 3)$ et $b = (2n + 1)(n - 4)$; a et b sont bien de la forme $(n - 4)q$.

2. a) $2\beta - \alpha = 5$.

b) d divise α et β donc d divise 5.

c) Supposons que 5 soit un diviseur commun de α et β .
 Alors 5 divise $\alpha - \beta = n - 2$.

Réciproquement, supposons que 5 divise $n - 2$.

Alors $n = 2 + 5k$ avec k entier.

$\alpha = 2n + 1 = 5 + 10k$ et $\beta = 5 + 5k$. Donc α et β sont bien tous les deux des multiples de 5.

3. $(2n + 1) - 2n = 1$, donc, d'après le théorème de Bezout, $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. a) Si n est de la forme $2 + 5k$, PGCD(α , β) = 5 et alors :

$$a = \beta'n \times 5(n - 4) \text{ et } b = \alpha' \times 5(n - 4).$$

D'après les questions précédentes, α' et $\beta'n$ sont premiers entre eux et donc PGCD(a , b) = $5(n - 4)$.

Si n n'est pas de la forme $2 + 5k$ alors $a = \beta'n(n - 4)$ et $b = \alpha(n - 4)$ avec α et $\beta'n$ premiers entre eux donc PGCD(a , b) = $n - 4$.

b) $n = 11$. $a = 11 \times 14 \times 7$ et $b = 23 \times 7$. PGCD(a , b) = 7 (soit $n - 4$).

$n = 12$. $a = 12 \times 15 \times 8$ et $b = 25 \times 8$. PGCD(a , b) = 40 soit $5(n - 4)$.

60 Corrigé dans le manuel.

61 1. Soit d un diviseur commun de n et p . Alors il divise $n - p^2$ et p .

Réciproquement si d est un diviseur commun de $n - p^2$ et p il divise $n - p^2$ et p^2 donc aussi n .

C'est donc un diviseur commun de n et p . Donc n et p ont les mêmes diviseurs communs que $n - p^2$ et p .

2. $n = 10\,829$; $p = 104$; $n - p^2 = 13$ donc

$$\text{OGCD}(10\,829, 104) = \text{PGCD}(13, 104).$$

Or 13 est un diviseur de 104 donc

$$\text{PGCD}(10\,829, 104) = 13.$$

3. En appliquant le résultat de la question 1. on trouve :
 $\text{PGCD}(4k^2 + 4k + 6, 2k + 1) = \text{PGCD}(5, 2k + 1)$. Ce PGCD est 5 si et seulement si 5 divise $2k + 1$.

Donc $\text{PGCD}(4k^2 + 4k + 6, 2k + 1) = 5$ équivaut à $2k + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ soit encore : $2k \equiv 4 \pmod{5}$.

Le tableau donnant les restes de $2k$ modulo 5 montre que $2k \equiv 4 \pmod{5}$ équivaut à $k \equiv 2 \pmod{5}$.

Remarque : on peut aussi résoudre l'équation diophantienne $2k \equiv 4 \pmod{5}$. On obtient alors $k = 2 + 5m$ ce qui donne le résultat attendu.

62 • 1. $2n - m = 7a$, donc, si n est divisible par 7, alors m aussi.

Si m est divisible par 7, alors 7 divise $2n$, donc 7 divise n .

2. On peut établir facilement que :

$$2n - m = 7a \text{ et } 11m - 15n = 14b.$$

Soit d un diviseur commun de m et n ; d divise $14a$ et $14b$, donc le PGCD de $14a$ et $14b$, soit 14 puisque a et b sont premiers entre eux.

Le PGCD de m et n est donc un diviseur de 14.

Applications du théorème de Gauss

63 Corrigé dans le manuel.

64 1. Soit x le produit donné.

x est divisible par 8, car les quatre facteurs étant des nombres consécutifs, l'un d'entre eux est un multiple de 4 et l'un des trois autres est nécessairement pair.

x est divisible par 3 car quatre entiers consécutifs contiennent nécessairement un multiple de 3.

Donc 3 et 8 étant premiers entre eux, x est divisible par 24.

2. Soit y le produit donné. Les facteurs étant constitués de cinq nombres consécutifs, il est clair que y est divisible par 3 et par 5.

Or y est divisible par 8 puisque c'est un multiple de x vu au 1. Donc y est divisible par 120.

65 • Il suffit de montrer que $x = (n^2 - 1)(n^2)(n^2 + 1)$ divisible par 3, 4 et 5.

- x est divisible par 3 car c'est le produit de trois entiers consécutifs.
- Si n est pair, n^2 est divisible par 4 et si n impair, alors $(n-1)(n+1)$ est divisible par 4.
- Enfin pour 5, on peut montrer que pour tout n ,

$$n^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 4 \pmod{5},$$
et alors n^2 ou $n^2 - 1$ ou $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.

66 • Il suffit de montrer que $x = (n-1)(n)(n+1)$ divisible par 6 et 5.

- x est divisible par 6 car contient trois facteurs consécutifs.
- Si $n \equiv 0 \pmod{5}$ alors x est divisible par 5.
- Si $n \equiv 1, 2, 3, \text{ ou } 4 \pmod{5}$, alors $n^2 \equiv 1 \text{ ou } -1 \pmod{5}$ et alors $n^2 - 1$ ou $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.

67 • Il suffit de montrer que $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 2 et par 3.

Divisibilité par 2 : si l'un au moins des nombres a et b est pair, $ab(a^2 - b^2)$ est pair. S'ils sont tous les deux impairs, a^2 et b^2 le sont aussi et la différence $a^2 - b^2$ est paire donc $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 2.

Divisibilité par 3. Étudions les restes de x^2 modulo 3.

x	0	1	2
x^2	5	6	4

On voit que si x n'est pas

divisible par 3 alors $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Si l'un des nombres a et b est divisible par 3 le produit $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

Si aucun des nombres a et b n'est divisible par 3 alors $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{3}$ et $a^2 - b^2$ est divisible par 3.

68 • 1. a) $(1 + \sqrt{6})^2 = 7 + 2\sqrt{6}$;

$(1 + \sqrt{6})^4 = 73 + 28\sqrt{6}$; $(1 + \sqrt{6})^6 = 847 + 342\sqrt{6}$.

b) L'algorithme d'Euclide donne PGCD(847 ; 342) = 1 donc 847 et 342 sont premiers entre eux.

2. a) $(1 + \sqrt{6})^1 = 1 + 1\sqrt{6}$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$. Les résultats de la question 1. a) permettent de dire que $a_2 = 7$; $b_2 = 2$ puis $a_6 = 847$; $b_6 = 342$.

b) $(1 + \sqrt{6})^{n+1} = (1 + \sqrt{6})^n (1 + \sqrt{6})$ donc

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} = (a_n + b_n\sqrt{6})(1 + \sqrt{6}) \\ = a_n + a_n\sqrt{6} + b_n\sqrt{6} + 6b_n.$$

D'où les relations : $a_{n+1} = a_n + 6b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

3. Calculons $a_{n+1} + b_{n+1}$:

$a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + 5b_n$. Prenons la contraposée de la proposition à démontrer. Nous devons prouver que si 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$ alors 5 divise $a_n + b_n$.

Si 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$ par différence on voit qu'il divise $2(a_n + b_n)$. Or 5 est premier avec 2 donc d'après le théorème de Gauss il divise $a_n + b_n$.

4. Supposons que $a_n + b_n$ sont premiers entre eux. Soit d un diviseur commun de a_{n+1} et b_{n+1} . d divise la différence de $a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n$ mais d est premier avec 5 (sinon ils auraient un diviseur commun autre que 1 qui ne pourrait être que 5 et alors 5 diviserait $a_{n+1} + b_{n+1}$ ce qui contredit le résultat de la question 3.).

Puisque d est premier avec 5 il divise b_n . Ainsi d divise b_{n+1} et b_n donc aussi leur différence qui est a_n . En définitive d divise a_n et b_n donc $d = 1$. Les nombres $a_{n+1} + b_{n+1}$ n'ont pas d'autres diviseurs que 1, ils sont premiers entre eux.

Pour montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux pour tout n non nul, on fait un raisonnement par récurrence qui s'appuie sur le résultat précédent.

Équations diophantiennes

69 1. $x_0 = -1, y_0 = 1$.

2. Immédiat.

3. $\mathcal{S} = \{(x; y) / x = -1 - 4k \text{ et } y = 1 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

70 1. $2n + 1$ est premier avec n et $2n + 1$ est premier avec $n + 1$. Donc $2n + 1$ est premier avec le produit $n(n + 1)$.

2. $2n + 1$ divise le second membre donc le premier.

Or $2n + 1$ est premier avec $n^2 + n$, donc, d'après le théorème de Gauss, $2n + 1$ divise 21.

Donc si n est solution, alors $2n + 1$ divise 21. On en déduit que $n = 10$ ou $n = 3$ ou $n = 1$.

Donc $\mathcal{S} \subset \{1, 3, 10\}$.

Réciproquement, les valeurs 1 et 10 ne vérifient pas l'équation. Seule la valeur 3 convient. Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

71 1. Avec l'algorithme d'Euclide on trouve $u = 2$; $v = 3$. En effet, $2 \times 41 - 3 \times 27 = 1$. L'équation donnée a pour solution particulière $x_0 = 2, y_0 = 3$.

2. On multiplie par 5. D'où $x_0 = 10, y_0 = 15$.

3. $x = 10 + 27k, y = 15 + 41k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

72 • 1. 13 et 23 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bezout, il existe u et v tels que $13u - 23v = 1$. Alors $k = u$ et $n = v$ conviennent.

Avec l'algorithme d'Euclide on trouve $k = -7$ et $n = -4$.

2. En divisant par 12, on obtient l'équation équivalente :

$$-13x + 23y = 2.$$

Une solution particulière est $x_0 = 14, y = 8$.

Solutions : $x = 14 + 23k; y = 8 + 13k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

73 • $\mathcal{S} = \{(x; y) / x = 2 + 8k \text{ et } y = 1 + 5k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

74 • $\mathcal{S} = \{(x; y) / x = -6 + 4k \text{ et } y = -6 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

75 • $a = da', b = db'$ (a' et b' premiers entre eux) ;
 $m = ab = d^2a'b'$.

$2d^2a'b' + 7d = 111$ équivaut à $d(2da'b' + 7) = 3 \times 27$.

S'il existe une solution, elle vérifie la relation précédente. On en déduit que d divise 3×27 . Examinons les quatre cas possibles $d = 1, d = 3, d = 37, d = 111$.

• $d = 1$, alors $2da'b' + 7 = 111$, d'où $a'b' = 52$.

Cela donne, en tenant compte de l'hypothèse « a' et b' premiers entre eux» :

$a' = 1, b' = 52$, d'où $a = 1$ et $b = 52$ (et $m = 52$);

$a' = 4, b' = 13$, d'où $a = 4$ et $b = 13$ (et $m = 52$).

• $d = 3$ alors $2da'b' + 7 = 37$, d'où $a'b' = 15$.

Cela donne, en tenant compte de l'hypothèse « a' et b' premiers entre eux» :

$a' = 1, b' = 15$ d'où $a = 3$ et $b = 45$ (et $m = 45$);

$a' = 3, b' = 5$ d'où $a = 9$ et $b = 15$ (et $m = 45$).

• $d = 37$ alors $2da'b' + 7 = 3$: impossible.

• $d = 111$ alors $2da'b' + 7 = 1$: impossible.

On vérifie sans difficulté que les quatre paires trouvées satisfont bien les hypothèses du texte.

$\mathcal{S} = \{\{1, 52\}, \{4, 13\}, \{3, 45\}, \{9, 15\}\}$.

76 • 1. Entre J_0 et J_1 il y a eu u périodes de A, donc le nombre de jours est $J_1 - J_0 = 105u$.

Entre $J_0 + 6$ et J_1 , le nombre de périodes de B est v , donc $J_1 - (J_0 + 6) = 81v$.

Par soustraction, $6 = 105u - 81v$ et en divisant par 3, on obtient $35u - 27v = 2$.

2. a) $u_0 = -10$; $v_0 = -13$ (obtenus avec l'algorithme d'Euclide).

b) $x_0 = -20$; $y_0 = -26$.

c) $\mathcal{S} = \{(x; y) / x = -20 + 27k \text{ et } y = -26 + 35k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

d) La première apparition simultanée est obtenue pour $k = 1$, soit $u = 7$ et $v = 9$.

3. a) $J_1 = J_0 + 105u = J_0 + 735$.

Entre J_0 et J_1 , il s'est écoulé 735 jours.

b) Jusqu'au 7 décembre 2001, il s'est écoulé :

$$365 + 366 = 731 \text{ jours.}$$

Donc J_1 est le 11 décembre 2001.

Comme $735 = 105 \times 7$, le 11 décembre est un mardi.

c) Pour voir les deux astres simultanément, il faut un nombre entier de périodes pour les deux astres. Donc il faut prendre un multiple commun de 105 et 81.

Le premier rendez-vous sera obtenu avec le PPCM, soit au bout de 2 835 jours.

77 • 1. PGCD (2 688; 3 024) = 336.

2. a) On divise par 336.

b) Immédiat.

c) $\mathcal{S} = \{(x; y) / x = 1 - 9k \text{ et } y = -2 + 8k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

3. a) Les plans ne sont pas parallèles.

b) Soit $M(x; y; z)$ un point de d .

Alors, $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$, donc :

$$5(x + 2y - z) + 3x - y + 5z = -10,$$

soit encore $8x + 9y = -10$.

c) De la question précédente, on déduit que les points

de d vérifient le système
$$\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ z = x + 2y + 2 \end{cases}$$

Réciproquement, si le triplet $(x; y; z)$ vérifie le système précédent, il vérifie $8x + 9y + 10 + 5(z - x - 2y - 2) = 0$, c'est-à-dire $3x - y + 5z = 0$ et bien sûr $z = x + 2y + 2$.

Donc $M(x; y; z) \in d$ si et seulement si $(x; y; z)$ vérifie

le système
$$\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ z = x + 2y + 2 \end{cases}$$

Si x et y sont entiers, la deuxième équation donne une valeur de z entière. Or les solutions entières de la première équation ont été trouvées au 2. c).

$\mathcal{E} = \{M(x; y; z) / x = 1 - 9k, y = -2 + 8k, z = -1 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$.

78 • 1. a) $x = 2$; $y = -3$.

b) $8(x - 2) + 5(y + 3) = 0$ d'où :

$$x = 2 + 5k \text{ et } y = -3 - 8k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

2. a) Par différence, $0 = 8a - 5b - 1$ d'où $8a + 5(-b) = 1$, donc $(a; -b)$ est solution.

b) Si N est tel que :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases},$$

nous avons vu que $(a; -b)$ est solution. Donc il existe un relatif k tel que $a = 2 + 5k$ et $-b = -3 - 8k$, d'où :

$$N = 8(2 + 5k) + 1 \text{ et } N = 5(3 + 8k) + 2.$$

Il en résulte, par l'une ou l'autre des égalités, que :

$$N = 40k + 17.$$

Comme $17 < 40$, le reste dans la division de N par 40 est 17.

3. a) Solution particulière :

$$x_0 = 200 \text{ et } y_0 = -300.$$

Solution générale :

$$x = 200 + 5k \text{ et } y = -300 - 8k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes.

x et y sont solutions de l'équation $8x + 5y = 100$ avec x et y entiers naturels.

D'après 3. a), $x = 200 + 5k$ et $y = -300 - 8k$.

Mais la condition $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donne :

$$200 + 5k > 0 \text{ et } -300 - 8k > 0, \text{ soit } -40 < k < -37,5.$$

D'où $k = -38$ ou $k = -39$.

Les solutions sont donc :

$$x = 10 \text{ et } y = 4 \text{ ou bien } x = 5 \text{ et } y = 12.$$

79 • Solution particulière : $x_0 = 33$ et $y_0 = -22$.

Solution générale : $x = 33 - 7k, y = -22 + 5k, k \in \mathbb{Z}$.

$y > x$ équivaut à $-22 + 5k > 33 - 7k$ ce qui donne $12k > 55$ soit $k > 4$.

Les points cherchés sont tous les points

$M(33 - 7k; -22 + 5k)$ avec $k > 4$.

80 • 1. $u = -1$; $v = 1$. On en déduit :

$$x_0 = -57, y_0 = 57.$$

2. $x = -57 - 7k; y = 57 + 6k, k \in \mathbb{Z}$.

3. Le problème revient à trouver k tel que

$$\begin{cases} -57 - 7k \geq 0 \\ 57 + 6k \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit : $-\frac{57}{6} \leq k < -\frac{57}{6}$ d'où $k = -9$.

Un seul point de coordonnées : $x = 6$; $y = 3$.

81 • L'algorithme d'Euclide permet de trouver une solution : $x = 12$; $y = 5$.

Ainsi : $12 \times 13 = 5 \times 31 + 1$ ce qui signifie que le contenu de 12 seaux remplira 5 fois la cuve et il restera 1 litre.

On procède donc de la façon suivante : on démarre avec la cuve vide et on la remplit. Dès qu'elle est pleine on la vide et le restant du seau est mis dans la cuve. La première fois on mettra 2 seaux et une partie du 3^e seau (exactement 8 litres) reste dans le seau. On vide la cuve, on remet le reliquat du seau (les 8 litres) et on recommence. Au bout de la 5^e opération on aura vidé 5 fois la cuve et utilisé 12 seaux et il restera exactement 1 litre dans le seau.

82 • Le problème revient à trouver a et b positifs et les plus petits possibles tels que $11a + 31b = 755$.

Solution particulière : $a = 1$ et $b = 24$.

On trouve $a = 1 + 31k$ et $b = 24 - 11k$. Les conditions imposées conduisent à $0 \leq k \leq 22$ ce qui donne : ($a = 1$ et $b = 24$) ou ($a = 32$ et $b = 13$) ou ($a = 63$ et $b = 2$).

PPCM – PGCD

83 Corrigé dans le manuel.

84 • Premier système

Supposons $x \leq y$. Le PGCD de x et y est $g = \frac{1512}{252} = 6$.

Soit $x = 6x'$ et $y = 6y'$. On sait que x' et y' sont premiers entre eux. La relation $xy = 1512$ donne $x'y' = 42$. Il suffit de prendre tous les couples (x', y') avec $x' \leq y'$ tels que $x'y' = 42$ et x' et y' premiers entre eux.

On obtient les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} x = 6 \text{ et } y = 252; & x = 12 \text{ et } y = 126; \\ x = 18 \text{ et } y = 84; & x = 36 \text{ et } y = 42. \end{aligned}$$

• Deuxième système

Même méthode. On trouve PGCD $(x, y) = 5$. Puis $x'y' = 12$. Si on convient que $x \leq y$, on obtient :

$$x = 5 \text{ et } y = 60; x = 10 \text{ et } y = 30; x = 15 \text{ et } y = 20.$$

85 1. $\mathcal{D}(108) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108\}$.
2. On examine les cas $11 < d < 15$.

Le seul cas conduisant à une valeur valide de m (qui doit être un multiple de d) est $d = 12$.

On en déduit $m = 144$.

Notons $x = 12x'$ et $y = 12y'$ avec x' et y' premiers entre eux. On en déduit $xy = 12x' \times 12y' = 12 \times 144$, d'où $x'y' = 12$.

En supposant $x < y$, on obtient :

$x' = 1$ et $y' = 12$, ce qui donne $x = 12$ et $y = 144$,
ou bien $x' = 3$ et $y' = 4$, ce qui donne $x = 36$ et $y = 48$.

86 Appelons m le PPCM et g le PGCD. On sait que $x = x'g$ et $y = y'g$ avec x' et y' premiers entre eux. L'équation donnée s'écrit $m - 9g = 13$.

Or, $m = x'y'g$, donc l'équation équivaut à $g(x'y' - 9) = 13$.
Donc g divise 13.

– Si $g = 13$, $x'y' = 10$ avec x' et y' premiers entre eux.

- $x' = 1$, $y' = 10$. Dans ce cas, $x = 13$, $y = 130$.
- $x' = 2$, $y' = 5$. Dans ce cas, $x = 26$, $y = 65$.
- $x' = 5$, $y' = 2$. Dans ce cas, $x = 65$, $y = 26$.
- $x' = 10$, $y' = 1$. Dans ce cas, $x = 130$, $y = 13$.

– Si $g = 1$, $x'y' = 22$ avec x' et y' premiers entre eux.

Dans ce cas $x = x'$ et $y = y'$. On trouve :

- $x = 1$, $y = 22$;
- $x = 2$, $y = 11$;
- $x = 11$, $y = 2$;
- $x = 22$, $y = 1$.

On vérifie facilement que toutes les valeurs trouvées dans les deux cas conviennent.

$$\mathcal{S} = \{(13; 130), (26; 65), (65; 26), (130; 13), (1; 22), (2; 11), (11; 2), (22; 1)\}.$$

87 Supposons que (a, b) soit solution. Cherchons le PGCD g de a et b . Il divise a , b mais aussi PPCM(a, b) donc il divise 2. g ne peut être que 1 ou 2.

Si $g = 1$, alors PPCM(a, b) = ab . Donc a et b vérifient : $a + b = 2 + ab$. D'où $(a - 1)(1 - b) = 1$ donc $a - 1$ divise 1 ce qui implique $a = 2$ et $b = 0$ ce qui est impossible donc g ne peut pas être égal à 1.

Donc s'il existe une solution (a, b) alors $g = 2$.

$a = 2a'$, $b = 2b'$ et PPCM(a, b) = $2a'b'$. On obtient donc : $2(a' + b') = 2 + 2a'b'$.

On est ramené à $a' + b' = 1 + a'b'$ qui a comme solutions $a' = 1$ et $b' = k$ ou $a' = k$ et $b' = 1$. On en déduit alors pour (a, b) : $a = 2$ et $b = 2k$ ou bien $a = 2k$ et $b = 2$, k entier naturel non nul. Réciproquement, ces couples conviennent bien.

88 A-t-on : $d = \text{PGCD}(M, S)$?

$a = da'$ $b = db'$. Alors $S = d(a' + b')$ et $M = da'b'$.

$\text{PGCD}(M, S) = d \text{ PGCD}(a' + b', a'b')$.

Pour montrer que $\text{PGCD}(M, S) = d$, il suffit de montrer que : $\text{PGCD}(a' + b', a'b') = 1$.

a' et b' sont premiers entre eux donc il en est de même de $a' + b'$ et $a'b'$ (voir exercice 58 2.). Il en résulte que $\text{PGCD}(a' + b', a'b') = 1$ et donc $\text{PGCD}(M, S) = d$.

89 • Même méthode qu'au 86.

Remarque préliminaire : d est pair car $105d = 8m - 30$.

Posons comme d'habitude $a = da'$ et $b = db'$.

$d(8a'b' - 105) = 30$ donc d est un diviseur (pair) de 30.

$d = 30$, $8a'b' = 106$, impossible.

$d = 10$, $8a'b' = 108$, impossible.

$d = 6$, $8a'b' = 110$, impossible.

$d = 2$, $8a'b' = 120$, donc $a'b' = 15$.

Donc a' et b' sont des diviseurs de 15.

- $a' = 1$, $b' = 15$. Alors $a = 2$ et $b = 30$.
- $a' = 3$, $b' = 5$. Alors $a = 6$ et $b = 10$.
- $a' = 5$, $b' = 3$. Alors $a = 10$ et $b = 6$.
- $a' = 15$, $b' = 1$. Alors $a = 30$ et $b = 2$.

On vérifie que ces quatre couples conviennent.

90 • 1. $g = 2n - 1$ et $m = n(n - 1)(2n - 1)$.

2. $m(a + b) = abg \Leftrightarrow a + b = g^2 \Leftrightarrow p + q = g$.

On a donc $a = p(p + q)$ et $b = q(p + q)$.

3. La relation [2] implique $p - q = 1$, donc $q = p - 1$.

On en déduit que les entiers a et b qui vérifient [1] et [2] sont donnés par :

$$a = p(2p - 1) \text{ et } b = (p - 1)(2p - 1).$$

4. On a vu que, de [1], on déduit $a + b = g^2$ et la relation [2] dit que $g = a - b$, donc, de [1] et [2], on déduit [3] :

$$(a - b)^2 = a + b.$$

Si $(a - b)^2 = a + b$, les relations [1] et [2] ne sont pas nécessairement satisfaites.

Contre-exemple : $a = 36$ et $b = 28$; on a alors $g = 4$ donc [2] n'est pas vérifiée et [1] non plus.

5. Notons $n = a - b$. On a alors $a + b = n^2$ d'où :

$$a = \frac{n^2 + n}{2} \text{ et } b = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Notons que $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à des valeurs qui ne vérifient pas les hypothèses $a > b > 0$, donc $n \geq 2$.

Divisons a par b : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Pour $n = 2$, $a = 3$ et $b = 1$, et alors $r = 0$.

Pour $n = 3$, $a = 6$ et $b = 3$, donc $r = 0$.

Le texte impose $r \neq 0$ donc $n > 3$.

$$\frac{a}{b} = \frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1} < 2 \text{ puisque } n > 3. \text{ Donc } q < 2.$$

Il en résulte $q = 1$ ($q \neq 0$ puisque $a > b$).

Donc $a - b = r$ et $a + b = r^2$ d'où :

$$a = \frac{r^2 + r}{2} \text{ et } b = \frac{r^2 - r}{2}.$$

Application : $r = 11$, $a = 66$, $b = 55$, $a + b = 121 = (a - b)^2$.

91 • A. 1. a) $\overline{ON}$ et $\overline{OM}$ sont colinéaires donc $u = ka$ et $v = kb$ avec k entier car u et v doivent être entiers et a et b sont premiers entre eux.

b) Les seuls nœuds sur $[OM]$ sont O et M .

2. a) Soit ka l'un des multiples avec $1 \leq k < b$. Si b divise ka il divise k puisque a et b sont premiers entre eux ce qui est impossible puisque $1 \leq k < b$.

Les restes sont tous distincts sinon b diviserait la différence ce qui est impossible pour la même raison que précédemment.

b) Puisque les $b - 1$ restes sont tous distincts et compris entre 1 et $b - 1$, ils constituent une permutation de l'ensemble $\{1 ; 2 \dots b - 1\}$ il y en a donc un seul qui est égal à 1.

c) Ce qui précède signifie qu'il existe un multiple unique ax (avec $0 < x < b$) tel que $ax = by + 1$.

d) $by = ax - 1$. Or a et x sont strictement positifs donc $ax \geq 1$ et $by \geq 0$ donc $y \geq 0$ (erreur de texte : il faut lire $0 \leq y < a$).

$ax - 1 < ab - 1 < ab$ donc $by < ab$ d'où $y < a$.

3. a) L'existence et l'unicité de B résulte directement du 2. c).

Le point B est au-dessus de $[OM]$ car $\beta = \frac{b}{a} \alpha + 1$ et le point de $[OM]$ d'abscisse α a pour ordonnée $\beta = \frac{b}{a} \alpha$.

b) $\alpha' = a - \alpha$ et $\beta' = b - \beta$. On en déduit : $a\beta' - b\alpha' = -1$.

$$4. a) d(B, (OM)) = \frac{|b\alpha - a\beta|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\sqrt{a^2 + b^2}$ est constant et l'entier $|b\alpha - a\beta|$ est non nul puisque B n'est pas sur (OM) . Son minimum est donc obtenu lorsqu'il est égal à 1. Donc B et B' sont les nœuds les plus proches de (OM) .

b) Cette aire est égale à

$$d(O, M) \times d(B, (OM)) = \sqrt{a^2 + b^2} \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1.$$

5. Dans un repère orthonormal on place $M(7 ; 12)$. On cherche le nœud au-dessus de $[OM]$ le plus proche de ce segment. On voit que ce nœud est le point de coordonnées $(4 ; 7)$. Donc d'après ce qui précède $u = \beta = 7$ et $v = \alpha = 4$ est une solution de l'équation $7u - 12v = 1$.

B. 1. Le point $P(a', b')$ est un nœud (le seul du rectangle OEPR d'après ce que l'on a vu au A. Il est clair que les d points $B_k(ka' ; kb')$ avec $1 \leq k \leq d$ (k entier) sont des nœuds. Il n'y en a pas d'autres. En effet s'il y avait un nœud sur $[OM]$ entre B_k et B_{k+1} il aurait comme coordonnées $(ta' ; tb')$ avec t entier et on aurait $k < t < k + 1$ ce qui contredit le fait que t est entier.

2. Aire OEFK = $a'b$

$$\text{et aire OHSR} = ab' = \frac{ab}{d} = \text{PPCM}(a, b).$$

3. $a\beta - b\alpha = d$ équivaut à $a'\beta - b'\alpha = 1$ avec a' et b' premiers entre eux.

On a vu que dans le rectangle OEPR on ne trouvait qu'une solution (correspondant au nœud au-dessus de $[OP]$ le plus proche de $[OP]$). Si on note $N_0(\alpha_0, \beta_0)$ ce nœud, l'ensemble des solutions est donné par $\alpha = \alpha_0 + ka'$ et $\beta = \beta_0 + kb'$. Les nœuds qui sont dans OHMK sont tels que $0 < \alpha < a$ et $0 < \beta < b$, ce qui est obtenu pour $0 \leq k < d$ ce qui donne exactement d points.

4. Graphiquement avec la méthode vue au A., on trouve la solution correspondant au nœud qui est dans OEPR. Il suffit de prendre le nœud le plus proche de la droite (OM) dans le rectangle OEPR.

On trouve le nœud $N_0(3 ; 2)$ qui donne la solution $u = 2$ et $v = 3$.

Il y a dans le rectangle OHMK deux autres solutions correspondant aux nœuds $N_1(8 ; 5)$ et $N_2(13 ; 8)$. Ces nœuds donnent les solutions $(u = 5 ; v = 8)$ et $(u = 8 ; v = 13)$.

Fractions

92 Corrigé dans le manuel.

93 • 1. a) $n = A + 1$ donc $B = A^2 - A + 4$.

Si d divise A et B , alors il divise A et aussi la différence $B - (A^2 - A)$ qui vaut 4.

Réciproquement, si d divise A et 4, d divise A et la somme $A^2 - A + 4$ qui vaut B .

Donc les diviseurs communs de A et B sont les mêmes que ceux de A et 4, donc $\text{PGCD}(A; B) = \text{PGCD}(A; 4)$.

b) La question revient à trouver, selon les valeurs de n , le PGCD de $n - 1$ et 4.

Pour tout n , $n = 4k + r$, avec $r = 0, 1, 2$ ou 3.

D'où le résultat :

- si $n = 4k$ ou $n = 4k + 2$ (c'est-à-dire n pair), alors $\text{PGCD}(A; B) = 1$;

- si $n = 4k + 1$, alors $n - 1$ est divisible par 4 et $\text{PGCD}(A; B) = 4$;

- si $n = 4k + 3$, alors $n - 1 = 2(2k + 1)$ donc A est divisible par 2 mais pas par 4, donc $\text{PGCD}(A; B) = 2$.

2. La fraction $\frac{B}{A}$ est un entier relatif si et seulement si A

divise B , ce qui équivaut à dire que $A = \text{PGCD}(A; B)$ ou bien $A = -\text{PGCD}(A; B)$. Examinons les différents cas à la lumière de la question 1.b).

- Si n est pair, $\text{PGCD}(A; B) = 1$, donc on doit avoir soit $A = 1$, qui donne $n = 2$ et alors $\frac{B}{A} = 4$; soit $A = -1$, qui donne $n = 0$ avec $\frac{B}{A} = -6$.

- Si $n = 4k + 1$, alors $\text{PGCD}(A; B) = 4$, donc $A = 4$ ou $A = -4$; soit $n = 5$ et alors $\frac{B}{A} = 4$, ou bien $n = -3$ qui donne alors $\frac{B}{A} = -4$.

- Si $n = 4k + 3$, alors $\text{PGCD}(A; B) = 2$, donc $A = 2$, soit $n = 3$, on a alors $\frac{B}{A} = 3$ ou bien $A = -2$, soit $n = -1$ qui donne alors $\frac{B}{A} = -2$.

Conclusion : L'ensemble des valeurs de n , pour lesquelles alors $\frac{B}{A}$ est un entier relatif, est $\{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$.

94 • Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$, alors $a_1b_2 + a_2b_1 = kb_1b_2$.

b_1 divise a_1b_2 mais, comme b_1 est premier avec a_1 , alors b_1 divise b_2 . On montre de la même façon que b_2 divise b_1 donc $b_1 = b_2$.

95 • 1. d divise $n^2 + 1$ et $n(n^2 - 1)$; or, d est premier avec n (sinon on pourrait trouver un diviseur commun à $n^2 + 1$ et à n , donc à 1, donc il divise $n^2 - 1$).

Divisant $n^2 + 1$ et $n^2 - 1$, il divise 2.

Réciproque

Si d divise 2 et $n^2 - 1$, alors il divise $n^2 + 1$ et $n(n^2 - 1)$.

2. Si n est pair, $n^2 - 1$ est impair; donc 2 et $n^2 - 1$, donc aussi $n(n^2 - 1)$ et $n^2 + 1$, n'ont pas de diviseurs communs, donc la fraction est irréductible.

Si n est impair, le PGCD du numérateur et du dénominateur est le même que celui de 2 et $n^2 - 1$.

Comme $n^2 - 1$ est divisible par 2, le PGCD est 2.

96 • $an + bm = kbm$ donc b divise an . b est premier avec a donc b divise n .

n divise bm et est premier avec m donc n divise b . Donc $n = b$.

Prendre toutes les initiatives

97 • 1. $a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d = m^2$;

$(a + 1) \times 10^3 + (b + 1) \times 10^2 + (c + 1) \times 10 + d + 1 = n^2$.

Par différence, $n^2 - m^2 = 1111$.

Soit $(n - m)(n + m) = 11 \times 101$, donc $n - m$ divise 11×101 .

En étudiant tous les cas, on obtient la solution 2025.

98 • $n = 1000a + 100a + 10a + 10b + b$
 $= 11 \times (100a + b)$.

Si n est un carré alors $11 \times (100a + b) = k^2$, donc 11 divise k^2 . Il en résulte que 11 divise k .

Donc $11 \times (100a + b) = 11^2 k'^2$. On en déduit que 11 divise $100a + b$ et que par conséquent $a + b = 11$.

Donc si n est un carré parfait, alors $n = 11^2 \times (9a + 1)$. On trouve finalement que la seule valeur qui convient est $a = 7$ et le nombre est $n = 7744$.

99 • 1. $a^2 + 2b$ est un carré parfait si on peut trouver x tel que $2b = 2ax + x^2$.

x est pair car, sinon, x^2 est impair ce qui est incompatible avec l'égalité obtenue, donc $x = 2q$.

$2b = 4aq + 4q^2$ donc $2b = 2(2aq + 2q^2)$.

2. $a^2 + b = a^2 + 2aq + 2q^2 = (a + q)^2 + q^2$.

100 • Soit $n \equiv 7 \equiv -1 \pmod{8}$.

Or modulo 8, on a $0^2 \equiv 0$; $1^2 \equiv 1$; $2^2 \equiv 4$; $3^2 \equiv 1$; $4^2 \equiv 0$; $5^2 \equiv 1$; $6^2 \equiv 4$; $7^2 \equiv 1$.

En essayant toutes les combinaisons possibles, on constate que la somme de trois carrés ne peut jamais être -1 ou 7.

101 • Par récurrence à partir du corollaire du théorème de Gauss (page 38).

102 • Soit x le nombre de convives au prix « normal », y le nombre d'étudiants et z le nombre d'enfants.

$26x + 17y + 13z = 613$ et aussi $x + y + z = 28$. Le problème revient à résoudre l'équation :

$$26[28 - (y + z)] + 17y + 13z = 613$$

soit : $9y + 13z = 115$.

L'algorithme d'Euclide donne pour $9u + 13v = 1$ la solution $u = 3$ et $v = -2$ donc pour l'équation $9y + 13z = 115$ on obtient $x_0 = 345$ et $y_0 = -230$ d'où la solution générale :

$$y = 345 - 13k \text{ et } z = -230 + 9k, k \in \mathbb{Z}.$$

Les conditions $y \geq 0$ et $z \geq 0$ donnent $k = 26$ comme unique solution. Donc $y = 7$ et $z = 4$.

103 • $a = dr$; $b = ds$. On sait que r et s sont premiers entre eux. Divisons les nombres $a, 2a, \dots, ba$ par b . On obtient :

$$\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \dots, \frac{(b-1)r}{s}, \frac{br}{s}$$

Le problème est de savoir combien il y a de nombres entiers dans cette liste.

b divise ka équivaut à s divise kr et comme s est premier avec r cela équivaut à dire que s divise k . Or entre 1 et b il y a exactement d multiples de s puisque $b = ds$. Il y a donc exactement d nombres parmi les entiers $a, 2a, 3a, \dots, ba$, qui sont divisibles par b .

104 • $x = 5x'$ et $y = 5y'$. On doit résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x' + y' = 8$ avec x' et y' premiers entre eux. Remarquons que x' et y' doivent être tous les deux impairs sinon ils ne sont pas premiers entre eux. Prenons $x' = 2k + 1$ et $y' = 7 - 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Si d divise x' et y' alors d divise 8 mais comme x' et y' ne peuvent pas avoir de diviseurs pairs alors $d = 1$ et x' et y' sont premiers entre eux. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $x = 5(2k + 1)$ et $y = 5(7 - 2k)$ est solution. Il y a donc bien une infinité de solutions.

105 • Soit une solution (x, y) . $3x^2 = 1 + y^2$ donc 3 divise $1 + y^2$. Or pour tout entier y , $y^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ donc $1 + y^2 \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$ ce qui contredit l'hypothèse 3 divise $1 + y^2$ donc il n'y a pas de solution.

106 • Supposons que (x, y) soit solution. 5 divise $4\,500 - 5x^2$ donc 5 divise y^2 . À l'aide d'un tableau de congruences modulo 5, on établit que $y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ équivaut à $y \equiv 0 \pmod{5}$. Donc 5 divise y . Donc il existe v tel que $y = 5v$.

$$5x^2 + 25v^2 = 4\,500 \text{ donc } x^2 + 5v^2 = 900.$$

En raisonnant de la même façon, on déduit que 5 divise x . Donc $x = 5u$ et par conséquent $25u^2 + 5v^2 = 900$ et donc : $5u^2 + v^2 = 180$.

Avec la même démarche, on déduit que $v = 5b$. Après simplifications on arrive à $u^2 + 5b^2 = 36$.

Remarquons que $5b^2$ ne peut excéder 36 donc $0 \leq b \leq 2$.

$b = 0$ implique $y = 0$ et $x = 30$.

$b = 1$ implique que $u^2 = 31$ ce qui est impossible.

Enfin $b = 2$ implique $y = 50$ et $x = 20$.

Réciproquement, les deux couples $(x = 30, y = 0)$ et $(x = 20, y = 50)$ conviennent.

$$\mathbf{107} \bullet 5x + 7y = 136.$$

On trouve $x = 2 - 7k$ et $y = 18 + 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Mais x et y doivent être positifs ce qui impose $-3 \leq k \leq 0$. On a donc 4 solutions :

$$(x = 2 ; y = 18) ; (x = 9 ; y = 13) ; \\ (x = 16 ; y = 8) ; (x = 23 ; y = 3).$$

108 • Supposons qu'il existe une solution (x, y, z) .

Soit d le PGCD de x et y .

Il existe u et v premiers entre eux tels que $x = du$; $y = dv$.

L'équation peut s'écrire alors :

$$u^2 + uv + v^2 = zd^2u^2v^2.$$

v divise u^2 donc v divise 1 (car v premier avec u donc aussi avec u^2). Donc $v = 1$ ou $v = -1$. En raisonnant de la même façon avec u on montre que $u = 1$ ou $u = -1$. En étudiant les quatre cas on trouve les quatre solutions suivantes :

$$(-1 ; -1 ; 3), (1 ; 1 ; 3), (-1 ; 1 ; 1), (1 ; -1 ; 1).$$

C'est nouveau au bac

(page 64)

109 1. $x - 3$ est divisible par 4 et par 6 donc par 12.

La réponse **a)** est fausse.

Les réponses **b)** et **c)** sont justes.

2. **a)** Juste. En effet si a et b avaient la même parité il en serait de même de a^2 et b^2 et N serait pair.

b) Juste car $N = (a + b)(a - b)$.

c) Fausse. p est impair et q aussi.

3. $5q - p = 8$. La réponse **a)** est juste.

b) Est juste car si n est pair, p et q sont impairs et le PGCD de p et q est 1.

La réponse **c)** est juste. En effet $\text{PGCD}(q ; q) = 8$ implique 8 divise $n + 1$ soit $n = 8k + 7$.

Réciproquement si $n = 8k + 7$, on vérifie que 8 divise bien p et q .

La réponse **d)** est juste. En effet $\text{PGCD}(p ; q) = 4$ implique 4 divise $n + 1$, c'est-à-dire : $n = 4k + 3$ mais il faut enlever les valeurs impaires de k qui donnent un

PGCD égal à 8. Donc $n = 8k + 3$. Réciproquement, on vérifie que si $n = 8k + 3$, le PGCD de p et q est bien 4. La réponse **e)** est juste. En effet, si $n = 8k + 1$, on vérifie facilement que 2 divise p et q . Comme le PGCD de p et q n'est ni 4 ni 8 (obtenus avec d'autres valeurs). $\text{PGCD}(p ; q) = 2$. On procède de même avec $n = 8k + 5$.

110 1. Faux. a et b peuvent être premiers entre eux.

En effet, si a et b sont premiers entre eux on peut trouver x et y tels que $ax + by = 1$.

D'où $a(6x) + b(6y) = 6$. Donc on a trouvé $u = 6x$ et $v = 6y$ tels que $au + bv = 6$ avec a et b premiers entre eux.

2. Vrai. Pour le justifier, on raisonne par l'absurde. Si 5 ne divise ni a ni b , $a = 5k + c$ et $b = 5k' + d$ avec c de d non nuls et inférieurs à 5. On en déduit alors que ab n'est pas divisible par 5 d'où la contradiction.

3. Faux. Contre-exemple $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}$.
4. Vrai. Si a et b sont premiers entre eux a^2 et b^2 aussi.
5. Juste.
6. Faux. 5 220 par exemple est un multiple commun de 180 et 348.
7. Juste.
8. Faux. Par exemple : 8 premier avec 5 mais pas avec 5×2 .
9. Faux. Par exemple : $a = 30$, $b = 60$. a est multiple de 15 et b de 20 mais le PPCM 60 n'est pas multiple de 300.

111 1. Démonstration faite dans l'exo résolu 6 page 35.

2. a) $u_n = p^2(2p+1)^2$ et $u_{n+1} = (p+1)^2(2p+1)^2$
 p^2 et $(p+1)^2$ sont premiers entre eux donc

$$d_n = (2p+1)^2.$$

b) $u_n = (2p+1)^2(p+1)^2$ et $u_{n+1} = (p+1)^2(2p+3)^2$
 $(2p+1)^2$ et $(2p+3)^2$ sont premiers entre eux donc
 $d_n = (p+1)^2$.

Travaux dirigés (page 75)

TD 1

1 1. a) Immédiat.

b) Oui.

2. a) Si u et v sont de parités différentes, alors u^2 et v^2 sont de parités différentes, et alors, $u^2 - v^2$ est impair tandis que $2uv$ est pair.

b) Si on prend d le plus grand possible, $d = \text{PGCD}(x, y)$.

2 1. a) Si x et z avaient un diviseur commun, il diviserait y^2 , ce qui contredit l'hypothèse « x et y premiers entre eux». Même chose pour y et z .

b) $x^2 = 4q^2 = (z - y)(z + y)$

$$d'où q^2 = \left(\frac{z-y}{2}\right)\left(\frac{z+y}{2}\right).$$

y et z sont impairs donc $z - y$ et $z + y$ divisibles par 2. $z > y$ (z et y premiers entre eux donc $z \neq y$), donc

$\frac{z-y}{2}$ et $\frac{z+y}{2}$ sont des entiers strictement positifs.

c) Si $\frac{z-y}{2}$ et $\frac{z+y}{2}$ avaient un diviseur commun, il diviserait la somme et la différence, c'est-à-dire z et y , ce qui contredirait le fait que z et y sont premiers entre eux.

d) Les décompositions en facteurs premiers de $\frac{z-y}{2}$ et $\frac{z+y}{2}$ ne peuvent donc pas avoir de facteurs communs, chacune des décompositions se retrouve donc dans celle de q^2 , donc l'exposant de chaque facteur premier est pair. Par conséquent,

$$\frac{z-y}{2} = u^2 \text{ et } \frac{z+y}{2} = v^2 \text{ avec } 0 < u < v.$$

e) $q^2 = \left(\frac{z-y}{2}\right)\left(\frac{z+y}{2}\right) = u^2v^2$ donc $q = uv$ et $x = 2q = 2uv$.

Pour y et z , on retranche et on ajoute :

$$\frac{z-y}{2} = u^2 \text{ et } \frac{z+y}{2} = v^2.$$

2. a) g^2 divise x^2 et y^2 , donc divise leur somme z^2 . Si on écrit les décompositions en facteurs premiers de g^2 et de z^2 , les facteurs premiers de g^2 figurent

dans la décomposition de z^2 avec des exposants inférieurs ou égaux.

Si on divise tous les exposants par 2, on obtient la décomposition de g d'une part, et celle de z d'autre part. Les facteurs de g sont toujours présents dans la décomposition de z et les exposants pour g sont toujours inférieurs à ceux des mêmes facteurs de z . Donc g divise z .

b) $x^2 + y^2 = z^2$ implique, après simplification par g^2 :

$$x'^2 + y'^2 = z'^2.$$

c) $x' = 2p + 1$ et $y' = 2q + 1$, donc :

$$z'^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 4k + 2.$$

Dans la division par 4, un carré ne peut avoir pour reste que 0 ou 1. On aboutit donc à une contradiction si on suppose x' et y' tous les deux impairs.

TD 2

1 2. 496; 8128.

2 1. $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ (a est déjà décomposé).

2. Diviseurs de a : 1, 2, 2^2 , ..., 2^n , $(2^{n+1} - 1)$, $(2^{n+1} - 1) \times 2$, $(2^{n+1} - 1) \times 2^2$, ..., $(2^{n+1} - 1) \times 2^n$.

Il y en a $2(n + 1)$.

3. La liste contient deux suites géométriques.

$$S = 2^{n+1} - 1 + (2^{n+1} - 1) \times (2^{n+1} - 1) = (2^{n+1} - 1) \times 2^{n+1} = 2a.$$

TD 3

1 $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$.

2 1. $F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \times 2} + 1 = (F_n - 1)^2 + 1$.

2. a) Récurrence.

Vrai pour $n = 2$.

Supposons que F_n se termine par 7, cela implique que $2^{2^n} \equiv 6 \pmod{10}$, donc :

$$F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 \equiv 36 + 1 \equiv 7 \pmod{10}.$$

$$b) F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1.$$

Notons u_n le reste de la division de F_n par 100. On peut vérifier facilement que $u_0 = 3$, $u_1 = 5$, $u_2 = 17$, $u_3 = 57$, $u_4 = 37$, $u_5 = 97$ et $u_6 = 17$.

Le problème est de montrer que la suite (u_n) est périodique de période 4 à partir de $n = 2$.

Si $u_n \equiv 17 \pmod{100}$, alors $F_{n+1} \equiv 16^2 + 1 \equiv 57 \pmod{100}$, donc $u_{n+1} = 57$.

Si $u_n \equiv 57 \pmod{100}$, alors $F_{n+1} \equiv 56^2 + 1 \equiv 37 \pmod{100}$, donc $u_{n+1} = 37$.

Si $u_n \equiv 37 \pmod{100}$, alors $F_{n+1} \equiv 36^2 + 1 \equiv 97 \pmod{100}$, donc $u_{n+1} = 97$.

Si $u_n \equiv 97 \pmod{100}$, alors $F_{n+1} \equiv 96^2 + 1 \equiv 17 \pmod{100}$, donc $u_{n+1} = 17$.

Et ainsi de suite...

3 1. $F_{n+k} = 2^{2^n} \times 2^k + 1 = (2^{2^n})2^k + 1 = a(2^k) + 1$ et $F_n = a + 1$ d'où la formule du texte.

2. Immédiat avec l'indication, en prenant $m = 2^k$ qui est bien pair puisque $k > 0$.

3. $F_{n+k} - 2 = q \times F_n$ avec q entier, d'après 2.

Si d divise F_{n+k} et F_n , il divise $F_{n+k} - q \times F_n$ c'est-à-dire 2.

$d = 2$, ce qui est impossible car F_n est impair.

4. a) p_n et p_{n+k} sont nécessairement distincts, car, étant premiers, ils sont différents de 1. Et on a vu au 3. que F_n et F_{n+k} n'avaient pas de diviseurs communs.

b) La suite $(n \mapsto 2^{2^n})$ tend vers $+\infty$ car 2^n tend vers $+\infty$. Étant la composée de deux suites croissantes, elle est croissante.

c) Chaque nouveau nombre de Fermat apporte des facteurs premiers qui n'ont jamais été rencontrés auparavant, donc la suite des nombres premiers est illimitée.

TD 4

1 $n = 11 : M_{11} = 2047 = 89 \times 23$.

2 1. d est un diviseur strict; $n = dd'$.

Si $d' = 1$ ou $d' = n$, alors $d = n$ ou $d = 1$, ce qui est impossible.

Donc d' est un diviseur strict.

2. $2^n - 1 = (2^d)^{d'} = (2^d - 1)((2^d)^{d'-1} + \dots + 1)$, donc $2^d - 1$ est un diviseur de $2^n - 1$.

3. Si $2^d - 1 = 1$, alors $d = 1$, ce qui est exclu.

Si $2^d - 1 = 2^n - 1$, alors $d = n$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $1 < 2^d - 1 < 2^n - 1$.

3 1. a) $s = n_0q + r$, $0 \leq r \leq n_0$.

$2^s = 2^{n_0q+r} = (2^{n_0})^q \times 2^r$, or $2^s \equiv 1 \pmod{p}$ et $2^{n_0} \equiv 1 \pmod{p}$ donc $2^r \equiv 1 \pmod{p}$. Vu la définition de n_0 , $r = 0$.

Donc n_0 divise s .

2. Puisque $2^n \equiv 1 \pmod{p}$, n_0 divise n .

Or, n est premier donc $n_0 = 1$ ou $n_0 = n$; mais $n_0 = 1$ est impossible car $2 \equiv 1 \pmod{p}$ est impossible. Donc $n_0 = n$.

3. Donc $n_0 = n$ divise $p - 1$ donc $p = nm + 1$.

Si m est impair, alors p est pair, ce qui est impossible, donc m est pair : $m = 2k$.

TD 5

1 1. Immédiat.

3. a) $a = p \times 0 + a$ avec $0 \leq a \leq p$ donc a est le reste.

b) Soit $a^{p-2} = pq + r$ avec $0 \leq r < p$.

• $r \neq 0$ sinon p divise a (p premier).

• $r \neq 1$; en effet, si on avait $a^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$, on aurait $a^{p-1} \equiv a \pmod{p}$ et, d'après Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Il en résulterait $a \equiv 1 \pmod{p}$, ce qui contredit l'hypothèse $2 \leq a \leq p-2$.

• $r \neq p-1$; en effet, si on avait $a^{p-2} \equiv p-1 \pmod{p}$, on aurait $a^{p-1} \equiv -a \pmod{p}$. Or, d'après Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Il en résulterait $a \equiv -1 \equiv p-1 \pmod{p}$ ce qui est impossible (le reste ne peut pas être $p-1$).

4. a) Soit a un terme de la suite.

On sait que $a \times a^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$. Mais on a vu à la question précédente que $a^{p-2} \equiv r \pmod{p}$ (r étant l'un des termes de la suite $1, 2, \dots, (p-2)$), donc à a , on a bien associé un terme r de la suite tel que $a \times r \equiv 1 \pmod{p}$.

b) Si on avait $a' = b'$, on aurait $a'(a-b) = pq$.

Comme $2 \leq a' \leq p-2$ et p premier, p est premier avec a' et divise donc $a-b$. Ce qui est impossible puisque a et b sont distincts et appartiennent à la suite $2, \dots, (p-2)$.

Il en résulte que lorsque a décrit la suite, a' prend toutes les valeurs de cette suite.

5. On vient de voir qu'à chaque élément a de la suite $2, \dots, (p-2)$, on peut associer $a' \neq a$ de la suite. Cette relation est bijective. On peut donc établir une partition de $\{2, 3, \dots, p-2\}$ formée par toutes les paires $\{a, a'\}$. Chacune de ces paires vérifie

$$aa' \equiv 1 \pmod{p} \text{ et il y en a } \frac{p-3}{2}.$$

Quand on multiplie membre à membre toutes les relations du type $a \times a' \equiv 1 \pmod{p}$ correspondant

aux $\frac{p-3}{2}$ relations précédentes, on obtient
 $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$, puis en multipliant par $p-1$:
 $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$.

TD 6

1 1. Le PGCD de 2 et 3 est 1, donc d'après [1],

$$F(6) = F(2) F(3).$$

3 est premier donc, en appliquant [2],

$$F[6] = F(3+3) = 2F(3).$$

Il résulte de ces deux égalités que $F(2) = 2$.

En appliquant [1], on peut écrire :

$$F(2) = F(1 \times 2) = F(1) \times F(2), \text{ d'où } F(1) = 1.$$

$$2. \bullet F(4) = F(2+2) = F(2) + F(2) = 4.$$

$$\bullet F(12) = F(4 \times 3) = 4F(3).$$

D'autre part,

$$F(12) = F(5) + F(7) = 2F(5) + 2 = 2F(3) + 6.$$

$$\text{Donc } 4F(3) = 2F(3) + 6, \text{ d'où } F(3) = 3.$$

3. Déjà fait pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$5 = 2 + 3$; $6 = 3 + 3$; $7 = 5 + 2$; $8 = 5 + 3$; $9 = 7 + 2$;
 $10 = 7 + 3$; $12 = 7 + 5$; $14 = 7 + 7$ sont des sommes
de nombres premiers. En utilisant [2], on peut
conclure de proche en proche que $F(n) = n$ pour
toutes ces valeurs.

Pour $n = 11$, on écrit $F(14) = F(3) + F(11)$ et, par
différence, $F(11) = 11$.

$$\text{Puis } F(13) = F(11) + F(2) = 13,$$

$$F(15) = F(3) \times F(5) = 15, F(16) = F(3) + F(13).$$

Pour $F(17)$, on procède ainsi :

$$F(20) = F(4) \times F(5) = 20 = F(3) + F(17), \text{ donc, par } \\ \text{différence, } F(17) = 17.$$

$$4. 2006 = 59 \times 17 \times 2$$

$$59 \text{ et } 7 \text{ sont premiers donc } F(66) = F(59) + F(7) \\ \text{donc } F(59) = F(66) - 7 = F(11 \times 6) - 7$$

$$= F(11) \times F(6) - 7 = 11 \times 6 - 7 = 59.$$

On en déduit

$$F(2006) = F(59 \times 34) = F(59) \times F(34) \\ = 59 \times F(17) \times F(2) = 59 \times 17 \times 2 = 2006.$$

2 1. Si n est pair, alors, en admettant la conjecture de
Goldbach, $n = p + q$ avec p et q premiers. D'après
[2], $F(n) = F(p) + F(q)$. Mais p et q sont inférieurs
à n strictement, donc d'après l'hypothèse de
récurrence,

$$F(n) = p + q = n.$$

2. n est impair.

1^{er} cas : n est premier.

$$\bullet n = 8k + 1 \quad (k > 2).$$

La première égalité résulte de [2] car n et 3 sont
premiers.

$F(n+3) = F(8k+4) = F(4(2k+1))$. Or, 4 et $2k+1$
sont premiers entre eux, donc, d'après [1],

$$F(n+3) = 4F(2k+1).$$

Il est clair que k étant strictement positif, $2k+1 < n$,
donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence
avec $2k+1$ et, par conséquent,

$$F(n+3) = 4(2k+1) = 8k+4 = n+3.$$

Des deux égalités, $F(n+3) = F(n) + 3$ et

$$F(n+3) = n+3, \text{ on déduit } F(n) = n.$$

• Les cas $n \equiv 3, n \equiv 5, n \equiv 7 \pmod{8}$ se traitent de
manière analogue.

2^e cas : n n'est pas premier (et impair).

En admettant Goldbach, $2n = p + q$ avec p et q
impairs (on suppose $q < p$).

On voit que n est le milieu $\begin{array}{ccccccc} 0 & & q & n & p & & 2n \\ & & | & | & | & & \\ & & + & + & + & & \end{array}$
de $[q; p]$. $F(2n) = 2F(n)$ car
2 et n premiers entre eux.

$$\text{D'autre part, } F(2n) = F(q) + F(p) = q + F(p).$$

Nous allons démontrer que $F(p) = p$. Il en résul-
tera $2F(n) = q + p = 2n$ et donc $F(n) = n$.

La méthode est la même que dans le premier cas
traité précédemment.

On étudie les sous-cas $p \equiv 1, p \equiv 3, p \equiv 5, p \equiv 7 \pmod{8}$.

$$\bullet p = 8k + 1$$

Alors $F(p+3) = F(4(2k+1)) = 4F(2k+1)$. Il faut
s'assurer que $2k+1 < n$ pour appliquer l'hypo-
thèse de récurrence.

$$\text{Or } p < 2n - 3 \text{ donc } 8k + 1 < 2n - 3 \text{ et } 2k + 1 < \frac{n}{2} < n.$$

$$\text{Donc } F(2k+1) = 2k+1.$$

$$\text{Alors } F(p+3) = 4(2k+1) = p+3 \text{ et donc } F(p) = p.$$

• Les autres cas se traitent de manière analogue.
Avec $p = 8k + 3$, on calcule $F(p+17)$; avec
 $p = 8k + 5$, on calcule $F(p+7)$; avec $p = 8k + 7$, on
calcule $F(p+5)$.

TD 7

2 2. a) Soit n et n' deux entiers différents compris
entre 0 et 255. Démontrons que les restes r et r' de
la division de $7n$ et $7n'$ par 256 sont différents.

Raisonnons par l'absurde.

$$\text{Supposons } r = r', \text{ alors } 7(n - n') \equiv 0 \pmod{256}.$$

Comme 7 est premier avec 256, $n - n' \equiv 0 \pmod{256}$
et, comme n et n' sont entre 0 et 255, $n \equiv n'$, ce qui
contredit l'hypothèse « n et n' différents».

3. a) $183 \times 7 = 5 \times 256 + 1$, donc $183 \times 7 \equiv 1 \pmod{256}$
et, en multipliant par n , on obtient :

$$183 (7n) \equiv n \pmod{256}.$$

b) Si on part avec un entier n , le codage donnera x
tel que $7n \equiv x \pmod{256}$.

En appliquant D, on retiendra

$$D(x) \equiv 183x \equiv 183(7n) \equiv n.$$

Comme on reste dans $[0; 255]$, on retrouve bien la valeur n dont on est parti.

4. Le message obtenu est « la partie arithmétique est amusante ».

TD 8

2 b) $131^{77} \equiv 14 \pmod{221}$ et $19^{77} \equiv 15 \pmod{221}$, donc Alice obtient 14 15 14.

d) $14^{77} \equiv 209 \pmod{221}$ et $15^{77} \equiv 19 \pmod{221}$, donc le message codé par Alice est : 209 19 209.

Bob le décodera en faisant :

$$209^5 \equiv 14 \pmod{221} \text{ et } 19^5 \equiv 15 \pmod{221}.$$

Voici un programme en Pascal effectuant les calculs précédents :

```
Program crypto;
Uses crt;
Var n, p, q, e, a, b : longint;
function chiffre (x, y : longint) : longint ; {fonction récursive}
var m : longint;
begin
  if y = 0 then m := 1 else m := (x*chiffre (x, y - 1) mod n);
  chiffre := m
end;
begin
  clrscr;
  writeln ('Donnez la clef n'); readln (n);
  writeln ('Donnez e'); readln (e);
  writeln ('Donnez le nombre à coder'); readln (a);
  b := chiffre (a, e);
  writeln ('Le résultat est :',b);
  readln;
end.
```

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 20)

1. Définition.

L'ensemble des nombres premiers

1 Non; non; oui; non.

2 Oui; non; oui; non.

3 Non; non; non; oui.

4 $85^2 - 4 = 83 \times 87 = 3 \times 29 \times 83$. Donc $85^2 - 4$ n'est pas le produit de deux nombres premiers.

5 $102^2 - 1 = 101 \times 103$; 101 et 103 sont premiers.

6 Si $n = 0$, on obtient 1 qui n'est pas premier.
Si $n \neq 0$, $n + 1$ est un diviseur strict de $n^2 + 2n + 1$ qui n'est donc pas premier.

7 $121 = 11^2$; $12\ 321 = 111^2$; $1\ 234\ 321 = 1\ 111^2$;
 $123\ 454\ 321 = 11\ 111^2$; $12\ 345\ 654\ 321 = 111\ 111^2$;
 $1\ 234\ 567\ 654\ 321 = 1\ 111\ 111^2$ donc aucun n'est premier.

8 Corrigé dans le manuel.

9 $n^{42} - 27 = (n^{14})^3 - 27 = (n^{14} - 3)(n^{28} + 3n^{14} + 9)$.
Les deux facteurs sont supérieurs à 1 donc $n^{42} - 27$ n'est pas premier.

10 Trois nombres qui sont 113, 131, 311. Ces trois nombres sont bien premiers.

11 Voici l'algorithme du programme demandé et le programme sur TI 83.

```
Lire N
D ← 1
R ← 1
Tant Que R ≠ 0 et D2 < N Faire
  D ← D + 1
  R ← Reste de la division de N par D
Fin du Tant Que
Si R ≠ 0
  alors Afficher : « N est premier »
  sinon Afficher : « N est divisible par D »
Fin du Si
```

```
Input « DONNER N > 2 », N
1 → D
1 → R
While R ≠ 0 and D*D < N
D + 1 → D
N-D*Int(N/D) → R
End
If R ≠ 0
Then
Disp N, « PREM »
Else
Disp N, « DIV PAR », D
```

En exécutant le programme, on constate que 11 311 est bien premier. En changeant l'ordre, on peut obtenir un nombre composé. Par exemple, avec 31111 la machine annonce qu'il est divisible par 53.

12 $20! + 2$ est divisible par 2; $20! + 3$ est divisible par 3; $20! + 4$ est divisible par 4 et $20! + 5$ est divisible par 5.

13 Un nombre quelconque est congrü à 0 ou 1 ou 2 ou 3 modulo 4. S'il est premier, le reste dans la division de p par 4 ne peut être ni 0 ni 2. Donc $p \equiv 1$ ou $p \equiv 3 \pmod{4}$.

14 Corrigé dans le manuel.

15 1. Les restes possibles sont 1, 5, 7, 11.
2. On montre facilement que, dans tous les cas :
 $p^2 \equiv 1 \pmod{12}$, donc $p^2 + 11 \equiv 0 \pmod{12}$.

16 p est premier, donc, si p divise $a^2 - 1$, alors p divise $a - 1$ ou p divise $a + 1$.
Mais $1 \leq a - 1 < p - 2$ et $3 \leq a + 1 < p$ et les intervalles $[1; p - 2[$ et $[3; p[$ ne contiennent aucun multiple de p .
On aboutit donc à une contradiction.

2. Décomposition en produit de nombres premiers

17 a) $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$; b) $4998 = 2 \times 3 \times 7^2 \times 17$;
c) $41724 = 2^2 \times 3^2 \times 19 \times 61$; d) $57132 = 2^2 \times 3^3 \times 23^2$.

18 a) $400 = 2^4 \times 5^2$; b) $13050 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 29$;
c) $13552 = 2^4 \times 7 \times 11^2$; d) $11737 = 11^2 \times 97$.

19 a) $72 = 2^3 \times 3^2$;
les diviseurs sont : 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.
b) $220 = 2^2 \times 5 \times 11$;
les diviseurs sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 11, 22, 44, 55, 110, 220.
c) $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$; les diviseurs sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 5, 10, 15, 30, 45, 90, 25, 50, 75, 150, 225, 450.
d) $1352 = 2^3 \times 13^2$; les diviseurs sont : 1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104, 169, 338, 676, 1352.

20 Corrigé dans le manuel.

21 1. Les exposants sont pairs.
a) $2^4 \times 5 \times 13$; b) $5^6 \times 11^7 \times 13^{18}$; c) $2^5 \times 3^2 \times 29$.
2. Les exposants sont tous divisibles par 3.
a) $2^3 \times 5^2 \times 13$; b) $5^4 \times 11 \times 13^2$; c) $2^5 \times 3^2 \times 29$.

22 1. PGCD = $2^2 \times 5^2 = 100$;
PPCM = $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 13 = 23400$.
2. PGCD = $3 \times 5 = 15$;
PPCM = $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 = 19800$.

23 Corrigé dans le manuel.

24 1. PGCD = 60; PPCM = 5400.
2. PGCD = 6; PPCM = 3780.

25 Les carrés des nombres premiers.

26 $(x + 1)(x + 1) \times 3 = 12$, donc $x = 1$.
Le nombre cherché est 150.

27 $m = 3^2 \times 2^n \times 5^n$, donc $3(n + 1)^2 = 27$. On trouve $n = 2$.

28 Corrigé dans le manuel.

29 $616 = 2^3 \times 7 \times 11$. Le plus petit carré divisible par 616 est $m = 2^4 \times 7^2 \times 11^2 = 23716$.

30 1. $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.
2. En supposant $a < b$, on trouve :
 $a = 1, b = 504$; $a = 8, b = 63$; $a = 9, b = 56$; $a = 7, b = 72$.

31 $84 = 2^2 \times 3 \times 7$; douze diviseurs : 1, 2, 4, 3, 6, 12, 7, 14, 28, 21, 42, 84. On trouve $x = 3$.

32 $n + 1$ diviseurs. La somme est :

$$1 + p + p^2 + \dots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

33 1. a) $\mathcal{D}(196) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196\}$.
b) $x^2 - y^2 = 196$ équivaut à $(x + y)(x - y) = 196$ soit :

$$\begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases} \text{ avec } pq = 196.$$

Seuls les couples (p, q) tels que $pq = 196, p > q$ et $p + q$ pair vont donner des solutions. On résout donc :

$$\begin{cases} x + y = 98 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 14 \end{cases}$$

ce qui donne $(x = 50; y = 48)$ ou $(x = 14; y = 0)$

2. a) $\mathcal{D}(225) = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225\}$.

On aboutit aux systèmes, en supposant $x > y$:

$$\begin{cases} x + y = 225 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + y = 75 \\ x - y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 9 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 15 \end{cases}$$

D'où les solutions : $(x = 113; y = 112)$ ou $(x = 39; y = 36)$ ou $(x = 25; y = 20)$ ou $(x = 17; y = 8)$ ou $(x = 15; y = 0)$.

34 Corrigé dans le manuel.

3. Nombres premiers et divisibilité dans $\mathbb{N}$

35 1. a) Si d divise a et b , d divise leur somme.
b) $486 = 2^1 \times 3^5$ et d divise 486, donc d est de la forme $d = 2^\alpha 3^\beta$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 5$ (théorème 4).

2. a) Les diviseurs communs de a et b sont ceux de d .
Donc $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 6$.

Compte-tenu des inégalités vérifiées par α et β , on trouve deux solutions $\alpha = 0$ et $\beta = 5$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

Mais $\alpha = 0$ et $\beta = 5$ donne $d = 243$, $a = 243$ et $b = 243$, qui ne convient pas puisque le texte dit que $a < b$.

Il reste donc le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ qui aboutit à $d = 18$.

b) $a = da'$ et $b = db'$. Il en résulte $a' + b' = 27$, avec $a' < b'$ et a' et b' premiers entre eux.

La condition « ab multiple de 10 » implique que 5, qui est premier, divise $d^2 a' b'$, donc 5 divise a' .

La condition $100 < a < b$ implique $a' > 5$.

Les seules valeurs qui conviennent sont $a' = 10$ et $b' = 17$ qui donnent $a = 180$ et $b = 306$.

36 1. **a)** d divise a et b divise b , donc d^2 divise ab , c'est-à-dire 11340.

b) $11340 = 2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7$. L'exposant de chaque facteur premier de d^2 est pair : d ne peut contenir le facteur 5 ou 7.

2. a) $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 6$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 2$.

La seule solution est $\alpha = 1$, $\beta = 2$, qui donne $d = 18$.

b) $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.
 $ab = 11340$ implique $a' b' = 35$.

5 est premier et divise da' , donc 5 divise a' .

En tenant compte de la condition $a < b$, on obtient $a' = 5$ et $b' = 7$, qui donne $a = 90$, $b = 126$.

37 Corrigé dans le manuel.

38 1. Si $n \equiv 0 \pmod{2}$, alors $n^{13} - n \equiv 0 \pmod{2}$.

Si $n \equiv 1 \pmod{2}$, alors $n^{13} - n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$.

Donc $a = n^{13} - n$ est pair quel que soit n .

2. Corollaire du théorème de Fermat avec $n = 13$.

$a = (n^7 - n)(n^6 + 1)$; on applique le corollaire du théorème de Fermat à $n^7 - n$. On en déduit que a est divisible par 7.

3. a est divisible par 2, 7 et 13 donc par $2 \times 7 \times 13 = 182$.

39 $2^{37} \equiv 2 \pmod{37}$ et $3^{37} \equiv 3 \pmod{37}$ donc $2^{37} + 3^{37} - 5 \equiv 0 \pmod{37}$. Mais $3^{37} - 5$ différence de deux nombres impairs est pair donc $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 2. Il en résulte que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 74.

Apprendre à chercher

(page 87)

40 Plus grand nombre de diviseurs

Les outils :

- Décomposition en produit de nombres premiers.
- Nombre de diviseurs.

Les objectifs :

- Apprendre à éliminer des cas après examen des contraintes.
- Comprendre qu'en arithmétique, il y a presque toujours plusieurs cas à étudier.

1. Le nombre de diviseurs premiers distincts ne peut pas dépasser 3, car en prenant les exposants minimum $2 \times 3 \times 5 \times 7 > 99$. Donc il y a au plus trois facteurs.

Pour avoir les exposants les plus forts possibles, on a avantage à prendre les facteurs premiers les plus petits possibles, donc le nombre cherché sera de la forme :

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \text{ ou encore } n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma,$$

ces exposants pouvant être nuls.

2. a) On voit bien que $\gamma = 2$ n'autorise que $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ ou bien $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, donc, dans les deux cas, un nombre réduit de diviseurs (six diviseurs).

On peut donc se limiter aux cas $\gamma = 1$ et $\gamma = 0$.

b) • Étude du cas $\gamma = 0$.

Alors $0 \leq \beta \leq 4$ (sinon on dépasse 99).

Pour chaque valeur de β , on choisit la valeur de α maximum pour rester en dessous de 99. Cela donne les résultats suivants (nbre de diviseurs = $(\alpha + 1)(\beta + 1)$) :

α	β	n	nbre de diviseurs
0	4	81	5
1	3	54	8
3	2	72	12
5	1	96	12
6	0	64	7

• Étude du cas $\gamma = 1$ avec le facteur 5.

Alors $2^\alpha \times 3^\beta < 20$ et donc $0 \leq \beta \leq 2$.

On étudie les trois possibilités $\beta = 2$, $\beta = 1$ et $\beta = 0$. Dans chacun de ces cas, on choisit α maximum (avec $2^\alpha \times 3^\beta < 20$). Le nombre de diviseurs est $2(\alpha + 1)(\beta + 1)$.

α	β	n	nbre de diviseurs
1	2	90	12
2	1	60	12
4	0	80	10

• Avec le facteur premier 7 (à la place de 5), on trouve une autre solution qui est obtenue avec $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$, c'est le nombre $n = 84$.

Conclusion, le maximum de diviseurs est 12 et est obtenu avec les nombres 60, 72, 84, 90, 96.

41 Divisibilité de $a^p - b^p$ par p^2 (p premier)

Les outils :

- Le théorème de Fermat.
- Définition et propriétés des congruences.

Les objectifs :

- Utiliser le théorème de Fermat avec des congruences.

1. a) On prend la contraposée du théorème 5.

b) Si p n'est pas premier avec A , alors $A \equiv 0 \pmod{p}$.

2. p étant premier, p divise $b^p - b$ et $a^p - a$, et donc aussi leur différence $a - b - (a^p - b^p)$. Or, on a vu que p divise $a^p - b^p$, donc p divise $a - b$.

3. a) $b \equiv a \pmod{p}$ donc tous les termes de la somme B sont congrus à $a^{p-1} \pmod{p}$ et, comme il y en a p :

$$B \equiv pa^{p-1} \pmod{p}.$$

b) Cette dernière congruence implique que B est divisible par p . Donc A est divisible par p^2 .

42 Se demander à quoi sert une hypothèse

Les outils :

- Divisibilité.
- Congruences.

Les objectifs :

- Apprendre à conjecturer.
- Apprendre à démontrer une propriété sur une famille d'entiers.

1. $a = 83$; a est premier.

2. p, q, r étant premiers et strictement supérieurs à 3, ne sont pas multiples de 3 (sinon 3 serait un diviseur strict).

3. Oui, ils sont tous divisibles par 3.

4. Si un entier x n'est pas multiple de 3, alors :
 $x \equiv 1$ ou $x \equiv 2 \pmod{3}$

et, dans les deux cas, $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Donc $p^2 + q^2 + r^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, ce qui prouve que a est toujours un multiple de 3.

43 Conjecturer avec le tableur et démontrer

Les outils :

- Définition des nombres premiers.
- Tableur.

Les objectifs :

- Apprendre à traiter une recherche d'ensemble en deux étapes (conditions nécessaires puis vérification).
- Apprendre à examiner des cas particuliers pour conjecturer.

1. Immédiat.

2. Non.

3. Oui, dans chaque colonne, il y a un multiple de 5.

4. a) Si p est premier, $p > 5$, les restes possibles modulo 5 sont 1, 2, 3 ou 4.

b) Si $p \equiv 1 \pmod{5}$, alors $p + 14 \equiv 0 \pmod{5}$.

Si $p \equiv 2 \pmod{5}$, alors $p + 8 \equiv 0 \pmod{5}$.

Si $p \equiv 3 \pmod{5}$, alors $p + 2 \equiv 0 \pmod{5}$.

Si $p \equiv 4 \pmod{5}$, alors $p + 6 \equiv 0 \pmod{5}$.

Donc dans tous les cas, l'un des nombres $p + 2, p + 6, p + 8, p + 14$ contient un multiple de 5. Le seul entier naturel tel que $p, p + 2, p + 6, p + 8, p + 14$ soient tous premiers est donc $p = 5$.

Pour progresser

(page 89)

Nombres premiers

44 Soit $a, a + 2$ et $a + 4$ trois nombres impairs consécutifs avec $a > 3$.

Si $a \equiv 0 \pmod{3}$, a n'est pas premier.

Si $a \equiv 1 \pmod{3}$, $a + 2 \equiv 0 \pmod{3}$: $a + 2$ non premier.

Si $a \equiv 2 \pmod{3}$, $a + 4 \equiv 0 \pmod{3}$: $a + 4$ n'est pas premier.

45 Si n est premier, il ne peut être de la forme $6q, 6q + 2, 6q + 3, 6q + 4$. Donc un nombre premier est nécessairement de la forme $6q + 1$ ou $6q + 5$, soit encore $6q' - 1$.

46 p étant premier, ses diviseurs sont 1 et p . Donc a et b vérifient $a + b = p$ et $a - b = 1$.

47 Si a et b ne sont pas premiers entre eux, ils admettent un diviseur commun premier d . Mais d divise $xa + yb$ qui est premier donc $d = xa + yb$. Or $xa + yb$ est supérieur à a et b ce qui contredit l'hypothèse d divise a et b . Donc a et b sont premiers entre eux.

Remarque : si a et b sont dans N mais x et y dans Z , $xa + yb$ peut être premier sans que a et b soient premiers entre eux.

48 • 1. a est impair puisqu'il est premier et supérieur à 5. Donc b ne peut pas être impair sinon $a + b$ serait pair.

2. a) a est premier, donc $a \equiv 1$ ou $a \equiv 2 \pmod{3}$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que b n'est pas divisible par 3. Deux cas :

- soit $b \equiv 1$ et alors $a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$;

- soit $b \equiv 2$ et alors $a + b \equiv 0 \pmod{3}$.

Donc dans tous les cas, on contredit l'hypothèse $a + b$ et $a + 2b$ premiers.

Conclusion, b est multiple de 3.

b) b est divisible par 2 et par 3 donc par 6.

3. Exemples : (5 ; 11 ; 17) ; (5 ; 23 ; 41) ; (7 ; 19 ; 31).

49 Corrigé dans le manuel.

50 • Soit a le plus petit et $b = a + 8$ le deuxième. Par hypothèse a et b sont tous les deux premiers. Remarquons que si a est premier, $a = 3k + 1$ ou $a = 3k + 2$. Le premier cas, $a = 3k + 1$, implique $b = 3k + 9$, qui n'est pas premier. Donc nécessairement

$a = 3k + 2$ et $b = 3k + 10$. Dans ces conditions, la demi-somme est $3k + 6$ qui est bien un entier, mais non premier puisque multiple de 3.

51 • Si $p \equiv 0 \pmod{3}$ alors $p = 3$ sinon 3 divise strictement p qui n'est donc pas premier.

$p = 3$ convient car $p^2 + 8 = 17$ qui est premier et $p^3 + 4 = 31$ qui est premier aussi.

Si $p \equiv 1 \pmod{3}$ alors $p^2 + 8 \equiv 9 \pmod{3}$ et $p^2 + 8$ divisible par 3 n'est pas premier.

Si $p \equiv 2 \pmod{3}$ alors $p^2 + 8 \equiv 12 \pmod{3}$ et $p^2 + 8$ divisible par 3 n'est pas premier.

Donc la solution $p = 3$ est la seule solution.

52 • Soit a_1 et a_p le premier et le dernier ;

$$S = p \frac{a_1 + a_p}{2}.$$

Or $a_1 + a_p$, somme de deux nombres impairs, est pair

et donc $\frac{a_1 + a_p}{2}$ est entier.

Donc S est divisible par p et n'est donc pas premier.

53 • Raisonons modulo 3. Posons $a = 2^p + p^2$.

Remarquons que $p = 2$ ne convient pas car alors $a = 8$. Donc s'il existe une solution, p est impair et $a \geq 17$.

Si $p \equiv 0 \pmod{3}$ alors p premier nécessite $p = 3$. Alors $a = 17$ donc $p = 3$ convient.

Si $p = 3k + 1$, k ne peut pas être impair sinon p est pair et différent de 2 et donc non premier.

Donc $p = 6m + 1$. Alors : $2^{6m+1} + (6m+1)^2 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ donc a non premier.

Si $p = 3k + 2$, k est impair donc $p = 6m + 5$. Alors : $2^p + p^2 \equiv 32 + 25 \equiv 0 \pmod{3}$ et a n'est pas premier car divisible par 3 (et plus grand que 3).

$p = 3$ est la seule solution.

54 • Soit g le PGCD de a et c . $a = gu$ et $b = gv$ avec u et v premiers entre eux.

L'égalité $ab = cd$ implique $gub = gvd$ d'où $ub = vd$.

Donc u divise vd et étant premier avec v , u divise d et donc $d = nu$ d'où on déduit $b = vn$.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + g^2u^2 + v^2n^2 + g^2v^2 + n^2u^2 \\ = u^2(n^2 + g^2) + v^2(n^2 + g^2) \\ = (u^2 + v^2)(n^2 + g^2). \end{aligned}$$

Les deux facteurs dépassent 1 donc la somme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ n'est pas un nombre premier.

55 • $17p + 1 = a^2$ donc $17p = (a-1)(a+1)$.

17 et p étant premiers, $17 = a-1$ et $p = a+1$ ou bien $17 = a+1$ et $p = a-1$.

Le premier cas donne $p = 19$ qui convient bien. Le second cas donne $p = 15$ qui est à rejeter car p est premier. Donc une seule solution : $p = 19$.

56 • $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$. Donc si $a > 2$ alors $a-1$ et $a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1$ sont supérieurs

à 1 donc $a^n - 1$ a un diviseur strict ce qui contredit l'hypothèse $a^n - 1$ premier.

Donc $a = 2$.

Si p n'est pas premier, $p = uv$ avec u et v supérieurs strictement à 1. Alors :

$a^n - 1 = 2^{uv} - 1 = (2^u - 1)(2^{u(v-1)} + \dots + 1)$ et alors $a^n - 1$ a un diviseur strict ce qui contredit l'hypothèse $a^n - 1$ premier. Donc n est premier.

57 • 1. Pour m de 2 à k , $u_m = n! + m$ est divisible par m puisque $2 \leq m < n$.

2. D'après le 1., il suffit de prendre :

$$n > 10^5 + 1 \text{ et } k = 10^5 + 1.$$

Alors les nombres u_m de u_2 jusqu'à u_k sont tous composés et consécutifs et il y en a $10^5 + 1 - 2 + 1 = 10^5$.

Décomposition en facteurs premiers

58 1. $n = 1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2$.

2. $m = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 8100$.

59 $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$; $k = 2 \times 3 = 6$.

60 1. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

2. Nombre de diviseurs : $4 \times 3 \times 2 = 24$.

61 90 diviseurs.

62 1. 2 et 5.

Un nombre est une puissance de 10 lorsque sa décomposition en facteurs premiers est de la forme $2^\alpha \times 5^\alpha$.

2. a) $k = 25$; b) Non ; c) $k = 54$; d) $k = 5^7$.

63 • Soit d un diviseur commun à a et b . Il en résulte que d divise $9b - 8a = 54$. Les seuls facteurs premiers de 54 sont 2 et 3. Donc la décomposition de d ne peut pas comporter d'autres facteurs premiers que 2 et 3.

64 • p , étant un nombre premier, figure dans la décomposition de pb^2 avec un exposant impair ($1 +$ exposant éventuel provenant de b^2).

Mais, puisque $a^2 = pb^2$, p figure aussi dans la décomposition de a^2 avec un exposant pair.

La décomposition étant unique, il y a contradiction, donc il n'existe pas de couple (a, b) tel que $a^2 = pb^2$ avec p premier.

65 • 1. $(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1)$, d'où, en développant, $\alpha\beta = \alpha + \beta + 2$.

On en déduit $(\alpha - 1)\beta = \alpha - 1 + 3$, d'où $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

2. $\alpha - 1$ divise 3, donc $\alpha = 2$ ou $\alpha = 4$, on en déduit β . On trouve les deux solutions $n = 2^2 \times 3^4$ ou $n = 2^4 \times 3^2$.

66 • $(\alpha + 3)(\beta + 2) = 2(\alpha + 1)(\beta + 1)$, d'où en développant :

$$\alpha\beta = \beta + 4.$$

Si (α, β) est solution, alors β divise 4, d'où :

$$\beta = 1 \text{ ou } \beta = 2 \text{ ou } \beta = 4.$$

On en déduit les trois solutions :

$$(\alpha = 5; \beta = 1); (\alpha = 3; \beta = 2); (\alpha = 2; \beta = 4)$$

qui donnent les trois nombres :

$$n = 96 \text{ ou } n = 72 \text{ ou } n = 324.$$

67 • 1. Si la décomposition de n en facteurs premiers contenait au moins deux facteurs premiers avec des exposants strictement positifs : $n = a^\alpha b^\beta \dots$, alors le nombre de diviseurs de n serait composé et divisible par $(\alpha + 1)(\beta + 1)$, donc ne pourrait pas être égal à 5. Donc la décomposition de n ne peut contenir qu'un facteur premier.

Ainsi $n = p^\alpha$. Il en résulte que $\alpha + 1 = 5$ donc $n = p^4$.

2. $n - 16 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$. Pour n'avoir que deux facteurs, il faut que $p - 1 = 1$ donc $p = 2$; $n = 2^4$.

68 • Les diviseurs communs sont ceux du PGCD g de a et b . Cherchons g .

On sait qu'il divise 162 et qu'il a six diviseurs.

Or $162 = 2 \times 3^4$, $g = 2^\alpha 3^\beta$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 4$. En outre $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 6$. La seule solution est $(\alpha = 1; \beta = 2)$. Donc $g = 18$.

Si on pose $a = ga'$ et $b = gb'$, a' et b' premiers entre eux vérifient $a' + b' = 9$. On aboutit donc aux solutions $a' = 2$ et $b' = 7$ ou bien $a' = 4$ et $b' = 5$, soit $a = 36$ et $b = 126$ ou $a = 72$ et $b = 90$ à l'ordre près (on suppose $a < b$).

69 • 1. Immédiat.

2. On applique 1. avec $m = 1$ ce qui donne :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

L'un des facteurs est égal à 1 si seulement si $n = 1$ ou $n = -1$ et alors $n^4 + 4 = 5$ est premier.

Si $n \notin \{-1; 1\}$, alors $n^4 + 4$ se factorise en un produit de deux nombres entiers différents de 1 et donc $n^4 + 4$ n'est pas premier.

$$3. 4^{545} + 554^4 = 554^4 + 4 \times 4^{544} = 554^4 + 4 \times (4^{136})^4.$$

On applique l'égalité de Sophie Germain avec $n = 554$ et $m = 4^{136}$. On trouve :

$$4^{545} + 554^4 = (554^2 + 2 \times 4^{272} + 2 \times 554 \times 4^{136}) (554^2 + 2 \times 4^{272} - 2 \times 554 \times 4^{136}).$$

On peut montrer que les deux facteurs sont positifs et différents de 1.

Donc le nombre proposé n'est pas premier.

$$\mathbf{70} \bullet 1. 2\,903\,040 = 2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7.$$

2. a) On étudie les restes de p^2 modulo 8. p est impair donc on envisage seulement pour p les restes 1, 3, 5 ou 7. Dans tous les cas $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

$$b) p^2 - 1 = 8a, q^2 - 1 = 8b.$$

$$\text{Donc } f(p, q) = 8^3 ab(p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4) \\ = 2^9 ab(a - b)(p^4 + p^2q^2 + q^4)$$

mais l'un des trois nombres $a, b, a - b$ est pair. Donc $f(p, q)$ est divisible par 2^{10} .

3. a) Immédiat.

b) $p^2 = 3c + 1, q^2 = 3d + 1$. On remplace après factorisation de $p^6 - q^6$.

$p^4 + p^2q^2 + q^4 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $p^4 + p^2q^2 + q^4$ est divisible par 3, d'où le résultat.

4. a) D'après le petit théorème de Fermat, 7 divise $p^6 - 1$ et aussi $q^6 - 1$ donc la différence $p^6 - q^6$.

b) Démontrons que 5 divise $f(p, q)$. Raisonnons modulo 5.

Si p ou q est congru à 1 ou à 4 l'un des deux est congru à 1 modulo 5 et $f(p, q)$ est clairement congru à 0 modulo 5.

Dans tous les autres cas, $p^2 \equiv -1 \pmod{5}$ et $p^6 - q^6 \equiv 0 \pmod{5}$ donc $f(p, q)$ est divisible par 5.

5. Il résulte de ce qui précède que $f(p, q)$ est divisible par le produit 2 903 040.

$$\mathbf{71} \bullet 1. a) a_1 = 39; b_1 = 19; c_1 = 21;$$

$$a_2 = 399; b_2 = 199; c_2 = 201;$$

$$a_3 = 3999; b_3 = 1999; c_3 = 2001.$$

b) $n + 1$ chiffre; $10 \equiv 1 \pmod{3}$ donc :

$$a_n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ et } c_n \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

$$b_n c_n = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}.$$

$$d) a_6 = b_3 c_3 = (2 \times 10^3 - 1)(2 \times 10^3 + 1) \\ = 1999 \times 2001 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29.$$

e) Si d divise b_n et c_n , alors d divise $c_n - b_n = 2$, donc tout diviseur commun à b_n et c_n divise 2 et c_n .

Réciproquement, si d divise 2 et c_n , il divise $c_n - 2 = b_n$ donc il divise b_n et c_n .

$$\text{Donc } \text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2).$$

2×10^n est pair, donc $2 \times 10^n + 1 = c_n$ est impair; c_n et 2 n'ont donc pas de diviseur commun.

Conclusion : $\text{PGCD}(c_n, 2) = \text{PGCD}(b_n, c_n) = 1$ donc pour tout n , b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. a) b_3 et c_3 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bezout, il existe x et y entiers tels que $b_3x + c_3y = 1$.

b) L'algorithme d'Euclide donne $x = 1000$ et $y = -999$.

Une solution particulière est donc $(x = 1000, y = -999)$.

c) Avec la méthode habituelle, on trouve :

$$x = 1000 + 2001k \text{ et } y = -999 - 1999k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

72 • Les hypothèses se traduisent par :

$$\begin{cases} (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) + 18 = (\alpha + 4)(\beta + 1)(\gamma + 1) \\ (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) + 8 = (\alpha + 1)(\beta + 2)(\gamma + 1) \\ (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) + 12 = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 2) \end{cases}$$

On déduit de là que si (α, β, γ) est une solution, alors $(\gamma + 1)$ divise 18 et 8, donc $\gamma + 1 = 1$ ou $\gamma + 1 = 2$.

Le cas $\gamma = 0$ conduit rapidement à une impossibilité. Donc nécessairement $\gamma = 1$.

On en déduit que (α, β) doit vérifier :

$$\begin{cases} (\alpha + 1)(\beta + 1) + 9 = (\alpha + 4)(\beta + 1) \\ (\alpha + 1)(\beta + 1) + 4 = (\alpha + 1)(\beta + 2) \\ (\alpha + 1)(\beta + 1) = 12 \end{cases}$$

Il en résulte que $\beta + 1$ doit diviser 9 et 12 donc 3 et, par conséquent, $\beta = 0$ ou bien $\beta = 2$.

Le cas $\beta = 0$ conduit à une impossibilité et $\beta = 2$ implique $\alpha = 3$.

Réciproquement, on vérifie que $(\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1)$ est bien solution.

73 • 1. $319 = 11 \times 29$.

2. Si d divise x et y , alors d divise $3x + 5y$ et $x + 2y$.

Réciproquement, si d divise $3x + 5y$ et $x + 2y$, alors d divise :

$$2(3x + 5y) - 5(x + 2y) = x \text{ et } 3(x + 2y) - (3x + 5y) = y.$$

Donc x et y ont les mêmes diviseurs communs que $x + 2y$ et $3x + 5y$.

Donc si x et y sont premiers entre eux, il en est de même de $x + 2y$ et $3x + 5y$.

3. $ab = 2m$ implique $\text{PGCD}(a, b) = 2$. Donc $a = 2a'$ et $b = 2b'$ avec a' et b' premiers entre eux.

a' et b' sont solutions de $(3a' + 5b')(a' + 2b') = 319$.

On résout dans $\mathbb{N}^*$, donc $a' + 2b' < 3a' + 5b'$. On envisage donc les systèmes

$$\begin{cases} a' + 2b' = 1 \\ 3a' + 5b' = 319 \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} a' + 2b' = 11 \\ 3a' + 5b' = 29 \end{cases}$$

Le premier ne donne pas de solution positive et le deuxième donne $a' = 3$ et $b' = 4$, d'où on déduit :

$$a = 6 \text{ et } b = 8.$$

74 • 1. a) $\mathcal{D}(a) = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, p, 2p, 2^2p, 2^3p, 2^4p\}$.

b) $p = 31$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } S &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + p + 2p + 2^2p + \dots + 2^np \\ &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)(1 + p) \\ &= (2^{n+1} - 1)(1 + p). \end{aligned}$$

b) α parfait si et seulement si $(2^{n+1} - 1)(1 + p) = 2^{n+1}p$, d'où $p = 2^{n+1} - 1$.

3. $\alpha = 2^n(2^{n+1} - 1)$.

La somme des inverses des diviseurs est :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \dots + \frac{1}{2^np} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \left(1 + \frac{1}{p} \right) = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{p+1}{p} = 2. \end{aligned}$$

75 • Plus il y a de facteurs premiers distincts, plus il y a de facteurs dans la formule donnant le nombre de diviseurs. Chaque facteur premier introduit dans

la formule un facteur au moins égal à 2 (dans le cas où ce facteur est à la puissance 1).

A contrario, moins il y a de facteurs premiers, plus on peut prendre un exposant grand, ce qui augmente le produit.

Explorons ces deux voies.

• Si on veut un maximum de facteurs, on prend les exposants minimums, donc égaux à 1. On voit alors que si on prend $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, on dépasse 1999. Puisqu'il faut supprimer un facteur, on a avantage à enlever le 11 pour pouvoir augmenter au maximum les autres exposants.

L'exposant que l'on a des chances de pouvoir augmenter au maximum est celui de 2.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, donc on peut encore multiplier par 8 pour rester en dessous de 1999.

$2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 1680$ qui a $5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$ diviseurs.

• Si on veut augmenter l'exposant de 3, ce qui est le plus économique, on est obligé de baisser celui de 2 de deux unités, ce qui donne $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$, qui a :

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36 \text{ diviseurs.}$$

Divers

76 1. On raisonne modulo 3.

p est premier et $p > 7$ donc p n'est pas divisible par 3.

Si $p \equiv 1 \pmod{3}$ ou si $p \equiv 2 \pmod{3}$ alors

$$p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

2. p premier et $p > 7$ donc p est impair. $p = 2k + 1$ donc $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$.

$$\begin{aligned} p^4 - 1 &= 4k(k + 1)(4k^2 + 4k + 2) \\ &= 8k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1). \end{aligned}$$

Or $k(k + 1)$ est pair d'où le résultat.

3. p est premier et $p > 7$ donc p n'est pas divisible par 5.

Si $p \equiv 1$ ou $p \equiv 4 \equiv -1 \pmod{5}$ le résultat $n \equiv 0 \pmod{5}$ est acquis.

Il reste à étudier le cas $p \equiv 2$ et $p \equiv 3 \pmod{5}$, dans ces deux cas on aboutit immédiatement au résultat. Donc n est toujours divisible par 5.

4. a) Résultat de cours.

b) 3 et 16 divisent n donc 48 divise n . 5 divise n donc 5×48 divise n .

5. S'il existe 15 nombres premiers supérieurs ou égaux à 7 répondant à la question, on pourrait écrire pour chacun de ces nombres, $p_k^4 \equiv 1 \pmod{15}$ et par addition on déduirait que $A \equiv 0 \pmod{15}$ ce qui contredit A premier.

77 • 2. a) $n + 1 = 10^{760}$.

b) 761 est premier et 10 n'est pas divisible par 761 donc $n = 10^{760} - 1$ est divisible par 761.

78 • 1. a) On développe le 2^e membre.

$$\text{b) } x^a - 1 = ((x^b)^c - 1) = (x^b - 1) [(x^b)^{c-1} + \dots + 1].$$

2. a) 2, 3, 5 et 11 sont premiers donc si A est divisible par chacun d'eux, il est divisible par leur produit 330.

b) $A = n(n^{20} - 1)$. 10, 4 et 2 divisent 20. On applique le résultat du **1.b)**.

c) Si n est un multiple de 11, A est divisible par 11 puisque n divise A .

Si n n'est pas un multiple de 11, il est premier avec 11. On applique le petit théorème de Fermat avec $p = 11$ et $a = n$. On en déduit $n^{10} - 1$ est divisible par 11 donc A aussi.

Si 5 divise n , 5 divise A .

Si 5 ne divise pas n , on peut appliquer le petit théorème de Fermat avec $p = 5$ et $a = n$. On en déduit que dans ce cas, 5 divise $n^4 - 1$ donc aussi A .

On montre facilement que A est divisible aussi par 2 et 3.

3. A est divisible par 2, 3, 5, 11 tous premiers donc par leur produit 330.

79 • $399 = 3 \times 7 \times 19$ et $A = n^{19} - n = n(n^{18} - 1)$.

À l'aide du petit théorème de Fermat, on montre avec la même méthode que dans le n° 78 que A est divisible par 19.

Ensuite, en remarquant que $n^{18} - 1$ est divisible par $n^6 - 1$, on démontre que A est divisible par 7. Enfin on établit que A est divisible par 3.

80 • **1. a)** L'algorithme d'Euclide appliqué à 109 et 226 montre que $\text{PGCD}(109, 226) = 1$.

L'équation diophantienne (E) admet donc des solutions. L'algorithme d'Euclide donne une solution particulière qui est $(-85; -41)$. Les solutions de (E) sont donc :

$x = -85 + 226h$ et $y = -41 + 109h$, $h \in \mathbb{Z}$. Cela peut s'écrire aussi en posant $k = h - 1$: $x = -85 + 226(k + 1)$ et $y = -41 + 109(k + 1)$ soit encore $x = 141 + 226k$ et $y = 68 + 109k$.

b) Pour avoir $0 \leq x \leq 226$, le nombre k doit vérifier $0 \leq 141 + 226k \leq 226$ ce qui donne une seule valeur entière $k = 0$. La valeur d est 141. Cela implique $e = 68$. Ainsi on a bien : $109d = 1 + 226e$.

2. On essaie les divisions par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13. Aucun ne divise 227.

Comme $E(\sqrt{227}) = 15$ on s'arrête. 227 est premier.

3. a) $f(0) = 0$ (reste de la division de 0^{109} par 227). De même $f(0) = 0$ donc $g(f(0)) = 0$.

b) Comme 227 est premier il ne peut diviser un entier qui lui est inférieur donc d'après le petit théorème de Fermat, $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$.

c) Par définition, pour $a \in A$, $f(a) \equiv a^{109} \pmod{227}$ et $g(a) \equiv a^{141} \pmod{227}$.

Pour $a \neq 0$, $g(f(a)) \equiv (f(a))^{141} \equiv a^{109 \times 141} \pmod{227}$.

Mais d'après la question **1.b)** $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$ donc $g(f(a)) \equiv a \times a \times a^{226 \times 68} = a \times (a^{226})^{68} \pmod{227}$.

Or on a vu au **3.a)** que $a^{226} \equiv 1 \pmod{228}$ donc finalement $g(f(a)) \equiv a \pmod{227}$.

Mais comme a est dans $[0; 226]$ c'est bien le reste attendu et donc $g(f(a)) = a$.

Comme on a vu à part le cas $a = 0$ on peut dire que l'égalité est démontrée pour tout a de A .

$f(g(a)) \equiv (g(a))^{109} \equiv a^{109 \times 141} \pmod{227}$ donc on trouve le même résultat : $f(g(a)) = a$.

81 • **1.** $N_2 = 11$ premier ; $N_3 = 111$ divisible par 3 ; $N_4 = 1111$ divisible par 11.

2. L'écriture décimale de $10^p - 1$ n'est constituée que de 9 donc en divisant par 9 le quotient est écrit uniquement avec p chiffres 1.

$10^p - 1$ est toujours divisible par 9 car

$$10^p - 1 \equiv 1n - 1 \equiv 0 \pmod{9}.$$

3. a) N_p s'écrit avec $2q$ chiffres 1 qui se répartissent en q chiffres 1 de rang impair et q chiffres 1 de rang pair. La différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair est égale à $q \times 1 - q \times 1 = 0$ donc d'après le critère de divisibilité par 11 vu au chapitre 1, TD 4, page 19, N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b) Si p est multiple de 3, alors on peut découper N_p en q tranches de 3 chiffres consécutifs. N_p est la somme des q nombres correspondant à chacune de ces tranches. Chacun de ces nombres est de la forme $10^{3q} + 10^{3q+1} + 10^{3q+2} = 10^{3q}(1 + 10 + 100) = 10^{3q} \times 111$. Donc N_p est divisible par $111 = N_3$.

c) Même raisonnement en découpant N_p en tranches, k tranches de q chiffres.

$$N_p = N_q + N_q \times 10^q + N_q \times 10^{2q} + \dots + N_q \times 10^{(k-1)q} \\ = N_q(1 + 10^q + 10^{2q} + \dots + 10^{(k-1)q})$$

donc N_p est bien divisible par N_q .

d) Pour que N_p soit premier il faut que p soit un nombre premier supérieur ou égal à 5.

Cette solution n'est pas suffisante car :

N_5 n'est pas premier, $11111 = 41 \times 271$.

$N_7 = 239 \times 4649$.

N_{11} n'est pas premier non plus $N_{11} = 21649 \times 513239$. En revanche N_{19} est premier.

82 • **1.** $1001 = 13 \times 11 \times 7$. Un élément de E est de la forme $1001a + 110b = 11(91a + 10b)$.

2. a) Nombre d'éléments de E : $8 \times 10 = 80$.

b) a ne peut prendre que les valeurs 3, 7, 9 donc $3 \times 10 = 30$ éléments.

3. a) n divisible par 3 si et seulement si $2a + 2b$ divisible par 3. Mais 3 premier avec 2, donc cela équivaut à 3 divise $a + b$.

b) 1001 divisible par 7 donc n divisible par 7 si et seulement si $110b$ divisible par 7 soit b divisible par 7 puisque 7 et 110 sont premiers entre eux.

Or b divisible par 7 équivaut à $b = 0$ ou $b = 7$.

4. 11 sera le plus petit facteur premier si et seulement si, n n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5 ni par 7.

D'après ce qui précède, il y en a $3 \times 5 = 15$. (3 façons de choisir a et pour chacune 4 façons de choisir b pour éviter la division par 7 et par 3.)

83 • A. 1. $w_1 = 1$; $w_2 = 1$ et $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$.

2. [2] et [3] sont vraies pour $n = 1$.

On suppose [2] vraie pour n .

$$\begin{aligned} w_{2n+1}^2 &= w_{2n+1}^2 + 2w_{2n+1}^2 w_{2n} + w_{2n}^2 \\ &= w_{2n+1}^2 + 2w_{2n+1} w_{2n} + w_{2n-1} w_{2n+1} - 1 \\ &= w_{2n+1} (w_{2n+1} + w_{2n}) + w_{2n+1} (w_{2n} + w_{2n-1}) - 1 \\ &= w_{2n+1} w_{2n+3} - 1. \end{aligned}$$

Même démarche pour la relation [3].

$$\begin{aligned} \text{B. 1. a)} (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 w_{2n}^2 &= (u_{2n-1} + 1)(u_{2n+1} + 1) - 1 \\ &= u_{2n-1} u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1} \end{aligned}$$

b) Même démarche mais en utilisant [1] et [3].

c) Immédiatement avec la relation du b).

2. Si u_{2n-1} était premier, il diviserait l'un des deux facteurs du second membre de [4].

3. a) $k = 0$ ou $k = 1$ impossible (u strictement croissante pour $n > 1$).

b) On remplace u_{2n+1} par ku_{2n-1} dans la relation [4] (u_{2n-1} premier donc non nul).

c) $k = 2$ donne une valeur négative et $k > 4$ implique :

$$k^2 - 3k + 1 = k(k - 3) + 1 > k + 1,$$

donc conduit à une valeur de $u_{2n-1} < 1$.

d) $k = 3$ donne $u_{2n-1} = 4$ et $k = 4$, $u_{2n-1} = 1$, tous les deux non premiers.

4. a) $k = 1$ implique $u_{2n} = 0$.

b) Immédiat (comme au 3. b)).

c) $k = 2$ donne -2 et $k > 3$ donne une valeur négative ou nulle.

d) $k = 3$ donne 1, non premier.

C. 1. a) La relation proposée équivaut à :

$$(w_{2n+2} + w_{2n})^2 = 5w_{2n+2} w_{2n} + 1,$$

qui équivaut à $(w_{2n+2} - w_{2n})^2 = w_{2n+2} w_{2n} + 1$.

Or $(w_{2n+2} - w_{2n})^2 = (w_{2n+1})^2$ (définition de la suite de Fibonacci) et la relation [3] exprime que le second membre est égal lui aussi à $(w_{2n+1})^2$.

b) On développe les produits dans la relation du a).

2. a) Si un nombre est premier, il est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas. On opère comme au B. 2.

b) Si u_{2n} divisait les deux, il diviserait la différence qui vaut 3. On aurait alors $u_{2n} = 3$, ce qui n'est pas possible car il n'y a aucun terme égal à 3 dans la suite u .

3. a) $k = 0$ donne $u_{2n+2} = 2$ donc $u_{2n} = 0$, impossible. $k = 1$ impose $u_{2n+1} = 2$, impossible.

b) On remplace u_{2n+2} par $2 + ku_{2n}$ dans [5].

c) $k = 2$ donne $u_{2n} = -1$;

$k > 2$ donne $7 - 3k < 0$ et $k^2 - 3k + 1 > 0$.

4. a) $k = 0$ ou $k = 1$ impossible (évident).

b) Immédiat.

c) $k = 2$ donne -4 .

$k \geq 6$ implique $k^2 - 3k + 1 > 3k - 2$.

d) $k = 3$ donne $u_{2n} = 7$; $k = 4$ donne $u_{2n} = 2$; $k = 5$ ne donne pas une valeur entière de u_{2n} .

Conclusion : les seuls nombres premiers de la suite sont $u_4 = 2$ et $u_6 = 7$.

Prendre toutes les initiatives

84 Soit a et b tels que a^n divise b^n .

Raisonnons par contradiction. Supposons que a ne divise pas b . Cela veut dire qu'il existe un facteur premier p dans la décomposition de a qui est soit absent de celle de b soit figurant dans a avec un exposant supérieur à celui figurant dans b .

Dans le premier cas si p est absent de b il sera absent de b^n et a^n ne pourra pas diviser b^n .

Dans le second cas, si α est l'exposant de p dans a et β celui de p dans b , $\alpha > \beta$ implique, $n\alpha > n\beta$. Il en résulte que l'exposant de p dans a^n est supérieur à celui de p dans b^n donc on aboutit encore à une contradiction. Dans tous les cas, a ne divise pas b aboutit à une contradiction donc a divise b .

85 $1221 = 3 \times 11 \times 37$.

$3^{37} - 3 = 3(3^{36} - 1)$ est divisible par 3 et aussi par 37 d'après le petit théorème de Fermat.

Regardons si 11 divise $3^{37} - 3$.

$3^{37} \equiv (3^5)^7 \times 3 \equiv (-1)^7 \times 3 \equiv -3 \pmod{11}$ donc $3^{37} - 3$ n'est pas divisible par 11.

Le PGCD est $3 \times 37 = 111$.

86 La décomposition en facteurs premiers de $n!$ ne comporte que des facteurs premiers strictement inférieurs à n . Donc $2n + 1$ qui est premier par hypothèse ne divise aucun de ces facteurs premiers donc il ne divise pas $n!$

87 • Soit p premier tel que $p^2 - 1 = 8k$ avec k premier. Donc $(p - 1)(p + 1) = 8k$.

k premier donc k divise $p - 1$ ou $p + 1$. Étudions les deux cas.

1^{er} cas : $p - 1 = kq$ avec q entier.

$p + 1 = kq + 2$ donc $kq(kq + 2) = 8k$ d'où $q(kq + 2) = 8$.

Il en résulte que q divise 8.

$q = 1$ implique $k = 6$: impossible

$q = 2$ implique $k = 1$: impossible

$q = 4$ implique $k = 0$: impossible

$q = 8$ implique $8k + 2 = 1$: impossible.

2^e cas : $p + 1 = kq$.

On en déduit : $q(kq - 2) = 8$ donc q divise 8.

$q = 1$ implique $k = 10$: impossible

$q = 2$ implique $k = 3$ et $q = 5$

$q = 4$ implique $k = 1$: impossible

$q = 8$ implique $8k - 2 = 1$: impossible.

Réciproquement $p = 5$ convient puisque $\frac{25 - 1}{8} = 3$ est bien premier.

88 • $p^2 + 2p - 8 = (p - 2)(p + 4)$.

Si $p > 3$ alors $p^2 + 2p - 8$ a deux diviseurs stricts donc n'est pas premier. Donc $p \leq 3$.

p est premier donc $p > 1$. $p = 2$ ne marche pas car alors $p^2 + 2p - 8 = 0$. Donc la seule solution est $p = 3$. Elle convient car $p + 2 = 5$ et $p^2 + 2p - 8 = 7$.

90 • 1. b^2 divise a^2 donc b divise a (voir n° 84). Donc $a = kb$ avec k entier. Il en résulte $c = k^2$.

2. Supposons que $pn = a^2$ et $qn = b^2$ avec p et q premiers.

On a donc : $pq n^2 = a^2 b^2$. D'après la question 1., pq est un carré et sa décomposition est évidemment pq ce qui est impossible si p et q sont distincts car les exposants de la décomposition d'un carré doivent être pairs. L'hypothèse de départ est donc à rejeter.

91 • Étudions les restes de la division de $n^2 + 2$ modulo 6.

n	0	1	2	3	4	5
$n^2 + 2$	2	3	0	5	0	3

On voit bien que $n^2 + 2$ ne peut être premier que dans le cas $n \equiv 3$ (modulo 6). Le problème est de savoir quelle proportion de valeur de n congrues à 3 modulo 6 on trouve dans l'intervalle $[6 ; 6k]$.

Les restes de la division de n par 6 constituent une suite périodique. Comme on démarre avec $n = 6$, la suite commence par 0 et se présente de la façon suivante :

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5... et à la fin on termine par 0 puisque $6k$ est multiple de 6.

n	6	7	8	9	10	11	12	...	...	$6k - 1$	$6k$
reste de n	0	1	2	3	4	5	0	...	...	5	0

De 6 à $6k - 1$ on a un nombre de valeurs de n qui est un multiple de 6 réparties en un nombre entier de cycles 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 donc chacun renferme une seule valeur congrue à 3 modulo 6. Donc on a exactement k valeurs qui peuvent être premiers (et $6k$ ne peut être premier).

92 • Appelons G la conjecture de Goldbach et P l'autre proposition du texte.

1. Montrons que $G \Rightarrow P$.

Soit n un nombre supérieur à 5.

1^{er} cas : n est impair.

On peut écrire $n = 3 + k$ où k est un nombre pair supérieur à 2 donc supérieur ou égal à 4. D'après G , $k = p + q$, p et q étant premiers. Donc $n = p + q + 3$ est bien la somme de 3 nombres premiers.

2^e cas : n pair.

Alors, $n = k + 2$. Le nombre k est pair lui aussi et $k \geq 4$. Donc d'après G , $k = p + q$ avec p et q premiers et $n = p + q + 2$. Ainsi n est bien somme de 3 nombres premiers.

2. $P \Rightarrow G$.

Soit n un entier pair. $n + 2$ est aussi pair. D'après P , $n + 2 = p + q + r$, avec p, q, r premiers.

Remarquons que p, q, r ne peuvent pas être impairs tous les trois car la somme $n + 2$ est paire donc parmi les nombres p, q, r il y a un ou bien 3 nombres pairs. Le seul nombre premier pair est 2 donc d'après ce qui précède, $n + 2 = p + q + 2$ ou bien $n + 2 = 2 + 2 + 2$.

Dans le premier cas, $n = p + q$ avec p et q premiers et dans le deuxième, $n = 2 + 2$. Dans les deux cas le nombre n est bien la somme de deux nombres premiers.

C'est nouveau au bac

(page 28)

93 Ligne 1 : réponses exactes : A et C.

Ligne 2 : réponses exactes : C.

En effet $k = (n + 2)(n + 7)$.

Ligne 3 : réponses exactes : A et B.

Ligne 4 : réponse exacte : B.

Ligne 5 : réponses exactes : B et C.

Ligne 6 : réponses exactes : B et C.

Ligne 7 : réponse exacte : A. A est fausse pour $p = 7$.

Ligne 8 : réponses exactes : B et C (nombres de Mersenne).

Ligne 9 : réponses exactes : B et C.

94 A 1. Vrai - 2. Vrai - 3. Faux? Ex. : $p = 5$, $a = 3$, $b = 4$ et $c = 12$. 5 divise $a^2 + b^2$ et $b^2 + c^2$ mais 5 ne divise pas $a^2 + c^2$.

B 1. Vrai - 2. Vrai - 3. Vrai. En effet :

$$1\ 806 = 43 \times 7 \times 3 \times 2.$$

1 806 est bien divisible par 42, 6, 2 et 1 - 4. Vrai.

95 1. Voir le cours.

2. p ne peut pas être pair donc $p \equiv 1$ ou $p \equiv 3 \equiv -1$ (mod 4).

3. Immédiat.

4. Si q était l'un des nombres p_i , q diviserait A et B donc 1 ce qui est impossible.

Si tous les diviseurs premiers de B étaient congrus à 1, B serait lui-même congru à 1 modulo 4 ce qui n'est pas le cas. Donc au moins l'un des facteurs premiers de B est congru à -1 mod 4. On a donc trouvé au moins un nombre congru à -1 mod 4 en dehors de l'ensemble des p_i ce qui contredit le fait qu'il en existe un nombre fini n fixé.

5. La conclusion de la question 4 montre que l'hypothèse selon laquelle le nombre des nombres premiers congrus à -1 mod 4 est fini. Il y a donc une infinité de nombres premiers de la forme $4n - 1$.

Activité (page 96)

1. A est un point invariant et A, M et M' ne sont pas alignés puisque $(\overline{AM}, \overline{AM'}) = \frac{\pi}{3}$.

Donc f n'est pas une homothétie.

2. Par $r : M \mapsto M_1$, par $h : M_1 \mapsto M'$ et, si on appelle M_2 le milieu de $[AM]$, par $h : M \mapsto M_2$ et par $r : M_2 \mapsto M'$.

Donc $f = h \circ r = r \circ h$,

$$AM' = \frac{1}{2} AM \text{ et } (\overline{AM}, \overline{AM'}) = \frac{\pi}{3}.$$

3. Pour $r : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 1 - 2i) + 1 + 2i$;

pour $h : z' = \frac{1}{2}(z - 1 - 2i) + 1 + 2i$.

$$\text{Alors } z' = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z' + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4} + \frac{6 - \sqrt{3}}{4}i.$$

4. a) Car r conserve les distances et h multiplie les distances par $\frac{1}{2}$.

b) Parce que r et h conservent les angles géométriques.

c) Parce que r et h conservent les angles orientés.

d) Car r et h conservent l'orthogonalité, r conserve les distances et h les multiplie par $\frac{1}{2}$.

e) Si O est le centre du cercle circonscrit :

$$OM = ON = OP,$$

et, par f , O devient O' avec $O'M' = O'N' = O'P'$.

Travaux dirigés (page 109)

TD 1

Premier exemple

1. $s : I \mapsto B$ donc le rapport est $\frac{AB}{AI} = 2$ et l'angle est $(\overline{AI}, \overline{AB}) = \frac{\pi}{3}$.

2. $s : J \mapsto N$, donc $BN = 2IJ$.

Deuxième exemple

On note s la similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $s(A) = I$, $s(C) = J$ et $s(E) = K$.

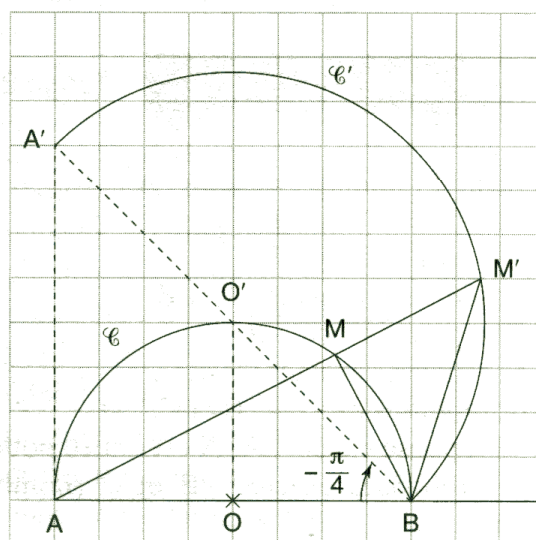
Or, A, C, E sont trois points alignés donc I, J, K sont également alignés.

TD 2

Premier exemple

1. $\widehat{AMB} = 90^\circ$ donc le triangle BMM' est rectangle isocèle en M.

2. Le rapport est $\sqrt{2}$ et l'angle $-\frac{\pi}{4}$, donc M' décrit le demi-cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par la similitude de s .



O' centre de $\mathcal{C}'$ est l'image de O par s . ($O' \in \mathcal{C}$) et $A' = s(A)$.

Deuxième exemple

$s : O \mapsto A$

$B \mapsto O$.

3. a) L'angle de s est $(\overline{OB}, \overline{AO}) = \frac{\pi}{2}$.

$$b) (\overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KA}) = (\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KO}) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc K est un point des cercles de diamètres [OA] et [OB] donc K est le projeté orthogonal de O sur [BA].

c) $s(B) = O$ donc l'image de d par s est la perpendiculaire à d passant par O, c'est donc Δ .

De même $s(O) = A$ donc l'image de Δ par s est la perpendiculaire à Δ passant par A.

Or B' est l'intersection de Δ et d donc son image est A' intersection des droites images.

Il en résulte que $(\overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{KA'}) = \frac{\pi}{2}$ donc le cercle de diamètre [A'B'] passe par le point K.

TD 3

1. a) Les égalités (1) entraînent que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables au sens de la classe de seconde.

b) Les côtés sont donc proportionnels et

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \quad (2)$$

$$2. a) s : A \rightarrow A' \\ B \rightarrow B' \\ C \rightarrow C''$$

$$d'où \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C''}{AC} \quad (3)$$

b) Il résulte de (2) et (3) que $A'C' = A'C''$.

3. a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C''})$ (angle de la similitude). (4)

b) D'après (1)

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C''}) \\ d'où (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C''}). \quad (5)$$

c) D'après (4) et (5) il résulte que

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C''}) + (\overrightarrow{A'C''}, \overrightarrow{AC}) = k2\pi$$

$$donc (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'C''}) = k2\pi.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'C''}$ sont donc colinéaires et de même sens. De plus, $A'C' = A'C''$ donc $C' = C''$. D'où le résultat.

Application

Il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. Son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $2 + i = -ai + b$

$$3i = a + b \text{ d'où } a = 2i \text{ et } b = i \text{ soit } z' = 2iz + i.$$

On remarque que s est la similitude de rapport 2,

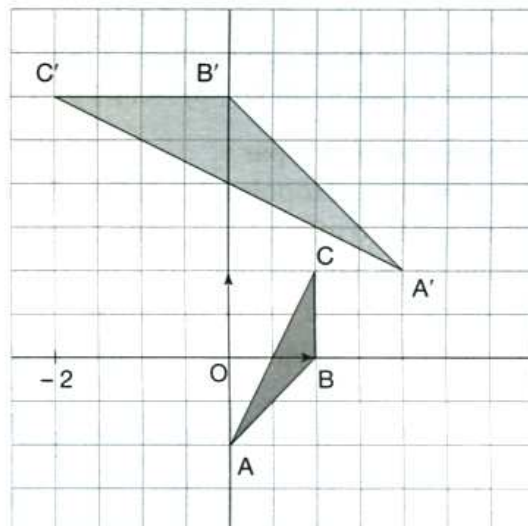
$$d'angle \frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \Omega \text{ d'affixe } -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

De plus l'image de C par s a pour affixe :

$$z' = 2i(1 + i) + i = -2 + 3i.$$

C'est le point C'.

Il résulte donc que le triangle ABC et A'B'C' sont directement semblables.



TD 4

$$1. g = \frac{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

2. La similitude s a pour centre O donc $z' = az$ ou $z' = a\bar{z}$ car le point O d'affixe o est invariant par s .

3. G' a pour affixe $g' = ag$ et $A'_1 \dots A'_n$ ont pour affixes respectives $aa_1 \dots aa_n$ d'où

$$g' = \frac{\alpha_1 a'_1 + \dots + \alpha_n a'_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \text{ d'où le résultat.}$$

4. La démonstration est identique.

TD 5

1. S' a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ et s a pour écriture complexe $z' = az + b$.

$$\text{Car : } z \xrightarrow{S} \bar{z} \xrightarrow{s} a\bar{z} + b \text{ d'où } s' = s \circ S.$$

2. La réflexion et la similitude directe transformant les droites en droites, les cercles en cercles, etc. donc il en est de même de leur composée.

2 Application

$$s_1 : z' = (1 + i)z + 4i \text{ et } s_2 : z' = 2i\bar{z} + 1 - i.$$

Les images de d et $\mathbb{C}$ par s_1

• d a pour équation $x + 2y - 2 = 0$ donc A d'affixe i et B d'affixe 2 sont deux points de d :

$A' = s_1(A)$ a pour affixe $a' = 5i - 1$ et $B' = s_1(B)$ a pour affixe $b' = 2 + 6i$. La droite d' est donc définie par $A'(-1; 5)$ et $B'(2; 6)$. Elle a pour équation :

$$x - 3y + 16 = 0.$$

• Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre I d'affixe $(1 - 2i)$ et pour rayon $\sqrt{2}$, donc I a pour image par s_1 le point d'affixe : $(1 + i)(1 - 2i) + 4i = 3 + 3i$.
 $|1 + i| = \sqrt{2}$ donc le cercle image a pour rayon 2.
 Ainsi son équation est $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Les images de d et $\mathcal{C}$ par s_2

• A a pour image d point A_2 d'affixe $3 - i$ et B a pour image B_2 d'affixe $1 + 3i$, donc d a pour image la droite (A_2B_2) d'équation : $2x + y - 5 = 0$.

• De même I a pour image I_2 d'affixe $2i(1 + 2i) + 1 - i = i - 3$ et $|2i| = 2$ donc le rayon du cercle image est $2\sqrt{2}$.

Ainsi $\mathcal{C}_2$ a pour équation $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$.

TD 6

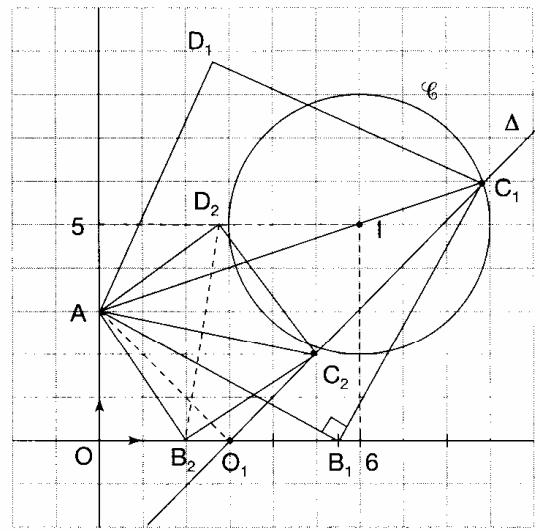
1 Analyse du problème

a) On connaît alors une diagonale du carré donc on en déduit B et D.

b) • s a pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

• Il en résulte que $s(B) = C$, que C est un point de la droite Δ image de d par s .

2 1.



O a pour image $O_1(3 ; 0)$ par s , donc Δ est la perpendiculaire en O_1 à (O_1A) .

Son équation est $x - y - 3 = 0$.

2. La distance de I à s est égale à :

$$\frac{|6 - 5 - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 3.$$

Donc Δ coupe en deux points distincts C_1 et C_2 .

3. Voir figure.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 114)

1. Transformations du plan

1 • $r\left(O ; -\frac{\pi}{3}\right)$ • $t_{\overline{BA}}$ • $h\left(I ; -\frac{1}{2}\right)$.

2 a) $z' = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}$.

b) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - 1 + i)$.

c) $z' = \left(\frac{1-i}{4}\right)[z - 2 - 3i]$.

d) $z' = \frac{i}{2}\bar{z} + \frac{1}{2}(1 - i)$.

3 1. $x' + iy' = x - 2y + 1 + 2ix + iy - i$
 $= (x + iy) + 2i(x + iy) + 1 - i$

d'où $z' = (1 + 2i)z + 1 - i$.

2. Un point Ω d'affixe ω est invariant si et seulement si $\omega = (1 + 2i)\omega + 1 - i$

soit $\omega = -\frac{1}{2i}(1 - i) = \frac{i}{2}(1 - i) = \frac{1}{2}(1 + i)$

d'où le résultat.

3. $z = \frac{1}{1 + 2i}[z' - (1 - i)] = \frac{1 - 2i}{5}[z' - (1 - i)]$

donc T^{-1} a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{1}{5}(1 - 2i)z + \frac{1}{5}(1 + 3i).$$

4 Corrigé dans le manuel.

5 $z \xrightarrow{s} j\bar{z} + 1 - j \xrightarrow{s} j[j\bar{z} + 1 - j] + 1 - j$

soit $z \mapsto jjz + j - jj + 1 - j$

or $jj = |j|^2 = 1$ d'où le résultat.

6 Plus généralement $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3} + \theta$.

a) $r_2 \circ r_1$ est l'identité si et seulement si :

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

b) $r_2 \circ r_1$ est la symétrie de centre O si et seulement si :

$$\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

7 1. a) $T_1(K) = T_2(K)$ si et seulement si
 $(\sqrt{3} + i)z = (1 - \sqrt{3})z + 3$.

Donc K a pour affixe $\frac{3}{8}[(\sqrt{3} - 1) - i(\sqrt{3} + 1)]$.

b) $L = T_1(K)$. Donc L a pour affixe $\frac{3}{2}(1 - i)$.

2. $T_2 \circ T_1^{-1}(L) = T_2(K) = L$

et $T_1 \circ T_2^{-1}(L) = T_1(K) = L$.

8 a) $z \xrightarrow{f} -2z + i \xrightarrow{g} -2iz - 4$.

$z \xrightarrow{g} iz - 3 \xrightarrow{f} -2iz + 6 + i$.

b) $z \xrightarrow{f} \bar{z} + i \xrightarrow{g} (1 - i)\bar{z} + i + 1$.

$z \xrightarrow{g} (1 - i)z \xrightarrow{f} (1 + i)\bar{z} + i$.

2. Similitudes : définition

9 Corrigé dans le manuel.

10 a) $|z_{M'} - z_{N'}| = |2z_M + 3 - 2z_N - 3i| = 2|z_M - z_N|$
d'où $M'N' = 2MN$ et T est une similitude de rapport 2.
De même on démontre :

b) T est une similitude de rapport $2\sqrt{2}$.

c) T est une similitude de rapport 1.

d) T est une similitude de rapport $\sqrt{5}$.

11 1. a) $M \xrightarrow{r(O; \frac{\pi}{3})} M_1$

b) $M_1 \xrightarrow{h(O; -\frac{1}{2})} M'$

2. Il résulte de la question (1) que :

$M \xrightarrow{r} M_1 \xrightarrow{h} M'$

$N \xrightarrow{r} N_1 \xrightarrow{h} N'$

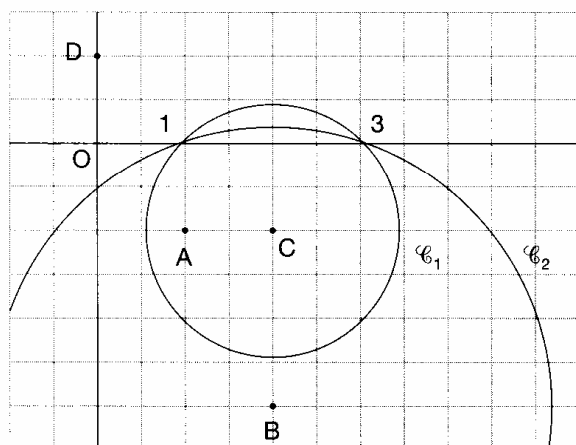
Donc $M_1N_1 = MN$ et $M'N' = \frac{1}{2}M_1N_1$ donc

$$M'N' = \frac{1}{2}MN$$

et f est une similitude de rapport $\frac{1}{2}$.

12 Corrigé dans le manuel.

13 1.



2. a) $O \mapsto C$
 $A \mapsto B$ Le rapport de Δ est $\frac{CB}{OA} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

b) $O \mapsto C$
 $D \mapsto E$ donc $CE = \sqrt{2}$ $OD = \sqrt{2}$.

Le point E appartient donc au cercle $\mathcal{C}_1$ de centre C et de rayon $\sqrt{2}$.

c) $A \mapsto B$
 $D \mapsto E$ or $AD = \sqrt{5}$ donc $BE = \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{10}$.

Le point E appartient au cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B et de rayon $\sqrt{10}$.

3. Une solution possible est d'écrire les équations de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ à savoir :

$$\mathcal{C}_1 : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \quad (1)$$

$$\mathcal{C}_2 : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10. \quad (2)$$

On déduit de (1) et (2) que

$$(y + 3)^2 - (y + 1)^2 = 8 \text{ d'où } y = 0$$

donc $(x - 2)^2 = 1$ et $x = 1$ ou $x = 3$.

14 1. s a pour rapport $|3i| = 3$.

2. $3i(1 - i) - 2(1 + i) = i + 1$ donc I est invariant par s.

3. a) $3i \times 2 - 2 - 2i = 4i - 2$.

b) $\overline{AI}$ a pour affixe $(i - 1)$ et $\overline{A'I}$ a pour affixe $3 - 3i$
donc $\overline{A'I} = -3\overline{AI}$ et les points A, I, A' sont alignés.

3. Caractérisation complexe d'une similitude

15 1. Le rapport est $|2 + 3i| = \sqrt{13}$.

2. Le point Ω d'affixe ω est invariant si et seulement si
 $\omega = (2 + 3i)\omega + 5(1 + i)$ soit $\omega = -2 + i$ donc Ω est unique.

16 Corrigé dans le manuel.

17 1. On pose $z = x + iy$ d'où
 $x + iy = (1 + 2i)(x - iy) + 5 - 6i$ soit :

$$x + iy = (x + 2y + 5) + i(2x - y - 6)$$

d'où $2y + 5 = 0$ et $2x - 2y = 6$.

Il en résulte que le point I d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ est le seul point invariant.

2. Donc s n'est pas une réflexion.

18 a) $k = 2$ le point invariant a pour affixe $-2 + i$.

b) $k = \sqrt{5}$ et le point invariant a pour affixe $2 + \frac{3}{2}i$.

c) $k = 2$ et le point invariant a pour affixe $1 + i$.

d) $k = 1$ la droite d'équation $x - y - 1 = 0$ est l'ensemble des points invariants. La transformation est la réflexion d'axe Δ .

e) $k = 5$ et l'affixe du point invariant est $(-3i)$.

19 1. f a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ et r a pour écriture complexe $z' = iz$ donc $s = r \circ f$.

2. $z \xrightarrow{r} iz \xrightarrow{f} -i\bar{z}$ donc $r \circ f \neq f \circ r$.

3. a) $i(1 - i) = 1 + i$ donc A est invariant par s. De plus O est invariant, donc s est une réflexion d'axe (OA).

20 1. σ a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ et s a pour écriture complexe $z' = -z + 2i$.

2. a) $z \xrightarrow{s} -z + 2i \xrightarrow{\sigma} -\bar{z} - 2i$.

b) La transformation s n'a pas de point invariant. Ce n'est donc pas une réflexion.

4. Les similitudes directes

21 $x' + iy' = -2y + 1 + 2ix + 4i = 2i(x + iy) + 1 + 4i$
soit $z' = 2iz + 1 + 4i$.

T est la similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $-\frac{7}{5} + \frac{6}{5}i$.

22 Idem au 21.

T est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

23 Idem au 21.

T est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

24 $2i = (1 + i)a + b$ et $-1 - i = ia + b$
d'où $a = 1 + 3i$ et $b = 2 - 2i$
soit $z' = (1 + 3i)z + 2 - 2i$.

25 En opérant comme à l'exercice 24 on obtient :
 $z' = (1 - i)z - 1 - i$.

26 1. a) Le rapport de s est $\sqrt{2}$.

b) $s(B)$ a pour affixe $2i$ donc $s(B) = B$.

2. a) $\overline{BM}$ a pour affixe $z - 2i = Z_1$
et $\overline{MM'}$ a pour affixe $iz + 2 = Z_2$.
Il en résulte que $Z_2 = iZ_1$.

b) Donc $|Z_1| = |Z_2|$ et $MB = MM'$
d'autre part $(\overline{BM}, \overline{MM'}) = \frac{\pi}{2}$.

Le triangle BMM' est donc rectangle isocèle.

27 1. $A \mapsto A' \quad B \mapsto B'$

donc $5 + i = ai + b$

et $1 + i = -a + b$.

Il en résulte que $a = 2(1 - i)$, $b = 3 - i$

soit $z' = 2(1 - i)z + 3 - i$.

2. C' doit être l'image de C par s , son affixe est donc $2(1 - i)(-2i) + 3 - i = -1 - 5i$.

28 $\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'} = A'B' \times A'C' \times \cos(\overline{A'B'}, \overline{A'C'})$
or $A'B' = kAB$; $A'C' = kAC$; $(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}) = (\overline{AB}, \overline{AC})$
d'où
 $\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'} = k^2 AB \times AC \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = k^2 \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

5. Forme réduite d'une similitude directe

29 a) s est la similitude directe de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

b) s est la similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 et de centre Ω d'affixe $\frac{1}{5}(-1 + 2i)$.

30 a) s est l'homothétie de rapport 5 et de centre I d'affixe $\frac{3}{4}i$.

b) s est l'homothétie de rapport -3 et de centre I d'affixe $1 - 2i$.

31 Corrigé dans le manuel.

32 a) $z' = iz + 2i$ donc s est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I d'affixe $(-1 + i)$.

b) $z' = \frac{1}{2}(1 - 3i)z$ donc s est la similitude de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{10}}{2}$ et d'angle θ tel que $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

33 a) s est la similitude d'angle $\frac{\pi}{3}$, de rapport 2 et de centre I d'affixe $\frac{i\sqrt{3}}{3}$.

b) s est la similitude de rapport $\sqrt{5}$, d'angle θ tel que $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Son centre I a pour affixe $\frac{1}{4}(7 - i)$.

34 $z' - (1 + i) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1 - i)$
soit $z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3}(1 - i)$.

35 $z' - (-1 + 2i) = (1 - i)[z - (-1 + 2i)]$
 $z' = (1 - i)z - i - 2$.

36 $z' - (1 - i) = -3[z - (1 - i)]$
 $z' = -3z + 4(1 - i)$.

37 a) Le rapport est $\frac{BC}{BI} = 2$
et l'angle $(\overline{BI}, \overline{AC}) = -\frac{\pi}{3}$.

b) Le rapport $\frac{IC}{IA} = \sqrt{3}$ et l'angle $(\overline{IA}, \overline{IC}) = -\frac{\pi}{2}$.

c) Le rapport $\frac{AC}{AG} = \sqrt{3}$ et l'angle $(\overline{AG}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{6}$.

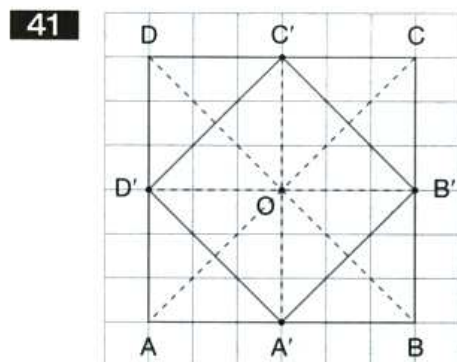
38 Corrigé dans le manuel.

39 $A(i) \mapsto A'(2 + 2i) \quad B(3i) \mapsto B'(-1 - i)$
 $\begin{cases} 2 + 2i = ai + b \\ -1 - i = 3ai + b \end{cases}$ d'où $a = \frac{3}{2}(i - 1)$ et $b = \frac{7}{2}(1 + i)$.

Donc s est la similitude de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $\frac{7}{17}(1+4i)$.

40 s a pour écriture complexe $z' = (1+i)z$.
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre I d'affixe $1+2i$ donc $I' = s(I)$ a pour affixe $(-1+3i)$.
 $\mathcal{C}'$ a pour équation :

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4.$$



Par s :
 $A \mapsto A'$
 $B \mapsto B'$
 $C \mapsto C'$
 $D \mapsto D'$

42 $h = h(0; -2)$; $r = r(0; \frac{2\pi}{3})$; $s = r(0; \pi)$.

- a) $h \circ s$ est l'homothétie de centre O et de rapport 2.
b) $h \circ r$ est la similitude de centre O , de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
c) $r \circ s$ est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

43 $r \circ h$ est la similitude de centre O , de rapport 3 et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

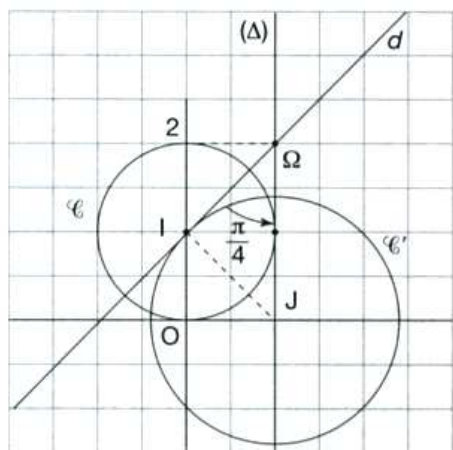
44 Corrigé dans le manuel.

45 1. s est la similitude de centre Ω d'affixe $\frac{1}{5}(2+i)$ de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. $A' = s(A)$ a pour affixe $(-2-4i)$ et $B' = s(B)$ a pour affixe $(-14+5i)$ donc la droite $(A'B')$ image de (AB) a pour équation $3x' + 4y' + 22 = 0$.

3. $AB = 5$ donc $A'B' = 15$ d'où $\mathcal{C}'$ a pour équation $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 225$.

46 1. s est la similitude de centre Ω d'affixe $1+2i$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.



2. a) La droite (AB) notée d passe par Ω donc son image par s est la droite Δ d'équation $x = 1$.

b) Le point I a pour image J et le rayon de $\mathcal{C}'$ est $\sqrt{2}$, donc son équation est :

$$(x-1)^2 + y^2 = 2.$$

47 s a pour écriture complexe

$$z' = \frac{i}{2}z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

a) $B(-2)$ et $C(i)$ sont deux points de d .

$B' = s(B)$ a pour affixe $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ et

$C' = s(C)$ a pour affixe $-\frac{3}{2}i$.

Donc l'image de d a pour équation $4x + 2y + 3 = 0$.

b) $\mathcal{C}$ a pour équation :

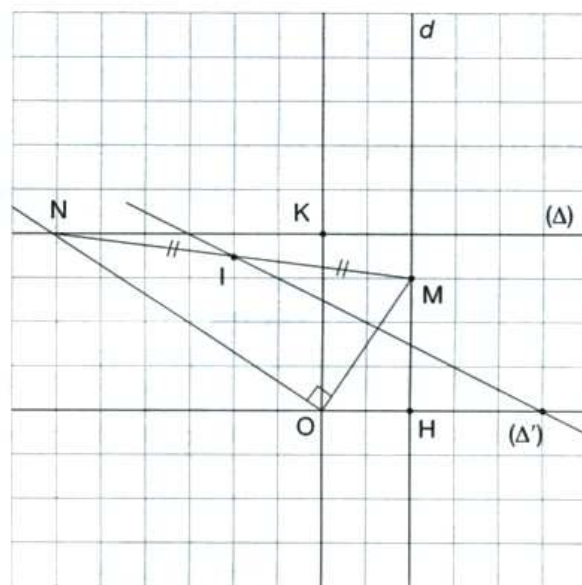
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

Son centre I a pour affixe $(-2+i)$ et son rayon est $\sqrt{2}$.

$I' = s(I)$ a pour affixe $-\frac{5}{2}i$ donc $\mathcal{C}'$ a pour équation

$$x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

48



1. La similitude s a pour écriture complexe $z' = 2iz$ donc $s(H)$ est K d'affixe $2i$ et l'image de d est la droite Δ d'équation $y = 2$ perpendiculaire en K à (OK) .

2. b) N a pour affixe $-2m + 2i$.

3. a) I a pour affixe $\frac{1-2m}{2} + i\frac{m+2}{2}$.

b) $2\left(\frac{1-2m}{2}\right) + \frac{4(2+m)}{2} = 5$

donc I est un point de Δ' .

49 1. $\begin{cases} B \mapsto A \\ A \mapsto C \end{cases}$ donc $k = \frac{AC}{AB}$ et $\theta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

2. a) Comme $s(B) = A$ et $s(A) = C$

$$(\overrightarrow{\text{IB}}, \overrightarrow{\text{IA}}) = (\overrightarrow{\text{IA}}, \overrightarrow{\text{IC}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

b) Il en résulte que I appartient aux cercles de diamètres respectifs [AB] et [AC]. Ces cercles ont en commun H et A. Or A n'est pas invariant ($s(A) = C$) donc le centre I est en H.

3. a) La droite (HM) a pour image (HN) et la droite (AB) a pour image (AC) donc le point M intersection de (AB) et (HM) a pour image l'intersection des droites (HN) et (AC), c'est-à-dire N.

50 1. s est la similitude centre C, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. a) $r(B) = D$ donc l'image de $\mathcal{C}_1$ est $\mathcal{C}_2$.

b) La droite (CM) a pour image la droite (CN).

c) Comme M est commun à $\mathcal{C}_1$ et (CM) son image appartient à $\mathcal{C}_2$ et (CN) en étant distinct de C si M est distinct de C donc l'image de M est N et le triangle MCN est rectangle isocèle en C .

3. Le lieu de I est le cercle (Γ) image de $\mathcal{C}_1$ par $s\left(C, -\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Dans ce cas l'image de B est le point O centre du carré ABCD et l'image de A est D donc (Γ) est le cercle circonscrit au carré ABCD.

51 Première méthode

a) $\left| (1-i) \left(z + \frac{2-i}{1-i} \right) \right| = \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} \left| z + \frac{3+i}{2} \right| = \sqrt{2}$.

Il en résulte que $\left| z + \frac{3+i}{2} \right| = 1$.

b) On note I le point d'affixe $-\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$. L'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon 1 car $IM = 1$.

Deuxième méthode

1. s est la similitude de centre I d'affixe $-2i - 1$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. a) $OM' = \sqrt{2}$ donc M' appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b) O_1 qui a pour image O par s a pour affixe z_0 telle que :

$$0 = (1 - i)z_0 + 2 - i \text{ soit } z_0 = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

c) $O_1 \mapsto O$
 $M \mapsto M'$ donc $OM' = \sqrt{2}$ $O_1M = \sqrt{2}$

donc $O_1M = 1$ et M décrit le cercle de centre O_1 (ou I) et de rayon 1.

52 1. $a + b = 0$.

2. a) $C \xrightarrow{s_1} U.$

s_1 a pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $u - a = \frac{1}{2} (1 + i) (c - a)$

soit $u = \frac{1}{2}(1 + i)c + \frac{1}{2}(1 - i)a$.

$$\mathbf{b)} \quad C \xrightarrow{s_2} V.$$

s_2 est la similitude de centre B d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il vient

$$v - b = \frac{1}{2} (1 - i) (c - b)$$

soit $v = \frac{1}{2}(1-i)c + \frac{1}{2}(1+i)b$.

c) Or $iu = \frac{1}{2}(-1 + i)c + \frac{1}{2}(1 + i)a.$

De plus $b = -a$ donc

$$v = \frac{1}{2}(1-i)c - \frac{1}{2}(1+i)a$$

soit $v = -iu$

donc $|v| = |u|$ soit $OU = OV$

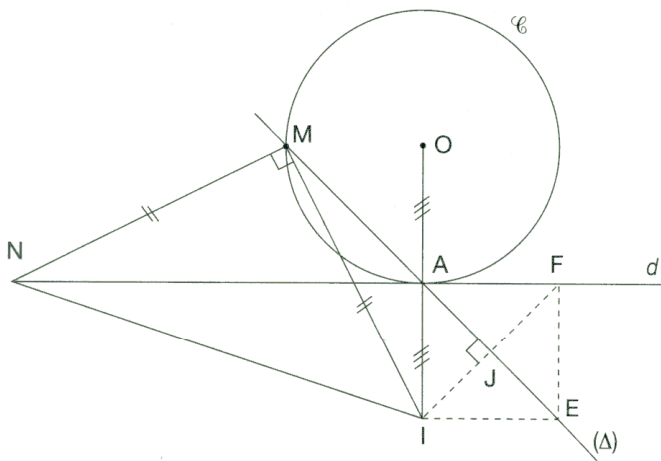
$$(\arg\left(\frac{v}{u}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ soit } (\overrightarrow{\text{OU}}, \overrightarrow{\text{OV}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Il résulte que le triangle VOU est rectangle isocèle.

53 1. a) L'angle de s est $-\frac{\pi}{4}$ et le rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) N est un point de d donc M appartient à l'image de d par s . Notons Δ cette droite (voir synthèse).

2. Synthèse :

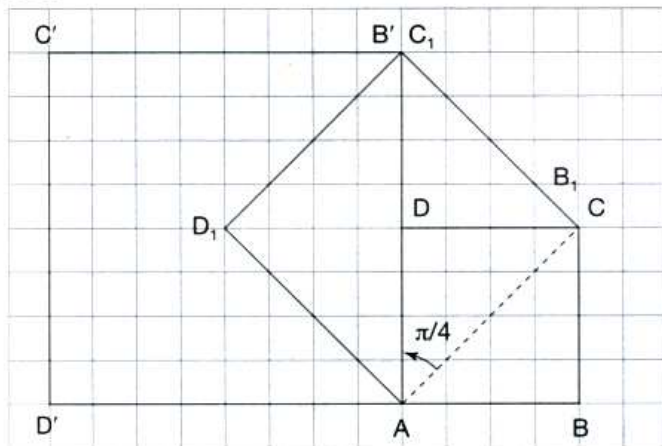


c) L'image de d par s est la droite (AJ) car $s(A) = J$ centre du carré IEFA.

d) M est l'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ ($M \neq A$) d'où la construction de N .

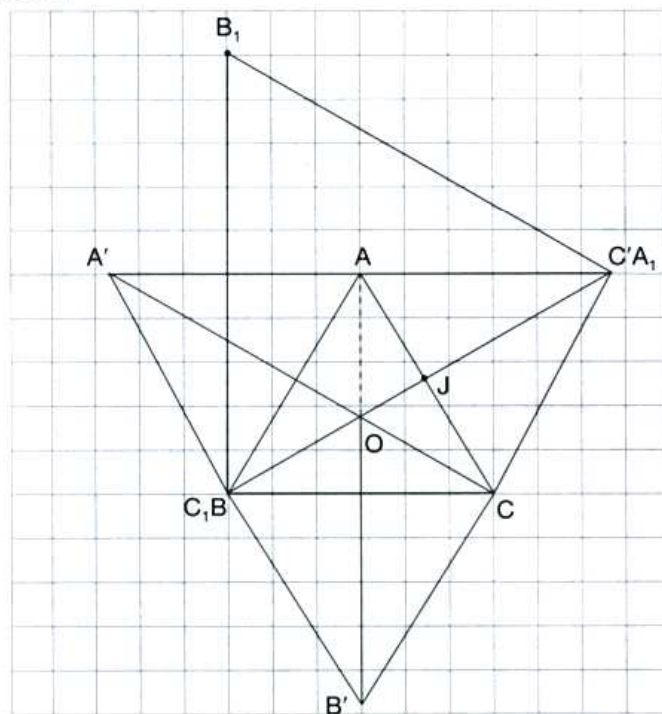
Images d'ensemble

54



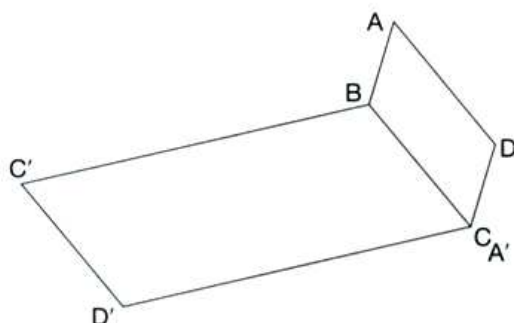
$AB'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par $s\left(A; \frac{\pi}{2}; 2\right)$ et $AB_1C_1D_1$ l'image de $ABCD$ par $s\left(A; \frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$.

55



$A'B'C'$ est l'image de ABC par $s\left(0; 2; -\frac{\pi}{3}\right)$. $A_1B_1C_1$ est l'image de ABC par $s\left(J; \sqrt{3}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

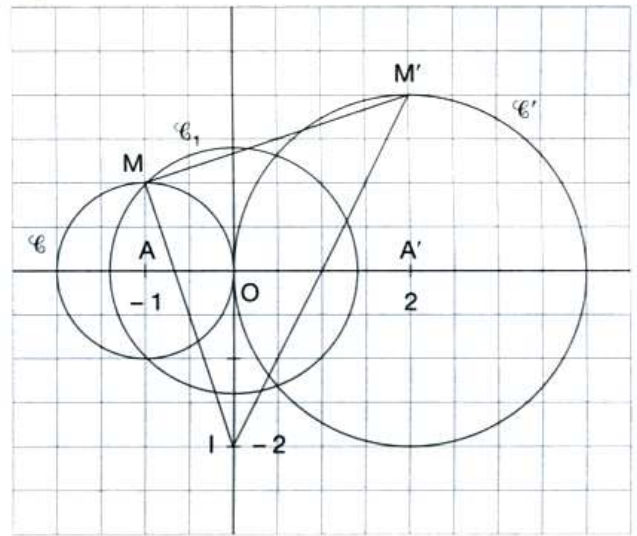
56



1. s est la similitude de centre B , d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de rapport 2.

2. $A'BC'D'$ est l'image de $ABCD$ par s .

57

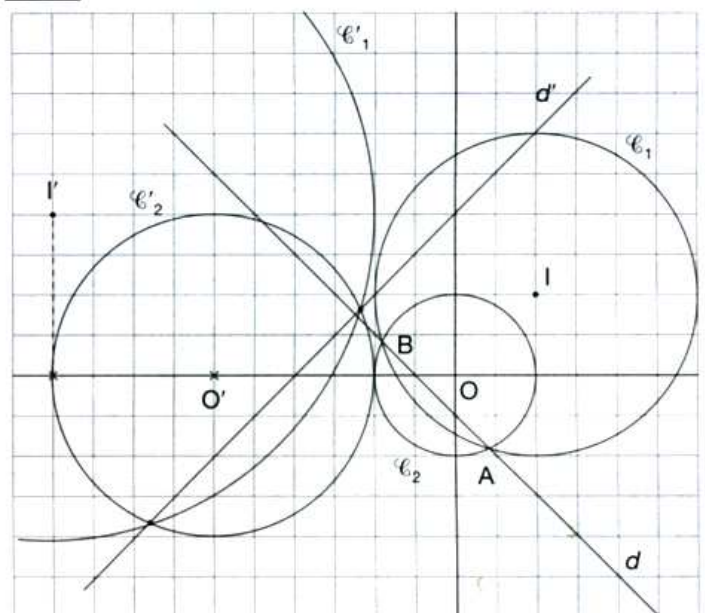


1. Par $s\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ l'image de A' est O donc $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

2. Si IMM' est rectangle isocèle direct de sommet M , $M' \xrightarrow{s\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)} M$ donc M appartient à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$ d'où la construction.

Il existe un second triangle IMM' .

58



1. a) $s(I)$ centre de $\mathcal{C}_1$ a pour affixe $-5 + 2i$ et le rayon de $\mathcal{C}_1$ est 4.

b) L'image de O est O' d'affixe -3 et le rayon de $\mathcal{C}_2$ est 2 d'où la construction.

2. L'image de d est la droite d' passant par les points communs à $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$. La droite d' est perpendiculaire à la droite d .

Déterminer une similitude

59 • 1. Pour tout réel λ , les points A, B, C sont distincts deux à deux d'où l'existence d'une unique similitude.

2. a) $3 - i = a(-1 + 2i) + b$

$7 + \lambda i = a(3 - i) + b$.

Il en résulte que

$$a = \frac{13 - 3\lambda}{25} + \frac{4}{25}(4 + \lambda)i.$$

b) s est une translation si et seulement si $a = 1$

$13 - 3\lambda = 25 \quad \lambda = -4$ et dans ce cas $\frac{4}{25}(4 + \lambda) = 0$.

Donc s est une translation pour $\lambda = -4$.

s est une rotation si et seulement si $|a| = 1$

soit $\frac{(13 - 3\lambda)^2 + 16(4 + \lambda)^2}{25^2} = 1$.

Ou encore $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$.

On obtient $\lambda = -4$ (translation) et $\lambda = 2$.

Pour $\lambda = 2$, $|a| = 1$ avec $a = \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$.

Dans ce cas s est une rotation.

c) s est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\lambda = \frac{13}{3}$, dans ce cas $a = \frac{4}{3}i$.

60 • 1. s a pour écriture complexe $z' = 2iz$

donc I a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2} = \left(\frac{2i + 1}{2}\right)z$.

2. La transformation $z \mapsto z_I = \left(\frac{1}{2} + i\right)z$ est une simili-

tude de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et d'angle θ tel que

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ donc $\theta \approx 1,11$ radians.

61 • 1. a) f est une translation si et seulement si

$u^2 = 1$ soit $\begin{cases} u = 1 \text{ dans ce cas } f \text{ est l'identité} \\ \text{ou} \\ u = -1 \text{ dans ce cas } f \text{ est une translation} \\ \text{de vecteur } \vec{w} \text{ d'affixe } -2 \end{cases}$

b) f est une rotation si et seulement si $u = e^{i\theta}$ avec

$e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ soit $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\cos \frac{5\pi}{4}$ donc $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

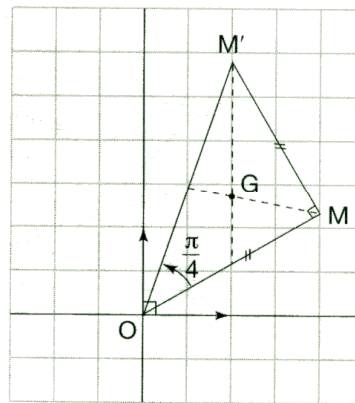
et $u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

c) f est une homothétie de rapport -2 si et seulement si $u^2 = -2$ donc $u_1 = i\sqrt{2}$ et $u_2 = -i\sqrt{2}$.

2. Si $u = 1 - i$, $u^2 = -2i$ et $z' = -2iz - i$

donc s est une similitude de rapport 2, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

62 •



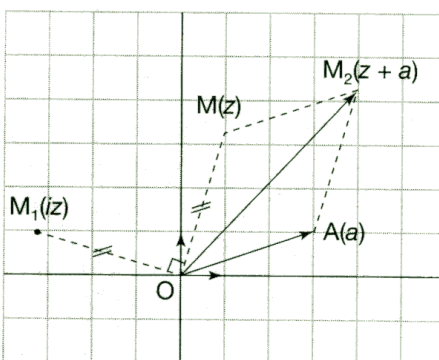
1. a) $M \xrightarrow{s\left(0; \frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)} M'$
donc $z' = (1 + i)z$.

b) L'affixe z_G est donnée par $\frac{1}{3}[z + (1 + i)z] = \frac{2 + i}{3}z$.

2. Il résulte de la question précédente que G est l'image de M par la similitude de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{5}}{3}$ et

d'angle θ tel que $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, donc $\theta \approx 0,46$ radian.

63 •



1. M_1 est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et M_2 est tel que $\vec{OM}_2 = \vec{OA} + \vec{OM}$.

2. $z \xrightarrow{T_2} z + a \xrightarrow{T_1} iz + ai$.

Un point Ω d'affixe w est invariant par $T_1 \circ T_2$ si et seulement si :

$$w = iw + ai$$

soit $w = \frac{ai(1 + i)}{2} = -\frac{a}{2} + i\frac{a}{2} = \frac{1}{2}(-1 + i)a$

donc Ω est l'image de A par la similitude de centre O,

d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

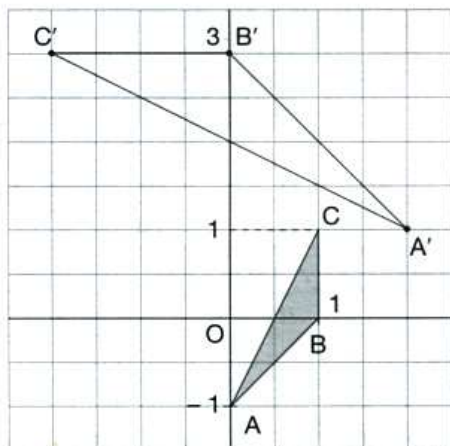
3. $z_{M'} = iz + z + a = (1 + i)z + a$.

a) s est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre I d'affixe ai .

b) I est donc l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer avec une similitude

64



Notons s la similitude telle que

$$A \mapsto A'$$

$$B \mapsto B'$$

alors

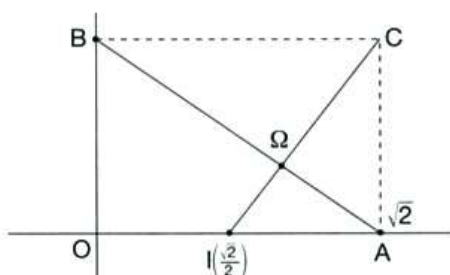
$$2 + i = -ai + b$$

$$3i = a + b.$$

Il en résulte que $a = 2i$ et $b = i$ donc $z' = 2iz + i$.

L'image de C par s a pour affixe $2i(1 + i) + i = -2 + 3i$. Donc $s(C) = C'$ et les deux triangles sont directement semblables.

65



$$B \mapsto C$$

$$C \mapsto A$$

1. Si $z' = az + b$ est l'écriture complexe de s alors

$$\sqrt{2} + i = ai + b.$$

$$\sqrt{2} = a(\sqrt{2} + i) + b.$$

Il en résulte que $a = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

$$\text{d'où } z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}iz + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

2. A a pour image I car $-\frac{\sqrt{2}}{2}i \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{s} A$$

$$C \xrightarrow{s} A \xrightarrow{s} I$$

$s \circ s$ est une homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$ donc Ω est aligné avec B et A d'une part et C et I d'autre part.

66 • 1. a) Le triangle ABC est isocèle en B et Ω est donc un point de l'axe des abscisses. Soit x son abscisse $\Omega B^2 = \Omega A^2$ donc $(14 - x)^2 = (-4 - x)^2 + 36$. Il résulte que $x = 4$ et Ω a pour affixe 4.

b) Voir figure ci-dessous.

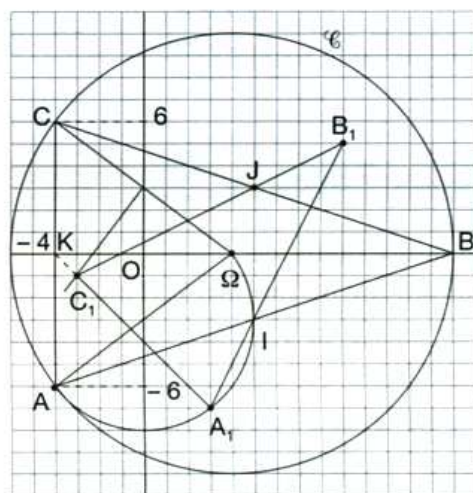
2. s a pour écriture complexe $z' - 4 = \frac{1}{2}(1 + i)(z - 4)$

soit $z' = \frac{1}{2}(1 + i)z + 2 - 2i$ donc A_1 a pour affixe

$$\frac{1}{2}(1 + i)(-4 - 6i) + 2 - 2i = 3 - 7i,$$

de même on trouve que B_1 a pour affixe $9 + 5i$ et C_1 a pour affixe $-3 - i$.

3. I a pour affixe $5 - 3i$. Donc $\overline{A_1 I}$ a pour affixe $2 + 4i$ et $\overline{A_1 B_1}$ a pour affixe $6 + 12i$.



Il en résulte que $\overline{A_1 B_1} = 3 \overline{A_1 I}$. D'où l'alignement des points A_1, I, B_1 . La démonstration est identique pour les points B_1, J, C_1 d'une part et les points C_1, A_1, K d'autre part.

67 • 1. $N \mapsto N$ et $M \mapsto B$ avec l'angle de la similitude est $(\overline{NM}, \overline{NB})$. Dans le triangle AMM' , le point B est l'orthocentre donc $(\overline{NM}, \overline{NB}) = -\frac{\pi}{2}$.

Le rapport de s est $\frac{NB}{NM}$. Or les triangles ANB et

$M'NM$ sont semblables donc $\frac{NB}{NM} = \frac{AB}{M'M} = \frac{AB}{2MH}$

or $MH^2 = HA \cdot HC$ donc $MH = 4$ et $\frac{NB}{NM} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

2. a) L'image de d est la droite perpendiculaire en B à d , c'est-à-dire AC (car $s(M) = B$).

L'image de NM' est (AM).

b) Il résulte de la question précédente que l'image de M' est l'intersection des droites (AC) et AM, c'est donc A.

3. $M \mapsto B$ et $M' \mapsto A$. Comme H est le milieu de $[MM']$ son image est le milieu K de $[AB]$.

La droite (NH) a donc pour image (NK) et (NK) est perpendiculaire à (NH). Il en résulte que (NH) est tangente en N au cercle de diamètre $[AB]$ qui a pour centre K.

68 • 1. a) f a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{b) } r - m = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (n - m)$$

$$\text{soit } r - m = \frac{1}{2} (1 - i)n - \frac{1}{2} (1 - i)m$$

$$\text{donc } r = \frac{1}{2} (1 - i)n + \frac{1}{2} (1 + i)m.$$

$$\text{2. a) } u - s = \frac{1+i}{2} (q - n) + \frac{1-i}{2} (m - p). \quad (1)$$

$$t - r = \frac{1+i}{2} (p - m) + \frac{1-i}{2} (q - n). \quad (2)$$

Il résulte de (1) et (2) que $u - s = i(t - r)$.

b) $u - s$ est l'afixe de $\overline{SU}$ et $t - r$ celle de $\overline{RT}$ donc

comme $|u - s| = |t - r|$ et $\arg \frac{u - s}{t - r} = \frac{\pi}{2}$, $SU = TR$ et

$$(\overline{RT}, \overline{SU}) = \frac{\pi}{2} \text{ d'où le résultat.}$$

Lieux géométriques

69 • Première méthode

1. s est la similitude de rapport 2, d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et de centre I d'afixe $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)$.

2. a) $s(M) = M'$ avec $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$ donc $|\overline{OM'}| = 4$.

b) L'ensemble des points M' est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 4. Donc l'ensemble E des points M est le cercle de centre O' tel que $s(O') = O$ et de rayon 2.

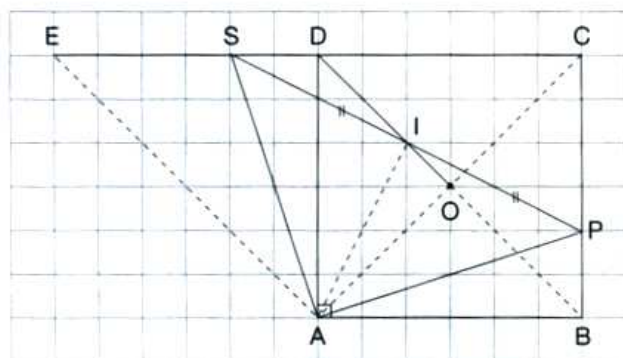
Deuxième méthode

$$\text{1. a) } |1 - i\sqrt{3}| \left| z - \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}} \right| = 4.$$

$$\text{soit } 2|z - i| = 4 \text{ donc } |z - i| = 2.$$

L'ensemble des points M est donc le cercle de centre O' d'afixe i et de rayon 2.

70 • 1. a) $r(B) = D$ et $r(C) = E$.

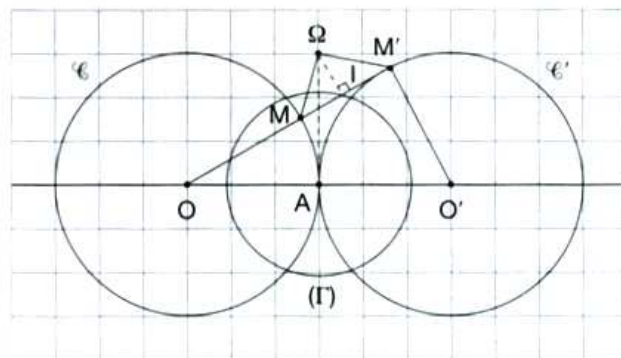


Donc l'image du segment $[BC]$ et le segment $[DE]$.
De plus l'image de (AP) est (AS) donc l'image de P est l'intersection de (DE) et (AS) soit S .
Le triangle PAS est donc rectangle isocèle.
b) Le point S décrit donc le segment $[DE]$.

2. a) s a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

b) L'ensemble des points est donc l'image du segment $[BC]$ par s , c'est-à-dire $[OD]$.

71 •



1. $r(O) = O'$ et $(\overline{\Omega O}, \overline{\Omega O'}) = \frac{\pi}{2}$ donc le centre Ω appartient à la tangente commune en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et il est tel que le triangle $\Omega OO'$ est rectangle isocèle direct en Ω .

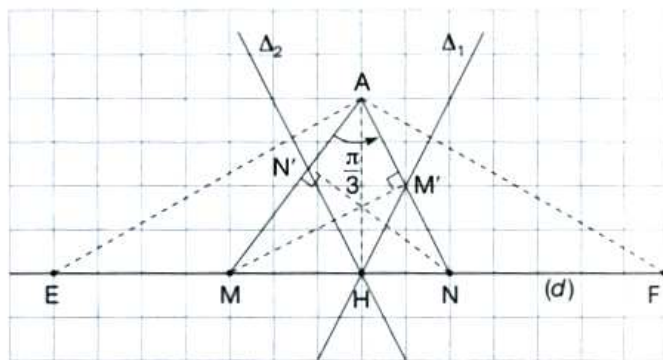
L'image de M est M_1 tel que $(\overline{OM}, \overline{OM_1}) = \frac{\pi}{2}$ avec $M_1 \in \mathcal{C}'$ donc $M_1 = M'$.

2. I est l'image de M par la similitude s de centre Ω , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Le lieu de I est donc le cercle Γ centré en $A = s(O)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2} R$.

4. $O \mapsto A$
 $M \mapsto I$ donc $(\overline{OM}, \overline{AI}) = \frac{\pi}{4}$.

72 •



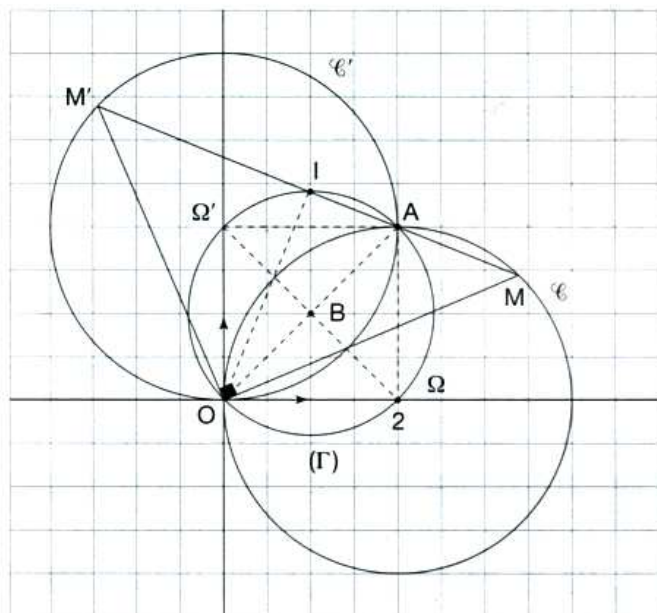
M' est l'image de M par $s_1\left(A; \frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$ et N' celle de N par $s_2\left(A; -\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Donc les lieux géométriques de M' et N' sont les droites Δ_1 et Δ_2 images respectives de d par s_1 et s_2 .

De plus si on construit E et F de d tels que AEH et HAF sont deux demi-triangles équilatéraux, il vient :

$$H = s_1(E) \text{ et } s_2(F) = H.$$

Donc Δ_1 et Δ_2 passent par H .



1. • M' est l'image de M par la rotation Ω de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $\mathcal{C}'$ est le cercle de rayon 2 centré en $\Omega' = r(\Omega)$ d'affixe $2i$.

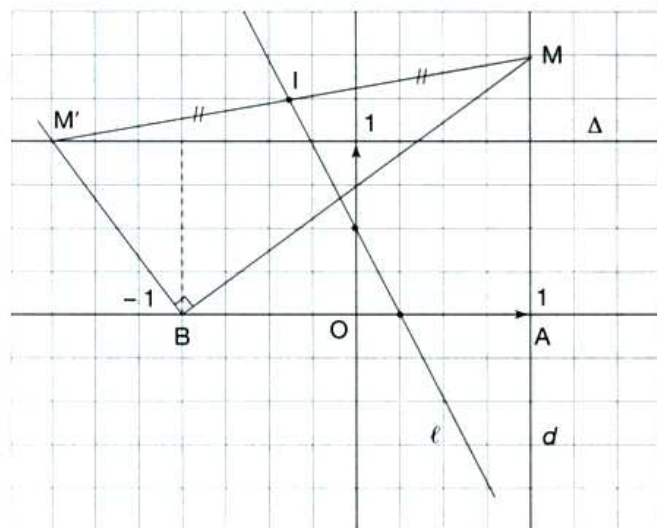
L'équation de $\mathcal{C}'$ est $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

• I est l'image de M par la similitude s de centre O , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc Γ est le cercle centré

en B milieu de $[OA]$ d'affixe $(1+i)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Son équation est $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

2. B est le milieu de $[OA]$ donc O et A sont des points de Γ car (Γ) passe par O ($s(O) = O$).

74



1. Le point $A(1;0)$ a pour image par s le point $A'(-1;1)$ donc Δ est la perpendiculaire en A' à (BA') . Son équation est donc $y = 1$.

2. a) La similitude s a pour écriture complexe

$$z' + 1 = \frac{1}{2}i(z + 1).$$

soit $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}i - 1$.

Donc M' image de M par s a pour affixe

$$\frac{1}{2}i(1 + im) + \frac{1}{2}i - 1 = -\left(\frac{1}{2}m + 1\right) + i.$$

Il en résulte que I a pour affixe $-\frac{1}{4}m + \frac{m+1}{2}i$.

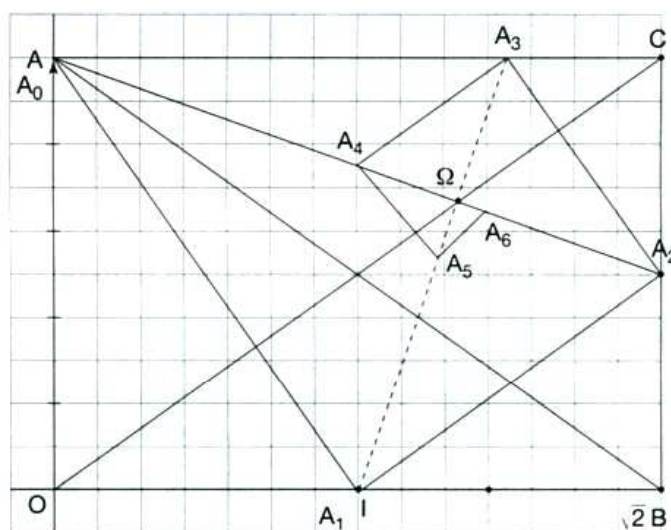
b) I a donc pour coordonnées $x = -\frac{1}{4}m$ et $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m$

donc $y = -2x + \frac{1}{2}$. Ainsi I est un point de la droite ℓ d'équation $y = -2x + \frac{1}{2}$.

D'autre part m décrit $\mathbb{R}$ donc x décrit $\mathbb{R}$ et I décrit toute la droite ℓ .

Similitudes et suites

75



1. a) $s(A) = I$ et $s(O) = B$.

Donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = ai + b$ et $\sqrt{2} = b$ donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

et $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2}$.

b) s a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pour angle $\frac{\pi}{2}$ et pour centre le point Ω d'affixe : $\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i$.

c) Le centre de gravité du triangle ABC a pour affixe $\frac{1}{3}[i + \sqrt{2} + \sqrt{2} + i] = \frac{2}{3}(\sqrt{2} + i)$. C'est donc le point Ω .

2. a) Voir figure ci-dessus.

De plus $s(A_0) = A_1$, $s(A_1) = A_2$ milieu de $[BC]$, etc.

b) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}u_{n-1}$ et $u_0 = A_0I = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Il résulte que $u_n = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$$S_n = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} \right]}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2 - \sqrt{2}} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\sqrt{6}}{2} (\sqrt{2} + 2) = \sqrt{3} (1 + \sqrt{2}).$$

76 • 1. s est la similitude de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $(1 - i)$.

2. a) $\Omega M_1 = \frac{1}{2} \Omega M_0$ et plus généralement

$$\Omega M_n = \frac{1}{2} \Omega M_{n-1}.$$

De plus $\overrightarrow{\Omega M_0}$ a pour affixe

$$1 + 4\sqrt{3} + 3i - 1 + i = 4(\sqrt{3} + i) \text{ donc } \Omega M_0 = 8$$

$$\text{et } \Omega M_n = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ soit } \Omega M_n = \frac{1}{2^{n-3}}.$$

b) $\Omega M_n \leq 0,05$ si et seulement si $\frac{1}{2^{n-3}} \leq 0,05$ soit $n \geq 8$.

$$3. a) M_0 M_1^2 = \Omega M_0^2 + \Omega M_1^2 = 64 + 16 = 80$$

$$\text{donc } M_0 M_1 = 4\sqrt{5}.$$

b) (d_n) est la suite géométrique de premier terme $4\sqrt{5}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

$$c) \ell_n = \frac{4\sqrt{5} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{5} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = 8\sqrt{5}.$$

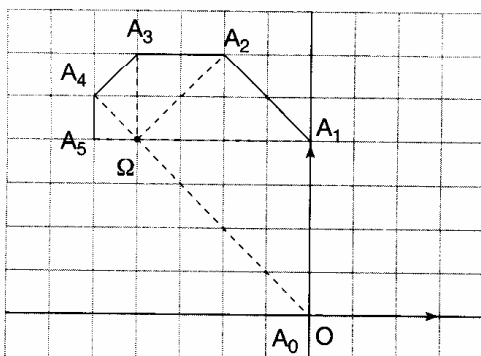
4. a) $(n+1)\overrightarrow{\Omega G_n} = \overrightarrow{\Omega M_0} + \dots + \overrightarrow{\Omega M_n}$
donc $(n+1)\Omega G_n \leq \Omega M_0 + \dots + \Omega M_n$

$$\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1} \left[8 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\text{soit } \Omega G_n \leq \frac{16}{n+1} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] \leq \frac{16}{n+1}.$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega G_n = 0$ donc G_n est en Ω .

77 •



$$A. 1. a) z_n - z_{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} (z_{n-2} - z_{n-1}) \quad (1)$$

Or $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right] = -\frac{1}{2}(1 + i) = u$ d'où le résultat.

$$b) \text{ Si } n = 2, z_2 - z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2} - i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_0 - z_1 = -i$$

$$\text{donc } z_2 - z_1 = u(z_0 - z_1) = -ui$$

$$\text{si } z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$$

alors d'après (1)

$$z_{n+1} - z_n = (-u)^{n-1}i(-u) = (-u)^ni.$$

Donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 2$.

c) $z_1 = i$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$

$$\text{si } z_n = \frac{i[1 - (-u)^n]}{1 + u} \text{ calculons } z_{n+1} = (-u)^ni + z_n.$$

$$\text{Il vient } z_{n+1} = \frac{(-u)^ni - (-u)^{n+1}i + i - i(-u)^n}{1 + u}$$

$z_{n+1} = \frac{i[1 - (-u)^{n+1}]}{1 + u}$ donc la proposition est vraie pour $n + 1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

$$z_2 = i \left[\frac{1 - u^2}{1 + u} \right] = i(1 - u) = i \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) \text{ soit } z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

2. a) et b) $A_0 \mapsto A_1$ et $A_1 \mapsto A_2$

$$\text{donc } i = b \text{ et } -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = ai + b$$

$$\text{donc } ia = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ soit } a = \frac{1}{2}(1 + i) = -u.$$

Il en résulte que s a pour écriture complexe

$$z' = -uz + i.$$

c) Soit donc la similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $(-1 + i)$.

$$d) -uz_n + i = i \left[1 - \frac{u + (-u)^{n+1}}{1 + u} \right]$$

$$\text{soit } i \left(\frac{1 - (-u)^{n+1}}{1 + u} \right) = z_{n+1} \text{ d'où le résultat.}$$

3. a) s_4 est la similitude de centre Ω , d'angle $4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

et de rapport $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$, c'est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$.

b) Il en résulte que Ω , A_n et A_{n+4} sont alignés.

c) Les points A_n appartiennent donc aux quatre droites (ΩA_0) , (ΩA_1) , (ΩA_2) et (ΩA_3) .

$$B. 1. \Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \Omega A_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \times \sqrt{2}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega A_n = 0$ et à « la limite » A_n est en Ω .

2. La suite $(A_n A_{n+1})$ est une suite géométrique de premier terme $A_0 A_1 = 1$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Donc } L_n = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\text{Il en résulte que } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{2}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\text{soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 2 + \sqrt{2}.$$

Prendre toutes les initiatives

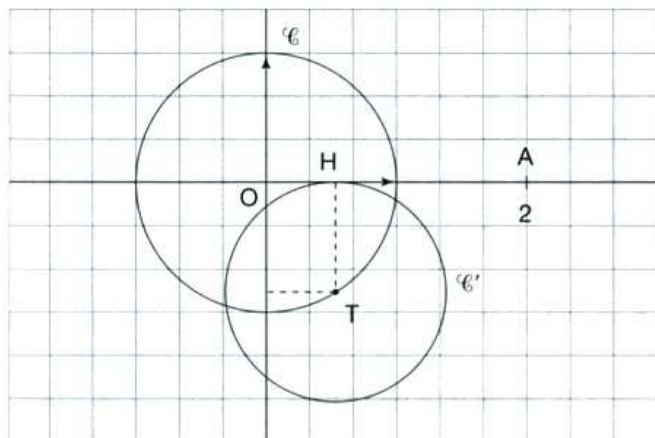
78 • s est la similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $4i$.

Posons $u_n = \Omega M_n$. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \Omega M_0 = \sqrt{5}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Donc } \Omega M_n = \sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

$$\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100} \text{ équivaut à } n \geq 16 \text{ donc } N_0 = 16.$$

79 •



s a pour écriture complexe

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + i)z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $s(O)$ est le point T d'affixe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de coordonnées polaires 1 et $-\frac{\pi}{3}$.

De plus le rapport de similitude est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc le rayon de $\mathcal{C}'$ est $TH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le cercle $\mathcal{C}'$ est ainsi tangent en H à l'axe des abscisses.

80 • Notons s la similitude de l'écriture complexe

$$z' = (1 + \sqrt{3}i)z - \sqrt{3}(1 + 2i).$$

Son rapport est 2, son angle $\frac{\pi}{3}$ et son centre Ω a pour affixe $(2 - i)$. Un point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' tel que $\arg z' \equiv 0 [\pi]$ donc M' décrit l'axe des abscisses privé de O. Il en résulte que M décrit l'image de la droite d'équation $y = 0$ privé de $s^{-1}(O)$ par s^{-1} .

On obtient ainsi la droite d'équation $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ privée du point de coordonnées.

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 6}{4}; \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}\right).$$

81 • OMM' est un demi-triangle équilatéral.

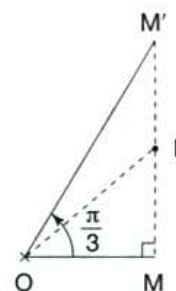
En posant $OM = d$, $OM' = 2d$

et $MM' = d\sqrt{3}$, donc $IM = d\frac{\sqrt{3}}{2}$

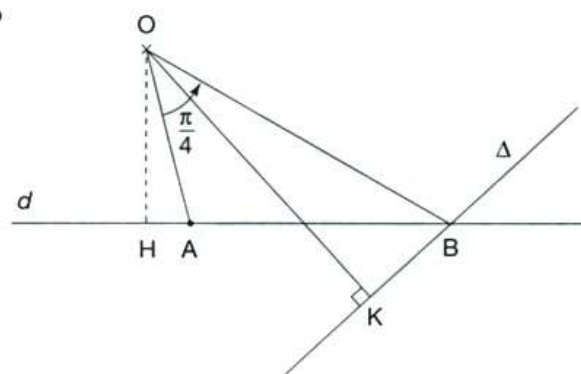
et $IO = \frac{\sqrt{7}}{2}d$.

Il en résulte que $\frac{OI}{OM} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

et en posant $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OI}) = \theta$, $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ donc $\theta \approx 40^\circ 9'$. Ainsi I est l'image de M par la similitude de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{7}}{2}$ et d'angle θ .



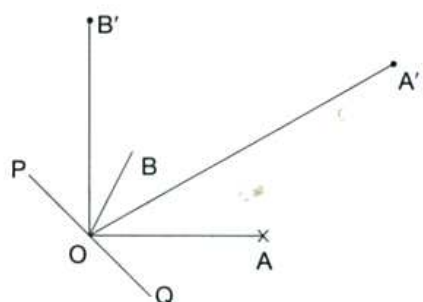
82 •



La droite Δ image de d par s est obtenue en construisant K image de H par d . Le fait que d soit perpendiculaire à (OH) , Δ est perpendiculaire en K à (OK) .

Δ coupe d en B. On construit A tel que $s(A) = B$ et le triangle AOB répond à la question posée.

83 •



Notons $z' = \lambda z$ l'écriture complexe de la similitude s_0 . Ainsi si A et B ont pour affixes respectives a et b , alors A' et B' ont pour affixes λa et λb .

• La similitude s_A de centre A est telle que $s_A(B) = B'$

$$\text{donc } \begin{cases} a = ma + n \\ \lambda b = mb + n \end{cases} \text{ donc } m = \frac{a - \lambda b}{a - b} \text{ et } n = \frac{ab(\lambda - 1)}{a - b}.$$

Ainsi s_A a pour écriture complexe

$$z' = \frac{a - \lambda b}{a - b} z + \frac{ab(\lambda - 1)}{a - b}.$$

Donc $P = s_A(O)$ a pour affixe $\frac{ab(\lambda - 1)}{a - b}$.

• De manière analogue avec s_B telle que $A \mapsto A'$, on démontre de même que $Q = s_B(O)$ a pour affixe $\frac{ab(\lambda - 1)}{b - a}$. Il en résulte que O est le milieu de [PQ].

84 • On note z l'affixe de M donc N et A' ont respectivement pour affixe iz et $2i$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

De plus $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$ donc C a pour affixe $z_C = 2 + z$ et $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON}$.

Donc Q a pour affixe $z_Q = 2 + z(1 + i)$.

Ainsi $\overrightarrow{MQ}$ a pour affixe $2 + iz = Z_1$ et $\overrightarrow{MA'}$ a pour affixe $2i - z = i(2 + iz) = Z_2$.

Donc $Z_2 = iZ_1$ et par suite $|Z_2| = |Z_1|$ et $\arg \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\pi}{2}$

donc $MQ = MA'$ et $(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MA'}) = \frac{\pi}{2}$.

D'où le résultat.

85 On note a, b, c les affixes respectives de A, B, C

$B \mapsto F$ par $r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ donc $f - a = -i(b - a)$ soit

$$f = -ib + a(1 + i).$$

De même D est l'image de A par $r\left(C, -\frac{\pi}{2}\right)$

donc $d - c = -i(a - c)$ et $d = -ia + c(1 + i)$.

E a pour affixe $ic + a(1 - i)$ car $C \mapsto E$ par $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$

donc $\overrightarrow{AE}$ a pour affixe $i(c - a)$, et $\overrightarrow{AH}$ a pour affixe $i(c - b)$ et H a pour affixe $a + i(c - b)$.

Il en résulte que $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $Z_1 = (c - b) + i(c - a)$ et $\overrightarrow{HC}$ a pour affixe $Z_2 = (c - a) - i(c - b)$.

Donc $Z_2 = -iZ_1$ soit $|Z_2| = |Z_1|$ et $\arg \frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\pi}{2}$ donc

$BD = HC$ et $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{HC}) = -\frac{\pi}{2}$ d'où le résultat.

86 Notons s la similitude d'écriture complexe $z' = \lambda z + \mu$ telle que $A \mapsto A'$ et $B \mapsto B'$.

Donc $a' = \lambda a + \mu$ et $b' = \lambda b + \mu$.

Il en résulte que $\lambda = \frac{a' - b'}{a - b}$ et $\mu = \frac{ab' - a'b}{a - b}$

$$\text{donc } z' = \frac{a' - b'}{a - b} z + \frac{ab' - a'b}{a - b}.$$

Dire que les triangles sont directement semblables équivaut à dire que $s(c) = c'$ donc

$$c'(a - b) = (a' - b')c + ab' - a'b$$

soit :

$$ac' + b'c + a'b = a'c + ab' + bc'.$$

D'où le résultat.

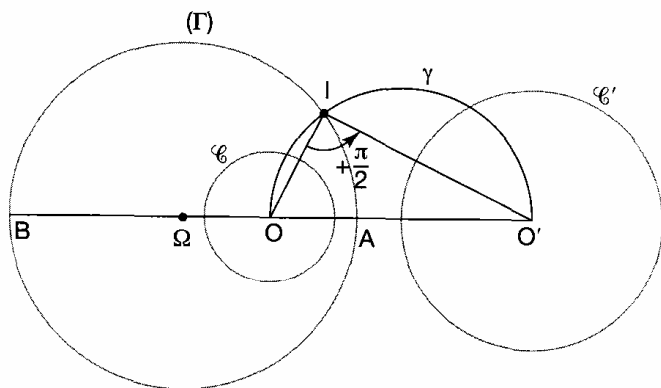
Problèmes

(page 125)

87 • A. 1. $M'O = 2MO \Leftrightarrow \overrightarrow{MO'}^2 - 4\overrightarrow{MO}^2 = 0$.

Soit $(\overrightarrow{MO'} + 2\overrightarrow{MO}) \cdot (\overrightarrow{MO'} - 2\overrightarrow{MO}) = 0$.

2. a) $\overrightarrow{MO'} + 2\overrightarrow{MO} = 3\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MO'} - 2\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{MB}$ d'où $M'O = 2MO \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.



b) Donc Γ est le cercle de diamètre [AB] tel que

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OO'} \text{ et } \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OO'}.$$

Ω milieu de [AB] est tel que $\overrightarrow{O\Omega} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{OO'}$.

B. 1. Si s transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$ le rapport est $\frac{r'}{r}$ soit

$\frac{3}{1,5} = 2$. Il en résulte de $O \xrightarrow{s} O'$ que $\frac{IO'}{IO} = 2$ donc I est un point de (Γ) .

2. a) Dans ce cas $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}) = \frac{\pi}{2}$ donc I est un point du demi-cercle (rouge) (γ) de diamètre [OO'] et du cercle (Γ) .

b) I est le point d'intersection de γ et (Γ) .

88 • 1. a) $v_0 = 1$ et $v_1 = re^{i\theta}$.

b) Donc M_2 a pour affixe $\frac{1}{v} + re^{i\theta}$.

2. b) $|v_n| = r|v_{n-1}|$ et $\arg\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \theta$ donc $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.

c) $v_0 = 1$ donc v_n est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $re^{i\theta}$ donc $v_n = r^n e^{in\theta}$ (1).

3. a) v_n est l'affixe de $\overrightarrow{M_n M_{n+1}}$ donc $v_n = z_{n+1} - z_n$.

b) $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_n - z_{n-1}$
avec $z_0 = 0$ donc $v_0 + \dots + v_{n-1} = z_n$.

$z_1 = 1$ et $\frac{1 - re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = 1$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Si $z_n = \frac{1 - r^n e^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}}$ alors

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + v_n = \frac{1 - r^n e^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}} + r^n e^{in\theta} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{1 - re^{i\theta}} \end{aligned}$$

donc la proposition est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$ (elle est en effet vraie pour $n = 0$).

4. a) $M_0 \mapsto M_1$

et $M_1 \mapsto M_2$

$z' = az + b$ avec $1 = b$ et $1 + re^{i\theta} = a + b$

soit $a = re^{i\theta}$ et $z' = re^{i\theta}z + 1$.

$$\text{b) } re^{i\theta} \frac{1 - r^n e^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}} + 1 = \frac{1 - r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{1 - re^{i\theta}} = z_{n+1}$$

donc $s(M_n) = M_{n+1}$.

c) Si $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1$

donc Ω a pour affixe $(1+i)$.

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} [M_0 M_1 + \dots + M_{n-1} M_n] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2}.$$

C'est nouveau au bac

(page 126)

89 a) $s(I) = I$ et $s(A) = B$ donc **a)** est vraie.

b) $(1+2i)(1-2i)+2=7$ donc $s(C) = C'$ d'affixe 7 donc **b)** est vraie.

c) $s(O) = O'$, $s(C) = C'$ et $s(A) = B$ donc **c)** est vraie.

d) $A \mapsto B$

$C \mapsto C'$

donc la droite (AC) ou (AB) a pour image (BC') la proposition **d)** est vraie.

90 1. Si on admet que la rotation ou (et) l'homothétie peuvent être l'identité du plan alors la proposition est vraie.

2. Faux car si $k < 0$, $h(\Omega, k) = s(-\Omega, -k, \pi)$.

$$\begin{aligned} \text{3. } h(0; -\sqrt{3}) \circ r\left(0; \frac{\pi}{3}\right) &= h(0; \sqrt{3}) \circ r(0; \pi) \circ r\left(0; \frac{\pi}{3}\right) \\ &= s\left(0; \sqrt{3}; \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

or $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$ donc la proposition est vraie.

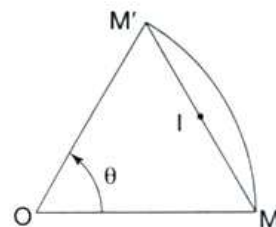
$$\text{4. } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{et } OI = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| OM$$

or $\theta \in]-\pi; \pi[$

$$\frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

donc $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$ et la proposition est vraie.



91

$$\text{2. a) } z \xrightarrow{r^{-1}} z - 1 - i \xrightarrow{s} i(\bar{z} - 1 + i) + 2 = i\bar{z} - i + 1.$$

b) $f(A)$ a pour affixe $1 - i + 1 = 1$, $f(A) = A$

$f(B)$ a pour affixe $i(i) - i + 1 = -i$ donc $f(B) = B$.

f est donc la réflexion d'axe (AB) .

c) Il en résulte que $s = f \circ t$ composée de la réflexion d'axe (AB) et de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $(1+i)$.

Travaux dirigés (page 135)

TD 1

- 1 1. a)** H_1 et H_2 sont les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M_2]$ donc :

$$\overrightarrow{MM_1} = 2 \overrightarrow{H_1M_1} \text{ et } \overrightarrow{M_1M_2} = 2 \overrightarrow{M_1H_2}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2(\overrightarrow{H_1M_1} + \overrightarrow{M_1H_2}) = 2 \overrightarrow{H_1H_2}.$$

2. $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$ donc $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est la translation de vecteur $2 \overrightarrow{A_1A_2}$.

- 2 1. a)** $\sigma_2 \circ \sigma_1 (O) = O$.

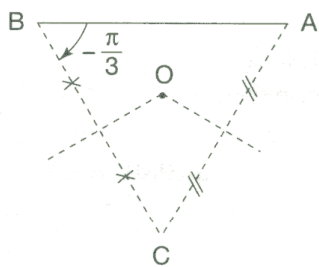
b) $OM_1 = OM_2 = OM$ évident.

$$\text{c) } (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM_1}) = 2(\overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OM_1}) \text{ et } (\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2}) = 2(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OA_2}).$$

2. $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM_2}) = 2(\overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OA_2})$. Donc $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation d'angle $2(\overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OA_2})$.

TD 2

1



1. $r = r_2(B; -\frac{\pi}{3}) \circ r_1^{-1}(A; -\frac{\pi}{3})$ donc r est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

$r_2 \circ r_1^{-1}(A) = r_2(A) = C$ tel que ABC est équilatéral.
 $r_2 \circ r_1^{-1}(C) = r_2(B) = B$.

Donc le centre O de r est l'intersection des médiatrices de $[BC]$ et $[AC]$. C'est le centre du triangle équilatéral ABC .

$$\begin{array}{ccccc} 2. & M & \xrightarrow{r_1} & M_1 & \xrightarrow{r_1^{-1}} & M & \xrightarrow{r_2} & M_2 \\ & & & & \text{donc} & & & \\ & M & \xrightarrow{r_2} & M_2 & & & \xrightarrow{r} & \end{array}$$

donc la médiatrice de $[M_1M_2]$ passe par O .

$$\text{2 1. } M \xrightarrow{r_1} M_1 \xrightarrow{r_2} M_2 \xrightarrow{r_3} M_3$$

$r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle.

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \pi.$$

Ainsi $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale s .

2. $r_2 \circ r_1(A) = r_2(A)$, on obtient un point de (BC) . De même l'image de $r_2(A)$ par r_3 est un point A' de (BA) donc I centre de s est le milieu de $[AA']$. Pour que la boucle se referme il suffit donc de placer M en I .

$$\text{3 1. } a \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} b$$

$$r_2(C; -\frac{\pi}{3}) \circ r_1(A; \frac{\pi}{3}) = t_{\vec{u}} \text{ donc } \vec{u} = \overrightarrow{ab}.$$

2. $d \xrightarrow{r_1} D \xrightarrow{r_2} c$ donc $\overrightarrow{dc} = \overrightarrow{ab}$ et $abcd$ est un parallélogramme.

TD 3

$$\text{1 1. } M_1N_1 = k_1MN, M_2N_2 = k_2M_1N_1 \text{ donc } M_2N_2 = k_1k_2MN.$$

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M_1N_1}) = \theta_1 \text{ et } (\overrightarrow{M_1N_1}; \overrightarrow{M_2N_2}) = \theta_2 \text{ donc } (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M_2N_2}) = \theta_1 + \theta_2 \text{ et } \theta_1 + \theta_2 \neq 0 [2\pi].$$

2. a) Si $k_1k_2 = 1$, $s_2 \circ s_1$ est une rotation.

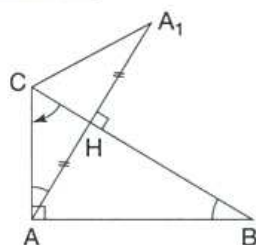
b) Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 [\pi]$, $s_2 \circ s_1$ est une homothétie.

$$\text{2 } s_1 = s(A; \sqrt{2}; \frac{\pi}{4}) \text{ et } s_2 = s(B; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}).$$

1. $s_2 \circ s_1$ est une similitude de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ c'est donc une rotation.

2. $s_2 \circ s_1(C') = s_2(R) = C'$ donc $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre C' et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. $r(R) = A$; $s_1(Q) = C$ et $r(Q) = s_2(C) = P$. Ainsi le segment $[RQ]$ a pour image $[AP]$ par r donc $RQ = AP$ et les droites (RQ) et (AP) sont perpendiculaires.



1. Les triangles CHA , AHB et CAB sont rectangles et de plus $\overline{CAH} = \overline{ABC} = \overline{ABH}$. Ils sont donc semblables.

2. a)
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{s_1} & A \\ H & \xrightarrow{\quad} & H \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$

s_1 est la similitude directe de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{s_2} & C \\ H & \xrightarrow{\quad} & A \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$
 : s_2 est telle que $(\overline{CH}; \overline{CA}) = -(\overline{CA}; \overline{CB})$, donc s_2 est une similitude indirecte.

b) s_1 a pour rapport $\frac{AB}{AC} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et s_2 a pour rapport $\frac{CB}{CA} = 2$.

c) s_1 est donc la similitude de centre H , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

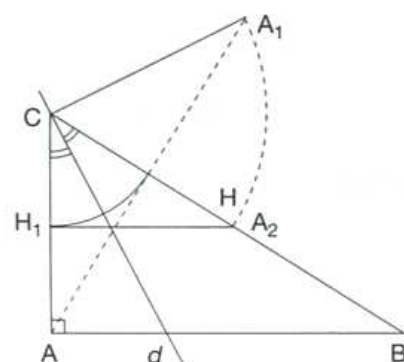
3. a) Le rapport de s_2 est 2, donc ce n'est pas une réflexion. C est invariant et le fait qu'elle ne soit pas une réflexion il n'y a pas d'autres points invariants.

b)
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\sigma_1} & C \\ H & \xrightarrow{\quad} & H \\ A_1 & \xrightarrow{\quad} & A \end{array} \xrightarrow{s_2} \begin{array}{ccc} C & & C \\ A & & A \\ B & & B \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{r(C; -\frac{\pi}{3})} & C \\ H & \xrightarrow{\quad} & H_1 \\ A_1 & \xrightarrow{\quad} & A_2 \end{array}$$

$CH = \frac{1}{2} CA$ et

$CA_1 = CA = \frac{1}{2} CB$.



Donc H_1 et A_2 sont les milieux respectifs de $[CA]$ et $[CB]$ et (H_1A_2) est parallèle à (AB) donc $h(C) = C$, $h(A_2) = B$ et $h(H_1) = A$ d'où $g = f$.

d) $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est la rotation de centre C et d'angle $2(\overline{CB}; d)$ soit $-\frac{\pi}{3}$ donc $\sigma_2 \circ \sigma_1 = r$.

e) $f = s_2 \circ \sigma_1$ donc $f \circ \sigma_1 = s_2 \circ (\sigma_1 \circ \sigma_1) = s_2 \circ I_d = s_2$ d'où $s_2 = g \circ \sigma_1 = h \circ r \circ \sigma_1 = h \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_1 = h \circ \sigma_2$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 139)

1. Isométries du plan

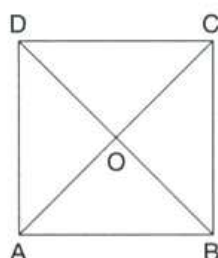
1 Corrigé dans le manuel.

2 $g \circ f = t_{\overline{AC}} \circ r(A; \frac{\pi}{2})$.

$g \circ f$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$,

$g \circ f(A) = g(A) = C$

et $g \circ f = r(D; \frac{\pi}{2})$.



3 $g \circ f = s_O \circ r(A; \frac{\pi}{2})$, $g \circ f$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ avec $g \circ f(A) = g(A) = C$, $g \circ f = r(B; -\frac{\pi}{2})$.

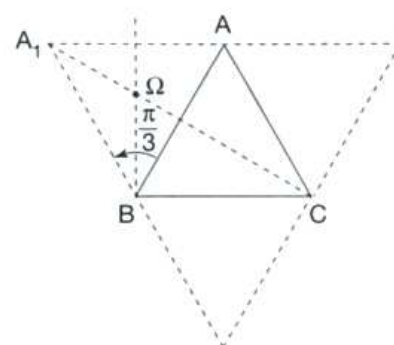
4 $g \circ f = s_{CD} \circ s_{AB}$, $g \circ f$ est la translation de vecteur $2\overline{BC}$.

5 $g \circ f = s_{BD} \circ s_{AC}$, $g \circ f$ est la symétrie de centre O .

6 1. $g \circ f$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g \circ f(D) = D$ donc $g \circ f = r(D; \frac{\pi}{2})$.

2. $T = h \circ g \circ f$; $T(B) = B$ donc T est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

7



a) $r(B; \frac{\pi}{3}) \circ r(A; \frac{\pi}{3}) = g \circ f$; $g \circ f$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

$A \xrightarrow{g \circ f} A_1 \quad B \xrightarrow{g \circ f} B_1$

donc $g \circ f = r(\Omega; \frac{2\pi}{3})$, Ω est le centre du triangle équilatéral A_1BA .

b) $g \circ f = r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(A; \frac{\pi}{3}\right).$

$g \circ f$ est une translation $A \xrightarrow{g \circ f} C$
donc $g \circ f = t_{\overrightarrow{AC}}$.

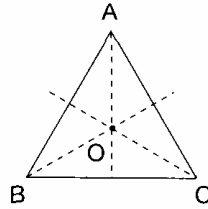
8 Corrigé dans le manuel.

9 1. $h = g \circ f = s_{OA} \circ r\left(A; \frac{\pi}{3}\right).$

La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

2. a) $h(A) = g(A) = A$
et $h(B) = g(C) = B$.

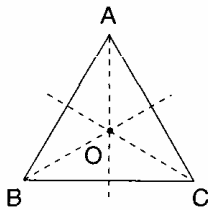
b) Donc h est la réflexion d'axe (AB) .



10 1. $g_1 \circ g_2 = s_{OA} \circ s_{OB}$.
 $g_1 \circ g_2$ est donc la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$.

Soit $-\frac{4\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$ donc $g_1 \circ g_2 = f$.

2. $g_1 \circ f = g_1 \circ g_1 \circ g_2 = g_2$.



11 1. a) $z' = i\bar{z}$, $|i| = 1$ donc f est un antidéplacement.

b) r a pour écriture complexe $z' = iz$.

c) σ_1 a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$.

2. a) $z \xrightarrow{\sigma_1} \bar{z} \xrightarrow{r} i\bar{z}$ donc $f = r \circ \sigma_1$.

b) $\sigma_2 \circ \sigma_1 = r$ (évident) donc $f = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2$.

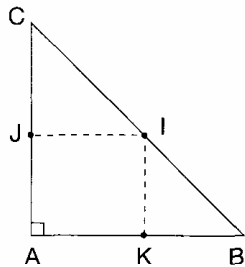
12 $r = r\left(I; \frac{\pi}{3}\right) \quad t = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$.

1. $f(K) = (r \circ t)(K) = r(J) = K$
 $g(J) = (t \circ r)(J) = t(K) = J$
donc f est la rotation de centre

K et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et g est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a) $g \circ f^{-1}$ est une translation.

b) $g \circ f^{-1}(A) = g(I) = C$ et $g \circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



13 a) et b) $f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$: or $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, d'où le résultat.

c) L'angle des droites d et s est $\frac{\pi}{3}$ donc $\sigma_3 \circ \sigma_4 = r$.

$f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3 \circ r = \sigma_3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 = \sigma_4$.

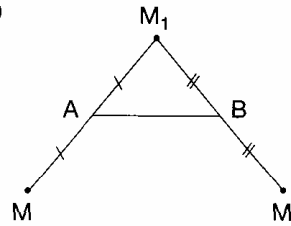
2. Composition d'homothéties et des translations

14 a) $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b) $g \circ f$ est l'homothétie de centre A et de rapport 1. Donc l'identité.

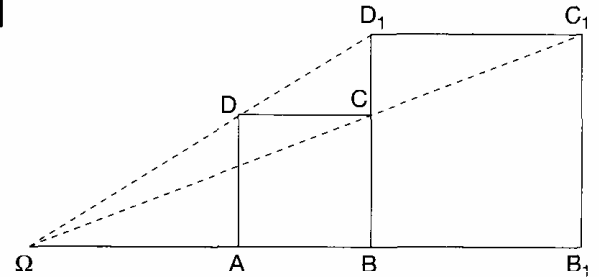
c) $g \circ f$ est la symétrie de centre A.

d)



$g \circ f$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

15



$g \circ f$ est une homothétie de rapport $\frac{3}{2}$.

$$A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \quad \text{donc } \overrightarrow{\Omega B} = \frac{3}{2} \overrightarrow{\Omega A}$$

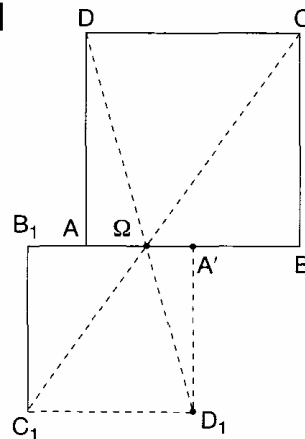
$$\xrightarrow{h\left(\Omega; \frac{3}{2}\right)} \quad \text{d'où } \overrightarrow{\Omega B} = \frac{3}{2} \overrightarrow{\Omega B} + \frac{3}{2} \overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{B\Omega} = 3\overrightarrow{BA}.$$

ABCD a pour image $BB_1C_1D_1$.

16 Corrigé dans le manuel.

17



$g \circ f$ est une symétrie par rapport à un point Ω .

$$A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'$$

(A' milieu de $[AB]$) donc Ω est le milieu de $[AA']$.
L'image de ABCD est le carré $A'B_1C_1D_1$.

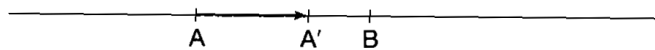
18 $h_2 \circ h_1 = h\left(\Omega; \frac{3}{2}\right).$

$$D \xrightarrow{h_1} D \xrightarrow{h_2} D' \quad \text{avec } \overrightarrow{CD'} = 3\overrightarrow{CD}$$

$$\text{et } \overrightarrow{\Omega D'} = \frac{3}{2} \overrightarrow{\Omega D} \quad \text{donc } \overrightarrow{\Omega C} + 3\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{\Omega C} + \frac{3}{2} \overrightarrow{CD}$$

$$\frac{3}{2} \overrightarrow{CD} = +\frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega C} \quad \text{donc } \overrightarrow{C\Omega} = -3\overrightarrow{CD} \quad \text{d'où la construction de } \Omega.$$

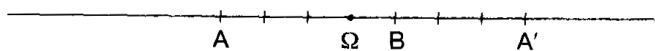
19 a)



$g \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ avec

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} B \text{ d'où } \overrightarrow{AA'} = \vec{u}.$$

b)



$g \circ f$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{3}{2}$ avec

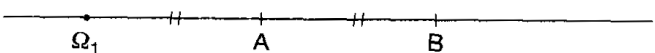
$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} \Omega$$

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{7}{4} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{\Omega A'} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{\Omega A}$$

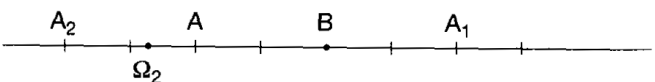
$$\text{d'où } \overrightarrow{\Omega A} + \frac{7}{4} \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{\Omega A} \text{ d'où } \overrightarrow{A\Omega} = \frac{7}{10} \overrightarrow{AB}.$$

c) $g \circ f$ est l'homothétie de centre Ω_1 et de rapport 2

$$\text{avec } A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} B \text{ d'où } \overrightarrow{\Omega_1 B} = 2 \overrightarrow{\Omega_1 A} \text{ soit } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega_1 A}.$$



d) $g \circ f$ est une homothétie de centre Ω_2 et de rapport -2 .



$$\text{avec } A \xrightarrow{f} A_1 \xrightarrow{g} A_2$$

$$\overrightarrow{\Omega_2 A_2} = -2 \overrightarrow{\Omega_2 A}$$

$$\overrightarrow{\Omega_2 A} + \overrightarrow{AA_2} = -2 \overrightarrow{\Omega_2 A}$$

$$3 \overrightarrow{\Omega_2 A} = -\overrightarrow{AA_2} \quad \overrightarrow{A\Omega_2} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}.$$

20 Corrigé dans le manuel.

21 a) f a pour écriture complexe $z' = z + 1 + 2i$.

g a pour écriture complexe $z' = -2z + 9 - 3i$

$$z \xrightarrow{f} z + 1 + 2i \xrightarrow{g} -2z + 7 - 7i$$

Donc $g \circ f$ est l'homothétie de rapport -2 et de centre Ω_1 d'affixe $\frac{7}{3}(1-i)$.

b) f et g ont respectivement pour écriture complexe :

$$z' = -3z + 4(1+2i) \text{ et } z' = -\frac{1}{3}z + \frac{4}{3}(2+i)$$

donc $g \circ f$ a pour écriture complexe $z' = z + \frac{4}{3}(1-i)$.

C'est la translation donc le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $\frac{4}{3} - \frac{4}{3}i$.

3. Composition de similitudes

22 1. a) $z' = (1+i)z$, s_1 est la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) A' a pour affixe $(1+i)$ et B' a pour affixe $(-1+i)$.

2. a) $-1+i = a+b$

$$1+i = ai+b$$

$$\text{soit } a = -(1+i) \text{ et } b = 2i$$

$$\text{soit } z' = -(1+i)z + 2i$$

$$z \xrightarrow{s_1} (1+i)z \xrightarrow{s_2} -2iz + 2i$$

$s_2 \circ s_1$ est la similitude de rapport 2, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

$$\mathbf{23} \quad 1. s_1 = s\left(A; \frac{\pi}{3}; 2\right) \quad s_2 = s\left(D; \frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

donc $s_2 \circ s_1$ est une similitude de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Il en est de même pour $s_1 \circ s_2$.

2. a) $s_2 \circ s_1(B) = s_2(D) = D$; $s_1 \circ s_2(A) = s_1(B) = D$.

Il en résulte que I est le centre de $s_2 \circ s_1$ et F celui de $s_1 \circ s_2$.

$$\mathbf{24} \quad 1. \text{ a) et b) } M \xrightarrow{r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} M_1 \xrightarrow{h(O, 3)} M' \\ N \longrightarrow N_1 \longrightarrow N'$$

Il résulte que

$$MN = M_1N_1 \text{ et } M'N' = 3M_1N_1$$

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M_1N_1}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } (\overrightarrow{M_1N_1}; \overrightarrow{M'N'}) = 0.$$

Donc $M'N' = 3MN$ et $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \frac{\pi}{2}$.

2. f est une similitude de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. a) $f(A) = h \circ M(A) = h(A) = A'$.

A' a pour affixe 15.

b) $z' = az + b$ avec $a = 3i$

$$\text{donc } z' = 3iz + b.$$

$$15 = 15i + b \quad b = 15(1-i).$$

4. I a pour affixe $6 + 3i$.

25 1. f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, c'est donc un antidéplacement.

2. t a pour écriture complexe $z' = z + 1$ et s a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ donc

$$z \xrightarrow{s} \bar{z} \xrightarrow{t} \bar{z} + 1, \text{ d'où le résultat. }$$

26 a) s_1 est une similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

s_2 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $s_2 \circ s_1$ est une similitude de rapport 2 et d'angle π , c'est donc une homothétie de rapport (-2) .

b) s_1 a pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

s_2 a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $-\frac{\pi}{4}$.

Donc $s_2 \circ s_1$ est une translation.

c) $s_2 \circ s_1$ est une homothétie de rapport $2\sqrt{2}$.

27 Avec des homothéties et des translations**Les outils :**

- Image d'une droite par une translation.
- Image d'une droite par une homothétie.

Les objectifs :

- Savoir démontrer des alignements de points.

1. a) L'image de M est alignée avec A et M et, de plus, se trouve sur la parallèle à (BM) passant par C, $h(M) = K$. De même, $h(Q) = R$.

b) L'image de la droite (MQ) est la droite (KR).

2. a) À l'aide des parallélogrammes MBPK et BMRQ, on peut affirmer que $\overline{MB} = \overline{RQ}$ et $\overline{MB} = \overline{KP}$.

Donc $t(R) = Q$ et $t(K) = P$.

b) L'image de la droite (KR) par t est la droite parallèle (QP). En définitive, l'image de (MQ) par $t \circ h$ est la droite parallèle (QP).

c) Les points M, Q et P sont donc alignés.

28 Démontrer avec des similitudes directes**Les outils :**

- Similitude définie par deux points et leurs images.
- Composition de similitudes.

Les objectifs :

- Savoir démontrer que des segments sont isométriques en composant des similitudes directes.
- Savoir démontrer que les droites sont perpendiculaires en composant des similitudes directes.

$$\begin{aligned} \text{1. a) Par } s_1, C \mapsto C, Q \mapsto A \text{ donc } \theta_1 = (\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CA}) &= \frac{\pi}{4} \\ k_1 = \frac{CA}{CQ} &= \sqrt{2} \\ \text{Par } s_2, B \mapsto B, A \mapsto R \text{ donc } \theta_2 = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR}) &= \frac{\pi}{4} \\ k_2 = \frac{BR}{BA} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

b) $s_2 \circ s_1$ est une similitude directe de rapport

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1 \text{ et d'angle } \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

c'est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a) D est tel que BDC est un triangle rectangle isocèle direct, rectangle en B.

b) D'après la configuration, $s_2(D) = P$.

3. En définitive, par la rotation $s_2 \circ s_1$, Q a pour image R et B a pour image P.

Donc BQ = RP et (RP) et (BQ) sont perpendiculaires

29 Ensemble de similitudes**Les outils :**

- Définition analytique d'une similitude.
- Composition des expressions analytiques.

Les objectifs :

- Chercher des similitudes qui commutent.

1. σ est la similitude de centre Ω d'affixe $2 + 2i$, de rapport 1, et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (σ est donc une rotation).

$$\begin{aligned} \text{2. } f_2(f_1(z)) = f_1(f_2(z)) &\Leftrightarrow a(iz + 4) + b = i(az + b) + 4 \\ &\Leftrightarrow aiz + 4a + b = iaz + ib + 4. \end{aligned}$$

Les écritures sont égales pour tout z si et seulement si $4a + b = ib + 4$, soit $b(1 - i) = 4 - 4a$ ou $b = 2(1 + i)(1 - a)$. Les similitudes qui commutent avec s sont donc celles dont l'écriture complexe est $z' = az + 2(1 + i)(1 - a)$.

Prolongement

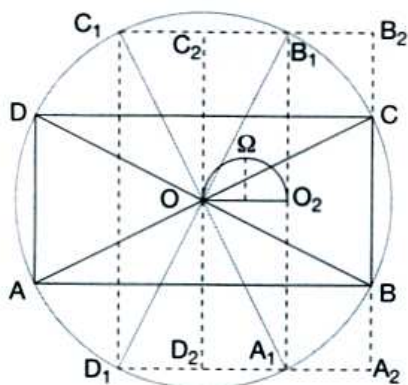
1. Si $a \neq 1$, c'est-à-dire si s n'est pas l'identité, il y a un point invariant, le point Ω d'affixe $2 + 2i$.

2. Les similitudes directes s_1 et s_2 ont le même centre Ω , donc $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ sont des éléments de $\mathcal{S}$.

De la même manière, s^{-1} est une similitude de centre Ω donc appartient à $\mathcal{S}$.

Pour progresser

(page 143)

Isométries**30** Corrigé dans le manuel.**31**

1. Par r , ABCD devient $A_1B_1C_1D_1$ puis par t , $A_1B_1C_1D_1$ devient $A_2B_2C_2D_2$.

2. f composée d'une rotation et d'une translation est une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$O \xrightarrow{f} O_2$ donc Ω est l'intersection du demi-cercle de diamètre $[OO_2]$ et de la médiatrice de $[OO_2]$.

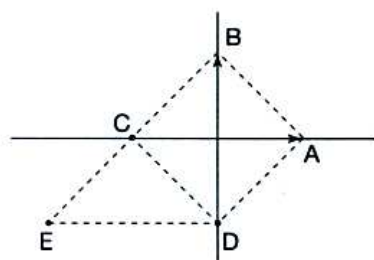
32 Corrigé dans le manuel.**33** **1.** T est une translation.

$$T(D) = r_1 \circ r_2 \circ r_3(D) = r_1 \circ r_2(B) = r_1(B).$$

$E = r_1(B)$ est le point d'affixe $(-2 - i)$.

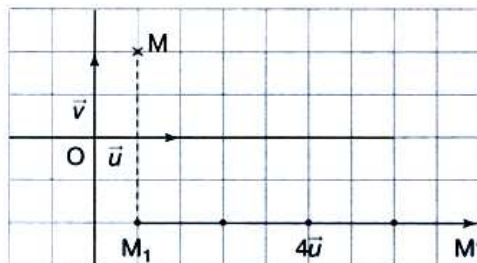
Donc T est la translation de vecteur $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$.

2. $r_3 \circ T$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Or $r_3 \circ T(A) = r_3(C) = C$.



Donc Ω est le point de la médiatrice de $[AC]$ tel que $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega C}) = \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que $\Omega = D$.

34 • 1. a)



b) Si un point d'affixe $z = x + iy$ est invariant alors $x + iy = x - iy + 4$.

Il résulte que $0x - 4 = 0$, ce qui est impossible.

Il n'y a donc pas de point invariant et $|a| = 1$ donc f est un antidéplacement.

$$2. z \xrightarrow{f} \bar{z} + 4 \xrightarrow{f} z + 8$$

donc $f \circ f$ est la translation de vecteur $8\vec{u}$.

$$b) z \xrightarrow{f} \bar{z} + 4 \xrightarrow{t - \frac{1}{2}\vec{v}} \bar{z} + 4 - 4 = \bar{z}$$

donc g est la réflexion ayant pour axe l'axe des abscisses.

3. Il résulte des questions précédentes que f est la composée commutative de la réflexion d'axe d d'équation $y = 0$ et de la translation de vecteur $4\vec{u}$ (vecteur directeur de d).

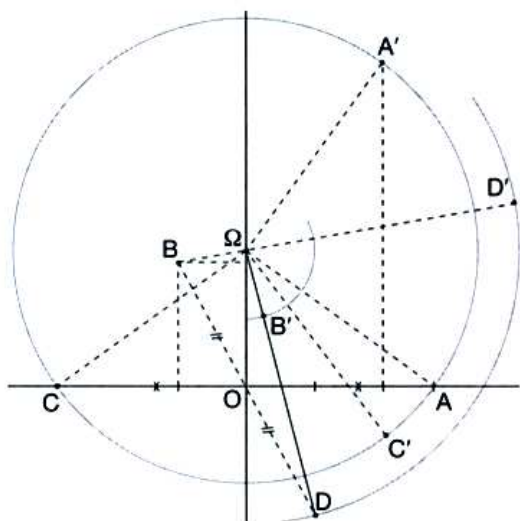
35 • 1. a) f_1 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

f_2 est la translation dont le vecteur a pour affixe $2 + 2i$.

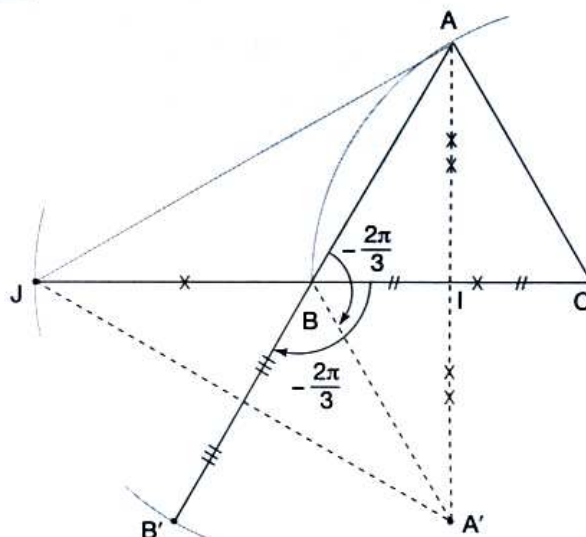
$$b) z \xrightarrow{f_1} iz \xrightarrow{f_2} iz + 2(1 + i).$$

f est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $2i$.

2.



36 •



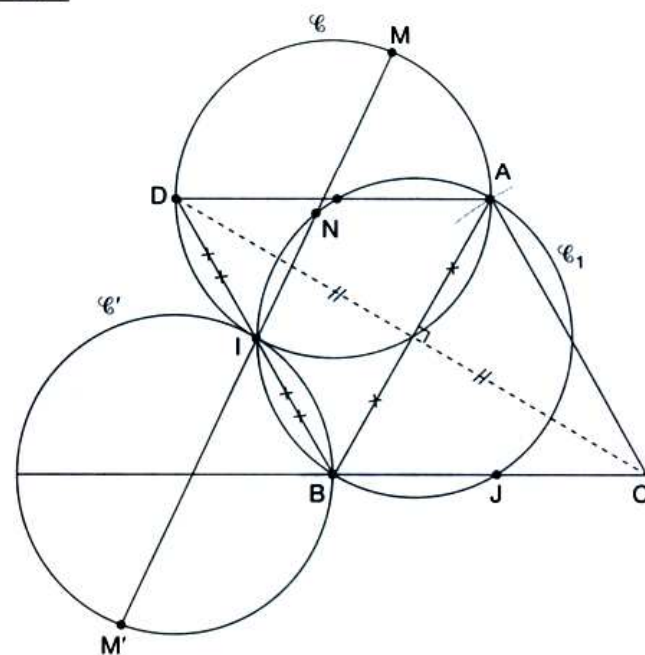
$$1. f(A) = r_2 \circ r_1(A) = r_2(A) = A'$$

$$f(B) = r_2 \circ r_1(B) = r_2(C) = B'.$$

I milieu de $[AA']$ et B milieu de $[AB']$ (voir figure).

2. f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Son centre est l'intersection des médiatrices de $[BB']$ et $[AA']$. C'est le point J.

37 •



$$1. a) r = r_2\left(B; \frac{2\pi}{3}\right) \circ r_1\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$$

$r(I) = r_2 \circ r_1(I) = r_2(J)$ avec J milieu de $[BC]$ et $r_2(J) = I$ car $ADBC$ est un losange formé de deux triangles équilatéraux.

Donc I est invariant par r .

b) Il en résulte que r est la symétrie de centre I car

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi.$$

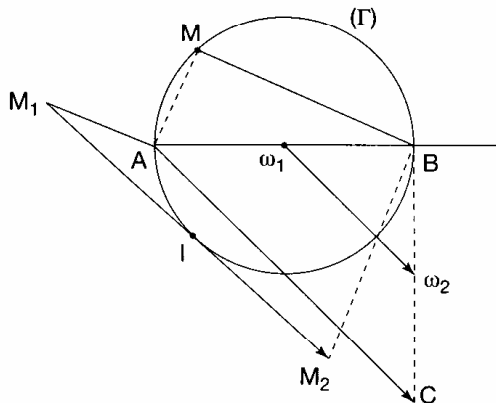
2. a) • L'image de $\mathcal{C}$ par r_1 est le cercle de diamètre $[AB]$ car $r_1(A) = A$ et $r_1(D) = B$.

• L'image de $\mathcal{C}$ par r est le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à I.

b) $r(M) = M'$ donc I, M, M' sont alignés.

De plus $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{NI}; \overrightarrow{NA}) = \frac{2\pi}{3}$
donc $(\overrightarrow{IN}; \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IN}; \overrightarrow{NA}) + (\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{NM}) \equiv 0 [2\pi]$
donc I, M, N sont alignés. D'où le résultat.

38 •



1. a) $t(A) = r_B \circ r_A^{-1}(A) = r_B(A) = C$.

b) t est une translation $t(A) = C$. Donc le vecteur de la translation t est $\overrightarrow{AC}$.

c) $M_2 = t(M_1)$ donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$ et le quadrilatère M_1M_2CA est un parallélogramme.

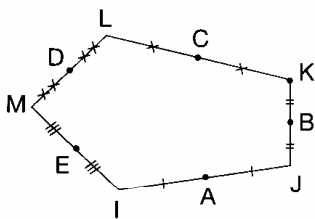
2. a) $M_2 = r_2(M)$ et $r_2(A) = C$ donc le lieu de M_2 est le cercle de diamètre $[BC]$.

b) ω_1 et ω_2 sont les milieux respectifs de $[BA]$ et $[BC]$ avec $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{\omega_1\omega_2}$.

c) $\overrightarrow{M_2I} = \overrightarrow{\omega_2\omega_1}$, donc le lieu de I est le cercle image du cercle de diamètre $[BC]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega_2\omega_1}$. C'est le cercle (Γ) .

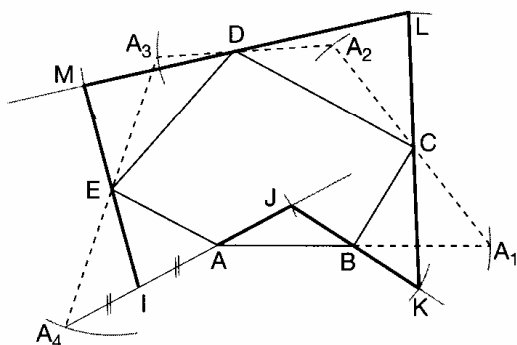
39 • **1. a)** La composée de trois homothéties de rapport -1 est une homothétie de rapport -1 donc une symétrie centrale.

b) La composée de quatre homothéties de rapport -1 est une homothétie de rapport 1 donc une translation.



2. a) f est une symétrie centrale.

$f(I) = s_E \circ s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A(I) = s_E \circ s_D \circ s_C \circ s_B(J)$
 $= s_E \circ s_D \circ s_C(K) = s_E \circ s_D(L) = s_E(M) = I$
donc f est la symétrie de centre I.



b) ABCDE étant donné on construit $A_4 = f(A)$ et I est le milieu de $[AA_4]$. On en déduit J, K, L et M.

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IK}$ d'où le résultat.

40 • **1. a)** $\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{BCA'} = \frac{2\pi}{3}$

donc $\widehat{BA'C} = \frac{\pi}{6}$ et le triangle BCA' est isocèle.

b) $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{2}$ donc (DC) est médiatrice de $[AA']$ dans le triangle isocèle ADA' .

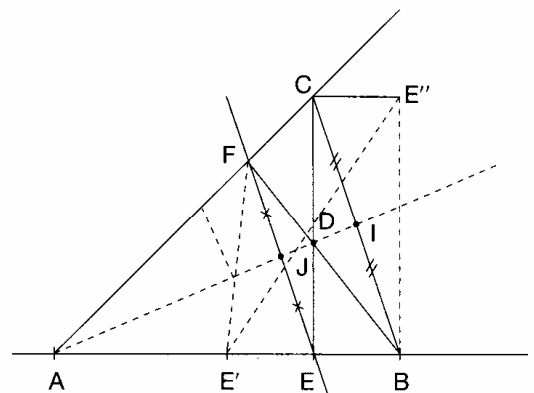
2. a) $f = s_1 \circ s_2 = s_{BD} \circ s_{DC} = r\left(D; -\frac{2\pi}{3}\right)$

$g = s_3 \circ s_4 = s_{AC} \circ s_{DB} = r\left(A; \frac{2\pi}{3}\right)$.

b) $h(A) = f \circ g(A) = f(A) = A'$.

h est la translation de vecteur $2 \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}$.

41 •



$B \xrightarrow{h_A} E; E \xrightarrow{h_D} C$

1. a) $h_A(C) = F$ car les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

$h_D(F) = B$ car (EF) est parallèle à (CB) .

b) $C \xrightarrow{h_A} F \xrightarrow{h_D} B$

Si k_1 est le rapport de h_A et k_2 celui de h_D alors

$$\overrightarrow{EF} = k_1 \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BC} = k_2 \overrightarrow{FE}$$

donc $k_1 k_2 = -1$.

Il en résulte que $h_D \circ h_A$ est la symétrie de centre J.

2. Construction de E' et E'' (voir la figure).

$$\overrightarrow{CE''} = k_2 \overrightarrow{EE'} \text{ et } B \xrightarrow{h_A} E$$

$$E \longrightarrow E'$$

donc $\overrightarrow{E'E} = k_1 \overrightarrow{EB}$

donc $\overrightarrow{CE''} = -k_1 k_2 \overrightarrow{EB}$ d'où $\overrightarrow{CE''} = \overrightarrow{EB}$ et $EBE''C$ est un parallélogramme.

42 • **1.** Les droites (AG) et (BG) sont les médiatrices respectives des segments $[PM]$ et $[MQ]$ car AMP et MQB sont deux triangles équilatéraux.

2. a) $f = h_2(G; 2) \circ h_1\left(C; \frac{1}{2}\right)$.

f est donc une translation $f(C) = h_2(C) = C'$ avec $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GC}$ donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{GC}$.

b) $M' = f(M)$ donc $\overline{MM'} = \overline{GC}$ et $MM'CG$ est un parallélogramme.

c) $MPQC$ est un parallélogramme. Dans la symétrie s de centre N , $s(G) = M'$, $s(P) = Q$, $s(M) = C$ donc le triangle PMQ a pour image PCQ et $M' = s(G)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle PCQ .

3. $M' = f(M)$ donc M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overline{GC}$ et ainsi l'ensemble des points M' est l'image du segment $[AB]$ par cette translation.

43 • $G \xrightarrow{h_1} E \quad F \xrightarrow{h_2} H$

a) L'image de la droite (CG) est la droite (EF) car $(CG) \parallel (EF)$ et $h_1(G) = E$.

De même $h_2(F) = H$ donc l'image de (EF) par h_2 est (HB) . Il en résulte que (HB) est l'image de (CG) par $h_2 \circ h_1$.

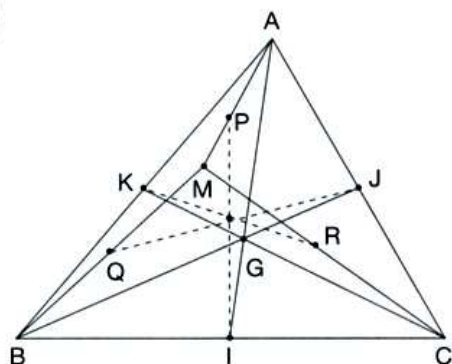
b) $(CF) \xrightarrow{h_2} (GH) \xrightarrow{h_1} (ED)$
donc (CF) a pour image (ED) par $h_1 \circ h_2$.

c) $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont les composées d'homothéties de même centre donc $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.

$(CF) \xrightarrow{h_1 \circ h_2} (ED)$ et $(CG) \xrightarrow{h_2 \circ h_1} (HB)$

C est l'intersection de (CF) et (CG) donc son image par $h_2 \circ h_1$ (ou $h_1 \circ h_2$) est l'intersection de (ED) et (HB) c'est-à-dire A . Il en résulte de C, A, I sont trois points alignés.

44 •



G est le centre de gravité du triangle ABC .

On note $h_1 = h(G; -2)$ et $h_2 = h(M; \frac{1}{2})$.

$I \xrightarrow{h_1} A \xrightarrow{h_2} P$

$J \longrightarrow B \longrightarrow Q$

$K \longrightarrow C \longrightarrow R$

Il résulte que $h_2 \circ h_1$ est la symétrie de centre Ω tel que

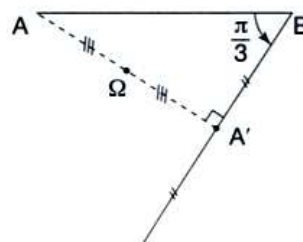
$G \xrightarrow{h_1} G \xrightarrow{h_2} G'$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{s_\Omega}$

G' est le milieu de $[MG]$ et Ω celui de $[GG']$.

$h_2 \circ h_1(I) = P$, $h_2 \circ h_1(J) = Q$ et $h_2 \circ h_1(K) = R$ donc les segments $[IP]$, $[JQ]$ et $[KR]$ ont le point Ω en commun.

45 $s_1 = s(A; 2; \frac{2\pi}{3})$, $s_2 = s(B; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3})$.

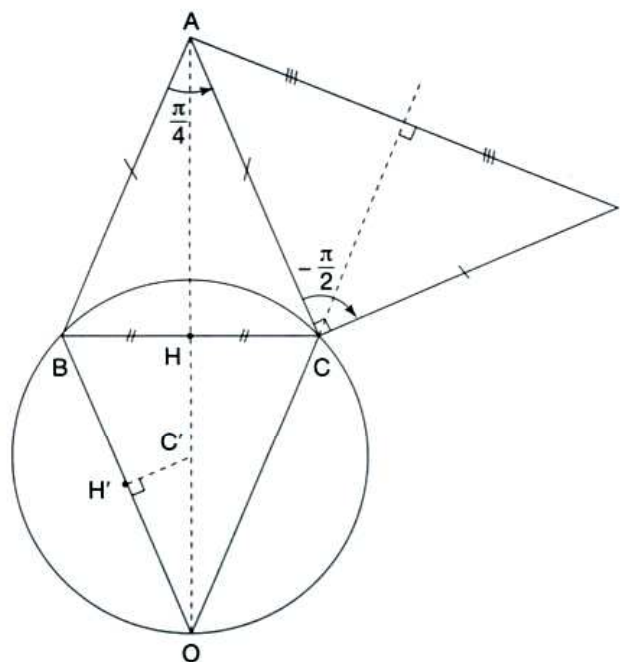
Il résulte que $s_2 \circ s_1$ est la similitude de rapport 1 et d'angle π . C'est donc une symétrie de centre Ω .



$s_2 \circ s_1(A) = s_2(A) = A'$ donc Ω est le milieu de $[AA']$.

46 • Corrigé dans le manuel.

47 •



1. $r_A = r(A; \frac{\pi}{4})$ et $r_C = r(C; -\frac{\pi}{2})$.

a) $f(A) = r_C \circ r_A(A) = r_C(A) = I$

$f(B) = r_C \circ r_A(B) = r_C(C) = C$.

b) f est donc une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ dont le centre est le point O intersection des médiatrices de $[BC]$ et $[AI]$.

Le triangle BOC est isocèle en O et (CO) est parallèle à (AB) donc $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{4}$.

Il résulte que $BACO$ est un losange.

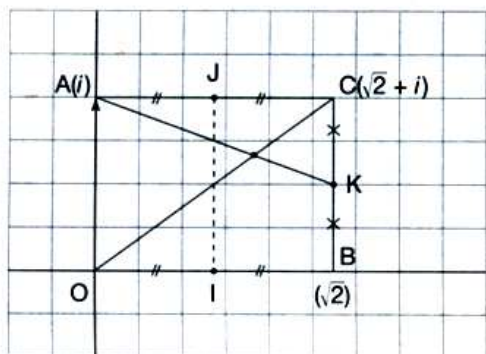
2. a) s est une similitude d'angle $\frac{\pi}{8}$ et de rapport $\frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{8}}$.

$(\overline{OC}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{8}$ donc $C' \in (OA)$.

b) L'image du segment $[OA]$ est le segment $[OB]$ donc l'image de H milieu de $[OA]$ est H' milieu de $[OB]$.

c) $(HC) \perp (OA)$ donc $(H'C') \perp (OB)$. C'est donc l'intersection des médiatrices de $[BC]$ et $[BO]$. C'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle BOC .

48 •



1. a) $A \xrightarrow{s} I \quad O \xrightarrow{s'} B$
 s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = ai + b \\ \sqrt{2} = b \end{cases} \text{ donc } a = \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Il en résulte que $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2}$.

b) Si ω est l'affixe de Ω alors

$$\begin{aligned} 2\omega - \sqrt{2}i\omega &= 2\sqrt{2}, \\ \omega(2 - \sqrt{2}i) &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{soit } \omega = \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}i.$$

c) L'image du rectangle $OBCA$ est le rectangle $BCJI$.

2. a) $z \xrightarrow{s} \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2} \xrightarrow{s'} -\frac{1}{2}z + i + \sqrt{2}$
 donc s_2 est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) $s^2(O) = C$; $s^2(B) = J$; $s^2(A) = K$.

Les droites (OC) , (BJ) et (AK) concourent donc en Ω centre de l'homothétie s^2 .

49 • a) $a = 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta$.

$$\begin{aligned} \text{donc } |a| &= \sqrt{1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \\ &= \sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}. \end{aligned}$$

$$|a| = \sqrt{4\cos^2 \theta} = 2|\cos \theta|.$$

b) f est une isométrie si et seulement si $|a| = 1$,

$$\text{soit } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \sin \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

$$f_{\frac{\pi}{3}} : z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + 4 + 4i$$

$$f_{\frac{2\pi}{3}} : z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + 4 + 4i.$$

2. $f_{\frac{2\pi}{3}} \circ f_{\frac{\pi}{3}}$ a pour écriture complexe

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - i). \quad (1)$$

On obtient une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ dont le centre est le point invariant.

50 • 1. a) Si Ω a pour affixe ω alors
 $\omega = (-3 + 4i)\bar{\omega} + 4 - 10i$.

En résolvant cette équation on trouve une unique solution : $\omega = 2 + i$.

b) $|-3 + 4i| = 5$. Le rapport de s est donc 5.

2. a) h^{-1} est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{5}$

$$\text{donc } z' = \frac{1}{5}z + \frac{4}{5}(2 + i)$$

$$\text{donc } z \xrightarrow{h^{-1}} \frac{1}{5}z + \frac{4}{5}(2 + i) \xrightarrow{s}$$

$$(-3 + 4i) \left[\frac{1}{5}\bar{z} + \frac{4}{5}(2 - i) \right] + 4 - 10i$$

$$\text{soit } z' = \frac{1}{5}(-3 + 4i)\bar{z} + \frac{6}{5}(2 - i).$$

b) $s \circ h^{-1}(\Omega) = \Omega$ car Ω est invariant par h^{-1} et s .

$$s \circ h^{-1}(A) = A \text{ car } \frac{1}{5}(-3 + 4i)(3i) + \frac{6}{5}(2 - i) = -3i.$$

Ainsi $s \circ h^{-1}$ est un antidéplacement ayant deux points invariants Ω et A . C'est la réflexion σ d'axe (ΩA) . Il en résulte que $s = h \circ \sigma = \sigma \circ h$.

51 • 1. a) Le point I a pour affixe $(-i)$.

b) Le rapport est $|2i| = 2$.

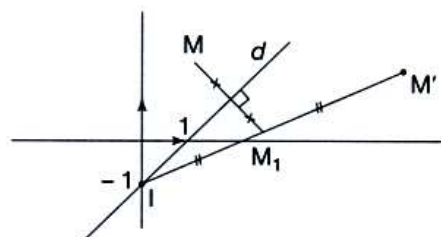
2. a) h^{-1} est l'homothétie de centre I et de rapport $+\frac{1}{2}$ donc h^{-1} a pour écriture complexe

$$z' = +\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{b) } z \xrightarrow{h^{-1}} \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}i \xrightarrow{f} 2i \left(\frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{2}i \right) + 2 - i$$

$$\text{soit } z' = i\bar{z} + 1 - i.$$

3. Si $z = x + iy$ est l'affixe d'un point invariant alors
 $x + iy = i(x - iy) + 1 - i$ soit la droite d d'équation $x - y - 1 = 0$. Ainsi σ est la réflexion d'axe d .



Ainsi f est la composée (commutative) de la réflexion d'axe d et de l'homothétie h de centre I et de rapport 2.

52 • 1. ω d'affixe $x + iy$ est invariant si et seulement si $x + iy = i(x - iy) + 3 + i$. On obtient le système

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \text{ donc pas de solution.}$$

2. a) A' a pour affixe $3 + 2i$, H a pour affixe $2 + i$ et H' a pour affixe $i[2 - i] + 3 + i = 4 + 3i$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ a pour affixe $2 + 2i$ donc t a pour écriture complexe $z' = z + 2 + 2i$.

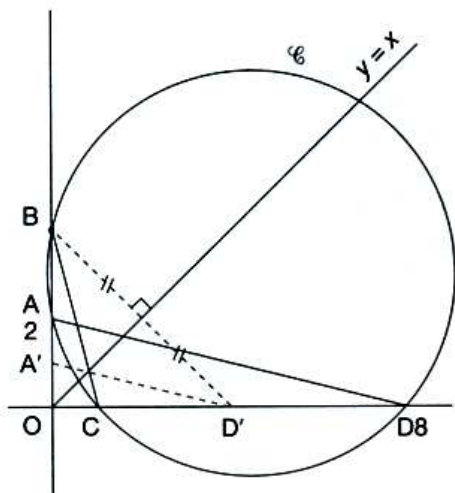
3. a) $z \xrightarrow{t^{-1}} z - 2 - 2i \xrightarrow{f} i(\bar{z} - 2 + 2i) + 3 + i$
soit $z' = i\bar{z} + 1 - i$.

b) Si $z = x + iy$ est l'afixe d'un point invariant, alors
 $x + iy = ix + y + 1 - i$ soit $x - y - 1 = 0$.

Donc σ est la réflexion d'axe d d'équation $x - y - 1 = 0$.

4. $f = \sigma \circ t$. Donc f est la composée de la réflexion σ d'axe d et de la translation dont le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(2; 2)$ colinéaire au vecteur $\vec{v}(1; 1)$ directeur de d .

53



1. $\widehat{OBC} = \widehat{ODA}$ comme angles inscrits.

Les triangles rectangles OAD et OCB sont donc semblables et non isométriques.

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} = 2.$$

$$\begin{array}{ccc} O & & O \\ 2. a) & A \xrightarrow{s} & C \\ & D & B \end{array}$$

Le rapport est donc $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$.

b) $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = -(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB})$ d'où s est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}$ donc distincte d'une réflexion.

c) O est invariant et comme s n'est pas une réflexion il n'y a pas d'autres points invariants.

d) s a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z}$ (car O est invariant).

$$s(A) = C \text{ donc } 1 = -2ai \text{ d'où } a = +\frac{i}{2} \text{ et } z' = +\frac{1}{2}iz.$$

3. a) h^{-1} a pour écriture complexe $z' = 2z$.

b) $z \xrightarrow{h^{-1}} 2z \xrightarrow{s} +\frac{1}{2}i \times 2\bar{z} = +i\bar{z}$ si le point d'afixe $x + iy$ est invariant alors

$$x + iy = +i(x - iy) = +ix + y \text{ d'où } x - y = 0.$$

La droite d d'équation $y = x$ est donc l'ensemble des points invariants.

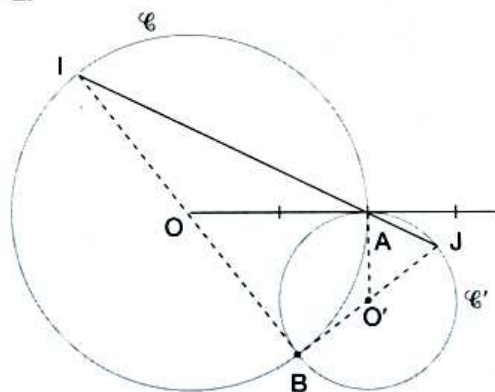
c) Il résulte des questions précédentes que :

$$s = \sigma \circ h.$$

Donc s est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$ et de la réflexion d'axe d d'équation $y = x$.

$$OAD \xrightarrow{h} OA'D' \xrightarrow{s_d} OCB$$

54



2. $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AJ}) = \frac{\pi}{2}$ donc I et J sont diamétralement opposés à B sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

$$I \xrightarrow{s(A; \frac{\pi}{2}; \frac{1}{2})} B \xrightarrow{s(A; \frac{\pi}{2}; \frac{1}{2})} J$$

donc J est l'image de I par l'homothétie de centre A, et de rapport $-\frac{1}{4}$. (Ou encore c'est la similitude de

centre A, de rapport $\frac{1}{4}$ et d'angle π .)

$$55 \quad 1. f = s(C; -\frac{\pi}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}}) \circ s(A; \frac{\pi}{4}; \sqrt{2}).$$

Donc f est la similitude de rapport 1 et d'angle 0, c'est donc une translation.

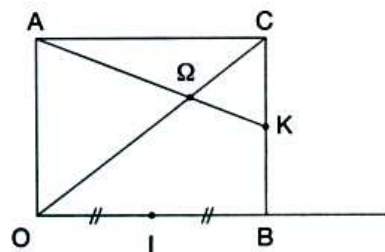
$$2. a) f(S) = s_C \circ s_A(S) = s_C(D) = R$$

$$f(P) = s_C \circ s_A(P) = s_C(B) = Q.$$

Il résulte que $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$ chacun d'eux étant le vecteur de la translation f .

Donc SRQP est un parallélogramme.

56



$$1. \begin{array}{ccc} O & \xrightarrow{s} & B \\ A & \xrightarrow{s} & I \end{array} \text{ le rapport est donc } \frac{IB}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BI}) = \frac{\pi}{2}$.

$$2. \begin{array}{ccc} O & \xrightarrow{s} & B \\ B & \xrightarrow{s} & B' \end{array} \text{ donc } (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } B' \in [BC),$$

de plus $BB' = \frac{\sqrt{2}}{2} OB = 1$ donc $B' = C$.

$O \xrightarrow{s} B$ donc le milieu de $[OB]$ a pour image
 $B \xrightarrow{s} C$
 le milieu de $[BC]$ soit $s(I) = K$.

3. a) f a pour rapport $\frac{1}{2}$ et pour angle π . C'est donc une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ ayant le même centre que s .

b) $f(O) = s \circ s(O) = s(B) = C$
 $f(A) = s \circ s(A) = s(I) = K$.

Le centre Ω de f (donc de s) est aligné avec O et C d'une part et A et K d'autre part, donc Ω est l'intersection des droites (AK) et (OC) .

4. a) s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$.
 $s(O) = B$ donc $\sqrt{2} = b$

$s(A) = I$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = ai + b$

soit $a = \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2}$.

Ainsi l'affixe ω de Ω est définie par :

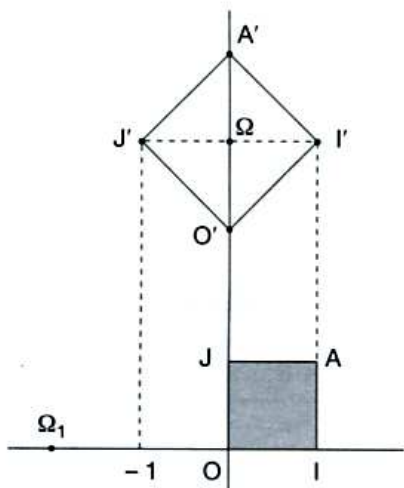
$$(2 - \sqrt{2}i)\omega = 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2} - i)\omega = 2 \text{ et } \omega = \frac{2}{3}(\sqrt{2} + i).$$

57 • **1. a)** $s : z' = (1 + i)z + 2i$.

O' a pour affixe $2i$; I' a pour affixe $1 + 3i$;

J' a pour affixe $-1 + 3i$; A' a pour affixe $4i$.



b) $O'I'A'J'$ est un carré.

2. a) s est la similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω_1 d'affixe -2 donc f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

$$O \xrightarrow{s} O' \xrightarrow{r} I'$$

$$I \xrightarrow{s} I' \xrightarrow{r} A'$$

$$A \xrightarrow{s} A' \xrightarrow{r} J'$$

$$J \xrightarrow{s} J' \xrightarrow{r} O'$$

d'où le résultat.

$$\text{b) } z' = az + b \text{ avec } O \longrightarrow I' \\ I \longrightarrow A'$$

$$\text{donc } 1 + 3i = b$$

$$4i = a + b \text{ d'où } a = i - 1$$

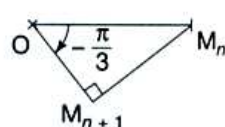
$$\text{donc } z' = (-1 + i)z + 1 + 3i$$

$$|-1 + i| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}.$$

Le centre de la similitude f a pour affixe $\frac{1}{5}(-1 + 7i)$.

58 • **1. a)** s est la similitude de centre O , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $(-\frac{\pi}{3})$.

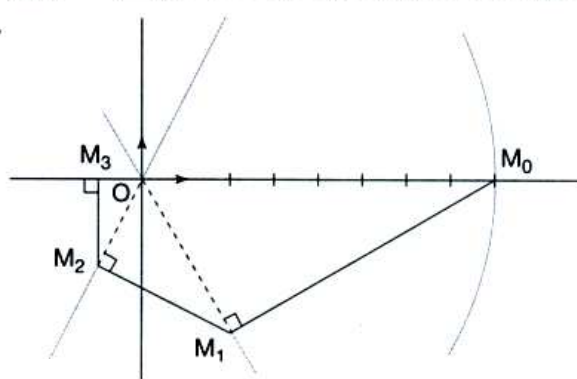
b) Le triangle OM_nM_{n+1} est un demi-triangle équilatéral.



2. a) s_3 est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{8}$ et de centre O .

$M_{n+3} = s^3(M_n)$ donc O, M_n, M_{n+3} sont alignés.

3.



$$\text{a) } M_0M_1 = 4\sqrt{3}.$$

$$M_nM_{n+1} = \frac{1}{2}M_{n-1}M_n$$

$$d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n$$

d_n est donc la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $4\sqrt{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \frac{4\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}} = 8\sqrt{3}.$$

Prendre toutes les initiatives

$$\text{59} \bullet h = h(0; -k) \circ r(0; \pi) = h' \circ r(0; \pi).$$

$$\text{60} \bullet A_1 \xrightarrow{h_1} A_1 \xrightarrow{h_2} A'$$

$h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport k_1k_2 et de centre I



$$\text{avec } \overrightarrow{A_2A'} = k_2\overrightarrow{A_2A_1} \text{ et } \overrightarrow{IA'} = k_1k_2\overrightarrow{IA_1}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{IA_2} + k_2\overrightarrow{A_2A_1} = k_1k_2\overrightarrow{IA_1}$$

$$\text{soit } \overrightarrow{IA_2}(1 - k_2) + \overrightarrow{IA_1}(k_2 - k_1k_2) = 0.$$

c) Les coordonnées de A' sont :

$$x = 2m - 1 \text{ et } y = 2m(1 - m)$$

$$\text{d'où } m = \frac{x+1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$

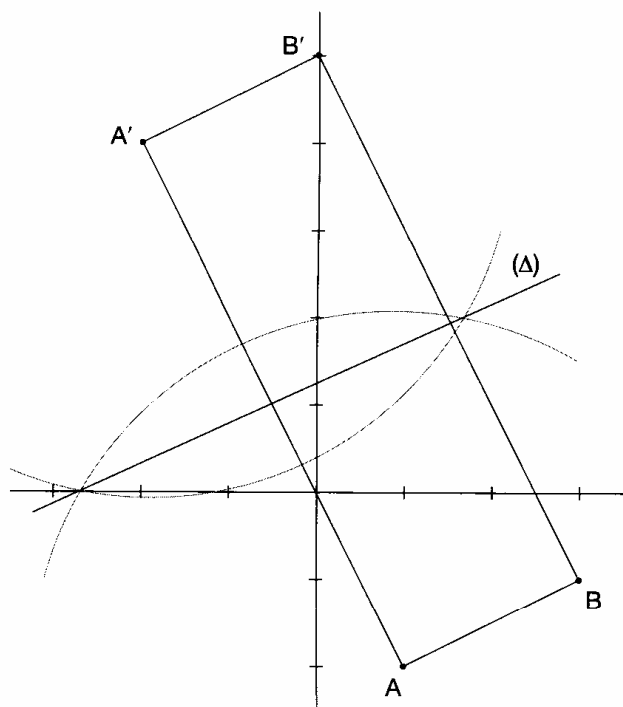
Donc A' est un point de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$

De plus $m > 0$ et $m \neq 1$ donc $x > -1$ et $x \neq 1$.

Il en résulte que $\mathcal{P}$ est l'arc de la parabole $\mathcal{C}$ obtenu pour $x > -1$ mais privé de I .

65



1. a) Évident.

b) Δ a pour équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$.

c) σ a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $A \rightarrow A'$ et $B \rightarrow B'$

$$-2 + 4i = a(1 + 2i) + b$$

$$5i = a(3 + i) + b$$

Il résulte que $a = \frac{1}{5}(3 + 4i)$ et $b = 2i - 1$.

2. a) C a pour affixe $7 - 5i$ et D a pour affixe $3 - 7i$.

b) $z' - (1 + C) = -2[z - (1 + i)]$ soit $z' = -2z + 3(1 + i)$.

$h(A')$ a pour affixe $-2(-2 + 4i) + 3 + 3i = 7 - 5i$

$h(B')$ a pour affixe $-2(5i) + 3 + 3i = 3 - 7i$

donc $h(A') = C$ et $h(B') = D$.

$$\begin{aligned} \text{c) } z &\xrightarrow{g} -\frac{2}{5}(3 + 4i)\bar{z} + 5 - i \xrightarrow{h^{-1}} \\ &-\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{5}(3 + 4i)\bar{z} + 8 - i\right] + \frac{3}{2}(1 + i) \end{aligned}$$

soit $z' = \frac{1}{5}(3 + 4i)\bar{z} - 1 + 2i$.

Il en résulte que $f = \sigma$ donc $g = h \circ \sigma$ composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport -2 et de la réflexion d'axe Δ .

66 1. a) Faux.

b) σ a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$.

t a pour écriture complexe $z' = z + 1 + i$ donc $f = t \circ \sigma$. Vraie.

c) $t_{\overline{OI}} \circ f = t_{\overline{OI}} \circ t_{\overline{OA}} \circ s = t_{\overline{IA}} \circ \sigma$

soit $\sigma_d \circ \sigma_{OI} \circ \sigma_{OI} = \sigma_1$

donc vraie.

d) Vraie.

2. a) $k(I)$ est le milieu de $[AJ]$ donc vraie.

b) $h\left(O; -\frac{1}{2}\right)$ a pour écriture complexe $z' = -\frac{1}{2}z$

donc $z \xrightarrow{h} -\frac{1}{2}z \xrightarrow{t_{\overline{OA}}} -\frac{1}{2}z + 1 + i$ donc vraie.

c) Faux.

d) k est une homothétie de rapport $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$O \xrightarrow{h} O \xrightarrow{t} A$$

donc $\overline{GA} = -\frac{1}{2}\overline{GO} = -\frac{1}{2}\overline{GA} - \frac{1}{2}\overline{AO}$.

$\frac{3}{2}\overline{GA} = -\overline{AO}$ et $\overline{AG} = \frac{3}{2}\overline{AO}$. Ainsi G est le centre de gravité du triangle AIO donc vraie.

e) k est l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ donc

$k = s\left(G; \pi; \frac{1}{2}\right)$ donc vraie.

67 1. Vraie.

2. Faux, car une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1 donc une similitude directe.

3. $s_2 \circ s_1$ est une similitude de rapport 1 donc un déplacement ou un antidéplacement. Il en résulte que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques. Donc la proposition est vraie.

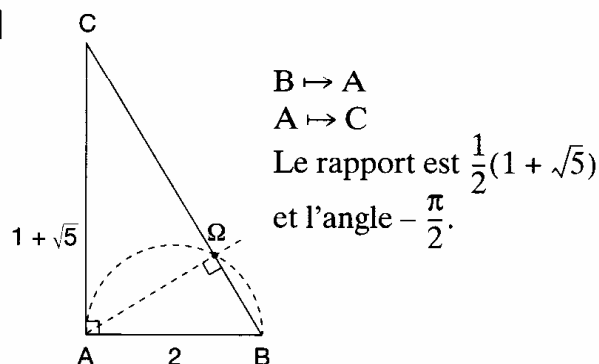
4. A d'affixe $2 - i$ a pour image le point d'affixe

$$\frac{1}{5}(3 - 4i)(2 + i) = 2 - i$$

donc A a pour image A , ainsi que O . Il en résulte que la transformation est la réflexion d'axe (OA)

$\left(\left|\frac{1}{5}(3 - 4i)\right| = 1\right)$.

68



$$B \rightarrow A$$

$$A \rightarrow C$$

Le rapport est $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

et l'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. $s \circ s$ est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ de même centre Ω que s . De plus

$$B \xrightarrow{s} A \xrightarrow{s} C$$

donc Ω aligné avec B et C est un point de la droite (BC).

De plus $B \rightarrow A$ donc $(\overline{\Omega B}; \overline{\Omega A}) = -\frac{\pi}{2}$ et Ω appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$ tracé sur la figure ci-dessus.

Il résulte que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

Travaux dirigés (page 152)

TD 1

1. $N'(0; 0; z_0)$.Soit d la distance de N à (Oz) , $d = NN' = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.
 $N \in S \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 9 \Leftrightarrow d = 3$.2. a) Cette intersection est l'ensemble des points du plan d'équation $z = 0$ (c'est-à-dire (xOy)) situés à la distance 3 de l'axe (Oz) donc de O : c'est le cercle de centre O et de rayon 3.b) L'axe (Oz) coupe le plan P en $\Omega(0; 0; 5)$. L'ensemble des points du plan P situés à la distance 3 de l'axe (Oz) , donc de Ω est le cercle de centre Ω et de rayon 3.c) Le cercle de centre $\Omega_1(0; 0; -4)$ et de rayon 3.3. a) $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \end{cases}$ donc l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$ est la réunion des deux droites définies par $\begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$.b) L'intersection de S et du plan d'équation $y = 0$ est la réunion des deux droites définies par $\begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$.4. a) Analytiquement, la distance est $\frac{|-2|}{\sqrt{1}} = 2$. $\begin{cases} x = 2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{5} \text{ ou } y = -\sqrt{5} \end{cases}$ donc l'intersection de S et du plan d'équation $x = 2$ est la réunion des deux droites définies par $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{5} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{5} \end{cases}$.b) Le cylindre S et le plan d'équation $x = a$ ont des points communs pour $a \in [-3; 3]$. L'intersection est réduite à une seule droite pour $|a| = 3$.

TD 2

1. a) $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = (0; 0; 0)$:le plan (xOy) coupe le cône au point O .b) $\begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ donc l'intersectiontion de S et du plan P d'équation $z = 5$ est le cercle du plan P , de centre $\Omega(0; 0; 5)$ et de rayon 2.c) $\begin{cases} z = -3 \\ x^2 + y^2 = \frac{36}{25} \end{cases}$ donc l'intersection de S et duplan Q d'équation $z = -3$ est le cercle du plan P , de centre $\Omega_1(0; 0; -3)$ et de rayon $\frac{6}{5}$.2. a) $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - \frac{2}{5}z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{2}{5}z = 0 \end{cases}$.b) $\begin{cases} y = 0 \\ x - \frac{2}{5}z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x + \frac{2}{5}z = 0 \end{cases}$ 3. a) $\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{4}{25}z^2 - y^2 = 1 \end{cases}$.b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{i}$ vecteur normal au plan P_1 et sont non colinéaires.c) $\vec{O_1M} = Y\vec{u} + Z\vec{v} = y\vec{j} + z\vec{k}$ soit

$$Y\left(\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{5}{4}\vec{k}\right) + Z\left(-\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{5}{4}\vec{k}\right) = y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$\text{On en déduit } y = \frac{Y-Z}{2} \text{ et } z = \frac{5}{4}(Y+Z)$$

$$\text{puis } Y = y + \frac{2}{5}z \text{ et } Z = -y + \frac{2}{5}z.$$

d) $YZ = \left(y + \frac{2}{5}z\right)\left(-y + \frac{2}{5}z\right) = \frac{4}{25}x^2 - y^2$ et d'après le a), $YZ = 1$. La courbe $\mathcal{C}$ est donc une hyperbole dont les asymptotes sont les axes $(O_1; \vec{u})$ et $(O_1; \vec{v})$.e) Si $\lambda = 0$, l'intersection est la réunion de deux droites passant par O (des génératrices).Si $\lambda \neq 0$, l'intersection est une hyperbole.

f) Situation identique.

2 a) $f(0; 5) = 25$. **b)** $f(-2; -3) = 13$. **c)** $f(3; 4) = 25$.

3 1. a) • z est toujours positif comme somme de deux carrés.

• Les coordonnées de O vérifient l'équation :

$$0^2 + 0^2 = 0.$$

b) • $f(x; y) = x^2 + y^2 = f(-x; y)$: la surface S est symétrique par rapport au plan d'équation (yOz) .

• $f(x; y) = x^2 + y^2 = f(x; -y)$: la surface S est symétrique par rapport au plan d'équation (xOz) .

2. a) • $A(1; 1; 2)$; $B(-1; 1; 2)$; $C(\sqrt{2}; 0; 2)$; $D(0; -\sqrt{2}; 2)$.

b) $z = 2$.

c) $\begin{cases} z = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ l'intersection de P

et de S et l'ensemble des points de P situés à la distance $\sqrt{2}$ du point $\Omega(0; 0; 2)$.

d) L'intersection de S et de Q est le cercle du plan Q , centré en $\Omega_1(0; 0; 4)$ et de rayon 2.

e) Si $\lambda < 0$, l'intersection est vide (car $x^2 + y^2 \geq 0$). Si $\lambda \geq 0$, l'intersection est un cercle (éventuellement réduit à un point pour $\lambda = 0$) centré sur $[Oz]$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

3. a) • $\begin{cases} x = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$. L'intersection de

S et du plan (yOz) est donc la parabole d'équation $z = y^2$ dans le plan (yOz) rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

• $\begin{cases} x = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = x^2 \end{cases}$. L'intersection de S et

du plan (xOz) est donc la parabole d'équation $z = x^2$ dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O_1; \vec{j}, \vec{k})$ avec $O_1(2; 0; 0)$.

• De même, l'intersection de S et du plan d'équation $y = 2$ est la parabole d'équation $z = x^2 + 4$ dans ce plan rapporté au repère orthonormal $(O_2; \vec{j}, \vec{k})$ avec $O_2(0; 2; 0)$.

• L'intersection de S et du plan d'équation $x = \lambda$ est donc la parabole d'équation $z = y^2 + \lambda^2$ dans ce plan rapporté au repère orthonormal $(O_\lambda; \vec{j}; \vec{k})$ avec $O_\lambda(\lambda; 0; 0)$.

4. a) Pour tout point M de S , le plan P perpendiculaire à $[Oz]$ passant par M coupe S suivant un cercle $\mathcal{C}$ de ce plan centré sur $[Oz]$. Ce plan P coupe la parabole définie au **3. a)** en N appartenant aussi à $\mathcal{C}$ (et aussi en un second point, en général...). M est l'image de N dans une rotation d'axe (Oz) .

b) Résulte du fait que

$$\frac{(x_A^2 + y_A^2) + (x_B^2 + y_B^2)}{2} \neq \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2$$

(pour $A \neq B$).

La surface S ne peut contenir de segment $[AB]$ car le milieu du segment n'appartient pas à S .

TD 4

1. a) $xy = 0 = z$.

b) $xy = (-x)(-y)$: la surface S est symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{k})$.

2. $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. L'intersection de S et du plan (xOy) est la réunion des deux axes $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$.

3. a) $A(1; -1; -1)$, $B(2; -\frac{1}{2}; -1)$, $C(\frac{1}{2}; -2; -1)$ et $D(10; -0,1; -1)$.

b) Ils appartiennent à S et au plan d'équation $z = -1$.

c) $\begin{cases} z = xy \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ z = -1 \end{cases}$ (car $x \neq 0$).

L'intersection de S et du plan P est l'hyperbole équilatère, dans le plan P , d'équation $y = -\frac{1}{x}$.

d) L'intersection de S et du plan d'équation $z = \lambda$ est l'hyperbole d'équation $y = \frac{\lambda}{x}$.

4. a) $\begin{cases} z = xy \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = 0$, donc l'intersection de S

avec le plan d'équation $x = 0$ est contenue dans la droite intersection des plan d'équations $x = 0$ et $z = 0$. Réciproquement, tout point de la droite intersection des plans d'équation $x = 0$ et $z = 0$ appartient à S car $0 \times y = 0$.

L'intersection de S avec le plan d'équation $x = 0$ est donc l'axe $(O; \vec{j})$.

b) De même, l'intersection de S avec le plan d'équation $y = 0$ est l'axe $(O; \vec{k})$.

c) $\begin{cases} z = xy \\ x = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ z = \lambda y \end{cases}$:

l'intersection de S avec le plan d'équation $x = \lambda$ est la droite de ce plan d'équation (dans ce plan) $z = \lambda y$. De même, l'intersection de S avec le plan d'équation $y = \lambda$ est la droite de ce plan d'équation (dans ce plan) $z = \lambda x$.

5. $\begin{cases} z = xy \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 \\ x - y = 0 \end{cases}$:

l'intersection de S et du plan d'équation $x - y = 0$ est la parabole d'équation (dans ce plan) $z = x^2$.

$$\begin{aligned}
 1. a) R &= \text{bar}\{(M, \mu), (N, 1 - \mu)\} \\
 &= \text{bar}\{(A, \mu\lambda), (B, \mu(1 - \lambda)), (C(1 - \mu)(1 - \lambda)), \\
 &\quad (D, \lambda(1 - \mu))\} \\
 &= \text{bar}\{(A, \mu\lambda), (D, \lambda(1 - \mu)), (B, \mu(1 - \lambda)), (C(1 - \mu) \\
 &\quad (1 - \lambda))\} \\
 &= \text{bar}\{(P, \lambda), (Q, 1 - \lambda)\}.
 \end{aligned}$$

b) Il résulte du a) que, quels que soient λ et μ (non nuls), R appartient à (MN) et à (PQ) : ces deux droites sont concourantes.

2. a) Immédiat.

b) $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB}$: les coordonnées de M sont donc $(\lambda - (1 - \lambda); \lambda + (1 - \lambda); \lambda - (1 - \lambda))$, soit :

$$(2\lambda - 1; 1; 2\lambda - 1),$$

qui vérifient bien $xy = z$. Donc M appartient bien à S .

La vérification se fait de la même façon pour N , P et Q .

c) Cela résulte de la définition barycentrique d'une droite : par exemple, la droite (AB) est l'ensemble

des barycentres de (A, λ) et de $(B, 1 - \lambda)$, avec λ réel.

d) D'après 2. b), les coordonnées de M sont : $(2\lambda - 1; 1; 2\lambda - 1)$.

On trouve de la même manière $N(2\lambda - 1; -1; 1 - 2\lambda)$. R est le barycentre de (M, μ) et de $(N, 1 - \mu)$, donc $\overrightarrow{OR} = \mu \overrightarrow{OM} + (1 - \mu) \overrightarrow{ON}$ et les coordonnées de R sont $(2\lambda - 1; 2\mu - 1; (2\lambda - 1)(2\mu - 1))$.

Elles vérifient $xy = z$, donc R appartient bien à S .

e) (AB) est l'ensemble des points $M(2\lambda - 1; 1; 2\lambda - 1)$ qui appartiennent au plan P_1 d'équation $y = 1$.

f) Les coordonnées de E vérifient $\begin{cases} z = xy \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = z$,

donc E appartient au plan P_2 d'équation $x - z = 0$.

P_1 et P_2 sont sécants car les vecteurs $\vec{n}_1(0; 1; 0)$ et $\vec{n}_2(1; 0; -1)$, normaux respectivement à P_1 et à P_2 , ne sont pas colinéaires.

Leur intersection est donc une droite.

Elle contient les points A et B : c'est la droite (AB) .

g) Cela résulte de e) et de f).

De même, l'intersection de S et du plan P_3 est la droite (AD) .

Corrigés des exercices

Sections planes d'un cylindre

1 Corrigé dans le manuel.

2 $y^2 + z^2 = 3$.

3 a) Le cercle de centre $\Omega(0; 0; 2)$ et de rayon 5 dans le plan d'équation $z = 2$.

b) Deux droites (parallèles) définies par :

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}.$$

c) Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y = 6$ n'ont pas de point commun car pour tout M de (Oz) , $d(M, \mathcal{P}) = 6 > 5$.

4 $y^2 + z^2 = 20$.

Sections planes d'un cône

5 1. a) Théorème de Thalès dans le triangle OAK :

$$\frac{MH}{OH} = \frac{AK}{OA} \Leftrightarrow MH^2 = \frac{4}{25} OH^2.$$

b) $MH^2 = x^2 + y^2$, $OH^2 = z^2$ et $0 \leq OH \leq 5$.

2. a) H est le projeté orthogonal de M sur l'axe $[Oz]$.

Il en résulte $MH^2 = x^2 + y^2$, $OH^2 = z^2$.

$$MH^2 = \frac{4}{25} OH^2 \Leftrightarrow \frac{MH}{OH} = \frac{2}{5}.$$

b) Si $z \neq 0$

Cette hypothèse entraîne que x et y ne peuvent être simultanément nuls : M n'appartient pas à l'axe $[Oz]$. Dans le plan (OAM) , la parallèle à (HM) passant par A coupe (OM) en L .

Théorème de Thalès dans le triangle OAL : $\frac{MH}{OH} = \frac{AL}{OA}$,

donc $AL = 2$. L appartient au cercle de centre A et de rayon AK (dans le plan d'équation $z = 5$), L est donc l'image de K dans une rotation d'axe $[Oz]$: M appartient donc bien au cône S .

Si $z = 0$, alors $x^2 + y^2 = 0$ soit $x = y = z = 0$: M est en O , sommet du cône.

6 Corrigé dans le manuel.

$$7 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

L'ensemble des points communs au cylindre et au cône est la réunion des deux cercles de rayon 3, centrés sur (Oz) et situés dans les plans d'équation $z = \frac{3}{2}$ et $z = -\frac{3}{2}$.

8 • Équation du cône S d'axe (Oz) de sommet O et contenant A : $x^2 + y^2 = 4z^2$.

$$1^2 + 3^2 = 10 \neq 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9, \text{ donc } B \notin S.$$

A et B n'appartiennent pas à un même cône de sommet O et d'axe (Oz).

9 • a) Le cercle de centre $\Omega(0; 0; -2)$ et de rayon 2 dans le plan d'équation $z = -2$.

b) Une hyperbole.

c) Une hyperbole.

10 • Le cône S de sommet O a pour équation :
$$x^2 + y^2 = 9z^2.$$

a) $x^2 + y^2 = 144$. Le domaine est un disque de rayon 12 donc $\mathcal{A} = 144\pi$.

b) $2\mathcal{A} = 288\pi$ donc $r^2 = x^2 + y^2 = 288 = 9z^2$, soit $z = 4\sqrt{2}$ ou $z = -4\sqrt{2}$.

11 • 1. Le cercle de centre $\Omega(0; 4; 0)$ et de rayon 3 dans le plan d'équation $y = 4$.

2. (Oy) est l'axe du cône.

$x^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = z = 0 \Rightarrow y = 0$: le sommet du cône est O.

3. $\frac{9}{16}y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{3}\sqrt{1+z^2}$ donc deux hyperboles d'asymptotes :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{4}{3}z \end{cases}.$$

Sections de surfaces d'équation $z = x^2 + y^2$ et $z = xy$

12 1. a) La section de S et du plan P d'équation $z = \lambda$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \lambda$ du plan P de centre $\Omega(0; 0; \lambda)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

b) $\mathcal{A} = \pi\lambda$.

$$c) \mathcal{V} = \int_0^9 \pi\lambda \, d\lambda = \frac{81\pi}{2}.$$

$$2. \int_0^{\lambda_0} \pi\lambda \, d\lambda = \frac{\pi\lambda_0^2}{2} = \frac{81\pi}{4}, \text{ soit } \lambda_0 = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

13 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$2. \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

Les deux surfaces se coupent suivant le cercle $\mathcal{C}$ sur le plan d'équation $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, centré sur $(O; \vec{k})$ et de

$$\text{rayon } r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

3. a) $r^2 = x^2 + y^2 = \lambda$, donc $\mathcal{A} = \pi\lambda$.

$$b) \mathcal{V}_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \pi\lambda \, d\lambda = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right).$$

c) $r^2 = x^2 + y^2 = 1 - \lambda^2$, d'où $\mathcal{A} = \pi(1 - \lambda^2)$.

$$d) \mathcal{V}_2 = \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 \pi(1 - \lambda^2) d\lambda = \pi \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{3} \right) = \pi \left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{24} \right] = \pi \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6} \right).$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{5\pi}{12} (3 - \sqrt{5}) \approx 0,999 \, 98.$$

Fonction de deux variables

14 • 1. $f(x; y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 - 10$.

2. $\forall (x; y), f(x; y) > -10$ et ce minimum est atteint pour $(1; -3)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x; y) = +\infty$: la fonction f n'admet pas de maximum.

3. $k \geq -10$.

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10 + k$: la section est le cercle centré en $\Omega(1; -3; k)$, de rayon $\sqrt{10+k}$ dans le plan d'équation $z = k$.

Remarque : Pour $z = -10$, le cercle est réduit à un point : Ω .

$$4. \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 2x + 6y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}.$$

La section de la surface S par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y = 0$ est la parabole d'équation $z = x^2 - 2x$ dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

Divers

15 Corrigé dans le manuel.

16 1. a) Dans $(O; \vec{j}, \vec{k})$, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $z = y^2 - 4$: c'est une parabole.

b) $\mathcal{C}$ a pour sommet le point de coordonnées $(0; 0; -4)$. Elle coupe l'axe $(O; \vec{j})$ aux points de coordonnées $(0; 2; 0)$ et $(0; -2; 0)$.

2. Dans le plan d'équation $x = \lambda$, de repère $(O_1; \vec{j}, \vec{k})$ avec $O_1(1; 0; 0)$, $z = y^2 - 4$ est l'équation d'une parabole, image de $\mathcal{C}$ dans la translation de vecteur $\lambda \vec{i}$.

$$3. a) \begin{cases} z = y^2 - 4 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = -\sqrt{7} \text{ ou } y = \sqrt{7} \end{cases}$$

La section de S par le plan d'équation $z = 3$ est la réunion de deux droites (parallèles) intersections des plans d'équation $y = -\sqrt{7}$ et $y = \sqrt{7}$ avec le plan d'équation $z = 3$.

$$b) \begin{cases} z = -4 \\ z = y^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

La section de S par le plan d'équation $z = -4$ est la droite intersection des plans d'équation $y = 0$ et $z = -4$.

c) L'équation $\lambda = y^2 - 4$ (équivalente à $y^2 = \lambda + 4$) admet des solutions (en y) pour $\lambda \geq -4$.

Pour $\lambda > -4$, le plan d'équation $z = \lambda$ coupe S.

Remarque : Pour $\lambda = -4$, le plan est tangent à S.

$$4. a) \begin{cases} y = 0 \\ z = y^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$$

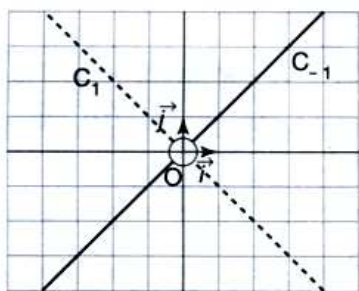
Le plan P d'équation $y = 0$ coupe S suivant la droite intersection de P avec le plan d'équation $z = -4$.

C'est le plan tangent vu au 3. c).

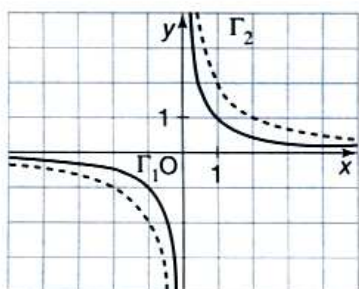
$$b) \begin{cases} y = 5 \\ z = y^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = 21 \end{cases}$$

Le plan Q d'équation $y = 5$ coupe S suivant la droite intersection de Q avec le plan d'équation $z = 21$.

17 1. $z = a$. La section de S par le plan d'équation $z = a$ est la droite d'équation $y = ax$ (privée du point O).



2. $y = b$. La section de S par le plan d'équation $y = b$ est l'hyperbole d'équation $xz = b$ si b est non nul et la réunion des axes $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{k})$ (sauf le point O) si b est nul.



3. $x = c$.

Pour c non nul, la section de S par le plan d'équation $x = c$ est la droite d'équation $z = \frac{y}{c}$ (privée du point O).

18 1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - 1 = 0$: D et D' sont orthogonales. $\vec{OA} \cdot \vec{u} = 0$ donc $d(O, D) = \|\vec{OA}\| = 1$. De même $d(O, D') = \|\vec{OB}\| = 1$ et O est bien équidistant de D et D'.

$$2. \vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{u}, \text{ d'où } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit N un point de D.

$$MN^2 = (t-x)^2 + (t-y)^2 + (1-z)^2 = f(t).$$

$f'(t) = 2(t-x) + 2(t-y) = 2(2t-x-y)$, donc f est minimale pour $t = \frac{x+y}{2}$ et la valeur minimum de MN^2 est :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{(x-y)^2}{2} + (1-z)^2.$$

Dans $\mathbb{R}^+$, MN est minimum lorsque MN^2 est minimum, donc la distance de M à la droite D est :

$$\sqrt{\frac{(x-y)^2}{2} + (1-z)^2}.$$

3. De même, $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$ est une représentation paramétrique de D'.

Soit K un point de D'.

$$MK^2 = (t-x)^2 + (-t-y)^2 + (-1-z)^2 = g(t).$$

$g'(t) = 2(t-x) - 2(-t-y) = 2(2t-x+y)$ donc g est minimale pour $t = \frac{x-y}{2}$ et la valeur minimum de MK^2 est :

$$g\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{(x+y)^2}{2} + (1+z)^2.$$

La distance de M à la droite D' est le réel :

$$\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2} + (1+z)^2}.$$

$$4. M \in S \Leftrightarrow MN = MK \Leftrightarrow MN^2 = MK^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2} + (1-z)^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + (1+z)^2 \\ \Leftrightarrow xy + 2z = 0.$$

5. a) $\vec{AB} = -2\vec{k}$, donc les plans orthogonaux à (AB) ont pour équation $z = \lambda$, avec λ réel.

$$\begin{cases} z = \lambda \\ xy + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \\ xy = -2\lambda \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$, la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$ est l'hyperbole d'équation $xy = -2\lambda$ dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$, avec $\Omega(0; 0; \lambda)$.

Si $\lambda = 0$, la section de S par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion des deux axes $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$.

b) Les plans orthogonaux à l'axe $(O; \vec{i})$ ont donc pour vecteur normal $\vec{i}$ et donc une équation de la forme $x = a$, avec a réel.

$$\begin{cases} x = a \\ xy + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$$

La section de S par un plan orthogonal à l'axe $(O; \vec{i})$ est donc une droite. Il en est de même pour la section de S par un plan orthogonal à l'axe $(O; \vec{j})$.

19 • Bac Inde, 2004.

1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

2. a) Équation générale d'un cône d'axe $[Oz]$ et de sommet O : $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$.

Comme $A(0; 5; 5)$ appartient au cône, $\lambda^2 = 1$ et le cône admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.

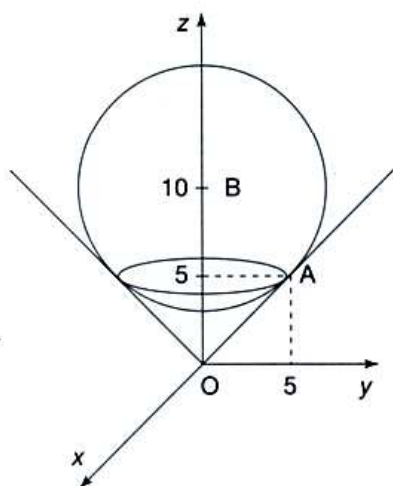
b) Une équation de la sphère de centre B passant par A :

$$x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = BA^2 = 50.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

L'intersection du cône Γ et de la sphère S et donc le cercle de centre le point de coordonnées $(0; 0; 5)$, de rayon 5 dans le plan d'équation $z = 5$.

c)



3. La section d'un cône par un plan parallèle à son axe et ne le contenant pas est une hyperbole. C'est donc la figure 3.

4. Par l'absurde. Supposons x et y sont tous les deux impairs. Il existe deux entiers u et v tels que $x = 2u + 1$ et $y = 2v + 1$, soit $x^2 = 4u^2 + 4u + 1$ et $x^2 \equiv 1 [4]$. De même, $y^2 \equiv 1 [4]$, d'où $z^2 \equiv 2 [4]$.

x et y étant (supposés) impairs, x^2 et y^2 le sont aussi. Il en résulte que z^2 et z sont pairs et donc que $z \equiv 0 [2]$ et $z^2 \equiv 0 [4]$. Ce qui contredit le résultat précédent $z^2 \equiv 2 [4]$. x et y ne peuvent donc être simultanément impairs.

20 • 1. a) $\forall (x; y; z), (-x^2)y = x^2y$. Le plan (yOz) d'équation $x = 0$ est plan de symétrie de T .

b) $\forall (x; y; z), (-x^2)(-y) = (-z)$. Le point O est centre de symétrie de T .

2. a) $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. L'intersection de T et du plan (xOz) est l'axe (Ox) .

b) De même, l'intersection de T et du plan (yOz) est l'axe (Oy) .

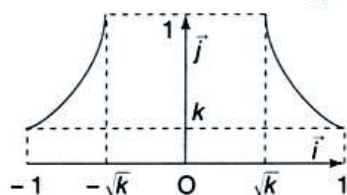
3. a) $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

L'intersection de T et du plan (xOy) est la réunion des axes (Ox) et (Oy) .

b) L'intersection de T et du plan $z = k$ a pour équation, dans le repère $(K; \vec{i}, \vec{j})$ $x^2 y = k$. k étant non nul, x ne peut être nul et une équation équivalente est :

$$y = \frac{k}{x^2}.$$

4.



a) $S(k) = 1 - \int_{\sqrt{k}}^1 \frac{k}{x^2} dx = (1 - \sqrt{k})^2$.

b) $V = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{k} + k) dx = \frac{1}{6}$.

21 • a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 2z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z^2 = \frac{25}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = -\frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_1 : z = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ et } \mathcal{P}_2 : z = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathcal{C}_1 \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{50}{3} \\ z = \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \mathcal{C}_2 \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{50}{3} \\ z = -\frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

b) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont contenus dans le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = \frac{50}{3}$.

22 • 1. a) Les vecteurs $\vec{u}(1; \sqrt{3}; -2)$ et $\vec{v}(2; 0; -1)$ normaux, respectivement à P et Q n'étant pas colinéaires, les deux plans P et Q ne sont pas parallèles.

b) $M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ x + \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$
d'où le système d'équations paramétriques de la droite Δ :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

c) Un cône de sommet O et d'axe $[Ox)$ admet une équation de la forme $y^2 + z^2 = \lambda^2 x^2$.

Le point $A(1; \sqrt{3}; 2)$ appartient au cône : donc $\lambda^2 = 7$, et $y^2 + z^2 = 7x^2$ est une équation du cône.

2. Figure 1 : $z = 2$.

Figure 2 : $x = 3$.

3. a) La liste des carrés modulo 7 :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

L'équation $x^2 \equiv 3 [7]$ n'a donc pas de solution.

b) $(7 \text{ divise } a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \equiv 0 [7])$

or cette dernière proposition n'est vraie que si a^2 et b^2 sont congrus à 0 [7], c'est-à-dire si a et b sont congrus à 0 [7].

4. a) $A \in \Gamma \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 7a^2$, donc 7 divise $b^2 + c^2$ et d'après la question précédente, 7 divise b et c . Il existe deux entiers b_1 et c_1 tels que $b = 7b_1$ et $c = 7c_1$ d'où $49(b_1^2 + c_1^2) = 7a^2$ donc $a^2 \equiv 0 [7]$ et $a \equiv 0 [7]$, d'après le a).

b) Deux remarques préliminaires :

- Le seul point du cône d'abscisse 0 est son sommet O .
- Pour des raisons de symétrie (par rapport à O , aux plans de coordonnées) on peut se limiter à chercher des points dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Supposons donc qu'il existe des points du cône ayant des coordonnées entières avec x non nul. Soit x_0 la plus petite des abscisses de ces points. Il existe un point $M(x_0; z_0)$ de Γ (autre que le sommet) dont les coordonnées sont entières. Alors, d'après la question précédente, il existe des entiers x_1, y_1 et z_1 tels que $x = 7x_1, y = 7y_1$ et $z = 7z_1$.

De $y_0^2 + z_0^2 = 7x_0^2$, on déduit $y_1^2 + z_1^2 = 7x_1^2$. Le point $M_1(x_1; y_1; z_1)$ appartient donc à Γ et ses coordonnées sont entières, avec $0 < x_1 < x_0$, ce qui est impossible car x_0 est, par hypothèse, la plus petite abscisse non nulle. Le seul point à coordonnées entières du cône est donc son sommet.

Problèmes de synthèse (spécialité)

$$\begin{aligned} \text{1. } S_n - S_m &= \frac{n(n+1) - m(m+1)}{2} \\ &= \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}. \end{aligned}$$

• Si n et m sont de même parité, alors $n - m = 2q$ et donc $S_n - S_m = q(n + m + 1)$.

Or a divise $n - m$ et a impair, donc a divise q et donc a divise $S_n - S_m$.

• Si n et m sont de parités différentes, alors $n + m + 1$ est pair et donc $S_n - S_m = (n - m)q'$ d'où le résultat.

• Soit r le reste; $m = 11q + r$ et $S_m = \frac{11q^2 + r^2 + r}{2}$.

Or $r^2 + r$ est toujours pair, donc $11q'$ aussi, donc :

$$S_m \equiv \frac{r^2 + r}{2} \pmod{11}$$

avec r dans $[0; 10]$. En examinant les onze cas, on trouve que les restes possibles sont 0; 1; 3; 4; 6; 10.

$$\text{2. } \begin{array}{c} | \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad | \\ S_m = f(x) \qquad \qquad x \qquad \qquad S_{m+1} \end{array}$$

Donc, $x - f(x) \leq S_{m+1} - S_m = m + 1$;

or, $S_m \leq 2x$ et donc $m^2 < m^2 + m \leq 2x$, $m < \sqrt{2x}$, d'où le résultat.

3. a) Si $\frac{n(n+1)}{2} = u^2$, alors $n(n+1) = 2u^2$. Si n impair,

alors $n + 1 = 2q$, d'où $nq = u^2$. Or, n et q sont premiers entre eux, donc n et q sont des carrés parfaits.

Même démonstration si n est pair.

Cette question prouve deux choses :

lorsque n est pair, $n = 2q$, alors $n + 1$ est un carré parfait et q aussi, donc $n = 2v^2$.

b) $S_8 = 36$.

Si S_n est un carré parfait et n pair, alors, d'après **3. a)**,
 $n = 2v^2$ et $n + 1 = u^2$.

Si $n' = 4n^2 + 4n$, alors :

$$\begin{aligned} S_{n'} &= \frac{(4n^2 + 4n)(4n^2 + 4n + 1)}{2} \\ &= (2n^2 + 2n)(2n + 1)^2 \\ &= 2n(n + 1)(2n + 1)^2 = 4v^2 \times u^2 \times (2n + 1)^2. \end{aligned}$$

c) n est pair et S_n est un carré parfait, alors $n = 2v^2$, $n + 1 = u^2$, donc $2v^2 + 1 = u^2$ et $2v^2 = (u - 1)(u + 1)$.

Or, u est impair (car $2v^2 + 1 = u^2$), donc $u - 1$ est pair. $u - 1 = 2k$ et $u + 1 = 2(k + 1)$ donc $n = 2v^2 = 4k(k + 1)$. v^2 est pair, donc v aussi, donc $v = 2q$ et :

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{2v^2}{8} = q^2.$$

2. 1. a) Soit $1 + kb$ et $1 + k'b$ les deux nombres.

On peut supposer $k < k'$. Si a divise la différence $(k' - k)b$, alors a divise $k' - k$ (car a est premier avec b). Ce qui est impossible car $k' - k < a$.

b) $1 + kb = qa + r$ et $1 + k'b = q'a + r'$.

Si on avait $r = r'$, la différence $(q' - q)a$ serait divisible par a , ce qui est impossible.

c) et **d)** Il y a donc a restes distincts dont l'un est nul. Donc il existe x , entier naturel inférieur à a , tel que $1 + bx = ay$.

e) Même démarche avec la suite $1, 1 + a, \dots$

2. a) D'après Bezout, x et y sont premiers entre eux; de même pour x' et y' .

$ay > bx$ donc en divisant par by : $\frac{a}{b} > \frac{x}{y}$.

Même démarche en partant de $bx' - ay' = 1$ pour

$$\frac{a}{b} < \frac{x'}{y'}.$$

b) $ay - bx = bx' - ay'$ d'où $a(y + y') = b(x + x')$, donc, puisque a est premier avec b , a divise $x + x'$. Mais $x + x' < 2a$ donc $a = x + x'$.

De même, $b = y + y'$.

On remplace dans l'égalité $ay - bx = 1$, ce qui donne :

$$(x + x')y - (y + y')x = 1$$

d'où le résultat.

c) Raisonnons par contradiction et supposons par exemple $c < x'$, c'est-à-dire $c \leq x' - 1$.

Fixons d et prenons $\frac{x}{y} < \frac{c}{d} < \frac{x'}{y'}$. Quel que soit le nombre c vérifiant les inégalités précédentes, $cy' < dx'$ et $dx < cy$.

Donc pour c prenant les valeurs $c = 1, 2, \dots, x' - 1$, tous les nombres cy' étant majorés par dy' , le plus grand l'est aussi, donc $(x' - 1)y' < dy'$, donc :

$$\frac{y'(x' - 1)}{x'} < d < \frac{cy}{x} < \frac{(x' - 1)y}{x},$$

$$\text{donc } \frac{y'(x' - 1)}{x'} < d < \frac{(x' - 1)y}{x},$$

$$\text{d'où } xy'x' - xy' < x'^2y - x'y,$$

qui équivaut à $xy'x' < x'^2y + xy' - x'y$, c'est-à-dire :

$$xy'x' < x'^2y + 1, \text{ d'où } xy' - x'y < \frac{1}{x'},$$

c'est-à-dire $1 < \frac{1}{x'}$, d'où la contradiction.

Des démonstrations semblables permettent de montrer les autres inégalités.

3 • A. 1. a) Équation de d : $y = rx + r$.

On résout le système $\begin{cases} y = rx + r \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

L'équation donnant les abscisses des points d'intersection est $x^2 + (rx + r)^2 = 1$, c'est-à-dire :

$$(1 + r^2)x^2 + 2r^2x + r^2 - 1 = 0.$$

-1 est évidemment solution, l'autre est obtenue en disant que le produit est $\frac{c}{a}$. On obtient les expressions

données par le texte. Donc si $r \in \mathbb{Q}$, x et y aussi.

b) Si M est un point du cercle (sauf A) de coordonnées $(s; t)$, alors le coefficient directeur de (AM) est

$r = \frac{t}{s+1}$. Donc si s et t sont dans Q , alors r aussi.

2. a) Immédiat.

b) Si m et n ont pour PGCD d , alors $m = dm'$ et $n = dn'$ avec m' et n' premiers entre eux et alors :

$$x = \frac{m'^2 - n'^2}{m'^2 + n'^2} \text{ et } y = \frac{2m'n'}{m'^2 + n'^2}.$$

B. $x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$, donc le problème équi-

vaut à trouver les points rationnels sur le cercle unité, ce qui a été vu au A.

4 • A. 1. $m = dm_1$, $n = dn_1$ et $m^2 = \lambda n$, donc $dm_1^2 = \lambda n_1$.

Or, n_1 est premier avec m_1 , donc avec m_1^2 .

Ainsi n_1 divisant dm_1^2 , il divise d et $d = \delta n_1$. Il en résulte que $n = \delta n_1^2$ et n est divisible par un carré parfait.

2. a) $n = pn_1^2$; si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, alors $\mu = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_k^{\beta_k}$

avec $\beta_k = \frac{\alpha_k}{2}$ si α_k est pair et $\beta_k = \frac{\alpha_k + 1}{2}$ si α_k impair.

Il en résulte que les autres valeurs de m sont des multiples du nombre m ainsi formé.

b) $n = 108 = 2^2 \times 3^3$, la plus petite valeur de m est $2 \times 3^2 = 18$, et les autres valeurs de m sont $2^2 \times 3^2$; 2×3^3 .

B. 1. $p = n - \frac{m^2}{n}$ donc :

$$p = \delta n_1^2 - \frac{dm_1^2}{n_1} = \delta n_1^2 - \frac{\delta n_1 m_1^2}{n_1} = \delta(n_1 + m_1)(n_1 - m_1).$$

2. • $p = 1$ si $n_1 + m_1 = 1$ et $n_1 - m_1 = 1$, ce qui est impossible.

• $p = 2$ si $n_1 + m_1 = 2$ et $n_1 - m_1 = 1$, ce qui est impossible.

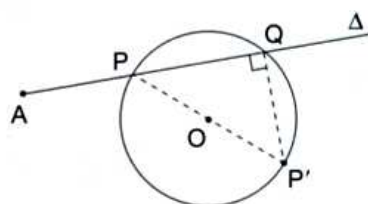
3. p premier a pour diviseurs 1 ou p , donc :

$$n_1 + m_1 = p, n_1 - m_1 = 1, \delta = 1.$$

Donc $n_1 = \frac{p+1}{2}$ et $m_1 = \frac{p-1}{2}$. Donc l'équation [4] a

une solution unique qui est $n = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ et $m = \frac{p^2-1}{4}$.

4.



$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ car P' se projette orthogonalement en Q sur Δ . De plus,

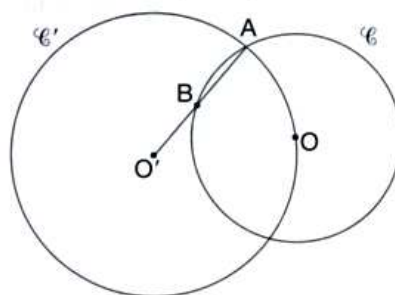
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OP}) = AO^2 - OP^2 = AO^2 - r^2.$$

C. $\overrightarrow{O'B} \cdot \overrightarrow{OA} = OO'^2 - r'^2$; or, $r' > r$, donc $\overrightarrow{O'B} \cdot \overrightarrow{OA} > 0$

et $O'B \times O'A = r'^2 - r^2$, ou encore $7 = r' - \frac{r^2}{r'}$.

En posant $p = 7$, $r' = n$ et $r = m$; on retrouve la situation

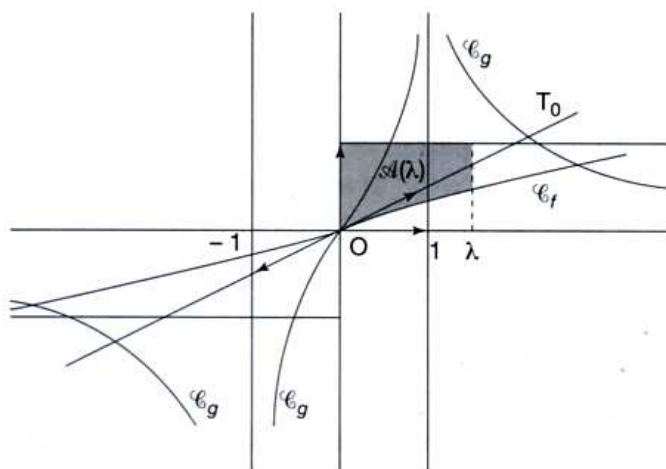
précédente, donc $r' = \left(\frac{7+1}{2}\right)^2 = 16$ et $r = \frac{49-1}{4} = 12$.



5 • A 1. $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f(x)$ donc f est une fonction impaire.

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1



2. a) $\frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x).$

b) $A(\lambda) = \int_0^\lambda [1 - f(x)] dx = \int_0^\lambda 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$
 $= [2x - 2 \ln(e^x + 1)]_0^\lambda = 2 \ln 2 + 2[\lambda - \ln(1 + 2\lambda)].$

c) $\lambda - \ln(1 + 2^\lambda) = \ln\left(\frac{e^\lambda}{1 + e^\lambda}\right)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^\lambda}{1 + e^\lambda}\right) = 0$
donc $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 2 \ln 2$.

B. Étude d'une suite

1. T_0 a pour équation $y = \frac{1}{2}x$. On pose pour $x \geq 0$

$\varphi(x) = \frac{1}{2}x - f(x)$ donc $\varphi'(x) = \frac{1}{2} - f'(x) = \frac{(1 - e^x)^2}{2(1 + e^x)^2}$
 ≥ 0 donc φ est strictement croissante et de plus $\varphi(0) = 0$ donc pour tout $x > 0$, $\varphi(x) > 0$ et T_0 est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

2. a) Pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x$

soit $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

b) Par récurrence on établit que $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$ soit

$0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

C. Étude d'une fonction logarithme

1. $g(-x) = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = -\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -g(x)$ donc g est une fonction impaire.

$g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+	-
$g(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	$-\infty \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	0

Voir courbe sur la figure de A1.

2. $B(b) = \frac{1}{b-2} \int_0^b g(t) dt$
 $= \frac{1}{b-2} [(x+1) \ln(x+1) - (x-1) \ln(x-1)]_2^b$

$B(b) = \frac{1}{b-2} [b \ln(b+1) + \ln(b+1) - b \ln(b-1) + \ln(b-1) - 3 \ln 3]$.

$B(b) = \frac{b}{b-2} \ln\left(\frac{b+1}{b-1}\right) + \frac{1}{b-2} \ln(b^2 - 1) - \frac{3 \ln 3}{b-2}$

donc $\lim_{b \rightarrow +\infty} B(b) = 0$.

D. Fonctions réciproques

1. g_1 est une bijection de $] -1 ; 1[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc g_1^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y$ d'où $\frac{1+x}{1-x} = e^y$ et $x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$

donc $g_1^{-1} : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $g_1^{-1} = f$.

2. $g(x) = g(x_0)$ équivaut à $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \left|\frac{1+x_0}{1-x_0}\right|$

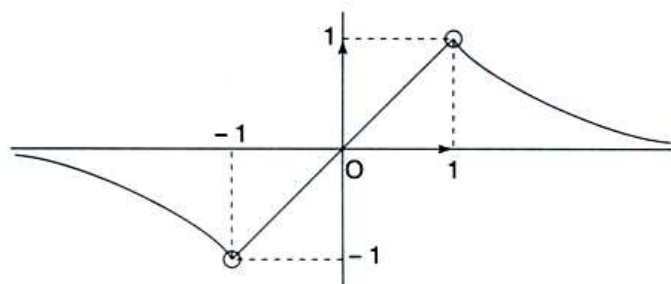
soit $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+x_0}{1-x_0}$ ou $\frac{1+x}{1-x} = -\frac{1+x_0}{1-x_0}$.

Il en résulte que $x = x_0$ ou $x = \frac{1}{x_0}$ avec $x_0 \neq 0$.

3. a) $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$ donc la fonction $f \circ g$ est impaire.

b) Si $x \in]-1 ; 1[$ $f \circ g(x) = (g^{-1} \circ g)(x) = x$.

Si $x > 1$ ou $x < -1$ $f \circ g(x) = \frac{1}{x}$.



6 : A. 1. • $f_1(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -f_1(x)$

donc O est centre de symétrie.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$ donc les droites d'équations respectives $y = 1$ et $y = -1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_{f_1}$.

• $f_1'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La tangente T en M_0 à $\mathcal{C}_{f_1}$ a pour équation

$y = \frac{4e^{2x_0}}{(e^{2x_0} + 1)^2} (x - x_0) + \frac{e^{2x_0} - 1}{e^{2x_0} + 1}$.

Donc P a pour coordonnées $\left(x_0 + \frac{e^{2x_0} + 1}{2e^{2x_0}} ; 1\right)$ et Q $\left(x_0 - \frac{e^{2x_0} + 1}{2e^{2x_0}} ; -1\right)$.

Il en résulte que $X_1 = \frac{e^{2x_0} + 1}{2e^{2x_0}}$ et $X_2 = -\frac{e^{2x_0} + 1}{2}$ d'où :

$\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} = \frac{2(e^{2x_0} + 1)}{e^{2x_0} + 1} = 2$.

B. 1. La translation de vecteur $\ln \sqrt{m} \vec{i}$ transforme M de coordonnées $(x; y)$ en M' de coordonnées $(X; Y)$ telles que $X = x + \ln \sqrt{m}$ et $Y = y$.

Or $y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ donc

$$Y = \frac{e^{2X} e^{-2 \ln \sqrt{m}} - 1}{e^{2X} e^{-2 \ln \sqrt{m}} + 1} = \frac{\frac{1}{m} e^{2X} - 1}{\frac{1}{m} e^{2X} + 1} = \frac{e^{2X} - m}{e^{2X} + m} = f_m(X).$$

Il en résulte que l'image de $\mathcal{C}_1$ est $\mathcal{C}_m$.

2. $f_m(x) - f_1(x) = \frac{e^{2x}(1-m)}{(e^{2x}+m)(e^{2x}+1)}$ avec $m > 0$ donc

si $0 < m < 1$, $f_m(x) > f_1(x)$ et $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de $\mathcal{C}_1$.

Si $m > 1$ $\mathcal{C}_m$ est au-dessous de $\mathcal{C}_1$.

3. a) $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+m} - 1 = \frac{e^{2x}-m}{e^{2x}+m} = f_m(x).$

b) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} [f_1(x) - f_m(x)] dx$ car $m > 1$ et $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_m$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+m} \right) dx \\ &= \left[\ln \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+m} \right]_{-\lambda}^{\lambda} = \ln \left(\frac{e^{2\lambda}+1}{e^{2\lambda}+m} \right) - \ln \left(\frac{e^{-2\lambda}+1}{e^{-2\lambda}+m} \right) \end{aligned}$$

et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln m.$

7 • A. 1. a) f définie pour $\left(x \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x+1} > 0\right)$, donc sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x} (1 + x \ln x - x \ln(x+1))$, d'où :

$$\lim_{0^+} f = +\infty.$$

c) $\lim_{+\infty} f = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) = \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \right).$

2. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0.$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	$+\infty$	0

3. Intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^k \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) dx &= \left[x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right]_1^k - \int_1^k \frac{dx}{x+1} \\ &= k \ln k - (k+1) \ln(k+1) + 2 \ln 2, \end{aligned}$$

d'où $\int_1^k f(x) dx = (k+1) \ln \left(\frac{k}{k+1} \right) + 2 \ln 2.$

B. 1. Sur $[m; m+1]$, $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{m}$, d'où le résultat.

2. $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{m+1}{m} \right) = -\ln \left(\frac{m}{m+1} \right) = \frac{1}{m} - f(m),$

d'où (à l'aide de **B. 1.**) l'encadrement demandé.

C. 1. Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$

2. $S_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{n+1}{n(2n+1)}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$

3. En additionnant membre à membre les encadrements de **B. 2.** obtenus en prenant $m = n, n+1, \dots, 2n$:

$$0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq S_n.$$

On déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

4. a) Pour tout $k \geq 1$, $f(k) = \frac{1}{k} + \ln k - \ln(k+1).$

En additionnant membre à membre les égalités obtenues pour $k = n, n+1, \dots, 2n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} f(k) &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} + \ln \frac{n}{2n+1} = v_n - \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) \\ &= v_n - \ln 2 \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = v_n - \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right). \end{aligned}$$

b) $u_n = v_n - \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right).$

$$v_n = u_n + \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right).$$

(u_n) converge vers zéro, donc (v_n) converge vers $\ln 2.$

8 • 1. Définition du nombre dérivé de $\ln$ en 1 (ou de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en zéro).

2. a) Poser $X = \frac{1}{x}.$

b) $\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$ pour tout $x > 0.$

On déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$

A. 1. a) On supposera $n \neq 0$ ($f_0(x) = 1 - x$).

• Pour tout x réel, $f'_n(x) = [n - (n+1)x]x^{n-1}.$

Sur $\mathbb{R}^+$, f'_n est du signe de $-x \left(x - \frac{n}{n+1} \right).$

Sur $\mathbb{R}^-$, f'_n est du signe de x_{n-1} , donc dépend de la parité de $n.$

Pour tout $n \geq 1$, $M_n = f_n \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$

• Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont celles de $-x^{n+1}.$

n pair

x	$-\infty$	0	$\frac{n}{n+1}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$
f_n	$+\infty$	0	M_n	$-\infty$

n impair

x	$-\infty$	0	$\frac{n}{n+1}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$
f	$-\infty$	0	M_n	$-\infty$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $M_n < 1$.

• Pour n impair, l'image de $\mathbb{R}$ par f_n est $]-\infty; M_n]$, donc l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution.

• Pour n pair, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique, située dans $\mathbb{R}^-$ (la restriction de f_n à $\mathbb{R}^-$ est une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$).

2. Pour m et n quelconques, $m > n \geq 1$:

$$f_m(x) = f_n(x) \Leftrightarrow (1-x)x^n(x^{m-n}-1) = 0.$$

Toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ contiennent $O(0;0)$ et $A(1;0)$.

$f'_n(0) = 0$, $f'_n(1) = -1$; les courbes $\mathcal{C}_n$ sont tangentes entre elles aux points O et A .

$$\begin{aligned} \text{B. 1. Pour } n \neq 0, M_n &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}. \end{aligned}$$

2. Voir la figure à la fin de l'exercice.

$$\text{Pour tout } n \geq 1, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x-1)(1-x) = -(x-1)^2 x^n.$$

Sur $[0; 1]$, cette différence est négative : $\mathcal{C}_{n+1}$ est en dessous de $\mathcal{C}_n$.

3. a) D'après le préliminaire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0 \left(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \right).$$

$$\text{b) } I_n = \int_0^1 x^n(1-x)dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Prévisible car, sur $[0; 1]$ $0 \leq g_n(x) \leq x^n$, donc, par intégration, $0 < I_n < \frac{1}{n+1}$.

$$\text{4. a) } S_n(x) = \sum_{i=0}^n g_i(x) = \sum_{i=0}^n (x^i - x^{i+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

• $S_n(1) = 0$ pour tout n .

Pour $0 \leq x \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 1$.

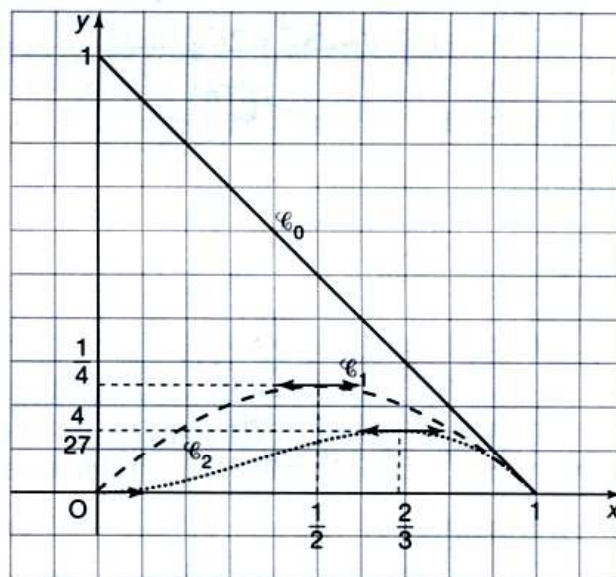
$$\bullet J_n = \left[x - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{n+1}{n+2}, \text{ donc :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } J_n &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n g_k(x) \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 g_k(x) dx \right) = \sum_{k=0}^n I_k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = S_n. \end{aligned}$$

On déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

c) Les limites sont toutes deux égales à 1.



$$\begin{aligned} \text{9} \bullet \text{ 3. Pour tout } n, f_{n+2} &= f_{n+1} + m_{n+1} = f_{n+1} + f_n, \\ m_{n+2} &= f_{n+1} = f_n + m_n = m_{n+1} + m_n, \\ u_{n+2} &= f_{n+2} + m_{n+2} = f_{n+1} + f_n + m_{n+1} + m_n \\ &= u_{n+1} + u_n. \end{aligned}$$

4. a) On suppose $r \neq 0$.

$$\begin{aligned} (r_n) \in E &\Leftrightarrow \text{pour tout } n \geq 0, r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = 0 \\ &\Leftrightarrow r^n(r^2 - r - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 - r - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b) } r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_0 = ar_1^0 + br_2^0 = 1 \\ u_1 = ar_1 + br_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ ar_1 + br_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \text{ et } b = \frac{\sqrt{5}+5}{10}.$$

Supposons que pour tout $k \leq n$, $u_k = ar_1^k + br_2^k$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } u_{n+1} &= u_n + u_{n-1} = ar_1^n + br_2^n + ar_1^{n-1} + br_2^{n-1} \\ &= ar_1^{n-1}(r_1+1) + br_2^{n-1}(r_2+1) \\ &= ar_1^{n-1} \times r_1^2 + br_2^{n-1} \times r_2^2 \\ &= ar_1^{n+1} + br_2^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie pour $n + 1$.

Or elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

d) Pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = ar_1^n + br_2^n = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} r_1^n + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} r_2^n \\ = -\frac{1}{\sqrt{5}} r_1^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} r_2^{n+1}.$$

$$\text{e) } u_n = \frac{1}{\sqrt{5} \times 2^{n+1}} ((1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}) \\ = \frac{1}{\sqrt{5} \times 2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\sqrt{5})^k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-\sqrt{5})^k \right).$$

• Pour k pair, les termes s'annulent deux à deux.

• Pour k impair,

$$\binom{n+1}{k} (\sqrt{5})^k - \binom{n+1}{k} (-\sqrt{5})^k = 2 \binom{n+1}{k} (\sqrt{5})^k,$$

et, en posant $k = 2p + 1$, $0 \leq p \leq E\left(\frac{n}{2}\right)$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5} \times 2^{n+1}} \times 2 \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n+1}{2p+1} (\sqrt{5})^{2p+1} \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n+1}{2p+1} (\sqrt{5})^{2p} = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n+1}{2p+1} 5^p.$$

$$5. f_n = u_{n-1}; m_n = u_n - f_n = u_n - u_{n-1}.$$

10 • **A. 1. a)** $z_1 = a$; $z_2 = a(s + 1)$; $z_3 = a(s^2 + s + 1)$; $z_4 = a(s^3 + s^2 + s + 1)$.

b) Si $s = -1$, $z_{n+1} = -z_n + a$; suite périodique à deux termes $z_0 = 0$; $z_1 = a$.

c) Si $s = 1$; $z_{n+1} = z_n + a$ et $z_n = na$.

d) Par récurrence, on démontre simplement que :

$$z_n = a \frac{s^n - 1}{s - 1}.$$

2. a) Si $z_{n+p} = z_n$ pour tout n , alors $z_p = z_0$; suite périodique.

b) $z_{n+2} = s(sz_n + a) + a = s^2 z_n + a(s + 1)$, d'où : $z_{n+2} - z_n = (s + 1)[(s - 1)z_n + a] = (s + 1)(z_{n+1} - z_n)$. Or, $z_{n+1} \neq z_n$ d'où le résultat.

c) • $z_{n+1} \neq z_n$, $z_{n+2} - z_n = (s + 1)(z_{n+1} - z_n)$; $z_0 = 0$; $z_1 = a$.

[2] s'écrit $z_{n+2} = (s + 1)z_{n+1} - sz_n$.

• $z_2 = a(s + 1)$; $z_3 = a(s^2 + s + 1)$. Montrons par

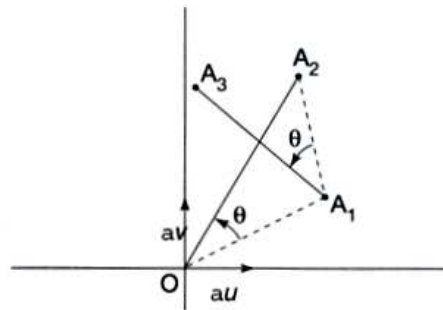
récurrence pour $s \neq 1$, que $z_n = \frac{a(s^n - 1)}{s - 1}$.

Vrai pour 0, 1, 2. Si c'est vrai jusque $n + 1$, alors :

$$z_{n+2} = \frac{a(s + 1)(s^{n+1} - 1)}{s - 1} - \frac{sa(s^n - 1)}{s - 1} = \frac{a(s^{n+2} - 1)}{s - 1}.$$

D'où le résultat.

B.



1. Notons z_n l'affixe de A_n , z_{n+1} celle de A_{n+1} et z_{n+2} celle de A_{n+2} .

$A_{n+2} = f_{A_n}(A_{n+1})$, donc :

$$z_{n+2} - z_n = re^{i\theta} (z_{n+1} - z_n)$$

$$\text{ou encore } \frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = re^{i\theta}.$$

2. a) D'après la partie A., $re^{i\theta} = s + 1$, d'où $s = re^{i\theta} - 1$.

De plus, $z_1 = a$; $z_0 = 0$.

$$\text{Donc } z' = (re^{i\theta} - 1)z + a.$$

b) $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $re^{i\theta} - 1 \neq 0$ et le centre de la simili-

tude a pour affixe $\frac{a}{2 - re^{i\theta}}$.

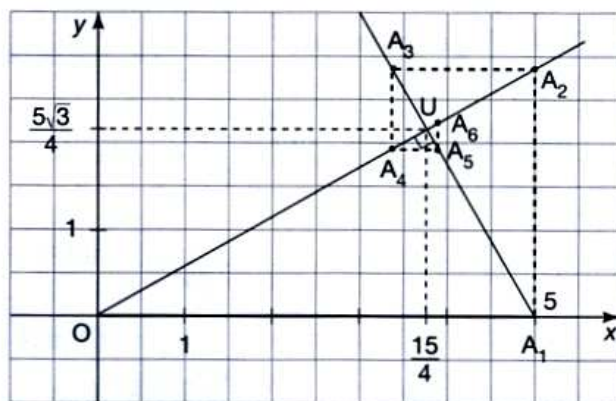
3. a) $r = \frac{1}{\cos \theta}$, S a pour rapport $\tan \theta$, pour angle $\frac{\pi}{2}$

et U a pour affixe $\frac{a}{1 - i \tan \theta}$.

b) L'angle de la similitude étant $\frac{\pi}{2}$, les points A_n appartiennent à l'une ou l'autre des droites (UO) et (UA_1) .

d) $a = 5$; $\theta = \frac{\pi}{6}$; $\cos \theta = \frac{3}{2}$; $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et U

a pour affixe $\frac{15}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}i$.



4. a) $r = 2 \cos \theta$ d'où :

$$z' = [2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) - 1] z + a \\ = [\cos 2\theta + i \sin 2\theta] z + a,$$

$$\text{ou encore } z' = e^{i2\theta} z + a.$$

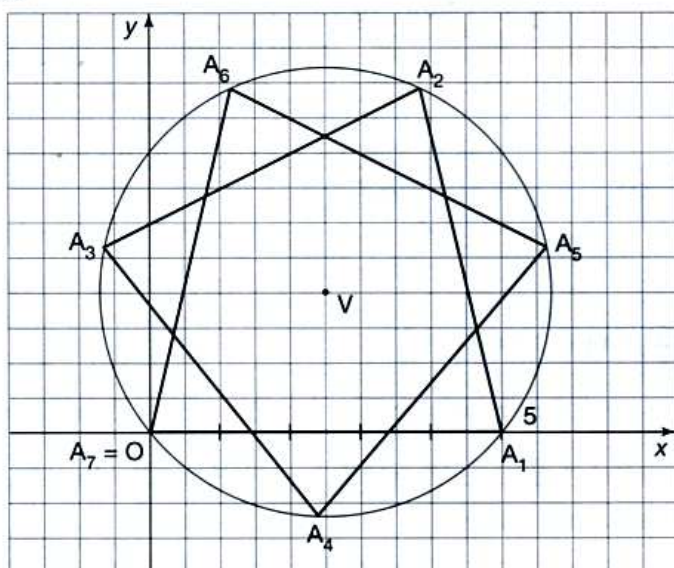
Ainsi S est une rotation d'angle 2θ et dont le centre a

pour affixe $\frac{a}{1 - e^{i2\theta}}$.

b) $OA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ et les points A_n sont sur le cercle de centre V passant par O .

c) Si $q = \frac{p}{q}\pi$ avec $\frac{p}{q}$ rationnel, la ligne est fermée.

d)



11 • 1. L'isobarycentre de A, B, C, D est aussi le barycentre de $(I; 2)(J; 2)$ donc le milieu O de $[IJ]$.

2. a) O étant l'isobarycentre :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ donc $a + b + c + d = 0$.

$$s\left(A; -\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) $B \xrightarrow{\quad} M$ donc :

$$m - a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (b - a) = \frac{1}{2} (1 - i) (b - a)$$

$$\text{d'où } m = \frac{1}{2} (1 - i)b + a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - i)b + a\left(\frac{1 + i}{2}\right)$$

$$\text{ou encore } m = \frac{1 + i}{2} (a - ib).$$

c) De manière analogue :

$$n = \frac{1 + i}{2} (b - ic); p = \frac{1 + i}{2} (c - id) \text{ et } q = \frac{1 + i}{2} (d - ia).$$

3. a) $m + n + p + q = \frac{1 + i}{2} [a + b + c + d - i(a + b + c + d)] = 0$ donc $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$ et O est l'isobarycentre de M, N, P, Q .

$$\text{b) } n - q = \frac{1 + i}{2} [b - d - i(c - a)]$$

$$= i \times \frac{1 + i}{2} [(a - c) - i(b - d)] = i(p - m).$$

Le complexe $\frac{n - q}{p - m}$ a pour module $\frac{QN}{MP}$ et pour argu-

ment $(\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{QN})$, or $\frac{n + q}{p - m} = i$ donc $QN = MP$ et

$(\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{QN}) = \frac{\pi}{2}$ et les droites MP et NQ sont perpendiculaires.

4. a) O est le barycentre de $(K; 2)$ et $(L; 2)$. Il est donc le milieu de $[KL]$. Il en résulte que le quadrilatère $ILJK$ est un parallélogramme.

$$\text{b) } z_K = \frac{1}{2} (p + m) = \frac{1 + i}{4} [a + c - i(b + d)] \text{ or } b + d$$

$$= -(a + c) \text{ donc } z_K = (a + c) \left(\frac{1 + i}{4}\right) (1 + i) = \frac{i}{2} (a + c).$$

$$\text{La même } z_J = \frac{i}{2} (a + c) \text{ donc } z_K = iz_J.$$

c) La rotation r a pour écriture complexe $z' = iz$ donc $r(J) = K$.

d) Le parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires et de même longueur est un carré.

12 • A. 1. a) r' est la composée de $r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ et t de

vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) $r'(A) = t \circ r(A) = t(B) = C$ et $r'(B) = t \circ r(B) = t(D) = E$ donc le centre de r' est l'intersection des médiatrices de $[AC]$ et $[BE]$ c'est donc le point O .

2. a) $f = r' \circ h$ est une similitude de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) $f(C) = (r' \circ h)(C) = r'(E) = D$. Il en résulte que $(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$ donc I est un point du demi-cercle de diamètre $[CD]$ passant par O .

c) $ID = \sqrt{3}IC$ d'où $ID^2 - 3IC^2 = 0$ et I est un point de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$.

3. a) $\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$ d'où la construction.

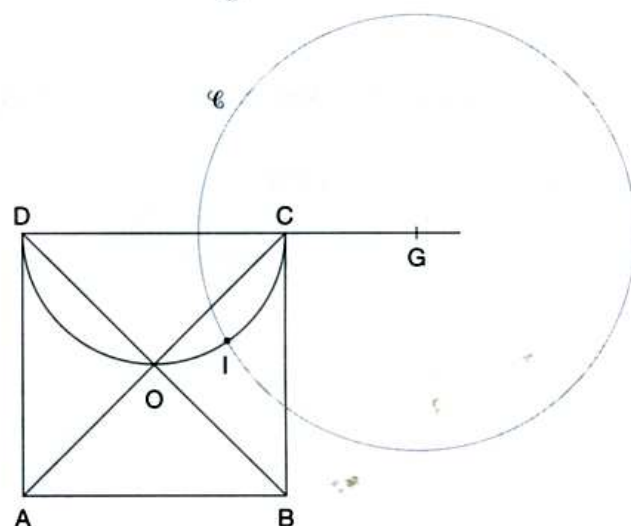
$$\text{b) } (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 0$$

$$-2MG^2 + GD^2 - 3GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{GC}) = 0.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GC} \text{ donc } 2MG^2 = -3GC^2 + GD^2$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ donc } MG^2 = \frac{3}{4} \text{ et } \mathcal{E} \text{ est le cercle de cen-}$$

tre G et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



c) I est l'intersection de $\mathcal{E}$ et du demi-cercle de diamètre $[CD]$ passant par O .

B. 1. On a pour écriture complexe $z' = iz$; t a pour écriture complexe $z' = z + 1$ et h a pour écriture complexe $z' = \sqrt{3}z + (1 - \sqrt{3})(i + 1)$.

$$2. z \xrightarrow{h} \sqrt{3}z + (1 - \sqrt{3})(1 + i) \xrightarrow{r} i\sqrt{3}z + (1 - \sqrt{3})(-1 + i) \xrightarrow{t} i\sqrt{3}z + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}).$$

Ainsi f a pour écriture complexe

$$z' = i\sqrt{3}z + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}).$$

3. Il en résulte de la question précédente que f est la similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport $\sqrt{3}$ et dont le centre I

$$a \text{ pour affixe : } \frac{3}{4} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

13 • A. Étude de la suite des carrés K_n

1. a) $\overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{OA_n}$ donc l'abscisse de B_n est $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Ainsi B_n a pour coordonnées $(2^n - 1; 2^{n-1})$. De même C_n a pour coordonnées $(2^{n-1} - 1; 2^{n-1})$. Le point O_n est le milieu de $[A_nC_n]$ donc les coordonnées sont $(3 \times 2^{n-2} - 1; 2^{n-2})$.

b) Le point C_n a pour coordonnées $x = 2^{n-1} - 1$ et $y = 2^{n-1}$ donc C_n appartient à la suite d'équation $y = x + 1$.

c) De même les points B_n appartiennent à la droite

$$\text{d'équation } y = \frac{1}{2}(x + 1) \text{ et les points } O_n \text{ à la droite}$$

$$\text{d'équation } y = \frac{1}{3}(x + 1).$$

d) Il est donc évident que ces trois droites sont concourantes au point $\Omega(-1; 0)$.

$$2. a) u_n = 4^{n-1}.$$

$$b) S_n = u_1 + \dots + u_n = 1 + \dots + 4^{n-1}$$

$$= \frac{(1 - 4^n)}{-3} = \frac{4^n - 1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{4^n} \right) = \frac{1}{3}.$$

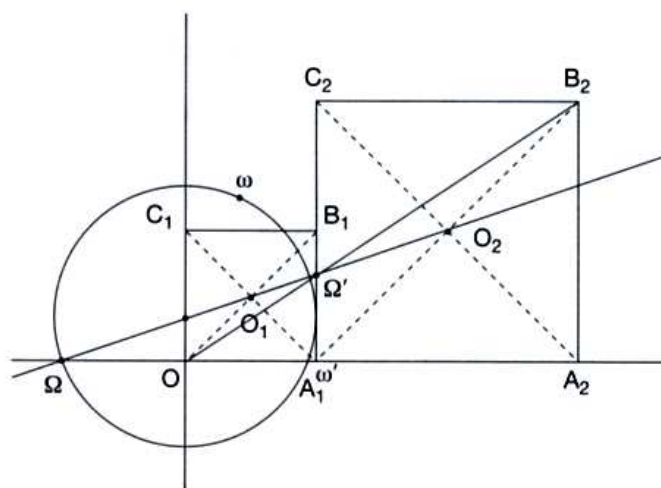
B. Étude des similitudes directes transformant K_1 en K_2

1. a) h a pour rapport 2 et $h(C_1) = C_2$, $h(O) = A_1$, $h(A_1) = A_2$; $h(B_1) = B_2$.

b) $h' = h(\Omega; 2) \circ \sigma(O_1; \Omega)$ donc h' est une homothétie de centre Ω' et de rapport -2 .

$$\begin{array}{lcl} O & \xrightarrow{\sigma} & B_1 \xrightarrow{h} B_2 \\ A_1 & \xrightarrow{\sigma} & C_1 \xrightarrow{h} C_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\sigma} & O \xrightarrow{h} A_1 \\ C_1 & \xrightarrow{\sigma} & A_1 \xrightarrow{h} A_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{donc l'image de } K_1 \text{ et } K_2 \\ \text{et le point } \Omega' \text{ est l'inter-} \\ \text{section des droites} \\ (OB_2) \text{ et } (A_1C_2). \end{array}$$

De plus $O_1 \xrightarrow{\sigma} O_1 \xrightarrow{h} O_2$ donc $\Omega, O_1, \Omega', O_2$ sont alignés.



2. a) s a pour rapport 2.

b) $g = h^{-1} \circ s$ a pour rapport $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ c'est donc une isométrie telle que $(h \circ s)(K_1) = h^{-1}(K_2) = K_1$ donc K_1 est invariant par g .

c) Toute isométrie conserve le barycentre donc $g(O_1) = O_1$. Donc g est $r_0(O_1; \frac{\pi}{2})$ ou $r_1(O_1; -\frac{\pi}{2})$ ou σ ou l'application identique.

3. a) $g = r$ ou $g = r^{-1} = r_1$ ou $g = r \circ r = \sigma$ ou $g = r \circ r^{-1} = Id$.

b) Il résulte de la question précédente que les autres similitudes transformant K_1 en K_2 sont $h, h', h \circ r$ et $h' \circ r$.

$$4. a) z_1 = 2z + 1; z_2 = -2z + 3 + 2i; z_3 = 2iz + 3; z_4 = -2iz + 1 + 2i.$$

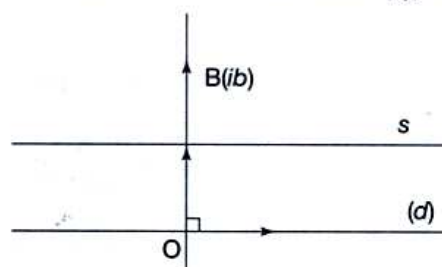
$$b) z_\omega = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i; z_{\omega'} = 1.$$

c) $h, h', h \circ r$ et $h' \circ r$ sont des similitudes de rapport 2 qui transforment O_1 en O_2 donc $PO_2 = 2PO_1$. $\mathcal{E}$ a pour équation $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$.

14 • A. 1. a) $z' = z + ib$ donc $S_{1,b}$ est la translation de vecteur $\vec{\omega}$ d'affixe ib .

b) s a pour écriture complexe $z = \bar{z}$

$$\text{donc } z \xrightarrow{s} \bar{z} \xrightarrow{t} \bar{z} + ib \text{ donc } \sigma_{1,b} = t \circ s.$$



On note Δ la médiatrice de $[OB]$ et s_1 la réflexion d'axe Δ donc $s_{1,b} = s_1 \circ s \circ s = s_1$ donc $s_{1,b}$ est la réflexion d'axe Δ .

2. a) $S_{-1,b}$ est telle que $z' = -z + ib$, $b \neq 0$, c'est donc la symétrie dont le centre a pour affixe $\frac{1}{2}ib$.

b) s' a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ donc

$$z \xrightarrow{s'} -\bar{z} \xrightarrow{t} -\bar{z} + ib, \text{ donc } t \circ s' = \sigma_{-1,b}.$$

3. a) Si $z = x + iy$ est l'affixe d'un point invariant alors $x + iy = a(x - iy) + ib$ d'où $(1 - a)x = 0$ et $(1 + a)y = b$.

Or $a \neq 1$ et $a \neq -1$ donc $x = 0$ et $y = \frac{b}{1+a}$.

Ω a donc pour affixe $\frac{ib}{1+a}$.

b) (T) a pour écriture complexe

$$z' = \bar{z} + \lambda \text{ et}$$

$$T(\Omega) = \Omega \text{ donc}$$

$$\frac{ib}{1+a} = \frac{-ib}{1+a} + \lambda$$

$$\text{donc } \lambda = \frac{2ib}{1+a}$$

d'où le résultat.

c) h a pour écriture complexe $z' - \frac{ib}{1+a} = a\left(z - \frac{ib}{1+a}\right)$

$$\text{soit } z' = az + ib \frac{1-a}{1+a}.$$

$$\text{d) } z \xrightarrow{T} \bar{z} + \frac{2ib}{1+a} \xrightarrow{h} a\bar{z} + \frac{2aib}{1+a} + \frac{ib(1-a)}{1+a} = a\bar{z} + ib \text{ donc } h \circ T = \sigma_{a,b}. \text{ On démontre de même que } T \circ h = \sigma_{a,b}.$$

e) $S_{a,b}$ est l'homothétie de rapport a et de centre b point d'affixe $z = \frac{ib}{1-a}$.

B. 1. a) Pour $n = 1$, $a^1 + ib \frac{1+a}{1+a} = a + ib = u_1$ donc la proposition est vraie pour $u = 1$. Supposons que

$$u_n = a^n + ib \frac{1 - (-a)^n}{1+a}$$

$$\text{alors } u^{n+1} = au_n + ib$$

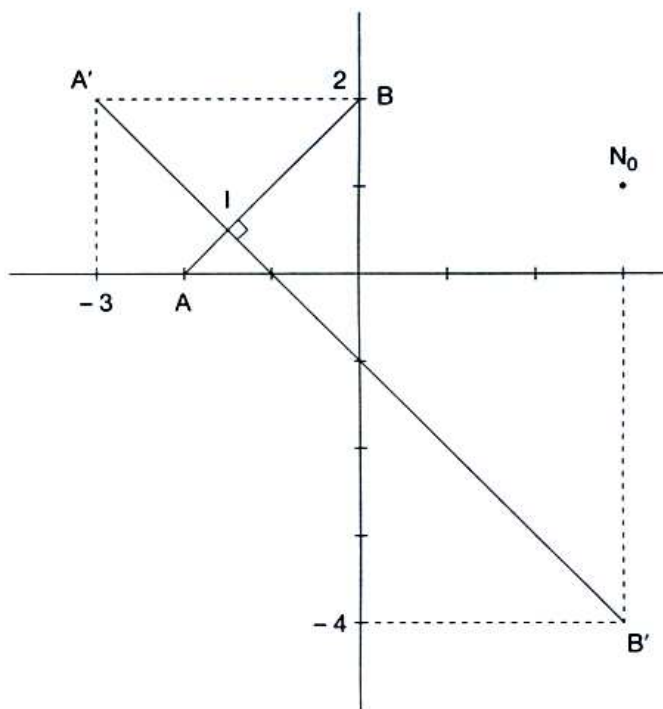
$$= a^{n+1} + \frac{-ib(a + a(-a)^n)}{1+a} + ib$$

soit $u_{n+1} = a^{n+1} + ib \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1+a}$. Donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$.

b) $\sigma_{a,b} = T \circ h = h \circ T$ donc M_n appartient à la droite (ΩM_1) on a son image par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = \frac{b}{1+a}$.

2. a) Voir question 1.a). Le raisonnement par récurrence est identique.

b) $S_{a,b} = h(\Omega'; a)$, Ω' ayant pour affixe $\frac{ib}{1-a}$. Donc tous les points N_n appartenant à la droite $[\Omega'; N_1)$.



$$\text{A. 1. } \begin{matrix} A & \xrightarrow{T} & A' \\ B & \xrightarrow{\quad} & B' \end{matrix} \begin{cases} -3 + 2i = -2a + b \\ 3 - 4i = 2ia + b \end{cases}$$

Il en résulte que $a = -3i$ et $b = -3 - 4i$ d'où $z' = -3iz - 3 - 4i$.

2. T est la similitude d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, de rapport 3 et de centre I d'affixe $\left(-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

3. a) La droite (AB) a pour équation $y = x + 2$ et $(A'B')$ a pour équation $y = -x - 1$. Leur intersection a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}; +\frac{1}{2}\right)$ donc I est cette intersection.

b) Les points A_n appartenant aux droites (AB) et $(A'B')$ d'équations respectives $y = x + 2$ et $y = -x - 1$.

$$\text{B. 1. a) } z' = a\bar{z} + b \text{ avec } \begin{cases} -3 + 2i = -2a + b \\ 3 - 4i = -2ai + b \end{cases}$$

$$\text{d'où } a = 3 \text{ et } b = 3 + 2i \text{ donc } z' = 3\bar{z} + 3 + 2i.$$

b) Si Ω d'affixe $x + iy$ est invariant alors $x + iy = 3x - 3iy + 3 + 2i$ soit $x = -\frac{3}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. C'est le point I.

$$\text{2. a) } h^{-1} \text{ a pour écriture complexe } z' - \left(-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{3} \left[z - \left(-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) \right] \text{ soit } z' = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}(3 - i).$$

$$\text{b) } z \xrightarrow{h^{-1}} \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}(3 - i) \xrightarrow{T} 3 \left[\frac{1}{3}\bar{z} - \frac{1}{3}(3 + i) \right] + 3 + 2i = \bar{z} + i.$$

c) La transformation σ admet la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ comme ensemble des points invariants donc σ est la réflexion d'axe la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Donc

T est la composée de cette réflexion et de l'homothétie de centre I et de rapport 3.

3. Les points A_n appartenant à la demi-droite $[IA]$ et à son image $[IA']$ par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

C. 1. a) $x' = -4x + 7y - 11$ et $y' = 10x - 13y + 22$.

A(-2 ; 0) a pour image le point de coordonnées (-3 ; 2) donc l'image de A est A'. On démontre de même que B(0 ; 2) a pour image B' donc T est bien un élément de $\mathcal{F}$.

b) M est invariant par T si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$ soit $5x - 7y + 11 = 0$. On obtient donc une droite Δ_1 de points invariants.

2. $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(-5x + 7y - 11 ; 10x - 14y + 22)$ donc si $M \neq M'$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; -2).

3. a) $N_0(3 ; 1)$. $\overrightarrow{N_0N_n}$ est colinéaire à $\vec{u}(1 ; -2)$ donc $y_n - 1 + 2(x_n - 3) = 0$ soit $2x_n + y_n - 7 = 0$ et N_n appartient à la droite d'équation $2x + y - 7 = 0$.

b) $x_{n+1} = -4x_n + 7y_n - 11$ et $2x_n + y_n - 7 = 0$ d'où $x_{n+1} = -4x_n + 7(7 - 2x_n) - 11$ donc $2x_n + y_n - 7 = 0$ et $x_{n+1} + 18x_n = 38$.

c) Si d divise x_n et y_n , d divise $2x_n + y_n$ donc d divise 7.

d) $x_n = u_n + \alpha$ donc $u_{n+1} + 18u_n + 19\alpha = 38$ soit $a = 2$ et $u_{n+1} = -18u_n$. (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison (-18) . Donc $u_n = (-18)^n$ et $x_n = (-18)^n + 2$; $y_n = 3 - 2(-18)^n$.

e) $d = 7$ si et seulement si $(-18)^n \equiv -2 [7]$ ou $3^n \equiv 5 [7]$ soit $n = 6p + 5$ ($p \in \mathbb{N}$).

Pour les autres valeurs de n , x_n et y_n sont premiers entre eux.

ISBN 2-09-172640-0



Nathan