

Edition 2012

# Club d'Excellence

# Mathématiques

Séries Scientifiques

Sessions 1986 - 2011  
Normale - Remplacement



- ☞ S'entraîner avec les sessions de remplacement entre 1986 et 2000*
- ☞ S'entraîner avec les sessions normales entre 2000 et 2011*
- ☞ Corrigés détaillés*

9,23 €

Présentation

Thierno Korka DIALLO

Elève ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Thiès

# Mathématiques

## Série S1

### Sessions normale - remplacement



Présenté par

ThiernoKorka DIALLO

Élève ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Thiès

---

Thierno Korka DIALLO    Tel: (+221) 77 465 32 33    e-mail: [korka1991@yahoo.com](mailto:korka1991@yahoo.com)

Site web: <http://document1991.skyrock.com>

---

## Avant - Propos

---

Ce document est conçu pour aider les élèves à se préparer au Baccalauréat plus particulièrement aux sessions de remplacement.

Par une sélection de sujets particuliers, l'auteur a voulu atteindre un double objectif : d'une part aider les professeurs qui continuent, envers et contre tous, à être exigeants, dans l'intérêt même des élèves ; d'autre part, offrir aux élèves curieux, comme à ceux qui sont sensibles au plaisir des Maths - et il en existe beaucoup - le bonheur de s'entraîner à des sujets de session de remplacement.

Sans pour autant se substituer aux professeurs dans leurs travaux, ce livre se veut le catalyseur qui permettra le bon déroulement de l'enseignement, de la recherche et qui offrent à ses usagers de plus grande chance de réussite au bac et aux concours à l'échelle nationale.

Vous trouverez ainsi des :

⇒ Sujets de Bac entre 1986 et 2011 ;

⇒ Sujets supplémentaires, qui offrent des outils précieux aux les professeurs et dont la classe « peut suivre » ont traité, et qui, l'année suivante, feront partie de ce que « tout le monde sait ».

⇒ Corrigés parfois détaillés,

L'orientation étant bien indiquée, il appartient à chaque bénéficiaire d'en tirer le plus de profit possible.

NB : Ce document est perfectible. Toutes remarques et suggestions pouvant contribuer à son amélioration seront accueillies avec une grande reconnaissance. A cet égard, veuillez bien accepter d'avance, mes plus sincères remerciements.

L'auteur

SOMMAIRE

Conseils.....	Page 6
Histoire des Maths - Cauchy.....	Page 11
Première partie : épreuves.....	Page 21
Epreuve de 1994 .....	Page 22
Epreuve de 1995 .....	Page 25
Epreuve de 1996 .....	Page 29
Epreuve de 1997 .....	Page 33
Epreuve de 1998 .....	Page 36
Epreuve de 1999 .....	Page 40
Epreuve de 2000 .....	Page 43
Epreuve de 2000 .....	Page 46
Epreuve de 2001 .....	Page 50
Epreuve de 2002 .....	Page 54
Epreuve de 2003 .....	Page 58
Epreuve de 2004 .....	Page 62
Epreuve de 2005 .....	Page 66
Epreuve de 2006 .....	Page 69
Epreuve de 2007 .....	Page 72
Epreuve de 2008 .....	Page 76
Epreuve de 2009 .....	Page 79
Epreuve de 2010 .....	Page 82

Epreuve de 2011 .....	Page 85
Deuxième partie : sujets supplémentaires.....	Page 89
Epreuve 1987 .....	Page 90
Epreuve 1986 .....	Page 93
Epreuve 1988 .....	Page 96
Troisième partie : Corrigés.....	Page 100

### GRACES

Je rends grâce à ALLAH le Tout – Puissant dont la main mystérieuse est en tout et partout dans les événements qui rythment notre vie d'êtres humains, à son Prophète Mohammad Paix et Salut sur Lui qui incarne et symbolise l'Humanité.

### Remerciements et Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mon père et à ma mère sans qui je ne serai rien.

À petite sœur Fatoumata Binta DIALLO

À mon amie, sœur et promotionnaire de TS1 Maïmouna BALDE

À mon amie, sœur et promotionnaire de TS1 Salimata Dédji MANE

À mon grand-frère Mamadou Dian DIALLO

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur DIAO

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur FAYE

À mon ancien professeur des Sciences Physiques Mr Mafal FALL

À Mr AMOUZOU, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor

À Mr DIALLO, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor

À Mr FALL, professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI

À Mr TOP, professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI

À ma promotion de TS1 2009 – 2010 plus particulièrement à Khadim NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Pape Ousmane NIASSE

A mon ami et frère polytechnicien Elhadj Omar NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Ameth NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Sérigne Khadim KANE

Aux élèves ingénieurs de l' Ecole Polytechnique de Thiès

À mon ami et frère Polytech Khadim NDIAYE

### Conseils pratiques

L'école a repris et vous êtes à nouveau plongés dans les méandres des leçons à apprendre et des manuels à lire ! Voici quelques idées qui peuvent augmenter vos chances de réussite au BAC. Mettre à profit les heures de cours et les heures de révision à la maison est la clé de la réussite de l'examen du BAC 2012. Suivez donc «nos conseils » pour assimiler et comprendre les cours plus facilement avant pendant et après la classe.

#### 1. Préparation au Bac : D' abord, mieux assimiler ses cours de BAC

##### Avant le cours

Organiser son matériel : Etre bien équipé aide à la concentration. Déranger son voisin pour un stylo qui ne fonctionne plus, ou une calculette cassée c'est

terminé ! Munissez-vous de stylos de couleurs, de surligneurs, de feuilles cartonnées doubles et simples pour parer à toutes les éventualités.

Relire ses cours de BAC : Le soir votre mémoire fonctionne à plein régime et lire vos cours avant de vous coucher favorise l'apprentissage. Après le dîner prenez une heure, parcourez vos leçons et faites le point sur ce qui vous attend le lendemain. Vous pouvez également faire des fiches de cours qui reprennent les points clefs d'une leçon. Après cela, reposez vous sereinement et laissez le cerveau faire son travail.

### **Préparer son bac en cours**

Repérer la bonne place : Oubliez vos idées reçues sur les places réservées aux élèves à lunettes et mettez vous au premier rang ! L'écoute est meilleure, la visibilité optimale et il vous est plus facile d'intervenir auprès du professeur si vous avez une question.

Endormir le portable ! Les professeurs supportent mal qu'il sonne pendant le cours alors laissez votre vie personnelle de côté car cela perturbe l'attention de toute la classe.

### **Pendant le cours**

#### **Savoir se tenir**

Trouver une posture confortable : Choisir une bonne position est indispensable pour la réceptivité. Détendez vos jambes et caliez bien votre dos contre la chaise. Cela vous permettra de rester éveillé même durant la première heure de cours.

Rester concentré : ne vous retournez pas toutes les cinq secondes pour voir si votre ami s'est endormi et ne laissez pas votre esprit vagabonder, c'est le

meilleur moyen pour perdre le fil du cours, et après difficile de reprendre le rythme.

### Etre actif à l'oral et à l'écrit

Adopter la prise de notes : Afin d'enregistrer au mieux ce que vous dit le professeur jouez sur les abréviations et les schémas. Etablissez votre propre code d'écriture, cela vous aidera à aller plus vite. Mais attention, ce n'est pas une course et l'important est de savoir se relire ! Surlignez les passages importants et mettez en valeur ceux qui vous posent problème. Par ce biais vous saurez sur quoi vous concentrer pendant les relectures.

Prendre la parole : Fini les bavardages avec le copain, aujourd'hui c'est avec le professeur qu'il faut parler. N'hésitez pas à prendre la parole en public et mettez votre timidité de côté. C'est seulement une question d'habitude. De plus, c'est un excellent entraînement pour les prochaines épreuves orales (?) qui vous attendent lors de votre examen du BAC !

### Après le cours

#### Pas de relâchement

Privilégier les fiches synthétique BAC, je ne sais s' il en existe encore, surtout si vous êtes en terminale : Mettez en valeurs les idées premières et trouvez tout de suite des moyens mnémotechniques pour retenir les dates en Histoire géo, les théories en Maths et les concepts en SES !

Reformuler ses cours : N'apprenez pas par cœur sans comprendre ! Réussir à expliquer une leçon avec vos propres mots prouve que vous avez assimilé intelligemment le contenu. Débattre et parler avec ses amis des leçons constituent de très bons moyens pour s'approprier un cours.

Connaître votre mémoire : Est-elle visuelle ou auditive ? Vous pourrez adopter les révisions qui vous conviennent le plus : si vous avez une mémoire auditive, privilégiez l'écoute optimale en classe et pensez à enregistrer les cours. A l'inverse si vous avez une mémoire visuelle, jouez sur les couleurs et structurez parfaitement votre cours !

Les petits plus !!!

Soyez ponctuel : n'arrivez pas en retard le jour du BAC, les premières minutes sont les plus importantes.

Adoptez une bonne alimentation, saine et variée ! Réduisez les sodas et le café au profit de boissons plus douces comme l'eau ou les jus de fruit.

Demandez de l'aide rapidement si vous sentez un blocage dans une matière, vous pouvez même faire appel à un professeur particulier qui mettra fin à vos lacunes sans perdre de temps.

Les bonnes résolutions étant prises et les conseils assimilés, vous pouvez commencer la nouvelle année confiant. Ces petits réflexes font partie des petits riens qui font la différence le jour J, alors motivez-vous !

## 2. Baccalauréat

### 1. Veille du bac

1.1 Préparez votre convocation ainsi que votre pièce d'identité.

1.2 N'oubliez pas :

- Vos stylos. Prenez-en au moins cinq (05).

- Vos crayons de couleurs, ainsi que votre crayon noir.

- Votre règle et vos matériels géométriques (compas, rapporteur, double décimètre, taille).

- Votre calculatrice avec des piles neuves. N'utilisez pas une machine calculatrice que vous ne maîtrisez pas.

## 2. Le jour J

Après être entré en salle, le surveillant vous demandera de garder sur votre table, le strict nécessaire, tout le reste sera déposé le long du mur.

Le sujet est distribué :

2.1 Lisez le sujet en entier

2.2 Relevez les points attribués aux différents exercices. Déterminer alors le temps à passer sur chaque exercice.

- Un exercice de 3 points doit être traité en 36 minutes

- Un exercice de 4 points doit être traité en 48 minutes

- Un exercice de 5 points doit être traité en 60 minutes

2.3 L'épreuve dure 4 heures, essayez de vous laisser 15 minutes en fin d'épreuve pour la relecture.

2.4 Commencez par traiter les exercices qui vous semblent plus « faciles ».

2.5 Soyez rigoureux dans tout votre travail

2.6 Respectez la numérotation des questions

2.7 Séparez les réponses par une ligne.

2.8 Encadrez vos résultats

2.9 Si vous butez sur une question, n'y passez pas trop de temps, admettez le résultat et continuez votre travail.

2.10 Prenez plusieurs intercalaires

2.11 Contrôlez de temps en temps le temps qui vous reste.

2.12 Si possible, consacrez le dernier quart d'heure pour la relecture de la copie.

## 3. Rédaction

### 3.1 Le fond :

3.1.1 Énoncez complètement les théorèmes avant leur utilisation si nécessaire.

3.1.2 Attention, votre calculatrice peut vous induire en erreur.

### 3.2 La forme :

3.2.1 Est-il besoin de rappeler qu'une écriture lisible est indispensable car certaines écritures peuvent être mal lues par le correcteur :

Ainsi :  $x$  et  $n$  peuvent se confondre.  
 $Z$  et  $2$ ,

3.2.2 Attention aux indices et aux exposants

### 3.2.3 N'abrégez jamais

3.2.4 Tout calcul doit être suivi d'une conclusion sous forme d'une phrase. Les mathématiques ne sont pas que des calculs

## 3. Recherches

[www.officedubac.sn](http://www.officedubac.sn)

[www.daaramath.com](http://www.daaramath.com)

[www.bibmath.net](http://www.bibmath.net)

[www.imo-official.org](http://www.imo-official.org)

[www.pamo-official.org](http://www.pamo-official.org)

[www.maths-express.com](http://www.maths-express.com)

[www.mathscyr.free.fr](http://www.mathscyr.free.fr)

[www.examen.sn](http://www.examen.sn)

## 4. Concours à faire

- Concours d'Entrée à l'École Polytechnique de Thiès (EPT)
- Concours d'Entrée à l'École Supérieure Polytechnique (ESP)
- Concours d'Entrée à l'École Supérieure Multinationale des Télécommunications (ESMT)
- Concours ITS (Ingénieur des Travaux Statistiques)

- Concours d'Entrée à l'Ecole Militaire de Santé (EMS)
- Concours ENSA (Ecole Nationale de la Science Agronome)
- Concours d'Entrée aux Grandes Ecoles

### 5. Concours Général Sénégalais

Le Concours Général sénégalais de Mathématiques est, comme son nom l'indique un concours. Il est donc beaucoup plus challengeant qu'une épreuve du BAC. Il est aussi plus long et dure 6 heures. Le concours vise à repérer les talents Mathématiques du futur.

Le Concours Général Sénégalais couvre l'ensemble du programme de Terminale S1 (TS1). Il n'est en général pas très adapté aux programmes des autres séries scientifiques. Il faut d'abord commencer par le plus simple, c'est à dire le BAC. L'idéal, c'est d'être capable de traiter les sujets de BAC au moins une bonne partie l'été qui précède la rentrée. Il faut beaucoup lire et faire des recherches à l'internet aussi il faut énormément s'exercer, disons il faut juste être bon. En dernier lieu, il faut surtout traiter les sujets, disons des 10-15 dernières années. Faute de temps, il est préférable d'essayer de les traiter dans les limites du temps, de vous rapprocher des professeurs.

#### 5. Bons documents indispensables pour les Concours

1. Maths pour les Cracks
2. Maths pour les Musculation
3. Prolimaths(Nouvelle collection Kordia disponible au numéro 77 465 32 33)
4. NASAA Mathématiques (Collection Kordia)

## 5. Maths pour les Grands (Collection Kordia)

KORDIA

### Histoire des maths – Augustin Louis, Baron CAUCHY

Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre

des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Sa position politique et religieuse lui valut nombre d'oppositions.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques, quoique devancé par Leonhard Euler, avec près de 800 parutions et sept ouvrages ; sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIXe siècle. La négligence dont fit preuve Cauchy envers les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel, perdant leurs manuscrits, a cependant entaché son prestige.

Né le 21 août 1789 à Paris, Augustin Louis Cauchy est le fils aîné de Louis François Cauchy (1760-1848) et de Marie-Madeleine Desestre (1767- 1839)<sup>1</sup>. Son père fut premier commis du Lieutenant général de police de Paris Louis Thiroux de Crosne de 1785 à 1789 ; suite à l'exécution de ce dernier en avril 1794, Louis François se retira à Arcueil pour fuir la dénonciation et la Terreur. Sa famille subit néanmoins la loi du maximum et connut la famine. Il retourna occuper des postes administratifs divers en juillet<sup>2</sup> et fut nommé secrétaire général du Sénat conservateur le 1er janvier 1800. Il obtint un appartement de fonction au palais du Luxembourg sous l'Empire. Il fut proche du ministre de l'Intérieur et mathématicien Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) et du sénateur et mathématicien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Augustin Louis reçoit une première éducation chrétienne de son père ; il apprend le latin, la littérature et la science. Il fréquente ensuite l'École centrale du Panthéon et se voit décerner en 1803 et en 1804 divers prix dans les épreuves littéraires du Concours général<sup>3</sup>. Il fréquente le lycée Napoléon et a notamment pour professeur Jacques Binet. À 16 ans, en 1805, il est reçu deuxième au concours l'École polytechnique, pour lequel il est interrogé par Jean-Baptiste Biot. Des amis de la famille, Berthollet, Lagrange, et Laplace, l'ont soutenu durant ses études secondaires.

### Sous le Premier Empire

Il est reçu premier au corps prestigieux de l'École nationale des ponts et chaussées en 1807. Devenu aspirant ingénieur, il est appelé à participer à la construction du canal de l'Ourcq puis du pont de Saint-Cloud. L'ingénierie apparaissait alors comme le domaine naturel d'application des mathématiques. Le 18 janvier 1810, il est nommé pour s'occuper du chantier du port de Cherbourg, qui devait devenir une position militaire stratégique du Premier Empire. Cauchy quitte ce poste en mars. Pendant son séjour à Cherbourg, il commence ses premiers travaux en mathématiques durant son temps libre, indépendamment des institutions académiques. Après qu'un premier écrit est égaré par Gaspard de Prony(1755-1839)<sup>4</sup>, il publie, encouragé par Lagrange, ses deux premiers mémoires, portant sur les polyèdres, en février 1811 et en janvier 1812. Il donne aussi des heures officieuses d'enseignement pour préparer des étudiants aux examens d'entrée, et se passionne pour l'histoire naturelle.

Durant une grave maladie (dont les causes peuvent être attribuées à un surmenage<sup>6</sup> ou aux séquelles de la famine qu'il connut durant son enfance), il retourne en automne 1812 à Paris, et prend quelques mois de congés. Après qu'un poste de professeur-adjoint lui est refusé, il est appelé par son ancien

professeur Pierre-Simon Girard à participer de nouveau en mars 1813 au chantier de l'Ourcq. À cette époque, sous l'influence de Lagrange et de Laplace, il exprime le souhait d'abandonner ses travaux d'ingénieur pour se consacrer aux mathématiques<sup>7</sup>. Deux demandes auprès de l'Académie des sciences, appelée alors l'Institut, furent appuyées par Laplace et Siméon Denis Poisson (1741-1840), en mai 1813 et en novembre 1814 après la mort de Lagrange et de Lévêque, mais furent toutes deux rejetées<sup>8</sup>. Cauchy reçoit temporairement un poste à la Société philomathique en décembre 1814. En 1816, il remporte le prix des mathématiques pour des travaux sur la propagation des ondes.

Membre de la La Congrégation depuis ses études à Polytechnique<sup>9</sup>, Cauchy peut bénéficier de l'importance que prend ce mouvement dès le début de la Seconde Restauration. Il devient professeur assistant à l'École polytechnique en novembre 1815, puis professeur d'analyse et de mécanique en décembre. Suite à une ordonnance du 21 mars 1816 rétablissant les Académies, il intègre l'académie des sciences sous nomination royale, parallèlement au renvoi d'importants mathématiciens connus pour leurs positions républicaines et libérales, Lazare Carnot (1753-1823) et Gaspard Monge (1746-1818)<sup>10</sup>. Cauchy est durement accusé par ses pairs : « Il accepta sans hésiter, non par intérêt, jamais il ne fut sensible à un motif pareil, mais par conviction<sup>11</sup>. »

En 1818, il épouse Aloïse de Bure<sup>12</sup>, avec laquelle il aura deux filles, Alicia (1819) et Mathilde (1823).

Il donne chaque année à l'École polytechnique un cours d'analyse jusqu'en 1830. Ses collègues, François Arago (1786-1853) et Alexis Thérèse Petit (1791-1820) contestent l'insuffisance supposée de ses cours d'analyse, tandis que certains élèves en critiquent la surcharge horaire<sup>13</sup>. Invité à les rédiger, il publie divers traités durant cette période : une première partie des notes de

cours sous le titre Analyse algébrique en 1821 ; puis les notes complètes sous le titre Leçons sur le calcul différentiel en 1829, sans tenir compte des exigences de ses collègues et du ministère.

## Exil

À l'issue des Trois glorieuses (juillet 1830), son cléricisme revendiqué et sa position antilibérale le contraignent à l'exil. En effet, royaliste dévoué à Charles X, il refuse de prêter serment au nouveau roi Louis-Philippe comme l'exige la loi du 30 août 1830. En conséquence, il perd son poste à l'École polytechnique en novembre. À cause de son attachement à la dynastie des Bourbons et par réaction au soutien des étudiants de l'École polytechnique à la Révolution, Cauchy s'exile volontairement à Fribourg en Suisse en septembre 1830, sa femme et ses enfants restant à Paris<sup>14</sup>. Il tente vainement d'y fonder une Académie où les savants émigrés pourraient enseigner<sup>15</sup>. Sur invitation du roi de Piémont, Charles-Albert, il occupe la chaire nouvellement créée de physique sublime à l'université de Turin en janvier 1832. Il effectue un voyage à Rome et est reçu par le pape Grégoire XVI. Après l'enlèvement de son frère cadet Amédée Cauchy à 26 ans, Augustin fait deux voyages consécutifs à Paris.

Refusant de rentrer en France malgré les demandes réitérées de sa famille, il accepte l'invitation du roi en exil Charles X de devenir le précepteur du duc de Bordeaux Henri d'Artois (1820-1883). Il est choisi pour ses connaissances scientifiques et son attachement à la religion. Il s'installe en 1833 à Prague, bientôt rejoint par sa femme en 1834. Devenu membre de l'Académie de Prague, il séjourne en 1835 à Toeplitz, puis en 1836 à Budweitz, Kirchberg, et Gloritz. En remerciement pour son dévouement, Charles X le crée baron en 1839.

## Retour en France

Il regagne Paris fin 1838, souhaitant rester politiquement neutre, et reprend sa place à l'Académie. Toutefois, il ne récupère pas son poste d'enseignant à l'École polytechnique. Alors qu'il avait peu publié durant son séjour en Allemagne, il publie près d'un article par semaine de 1839 à février 1848, excepté en 1844. En novembre 1839, il est élu pour succéder à Gaspard de Prony au Bureau des longitudes. Mais, parce qu'il refuse de prêter serment, sa nomination est officiellement rejetée par le gouvernement en 1843. Il rend l'affaire publique en décembre. La même année, il est candidat à la chaire de mathématiques du Collège de France, laissée vacante après la mort de Lacroix (1765-1843), qu'il se voit refuser au profit du comte Libri.

L'insurrection en février 1848 conduit à la suppression temporaire du serment politique. Après la fuite du comte Libri pour poursuites judiciaires pour vols et vente illégale de livres, Cauchy postule à nouveau à la chaire de mathématiques du Collège de France, mais se retire au profit de Joseph Liouville (1809-1882), finalement élu en janvier 1851. En 1849, Cauchy devient, à la suite d'Urbain Le Verrier (1811-1877), titulaire de la chaire d'astronomie mathématique à la Faculté des sciences de Paris. Victor Puiseux, un de ses amis et élèves, lui succèdera à sa mort. Il prend aussi une chaire à la Sorbonne.

Cauchy refuse de prêter serment à Napoléon III (1808-1873), en 1852. Il n'en est cependant pas moins maintenu dans ses fonctions, grâce à l'intervention d'Hippolyte Fortoul (1811-1856)<sup>16</sup>.

En 1857, Cauchy est impliqué dans des querelles à propos de la mécanique. Le 23 mai vers 4 h du matin heure locale, il meurt d'un rhume dans la maison

familiale de sa femme à Sceaux. Il est enterré au cimetière de Sceaux<sup>17</sup>. Son dernier vœu fut que son œuvre fasse l'objet d'une publication intégrale<sup>18</sup>.

## Position

### Engagement religieux

Catholique convaincu, proche des Jésuites, Augustin Cauchy s'engagea dans la Congrégation, lors de ses études. Dès son séjour à Cherbourg, il fut critiqué pour son habitude de prier matin et soir : « On dit que ma dévotion me fera tourner la tête<sup>19</sup>. » De retour à Paris, il utilisa à plusieurs reprises sa position à l'Académie pour promouvoir sa pensée, défendant notamment ouvertement le créationnisme. En 1824, il condamna les recherches en neurologie de Franz Joseph Gall (1758-1828). Sa prise de position, considérée comme non scientifique, fut fortement condamnée dans la presse écrite par Stendhal (1783-1842) dans deux articles successifs.

Il éprouvait une antipathie pour les idées libérales issues du XVIIIe siècle et s'engagea pour la liberté d'enseignement en défendant les écoles jésuites dès son retour en France en 1838. Supprimées en 1772 et rétablies sous la Restauration, elles furent remises en cause sous la Monarchie de Juillet. Engagé aux côtés de Xavier de Ravignan, prêtre de Notre-Dame, Cauchy fit appel à l'Institut : « Catholique, je ne peux rester indifférent aux intérêts de la religion ; géomètre, je ne peux rester indifférent aux intérêts de la Science. [...] Vous ne considérez pas comme des ennemis de la civilisation, ceux-là même qui ont éclairé et civilisé tant de peuples divers<sup>20</sup>. » Pierre-Antoine Berryer (1790-1868), Charles de Montalembert (1810-1870) et de Vatisménil le soutinrent dans sa démarche. Il est probable que les raisons pour lesquelles il ne put entrer au Collège de France en 1843 soient son engagement aux côtés des jésuites et la forte opposition du comte Libri<sup>21</sup>. Seuls certains

établissements des jésuites furent finalement fermés en 1845. L'affaire prit fin en 1848 : la Deuxième République assura l'indépendance de l'enseignement.

Cauchy fonda diverses œuvres catholiques :

- Il apporta un soutien actif dès 1838 à la Société de Saint-Vincent-de-Paul, œuvre catholique fondée en 1833 pour apporter une aide aux démunis.
- Il fonda en 1842 l'Institut catholique, ou Centre du Luxembourg, dont il présida la section scientifique.
- Il proposa en 1843 un opuscule sur la prévention des crimes envoyé à Alexis de Tocqueville (1805-1859).
- Sur une demande signée par l'Institut fut fondée en 1846 l'œuvre d'Irlande visant à combattre la famine en Irlande.
- En 1854, il fonda l'œuvre pour l'observation du dimanche, demandant la fermeture des commerces le dimanche.
- En 1855, Cauchy est l'un des fondateurs de l'œuvre des Écoles d'Orient, dont l'objectif est de consolider l'émancipation par l'éducation, dont Lenormant et Cauchy devinrent les vice-présidents et dont le premier président fut le contre-amiral Mathieu, collègue de Cauchy au Bureau des longitudes.

### Engagement politique

Cauchy est un monarchiste antilibéral. Il utilisa sa position à l'Académie pour promouvoir la pensée royaliste<sup>22</sup>, et s'exila volontairement en 1830 pour s'opposer au nouveau régime. Il considérait la dynastie des Bourbons comme « les soutiens de la religion et de la civilisation chrétienne, les défenseurs des

idées et des principes auxquels il avait voué de bonne heure son âme et son cœur<sup>23</sup>. »

Son engagement politique lui valut de fortes oppositions au sein de l'Institut, puis de l'Académie, venant notamment de Poinsot ou d'Arago. Cependant, Arago apporta son soutien en 1839 à Cauchy pour sa candidature au Bureau des longitudes<sup>24</sup>. Il connut aussi des oppositions avec les ministères, par son refus réitéré de prêter un serment de fidélité à chaque nouveau régime.

### Position scientifique

Le génie de Cauchy fut reconnu dès son plus jeune âge. Dès 1801, Lagrange eut ce commentaire : « Vous voyez ce petit homme, eh bien ! Il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres<sup>25</sup>. » La prédominance de Cauchy en sciences s'explique par la multitude de ses domaines d'études : ses travaux « embrassent à peu près toutes les branches des sciences mathématiques, depuis la théorie des nombres et la géométrie pure jusqu'à l'astronomie et l'optique<sup>26</sup>. »

Bien que ses talents de mathématicien aient été applaudis, les faveurs dont il bénéficia durant la Seconde Restauration ne furent pas appréciées. Critiquant ouvertement Laplace et Poisson, il connut rapidement des conflits avec ses anciens appuis à qui il devait ses premières publications. Ses rapports avec Poisson se dégradèrent avec le temps et une rivalité entre eux s'installa. Ses votes à l'Académie étaient considérés comme orientés. Malgré l'influence de Cauchy sur les nouvelles générations, ses dernières années furent obscurcies par une querelle de priorité en mécanique, où il refusa de reconnaître son erreur.

En tant que membre de l'Académie, Cauchy devait lire et corriger les articles envoyés. Il commit une négligence envers les travaux de Niels Henrik Abel

(1802-1829) et d'Évariste Galois (1811-1832). Son avis sur le mémoire d'Abel tarda et le rapport fourni en juin 1829 fut finalement défavorable ; les recherches de Galois lui avaient été soumises en mai et n'eurent aucune réponse. Une telle attitude lui a été violemment reprochée. Dans sa biographie, Valson donne une explication : « On doit l'excuser de n'avoir pas toujours eu le temps de s'occuper des publications d'autrui, quand il n'a pas trouvé dans le cours de sa propre vie le loisir nécessaire pour relier et classer ses travaux personnels<sup>27</sup>. »

### Travaux

L'ensemble des travaux de Cauchy furent publiés de 1882 à 1974 chez Gauthier-Villars, dans les Œuvres complètes en 27 tomes qui rassemblent environ 800 articles couvrant l'analyse, l'algèbre, la mécanique et les probabilités<sup>28</sup>. Lors de la préparation de ses cours et conférences, Cauchy réfléchit sur les fondements de l'analyse et introduisit des définitions rigoureuses de notions seulement intuitivement utilisées avant lui<sup>29</sup>. Une partie importante de ses travaux concerne l'introduction des fonctions holomorphes et les séries convergentes<sup>30</sup>.

### Analyse

Avant les travaux de Cauchy en analyse, les séries et séries de fonctions étaient couramment utilisées dans les calculs, sans le développement d'un formalisme précis et cela conduisait à des erreurs fréquentes, car les mathématiciens ne se posaient pas de question sur l'éventuelle divergence des séries utilisées, comme l'a remarqué Cauchy. Dans son Cours d'Analyse, il définit rigoureusement la convergence des séries et étudie en particulier les séries à termes positifs : les sommes partielles convergent si et seulement si elles sont bornées. Il donne des résultats de comparaison de séries. Il déduit

de la convergence des séries trigonométriques un critère de convergence qui porte aujourd'hui son nom, la règle de Cauchy : si la limite supérieure de la suite  $|a_n|^{1/n}$  est strictement inférieure à 1, la série de terme général  $a_n$  converge. Intéressé par les séries entières (appelées alors séries de puissances), il met en évidence l'existence d'un rayon de convergence (qu'il appelle cercle de convergence), et en donne une méthode de calcul, conséquence de son critère de convergence. Il démontre que sous certaines hypothèses, le produit des sommes de deux séries convergentes peut s'obtenir comme la somme d'une série, appelée par la suite produit de Cauchy. Il en donne une version pour les séries entières.

Une fonction régulière était à tort considérée comme la somme de sa série de Maclaurin : autrement dit, on pensait à tort qu'une fonction indéfiniment dérivable était déterminée par la suite de ses dérivées successives en un point. En 1822, Cauchy relève deux problèmes : d'une part, le rayon de convergence de cette série entière peut être nul, et d'autre part, sur l'intersection des domaines de définition, la fonction et la somme de sa série de Maclaurin ne sont pas nécessairement égales. Cependant des solutions d'équations différentielles linéaires avaient été exprimées sous forme de séries entières sans aucune justification. Après avoir exhibé des exemples de fonctions plates, Cauchy s'intéresse de près au développement de Taylor, et évalue le reste sous forme de la détermination principale. Il donne ainsi des conditions suffisantes pour obtenir des réponses positives aux questions soulevées.

Toujours dans son Cours d'Analyse, il énonce et démontre le théorème des valeurs intermédiaires<sup>31</sup>, démonstration déjà finalisée par Bolzano en 1817 à partir du critère de Cauchy pour la convergence des suites<sup>32</sup>. Chez Cauchy, la notion première est celle de quantité variable. C'est à partir de cette notion

que sont définies les notions de limite et d'infiniment petit. Ensuite Cauchy définit la continuité à l'aide des infiniment petits : d'un accroissement infiniment petit de  $x$  résulte un accroissement infiniment petit de  $y$ . Il précise les notions de limite ; et formalise en termes de limites la dérivabilité. Il est arrêté dans ses travaux par une nuance qu'il ne perçoit pas : la différence entre convergence simple et convergence uniforme<sup>33</sup>. Pourtant, la convergence simple (convergence d'une suite de fonctions en chaque point d'évaluation) n'est pas une condition suffisante pour préserver la continuité par passage à la limite. Il est le premier à donner une définition sérieuse de l'intégration. Il définit l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle sur un intervalle comme une limite d'une suite de sommes de Riemann prises sur une suite croissante de subdivisions de l'intervalle considéré. Sa définition permet d'obtenir une théorie de l'intégration pour les fonctions continues. Dans son Analyse algébrique, il définit les logarithmes et les exponentielles comme uniques fonctions continues vérifiant respectivement les équations fonctionnelles  $f(xy) = f(x) + f(y)$  et  $f(x + y) = f(x)f(y)$ . Bien qu'il se soit efforcé de donner des bases rigoureuses à l'analyse, il ne s'est pas interrogé sur l'existence du corps des nombres réels, établie plus tard par Georg Cantor.

Dans son cours de Polytechnique, Leçon de calcul différentiel et intégral, il apporte clarté et rigueur aux résolutions des équations différentielles linéaire d'ordre un<sup>34</sup> et s'intéressa aux équations aux dérivées partielles (théorème de Cauchy-Lipschitz).

### Analyse complexe

On doit à Cauchy l'introduction des fondements de l'analyse complexe. Sous l'influence de Laplace, il présente dans le mémoire Sur les intégrales définies (1814) la première écriture des équations de Cauchy-Riemann comme condition d'analyticité pour une fonction d'une variable complexe. Dans cet

article, il s'intéresse à l'intégration d'une fonction analytique d'une variable complexe sur le contour d'un rectangle, donne la définition de résidu, et fournit un premier calcul de résidu. Dans Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires (1825), il donne la première définition d'intégrale curviligne, démontre l'invariance par homotopie (formulée en termes d'analyse), et énonce précisément le théorème des résidus pour les fonctions analytiques comme outil pour le calcul d'intégrales.

En 1831, Cauchy propose une expression du nombre de racines complexes d'un polynôme dans une région du plan complexe. Si  $F$  et  $P$  sont des polynômes, il démontre :

$$\int_{\partial U} F(z) \cdot \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum F(z_i)$$

où l'intégrale est prise sur le contour du domaine  $U$ , et où la somme porte sur les racines de  $P$  appartenant au domaine  $U$ .

Durant son séjour à Turin, il déduit de la formule de Cauchy précédemment énoncée une expression des coefficients de la série de Taylor d'une fonction analytique d'une variable complexe comme intégrales. Il en déduit les inégalités dites de Cauchy et des résultats sur la convergence des fonctions analytiques d'une variable complexe. Ses travaux seront publiés en 1838 et poursuivis par Laurent, qui fournit comme généralisation des séries entières les séries de Laurent.

Vers 1845, Cauchy s'inspire des travaux des mathématiciens allemands sur les nombres imaginaires, et en particulier l'écriture trigonométrique. Il repousse dans un premier temps cet aspect géométrique pour ensuite l'utiliser dans ses propres travaux. Il définit la notion de dérivée d'une fonction d'une variable complexe ; il établit ensuite l'équivalence entre dérivabilité et

analyticité, fondant ainsi la définition des fonctions holomorphes. Tous ses résultats précédents sur le sujet concernent les fonctions holomorphes ; la formule de Cauchy devint un outil central dans l'étude des fonctions holomorphes, et il étudia alors à nouveau les équations de Cauchy-Riemann.

## Algèbre

Lagrange avait démontré que la résolution d'une équation algébrique générale de degré  $n$  passe par l'introduction d'une équation intermédiaire : sa résolvante dont le degré est le nombre de fonctions à  $n$  variables obtenues par permutation des variables dans l'expression d'une fonction polynomiale. Ce nombre est un diviseur de  $n!$  : ce résultat est aujourd'hui vu comme une conséquence de l'actuel théorème de Lagrange. En 1813, Cauchy améliore cette estimation et démontre que ce nombre est supérieur au plus petit diviseur premier de  $n$ . Son résultat fut généralisé ensuite en l'actuel théorème de Cauchy.

Il fut le premier à réaliser une étude des permutations comme des objets (appelés alors substitutions). Il introduit les écritures encore utilisées aujourd'hui pour noter les permutations ; il définit le produit, l'ordre, et établit l'existence et l'unicité de la décomposition des permutations en produit de cycles (substitutions circulaires) à supports disjoints. Les travaux de Cauchy et de Lagrange sur le sujet sont considérés comme précurseurs de la théorie des groupes. Cependant, Cauchy ne connaissait pas la théorie des groupes et donna sans le savoir une première étude du groupe symétrique.

En algèbre linéaire, il écrivit un traité sur le déterminant<sup>35</sup> contenant l'essentiel des propriétés de cette application. Il étudia la diagonalisation des endomorphismes symétriques réels et qu'il démontra en dimension deux et

trois<sup>36</sup> et dans le cas où le polynôme caractéristique ne possède aucune racine multiple<sup>37</sup>. Enfin, il formalisa la notion de polynôme caractéristique<sup>38</sup>.

## Géométrie

Le dodécaèdre, un polyèdre régulier convexe

En 1811, il s'intéresse dans son premier mémoire à l'égalité de polyèdres convexes dont les faces sont égales. Il propose une démonstration du théorème de Descartes-Euler, concernant les nombres de sommets, de faces et d'arêtes d'un polyèdre convexe. Sa preuve consiste à projeter le polyèdre en un graphe planaire suivant ce qui est aujourd'hui appelé une projection stéréographique. Cependant, Cauchy commit une erreur, en ne faisant pas d'hypothèse claire sur les polyèdres étudiés.

Dans son second mémoire en 1812, il donna des formules pour calculer les angles diédraux.

## Mécanique et optique

En mécanique, Cauchy proposa pour décrire la matière d'opposer à la continuité de la matière un système de points matériels dont les mouvements sont continus. Selon Cauchy, les forces entre ces particules doivent devenir négligeables sur les distances estimables. Cauchy énonça des lois sur les variations de tension, de condensation et de dilatation. Il fit une étude sur l'élasticité des corps.

S'intéressant à la variation des molécules d'éther, Cauchy établit les équations de propagation de la lumière en 1829. Il établit les modes de polarisation des ondes planes, mises en évidence par des travaux antérieurs de Fresnel. S'intéressant aux conditions limites au niveau d'une interface, Cauchy démontra les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Il

retrouva les résultats de Brewster sur la variation de l'angle de polarisation lors d'une réflexion ou d'une réfraction. Enfin, il démontra l'existence d'ondes évanescentes, vérifiée expérimentalement par Jasmin.

Sous l'influence de Coriolis, Cauchy étudia la dispersion de la lumière. Ses travaux sur les ombres rejetèrent une des objections à la théorie ondulatoire de la lumière. Il mit en évidence le phénomène de diffraction.

En astronomie, sa recherche sur les séries lui permit de réviser la théorie des perturbations mise en place par Lagrange, Laplace, et Poisson pour étudier la stabilité du système solaire. Cauchy s'intéressa de plus près aux calculs astronomiques à partir de son élection au Bureau des Longitudes en 1839. En 1842, il proposa des méthodes de calculs de primitives d'expressions rationnelles en cosinus et sinus ; ces méthodes furent motivées par le développement de la fonction perturbative. En 1845, le mémoire de Le Verrier sur la planète Pallas est vérifié en quelques heures par Cauchy.

### Probabilités

Les travaux de Cauchy sur le principe du minimax permirent de développer la théorie de la décision statistique. En 1853, il étudia, via leurs fonctions caractéristiques, une famille de distributions paires répondant à un problème variationnel<sup>39</sup>, parmi lesquelles figurent la loi normale et la loi de Cauchy, découverte par Poisson. Faisant usage des fonctions caractéristiques, il publia une démonstration du théorème central limite

---

# Première Partie

---

# Épreuves





UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1994

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée : 4 heures

### MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

#### EXERCICE 1

On considère deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  :

- $U_1$  contient 6 boules blanches et 4 boules noires.
- $U_2$  contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une de ces urnes, choisie au hasard, on extrait une boule que l'on remet dans l'urne :

Si la boule est blanche, on recommence le tirage dans la même urne.

Si la boule est noire, on recommence le tirage dans l'autre urne.

On applique cette règle à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne, les tirages sont équiprobables.  $n$  étant un entier naturel non nul, on note  $p_n$  la probabilité pour que le  $n^{\text{ième}}$  tirage se fasse dans l'urne  $U_1$ .

**1.1** Calculer  $p_1$ .

**1.2** Dans quel cas le deuxième tirage se fait-il dans  $U_1$  ?

**1.3** Calculer  $p_2$ .

**1.4** Démontrer que :  $\forall n \geq 2 \quad p_n = \frac{2}{5} p_{n-1} + \frac{1}{5}$ .

**1.5** Déterminer le nombre réel  $a$  tel que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = p_n - a$  soit géométrique.

Calculer alors  $p_n$  en fonction de  $n$  et en déduire la limite de la suite  $(p_n)$ .

Dans quelle urne vont se faire la majorité des tirages ?

#### EXERCICE 2

On considère un triangle ABC direct.

On appelle I, J, K les milieux respectifs des cotés [BC], [CA], [AB].

Soit N l'image de C par la rotation de centre J et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ , et P l'image de A par la rotation de centre K et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ .

**2.1** Montrer que  $KP = IJ$ .

**2.2** On appelle  $r$  la rotation qui transforme  $K$  en  $J$  et  $P$  en  $I$ .

Déterminer une mesure de l'angle de cette rotation.

**2.3** Démontrer que les triangles  $IJN$  et  $IKP$  sont isométriques.

En déduire l'image de  $I$  par  $r$ . Montrer de même que le triangle  $PIN$  est isocèle et rectangle  $I$ .

**2.4** On appelle  $r_1$  la rotation de centre  $N$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_2$  la rotation de centre  $P$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

**2.4.1** Déterminer l'image de  $B$  par  $r_1 \circ r_2$ .

**2.4.2** Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $r_1 \circ r_2$ .

### **PROBLEME**

On désigne par  $E(x)$  la partie entière de  $x$ , l'entier  $k$  relatif tel que  $k \leq x < k + 1$  et par  $\ln x$  le logarithme népérien de  $x$ .

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  définie :

$$f(x) = \begin{cases} E(x) \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### **PARTIE I**

**I.1** Démontrer que  $f$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . (on ne cherchera pas à dériver cette fonction).

Sur quel sous ensemble est-elle strictement croissante ?

**I.2** Démontrer que :  $\forall x \geq 1, f(x) \geq \ln(x)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

**I.3** Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ .

**I.4** Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**I.4.1** Étant donné  $k$  entier naturel non nul, on désigne par  $(C_k)$  la représentation graphique de la fonction :  $g_k: x \rightarrow g_k(x) = k \ln(x)$  ( $x > 0$ )

Construire dans  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$   $(C_1)$ ,  $(C_2)$  et  $(C_3)$ .

**I.4.2** En déduire la représentation graphique de  $f$  sur  $[0, 4]$ .

### **PARTIE II**

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on note  $\int_k^{k+1} f(x) dx$  le nombre  $\lim_{t \rightarrow (k+1)^-} \int_k^t f(x) dx$ .

**II.2.1** Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  non nul :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = k \int_k^{k+1} \ln(x) dx = k(k+1) \cdot \ln(k+1) - k^2 \ln(k) - k.$$

**II.2.2** Dédire de la question précédente que pour tout entier  $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ :

$$\int_1^n f(x) dx = - \sum_{k=2}^n k \cdot \ln(k) + n^2 \cdot \ln(n) - \frac{n(n-1)}{2}.$$

On remarquera que  $k(k+1) = (k+1)^2 - (k+1)$ .

**II.3.1**  $n$  étant un entier supérieur ou égal à 2, démontrer que pour tout entier  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$ , on a :  $k \cdot \ln(k) \leq k \cdot \ln(n)$ .

**II.3.2** En déduire que :  $\sum_{k=2}^n k \cdot \ln(k) \leq \left[ \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] \cdot \ln n$ .

**II.3.3** Démontrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $\int_1^n f(x) dx \leq \int_1^n x \cdot \ln(x) dx$

**II.3.4** En déduire que :  $\frac{n^2}{2} \cdot \ln(n) - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \leq \sum_{k=2}^n k \cdot \ln(k)$ .

**II.4** Démontrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\sum_{k=2}^n k \ln k}{\frac{n^2}{2} \ln n} \right] = 1$



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1995

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée : 4 heures

**MATHEMATIQUES**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1**

Un étudiant passe un examen avec une chance sur deux de l'obtenir. S'il échoue, il recommence l'année suivante et si nécessaire encore les années suivantes.

Etant un étudiant sérieux, chaque année sa probabilité d'échec se réduit de moitié.

On note  $p_n$  la probabilité pour qu'il obtienne son examen la  $n^{\text{ième}}$  année. On pourra à l'aide d'un schéma, déterminer année par année les possibilités d'échec ou de réussite de cet étudiant pour répondre aux questions suivantes :

**1.1** Calculer  $p_1, p_2$  et  $p_3$  puis  $p_1 + p_2 + p_3$ .

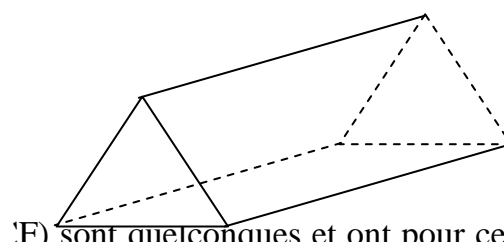
Quelle conclusion peut-on tirer de ce dernier résultat ?

**1.2** Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{2^n - 1}{2^{\lfloor \frac{n(n+1)}{2} \rfloor}}$

**1.3** Calculer la limite de  $p_n$ . Que dire de la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\sum_{k=1}^n p_k$  ?

**EXERCICE 2**

Dans l'espace euclidien (ABCDEF) est un pentaèdre dont trois faces (ABCD) (ABFE) et (DCFE) sont des parallélogrammes de centres respectifs I, J, K. L est le milieu de [AB].



gravité respectifs  $O$  et  $O'$ .

On désigne par  $P$  le centre de gravité du triangle (CED) et par  $Q$  celui du triangle (ABF).  
Démontrer que :

**2.1**  $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$ .

**2.1.2** Les segments  $[OO']$  et  $[PQ]$  ont même milieu  $G$ .

**2.1.3**  $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GL}$ .

**2.2** Dans cette question on suppose de plus que le pentaèdre est régulier (c'est-à-dire que :  $AB = BC = CF = BF = a$ , où  $a$  est un réel positif donné)

Et que les faces (ADE) et (ABCD) sont orthogonales.

M étant un point quelconque de l'espace, on pose :

$$\vec{N}(M) = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF}.$$

Démontrer que l'ensemble des points M tels que  $\|\vec{N}(M)\| = a\sqrt{21}$  est la sphere circonscrite au pentaedre.

## **PROBLEME**

### **PARTIE I**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. (Unité 2 cm).

**I.1.1** Montrer que O est centre de symétrie de (C).

**I.1.2** Etudier les variations de  $f$  et tracer (C).

**I.2** Pour tout élément  $x$  de l'ensemble de définition, comparer  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $f(x)$ .

**I.3** Soit (T) la courbe paramétrée de l'ensemble des points  $M(t)$  du plan dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x(t) = -e^{2t} \\ y(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+e^{2t}}{1-e^{2t}} \right| \end{cases} \text{ avec } t \in ]0, +\infty[$$

**I.3.1** Montrer que (T) est contenue dans (C) et indiquer en le justifiant le sens du mouvement de M sur (T) lorsque  $t$  varie.

**I.3.2** Calculer les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du point  $M(t)$  à l'instant  $t$ .

**I.3.3** Déterminer  $t_0$  pour que la tangente (T') à (T) en  $M(t_0)$  soit parallèle à la droite d'équation  $y = x$ . Placer  $M(t_0)$  et tracer (T).

### **PARTIE II**

**II.1** On désigne par  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] -1, 1[$ .

**II.1.1** Démontrer sans calculs que  $g$  est une bijection et préciser l'ensemble de définition de la fonction réciproque  $g^{-1}$ .

**II.1.2** Déterminer  $g^{-1}$ .

**II.1.3** Représenter graphiquement  $g^{-1}$  dans le même repère que la courbe (C).

**II.2.1** Interpréter géométriquement le réel  $I = - \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dt}{1+t^2}$  où  $\alpha \in ]0,1[$ .

**II.2.2** A l'aide de la fonction  $g$ , calculer  $I$  puis déterminer  $\alpha$  pour que  $I = 1$ .

**II.3.1** En distinguant les cas  $|x| > 1$  et  $|x| < 1$ , déterminer la fonction  $h$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \quad h(x) = g^{-1} \circ f(x)$$

**II.3.2** Démontrer que  $h$  est prolongeable en une fonction  $\tilde{h}$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

Représenter graphiquement la fonction  $\tilde{h}$ . (On fera un deuxième dessin).

### **PARTIE III**

**III.1.1** Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} : f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$$

**III.1.2** En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} : f''(x) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x^2-1)^2} \right]$$

**III.2** Etablir que la fonction  $f$  vérifie l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' = 0$$

**III.3** Plus généralement, pour tout entier naturel non nul, on note  $f^{(n)}$  la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $f$ .

Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} :$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)! [(x+1)^n - (x-1)^n]}{2(x^2-1)^n}$$



UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1996

Série : S1 –S3 –Coeff : 08

Durée : 4 heures

### MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

#### EXERCICE 1

Pour tout entier naturel  $k$ , on pose :  $z_k = \frac{1+k(k+1)+1}{1+k(k+1)-1}$  et on note :  $|z_k| = p_k$  et  $\arg z_k = \alpha_k$  où  $\alpha_k \in ]-\pi, \pi]$ .

**1.1** Démontrer que pour tout  $k > 0$ ,  $p_k = 1$  et  $\tan \frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{1+k(k+1)}$ .

**1.2** Placer dans le plan complexe les points d'affixes  $z_0, z_1, z_2$ .

**1.3.1** Démontrer que pour tout  $k \geq 0$ , il existe un unique réel  $\theta_k$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , tel que  $\tan \theta_k = k$ . Calculer  $\theta_0$  et  $\theta_1$ .

**1.3.2** Sans calculer  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , construire sur le cercle trigonométrique les points images de  $e^{i\theta_2}$  et  $e^{i\theta_3}$  en précisant le procédé de construction utilisé.

**1.3.3** Démontrer que pour tout entier  $k \geq 0$  :  $\frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$ .

**1.4** On pose :  $S_1 = z_1, S_2 = z_1 \cdot z_2, S_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$  et pour tout entier :

$$n \geq 4, S_n = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots \cdot z_n.$$

**1.4.1** Quel est le module de  $S_n$  ?

Exprimer l'argument de  $S_n$  en fonction de  $\theta_{n+1}$  et  $\theta_1$ .

**1.4.2** Par définition une suite de nombres complexes  $(r_n e^{i\varphi_n})$  converge vers le nombre complexe  $re^{i\varphi}$  si :  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ .

Montrer que la suite  $(S_n)$  converge et calculer sa limite.

#### EXERCICE 2

Dans le plan orienté (P), on donne deux points distincts  $O_1$  et  $O_2$ .

On prendra  $O_1 O_2 = 10$  cm pour le dessin. On désigne par  $r_1$  la rotation de centre  $O_1$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et par  $r_2$  la rotation de centre  $O_2$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

Pour tout point  $M$  de  $(P)$ , on note  $M_1$  l'image de  $M$  par  $r_1$  et  $M_2$  l'image  $M_1$  par  $r_2$ .

**2.1** Démontrer que le milieu  $J$  du segment  $[MM_2]$  est un point invariant par  $r_2 \circ r_1$ .

**2.2** Prouver que  $J$  est situé sur le cercle de diamètre  $[O_1O_2]$ . Construire  $J$ .

**3** Soit  $M$  le projeté orthogonal de  $O_1$  sur la droite  $(MM_1)$ .

**3.1** Démontrer que  $M, M_1, M_2$  sont alignés si et seulement si  $H$  est situé sur le cercle de diamètre  $[O_1J]$ .

**3.2** Préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe  $s$  de centre  $O_1$  qui transforme  $H$  en  $M$ .

**3.3** En déduire l'ensemble  $(C)$  des points  $M$  du plan  $(P)$  pour lesquels  $M, M_1, M_2$  sont alignés. Construire  $(C)$ .

**4.1** Exprimer  $M_1M$  en fonction de  $O_1M_1$  puis  $M_1M_2$  en fonction de  $O_2M_1$ .

**4.2** Où se situe  $M_1$  lorsque l'on a l'égalité :  $M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M$  ?

**4.3** Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M$  du plan tels que :  $M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M$ .

**4.4** Construire  $(\Delta)$ .

## **PROBLEME**

### **PARTIE I**

Soit  $\varphi$  la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{(\ln(x))^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } \varphi(0) = 0.$$

On appelle  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**I.1** Démontrer que  $\varphi$  est une fonction continue sur son ensemble de définition.

**I.2.1** Etudier la dérivabilité de  $\varphi$  en 0.

**I.2.2** Dresser le tableau de variation de la fonction  $\varphi$ .

**I.3.1** Etudier les branches infinies de  $(C)$ .

**I.3.2** Préciser la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $e$ .

**I.3.3** Tracer  $(C)$  et  $(T)$ .

**I.4** Démontrer que l'équation  $\varphi(x) = e$  admet exactement deux solutions dans l'intervalle  $]1, +\infty[$  et l'une de ces solutions est comprise entre  $e^3$  et  $e^4$ .

### **PARTIE II**

Dans cette partie, on considère la fonction  $f$  définie par :

$$f: ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ f}(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Le but de cette partie est de représenter graphiquement cette fonction sans connaître l'expression explicite de  $f(x)$ . On note (T) la courbe représentative  $f$  dans un repère orthonormé.

Justifier l'existence de  $f(x)$  pour :  $x \in ]1, +\infty[$ .

**II.1** Démontrer que  $f$  est croissante sur  $]1, +\infty[$ .

**II.2** Établir que pour tout nombre réel  $t$  appartenant à  $]1, +\infty[$ , on a :  $\ln(t) < t - 1$ .

**II.3** En déduire une minoration de  $f(x)$  lorsque :  $x > e$ .

Préciser alors la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**II.4** De façon analogue, calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1 et par valeurs supérieures.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $e \leq a < b$ .

Établir que :  $\frac{b-a}{\ln b} \leq \int_a^b \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{b-a}{\ln(a)}$ .

**II.5** Soit  $x > e$ .

Démontrer que pour tout réel  $u$  tel que :

$$e \leq u < x, \text{ on a : } \frac{x-u}{\ln(x)} \leq f(x) \leq u + \frac{x-u}{\ln(u)}.$$

**II.6** Résoudre l'équation :  $\varphi(x) < x$ .

Montrer que lorsque :  $x > e^4$ , on a :  $e \leq \varphi(x) < x$ . Établir alors que :

$$\forall x > e^4, 1 - \frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} \cdot f(x) \leq \frac{1}{\ln(x)} + \left[ 1 - \frac{\varphi(x)}{x} \right] \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(\varphi(x))}.$$

**II.7** Démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(\varphi(x))} = 1$  ;

En déduire que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \cdot f(x) = 1$

**II.8** En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ . Que peut-on en déduire pour (T) ?

**II.9** On cherche à obtenir une valeur approchée de  $f(2)$ .

On approxime :  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  dans  $[2, e]$  par la fonction  $h$  ainsi définie :

$h(t) = at + b$ ,  $h(e) = 1$  et  $h(2) = \frac{1}{\ln(2)}$ . Calculer les réels  $a$  et  $b$  et donner deux valeurs approchées de ces réels à  $10^{-2}$  près. On utilisera ces valeurs approchées pour la question 4)b).

**II.10** On prend, pour la suite :  $f(2) \approx \int_e^2 h(t)dt$ . Calculer cette valeur.

**II.12** Donner le tableau de variation de  $f$ . b) Construire la courbe représentative de  $f$ .

KORKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1997

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée : 4 heures

**MATHEMATIQUE**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1**

L'espace E est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ , P le plan de cet espace de repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

**1.1** Dans ce plan, on considère les points A, B et C de coordonnées respectifs  $(-3,0)$ ,  $(1,4\sqrt{3})$  et  $(-2,4\sqrt{3})$ .

**1.1.1** Montrer qu'il existe une ellipse (E) passant par C et O de foyers A et B.

**1.1.2** Chercher l'aire du domaine (D) délimité par l'ellipse (E).

(On rappelle que l'aire d'une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  est  $\pi ab$  unités d'aire).

**1.2** Dans l'espace E on considère le point  $I(0, 0, 6)$ . Soit h l'homothétie de centre I et de rapport  $\frac{2}{3}$ .

On désigne par :

- (D') le domaine image du domaine (D) par h.

- (S) le solide délimité par (D), (D') et les segments  $[Mh(M)]$ , M appartenant à (E).

Les sections de (S) par des plans parallèles au plan P sont les images de (E) par des homothéties de centre I et de rapport k,  $\frac{2}{3} \leq k \leq 1$ .

**1.2.1** Vérifier, en cherchant  $h(O)$  : que la cote du plan contenant (D') est 2.

Chercher le rapport de l'homothétie correspondant à la section de (S) de cote z,  $0 \leq z \leq 2$ .

**1.2.2** Déduire l'aire  $A(z)$  de la section de (S) de cote z,  $0 \leq z \leq 2$ , de l'aire de (D).

**1.2.3** Calculer alors le volume du solide (S) :  $V = \int_0^2 A(z) dz$ .

**EXERCICE 2**

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par T l'application, de (P) dans lui-même, associant au point M d'affixe  $z = x+iy$  le point d'affixe  $z' = x'+iy'$  telle que  $z' = (z + 1)^2$

**2.1** Déterminer l'ensemble des points invariants de T.

**2.2** Montrer que tout point M' d'affixe  $z'$  admet deux antécédents  $M_1$  et  $M_2$  symétriques par rapport au point A d'affixe (-1).

**2.3** Etablir que  $x' = (x + 1)^2 - y^2$  et  $y' = 2y(x + 1)$ .

**2.4** En déduire que, la transformée de la droite d'équation  $x = 0$  ainsi que les transformées des droites d'équation  $y = a(x + 1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , sont incluses dans des courbes dont on déterminera une équation cartésienne.

### **PROBLEME**

Les parties I et II sont indépendantes.

#### **PARTIE I**

On considère l'application f de  $\mathbb{R}$  dans lui-même définie par :  $f(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  unité 6 cm.

**I.1** Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Etudier les variations de f.

**I.2** Soit g la restriction de f à l'intervalle  $I = [-1, e^{-1}]$

**I.2.1** Montrer que g est une bijection de I sur  $g(I)$ .

**I.2.2** Construire les courbes représentatives de g et  $g^{-1}$  dans f.

**I.2.3** Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$  et calculer  $(g^{-1})'(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ .

#### **PARTIE II**

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

**II.1.1** Vérifier la double inégalité :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2.$$

**II.1.2** En utilisant (1), montrer que la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  est majorée. En déduire qu'elle est convergente. Soit L sa limite.

**II.2** Déduire de la relation (1), un encadrement de la somme :  $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

En déduire que  $U_9$  est une valeur approchée de  $L$  à  $2 \cdot 10^{-1}$  près.

**II.3.1** Par une intégration par parties, calculer  $\int_0^\pi \left( \frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \cos(nx) dx$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**II.3.2** Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in ]0, \pi]$ :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

**II.4** On pose  $g(x) = \frac{\frac{1}{2\pi}x^2 - x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$  si  $x \in ]0, \pi]$  et  $g(0) = -1$ .

On suppose que  $g$  est continue et dérivable sur  $]0, \pi]$  et  $g'$  est continue sur  $[0, \pi]$ .

**II.4.1** Montrer que :

$$\int_0^\pi g(x) \left( \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) dx = U_n$$

**II.4.2** Montrer de même que :

$$\int_0^\pi g(x) \left( \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right) dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left( -1 + \int_0^\pi g'(x) \left( \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right) dx \right)$$

**II.4.3** En déduire qu'il existe un réel  $M$  que l'on déterminera tel que l'on ait :

$$\left| \int_0^\pi g'(x) \left( \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right) dx \right| \leq M - 1$$

**II.4.4** En déduire, en utilisant les questions précédentes que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{\pi^2}{6}$



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE  
DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1998

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée :4heures

## MATHEMATIQUE

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

### EXERCICE 1

Soit P le plan complexe orienté muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  direct.

**1.1** Résoudre dans C l'équation :  $z^2 + 2z + 5 = 0$ .

**1.2** Soient A et A' les points images des solutions de cette équation, A étant le point dont l'affixe  $z_A$  est telle que :  $\text{Im}(z_A) > 0$ .

Soit B l'image de A par le quart de tour direct de centre O.

**1.2.1** Calcule l'affixe de B  $z_B$ .

**1.2.2** Quel est l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :

$$\left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 1?$$

**1.2.3** Quel est l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que :

$$\arg \left( \frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]?$$

**1.2.4** Quel est l'ensemble (G) des points M d'affixe z tels que :

$$\frac{z - z_B}{z - z_A} \in \mathbb{R}_+^*$$

**1.2.5** Représenter (E), (F) et (G).

### EXERCICE 2

Le plan est supposé orienté, la notation  $(\vec{u}, \vec{v})$  désignera l'une des mesures de l'angle orienté du couple de vecteurs  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

Soit ABC un triangle non rectangle inscrit dans un cercle (C) de centre O, et soit H son orthocentre. Soient  $(C_1)$  et  $(C_2)$  les cercles de centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$ , symétriques du cercle (C), respectivement par rapport aux droites (AB) et (AC).

**2.1** Soit  $A_1$  le symétrique de H par rapport à la droite (AB).

**2.2.1** Montrer que :  $(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1C}) = -(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{A_1C})[\pi]$ .

**2.2.2** Montrer que :  $(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1C}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})[\pi]$ . Que peut-on en déduire pour A, puis pour H ?

**2.2.3** Déterminer :  $(C_1) \cap (C_2)$ .

**2.3** Montrer que  $(C_2)$  est l'image de  $(C_1)$  par une rotation R de centre A dont on déterminera l'angle.

**2.4** Soit M un point quelconque du cercle (C), dont les symétriques respectifs par rapport aux droites (AC) et (AB) sont B' et C'

Justifier les égalités suivantes :

$$R(C') = B' ; (\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A})[\pi] ; (\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A})[\pi] ;$$

$$(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A}) = (\overrightarrow{O_1O}, \overrightarrow{O_1A})[\pi] .$$

En déduire que :  $(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) = 0[\pi]$ .

Que peut-on en déduire pour les points H, B', C' puis pour les points H, A', B', C' où A' est le symétrique de M par rapport à la droite (BC) ?

**2.5** Montrer que les points I, J, K milieux respectifs des segments [MA'], [MB'] et [MC'] sont alignés.

**2.6** Réciproquement, soit M un point quelconque du plan dont les projections orthogonales K, J et I sur les droites (AB), (AC) et (BC) sont alignés. Démontrer que M appartient au cercle (C). (On pourra montrer que les points K, J, I O d'une part et M, I, K, B d'autre part sont cocycliques).

## **PROBLEME**

### **PARTIE I**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 - 2 \ln(1+x)$ .

On désignera par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm).

**I.1** Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

**I.2.1** Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

**I.2.2** Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)$  interpréter géométriquement ce résultat.

**I.2.3** Tracer la courbe (C) dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**I.3.1** Montrer que l'équation  $\frac{1}{2}x^2 - 1 = 2 \ln(1+x)$  admet deux solutions et deux seulement, dont l'une  $\alpha$  appartient à  $]2,3[$ .

**I.3.2b)** Montrer que :  $\alpha = \sqrt{2 + 4 \ln(1 + \alpha)}$ .

**I.4** Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

**I.4.1** Montrer que  $g$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  à un intervalle  $J$  que l'on précisera.

**I.4.2** Etudier la dérivabilité et le sens de variation de  $g^{-1}$  bijection réciproque de  $g$  (On ne demande pas de déterminer  $g^{-1}$ ).

**I.4.3** Tracer la courbe représentatives (T) de  $g^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## **PARTIE II**

On considère la fonction  $h$  définie sur  $[2, +\infty[$  par :  $h(x) = \sqrt{2 + 4 \ln(1+x)}$ .

**II.1** Montrer que quelque soit  $x$  appartenant à  $[2, +\infty[$ :

**II.1.1**  $h(x) \geq 2$ .

**II.1.2**  $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{3}$ .

**II.2** Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = h(U_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.2.1** Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N} : U_n \geq 2$ .

**II.2.1** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$   $\alpha$  étant le réel définie à la 3<sup>ème</sup> question de la **PARTIE I** du

## **PROBLEME**

c) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$  ;

d) En déduire que  $(U_n)$  converge et déterminer sa limite.

3) En déduire une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

## **PARTIE III**

On considère pour tout  $x$  appartenant à  $[1, +\infty[$  la fonction  $G$  définie par :

$G(x) = \int_1^x g(t)dt$ ,  $g$  étant la fonction définie à la 4<sup>ème</sup> question de la PARTIE 1 du PROBLEME.

**III.1** Justifier l'existence de  $G(x)$  pour tout  $x$  appartenant à  $[1, +\infty[$ .

**III.2.1** Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$  différent  $-1$  :  $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

**III.2.2** En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_1^x \ln(1+t) dt$  pour  $x$  appartenant à  $[1, +\infty[$ .

**III.2.3** En déduire  $G(x)$  pour  $x$  appartenant à  $[1, +\infty[$ .

**III.3.1** Déterminer en fonction de  $\alpha$  l'aire du domaine délimité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x=1$ ,  $x=\alpha$

**III.3.2** Hachurer ce domaine dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

KORKKA



UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1999

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée :4heures

**MATHEMATIQUE**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1**

L'espace (E) est muni d'un repère orthogonal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère l'application  $v$  de (E) dans (E) qui à tout point  $M(x, y, z)$  associe le point  $M'(x', y', z')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$$

**1.1** Soit  $A(1, 0, 0)$  est  $h_1$  l'homothétie de centre A et de rapport 2. Soit  $f = h_1 \circ v$ . Démontrer que  $f$  admet un unique point invariant B.

**1.2** Soit  $r = h_2 \circ f$ , où  $h_2$  est l'homothétie de centre B et de rapport  $\frac{1}{2}$ .

Démontrer que  $r$  est un demi-tour dont on précisera l'axe D.

**1.3** En déduire que  $v$  est composée du demi-tour  $r$  et d'une translation dont vecteur, à préciser, est un vecteur directeur de D.

**EXERCICE 2**

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On note (C) l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que :

$$|(1 + i)Z - 3 + 3i| = 2$$

On considère l'application  $s$  du plan qui au point M d'affixe  $Z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  tel que :

$$Z' = (1 + i)Z - 3 + 3i$$

**2.1** Déterminer et construire l'ensemble (T) des points  $M'$  lorsque M décrit (C).

**2.2** Montrer que  $s$  est une similitude directe dont on caractérisera. I désignera le centre de  $s$ .

**2.3** Démontrer que l'antécédent F de O est tel que le triangle IFO est rectangle et isocèle.

**2.4** Construire F et (C).**EXERCICE 3****3.1** Déterminer une solution f et g de l'équation différentielle :

$$y'' - y = 0, \quad \text{vérifiant : } \begin{cases} f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1 \\ g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 3 \end{cases}$$

**3.2** Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que (C) admet en tout point une tangente dont on donnera un vecteur directeur.

**3.3.1** Montrer que (C) est une branche de l'hyperbole (H) d'équation  $x^2 - y^2 = 9$ .**3.3.2** Tracer (H) en précisant, son centre, ses sommets foyers et asymptotes.**PROBLEME**On considère la fonction f définie par :  $f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$  et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.**PARTIE I****I.1** Etudier les variations de f.**I.2** Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) \leq 1$ . En déduire la position de (C) par rapport à la droite  $(\Delta) : y = x$ **I.3.3)** Construire la courbe (C) et la droite  $(\Delta)$  On précisera la nature et la branche infinie en  $+\infty$ .**I.4** Etudier dans  $\mathbb{R}^+$  les variations de la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\varphi(t) = f(1+t) - \frac{t^2}{2} - f(1)$$

En déduire que pour tout  $t > 0$ ,  $f(1+t) - f(1) \leq -\frac{t^2}{2}$ **PARTIE II**Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ .**II.1** Montrer que  $(U_n)$  est décroissante et minorée par 1.

**II.2** On pose  $V_n = U_n - 1$

**II.2.1** Montrer que pour tout  $n$ ,  $V_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot V_n^2$ .

(On pourra écrire  $V_{n+1}$  sous la forme  $f(1+t) - 1$  et utiliser A)4)

**II.2.1** En déduire que pour tout  $n \geq 1$

$$0 \leq V_n \leq 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

**II.2.3** Montrer que  $(U_n)$  converge et déterminer sa limite.

KORKKA



UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 2000

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée :4heures

**MATHEMATIQUE**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1**

ABCDEF est un hexagone régulier de centre I tel que le triangle IAB soit de sens direct.

Soit J le milieu du segment [AI].

**1.1** On note  $s_1$  la similitude directe de centre B de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

**1.1.1** Déterminer l'image de E par  $s_1$ .

**1.1.2** Déterminer l'antécédent de J par  $s_1$ .

**1.2** On note  $s_2$  la similitude directe de centre J qui transforme A en F. Déterminer son rapport et son angle.

**1.3** On note  $s$  la similitude directe qui transforme E en F et D en J.

**1.3.1** Comparer  $s$  et  $s_2 \circ s_1$ .

**1.3.2** Construire le centre  $\Omega$  de  $s$ , en énumérant les différentes étapes de la construction.

**EXERCICE 2**

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On donne les points  $A(3,0,0)$  ;  $B(0,3,0)$  ;  $C(0,0,3)$  et G le centre de gravité du triangle ABC.

**2.1.1** Déterminer les coordonnées de G.

**2.1.2** Démontrer que la droite (OG) est orthogonale au plan (ABC).

**2.2** Déterminer les coordonnées de l'image de O par la réflexion  $S_{(ABC)}$ .

**2.3** Déterminer les coordonnées des images de O, A, B et C par le demi-tour  $S_{(OG)}$ .

**EXERCICE 3**

Soit  $\theta$  un nombre réel de l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

**3.1** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) suivante :  $z^2 \cos^2 \theta - z \sin 2\theta + 2 - \cos^2 \theta = 0$  : (E).

**3.2** Soit  $M$  l'image dans le plan complexe de la solution (E) dont la partie imaginaire est positive.

**3.2.1** Démontrer que  $M$  appartient à une hyperbole (H) dont on donnera une équation.

**3.2.2** Construire (H) et déterminer la partie (H) décrite par  $M$  lorsque  $\theta$  décrit  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

## **PROBLEME**

### **PARTIE I**

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $f_n$  l'application de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \\ f_n(0) = 2n+2 \end{cases}$$

**I.1** Montrer que  $f_n$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**I.2** On pose  $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$

**I.2.1** Montrer que la suite  $(U_n)$  est bien définie dans  $\mathbb{N}$ .

**I.2.2** Montrer que  $U_{n+1} - U_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3}$

**I.3** Calculer  $U_0, U_1$  et  $U_2$ .

### **PARTIE II**

**II.1** Montrer que  $U_n = 2 \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

**II.2.1** Calculer  $\int_0^1 dx$  et  $\int_0^1 x^{2k} dx$  ;  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**II.2.2** En déduire que  $U_n = 2 \int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

**II.3.1** Etablir que  $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+3}$

**II.3.2** En déduire la convergence de la suite  $(U_n)$ .

### **PARTIE III**

Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Soit  $F$  la primitive nulle en zéro de  $\varphi$  ; soit  $G$  l'application de  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $G(u) = F(\tan u)$ .

**III.1** Montrer que  $G$  est dérivable et admet une fonction dérivée  $G'$  que l'on précisera.

**III.2** En déduire G.

**III.3** En déduire la valeur de  $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ . Quelle est la limite de la suite  $(U_n)$  ?

KORKKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2000

Durée : 04 heures

Séries : S1 – S3

Coeff : 08

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe**MATHEMATIQUES**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1**

**1.** Déterminer l'ensemble des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

**2.** Etant donnée une fonction numérique de variable réelle,  $g$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  ; on définit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^*$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exprimer  $f''(x)$  à l'aide de  $g'\left(\frac{1}{x}\right)$  et de  $x$ .

**3.** On considère l'équation différentielle  $y'' = \frac{1}{x^2}y$  (2)

**3.1.** Démontrer que la fonction  $g$  deux fois dérivable sur  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  est solution de (2) si et seulement si la fonction  $f$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  ;  $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$  est solution de (1).

**3.2.** En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles  $] -\infty ; 0[$  et  $] 0 ; +\infty[$ .

**3.3.** Soit  $g$  une solution de l'équation (2) définie sur  $] 0 ; +\infty[$ . Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{x^2}g(x)$ .

**EXERCICE 2**

Soit  $u$  la fonction définie par  $u(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

**1.** Prouver que  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $u'(x)$ .

**2.** On pose pour tout réel  $x$  de  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  :  $f(x) = u(\tan x)$

**2.1.** montrer que  $f$  est dérivable et calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

**2.2.** En déduire que  $f(x) = x$  pour tout  $x$  de  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

**2.3.** Calculer  $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

**3.** Soit la suite  $I_n$  définie par  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

**3.1.** Montrer que  $I_{2p} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}$ . Calculer alors  $I_2, I_4, I_6$ .

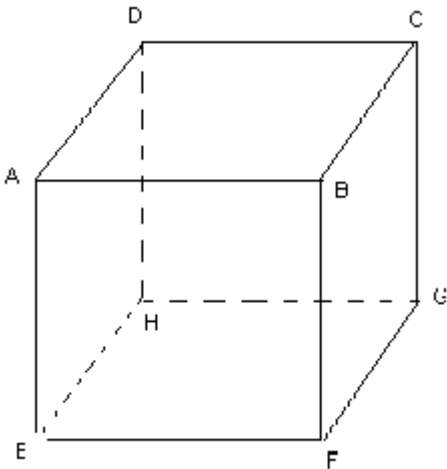
**3.2.** Montrer que pour tout entier  $p : 0 \leq I_{2p} \leq \frac{1}{2p+1}$

En déduire la limite de  $I_{2p}$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ .

### **EXERCICE 3**

ABCDEFGH est le cube ci-dessous représenté.

O est son centre I est le milieu J le centre de gravité de la face DCGH.



**1.1.** Montrer que (ABG) est plan médiateur des segments.

**1.2.** On note les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG), (BCH) et (IOJ). Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube ABCDEFGH.

**2.** on considère l'application  $f$  telle que :

**2.1.** Prouver que  $f$  est une rotation d'axe (BH).

**2.2.** En orientant le plan (ACF) par déterminer la restriction de  $f$  à ce plan.

En déduire l'angle de  $f$ .

**3.** Soit  $r$  le demi-tour d'axe(OI) et  $g$  l'application rof.

**3.1.** En écrivant  $r$  comme la composée de 2 réflexions judicieusement choisies déterminer la nature de  $g$ .

**3.2.** Déterminer les éléments caractéristiques de  $g$ .

### **PROBLEME**

Le plan affine (P) est muni d'un repère orthonormal direct ; on note  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

L'ensemble des nombres complexes non nuls ;  $(P^*)$  le plan (P) privé de 0.

Soit l'application  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

On note  $F$  l'application de  $P^*$  dans  $P$  qui à tout point  $m$  de  $P^*$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M$  d'affixe :  $Z = f(z)$ .

**1.1** Déterminer l'ensemble des points invariants par  $F$ .

**1.2** Soit  $M(Z)$  un point de  $P^*$  non invariant par  $F$ . Montrer que  $M$  est l'image par  $F$  de deux points de  $P^*$ .

Vérifier que  $M$  est le milieu de  $[m_1, m_2]$ .

**1.3** On note  $A(1+i)$ , placer  $A$  et  $B\left(\frac{-1}{1+i}\right)$ , en déduire la construction de l'image par  $F$ .

**2** Dans cette question on cherche l'image de l'axe privé de 0. Soit  $g$  la fonction numérique définie par  $g(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

**2** Etudier les variations de  $g$ .

**2.2.** En déduire l'image par  $F$  de l'ensemble des points de l'axe réel de  $P^*$ .

**3** Recherche de l'image du cercle de centre 0 de rayon 1.

**3.1** Soit  $z$  un nombre complexe non nul distinct de  $i$  et  $-i$  d'image  $Z$  par  $f$ . Exprimer  $\frac{z+i}{z-i}$  en fonction de  $\frac{z-i}{z+i}$ . En déduire une relation entre  $(\overrightarrow{mU}, \overrightarrow{mU'})$  et  $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'})$ , où  $U$  et  $U'$  sont respectivement  $U(i)$  et  $U'(-i)$

**3.2** Soit  $(G)$  le cercle de diamètre  $[UU']$ .

Montrer que l'image  $M$  de tout point  $m$  de  $(G)$  est un point de  $[UU']$ . Soit  $M$  un point de  $[UU']$ , vérifier que  $M$  est l'image de deux points de  $(G)$ . Quelle est donc l'image par  $f$  de  $(G)$  ?

**4** Recherche de l'image d'un cercle  $(G')$  de centre  $o$  et rayon  $r \neq 1$ . Soit  $m$  un point de  $(G')$  d'affixe  $z$ .

**4.1** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z$  en fonction du module  $r$  et d'un argument de  $z$ .

**4.2** En déduire que  $m$  est un point d'une conique  $E$ , dont on donnera la nature.

**4.3** Donner les éléments géométriques de  $E_1$  et construire  $E_2$ .

**5** Image de  $D^* = D - \{O\}$  où  $D : y = x$ .

**5.1** Ecrire une équation paramétrique de  $D^*$ . En déduire les coordonnées  $X$  et  $Y$  du point  $M$  image de  $m$  par  $F$ .

**5.2** Montrer que  $M$  appartient à une hyperbole dont on précisera une équation cartésienne.

KORKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 92

Session normale 2001

Durée : 04 heures

Séries : S1 – S3

Coeff : 08

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeMATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  on donne les points  $C(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ ;  $D(\frac{1}{2}, 0, 0)$ ;  $E(0, 1, 0)$ .

**1.1.** Déterminer l'ensemble (T) des points  $M(x, y, z)$  tels que :  
$$\|\vec{ME}\| = \|\vec{MC} \wedge \vec{MD}\|$$

**1.2.** Déterminer l'intersection ( $\Delta$ ) de (T) avec le plan  $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

**2.1.** Montrer que les points de (T) sont à égale distance de E et de la droite (CD).

**2.2.** Montrer que l'intersection de (T) et du plan d'équation :  $z = 0$  est la parabole de foyer E et de directrice (CD).

EXERCICE 2

Dans un plan orienté, on considère un carré direct (MNPQ) de centre O.

Soit un point de [NP] distinct de N.

On note J le point d'intersection de (MN) et de (PQ). La perpendiculaire ( $\Delta$ ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

**1.** Faire une figure avec  $NP = 5$  cm ;  $NI = 2$  cm (on placera (NP) verticalement c'est-à-dire parallèlement au grand coté de la feuille).

**2.** Soit R de tour direct de centre M.

**2.1.** Préciser l'image de la droite (NP) par R

**2.2.** Déterminer les images de K et I par R.

**2.3.** Quelle est la nature des triangle KMJ et IML.

**3.** On note E le milieu du segment [IL], F celui de [JK] soit s la similitude direct de centre M d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**3.1.** Préciser les images de K, et de I par s.

**3.2.** Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit [NP] privé de N.

**3.3.** Dédurre de ce précède que les points O, N, E et Q sont alignés.

### **EXERCICE 3**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  direct.

**1.** On considère les points A  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et I  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Soit (E) l'ellipse de centre I dont A est un sommet de 0 un foyer.

**1.1.** Déterminer les trois autres sommets de (E)

**1.2.** Calculer l'excentricité de (E) et donne une équation de sa directrice associée au foyer O dans  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**1.3.** Donner une équation de (E) dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**1.4.** Tracer (E) ; préciser les points d'intersections de (E) et de la droite  $(O, \vec{v})$ .

**2.** Soit l'équation d'inconnue Z :  $Z^2 - 2(4 + 5\cos\theta)Z + (4\cos\theta + 5)^2 = 0$ ,  $\theta$  est un paramètre réel.

**2.1.** Résoudre cette équation pour  $\theta \in [0, \pi]$ .

**2.2.** Lorsque  $\theta \in [0, \pi]$ , on note  $Z_1$  la solution dont la partie imaginaire est strictement positive, et  $Z_2$  l'autre solution.

Soit  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $Z_1$  et  $Z_2$ .

Déterminer les coordonnées de  $M_1$  en fonction de  $\theta$  dans un repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

En déduire l'ensemble des points  $M_1$  puis celui des points  $M_2$  lorsque  $\theta$  varie dans  $[0, \pi]$ .

### **PROBLEME**

#### **PARTIE I**

On considère pour tout entier naturel n non nul la fonction  $g_n$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ .

**1.** Déterminer les limites de  $g_n$  aux bornes de l'intervalle  $g_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$

Etudier les variations de  $g_n$ .

**2.** Construire la courbe  $C_1$ , représentative de la fonction  $g_1$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on précisera ses asymptotes.

**3.** Pour tout réel  $\lambda \geq 1$ , on pose :  $I_n(\lambda) = \int_1^\lambda g_n(t) dt$

**3.1.** Calculer  $I_1(\lambda)$

**3.2.** Calculer  $I_n(\lambda)$  en fonction de  $n$  et de  $\lambda$  pour  $n \geq 2$

Déduire de ce résultat la valeur de :  $A = \int_2^\lambda g_2(t) dt$

**3.3.** Soit  $n$  un entier naturel non nul fixé.

**3.4.** Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_n(\lambda)$ .

## **PARTIE II**

On considère la fonction telle que :  $g_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ .

**1.** Montrer que pour tout entier naturel  $p$ ,  $p \geq 2$  :  $g_2(p+1) \leq \int_p^{p+1} g_2(t) dt \leq g_2(p)$

**2.** On considère la suite  $(S_k)_{k \geq 2}$  définie par son terme général :  $S_k = \sum_{i=2}^k \frac{\ln i}{i^2}$ .

**2.1.** Montrer que la suite  $(S_k)_{k \geq 2}$  est croissante.

**2.2.** Montrer que  $S_{2k}(p+1) \leq \int_p^{p+1} g_2(t) dt \leq g_2(p)$  puis  $S_k - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^k g_2(t) dt \leq S_k - \frac{\ln k}{k^2}$ .

En déduire un encadrement de  $S_k$ .

**2.3.** En utilisant la valeur de  $A$ , montrer que la suite  $S_k$  est majorée.

**2.4.** Montrer que la suite  $(S_k)$  est convergente et que sa limite vérifie :  $\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{2} + \frac{3 \ln 2}{4}$

## **PARTIE III**

On considère la courbe  $(T)$  définie paramétriquement par :  $\begin{cases} x(t) = g_1(t) \\ y(t) = g_2(t), t \text{ réel} \in [1; 10] \end{cases}$

**1.** Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions  $x$  et  $y$  qui à  $t$  associent respectivement  $x(t)$  et  $y(t)$ .

**2.** Représentez la courbe  $(G)$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  unité 2cm.

Préciser les points de  $(G)$  en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

KORKKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR  
 □□◆□□  
 OFFICE DU BACCALAUREAT  
 Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2002  
 Durée : 04 heures  
 Séries : S1 – S3  
 Coeff : 08

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
 Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
 Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

On pose  $Q(z) = z^3 - (i + 2i\cos\alpha)z^2 - (1 + \cos\alpha)^2z + i(1 + \cos^2\alpha)$  où  $z$  désigne un nombre complexe,  $i$  l'unité imaginaire pure,  $\alpha$  un nombre réel tel que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Les trois racines de  $Q(z)$  sont désignées par  $a$ ,  $b$  et  $c$  respectivement. On veut déterminer les racines  $Q(z)$  de deux façons différentes.

Première façon :

1. Sans calculer  $(a + b + c)$ ,  $(ab + ac + bc)$  et  $abc$ .
2. Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à  $(2i\cos\alpha)$ , utiliser les résultats précédents pour résoudre l'équation  $Q(z)=0$ .

Deuxième façon :

3. montrer que  $Q(z)$  a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.
4. En déduire les autres racines de  $Q(z)$ .
5.  $a$  étant la racine de  $Q(z)$  dont la partie réelle est positive, donner son module en fonction de  $\alpha$  et déterminer le cosinus et le sinus de son argument en fonction de  $\alpha$ .
6. Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ; soit la similitude directe de centre le point d'affixe  $c$ ,  $c$  étant la racine imaginaire pure de  $Q(z)$  et qui transforme le point  $B$  d'affixe  $b$  en  $A$  d'affixe  $a$ . Donner l'écriture complexe de  $f$ . Déduire de cette écriture que  $f$  est une rotation de centre  $\omega$ .

EXERCICE 2

On dispose de deux dés tétraédriques notés  $A$  et  $B$ . Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 4. Lorsqu'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé  $A$ , les quatre numéros ont tous la même probabilité d'être cachée. Pour le dé  $B$ , la probabilité de noter le numéro  $i$  est proportionnelle à  $i$ .

**1.** Calculer les probabilités  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pour les quatre faces du dé B.

**2.** On lance les deux dés. On note  $i$  le numéro caché du dé A et  $j$  le numéro caché du dé B. on suppose les lancers indépendants ; on note  $P(i,j)$  la probabilité de noter  $i$  pour le dé A et  $j$  pour le dé B.

**2.1.** Montrer que  $P(1,1) = P(2,1) = P(3,1) = \frac{1}{40}$

**2.2.** Déterminer les probabilités  $P(i,j)$  pour tous les nombres entiers  $i$  et  $j$  compris entre 1 et 4.

**3.** On appelle  $Z$  la variable aléatoire définie par :  $Z(i,j)$  est le plus grand des nombres  $i$  et  $j$ .

Exemple :  $Z(1,2) = 2, Z(2,1) = 2, Z(1,1) = 1$ .

**3.1.** Quelles sont les valeurs prises par  $Z$  ?

**3.2.** Déterminer la loi de probabilité de  $Z$  et son espérance mathématique  $E(Z)$ .

### **EXERCICE 3**

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**1.** On considère la courbe  $(H)$  d'équation  $x^2 - 2y^2 = 1$ .

Justifier que  $(H)$  est une conique dont on donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Construire  $(H)$

**2.** on étudie en fonction du temps  $t$  le mouvement du point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan tel que 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2t} & \text{où } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[ \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t \end{cases}$$
. Montrer que la trajectoire  $(\Gamma)$  de  $M$  est une partie de  $(H)$  que l'on précisera

**2.1.** Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{V}$  et en déduire la tangente à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 2.

**2.3.** Déterminer les coordonnées du vecteur accélérateur et vérifier que le mouvement est accéléré.

### **PROBLEME**

**I.** Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

**1.** Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ . Etudier la dérivabilité en 1.

**2.** Etudier les variations de  $f$ .

**3.** Construire la courbe  $(C)$  représentant la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal. On fera figurer la demi-tangente en l'origine du repère.

**II.** Dans cette partie, on étudie la fonction  $H$  définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer. On donne  $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ .

**1.1** Justifier l'existence de  $H(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ .

**1.2.** Etudier la signe de  $H(x)$  sur  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ .

**2.** Déterminer  $H'(x)$  pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$

**3.** Montrer qu'il existe un réel  $L$  tel que pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , on ait  $|f(x)| \leq M$ . En déduire la limite de  $H$  à droite en zéro.

**4.** On donne  $K(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{t \ln t}$  Montrer que  $K$  est une fonction constante.

**4.1.** Montrer que la fonction  $g(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$  telle que admet un prolongement  $\varphi$  par continuité en 1.

Montrer que et en déduire la limite en 1 de la fonction  $(H - K)$  puis de celle de  $H$ .

**4.2.** Montrer que pour tout  $x > 0$  et  $x \neq 1$  on a :  $\frac{x-\sqrt{x}}{\ln x} \leq H(x) \leq \frac{2(x-\sqrt{x})}{\ln x}$

En déduire la limite en  $+\infty$  de  $H$  puis la limite en  $+\infty$  de la fonction  $\left[x \mapsto \frac{H(x)}{x}\right]$

Interpréter graphiquement ces résultats.

**4.3.** Dresser le tableau de variations de  $H$ .



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR  
 □□◆□□  
 OFFICE DU BACCALAUREAT  
 Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2003  
 Durée : 04 heures  
 Séries : S1 – S3  
 Coeff : 08

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
 Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
 Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

Dans le plan orienté, (C) est le cercle trigonométrique. A tout point  $m$  de (C) on associe le point M symétrique du point A d'affixe 1 par rapport à la tangente en  $m$  au cercle (C). On cherche à construire l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M lorsque  $m$  décrit (C).

1. Montrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de ( $\Gamma$ ).

2. Pour un point  $m$  de (C), soit  $t$  une mesure de l'angle  $(\vec{OA}, \vec{Om})$ . Montrer que les coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  de M sont telles que :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (1)$$

3. On doit donc construire la courbe paramétrée ( $\Gamma$ )

dont (1) est système d'équations paramétriques le réel  $t$  parcourant  $\mathbb{R}$ .

3.1. Etudier les variations de  $x(t)$  et de  $y(t)$ , sur  $[0, \pi]$

3.2. Montrer que pour tout  $t \neq 0$ , un vecteur directeur de la tangente en M à ( $\Gamma$ ) est  $\vec{u} \left( \cos \frac{3t}{2}, \sin \frac{3t}{2} \right)$

3.3. Soit  $M$  un point de ( $\Gamma$ ) de paramètre  $t$ ;  $a(t)$  le coefficient directeur de la droite (AM). Déterminer la limite  $a_0$  de  $a(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0. (On admettra que  $a_0$  est la pente de la tangente en A à ( $\Gamma$ ))

3.4. Déterminer tous les points où la tangente est parallèle à un des axes du repère.

4. Tracer la courbe ( $\Gamma$ ).

EXERCICE 2

Soit ABCD un losange de centre  $\Omega$ . Le cercle  $(\Gamma)$  de centre O circonscrit au triangle BCD recoupe (OC) en E. Soit G l'isobarycentre de chacun des systèmes  $\{(\Omega, 4); (E, 1)\}$  et  $\{(J, 4); (A, 1)\}$ .

**1.1.** Soit  $f$  l'application du plan dans lui même associant à tout point M le point M' défini par  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$ .

Déterminer la nature de  $f$  et préciser ses éléments caractéristiques. Quelles sont les images de E et de A par  $f$  ?

**2.** Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $\theta = (\widehat{OC, OD})$  et  $s = r \circ f$ .

**2.1.** Déterminer que  $s$  est une similitude directe plane. Préciser son angle et son rapport.

**2.2.** Construire  $H = s(G)$  et  $L = s(A)$ .

**2.3.** Démontrer que le centre I de la similitude  $s$  appartient aux cercles circonscrits aux triangles OGH et OAL. Construire le point I.

### **EXERCICE 3**

Soit  $\Delta$  une droite de l'espace, F un point n'appartenant pas à  $\Delta$ , K le projeté orthogonal de F sur  $\Delta$  et A un point de  $\Delta$  tel que  $AK = 1$ .

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M de l'espace tels :

$$\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MA}\|$$

**1.1.** Montrer qu'un point de l'espace appartient à  $(\Gamma)$  si et seulement si

$$\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MA}\|$$

**1.2.** En déduire que M appartient à  $(\Gamma)$  si et seulement si  $\frac{MF}{d(M, \Delta)} = \frac{1}{2}$ ; où  $d(M, \Delta)$  désigne la distance du point M à la droite  $\Delta$ .

**2.** Déterminer l'ensemble des points du plan  $(P_1)$  de repère  $(K, \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KF})$  tels que

$$\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MA}\|$$

**3.** Soit  $(P_2)$  le plan passant par K et perpendiculaire à  $\Delta$ .

**3.1.** Montrer qu'un point  $M$  de  $(\Gamma)$  est un point de  $(P_2)$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0 \\ MF = \frac{1}{2} MK \cdot |\sin(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KA})| \end{cases}$$

**3.2.** En déduire que l'intersection de  $(\Gamma)$  et  $(P_2)$  est l'ensemble des points  $M$  de  $(P_2)$  tels que  $MK = 2 MF$ . Déterminer alors la nature de cette intersection.

### **PROBLEME**

**1.** Soit  $\varphi$  la fonction numérique définie par : 
$$\begin{cases} \varphi(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

**1.1.** Montrer que  $\varphi$  est une fonction continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**1.2.** Etablir que pour tout réel  $x$ , on a :  $2\varphi(x) = x^3 \varphi'(x)$  (1)

**1.3.** Etudier les variations de  $\varphi$  et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (Unité graphique 1 cm). On précisera les points d'inflexion éventuels.

**2.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{\int_0^x \varphi(t) dt}{\varphi(x)}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$

Dans cette partie, on se propose d'étudier  $f$  et sa dérivée au voisinage de  $\mathbb{R}^*$ .

**2.1.** Etablir que  $f$  est impaire et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$

**2.2.** Montrer que pour tout réel strictement positif  $x$  on a :  $\int_0^x \varphi(t) dt \leq x\varphi(x)$ .

**2.3.** En déduire que  $f$  est continue en 0

**3.** Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  on pose  $J_n(x) = \int_0^x t^n \varphi(t) dt$  pour  $n > 0$  et  $J_0(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$

(on remarquera donc que  $f(x) = \frac{J_0(x)}{\varphi(x)}$  pour tout  $x$  non nul.)

**3.1.** En utilisant la relation (1) et en intégrant par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $2J_n(x) + (n+3)J_{n+2}(x) = x^{n+3}\varphi(x)$  (2)

**3.2.** En déduire que pour tout entier naturel  $n$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  on a :

$$\begin{cases} J_n(x) \leq \frac{1}{2} x^{n+3} \varphi(x) \\ J_{n+2}(x) \leq \frac{1}{n+3} x^{n+3} \varphi(x) \end{cases}$$

**3.3.** En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  puis que  $f$  est dérivable à droite de 0.

**4.1.** En utilisant la relation (2), montrer que  $J_0(x) = \frac{15}{4} J_4(x) + \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^5\right) \varphi(x)$ .

**4.2.** En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$ .

**4.3.** Montrer que pour tout  $x$  non nul :  $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} f(x)$

KORKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR  
 OFFICE DU BACCALAUREAT  
 Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2004  
 Durée : 04 heures  
 Séries : S1 – S3  
 Coeff : 08

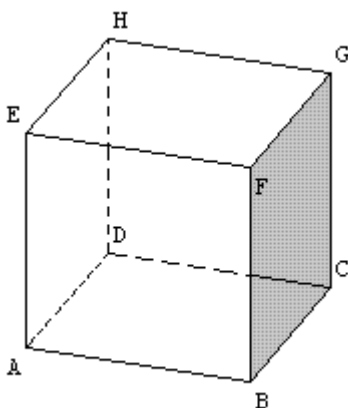
Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
 Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
 Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous,



**1.** Soit L, le centre du carré ABFE et J le milieu de [AL]. Soit la similitude directe du plan (ABF) telle que  $f(A)=L$  et  $f(B)=J$ .

**1.1.** Déterminer l'angle et le rapport de  $f$ .

**1.2.** Construire  $E' = f(E)$ . Montrer que  $f(F)$  est le milieu du segment [AB].

**1.3** Soit  $\Omega$  le centre de la similitude  $f$ . Montrer que les points  $\Omega$ , A, L et E d'une part et les points  $\Omega$ , A, B et J d'autre part sont cocycliques. En déduire une construction de  $\Omega$ .

**1.4.** Montrer que les droites  $(\Omega A)$  et  $(\Omega E)$  sont orthogonales.

**2.** On désigne par I le milieu du segment [FG] et toujours par L le centre du carré ABFE.

**2.1.** Vérifier que  $\vec{CL} = \vec{IH} + \vec{IB}$ . En déduire l'aire du triangle IHB.

**2.2.** Calculer le volume du tétraèdre BCIH et en déduire la distance du point C au plan BIH.

EXERCICE 2

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ ; L'urne  $U_1$  contient 2 boules blanches et 4 boules vertes. L'urne  $U_2$  contient 4 boules blanches et 2 boules vertes.

Dans chaque urne les tirages sont équiprobables et les urnes ont la même probabilité d'être choisies. On choisit au hasard l'une des urnes et l'on extrait une boule que l'on ne remet dans aucune urne; si la boule est verte, on recommence le tirage dans la même urne; si la boule est blanche, on recommence le tirage dans l'autre urne.

**1.** Montrer que la probabilité de tirer deux boules blanches est  $\frac{2}{9}$ .

**2.** Soit  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur  $+1$  si on obtient deux boules de la même couleur et  $-1$  pour deux couleurs distinctes.

Donner la loi de probabilité de  $X$ , son espérance mathématique  $E(X)$  et son écart-type  $\sigma(X)$ .

**3.** On dit que l'on a obtenu un succès si les deux boules sont de même couleur. On répète l'expérience précédente 5 fois de suite.

$Y$  est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de « succès » parmi ces 5 épreuves. Quelle est la probabilité  $p$  d'avoir 4 succès exactement ? Donner une valeur approchée de  $p$  à  $0,1$  près par excès. Calculer  $E(Y)$ . et  $\sigma(Y)$ .

### **EXERCICE 3**

Pour tout entier naturel  $n > 1$  on pose :  $u_n = 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

**1.** Etablir que  $\left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| \leq \frac{2}{2n+3}$

**2.** soit  $J = \int_0^1 \varphi(x) dx$  avec  $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . On désigne par  $F$  la primitive de  $\varphi$  nulle en 0 et soit  $G$  la fonction numérique définie sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  par  $G(v) = F(\tan v)$ .

**2.1.** Montre que  $G$  est dérivable et déterminer sa dérivée  $G'$ . Quelle est la valeur de  $G$  ?

**2.2.** En déduire la valeur de  $J$  puis montrer que la suite  $u_n$  est convergente et calculer sa limite.

### **PROBLEME**

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ; le point de coordonnées  $(x, y)$  est caractérisé par son affixe  $z = x + iy$ . Soit  $a$  un réel tel que  $|a| > 1$ . On désigne par  $A, B, I$  et  $J$  les points d'affixes respectives  $a, -a, 1$  et  $-1$ . Soit  $F_a$  l'application de  $(P)$  privé de  $A$  dans  $(P)$  qui, au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe,  $Z = \frac{az-1}{a-z}$

Le problème est consacré à l'étude de l'application  $F_a$  et à la détermination d'ensembles images de configurations du plan par  $F_a$ .

**1.1.** Montrer que  $F_a$  admet deux points invariants que l'on déterminera.

**1.2.** Montrer que  $F_a$  est une bijection de  $(P)$  privé de  $A$  dans  $(P)$  privé de  $B$  et que la bijection réciproque notée  $F_a^{-1}$  est telle que  $F_a^{-1} = F_{-a}$ . Dans toute la suite du problème, on suppose que  $a > 1$ .

**2.** Soit  $M$  un point de  $(P)$  d'affixe  $z$  non réelle et  $M'$  d'affixe  $Z$ , son image par  $F_a$ .

**2.1.** Vérifier que  $(Z + a)(z - a) = 1 - a^2$

**2.2.** On considère le cercle (C) passant par M et I et dont le centre est situé sur l'axe des ordonnées ; (on remarquera que ce cercle contient aussi le point J). La droite (AM) coupe ce cercle en un point N d'affixe  $z'$  (qui peut être confondu avec M).

Montrer que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ .

**2.3.** Vérifier que deux vecteurs  $\overrightarrow{U_1}$  et  $\overrightarrow{U_2}$  d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  sont colinéaires si et seulement si  $\overrightarrow{U_1} \cdot \overrightarrow{U_2} = z_1 \overline{z_2}$ . En déduire que  $(z - a)(\overline{z'} - a) = a^2 - 1$  puis que M' est le symétrique de N par rapport à l'axe des ordonnées.

**3.1.** En utilisant les résultats de la question 2), donner une construction géométrique de M'.

**3.2.** Quelle est l'image par  $F_a$  d'un cercle contenant les points I et J ? (On pourra remarquer le centre d'un tel cercle appartient à l'axe des ordonnées).

**4.1.** On cherche l'image par  $F_a$  d'une droite passant par O.

**4.2.** Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  distinct  $a$  par :  $g(x) = \frac{ax-1}{a-x}$ . Etudier les variations de  $g$  (on rappelle que  $a > 1$ )

**4.3.** En déduire :

L'ensemble image par  $F_a$  du segment [JI]

L'ensemble image par  $F_a$  de l'axe des abscisses privé de A.

**4.4.** On désigne par C le point de (P) d'affixe  $-\frac{1}{a}$ . Pour  $z$  distinct de 0 et de  $a$ , montrer que  $\arg\left(\frac{z+\frac{1}{a}}{z+a}\right) = \arg z + 2\pi$

**4.5.** En déduire que l'image par  $F_a$  d'une droite passant par O et distinct de l'axe des abscisses et un cercle passant par B et C, privé de B. Préciser le cas particulier de l'axe des ordonnées.

**5.** Soit  $r$  un réel strictement positif. On note  $(\Gamma_r)$  le cercle de centre O et de rayon  $r$ .

**5.1.** Montrer que si M est un point de  $(\Gamma_r)$ , d'image M' par  $F_a$ , on a :  $\frac{M'C}{M'B} = \frac{r}{a}$ .

**5.2.** En déduire que pour  $r$  distinct de  $a$ , si M décrit  $(\Gamma_r)$ , M' décrit un cercle que l'on précisera.

**5.3.** Déterminer l'image de cercle  $(\Gamma_a)$ .

KORKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2005

Durée : 04 heures

Séries : S1 – S3

Coeff : 08

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeMATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

Soit OABC un tétraèdre dont les arêtes contenant le point O sont deux à deux perpendiculaires. On dit que OABC est un tétraèdre trirectangle en O.

1. Montre que les arêtes opposées du tétraèdre sont perpendiculaires.
2. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
  - 2.1. Montrer que le plan (OCH) est perpendiculaire à la droite (AB).
  - 2.2. Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
  - 2.3. Soit K l'intersection de (CH) et (AB). Montrer que (OK) est une hauteur du triangle OAB. En déduire que  $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$  (On pourra exprimer de deux manières différentes l'aire du triangle OAB).

EXERCICE 2

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_n - 2u_{n-1} = 2n + 3$ , pour tout entier naturel n non nul.

1. Montrer qu'il existe un réel b indépendant de n tel que :  $v_n = u_n + 2n + b$  soit le terme général d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire que  $u_n = 2^{n+3} - 2n - 7$
3. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ . Calculer  $S_n$  en fonction de n ; déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et calculer la plus petite valeur de n pour laquelle  $S_n$  soit supérieure à 2005.
4. On pose  $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Calculer  $T_n$  en fonction de n et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (Unité graphique 2 cm).

**1.** Etude d'une courbe paramétrée. On considère la courbe (C) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = -\frac{t^2}{2} + t \\ y = g(t) = \frac{t^2}{2} + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

**1.1.** Etudier conjointement les variations sur  $\mathbb{R}$  de  $f$  et  $g$ .

**1.2.** Préciser les points de (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

**1.3.** Préciser les points d'intersection de (C) avec chacun des axes et donner un vecteur directeur de la tangente en ces points.

**2.** Nature de la courbe

**2.1.** Soit  $s$  l'application du plan complexe qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $Z$  telle que  $Z = (1 + i)z$ .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des.

**2.2.** Déterminer l'affixe  $Z$  de  $M'$  sous la forme  $Z = X + iY$  lorsque  $M$  est un de (C).

**2.3.** Soit (L) l'image de (C) par  $s$ . Déterminer une équation cartésienne de (L).

**2.4.** Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de (L). En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C). Construire géométriquement (C). On marquera les points identifiés dans les questions 1) b) et 1) c).

### **PROBLEME**

Dans tout ce problème  $a$  désigne un nombre réel donné.

### **PARTIE A**

**1.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) :  $y'' + 2ay' + a^2y = 0$

**2.** Déterminer la solution  $g$  de (E) vérifiant  $g(0)$  et  $g'(0) = e$

### **Partie B**

Dans la suite on note  $f_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_a(x) = xe^{(-ax+1)}$ . Le plan étant muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $(C_a)$  la courbe représentative de  $f_a$  dans ce repère.

**1.** Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f_a(-x) = -f_{-a}(x)$ . En déduire une transformation permettant d'obtenir  $(C_{-a})$  à partir de  $(C_a)$

2. Pour  $a \neq 0$ , montrer que pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f_a(x) = \frac{1}{a} f_1(ax)$ . En déduire une transformation permettant d'obtenir  $(C_a)$  à partir de  $(C_1)$ .

3. Etudier les variations de  $f_0$  et  $f_1$ .

4.1. Montrer que toutes les courbes  $(C_a)$  passent par un point fixe qu'on précisera.

4.2. Soit  $(E)$  l'ensemble des points du plan dont les couples de coordonnées vérifient  $xy > 0$ . Démontrer que pour tout point de  $(E)$  il passe une courbe  $(C_a)$  et une seule.

5. Construire sur un même dessin les courbes permettant d'obtenir  $(C_0)$ ,  $(C_1)$ ,  $(C_{-1})$  et  $(C_{\frac{1}{2}})$ .

### **PARTIE C**

On pose  $I_a = \int_0^1 f_a(x) dx$

1. Donner une interprétation géométrique de  $I_a$ .

2. Calculer  $I_a$  en fonction de  $a$ .

3. Démontrer que pour tout  $a > 0$ ,  $\frac{1}{2}e^{(1-a)} \leq I_a \leq \frac{1}{2}e$ .  
En déduire la limite de  $I_a$  quand  $a$  tend vers 0 par valeurs positives.



UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

1/3



OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

06 G 18 bis A 01

Durée : 4 heures

Séries : S1-S3 – Coeff. 8

**Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe**

## MATHÉMATIQUES

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées.**  
**Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.**  
**Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)**

### Exercice 1 : (4 points)

1) On considère l'équation différentielle :  $y' + y = \frac{e^{-x} \cos x}{2 + \sin x}$  (E).

f étant une fonction numérique dérivable sur  $\nabla$ , on pose :  $g(x) = e^x f(x)$ .

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$g'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}.$$

b) Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe ( $\Gamma$ ) d'équations paramétriques :  $\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \end{cases}; t \in \nabla.$

a) Comparer  $M(t)$  et  $M(t + 2\pi)$  ainsi que  $M(t)$  et  $M(-t + \frac{\pi}{2})$ .

b) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve ( $\Gamma$ ) et montrer que pour construire ( $\Gamma$ ), il suffit d'étudier x et y dans  $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + \pi]$ .

c) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans  $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$  et tracer la courbe ( $\Gamma$ ).

### Exercice 2: (4 points)

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.

1) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C et D les événements suivants :

A : « Aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules. »

B : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »

C : « Deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »

D : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules. »

a) Calculer  $p(D/A)$ ,  $p(D/B)$  et  $p(D/C)$ .

b) En déduire la probabilité des événements  $D \ni A$ ,  $D \ni B$  et  $D \ni C$ .

Calculer  $p(D)$  [On remarquera que  $D = D \ni (A \cup (B \cap C))$ ].

### Exercice 3: (4 points)

Dans le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct ABCD de centre O tel que  $AB = 3a$  et  $BC = a\sqrt{3}$ ; où a est un réel strictement positif donné.

1) Déterminer la nature du triangle BCO.

.../2

**MATHÉMATIQUES**

2/3

06 G 18 Bis A 01

Séries : S1-S3

**Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe**

2) Soit E le point du segment [BD] tel que  $BE = \frac{3}{4} BD$ . Donner une construction géométrique du centre  $\Omega$  de la similitude directe  $s$  telle que  $s(B) = O$  et  $s(E) = C$ .

3) On suppose dans la suite que  $a = 1$  et on pose :  $\vec{u} = \frac{1}{AB} \cdot \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \frac{1}{AD} \cdot \vec{AD}$ ; on

munit ensuite le plan du repère orthonormal direct  $(A; \vec{u}; \vec{v})$ ,

a) déterminer les affixes de B et de O.

b) En déduire l'écriture complexe de l'application  $s$ .

4) Déterminer l'axe de  $\Omega$  et celle du point  $A' = s(A)$ .

5) On considère la suite de points  $M_n$  d'affixes  $z_n$  définie par  $M_0 = A$  et pour tout

$n \in \mathbb{N}$ ,  $M_{n+1} = s(M_n)$ .

a) démontrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\alpha_n = z_{n+1} - z_n$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme  $\alpha_0$  et la raison.

b) Exprimer en fonction de  $n$  la longueur de la ligne polygonale  $M_0 M_1 M_2 \dots M_{3n}$  et déterminer la limite de cette longueur quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Problème :**

Dans ce problème on calcule dans la partie A la valeur d'une intégrale et on étudie dans la partie B une suite numérique  $(I_n)$  et quelques unes de ses différentes propriétés.

**Partie A :** Calcul de  $I = \int_0^{\ln \sqrt{2}} \sqrt{e^{2t} - 1} dt$ .

Soit  $g$  et  $G$  les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$  et  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ .

1) Pour tout  $x \in \mathbb{V}$ , on pose :  $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ .

a) Montrer que la fonction  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{V}$  et déterminer sa dérivée.

b) Calculer  $(H \circ \tan)'(x)$  pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . En déduire que  $(H \circ \tan)(x) = x$

pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Calculer alors  $H(1)$ .

2) Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , on pose :  $F(x) = g(x) - H \circ g(x)$ ,

a) Vérifier que  $F$  et  $G$  sont dérivables sur  $]0, +\infty[$  et que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$F'(x) = G'(x)$ .

b) En déduire que  $G(x) = F(x)$ . Calculer alors  $I$ . [On remarquera que  $I = G(\ln \sqrt{2})$ ].

..../3

**MATHEMATIQUES**

3/3

06 G 18 Bis A 01

Séries : S1-S3

**Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe**

**Partie B :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = c^{2x} - 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$I_n = \int_0^{\ln \sqrt{2}} [f(x)]^{\frac{n}{2}} dx \text{ puis } I_0 = \ln \sqrt{2}$$

1) a) Vérifier que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{V}_+$  et que pour tout  $x \in \mathbb{V}_+$  :

$$f'(x) = 2 [1 + f(x)] \tag{1}$$

b) Montrer en utilisant la relation (1) que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2} \tag{2}$$

Vérifier que la relation (2) reste encore valable pour  $n = 0$ .

c) En remarquant que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $U_n = I_{n+4} - I_n$ .

a) En remplaçant  $n$  par  $n+2$ , dans la relation (2), montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}. \text{ En déduire l'expression de } U_{4n+1} \text{ en fonction de } n.$$

b) Calculer  $\sum_{n=0}^p U_{4n+1}$  en fonction de  $I_{4p+5}$  et de  $I_1$ .

c) Calculer la limite lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$  de la somme

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{-1}{4p+3} + \frac{1}{4p+5} = \sum_{n=0}^{2p+2} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**BAREME**

EX 1 : 04pts					EX 2 : 04 pts				EX 3 : 04 pts					
1		2			1	2		1	2	3		4	5	
a	b	a	b	c		a	b			a	b		a	b
1	1	0.5	0.5	1	1	1.5	1.5	0.25	1	0.25	0.5	0.5	0.5	1

PROBLEME : 08 pts									
A				B					
1		2		1			2		
a	b	a	b	a	b	c	a	b	C
1	1	1	1	0.5	1	0.5	0.75	0.75	0.5

.../Fin



UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

1/ 4 07 G 18 bis A 01

Durée : 4 heures

Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe**M A T H E M A T I Q U E S**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n°5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1 : (03,5 points).** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres complexes quelconques. On pose

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

et pour tout complexe  $z$  :

$$f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$$

1. Montrer que  $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$ . (On notera que  $1 + j + j^2 = 0$  et  $j^3 = 1$ ).

2. a. En déduire que  $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$ .

b. En utilisant a), montrer que l'un au moins des nombres réels  $|f(1)|$ ,  $|f(j)|$  et  $|f(j^2)|$  est supérieur ou égal à 1.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  $ABC$  est un triangle équilatéral direct de centre de gravité  $O$  et tel que l'abscisse de  $A$  soit un réel  $r$  strictement positif fixé.  $I$  et  $J$  sont deux points quelconques du plan d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ .

Dans cette question on prend  $\alpha = -\frac{a+b}{r}$  et  $\beta = \frac{ab}{r^2}$ .

a. Montrer que les abscisses respectives de  $B$  et  $C$  sont  $rj$  et  $rj^2$ .

b. Montrer que  $BO \cdot BI \cdot BJ = r^3 |f(j)|$ . Calculer de la même manière  $CO \cdot CI \cdot CJ$  et  $AO \cdot AI \cdot AJ$ .

c. Montrer que le triangle  $ABC$  a au moins un sommet  $S$  vérifiant :  $SO \cdot SI \cdot SJ \geq r^3$ .

**EXERCICE 2 : (04 points).** Le plan  $(P)$  étant orienté; on considère un triangle rectangle isocèle  $ABC$  tel que  $(\vec{BA}, \vec{BC})$  ait pour mesure  $\frac{\pi}{2}$ . On note  $O$  l'intersection des bissectrices intérieures de  $ABC$ . Soit  $s_1$  la similitude plane directe de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $O$  et  $s_2$  la similitude plane directe de centre  $C$  qui transforme  $O$  en  $B$ . A tout point  $M$  du plan distinct de  $A$  et de  $B$ ; on associe le point  $N = s_1(M)$  et le point  $P = s_2^{-1}(M)$

1. a. Déterminer une mesure de l'angle  $(\vec{AM}, \vec{AN})$ .

b. On désigne par  $s'$  la similitude plane directe de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $M$ .

Montrer que  $s' \circ s_1 = s_1 \circ s'$ ; en déduire l'image de  $O$  par  $s'$ . Déterminer une mesure de l'angle  $(\vec{MA}, \vec{MN})$ .

c. Proposer une construction géométrique de  $N$ , lorsque le point  $M$  est donné.

2. a. Quelle est la nature de  $r = s_1 \circ s_2$ ? préciser ses éléments géométriques caractéristiques.

b. Déterminer  $r(P)$  et en déduire une construction géométrique de  $P$  à partir de  $N$ .

c. Lorsque  $M = O$ , montrer que le point  $N$  appartient à la demi-droite  $[AC)$  et le point  $P$  à la demi-droite  $[CA)$

MATHÉMATIQUES

2/4

07 G 18 bis A 01

2

Séries : S1-S3

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

3. Faire une figure comportant les points  $A, B, C, O, P$  et  $N$  avec  $M = O$ .

**EXERCICE 3 : (3,5 points).** On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , les trois points  $A, B$  et  $C$  de coordonnées respectives  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$ , puis à tout réel  $t \in [0, 1]$  on associe le point  $M(t)$  barycentre du système  $\{(B, (1-t)^2), (A, 2t(1-t)), (C, t^2)\}$ . On note  $x(t)$  et  $y(t)$  les coordonnées de  $M(t)$  et  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(t)$  lorsque  $t$  décrit  $[0, 1]$ .

1. a. Exprimer en fonction de  $t$  les coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  de  $M(t)$ .  
b. Dresser le tableau de variations des fonctions  $x$  et  $y$  et tracer la courbe  $(\Gamma)$  ainsi que ses tangentes aux points  $B, C$  et  $M\left(\frac{1}{2}\right)$ .
2. Montrer que les tangentes à  $(\Gamma)$  en  $B$  et  $C$  se coupent en  $A$ .
3. Trouver une relation entre  $x(t)$  et  $y(t)$  indépendante de  $t$ . On calculera  $y$  en fonction de  $x$  et on posera  $y = f(x)$ . La fonction  $f$  est-elle dérivable à gauche au point 1?

**PROBLEME : ( 9 points )**

**PARTIE A :**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[1; +\infty[$ , ayant une dérivée continue et croissante. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on pose :  $u_p = \sum_{n=1}^p f'(n)$ .

1. Démontrer la relation suivante :

$$(0.1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$$

- a. En appliquant le théorème des accroissements finis à  $f$  dans un intervalle bien choisi.
- b. En utilisant la valeur moyenne de  $f'$  sur  $[n; n+1]$ . [On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue  $g$  sur un intervalle  $[a; b]$  est :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$ ].
2. En utilisant la relation (0.1), de la question 1. démontrer que

$$(0.2) \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1)$$

3. Dans cette question on prend  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .  
a. Vérifier que la suite  $(u_p)$  est monotone.  
b. En utilisant la relation (0.2), de la question 2. montrer que la suite  $(u_p)$  est bornée.  
c. En déduire que la suite  $(v_p)$  de terme général  $v_p = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3}$  est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .
4. Dans cette question on prend  $f(x) = -\ln x$ .

- a. En utilisant la relation (0.2), montrer que  $u_p \leq -\frac{1}{p} - \ln p$ .

MATHÉMATIQUES

3/4

07 G 18 bis A 01

Séries : S1-S3<sub>3</sub>Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

b. Montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} = +\infty$ .

**PARTIE B :**

1. Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt$ .

a. En effectuant le changement de variable  $u = t - n\pi$  et en remarquant que la fonction  $u \mapsto |\sin u|$  est périodique de période  $\pi$ .

b. En utilisant le résultat admis suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], |\sin t| = (-1)^n \sin t.$$

2. Pour tout réel  $a > 0$ , on considère la fonction  $h_a$  définie sur  $I = ]0; +\infty[$  par :

$$h_a(t) = \left| \frac{\sin at}{t} \right|, \text{ si } t \in ]0; +\infty[, \text{ et } h_a(0) = a.$$

a. Montrer que les fonctions  $h_a$  sont continues sur  $I$ .

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt \leq \int_0^\pi h_1(t) dt$$

c. En déduire que :

$$(0.3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{2}{(n+1)\pi} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq \frac{2}{n\pi}$$

$$\text{et} \quad \frac{2}{\pi} \leq \int_0^\pi h_1(t) dt$$

3. On veut utiliser les résultats précédents pour calculer  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^\pi h_a(t) dt$ .

a. En utilisant la relation ( 0.3 ) comparer  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n}$  et  $\int_0^{p\pi} h_1(t) dt$ .

b. Déduire de la question 4)b) partie A  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p\pi} h_1(t) dt$

c. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x h_1(t) dt$  [On pourra introduire l'entier  $p = E\left(\frac{x}{\pi}\right)$  ; où  $E$  désigne la fonction partie entière.]

4. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* : \int_0^\pi h_a(t) dt = \int_0^{a\pi} h_1(t) dt.$$

En déduire  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^\pi h_a(t) dt$

**B A R E M E :**

Ex 1 : 03,5 pts						Ex 2 : 04 pts						Ex 3 : 03,5 pts				
1	2		3			1			2			3	1	2	3	
	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	a	b		
0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,5	0,75	0,5	0,5	0,5	1	1,5	0,5	0,5

Problème Partie A : 05 pts								Problème Partie B : 04 pts								
1		2	3			4		1		2			3			4
a	b		a	b	c	a	b	a	b	a	b	c	a	b	c	
0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,5





UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/12



OFFICE DU BACCALAUREAT

BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal

Serveur Vocal : 628 05 59

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

08 G 18bis A 02

Durée : 4 heures

Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeMATHÉMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

## CORRECTION PROPOSEE PAR LES AUTEURS

**EXERCICE 1** (04 points). Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives  $e^a, e^b, e^c$ , où  $a, b, c$  sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique  $E(X)$  de  $X$  est égale à 1.

1. Calculer  $a, b, c$  et la variance  $V(X)$  de  $X$ . 1 pt
2. Soient  $A, B, C$  trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée  $(\Delta)$ .
  - a. Calculer l'abscisse du point  $G$  barycentre de  $\{(A, 1); (B, 2); (C, 4)\}$ . 1 pt
  - b. On pose :  $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$ , où  $M$  est un point de  $(\Delta)$ .  
Montrer que  $\varphi(G) = V(X)$ . 1 pt
  - c. Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  de  $(\Delta)$  tels que  $\varphi(M) = 3$ . 1 pt

**EXERCICE 2** (04 points). Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +8[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x + 1}{x}$ .

En utilisant la fonction  $f$ , on se propose de déterminer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. Soit  $k$  un entier non nul. Etablir les relations suivantes :

$$a. \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

$$b. \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$$

2. a. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$  0,25 pt

$$b. \text{ Soit } U_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Calculer  $U_n$  en fonction  $n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ . 0,5+0,25=0,75 pt

- c. Dédurre des résultats de la question (1) que :  $0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq U_n$ .

$$\text{Déterminer alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k)$$

0,5+0,5=1 pt

- d. Montrer que

**MATHÉMATIQUES**

2 / 12

2 Correction proposée par les auteurs

08 G 18 bis A 02

Séries : S1-S3

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

0,5+0,5=1 pt

$$f(k) = S_n - \ln \frac{2n+1}{n}. \text{ En déduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

**EXERCICE 3** (04 points). Le plan est orienté.  $PQR$  est un triangle équilatéral de sens direct du plan.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs de  $[QR]$  et  $[RP]$ .  $Q_1$  est le symétrique de  $Q$  par rapport à  $J$ .

1. Soit  $t$  la translation transformant  $J$  en  $Q$  et  $r$  la rotation de centre  $P$  transformant  $Q$  en  $R$ . On pose  $f = t \circ r$ .

a. Faire une figure.

Définir et construire les points  $P'$  et  $Q'$  images respectives par  $f$  des points  $P$  et  $Q$ . 1 pt

b. Déterminer la nature du triangle  $JIR$  et préciser l'image par  $f$  du point  $R$ . 0,25+0,25=0,5 pt

c. Donner la nature de  $f$  et ses éléments géométriques caractéristiques. En déduire la nature du triangle  $JPP'$ . 0,25+0,25+0,5=1 pt

2. Soit  $s$  la similitude directe telle  $s(J) = P$  et  $s(R) = I$ .

a. Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ . Montrer que  $s(I) = P'$ . 0,5 pt

b. Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ . Montrer que les points  $\Omega, I, R$  et  $P$  d'une part et les points  $\Omega, P, J$  et  $Q_1$  d'autre part sont cocycliques.

En déduire la position de  $\Omega$  puis construire ce point. 0,25+0,25+0,5=1 pt

**PROBLEME** (08 points).

1. Soit l'équation différentielle :

$$(E_m) : my'' + 2y' + 2y = 0; \text{ où } m \text{ est un réel.}$$

a. Déterminer suivant les valeurs de  $m$  l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  solutions de  $(E_m)$ . 1 pt

b. Déterminer la solution de  $(E_1)$  dont la courbe représentative passe par le point  $A$  de coordonnées  $(0; 1)$  et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation  $y = -x$ . 0,5 pt

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  par  $f(t) = e^{-t} \cos t$ . Etudier les variations de  $f$  et construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). 1 pt

3. Soit  $g$  le prolongement à  $\mathbb{R}$  de  $f$ .

a. Comparer  $g(t)$  et  $g(t + 2\pi)$ . Donner alors le sens de variation de  $g$ . 0,5 pt

b. On pose  $u(t) = e^{-t}$  et  $v(t) = -e^{-t}$ . On note  $(C_u)$  et  $(C_v)$  leurs courbes représentatives respectives et  $(G)$  celle de  $g$  dans le même repère. Quels sont les points communs à  $(G)$  et  $(C_u)$  d'une part, à  $(G)$  et  $(C_v)$  d'autre part?

0,25+0,25 = 0,5 pt

c. Montrer qu'en chacun de ces points communs les deux courbes ont même tangente.

0,25+0,25 = 0,5 pt

d. Démontrer que  $g$  admet une limite en  $+\infty$ . (On fait remarquer que  $-1 = \cos t = 1$ ). 0,25 pt

4. Pour tout réel  $k$  on pose :  $a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t) dt.$

a. Calculer  $a_k$ . (On pourra faire deux fois une intégration par parties.) 0,5 pt

b. Pour tout réel  $n$  on pose et  $s_n = \sum_{k=0}^n |a_k|.$

Montrer que la suite  $(s_n)$  admet une limite.

Interpréter géométriquement ce résultat.

0,5+0,25 = 0,75 pt

MATHÉMATIQUES

3 /12

06 G 18 bis A 02

Correction proposée par les auteurs

Séries : S1-S3

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

5. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe paramétrée.  $(\Lambda)$  définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \cos t \\ y(t) = e^{-t} \sin t \end{cases} ; \text{ pour } t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

a. Etudier les variations des fonctions  $x$  et  $y$  et dresser le tableau des variations conjointes.

0,75 pt

b. Soit  $M_t$  le point de  $(\Lambda)$  de paramètre  $t$  et  $\vec{V}_t$  le vecteur dérivé lui correspondant.

Calculer la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM_t}$  et montrer que l'angle  $(\overrightarrow{OM_t}, \vec{V}_t)$  est constant.

0,5+0,5 = 1 pt

c. Représenter graphiquement  $(\Lambda)$ . On précisera les tangentes aux points de paramètres  $-\frac{\pi}{2}$  et

0,25+0,25+0,25 = 0,75 pt

0



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 13



OFFICE DU BACCALAUREAT

BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal

Serveur Vocal: 628 05 59

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis A 01

Durée: 4 heures

Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeM A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1** (4 pts).

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz.

Le premier jour de l'année, il y a deux chances sur 5 qu'elle propose du riz.

Si elle en propose un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.

Si elle n'en propose pas un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain.

On appelle  $J_n$  l'événement "la cantine propose du riz le  $n^{\text{ième}}$  jour" et  $K_n$  l'événement "la cantine n'en propose pas le  $n^{\text{ième}}$  jour".

Soit  $p_n$  la probabilité de l'événement  $J_n$ .

1. Déterminer  $p(J_2/J_1)$  et  $p(J_2/K_1)$ . En déduire  $p_2$ . 0,25+0,5+0,5=1,25 pt

2. Montrer que  $p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$ . 0,75 pt

3. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ .

a) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. 0,5 pt

b) Calculer  $u_n$  puis  $p_n$  en fonction de  $n$ . 0,5 + 0,25 = 0,75 pt

c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs.

Montrer qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{8}{15}$ . 0,75 pt

**EXERCICE 2** (4 pts). Dans un système de numération de base  $a$ , on considère les nombres

$$A = \overline{211}, B = \overline{312} \text{ et } C = \overline{133032}.$$

1. Expliquer pourquoi  $a$  doit être strictement supérieur à 3. 0,25 pt

2. a) Sachant que  $C = A \times B$ , montrer que  $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$ . 0,5 pt

b) En déduire que  $a$  divise 8. 0,25 pt

c) Déterminer alors  $a$ . 0,5 pt

3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4. 0,25 pt

4. Dans cette question on suppose que  $a = 4$ .

a) Ecrire  $A, B$  et  $C$  dans le système décimal. 0,75 pt

b) Montrer alors que  $C = A \times B = \text{ppcm}(A, B)$ .

En déduire que l'équation :  $Ax + By = 1$  a des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ . 0,25+0,5=0,75 pt

09 G 18 bis A 01

Séries : S1- S3

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe**MATHÉMATIQUES**

2 / 13

5. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $37x + 54y = 1$ .a) Vérifier que  $(19, -13)$  est une solution de cette équation.

0,25 pt

b) Résoudre cette équation.

0,5 pt

**PROBLEME** (12 points).

Le problème est composé de trois parties A, B et C.

Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A

Le plan euclidien  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ On appelle  $f_a$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f_a(x) = \frac{x}{ax - a + 1},$$

où  $a$  est un réel différent de 0 et de 1.On note  $C_a$  la courbe représentative de  $f_a$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .**Partie A: (5,5 pts)**1. a) Montrer que l'application  $\varphi$  de  $(P)$  dans  $(P)$  définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation que l'on précisera. 0,5 pt

b) Déterminer l'ensemble de définition  $D_{f_a}$  de  $f_a$  et montrer que la courbe  $C_a$  est globalement invariante par  $\varphi$ .

0,5 pt

2. a) Montrer que toutes les courbes  $C_a$  passent par deux points fixes indépendants de  $a$ .

0,25 pt

b) Déterminer les points fixes de  $f_a$ , c'est à dire les réels  $\ell$  tels que  $f_a(\ell) = \ell$ .

0,25 pt

3. a) Etudier les variations de  $f_a$ ; on discutera suivant les valeurs de  $a$ .

0,5 pt

b) Construire dans le repère  $\mathcal{R}$  les courbes  $C_{-2}, C_{0,5}$ 

(On prendra pour unité graphique 1 cm).

0,5+0,25=0,75 pt

c) Construire dans un même repère orthonormé d'unité graphique 2 cm les courbes  $C_{1,5}$  et  $C_2$ .

0,25+0,25=0,5 pt

4. Soit  $F$  la fonction de  $] -\infty, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$F(a) = \int_0^1 f_a(x) dx \text{ et } F(0) = \int_0^1 x dx.$$

a) Montrer que pour tout  $a < 1$  et  $a \neq 0$ , la fonction  $x \mapsto ax - a + 1$  est strictement positive dans  $[0, 1]$ .Etablir alors que la fonction  $F$  est définie sur  $] -\infty, 1[$ .

0,25+0,25=0,5 pt

b) En faisant le changement de variable  $t = ax - a + 1$ , vérifier que pour tout  $a$  différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1-a}{a^2} \ln(1-a).$$

Déterminer alors  $\lim_{a \rightarrow 1^-} F(a)$  et  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$ .

0,25 × 3=0,75 pt

c) Démontrer que pour tout  $a$  différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$\forall x \in [0, 1], f_a(x) \in [0, 1].$$

0,25 pt

d) En utilisant le résultat de la question c), montrer que pour tout  $a$  différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

09 G 18 bis A 01

Séries : S1- S3

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

**MATHÉMATIQUES**

3 / 13

$$\forall x \in [0, 1], |f_a(x) - x| \leq |a|.$$

Calculer alors  $\lim_{a \rightarrow 0} |F(a) - F(0)|$  puis  $\lim_{a \rightarrow 0} F(a)$ .

La fonction  $F$  est-elle continue au point 0 ?

0,25 × 3 = 0,75 pt

**Partie B: (4 pts)**

On note  $\Omega_a$  le point de coordonnées  $(1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{a})$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et on considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \text{ et } \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$

1. a) Montrer que  $\mathcal{R}_a = (\Omega_a, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est un repère orthonormé du plan. 0,25 pt

b) Soit  $M$  un point du plan de couple de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ . Appelons  $(X, Y)$  son couple de coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}_a$ . En utilisant la relation vectorielle :  $\vec{OM} = \vec{O\Omega_a} + \vec{\Omega_a M}$ , montrer que :

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) \end{cases}$$

0,5 pt

c) Vérifier que la courbe  $(C_a)$  a pour équation  $Y^2 - X^2 = \frac{2(a-1)}{a^2}$  dans le repère  $\mathcal{R}_a$ .

0,5 pt

d) Déterminer la nature de  $C_a$ ; préciser ses sommets  $S_a$  et  $S'_a$  suivant les valeurs de  $a$ .

0,25+0,5=0,75 pt

2. Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = -x + 1$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

Montrer que  $(C_a)$  a ses sommets sur  $(D)$  si et seulement si  $a < 1$ .

0,5 pt

3. On suppose que  $a > 1$ .

a) Calculer en fonction de  $a$  les distances  $\Omega_a S_a$  et  $\Omega_2 \Omega_a$ .

Pour calculer  $\Omega_a S_a$ , on peut se placer dans le repère  $\mathcal{R}_a$ .

Pour calculer  $\Omega_2 \Omega_a$ , on peut se placer dans le repère  $\mathcal{R}$ .

0,25 + 0,25 = 0,5 pt

b) En appliquant le théorème de pythagore au triangle  $\Omega_2 \Omega_a S_a$ , calculer  $\Omega_2 S_a$ ;

0,5 pt

c) En déduire que les sommets de  $C_a$  sont sur un cercle de centre  $\Omega_2$  dont on précisera le rayon.

0,5 pt

**Partie C: (2,5 pts)**

Dans cette partie,  $a$  est un élément de l'intervalle  $]0, 1[$ .

Soit  $u_0$  un élément de  $[0; 1]$  et  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0$  et par la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f_a(u_n)$ .

1. a) Montrer que la fonction  $f_a$  est strictement croissante dans  $[0, 1]$ .

Quel est l'image de l'intervalle  $[0, 1]$  par  $f_a$  ?

0,25 + 0,25 = 0,5 pt

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est partout définie et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .

Que peut-on dire de la suite  $(u_n)$  si  $u_0 = 0$  ? Si  $u_0 = 1$  ?

0,5 + 0,25 + 0,25 = 1 pt

2. On suppose que  $u_0$  est différent de 0 et 1.

a) Vérifier que la suite  $(u_n)$  est strictement monotone.

0,5 pt

b) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

0,25 + 0,25 = 0,5 pt



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/3



OFFICE DU BACCALAUREAT

BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal

Serveur Vocal: 628 05 59

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

10 G 18bis A 01

Durée: 4 heures

Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeMATHÉMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 points).

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts  $A$  et  $B$ . Sur la figure, on prendra 8 cm comme longueur du segment  $[AB]$ .

1. Étudier et construire l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  du plan tels que  $\frac{MA}{MB} = 4$ .  
0,5 pt + 0,25 pt
2. Étudier et construire l'ensemble  $\mathcal{F}$  des points  $M$  du plan tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} [2\pi[$ .  
0,5 pt + 0,25 pt
3. Soit  $C$  l'image de  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{3}{4}\pi$  et  $D$  l'image de  $B$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\frac{3}{4}$ . On désigne par  $s$  la similitude directe transformant  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ .
  - a) Déterminer le rapport et l'angle de  $s$ .  
0,5 pt + 0,5 pt
  - b) On note  $I$  le centre de la similitude  $s$ . Exprimer  $IB$  en fonction de  $IA$  et donner une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ . En déduire la position du point  $I$  et le placer sur la figure.  
0,25 pt x 4
  - c) Démontrer que  $I$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $ACD$ .  
0,5 pt

EXERCICE 2 (4 points).

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ."

1. a) Démontrer que 193 est un nombre premier.  
0,75 pt
- b) Soit  $a$  un entier naturel inférieur à 192. Montrer que  $a^{192} \equiv 1[193]$ .  
0,5 pt
2. On considère l'équation
 
$$(E) : 83x - 192y = 1 \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$
  - a) Vérifier que le couple  $(155, 67)$  est solution de  $(E)$ .  
0,5 pt
  - b) Résoudre l'équation  $(E)$ .  
0,75 pt
3. On note  $A$  l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies de la manière suivante :
  - à tout entier  $a$  de  $A$ ,  $f$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{83}$  par 193;
  - à tout entier  $a$  de  $A$ ,  $g$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{192}$  par 193.

- a) Démontrer  $g(f(a)) \equiv a^{83 \times 155} [193]$ . En déduire que pour tout  $a \in A$  on a :  $g(f(a)) = a$ .  
0,5 pt + 0,5 pt
- b) Déterminer  $f \circ g$ .  
0,5 pt

**PROBLEME (12 points).****Partie A**

Soit  $a$  un réel non nul,  $u$  et  $v$  deux fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et telles que :

$$(0.1) \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = au \end{cases}$$

1. a) Montrer que  $u$  et  $v$  vérifient l'équation différentielle

$$(0.2) \quad y'' - ay = 0$$

0,25 pt + 0,25 pt

- b) résoudre l'équation (0.2) selon les valeurs de  $a$ .  
0,75 pt

2. On suppose que  $a = 1$ . Déterminer  $u$  et  $v$  sachant que  $u(0) = 3$  et  $v(0) = 0$ .  
0,75 pt

**Partie B**

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{P}$  dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient :

$$(0.3) \quad \begin{cases} x(t) = \frac{3}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y(t) = \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases} \quad t \geq 0$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan délimité par  $(\Gamma)$  et les droites d'équation  $y = 0$ ,  $x = 3$  et  $x = 5$ .

1. a) Démontrer que  $(\Gamma)$  est une partie de la conique dont une équation est :

$$(0.4) \quad x^2 - y^2 - 9 = 0$$

0,5 pt

- b) Préciser la nature de cette conique ainsi que ses éléments géométriques caractéristiques.  
Construire  $(\Gamma)$ .  
0,5 pt + 0,5 pt

2. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 9}$  et  $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{9}{2x}$ .

- a) Etudier les variations de  $f$ .  
0,75 pt
- b) Montrer que la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [3, +\infty[$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser. On note  $\varphi$  cette restriction.  
0,25 pt
- c) Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $J$ , on a :  $\varphi^{-1}(x) = g(x)$ .  
0,5 pt
- d) Tracer  $C_\varphi$ , courbe représentative de  $\varphi$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Expliquer comment obtenir  $C_{\varphi^{-1}}$ , courbe représentative de  $\varphi^{-1}$  dans ce repère, à partir de  $C_\varphi$ . Tracer  $C_{\varphi^{-1}}$ .  
0,25 pt x 3

3. Soit  $\beta$  un élément de  $]0, 3[$  et  $\alpha = g(\beta)$ .

a) Calculer  $\int_\beta^3 g(x) dx$  et en déduire que  $\int_3^\alpha f(x) dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3}$ .

[Indication : On pourra interpréter ces deux intégrales comme des aires.]

MATHÉMATIQUES

3 / 3

0,25 pt + 0,75 pt

- b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par  $(\Gamma)$  et les droites d'équation  $y = 0$ ,  $x = 3$  et  $x = 5$ . 0,75 pt

**Partie C**

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$(0.5) \quad \begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= g(u_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite  $(u_n)$ .

1. a) Étudier les variations de  $g$  puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0.$$

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

- b) Déterminer le signe de  $u_1 - u_0$  puis montrer que la suite  $(u_n)$  est monotone.

0,25 pt + 0,25 pt

- c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

0,25 pt + 0,25 pt

2. a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $g$  dans un intervalle approprié, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{g(u_n) - 3}{u_n - 3} < \frac{1}{2}$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

- b) Déterminer une valeur possible de  $n$  pour que  $u_n - 3 \leq 10^{-3}$ .

0,25 pt

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 3}$ .

- a) Montrer que  $(\ln v_n)$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. 0,5 pt

- b) Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$  et calculer la limite de  $(u_n)$ . 0,5 pt + 0,25 pt



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/4

11 G 18bis A 01



Durée: 4 heures

OFFICE DU BACCALAUREAT

Séries : S1-S3 - Coeff. 8

BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal

Serveur Vocal: 628 05 59

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeM A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1.** (4 pts)On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 27$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$$

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $u_n$ ?

2 × 0,25 pts

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} \equiv u_n [8]$ .En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{2n} \equiv 3 [8]$  et  $u_{2n+1} \equiv 5 [8]$ .

0,25+0,5+0,5 pts

3. Pour tout entier naturel  $n$  on pose :  $v_n = u_n - 2$ .Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n = 50 \times 3^n + 4$ .

2 × 0,25 pt

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n \equiv 54 [100]$ .Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$  suivant les valeurs de  $n$ .

0,25 + 0,75 pt

5. Montrer que deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)$  sont premiers entre eux.

0,75 pt

**EXERCICE 2.** (4 pts)L'espace orienté  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y', z')$  tel que

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

1. a) Montrer que  $f$  est une isométrie. (c'est à dire que  $f$  conserve la distance.)

0,5 pt

b) Montrer que l'ensemble des points invariants par  $f$  est la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $A$  de coordonnées  $(0, 0, -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ 

0,5 pt

11 G 18 bis A 01

Séries : S1- S3

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

**MATHÉMATIQUES**

2 / 4

2. Soit  $P$  le plan perpendiculaire à  $(\Delta)$  en  $A$ .
  - a) Montrer que le point  $I$  de coordonnées  $(-1, 0, 0)$  appartient à  $P$ . 0,5 pt
  - b) Prouver que  $I' = f(I)$  appartient à  $P$ . 0,5 pt
3. Déterminer la nature de  $f$  et ses éléments géométriques caractéristiques. 0,5 pt
4. Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  d'images  $M'$  tels que le milieu  $J$  de  $[MM']$  appartient :
  - a) au plan  $Q$  d'équation cartésienne :  $2x + y - z = 0$ ; 0,75 pt
  - b) à la droite  $(D)$  dont un système d'équations cartésiennes est :  $x = y = z$ . 0,75 pt

**PROBLEME.** (12 pts)

**Partie A**

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur l'intervalle  $I = [-1, 1]$  et admettant sur  $I$  une dérivée troisième  $f'''$  continue. Soit  $a$  un point de  $I$ ,  $a \neq 0$ .

1. a) Dire pourquoi  $f'''$  est bornée (c'est à dire il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $x \in I$ ,  $m \leq f'''(x) \leq M$  ou il existe un réel  $K > 0$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $|f'''(x)| \leq K$ .)

En déduire  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx$ . 0,25+0,5 pt

- b) Soit  $g$  une fonction numérique définie sur  $I$  et admettant sur  $I$  une dérivée troisième  $g'''$  continue.

Quelle est la dérivée de  $f''g' - f'g''$  ?

En déduire que

$$(0.1) \quad \int_0^a f'(x)g'''(x) dx = \left[ (f'g'' - f''g')(x) \right]_0^a + \int_0^a f'''(x)g'(x) dx.$$

0,25+0,5 pt

2. On prend  $g(x) = \frac{1}{6}(a-x)^3$ .

- a) Après avoir calculé  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  et  $g'''(x)$  pour  $x \in I$ , montrer en utilisant la relation (0.1) que

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2}f''(0)a^2 + \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx.$$

0,5 pt

b) Application

En choisissant pour  $f$  la fonction  $x \mapsto e^x$ , calculer  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^a - a - 1}{a^2}$ . 0,5 pt

3. Dans le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère la courbe  $\mathcal{G}$  de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{e^t - 1} \\ y(t) = \frac{t}{e^t - 1} e^t \end{cases} \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

- a) Montrer que les fonctions  $x$  et  $y$  sont continues au point 0. 0,25+0,25 pt
- b) Vérifier qu'elles sont dérivables en 0. Quelle est la tangente  $T_B$  à  $\mathcal{G}$  au point  $B$  de coordonnées  $(1, 1)$ ? 3 x 0,25 pt

**Partie B**

11 G 18 bis A 01

Séries : S1- S3

**MATHÉMATIQUES**

3 / 4

**Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe<sup>3</sup>**

Pour tout entier naturel non nul  $n$  on considère la fonction numérique  $f_n$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - \left(e + \frac{1}{n}\right)\sqrt{x}$ .  $C_n$  est sa courbe représentative dans le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

1. a) Justifier la dérivabilité de  $f_n$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'_n(x)$  pour  $x > 0$ .

La fonction  $f_n$  est-elle dérivable au point 0 ? (On pourra utiliser 2.b de la partie A)

3 × 0,25 pt

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$  et dresser le tableau de variations de  $f_n$ .

3 × 0,25 pt

c) Construire dans le repère, la courbe  $C_1$ , sa demi-tangente au point d'abscisse 0 et sa tangente au point d'abscisse  $\left[\ln(e+1)\right]^2$ .

3 × 0,25 pt

2. a) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  telles que

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n.$$

2 × 0,25 pt

b) Soit  $b$  un réel positif ou nul. Montrer que  $\int_0^b e^{\sqrt{x}} dx = 2 + 2(\sqrt{b} - 1)e^{\sqrt{b}}$ . Pour cela, on pourra utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

en prenant  $u(x) = \sqrt{x}$ .

0,5 pt

c) Pour tout entier naturel  $n$  on pose :  $I_n = \int_0^{\alpha_n} f_n(x) dx$ .

$$\text{Vérifier que } I_n = 2 + 2\left(e + \frac{1}{n}\right)\sqrt{\alpha_n} \left(\sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3}\alpha_n - 1\right).$$

0,25 pt

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose :  $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$ .

a) Démontrer que les restrictions  $h_1$  et  $h_2$  de  $\varphi$  respectivement à chacun des intervalles  $V_1 = ]0, 1]$  et  $V_2 = [1, +\infty[$  sont des bijections de  $V_1$  et  $V_2$  respectivement sur des intervalles à déterminer.

0,5 pt

On pose  $h = h_2^{-1} \circ h_1$  et on désigne par  $C_h$  la courbe de  $h$  dans le repère.

On ne cherchera pas l'expression de  $h(x)$  en fonction  $x$ .

b) Vérifier que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $e + \frac{1}{n} = h_1(\sqrt{\alpha_n})$ ; en déduire que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est convergente et calculer sa limite. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

3 × 0,25 pt

c) Déterminer de même la limite de la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$ .

0,25 pt

4. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $M_n$  le point du plan de coordonnées  $(\sqrt{\alpha_n}, \sqrt{\beta_n})$ .

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , le point  $M_n$  appartient à  $C_h$  (c'est à dire  $h(\sqrt{\alpha_n}) = \sqrt{\beta_n}$ ).

0,25 pt

b) Déterminer les limites de  $h$  aux bornes de son ensemble de définition.

Montrer que la fonction  $h$  est décroissante.

2 × 0,25 pt

11 G 18 bis A 01

Séries : S1- S3

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeMATHÉMATIQUES 4 /4c) Démontrer que  $h$  est dérivable dans  $]0, 1[$ .

0,25 pt

En remarquant que

(0.2) 
$$\varphi(x) = \varphi(h(x)),$$

pour tout  $x$  appartenant à  $V_1$ , établir que  $\forall x \in ]0, 1[, h'(x) = \frac{x-1}{x} \times \frac{h(x)}{h(x)-1}$ .

0,25 pt

5. a) Soit  $M(x, y)$  un point de  $C_h$ . On pose  $t = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ .

En utilisant la relation (0.2), montrer que :

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = e^t \\ y - x = t \end{cases}$$

En déduire que  $M$  est le point de  $\mathcal{G}$  de paramètre  $t$ .

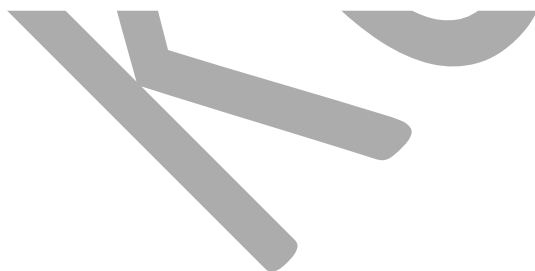
0,5 + 0,25 pt

b) Réciproquement, vérifier que tout point de  $\mathcal{G}$  appartient à  $C_h$ .

0,5 pt

c) Donner une équation de  $T_A$ , tangente à  $C_h$  au point  $A$  d'abscisse 0,4 (On prendra 2 comme valeur approchée de  $h(0,4)$ ).Représenter la courbe  $C_h$  ainsi que les tangentes  $T_A$  et  $T_B$ .

0,25 + 0,5 pt



# Deuxième partie

---

# Sujets Supplémentaires





UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE

DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1987

Série : S1 –S3 –Coeff : 06

Durée : 4heures

## MATHEMATIQUE

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

### EXERCICE 1

Dans le plan P, on considère un cercle (C). A est un point fixe de (C). Les points B et D décrivent le cercle (C) de façon que la longueur BD soit égale à l tel que  $(0 < l < 2R)$ .

Déterminer les lieux géométriques du milieu I de [BD], du centre de gravité G du triangle ABD et du point C, tel que ABCD soit un parallélogramme.

### EXERCICE 2

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1 cm.  $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$  représente le point M du plan de coordonnées x et y relativement au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la parabole (P) d'équation :  $y^2 = 4x$ .

On rappelle que pour tout point  $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$  appartenant à la parabole (P), ( $y_0^2 = 4x_0$ ), la tangente à (P) menée de  $M_0$  a pour équation  $y_0 y = 2(x_0 + x)$ . Soit (D) la droite d'équation  $x = -1$ .

**2.1** Construire la parabole (P) et la droite (D). Que représente la droite (D) pour la parabole (P) ?

**2.2** Soit  $N \begin{vmatrix} -1 \\ \lambda \end{vmatrix}$  un point quelconque de (D),  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Montrer qu'il existe deux points  $M'_0 \begin{vmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{vmatrix}$  et  $M''_0 \begin{vmatrix} x''_0 \\ y''_0 \end{vmatrix}$  de la parabole (P) pour lesquels les tangentes à la parabole (P) menées de  $M'_0$  et  $M''_0$  passent par le point N.

**2.3** Calculer  $y'_0 y''_0$ . Que peut-on dire des deux tangentes à la parabole P menées de N ?

### PROBLEME

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$ , définie par :  $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

### **PARTIE I**

**I.1** Quel est le domaine de définition de  $f$  ? Sur quels ensembles, les théorèmes généraux du cours permettent-ils d'affirmer que  $f$  est continue ? Dérivable ?

**I.2** Montrer que la droite d'équation :  $x = \frac{\pi}{2}$  est axe de symétrie pour  $(C_f)$ , la représentation graphique de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**I.3** Montrer que  $f$  est une fonction périodique, on note  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  et  $(C_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; Comment construiriez-vous  $(C_f)$  partir de  $(C_g)$  ?

### **PARTIE II**

**II.1** Etudier la fonction  $g$ . On pourra montrer que  $g(x) = \frac{-\cos x}{1-\sin x}$  et on étudiera la dérivabilité à gauche en  $\frac{3\pi}{2}$  de  $g$ .

Construire  $(C_g)$ . (Unités:  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm}$  ; on étudiera avec précision le point de  $(C_g)$  d'abscisse  $\pi$ ).

**II.2** Montrer que  $g$  est une bijection de son domaine de définition sur un ensemble que l'on précisera. On note  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.

**II.3** Énoncer toutes les propriétés de  $g^{-1}$  que vous pouvez donner sans aucun calcul.

**II.4** Construire  $(C_{g^{-1}})$  la courbe représentative de  $g^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**II.5** En quels points  $g^{-1}$  est-elle dérivable ? Calculer  $(g^{-1})'(y)$  en fonction de  $y$ .

### **PARTIE III**

**III.1.1** Soit un  $\alpha$  un réel strictement positif ; en faisant une intégration par parties, calculer :  $I_\alpha = \int_0^\alpha g^{-1}(t)dt$ .

**III.1.2** En déduire  $A = \int_0^1 g^{-1}(t)dt$ . Que représente  $A$  par rapport à  $(C_{g^{-1}})$  ?

**III.1.3** En utilisant les courbes  $(C_{g^{-1}})$  et  $(C_g)$  comparer  $A$  et  $\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$ . En déduire  $B$ .

**III.2** Plus généralement, comparer  $\int_0^\alpha g^{-1}(t)dt$  et  $\int_{g^{-1}(\alpha)}^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$ . En déduire la valeur de  $\int_{g^{-1}(\alpha)}^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$ .

**III.3** Contrôler directement ce résultat par le calcul de :  $\int_{g^{-1}(\alpha)}^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$ .

KORKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE  
DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1986

Série : S1 –S3 –Coeff : 06

Durée :4heures

### MATHEMATIQUE

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

#### EXERCICE 1

Soit  $P$  le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  $A$  le point d'affixe  $-1$  ;  $m$  et  $M$  les points d'affixes respectives  $z$  et  $Z$ . On définit dans  $P - \{A\}$ , l'application  $f$  par :

$$\forall m \in \text{dans } P - \{A\}, f(m) = M \Leftrightarrow (Z + 1)(z + 1) = 2i.$$

**1.1**  $f$  est-elle une application bijective de  $P - \{A\}$  dans  $P - \{A\}$ ?

Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$ .

**1.2** On pose  $\text{mes}(\widehat{(\vec{i}, \vec{Am})}) = \theta[2\pi]$  et  $\text{mes}(\widehat{(\vec{i}, \vec{AM})}) = \theta'[2\pi]$ .

**1.2.1** Trouver une relation entre  $\theta$  et  $\theta'$ , ainsi qu'entre  $Am$  et  $AM$ .

**1.2.2** Déterminer l'image d'une demi-droite ouverte d'origine  $A$ .

**1.2.3** Soit  $(C)$  le demi-cercle, ensemble des points  $m$  de  $P$  tels que  $Am = \sqrt{2}$  et  $\theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Déterminer l'image de ce demi-cercle par  $f$ .

#### EXERCICE 2

Dans un espace affine  $E$ , associé à l'espace vectoriel euclidien  $E'$  et rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère l'application affine  $f$  de  $E$  dans  $E$  qui au point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y', z')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$$

**2.1** Montrer que  $f$  est une isométrie de  $E$  qui admet un et un seul point invariant  $I$ .  $f$  est-elle un déplacement ?

**2.2** Soit  $P$  le plan affine de  $E$  d'équation  $y + z - 1 = 0$  et  $S$  la symétrie orthogonale par rapport à  $P$ . Donner l'expression analytique de  $S$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**2.3** Montrer qu'il existe une et une seule rotation  $R$  de  $E$  telle que  $f = S \circ R$ . Déterminer l'axe  $D$  de la rotation  $R$ . Quelle est la position relative de  $D$  et  $P$  ?

## **PROBLEME**

### **PARTIE I**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = x - \sqrt{|x|}$ .

**I.1** Étudier  $f$  et tracer sa courbe représentative  $(C)$  dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , ( $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4$  cm). On appellera  $(C_1)$  l'arc de courbe correspondant aux points d'abscisses négatives et  $(C_2)$  l'arc de courbe correspondant aux points d'abscisses positives.

**I.2** Soit  $\alpha$  un nombre réel positif, on considère les points  $M$  et  $P$  de  $(C_2)$  d'abscisses respectives  $(\alpha - 1)^2$  et  $(\alpha + 1)^2$ . Soit  $K$  le milieu du segment  $[MP]$ .

**I.2.1** Déterminer les coordonnées du point  $K$  lorsque  $\alpha \in ]0, 1[$  et tracer l'ensemble des points  $K$ .

**I.2.2** Même question lorsque  $\alpha > 1$ .

**I.3** Soit  $D_\lambda$  la droite d'équation  $y = x - \lambda$  où  $\lambda > 0$ . On appelle  $M_1$  et  $M_2$  les intersections respectives de  $D_\lambda$  avec  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

**I.3.1** Déterminer l'ensemble décrit par le milieu  $I$  du segment  $[M_1M_2]$  lorsque  $\lambda$  varie.

**I.3.2** Déterminer la longueur du segment  $[M_1M_2]$ .

**I.3.3** Soit  $A \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ . On considère le nouveau repère orthonormé direct  $(A, \vec{I}, \vec{J})$  tel que  $s \left( \vec{i}, \vec{I} \right) = -\frac{\pi}{4}$ . Soit  $m_1$  le point de la droite  $(M_1M_2)$  appartenant à  $(A, \vec{I})$  axe des abscisses du nouveau repère et  $m_2$  le point tel que  $\overrightarrow{m_1m_2} = \overrightarrow{M_1M_2}$ .

Exprimer en fonction de  $\lambda$  les coordonnées  $X_2$  et  $Y_2$  de  $m_2$  dans le repère  $(A, \vec{I}, \vec{J})$ .

Déterminer la nature de l'ensemble décrit par  $m_2$  lorsque  $\lambda$  varie et le tracer.

**I.3.4** Lorsque  $\lambda$  varie de 0 à 1, le segment  $[M_1M_2]$  balaie une surface (S) limitée par un arc  $(C_1)$ , un arc de  $(C_2)$  et un segment de droite. Déterminer l'aire de (S).

## **PARITE II**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \text{Log}(x) - \sqrt{|\text{Log}(x)|}$ .

**II.1** Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de  $g$ .

**II.2** Etudier la fonction  $g$ .

**II.3** Tracer la courbe représentative (T) de  $g$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

N.B : Toutes les courbes à tracer le seront de la manière suivante :

(C) est un premier graphique,

Ensemble décrit par  $K$  ( $\alpha < 1, \alpha > 1$ ) dans un deuxième graphique

Ensemble décrit par  $m_2$  dans un troisième graphique

(T) dans un quatrième graphique.



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE

DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1988

Série : S1 –S3 –Coeff : 06

Durée : 4heures

**MATHEMATIQUES**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**EXERCICE 1**

**1.1** Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{aligned} \text{Si } x < 0, f(x) &= (ax + b)e^{\frac{x}{2}} \\ \text{Si } x \geq 0, f(x) &= \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{3} \end{aligned}$$

Déterminer les nombres réelles  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f$  soit définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**1.2** On considère la fonction numérique  $g$  de la variable réelle  $x$ , définie par :

$$\begin{aligned} \text{Si } x < 0, g(x) &= -\frac{1}{3}xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} \\ \text{Si } x \geq 0, g(x) &= \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{3} \end{aligned}$$

Etudier les variations de  $g$ .

Après avoir tracé les asymptotes, dessiner la courbe représentative de  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (On prendra 2 cm comme unité).

**EXERCICE 2**

On considère un dé à jouer ordinaire à six faces numérotées de 1 à 6. On suppose que ce dé est pipé à l'aide d'un dispositif interne possédant les propriétés suivantes :

- Lors d'un premier lancer, chaque face a la même probabilité de sortir.
- Ensuite, si lors du lancer précédent, la face  $n$   $n \in \{1, \dots, 6\}$  est sortie, sa probabilité de sortie à nouveau est 0,4, la probabilité de sortie de la face opposée,  $(7 - n)$  est 0,1 et les probabilités de sortie de chacune des 4 autres faces sont les mêmes.

**2.1** On lance une seule fois le dé ; quelles sont les probabilités de sortie de chacune de ses faces ?

**2.2** Lors d'un premier lancer, on tire 2. Quelles sont alors les probabilités de sortie de chacune des six faces lors du second lancer ?

**2.3** On s'intéresse à la somme des points obtenus lors des deux lancers successifs, un premier et un second.

Quelles valeurs cette somme peut-elle prendre ?

Calculer la probabilité de sortie de chacune de ces valeurs.

### **PROBLEME**

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Les quatre parties du PROBLEME peuvent être traitées indépendamment.

### **PARTIE I**

Soit P et Q les polynômes tels que :

$$P(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (5 + 16i)z + (3 - 24i) \text{ et } Q(z) = z^2 - 8z + 24 - 6i.$$

**I.1** Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une, et une seule, racine imaginaire pure  $z_0$ .

En déduire les deux autres racines de cette équation ; on les notera  $z_1$  et  $z_2$  ( $z_1$  est celle qui a la plus petite partie réelle).

Trouver les deux solutions de l'équation  $Q(z) = 0$  ; on les notera  $z_3$  et  $z_4$  ( $|z_3| < |z_4|$ ).

**I.2** Soit A, B, A', B' les points dont les affixes sont respectivement les complexes  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$ . Déterminer la similitude transformant le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B'). Donner les caractéristiques de cette similitude.

**I.3** Soit C et D les points dont les affixes respectives sont  $z_0$  et  $i$ . Calculer les cosinus et sinus des angles orientés  $(\widehat{CD, CA})$  et  $(\widehat{BD, BA})$ . En déduire que les points A, B, C, D sont cocycliques.

Quelle est la nature du triangle ACD ? En déduire une équation du cercle passant par les points A, B, C, D.

### **PARTIE II**

Dans le plan P on considère les points E, F et G de coordonnées respectives (5,3), (0,-1), et (0,3).

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :  $2ME^2 + 5MF^2 + 3MG^2 = 280$

### **PARTIE III**

Soit  $f$  l'application de  $P$  dans  $P$  qui transforme le point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  en  $M' = f(M)$  de coordonnées  $(x', y')$  telle que :

$$x' = \frac{9x + 2y - 6}{5} \text{ et } y' = \frac{2x + 6y - 3}{5}$$

**III.1** Montrer que l'ensemble des points invariants par  $f$  est une droite  $(D)$  dont on donnera une équation.

**III.2** Montrer que si  $M \neq M'$ , alors :

**III.2.1** La droite  $(MM')$  est orthogonale à la droite  $(D)$ .

**III.2.2**  $\overline{HM'} = 2\overline{HM}$ ,  $H$  étant le point d'intersection des deux droites  $(MM')$  et  $(D)$ .

**III.3** Préciser la nature de l'application  $f$ . Donner une expression analytique de  $f$  ; en déduire une expression analytique de  $f^{-1}$ .

**III.4** On considère l'ensemble  $(C)$  des points  $M$  du plan dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient la relation:  $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3$ .

Préciser la nature de  $(C)$ .

Trouver une équation de l'image de  $(C)$  par  $f$ .

#### **PARTIE IV**

On se propose de représenter dans le plan  $P$ , l'ensemble  $(E)$  d'équation :

$$8x^2 + 17y^2 - 12xy - 4x - 22y - 87 = 0$$

Soit  $O'$  le point de coordonnées  $(1, 1)$  et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs définis par :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{i} + \vec{j}) ; \vec{v} = \frac{\sqrt{5}}{5}(-\vec{i} + 2\vec{j}).$$

**IV.1** Montrer que  $(O', \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé de  $P$ .

On pose :  $\overline{O'M} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\overline{O'M} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ .

Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

**IV.2** Trouver une équation de  $(E)$  dans le repère  $(O', \vec{u}, \vec{v})$ .

Reconnaitre la nature de  $(E)$  et préciser le centre, les sommets, les foyers et l'excentricité. Représenter  $(E)$ .

# Troisième partie

# Corrigés





UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE

DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1994

Série : S1 – S3 – Coeff : 8

Durée : 4 heures

Corrigé Session de remplacement 1994

**EXERCICE 1**

1.  $P_1 = 0,5$

2.a. On distingue deux cas :

- le premier tirage se fait dans  $U_1$  et on obtient une blanche.

- le deuxième tirage se fait dans  $U_2$  et on obtient une noire.

b. Soit  $A_1$  : « le premier tirage s'est fait dans  $U_1$  »

Soit  $B$  : « la boule obtenue est blanche ».

Donc  $P_2 = P[(A_1 \cap B) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B})]$

d'où  $P_2 = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(\overline{B}/\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1})$

$P_2 = \frac{2}{5}$

3. Soit  $A_n$  : « le  $n^{\text{ième}}$  tirage s'est fait dans  $U_1$  »

Soit  $B$  : « la boule obtenue est blanche ». Pour tout  $n \geq 2$

$A_n = [(A_{n-1} \cap B) \cup (\overline{A_{n-1}} \cap \overline{B})]$

$P(A_n) = P_n = P(B/A_{n-1}) \times P(A_{n-1}) + P(\overline{B}/\overline{A_{n-1}}) \times P(\overline{A_{n-1}})$

$\Rightarrow P(A_n) = P_n = \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{1}{5}$

4. Posons  $U_n = qU_{n-1}$  avec  $q$  réel et  $n \in [2; +\infty[$

$\forall n \geq 2, P_n - a = q(P_{n-1} - a)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{1}{5} = qP_{n-1} + a$  . Par identification :

$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{5} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow U_n$  est telle que  $U_n = P_n - \frac{1}{3}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$  et de premier terme  $U_1 = \frac{1}{15}$

$P_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{3}$

Donc il est probable que la majorité des tirages se fasse dans  $U_2$ .

**EXERCICE 2**

Schéma à faire par l'élève.

1.  $KP = KA = \frac{1}{2}AB = IJ$  (théorème des milieux).

2.  $r(K) = J$  et  $r(P) = I$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KB})(2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

3. On avait  $IJ = KP$ ;

$JN = JC = \frac{1}{2}AI = KI$  (théorème des milieux).

$$\begin{cases} (JI) \text{ parallèle à } (AB) \\ (KP) \text{ parallèle à } (AB) \end{cases} \Rightarrow (JI)(KP)$$

D'autre part :

$$\begin{cases} (JN) \text{ à } (AC) \\ (AC) \text{ parallèle à } (KI) \end{cases} \Rightarrow (JN)(KI)$$

Donc  $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN}) = (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KI})(\pi)$

Alors :

$$\begin{cases} JN = IK \\ IN = JC \\ (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN}) = (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KI})(\pi) \end{cases}$$

Donc  $IJN$  et  $IKP$  sont isométriques.

$\exists!$  Isométrie  $f$  telle que :

$$\begin{cases} f(K) = J = r(K) \\ f(P) = I = r(P) \end{cases} \Rightarrow f = r$$

Ainsi  $r(I) = N$ .

On a  $r(P) = I \text{ et } r(I) = N \Rightarrow$

$$\begin{cases} PI = IN \\ (\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{IN}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$PIN$  est rectangle isocèle.

4.  $r_1 \circ r_2(B) = r_1(r_2(B)) = r_1(A) = C$

$r_1 \circ r_2$  est une rotation d'angle  $\pi$ . C'est une symétrie centrale de centre le milieu de  $[BC] = I$ .

**PROBLEME**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**PARTIE I**

1. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  avec  $0 < x \leq y$ .

**1<sup>er</sup> cas**

$$\exists k \in \mathbb{N} : x \in [k; k + 1[$$

$$\text{et } y \in [k; k + 1[ \Rightarrow$$

$$f(x) = k \ln(x) \text{ et } f(y) = k \ln(y)$$

Or  $0 < x \leq y \Rightarrow k \ln(x) \leq k \ln(y)$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

**2<sup>ème</sup> cas**

$$\exists k, k' \in \mathbb{N}, k < k' : x \in [k; k + 1[$$

$$y \in [k'; k' + 1[ \Rightarrow \begin{cases} f(x) = k \ln(x) \\ f(y) = k' \ln(y) \end{cases}$$

$$k < k' \Rightarrow k \ln(x) \leq k' \ln(y)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}_+$$

2. si  $x \geq 1 \Rightarrow E(x) \geq 1$

$$\Rightarrow E(x) \ln(x) \geq \ln(x).$$

Donc  $\forall x \geq 1, f(x) \geq \ln(x)$  ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

3.

- sur tout intervalle de type  $]k, k + 1[$

$f \mapsto k \ln(x)$  est définie  $f$  est continue et dérivable sur  $\cup_{k \in \mathbb{N}} ]k, k + 1[$

- Si  $x \in ]0, 1[$   $f = 0$  et  $f(0) = 0$  donc  $f$  est continue et dérivable en 0.

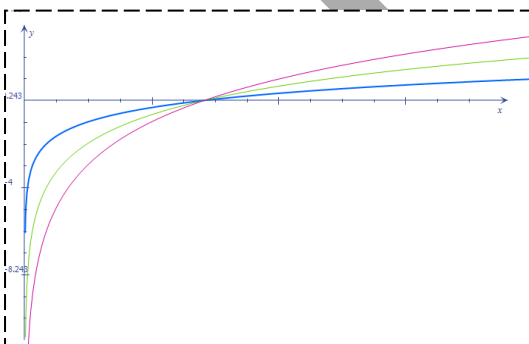
- Pour  $k = 1, f$  est continue

- Pour  $k > 1 \lim_{k^-} f = (k - 1) \ln k$

$\lim_{k^+} f = k \ln k = f(k) \Rightarrow f$  est continue en  $k$  mais continue en  $k^+$ .

- ...  $f'_d(k) = 1.$

4.a à faire par l'élève



$$1. \int_0^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx, t \in \mathbb{N}, k + 1$$

$$= \int_0^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 k \ln x dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} k \left[ \ln x - x \right]_0^1$$

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = k(k + 1) \ln(k + 1) - k^2 \ln k - k$$

2.  $n \in \mathbb{N} - \{1\}$

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^n \left( \int_k^{k+1} f(x) dx \right) = \sum_{k=1}^{n-1} (k - 1)^2 \ln k + \sum_{k=2}^n (k - 1) \ln k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \ln k - \frac{n(n-1)}{2} \dots$$

$$\Rightarrow \int_1^n f(x) dx = - \sum_{k=1}^n k \ln k + n^2 \ln n - \frac{n(n-1)}{2}$$

3.a

$$n \geq 2 \Rightarrow 2 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq \ln k \leq \ln n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n k \ln k \leq \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

b.

$$E(x) \leq x \Rightarrow E(x) \ln x \leq x \ln x \Rightarrow \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^n x \ln x dx$$

$$\Rightarrow - \sum_{k=2}^n k \ln k + n^2 \ln n - \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}$$

D'où :

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n k \ln k \geq \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}$$

**PARTIE II**

$$4. \lim \left[ \frac{\sum_{k=2}^n k \ln k}{\frac{n^2}{2} \ln n} \right] = 1$$

KORKKA



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1995

Série : S1 – S3 – Coeff : 8

Durée : 4 heures

Corrigé de la session de remplacement 1995

**EXERCICE 1**

$$1. P_1 = \frac{1}{2} \quad P_2 = \frac{3}{8} \quad P_3 = \frac{7}{64}$$

$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{63}{64} \approx 1 \Rightarrow$  L'étudiant sérieux a de fortes chances de réussir soit la première année, soit la 2<sup>e</sup>, soit la 3<sup>e</sup> année.

$$2. P_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2^n - 1}{2 \times 2^2 \times \dots \times 2^n}$$

$$P_n = \frac{2^n - 1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$$

Par récurrence sur n, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_k = 1$$

**Exercice 2 :**

1.a. O est centre de gravité de ADE :

$$\vec{OA} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$$

O' est centre de gravité de BCF :

$$\vec{O'B} + \vec{O'C} + \vec{O'F} = \vec{0}$$

Mais or :

$$\begin{cases} \vec{OO'} = \vec{OE} + \vec{EF} + \vec{FO'} \\ \vec{OO'} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO'} \\ \vec{OO'} = \vec{OD} + \vec{DC} + \vec{CO'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\vec{OO'} = \vec{0} + \vec{0} + 3\vec{AB}$$

b. Soit :

$$G = \text{bar} \left\{ (A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1); (E, 1); (F, 1) \right\} \quad (1)$$

Par association du barycentre,

$$G = \text{bar} \left\{ (O, 3); (O', 3) \right\} \Rightarrow G \text{ milieux de } [OO']$$

c. (1) :

$$G = \text{bar} \left\{ (L, 2); (K, 4) \right\} \Rightarrow \vec{GL} = -2\vec{GK}$$

2. Soit  $T = \{M \in E : \|\wp(M)\| = a\sqrt{21}\}$

$$\forall M \in E : \vec{\wp(M)} = 6\vec{MG}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{\wp(M)}\| &= 6\|\vec{MG}\| \\ &= a\sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\vec{MG}\| = \frac{a\sqrt{21}}{6} \quad (1)$$

$$\|\vec{\rho(A)}\| = 6\|\vec{AG}\| = 6\|\vec{AO} + \vec{OG}\|$$

$$\|\vec{\rho(A)}\| = 6\sqrt{AO^2 + OG^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$\Rightarrow A$  est un élément de  $T$ .  $T$  est la sphère circonscrite au pentagone.

**PROBLEME**

**PARTIE I**

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

1.a.  $D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$  donc  $\forall x \in D_f, \forall -x \in D_f$  et :

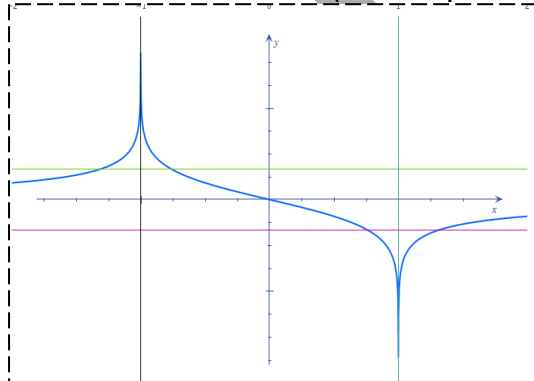
$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-x-1}{-x+1} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$  est impaire. Donc  $O$  est centre de symétrie pur (C).

b.  $f$  est continue et dérivable sur  $D_f$ .

$$f(x)' = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Tableau de variation (à faire par l' élève)



2. pour  $x \neq 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

3.a.

$$\begin{cases} x(t) = -e^{2t} \\ y(t) = f(e^{2t}) \\ t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \ln(-x) \\ x \in ]-\infty, -1[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T : \\ x \in \end{cases}$$

Il apparait que  $T$  est inclus dans (C).

3. Si  $t \rightarrow 0, x(t) \rightarrow -1, t \rightarrow +\infty, x(t) \rightarrow -\infty$

$$b. \vec{V}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 1 - e^{2t} \end{pmatrix}$$

c. Soit  $D : y = x \Rightarrow D$  est dirigée par  $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ;  $T$  est parallèle à (D)  $\Leftrightarrow \vec{v}(t) = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \ln 2.$$

Pour  $t_0 = -\frac{1}{4} \ln 2, (T)$  parallèle à

$$(D): y = x$$

$$M\left(\frac{1}{4} \ln 2\right)$$

**PARTIE B**

a.  $g = f_{]-1,1[}$ .  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]-1,1[$

donc  $g$  réalise une bijection de  $] -1, 1[$  vers  $\mathbb{R}$ .  $g^{-1}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ] -1, 1[$$

$$x \mapsto g^{-1}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$b. \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \\ x \in ] -1, 1[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - e^{2y}}{1 + e^{2y}} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c. voir figure.

2.a  $I = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{1-t^2}$  soit  $k(t) = \frac{1}{1-t^2}$

-  $k$  est continue sur  $] -1, 1[$  donc sur  $] -\alpha, \alpha[$

-  $k$  est pair ;  $k(t) > 0$  pour  $t \in ] -\alpha, \alpha[$ . Donc :

$I$  est l'aire du domaine :

$$D_{\alpha} = \left\{ M(x, y) : \begin{cases} -\alpha \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq h(x) \end{cases} \right\} \text{ à une unité d'aire près.}$$

b.  $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} g'(t) dt = g(\alpha) - g(-\alpha) = \ln \left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)$

$I = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1-e}{1+e}$

3.a  $\begin{cases} \text{si } |x| < 1, h(x) = x \Rightarrow \lim h = 1 \\ \text{si } |x| > 1, h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim h = -1 \text{ (en } -1) \end{cases}$

Donc  $h$  est prolongeable par continuité en  $-1$  et  $1$  par définie par :

$$\begin{cases} \tilde{h}(x) = h(x) \text{ si } |x| \neq 1 \\ \tilde{h}(1) = -\tilde{h}(-1) = 1 \end{cases}$$

Partie C

1.a  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$

b. En dérivant  $f'(x)$ , on a :  $f''(x) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right]$

2. Il suffit de vérifier tout simplement.

3.  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \left( \frac{(n-1)!}{2} \right) \left[ \frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{(x^2-1)^n} \right]$

Par récurrence :

La propriété est vraie pour  $n = 1$ .

Supposons-la vraie au rang  $n$ .

$$f^{(n+1)}(x) = \left( f^{(n)}(x) \right)'$$

$$= \left[ (-1)^{n-1} \left( \frac{(n-1)!}{2} \right) \left[ \frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{(x^2-1)^n} \right] \right]'$$

... après des calculs, on a le résultat :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \left( \frac{n!}{2} \right) \left[ \frac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}} \right]$$

Donc la propriété est toujours vraie



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE

DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1996

Série : S1 – S3 – Coeff : 8

Durée : 4 heures

Corrigé de la session de remplacement 1996

**EXERCICE 1**

1.  $k > 0, p_k = 1, \tan\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) = \frac{1}{1+k(k+1)}$

On a :  $P_k = \left| \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i} \right| = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \arg(1 + k(k + 1) + i) \\ &\quad - \arg(1 + k(k + 1) - i) \\ &\quad - i(2\pi) \\ &= 2 \arg(1 + k(k + 1) + i) - 2\pi \\ &\Rightarrow \frac{\alpha_k}{2} = \arg(1 + k(k + 1) + i) - \pi \end{aligned}$$

Donc :  $\tan\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) = \frac{1}{1+k(k+1)+i}$

2.  $z_0 = i, z_1 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i, z_2 = \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$

3.  $ak \geq 0, \exists! \theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \tan\theta_k = k?$

On a : la fonction tangente est une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  dans lui-même. Ainsi :

$\forall k \geq 0, \exists! \theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \tan\theta_k = k$

$\tan\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0, \tan\theta_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4},$

$\tan\theta_2 = 2 \Rightarrow \theta_2 = 63,43^\circ$

b. à faire par l'élève

c. Si  $k > 0, \tan(\theta_{k+1} - \theta_k) = \frac{1}{1+k(k+1)} = \tan\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)$

Or  $\theta_{k+1} - \theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\frac{\alpha_k}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$   
 $\Rightarrow \frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$

- Si  $k = 0, \theta_1 - \theta_0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{\alpha_0}{2}$

2.1  $|S_n| = 1, \arg(S_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (2\pi).$

Mais or,

$\alpha_k = 2(\theta_{k+1} - \theta_k)$  donc :

$\arg(S_n) = 2(\theta_{n+1} - \theta_0)(2\pi)$

2.  $\lim |S_n| = 1, \tan\theta_{n+1} = n + 1$

$\lim \tan\theta_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim \theta_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

$\lim (\theta_{n+1}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$  donc

$\lim \arg(S_n) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$  Ainsi :  $\lim S_n = i.$

2.a Soit s la similitude de centre  $\theta_1$  telle que  $s(H) = M.$  Soit  $\alpha$  son angle et r son rapport.

$$\alpha = (\overrightarrow{O_1H}, \overrightarrow{O_1M}) = -\frac{\pi}{6}, r = \frac{O_1M}{O_1H} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b. Supposons que H est un élément de C de diamètre  $[O_1J]$ . Donc  $(\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = \frac{\pi}{2}(\pi)$ . D'autre part,  $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) + (\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\pi)$ . Donc :

$(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HJ}) = \pi(\pi)$  Ainsi, les points H, M, J sont alignés et comme  $H \in (M_1M)$  et  $J \in (M_2M)$  donc les points  $M_1, M_2$  et M sont alignés.

Réciproquement, supposons  $M_1, M_2$  et M alignés. H, M, J seront alors alignés :

$(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HJ}) = \pi(\pi)$ . Or,  $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) = \frac{\pi}{2}$  et  $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) + (\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\pi)$  donc  $(\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HJ}) - (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) = \pi - \frac{\pi}{2}(\pi)$ . Par conséquent, H ∈ C de diamètre  $[O_1J]$ .

c. D'après b,  $M_1, M_2$  et M sont alignés si et seulement si  $H \in (C)$  de diamètre  $[O_1J]$  donc  $M_1, M_2$  et M sont alignés ssi H décrit le cercle de diamètre  $[O_1J]$  d'où l'ensemble cherché est l'image du cercle de diamètre  $[O_1J]$  par s.

3.a  $M_1M = O_1M_1$  car le triangle  $M_1O_1M$  est équilatéral. Soit I le milieu de  $[M_1M_2]$ .

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}M_1M_2}{M_1O_2} \Leftrightarrow M_1M_2 = \sqrt{3}M_1O_2$$

### EXERCICE 2

1.a  $r_2 \circ r_1$  est une rotation d'angle  $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$  donc  $r_2 \circ r_1$  est une symétrie centrale de centre le milieu de  $[MM_2]$  car  $r_2 \circ r_1(M) = M_2$ . Ainsi, J milieu de  $[MM_2]$  est fixe par  $r_2 \circ r_1$

- Soit  $O' = r_2 \circ r_1(O_1) = r_2(O_1)$ . Le triangle  $O_1, O_2, O'$  est rectangle isocèle en  $O_2$ . On a donc :

$mes \widehat{O_2} = \frac{2\pi}{3}, \widehat{O_1} = \frac{\pi}{3}, mes \widehat{O'} = \frac{\pi}{3}$  ; Par ailleurs, J milieu de  $[O_1O_1']$  donc  $(O_2J)$  est une bissectrice intérieure de  $(\widehat{O_1O_2O_1'})$ . En considérant le triangle  $O_1O_2J$ , on a :

$mes \widehat{O_1} = \frac{\pi}{6}, mes \widehat{O_2} = \frac{\pi}{3}, mes \widehat{J} = \frac{\pi}{2}$ . Donc J est un élément du cercle C de diamètre  $[O_1O_2]$

b.  $M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M, \sqrt{3}O_2M_1 = \sqrt{3}M_1M$

$$\Leftrightarrow O_2M_1 = M_1M \Leftrightarrow O_2M_1 = O_1M_1$$

c. Soit  $\Delta_1 = \{M_1 \in (P) : M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M\}$

Soit  $M_1$  un point de la médiatrice de  $[O_1O_2]$ . Donc  $O_2M_1 = O_1M_1 \Leftrightarrow O_2M_1 = M_1M$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} O_2 M_1 = \sqrt{3} O_1 M_1 \Leftrightarrow M_1 M_2 = \sqrt{3} M_1 M$ .  
Donc  $M_1 \in \Delta_1$

Ainsi :  $\Delta_1$  est la médiatrice de  $[O_1 O_2]$   
c'est-à-dire  $\Delta = r_1^{-1}(\Delta_1)$

**PROBLEME**

1.  $D_f = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

-  $\varphi$  est continue sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$   
comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul.

-  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi$  est continue en 0 donc sur  $D_f$

2.a  $-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0 \Rightarrow \varphi$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = 0$ .

- limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = +\infty$

-  $\varphi$  est dérivable sur  $D_f$  et  $\forall x \in D_f$ :

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x - 2}{(\ln x)^3}$$

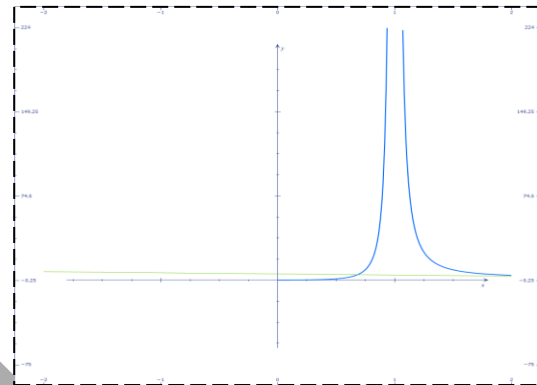
Variations

x	0		$e^2$	$+\infty$
	1			
$\varphi'(x)$	+		-	+
$\varphi(x)$	$\nearrow +\infty$		$\searrow +\infty$	$\nearrow +\infty$
	0		$\frac{e^2}{4}$	

3.a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \Rightarrow \varphi$  admet une branche parabolique de direction  $(x'x)$

b.  $\varphi'(e) = -1, \varphi(e) = e \Rightarrow T : y = -x + 2e$

c. Courbe.



4. Soit  $g$  la fonction définie par :

$g(x) = \varphi(x) - e$ .  $g$  est continue et dérivable sur  $]1, +\infty[$  et  $g'(x) = \varphi'(x)$ .

x	0	$e^2$	$+\infty$
	1		
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		$+\infty$	$\frac{e^2}{4} - e$
		$\searrow$	$\nearrow +\infty$

On a  $\frac{e^2}{4} - e < 0$ . D'après les variations de  $g$ ,  $g(x) = 0$  existe. C'est dire que  $\varphi(x) = e$  existe.

a.  $e \leq a \leq b$ . Soit  $t \in [a, b]$ . D'onc :  $\frac{1}{\ln b} \leq$

$\frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln a}$

$\Rightarrow \frac{b-a}{\ln b} \leq \int_a^b \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{b-a}{\ln a}$

b.  $x > e$  et  $u$  tel que :  $e \leq u \leq x$

$$f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t} = \int_e^u \frac{dt}{\ln t} + \int_u^x \frac{dt}{\ln t}$$

On a :  $\frac{u-e}{\ln u} \leq \int_e^u \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x-u}{\ln u}$  et  $\frac{x-u}{\ln x} \leq \int_u^x \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x-u}{\ln u}$

⇒ En sommant, on a :

$$\frac{x-u}{\ln x} + \frac{u-e}{\ln u} \leq f(x) \leq u-e + \frac{x-u}{\ln u}$$

D'où :  $\frac{x-u}{\ln x} \leq f(x) \leq u + \frac{x-u}{\ln u}$

c. Pour résoudre " $\varphi(x) < x$ ", on résout :  $\frac{x}{(\ln x)^2} < x \Leftrightarrow \ln x > 1$  ou  $\ln x < -1$ . Donc :

$$S = ]0, e^{-1}[U]e, +\infty[.$$

$g(e^3) = \frac{e^3}{9} - e \Rightarrow g(e^3) < 0$ ,  $g(e^4) = \frac{e^4}{16} - e \Rightarrow g(e^4) > 0$ . Donc  $x_2 \in [e^3, e^4]$ .

Partie B :

1.a  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  est continue sur  $]1, +\infty[$  donc la fonction  $f$  est bien définie sur  $]1, +\infty[$

b.  $f'(x) = \frac{1}{\ln x}$ . Dans  $]1, +\infty[$ ,  $\ln x > 0$  donc la fonction  $f$  est croissante sur  $]1, +\infty[$

2.a Posons  $k(t) = \ln t - t + 1$ .  $k'(t) = \frac{1-t}{t} < 0$  dans  $]1, +\infty[$ . Donc  $k(t)$  est décroissante dans  $]1, +\infty[$ .

$\lim_{t \rightarrow 1^+} k(t) = 0$  donc  $k(t) < 0$ . Ainsi, pour tout  $t$  de  $]1, +\infty[$  :

$$k(t) = \ln t - t + 1 < 0 \Rightarrow \ln t < t - 1$$

b. sur  $]e, +\infty[$ , on a :  $\ln t - t + 1 < 0$  donc  $\frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t-1}$  d'où

$$\int_e^x \frac{dt}{\ln t} \geq \int_e^x \frac{dt}{t-1} \Rightarrow f(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{e-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \ln\left(\frac{x-1}{e-1}\right) \right] = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = -\infty$$

- Lorsque  $x > e^4$ ,  $\varphi(x) < x$  et  $\varphi(x) > \varphi(e^4)$

Or  $\varphi(e^4) = \frac{e^4}{16} > e$ . Donc  $e < \varphi(x) < x$ .

Ainsi on peut choisir  $u = \varphi(x)$ . Dans ce cas, on a :

$$\frac{x - \varphi(x)}{\ln x} \leq f(x) \leq \varphi(x) + \frac{x - \varphi(x)}{\ln \varphi(x)}$$

⇒  $\frac{\ln x}{x} \times \frac{x - \varphi(x)}{\ln x} \leq \frac{\ln x}{x} \times f(x) \leq \frac{\ln x}{x} \times \left( \varphi(x) + \frac{x - \varphi(x)}{\ln \varphi(x)} \right)$ . Finalement :

$$1 - \frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\ln x}{x} \cdot f(x) \leq \frac{1}{\ln x} + \left[ 1 - \frac{\varphi(x)}{x} \right] \cdot \frac{\ln x}{\ln \varphi(x)}$$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \varphi(x)} = 1$ . En appliquant le théorème des GMI à la double inégalité démontrée (3.c) on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times f(x) = 1$$

e.  $\forall x > e^4$ , on a (3.c). Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times f(x) = 1$ . Donc  $\forall x > e^4$ ,  
 on a :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} (1 + \varepsilon(x))$$

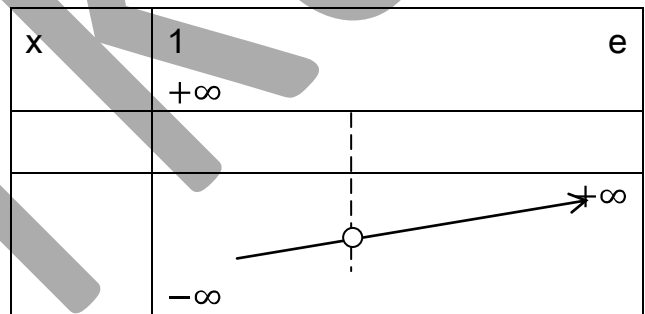
f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow (C_f)$  admet une  
 branche parabolique de direction  $(O, \vec{i})$

4.a Calcul simple

b.  $f(2) = \int_e^2 h(t) dt \approx ?$  (calculatrice)

5.a

b. à faire par l' élève





UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE

DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1997

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée : 4heures

Corrigé de la session de remplacement 1997

**EXERCICE 1**

1.a. Il suffit de trouver un réel  $a > \frac{AB}{2}$  tel que  $OA + OB = CA + CB = 2a$  (définition bifocale). On trouve  $a = 5$ .

b. On a :  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  : repère rapporté aux axes de l'ellipse.

En posant  $c = \frac{AB}{2} - 4 \Rightarrow b^2 = 9$ . Ainsi :

Dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$   $(E) : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$  d'où l'aire de est  $D = 5.3.\pi = 15\pi u.a$ .

2. Dans l'espace, soit  $H(0,0,6)$  et  $h(1,2/3)$ .

$h(D) = D'$ ,  $S$  = solide délimité par  $D$ ,  $D'$  et les segments  $[Mh(M)]$  où  $M \in (E)$ .

a.  $h(O) = O'(0,0,2)$  donc la cote du plan contenant  $D'$  est 2 car  $O' \in D'$ .

Soit  $s(z)$  une section de cote  $z$ .  $s(z)$  est l'image de  $D$  par  $h(l, k(z))$

- comme  $O \in D$ , on cherche  $k(z)$  tel que  $h(O) = O'(0,0,z)$ . Cela revient à dire que :

$$z - 6 = k(-6) \Rightarrow k = \frac{6 - z}{6}$$

b.  $A(z) =$  aire de  $S$ .  $S$  étant l'image de  $D$  par  $h(l, k = \frac{6-z}{6})$  alors  $A(z) = (\frac{6-z}{6})^2 \times A(D)$

c'est-à-dire :  $A(D) = (\frac{6-z}{6})^2 \times 15$ .

$$c. v = \int_0^2 A(z) dz \Rightarrow v = \frac{190\pi}{9} u.a$$

**EXERCICE 2**

$$T : P \rightarrow P$$

$$M(z) \mapsto M'(z') / z' = (1+z)^2$$

1.a.  $M(z)$  est invariant par  $T$  ssi  $z = (z + 1)^2 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow z = \frac{-1 + 3i}{2}, z = \frac{-1 - 3i}{2}$

L'ensemble des points invariants par T

$$\text{est : } \left\{ B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$b. z' = z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 - z' = 0$$

$$\Delta' = 1 - (1 - z') = z'$$

- si  $z' = 0$ ,  $z_0 = -1$  dans ce cas,  $M'(z')$  a un seul antécédent qui est  $A(-1)$  qui est son propre symétrique.

- si  $z' \neq 0$ , on a  $z_1$  et  $z_2$  avec  $z_1 + z_2 = -\frac{2}{1} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{2} = -1$ . Donc  $M'(z')$  a deux antécédents  $M_1$  et  $M_2$  symétriques par rapport à  $A(-1)$ .

$$2. z' = x' + iy' = (x + 1 + iy)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x + 1)^2 - y^2 \\ y' = 2(x + 1)y \end{cases}$$

3. si  $x = 0$  alors  $x' = -y^2$  et  $y' = 2y$  donc  $y'^2 = -4x'$

L'image de la droite d'équation  $x = 0$  est incluse dans la parabole P d'équation  $y^2 = -4x$ .

$$\text{- Si : } y = a(x + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = (x + 1)^2(1 - a^2) \\ y' = 2(x + 1)a \end{cases}$$

On a alors : si  $a \neq \pm 1 \Rightarrow y' = \frac{2a}{1 - a^2} x'$  et

si  $a = 1$ ,

$$\Rightarrow x' = 0 \text{ et } y' = 2(x + 1).$$

- si  $a = -1$ ,  $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -2(x + 1) \end{cases}$  (à revoir) !!!

### PROBLEME

1.  $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = 0 = f(0) \Rightarrow f$  est continue en 0.

$\lim_{0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$   
 $\lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \Rightarrow f$  n'est pas dérivable en 0.

Cependant,  $C_f$  admet une demi-tangente de coefficient directeur  $-1$  à gauche et une demi-tangente à droite au point  $M_0$  d'abscisse 0.

Variations de  $f$  :

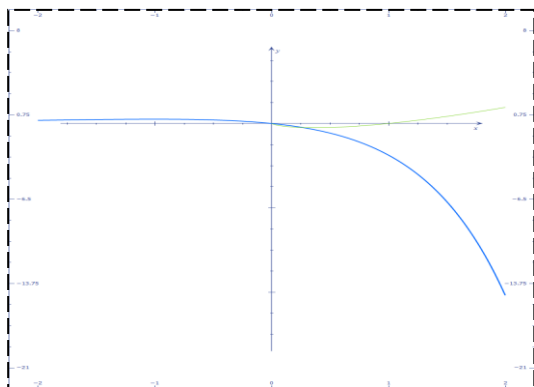
$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \begin{cases} -(x + 1)e^x (x < 0) \\ 1 + \ln x (x > 0) \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$e^{-1}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+
$f(x)$	$e^{-1}$	○			$-e^{-1}$

2.a  $g = f_{[-1, e^{-1}]}$ .  $G$  est continue et décroissante sur  $I = [-1, e^{-1}]$  donc  $g$  est une bijection de  $I$  sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$

b.



Dérivabilité de  $g^{-1}$  en  $y_0 = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

On a :  $g^{-1}(y_0) = g^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$ .

Mais or :

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \neq 0$  donc  $g^{-1}$  est dérivable au point  $y_0$  et :  $(g^{-1})'(y_0) = 2e^2$ .

II. 1.a.

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

Donc  $\forall n \geq 2$ , on a (1) :  $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$

b. d'après (1), on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \dots \\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow U_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2$$

Donc  $U_n$  est majorée par 2. (\*) .

D'autre part,

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} U_n \text{ est croissante(**)}$$

(\*)(\*\*)  $\Rightarrow (U_n)$  converge vers  $L$ .

2. Par un encadrement simple, on montre que :  $\frac{1}{10} < L - U_9 < \frac{1}{9}$  ; Donc  $U_9$  est l'approximation de  $L$  à 0,2 près.

3. Après une double intégration par parties, on trouve :  $I_n = \frac{1}{n^2}$

b. Preuve plus simple (étapes sautées) :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \cos \alpha x &= \sum_{\alpha=1}^n \Re \left( e^{i\alpha x} \right) = \Re \sum_{\alpha=1}^n \left( e^{i\alpha x} \right) = \Re \sum_{\alpha=1}^n \left( e^{ix} \right)^\alpha \\ \cos(n+1) \frac{x}{2} \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} &= \dots = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \text{ (indication)} \end{aligned}$$

indication:  $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

4.  $g$  est continue et dérivable sur  $]0, \pi[$  et  $g'$  est continue sur  $[0, \pi[$  (supposition)

a. On a :

$$\int_0^\pi \left( \frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \left( \sum_{k=1}^n \cos kx \right) dx = \sum_{k=1}^n \left( \int_0^\pi \left( \frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \cos kx dx \right) M = \int_0^\pi |g'(x)| dx + 1.$$

$$= U_n$$

b. Preuve

Le calcul par une intégration par parties de  $\int_0^\pi g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx$  donne :

$$d. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^\pi g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + M \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^\pi g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right| = 0$$

$$\int_0^\pi g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left( -1 + \int_0^\pi g'(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right)$$

D'après 4.a. on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) dx \\ &= \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \text{Lim}(U_n) = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

c.

$$\left| \int_0^\pi g'(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right| \leq \int_0^\pi |g'(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x| dx$$

$$\leq \int_0^\pi |g'(x)| dx$$

Donc il suffit de prendre :



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Session d'Octobre 1998



Série : S1 –S3 –Coeff : 8

OFFICE DU BACCALAUREAT

Durée :4heures

Corrigé de la session de remplacement 1998

**EXERCICE 1**

1.  $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -1 - 2i; z_2 = -1 + 2i$

$S = \{z_1, z_2\}$

2.  $A(-1, 2)$  et  $A'(-1, -2)$

a.  $r\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow r: z' = iz$

$r(B) = A \Leftrightarrow z_B = iz_A \Leftrightarrow z_B = -2 - i$

b.  $E = \left\{M(z) : \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 1\right\} \Rightarrow E$  est la médiatrice de  $[AB]$ .

c.  $F = \left\{M(z) : \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow F$  est le demi cercle de diamètre  $[AB]$ .

d.  $G = \left\{M(z) : \frac{z - z_B}{z - z_A} \in R_+^*\right\} = (AB) - \overline{AB}$

e. Représentation (à faire par l'élève)

**EXERCICE 2**

1. Soit  $S_{(AB)}$  la réflexion d'axe  $(AB)$ .

$S_{(AB)}(A_1) = H$  et  $S_{(AB)}(A) = A$  donc  $\overline{A_1A}$  a pour image  $\overline{HA}$  dans la symétrie vectorielle associée à  $S_{(AB)}$ .  $S_{(AB)}(C) = C'$  qui est un élément de  $(CA)$  donc  $\overline{A_1C}$  a pour image  $\overline{HC'} = -\overline{A_1C}$  par la symétrie vectorielle. Ainsi :

$(\overline{A_1A}, \overline{A_1C}) = (\overline{HA}, \overline{HC'}) (2\pi) = (\overline{HA}, \overline{A_1C}) (\pi)$

$(\overline{A_1A}, \overline{A_1C}) = (\overline{A_1A}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{A_1C}) (2\pi)$   
 $= (\overline{AB}, \overline{AH}) + (\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{A_1C}) (2\pi)$   
 $= -(\overline{AH}, \overline{AB}) + (\overline{BC}, \overline{A_1C}) + (\overline{AB}, \overline{BC}) (2\pi)$

Or :  $\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{AB} \perp \overline{A_1C} \end{cases} \Rightarrow (\overline{AH}, \overline{AB}) + (\overline{BC}, \overline{A_1C}) (\pi)$

Ainsi :  $(\overline{A_1A}, \overline{A_1C}) = (\overline{BA}, \overline{BC}) (\pi)$

$(\overline{A_1A}, \overline{A_1C}) = (\overline{BA}, \overline{BC}) (\pi) \Rightarrow A_1, A, B, C$  sont cocycliques  $\Rightarrow A_1$  est un élément de  $C$ . Mais or,  $H = S_{(AB)}(A_1)$  donc  $H$  est élément de  $C_1$ . De

même, en posant  $A_2 = S_{(AC)}(H)$  et en permutant les rôles de B et C on a :

$$(\overrightarrow{A_2A}, \overrightarrow{A_2C}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})(\pi) \Rightarrow A_2 \in C$$

$\Rightarrow H = S_{(AC)}(A_2)$  est un élément de  $C_2$

3.  $C_2$  est l'image de  $C_1$  par  $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$  qui est une rotation  $R(A, 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}))$

a. Soit M de C,  $S_{(AC)}(M) = B'$ ,  $S_{(AB)}(M) = C'$

-  $R(C') = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}(C') = S_{(AC)}(M) = B'$ .

Donc  $R(C') = B'$

- D'après le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre :

$$(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HA'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A'}) (\pi)$$

-  $R(O_1) = O_2$ ,  $R(C') = B'$ ,  $R(A) = B$ .

$$\Rightarrow (\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A'}) = (\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A'}) (\pi)$$

-  $(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) = (\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HA'}) + (\overrightarrow{HA'}, \overrightarrow{HC'}) (2\pi)$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A'}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A'}) (\pi) = 0(\pi)$$

$\Rightarrow H, B', C'$  sont alignés.

- De même en considérant  $R' = S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$ , on montre que  $A', B', H$  alignés. Ainsi  $H, A', B', C'$  sont alignés.

b. I milieu  $[MA']$  et J milieu  $[MB'] \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'B'}$

De même,  $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{B'C'}$ . Or  $\overrightarrow{A'B'}$  et  $\overrightarrow{B'C'}$  sont colinéaires, donc  $\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = k \overrightarrow{JK}$  c'est dire que I, J, K sont alignés.

5.  $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2}(\pi) = (\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JC})(\pi)$  ; Par conséquent : M, I, C et J sont cocycliques et M, I, K et B sont cocycliques. D'autre part,  $\overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$  donc :

$$(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi). \quad \text{Calculons } (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK})$$

$$(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MK})$$

Or :  $\begin{cases} (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC})(\pi) \\ (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})(\pi) \end{cases} \quad \text{Donc :}$

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi)$$

$$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = 0(\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi)$$

$\Rightarrow M, A, C, B$  sont cocycliques d'où  $M \in C$

### PROBLEME

#### PARTIE I

1.  $D_f = ]-1, +\infty[$  f est continue et dérivable sur son domaine de définition et pour tout x de  $D_f$ ,  $f'(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$ .

$$\lim_{1^+} f = +\infty, \lim_{+\infty} f = +\infty$$

x	-1	1	+∞
f'(x)	-	○	+
f(x)			

2.a Soit  $T_0$  la tangente en  $x_0 = 0$  :

$$T_0 : y(x) = -2x - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow (yy')$$

c. courbe à faire

$$3.a f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 1 = 2\ln(1+x)$$

- sur  $]-1,1[$ ,  $f$  est décroissante et continue. Donc elle est réalisée une bijection de  $]-1,1[$  sur  $]-\frac{1}{2} - 2\ln 2, +\infty[$  donc  $\exists ! \beta \in ]-1,1[$  tel que :  $f(\beta) = 0$ .

- sur  $[1, +\infty[$   $f$  est continue et croissante donc réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  vers  $]-\frac{1}{2} - 2\ln 2, +\infty[ \Rightarrow \exists ! \alpha \in [1, +\infty[ : f(\alpha) = 0$

$$f(2) = 1 - 2\ln 3 < 0 \text{ et } f(3) = \frac{7}{2} - 4\ln 2 > 0 \Rightarrow \alpha \in ]2,3[$$

Ainsi, l'équation «  $f(x) = 0$  » admet exactement deux solutions  $\alpha, \beta$  avec  $\alpha \in ]2,3[$  c'est-à-dire  $\frac{1}{2}x^2 - 1 =$

$2\ln(1+x)$  admet exactement deux solutions  $\alpha, \beta$  avec  $\alpha \in ]2,3[$

$$b. \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in ]2,3[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2 + 4\ln(1+x)} \\ x \in ]2,3[ \end{cases}$$

Ainsi :  $\alpha = \sqrt{2 + 4\ln(1 + \alpha)}$

4. Soit  $g = f_{/}[1, +\infty[$

a.  $g$  est continue et croissante sur  $[1, +\infty[$  donc  $g$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $]-\frac{1}{2} - 2\ln 2, +\infty[$

b.  $g^{-1}$  est dérivable sur  $]-\frac{1}{2} - 2\ln 2, +\infty[$  car  $g'$  ne s'annule sur  $]1, +\infty[$  et  $g^{-1}$  est strictement croissante car  $g$  l'est.

c. à faire par l'élève.

**PARTIE II**

1.a  $x \geq 2 \Rightarrow 1+x \geq 3 \Rightarrow \ln(1+x) \geq \ln 3$

$$\Rightarrow 4\ln(1+x) \geq 4\ln 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + \ln(1+x)} \geq 2 + 4\ln 3 \geq 2 \Rightarrow h(x) \geq 2$$

b.  $h$  est continue et dérivable sur  $[2, +\infty[$  et  $h'(x) = \frac{2}{(1+x)\sqrt{2+\ln(1+x)}}$ .

$$-\forall x \in [2, +\infty[ h'(x) \geq 0$$

$$-\forall x \in [2, +\infty[ 1+x \geq 3. \text{ Donc :}$$

$$\frac{2}{(1+x)\sqrt{2+\ln(1+x)}} \geq \frac{1}{3}. \text{ Par conséquent, on}$$

a :

$$0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{3}, \quad \forall x \in [2, +\infty[$$

2.a

$$- U_0 = 2 \geq 2$$

Supposons  $U_n \geq 2$ .

$$\forall x \in [2, +\infty[ h(x) \geq 2 \Rightarrow h(U_n) \geq U_{n+1} \geq 2$$

 $\Rightarrow U_n \geq 2$  pour tout entier naturel  $n$ .

b.

$$\begin{cases} U_n \in [2, +\infty[ \text{ et } \alpha \in [2, +\infty[ \\ h \text{ est dérivable sur } [2, +\infty[ \text{ et } |h'(x)| \leq 2 \end{cases}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis entre  $U_n$  et  $\alpha$ ,  $|h(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$

 $h(\alpha) = \alpha$  donc d'après la partie I.3.b :

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$ . Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$

$$\text{On a : } |U_0 - \alpha| \leq |3 - 2| \leq \frac{1}{3^0} = 1$$

Supposons que  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Donc : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$$

$$\text{d. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

3. On cherche  $n$  tel que :  $\frac{1}{3^n} \leq 0,01$ 

$$\frac{1}{3^n} \leq 0,01 \Leftrightarrow 3^n \geq 100 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 100}{\ln 3}$$

Il suffit donc de prendre  $n \geq E\left(\frac{\ln 100}{\ln 3}\right) = 5$ **PARTIE III**1.  $g$  est continue sur  $[1, +\infty[$ . Donc  $G(x)$  existe sur  $[1, +\infty[$ .

$$\text{2.a } \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = -1$$

$$\text{b. } \int_1^x \ln(1+t) dt = (x+1)\ln(1+x) - x - 2\ln 2 + 1$$

$$\text{c. } G(x) = \frac{1}{6}x^3 + x - 2(x+1)\ln(x+1) + 4\ln 2 - 76$$

3.a.

$$A = \left( - \int_1^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^4 f(x) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{95}{6} - 4\ln 2 - 10\ln 3 - \frac{1}{3}\alpha^3 - 2\alpha + 4(\alpha+1)\ln(1+\alpha)$$



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE

DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 1999

Série : S1 – S3 – Coeff : 8

Durée : 4 heures

Corrigé de la session de remplacement 1999

**EXERCICE 1**

1.  $h_1 : \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y \\ z' = 2z \end{cases} \Rightarrow f : h_1 :$

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = 2z + 2 \\ z' = 2y + 2 \end{cases}$$

$M(x, y, z)$  invariant  $\Leftrightarrow f(M) = M$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Donc  $B(1, -2, -2)$  invariant par  $f$ .

2.  $r = h_2 \circ f$  où  $h_2(B, \frac{1}{2})$ .

$$h_2 \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y - 1 \\ z' = \frac{1}{2}z - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r = h_2 \circ f : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z \\ z' = y \end{cases} . M(x, y, z)$$

est invariant par  $r \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ z = z \end{cases}$ . Donc

l'ensemble des points invariants est l'ensemble qui a pour système d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0t + 1 \\ y = 1.t + 0 \\ z = 1.t + 0 \end{cases} \text{ Donc } (D) \text{ passant par } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- nature de  $r$ . Soit  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  image de  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  par  $r$ .

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} -2x + 2 \\ z - y \\ y - z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = z - y + y - z = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$$

Soit  $I$  milieu de  $[MM']$  ;  $I(1, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2})$ .  
 $I \in (D)$  car  $\overrightarrow{MI} = k\vec{u}$ . Ainsi :  $r$  est demi-tour d'axe  $D(A, \vec{u})$  où  $A(1, 0, 0)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.a On a :  $r = h_2 \circ f = h_2 \circ (h_1 \circ v) = (h_2 \circ h_1) \circ v$ . Or :  $h_2(B, \frac{1}{2}), h_1(A, 2) \Rightarrow h_2 \circ h_1$  est une translation.

$(h_2 \circ h_1)(A) = h_2(A) = A'(1, -1, -1)$   
 donc le vecteur de la translation est  $\overrightarrow{AA'}(0, -1, -1) = \vec{W}$ . Ainsi  $r = t_{\vec{W}} \circ v \Leftrightarrow v = t_{-\vec{W}} \circ r$ . Par conséquent,  $v$  est la composée de  $r$  et de la translation de

vecteur  $-\vec{W}(0,1,1) = \vec{u}$  qui est vecteur directeur de D.

**Exercice 2**

1. Soit  $M' = s(M)$  ;  $M \in (C)$ .

$$M(z) \in (C) : |(1+i)z - 3 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |z'| = 2$$

$\Leftrightarrow M \in (C)(O, 2)$ . Donc  $\Gamma$  est le cercle de centre O et de rayon 2.

2.  $1+i \neq 1 \Rightarrow s$  est une similitude plane directe de centre I(-3, -3) de rapport  $k = |1+i| = \sqrt{2}$  et d'angle  $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$ .

3. Coordonnées de P :

$$s(F) = O \Leftrightarrow z_0 = (1+i)z_F - 3 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_F = -3i$$

- Nature de IFO

I(-3, -3) ; F(0, -3) ; O(0,0) donc  $\vec{IF}(3,0)$  et  $\vec{FO}(0,3)$  .  $\vec{IF} \cdot \vec{FO} = 0 \Rightarrow \vec{IF} \perp \vec{FO}$  .  $\|\vec{FO}\| = \|\vec{IF}\| = 3$  . Donc IFO est rectangle isocèle en F.

4. (C) est l'antécédent de  $\Gamma$  par s. Puisque  $\Gamma$  a pour centre O l'antécédent de O qui est F sera le centre de (C). Son rayon r est tel que :  $\sqrt{2}r = 2$

$$r = \sqrt{2}$$

**EXERCICE 3 :**

1.  $y'' - y = 0 \Leftrightarrow y = k_1 e^x + k_2 e^{-x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2e^x + e^{-x},$$

$$f(x) = 2e^x - e^{-x}$$

2.  $M(t) \in (C), \frac{d\vec{OM}}{dt} (2e^t - e^{-t}, 2e^t + e^{-t}) = \vec{0} \Leftrightarrow$   
 $\begin{cases} 2e^t - e^{-t} = 0 \\ 2e^t + e^{-t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^t = 0$  impossible !!!

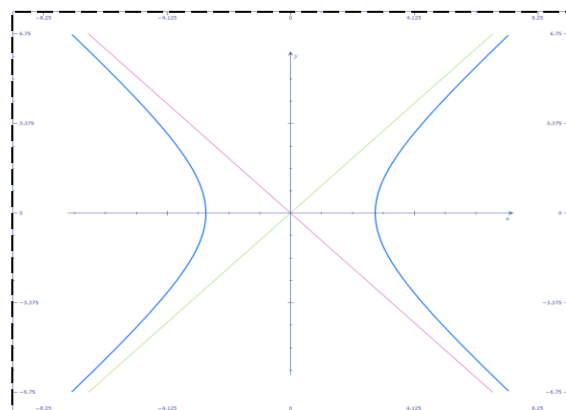
Donc  $\frac{d\vec{OM}}{dt} \neq 0 \forall M(t) \in (C) \Rightarrow (C)$  admet en tout point une tangente de vecteur directeur  $\frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$

3.a  $M(t) \in (C) \Leftrightarrow$

$$x^2 - y^2 = (2e^t - e^{-t})^2 - (2e^t + e^{-t})^2$$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 8$ . Donc  $M(t) \in (H)$ . Ainsi (C) est une branche de (H).

b. (H) est l'hyperbole de centre O(0,0) et de sommets  $A(2\sqrt{2}, 0)$  et  $A'(-2\sqrt{2}, 0)$  et de foyers F(4, 0) et F'(-4, 0). Ses asymptotes sont les droites :  $\Delta_1: y = x$  et  $\Delta'_1: y = -x$



**Problème**

**Partie I**

1.  $D_f = \mathbb{R}_+^*$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$  ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$ .

	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$+\infty$	1

2.  $f'(x) - 1 = \frac{-x^3+x^2-x+1}{x(x^2+1)}$  . Soit  
 $g(x) = x(x^2 + 1)(f'(x) - 1)$  et  
 $g'(x) = x(x^2 + 1)(f'(x) - 1)$   
 $g'(x) = -3x^2 + 2x - 1$ .  $\Delta' = -2$

$\Delta' < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow$  .

Ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \leq -1 < 0 < 1$  . Ainsi :  
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* f'(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) \leq 1$  et  $1 \in D_f$ , d'après l'Inégalité des Accroissements Finis,

On a :

$f(x) - f(1) \leq (x - 1)$  si  $x \geq 1$  et  $f(x) - f(1) \geq (x - 1)$  si  $x \leq 1$ .

$f(1) = 1 \Rightarrow$  si  $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq x$  c'est-à-dire (C) est en dessous de la droite d'équation :  $y = x$ .

Si  $x \leq 1$  ,  $f(x) \geq x \Rightarrow$  (C) est au dessus de  $y = x$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$ . Donc (C) admet une branche parabolique de direction  $(x'x)$ .

4. On a :  $f(1+t) - f(1) \leq \frac{t^2}{2}$  donc  
 $f(U_n) - 1 \leq \frac{(U_n-1)^2}{2}$  . Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n^2$

b. Montrons la propriété par récurrence.

- Pour  $n = 0$ . En effet,  $2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^0} = 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^1 = V_1$

- Supposons que la propriété est vraie au rang  $k$ . On a :  $V_{k+1} \leq \frac{1}{2} V_k^2 \leq \frac{1}{2} \left[ 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{k-1}} \right]^2$

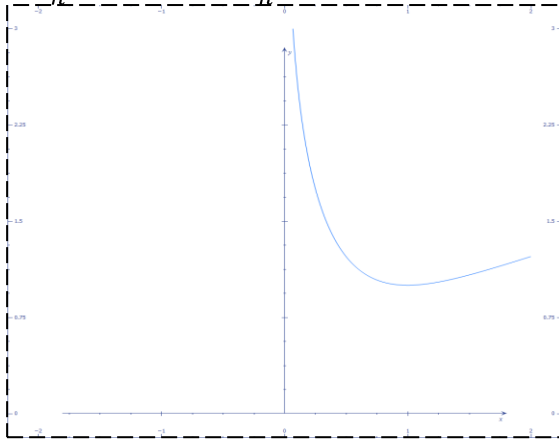
$\leq \frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^k} = 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{(k+1)-1}}$

Donc  $\forall n \geq 1$ , on a  $0 \leq V_n \leq 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$

c. On a :  $V_1 \leq \frac{1}{2} V_0^2 \leq \frac{1}{2} (V_0 - 1)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Donc  $0 \leq V_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 < 1$  . D'où  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{n-1}} = 0$  . Par  
 conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ . Puisque  
 $V_n = U_n - 1 \Rightarrow \lim U_n = 1$

3.



4.  $\varphi'(t) = f'(1+t) - t = \frac{-t^2(t^2+3t+3)}{t^3+3t^2+4t+2}$  .

$\forall t > 0, \varphi'(t) < 0$  donc :

$\forall t > 0, \varphi(t) \leq \varphi(0) \Rightarrow \varphi \downarrow$  c'est-à-dire

$\forall t \geq 0, \varphi(1+t) \cdot \varphi(1) \geq \frac{t^2}{2}$ .

**Partie II**

1. Par récurrence sur n :

On a :  $u_0 = \frac{3}{2} \geq 1$ . Supposons que :  
 $u_k \geq 1$ , on a alors  $u_{k+1} = f(u_k)$  donc  
 $u_{k+1} \geq 1$  car  $f(1) = 1$ . D'où :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ .

- Montrons que  $(u_n) \downarrow$ .  $\forall x \geq 1, f(x) \leq x$   
 c'est-à-dire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$   
 et  $u_n \geq 1$ . Donc :  $(u_n) \downarrow$

3.  $V_n = U_n - 1$

3.a  $V_{n+1} = f(U_n) - 1$  . Posons  
 $U_n = 1 + t$

$\Leftrightarrow t = U_n - 1 ; t \geq 0$  car  $U_n \geq 1$ . D'après  
 ce qui précède :

$$f(1+t) - f(1) \leq \frac{t^2}{2} \Rightarrow f(U_n) - 1 \leq \frac{(U_n - 1)^2}{2}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n^2$



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE

DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session d'Octobre 2000

Série : S1 –S3 –Coeff : 8

Durée : 4heures

Corrigé de la session de remplacement 2000

**EXERCICE 1**

1.  $s_1\left(B, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

a.  $s_1(E) = A$  car  $\begin{cases} \widehat{(\vec{BE}, \vec{BA})} = \frac{\pi}{3} \llcorner \pi \\ BA = \frac{1}{2} BE \end{cases}$

b.  $s_1^{-1}(J) = D$  car  $\begin{cases} \widehat{(\vec{D}, \vec{BJ})} = \frac{\pi}{3} \llcorner \pi \\ BJ = \frac{1}{2} BD \end{cases}$

2. Soit  $s_2$  la similitude de centre J transformant A en F. Soit  $\alpha$  son angle et k son rapport. Donc :

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{A}, \vec{JF})} = -\frac{\pi}{2} \llcorner \pi \\ k = \frac{JF}{JA} = \sqrt{3} \end{cases}$$

3. Soit s la similitude directe transformant E en F et D en J.

a.  $\begin{aligned} s_2 \circ s_1(E) &= s_2 \llcorner_1(E) \rightrightarrows s_2(H) = F \\ s_2 \circ s_1(D) &= s_2 \llcorner_1(D) \rightrightarrows s_2(J) = J = s(D) \end{aligned}$

Théorème : Il existe une et une seule similitude plane directe transformant E en F et D en J. Alors on en déduit que :

$s = s_2 \circ s_1$

b. Soit  $\Omega$  le centre de s. Déterminons son angle et son rapport :

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{\Omega E}, \vec{\Omega F})} = -\frac{\pi}{6} (2\pi) \\ \frac{\Omega F}{\Omega E} = k = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \times -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Construction du centre.

- On construit le point E' tel que E soit milieu de [EE'].

-  $\Omega$  est alors le point tel que E'E $\Omega$  soit un triangle équilatéral indirect.

Schéma : à faire par l'élève.

**EXERCICE 2**

1.a.  $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Preuve : (OG) perpendiculaire au plan (ABC). Il suffit de prouver alors que (OG) perpendiculaire à (AB) et (OG) perpendiculaire à (AC). Comment ?

$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{OG}.$$

2. Soit  $O' = s_{(ABC)}(O)$ . Comme (OG) perpendiculaire à (ABC) et  $G \in (ABC)$ , alors

$$G \text{ milieu de } [OO'] \Rightarrow O(2, 2, 2).$$

3. Soit  $A' = s_{(OG)}(A)$ ,  $B' = s_{(OG)}(B)$ ,  $C' = s_{(OG)}(C)$ . On a :  $s_{(OG)}(O) = O$  ;

$$A' = s_{(OG)}(A) \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [AA'].$$

$$\Leftrightarrow A'(-1, 2, 2)$$

$$B' = s_{(OG)}(B) \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [BB'].$$

$$\Leftrightarrow B'(2, -1, 2)$$

$$C' = s_{(OG)}(C) \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [CC'].$$

$$\Leftrightarrow C'(2, 2, -1)$$

**EXERCICE 3**

1.

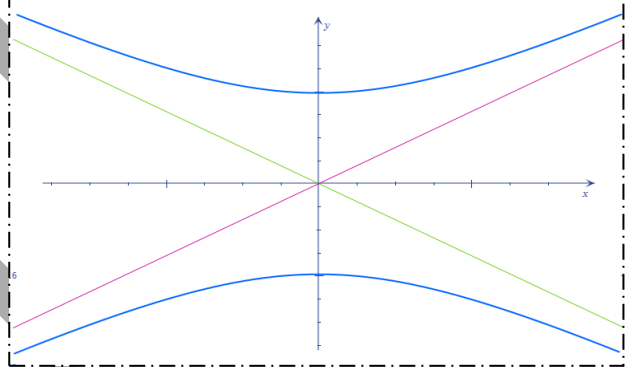
$$\Delta = \left\{ \cos \theta \right\} \Rightarrow z_1 = \frac{\sin \theta - i}{\cos \theta}, z_2 = \frac{\sin \theta + i}{\cos \theta}.$$

$$S = \left\{ z_1, z_2 \right\}$$

2.a.  $M \in \mathbb{C}_2$  ; Soit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, y = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow x^2 - y^2 + 1 = 0$

$$M \in (H) : x^2 - y^2 + 1 = 0 \text{ (hyperbole).}$$

b. Dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (H) a pour sommets  $B(0, 1)$  et  $B'(0, -1)$ . L'axe focal est  $D : y = 0$  et les asymptotes sont



Lorsque  $\theta$  décrit  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $y > 0$  donc  $M \in (H)$ .

**PROBLEME**

Partie A :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x}, x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \\ f_n(0) = 2n + 2 \end{cases}$$

1. Dans  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  f est continue comme quotient de deux fonctions continues à dénominateurs non nuls.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2(n+1)x}{2(n+1)x} \times \frac{2(n+1)x}{\sin x} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2(n+1)x}{2(n+1)x} \times \frac{2(n+1)}{\frac{\sin x}{x}} = 1 \times 2(n+1) = 2(n+1) = f_n(0) \end{aligned}$$

Donc  $f_n$  est continue en 0. D'où  $f_n$  est continue sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

2.a.  $f_n$  est continue sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  donc U est bien définie dans  $\mathbb{N}$ .

b.  $f_n$  est le prolongement continu de la fonction :  $x \mapsto \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x}$  en 0. On a

alors :  $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+3)x dx = \left[ \frac{1}{2n+3} \sin(2n+3)x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3} \end{aligned}$$

3.  $U_0 = 2 ; U_1 = \frac{4}{3} ; U_2 = \frac{26}{15}$ .

**PARTIE II**

1. Preuve :

Pour  $n = 0, 2 \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{2k+1} = 2 = U_0$ .

Supposons que le résultat est vrai au rang n et vérifions – la au rang n+1.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \end{aligned}$$

Donc le résultat est toujours vrai.

2.a. Pour  $\int_0^1 dx = 1$  ;

$$\int_0^1 x^{2k} dx = \frac{1}{2k+1}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

b.  $n = 0, 2 \int_0^1 \frac{1+(-1)^0 x^2}{1+x^2} dx = 2 = U_0$

Pour tout n,

$$\begin{aligned} U_n &= 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = 2 \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^2)^k dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)} dx = 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1 + (x^2)} dx \end{aligned}$$

3.a.  $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| = \left| 2 \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right|$

Donc  $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| \leq 2 \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} \right| dx$   
 $\leq 2 \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{2}{2n+3}$

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2n+3} = 0 \Rightarrow (U_n)$  converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

**PARTIE III**

1. G est la composée de deux fonctions dérivables donc G est dérivable et :

$$\forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , G'(u) = F'(\tan u) = 1$$

2.  $\forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , G'(u) = 1$ . Donc :

$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ G(u) = u + c$$

Pour  $u = 0$   $u = 0 \Rightarrow G(0) = c = F(0) = 0$

Donc  $G(u) = u$  pour tout  $u$  dans  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

3.

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \psi(x) dx = F(1) - F(0) = F(1)$$

$$F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = G\left(\frac{\pi}{4}\right). \text{ On en déduit :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$$



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE  
DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

Session normale 2000

Série : S1 – S3 – Coeff : 8

Durée : 4 heures

### CORRIGE

L'équation caractéristique est donc  $r = i$  ou  $r = -i$

Les solutions sont de la forme :  $Y(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$ .

$$2- \ f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right)g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3- \text{ a. } g \text{ vérifie (2)} \iff \forall x \in \mathbb{R}^* g''(x) = -\frac{1}{x^4}g(x)$$

$$\text{. } f \text{ vérifie (1)} \iff f'' + f = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^* \frac{1}{x^4}g''\left(\frac{1}{x}\right) + g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

en posant  $X = \frac{1}{x} \iff g''(X) = -\frac{1}{X^4}g(X) = 0$

$$\text{b) } g''(x) = \frac{1}{x^4}g(x) \iff \left[xg\left(\frac{1}{x}\right)\right]'' + \left[xg\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{donc } xg\left(\frac{1}{x}\right) = A \cos x + B \sin x ; \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{d'où } g(X) = \frac{1}{X} \left[ A \cos \frac{1}{X} + B \sin \frac{1}{X} \right]$$

puisque  $\frac{1}{x^4}g(x) = -g''(x)$ , une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$

sera la fonction  $x \mapsto -g'(x)$

$$\text{or } g'(x) = -\frac{1}{x^2} \left[ A \cos \frac{1}{x} + B \sin \frac{1}{x} \right] + \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{x^2} \left( -A \sin \frac{1}{x} + B \cos \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= \left( -\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x^3} \right) \cos \frac{1}{x} + \left( -\frac{B}{x^2} - \frac{A}{x^3} \right) \sin \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[ -\left( A + \frac{B}{x} \right) \cos \frac{1}{x} + \left( \frac{A}{x} - B \right) \sin \frac{1}{x} \right]$$

une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$  est  $x \mapsto \frac{1}{x^2} \left[ -\left( A + \frac{B}{x} \right) \cos \frac{1}{x} + \left( \frac{A}{x} - B \right) \sin \frac{1}{x} \right]$

**EXERCICE 2**

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  donc  $u(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}$  est dérivable et sa dérivée est  $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2- a)  $f$  est dérivable comme composée de deux fonctions dérivables dans  $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

$$f'(x) = (1 + \tan^2 x) u'(\tan x)$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1$$

b)  $f'(x) = 1 \implies f(x) = x + c$  on a  $f(0) = 0$  donc  $c = 0$

$$f(x) = x \text{ pour tout } x \text{ appartenant } \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$\text{c) } I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

En posant  $t = \tan x$  on a :

$$dt = (1 + \tan^2 x) dx$$

$$t = 1 \implies x = \frac{\pi}{4}$$

$$t = 0 \implies x = 0$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 x) dx}{1 + \tan^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$3- \text{ a) } I_{2p} + I_{2p+2} = \int_0^1 \frac{x^{2p} + x^{2p+2}}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2p} dx = \left[ \frac{1}{2p+1} x^{2p+1} \right]_0^1$$

$$I_{2p} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 + I_4 = \frac{1}{3} \text{ donc } I_4 = \frac{1}{3} - I_2$$

$$\text{d'où } I_4 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$I_4 + I_6 = \frac{1}{5} \text{ donc } I_6 = \frac{1}{5} - I_4 \text{ d'où } I_6 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4}$$

3.b)

$$I_{2p} \geq 0 \text{ car } \frac{x^{2p}}{1+x^2} \geq 0 \text{ dans } [0; 1]$$

$$I_{2p} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1} \text{ or } I_{2p+2} \geq 0 \text{ donc}$$

$$I_{2p} \leq \frac{1}{2p+1} \text{ d'où } 0 \leq I_{2p} \leq \frac{1}{2p+1}$$

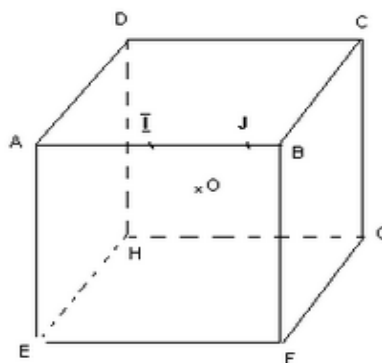
$$0 \leq p \rightarrow +\infty \lim I_{2p} \leq p \rightarrow +\infty \lim \frac{1}{2p+1}$$

$$\text{or } p \rightarrow +\infty \lim \frac{1}{2p+1} = 0$$

$$\text{donc } p \rightarrow +\infty \lim I_{2p} = 0$$

### EXERCICE 3

1) a)



Pour montrer que  $(ABG)$  est le plan médiateur des segments  $[ED]$  et  $[FC]$  il suffit de montrer que 3 points non alignés de  $(ABG)$  sont équidistants des extrémités

de ces segments on a :

$$AD = AE \text{ comme arête du cube}$$

$$BD = BE \text{ comme diagonale de carrés isométriques}$$

pour les mêmes raisons .

Donc  $(ABG)$  est le plan médiateur de  $[ED]$

De même :

$AF = AC$  comme diagonales de carrés isométriques

$BF = BC$  comme arête du cube

$GF = GC$  pour les mêmes raisons

Donc  $(ABC)$  est le plan médiateur de  $[FC]$

b) . Pour : les 4 points  $A, B, G, H$  sont invariants

les points  $E$  et  $D$  sont symétriques

les points  $C$  et  $F$  sont symétriques

donc le cube est invariant pour  $S_1$

. Pour  $S_2$  : les 4 points  $B, C, H, E$  sont invariants

les points  $D$  et  $G$  d'une part et  $F$  et  $A$  d'autre part sont symétriques.

donc le cube est invariant par

. Pour  $S_3$  : on a

$ID = IC$  comme hypoténuses de triangles rectangles isométriques

$JD = JC$  car  $J$  centre de gravité de la face  $DCGH$

$OD = OC$  car  $o$  centre du cube

Donc  $(IOJ)$  est le plan médiateur de  $[DC]$  qui partage le cube en deux parties isométriques .

Donc dans la réflexion de plan  $(\vec{i}, o, \vec{j})$

$S_3$  :

$A \leftrightarrow B$

$C \leftrightarrow D$

$E \leftrightarrow F$

$G \leftrightarrow H$

Le cube reste invariant .

2) —a)  $S_1$  et  $S_2$  étant des réflexions  $f = S_1 \circ S_2$  est une rotation dont l'axe est l'intersection des plans de ces réflexions or  $(ABG)$  et  $(BCH)$  sont des plans distincts ayant en commun les points  $B$  et  $H$  .

donc  $(ABC) \cap (BCH) = (BH)$  d'où  $f$  a pour axe  $(BH)$  .

b)

$$f(A) = S_1 \circ S_2(A) = C$$

$$f(C) = S_1 \circ S_2(C) = F$$

$$f(F) = A$$

$(ACF)$  est perpendiculaire à l'axe de la rotation  $(BH)$  donc la restriction de  $f$  à  $(ACF)$  est

une rotation de centre le point d'intersection de  $(BH)$  et de  $(ACF)$  .

Appelons  $K$  ce point et l'angle de la rotation .

$$\widehat{(\vec{KA}; \vec{KC})} = \widehat{(\vec{KC}; \vec{KF})} = \widehat{(\vec{KF}; \vec{KA})} = \alpha (2\pi)$$

$$\text{On a } \widehat{(\vec{KA}; \vec{KC})} = \widehat{(\vec{KC}; \vec{KF})} = \widehat{(\vec{KF}; \vec{KA})} = \alpha (2\pi)$$

$$\widehat{(\vec{KA}; \vec{KC})} + \widehat{(\vec{KC}; \vec{KF})} + \widehat{(\vec{KF}; \vec{KA})} = 3\alpha$$

$$\widehat{(\vec{KA}; \vec{KC})} + \widehat{(\vec{KC}; \vec{KF})} + \widehat{(\vec{KF}; \vec{KA})} = \widehat{(\vec{KA}; \vec{KA})} = 0 (2\pi)$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{+2\pi}{3}$$

3)-a) . on a  $r = S_3 \circ S_1$  car les plans  $(ABG)$  et  $(IOJ)$  sont perpendiculaires et se coupent suivant  $(OI)$

$$. g = r \circ f = S_3 \circ S_1 \circ S_1 \circ S_2$$

$$= S_3 \circ S_2$$

donc  $g$  est une rotation .

b) Les plans des réflexions se coupent suivant  $(OJ)$  donc  $(OJ)$  est l'axe de  $g$  .

En prenant la restriction de  $g$  à  $(GCD)$  le centre de cette restriction est  $J$  .

$$g(G) = S_3 \circ S_2(G) = S_3[S_2(G)] = S_3(D) = C$$

l'angle de la rotation est  $\widehat{(\vec{JG}; \vec{JC})}$

En orientant  $(GCD)$  par  $(OJ)$  on a :

$$\widehat{(\vec{JG}; \vec{JC})} = \frac{+\pi}{2}$$

**EXERCICE 1**

2. a) Comparaison des distance des points de  $(T)$  au point  $E$  et à la droite  $(CD)$ .

Soit  $M(x, y, z)$  un point de  $(T)$  : on a  $x^2 + 1 - 2y = 0$  (1)

donc  $EM = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + z^2}$  en utilisant (1)

De même  $d(M, (CD)) = \frac{\|\vec{MC} \wedge \vec{CD}\|}{\|\vec{CD}\|}$

Or  $\vec{MC} \wedge \vec{CD} (0, -z, y)$  et  $\|\vec{CD}\| = 1$

donc  $d(M, (CD)) = \sqrt{z^2 + y^2}$

par suite  $EM = d(M, (CD))$

2. b) Soit  $M(x, y, z)$  appartenant à l'intersection de  $(T)$  et du plan  $P : z = 0$

$M$  est équidistant de  $E$  et de  $(CD)$  (d'après le 2. a) et appartient à  $P$  donc  $M$  appartient à la parabole de foyer  $E$  et de directrice  $(CD)$ .

Si  $M$  appartient à la parabole de foyer  $E$  et de directrice  $CD$

on a :  $M$  appartient au plan  $P : z = 0$

- $ME = d(M, (CD))$  d'où  $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + y^2}$

1. a) Détermination de l'ensemble (T)

$$\vec{MC} \left( -\frac{1}{2} - x, -y - z \right) ; \vec{MD} \left( \frac{1}{2} - x, -y, -z \right) ; \vec{ME} (-x, 1 - y, z)$$

$$\vec{MC} \wedge \vec{MD} (0, -z, y)$$

$$\|\vec{MC} \wedge \vec{MD}\| = \|\vec{ME}\| \implies \sqrt{z^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2 + z^2}$$

$$\iff x^2 + 1 - 2y = 0$$

donc  $T : \left\{ M(x, y, z) \text{ tel que } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} z \in R \right\}$

c'est un paraboloïde.

1. b) Détermination de (Δ)

le plan  $(0, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  a pour équation  $x = 0$

or pour  $x = 0 \quad y = \frac{1}{2}$  sur T

donc  $(\Delta) (G) = \left\{ (x, y, z) \text{ tels que } x = 0, y = \frac{1}{2}, z \in R \right\}$

c'est la droite définie par  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = k, k \in R \end{cases}$



donc  $x^2 + 1 - 2y = 0$

par suite  $M \in (T)$

donc  $M \in (T) \cap (P)$

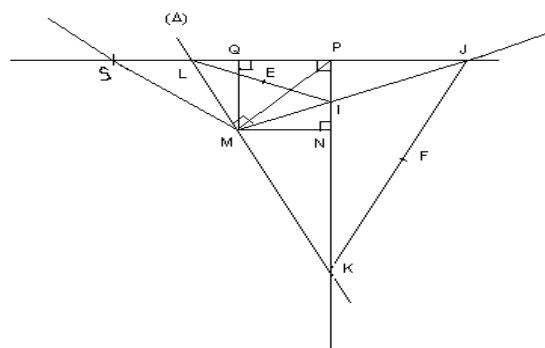
(T) est donc la parabole de foyer E et de directrice CD.

$(T) \cap (P)$  est donc la parabole de foyer de E et de direction CD.



## EXERCICE 2

1 —



2 — a) L'image de la droite (NP) par R.

on sait que  $(MN) \perp (NP)$  donc

$$R(MN) \perp (NP)$$

or  $R(MN) = (MQ)$  et  $R(N) = Q$

Donc  $R(NP)$  est la droite perpendiculaire à  $(MQ)$  et passant par Q.

$$R(NP) = (QL)$$

b) Détermination de l'image de  $K$

$$R(K) \in (MJ) \text{ car } (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{ML}) = \frac{\pi}{2}$$

$$R(K) \in (QL) \text{ car } K \in (NP) \text{ et } R(NP) = QL$$

$$\text{Donc } R(K) \in (MJ) \cap (QL) = \{J\}$$

$$R(K) = J$$

. Détermination de l'image de  $I$

$$R(I) \in (ML) \text{ car } (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{ML}) = \frac{\pi}{2}$$

$$R(I) \in (QL) \text{ car } R(NP) = QL$$

$$\text{Donc } R(I) \in (ML) \setminus (QL) = \{L\}$$

$$R(I) = L$$

c)  $KMJ$  et  $IML$  sont des triangles rectangles isocèles

$$\text{car } \left\{ \begin{array}{l} MK = MJ \\ (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MJ}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} MI = ML \\ (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{ML}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

3 — a) l'image de  $K$

$MKJ$  est un triangle rectangle isocèle en  $M$  et  $F$  est le milieu de l'hypoténuse  $[KJ]$

$$\text{donc } (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MF}) = \frac{\pi}{4} \quad MF = MK \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} MK$$

par suite  $s(K) = F$

. l'image de  $I$

En partant de l'hypothèse que  $IML$  est un triangle rectangle isocèle et que  $F$  est le milieu de l'hypoténuse avec le même raisonnement que ci-dessus on trouve

$$S(I) = E$$

b) lieu géométrique de  $E$

$$s(I) = E$$

lorsque  $I$  décrit  $[NP]$  privé de  $N$ ,  $E$  décrit  $\varepsilon([NP])$  privé de  $s(N) = O$

$$\text{or } s(P) = Q$$

$$\text{donc } \varepsilon([NP]) = [OQ]$$

par suite le lieu géométrique de  $E$  est le segment  $[OQ]$  privé de  $O$ .

c) De b) nous pouvons déduire que sont alignés or  $N$  appartient à la diagonale donc  $O, N, E, Q$  sont alignés

**EXERCICE 3**

on a :  $I$  est le milieu de  $[AA']$  avec  $A'$  le sommet opposé .

donc  $x_A = 2x_I - x_{A'}$

$y_A = 2y_I - y_{A'}$  donc  $A' ( 90 )$

. l'équation de l'ellipse est de la forme avec  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1$   $a = IA = 5, C = IO = 4$  donc l'ellipse a pour pour équation :

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1 \text{ avec } \begin{cases} X = x - 4 \\ Y = y \end{cases}$$

les autres sommets ayant même abscisse que  $I$ , on a  $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

pour  $x = 4$  on a  $y = 3$  ou  $y = -3$

d'où  $B ( 4, 3 )$   $B' ( 4, -3 )$

Ainsi les trois autres sommets sont  $A ( 9, 0 ) \setminus B ( 4, 3 ) \setminus B' ( 4, -3 )$

1 — b . Détermination de l'excentricité  $e : e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

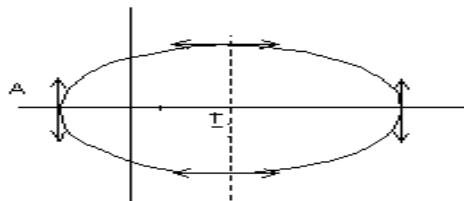
. Détermination de la directrice

$D$  a pour équation :  $x = \frac{a^2}{c}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c'est-à-dire  $x - 4 = \frac{25}{4}$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

d'où  $D : x = \frac{25}{4} + 4 = \frac{41}{4}$

1 — c : (E) :  $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



2 — a) Résolution de l'équation :

$$Z^2 - 2(4 + 5 \cos \theta)Z + 4(4 \cos \theta + 5) = 0$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\Delta' = (3i \sin \theta)^2$$

$$Z_1 = 4 + \cos \theta + 3i \sin \theta$$

$$Z_2 = 4 + 5 \cos \theta - 3i \sin \theta$$

b) Coordonnée de  $M_L$

. Dans  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  a pour coordonnée  $\{ X = 4 + 5 \cos \theta Y = 3 \sin \theta$

. donc  $\{ \cos \theta = \frac{X-4}{5} \sin \theta = \frac{Y}{3}$

d'où  $\frac{(X-4)^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$  avec  $y > 0$

L'ensemble des points  $M_2$  lorsque  $\theta$  varie dans  $[0, \pi]$  est la demi ellipse située dans le demi plan  $y > 0$

a pour coordonnée  $\{ X = 4 + 5 \cos \theta Y = -3 \sin \theta$

donc  $\{ \cos \theta = \frac{X-4}{5} \sin \theta = \frac{Y}{3}$  d'où  $\frac{(X-4)^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$  avec  $y < 0$

l'ensemble des points  $M_2$  lorsque  $\theta$  varie dans  $[0, \pi]$  est le symétrique de l'ensemble des points  $M_L$  par rapport à l'axe des abscisses.

## PROBLEME

Partie I

1 — Limites et variations de  $g_n$

$$x \rightarrow +\infty \lim g_n(x) = x \rightarrow +\infty \lim \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

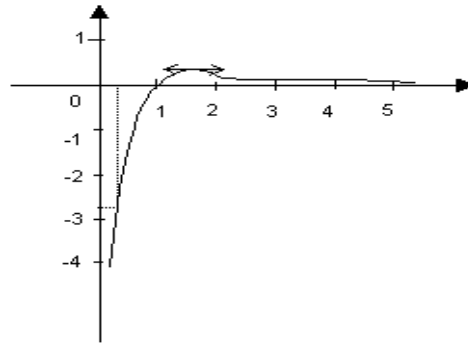
$$. x \rightarrow 0^+ \lim g_n(x) = -\infty$$

$$. g'_n(x) = \frac{1 - n \ln x}{x^{n-1}}$$

Dans  $]0, +\infty[ \setminus \setminus g'_n(x) > 0 \iff 1 - n \ln x > 0 \iff x < \sqrt[n]{e}$

x	0	1	$\sqrt[n]{e}$	$+\infty$
$g'(x)$		+		-
$g(x)$	$-\infty$		$\frac{1}{ne}$	0

2 — Tracé de C1



Les asymptotes sont les droites d'équations  $x = 0$  et  $y = 0$

3 — a)

$$I_1(\lambda) = \int_1^\lambda \left( \frac{\ln t}{t} \right) dt = \left[ \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^\lambda$$

donc  $I(\lambda) = \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2$

b) pour  $n \approx 2$

$$I_n(\lambda) = \int_1^\lambda \left( \ln t \cdot \frac{1}{t^n} \right) dt = \frac{1}{-n+1} \left[ \ln t \frac{1}{t^{n-1}} \right]_1^\lambda - \frac{1}{-n+1} \int_1^\lambda \left( \frac{1}{t} \frac{1}{t^{n-1}} \right) dt$$

$$= \frac{\ln \lambda}{(-n+1)\lambda^{n-1}} - \frac{1}{(-n+1)} \left[ \lambda^{n-1} - 1 \right]$$

$$A = \int_2^\lambda g_2(t) dt = - \left[ \ln t \frac{1}{t} \right]_2^\lambda - \frac{1}{(1)^2} \left[ t^{-1} \right]_2^\lambda$$

$$= \frac{\ln(\lambda)}{2} - \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}$$

c)  $\lambda \rightarrow +\infty \lim I_n(\lambda) = \frac{1}{(1-n)^2}$

Partie II

1 - Dans  $[p, p+1]$  on a  $g_2(p+1) \leq g_2(t) \leq g_2(p)$  car  $g_2$  est d'éc croissante

donc  $\int_p^{p+1} g_2(p+1) dt \leq \int_p^{p+1} g_2(t) dt \leq \int_p^{p+1} g_2(p) dt$

Puisque  $(p+1)$  et  $g_1(p)$  sont constant on a :

$$g_2(p+1) < \int_p^{p+1} g_2(t) dt \leq \int_p^{p+1}$$

2 — a) Croissance de  $(S_k) \geq 2$

Calculons  $S_{k+1} - S_k = i = 2k + 1 \sum \frac{\ln i}{i^2} - ki = 2 \sum \frac{\ln i}{i^2}$

$$= \frac{\ln(K+1)}{(K+1)^2} \geq 0$$

donc  $(S_k)_{k \geq 2}$  est croissante

b) . On a par définition  $S_k = \sum_{i=2}^k \ln i = 2 \sum_{i=2}^k g_2(i)$

or d'après le (1-) de la partie II on a :

$$g_2(3) \leq \int_2^3 g_2(t) dt \leq g_2(2)$$

$$g_2(i+1) \leq \int_i^{i+1} g_2(t) dt \leq g_2(i)$$

$$g_2(K) \leq \int_{K-1}^K g_2(t) dt \leq g_2(K-1)$$

En sommant membre à membre cette double inégalité on obtient :

$$S_k - g_2(2) \leq \int_2^K g_2(t) dt \leq S_k - g_2(K)$$

c'est-à-dire  $S_k - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^K g_2(t) dt \leq S_k - \frac{\ln K}{K^2}$

On a donc  $\int_2^K g_2(t) dt + \frac{\ln K}{K^2} \leq S_k \leq \int_2^K g_2(t) dt + \frac{\ln 2}{2^2}$

c) puisque  $A = \int_2^{+\infty} g_2(t) dt = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln K}{K} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}$  est fini.

on a  $S_k < A + \frac{\ln 2}{2^2}$

d)  $(S_k)$  est croissante et majorée donc  $(S_k)$  est convergente.

$$K \rightarrow +\infty \lim A + \frac{\ln K}{K^2} \leq K \rightarrow +\infty \lim S_k \leq K \rightarrow +\infty \lim A + \frac{\ln 2}{2^2}$$

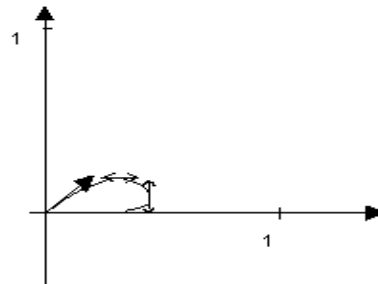
$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \leq l \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2^2}$$

donc  $\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{2} + \frac{3 \ln 2}{4}$

Partie III

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{t} \\ y(t) = \frac{\ln t}{t^2} \end{cases} \begin{cases} x'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} \\ y'(t) = \frac{1-2 \ln t}{t^3} \end{cases}$$

t	1	$\sqrt{e}$	e	10
x'(t)	1	+	+	0 -
x(t)	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{\ln 10}{10}$
y'(t)	1	+	0 -	-
y(t)	0	$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{\ln 10}{10}$



Les tangentes sont parallèles :

- Va l'axe des abscisses au point de coordonnées  $\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{2e}\right)$
- Va l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e^4}\right)$

KOR!

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 2002

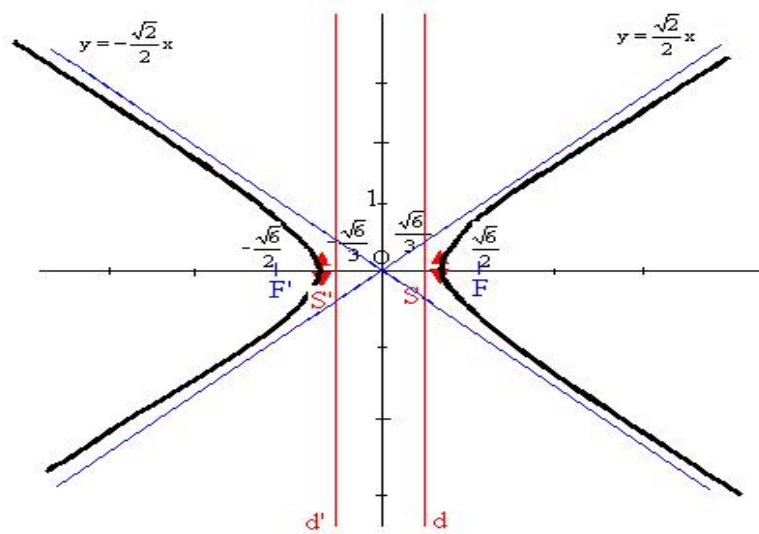
1) (H) :  $x^2 - 2y^2 = 1$

$$x^2 - 2y^2 = 1 \iff x^2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}y^2 = 1$$

donc (H) a une équation de la forme :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  qui est l'équation d'une hyperbole de foyer  $F\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ , de

directrice associée d'équation  $x = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$  d'excentricité  $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Construction



2)  $M(x, y)$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos(2t)} \text{ où } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan(2t) \end{cases}$$

a) si  $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  alors  $x \in [1; +\infty[$

$$\text{on a : } x^2 - 2y^2 = \frac{1}{\cos^2(2t)} - \tan^2(2t)$$

$$= 1 \tan^2(2t) - \tan^2(2t)$$

$$= 1$$

donc la trajectoire ( $\Gamma$ ) de  $M$  est la partie de (H) correspondant à  $x$  dans  $[1; +\infty[$

b) la vecteur vitesse  $\vec{V}$  a pour coordonnées  $x'$  et  $y'$  avec  $x' = \frac{-2 \sin 2t}{\cos^2(2t)}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 (1 + \tan^2(2t))$$

$$y' = \sqrt{2} (1 + \tan^2(2t))$$

$$\vec{V} \left( \frac{-2 \sin 2t}{\cos^2(2t)}, \sqrt{2} (1 + \tan^2(2t)) \right)$$

Pour  $x = 2$  on a  $\cos 2t = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ t = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

or  $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  dans  $t = \frac{\pi}{6}$

le point d'abscisse 2 a pour ordonnée  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

en ce point  $\vec{V}$  a pour coordonnées  $\overrightarrow{V(-\sqrt{3}; 4\sqrt{2})}$

la tangente au point de coordonnées  $\left(2; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$  a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{V(-\sqrt{3}; 4\sqrt{2})}$

c) le vecteur accélération a pour coordonnées  $x''$  et  $y''$  avec :

$$x'' = \frac{[4 \cos(2t) \cdot \cos^2(2t) + 2 \cos 2t \cdot 2 \sin(2t) \cdot 2 \sin(2t)]}{\cos^4(2t)}$$

$$x'' = \frac{-4 \cos(2t) (\cos^2(2t) + \sin^2(2t))}{\cos^4(2t)}$$

$$x'' = \frac{-4}{\cos^3(2t)}$$

$$y'' = \sqrt{2} (2 \tan(2t)) \cdot (2 (1 + \tan^2(2t))) \quad y'' = 4\sqrt{2} \cdot \tan(2t) (1 + \tan^2(2t))$$

$$\vec{y} \left( \frac{-4}{\cos^3(2t)} ; 4\sqrt{2} \cdot \tan(2t) (1 + \tan^2(2t)) \right)$$

On a :  $\vec{V} \cdot \vec{y} = \frac{8 \sin(2t)}{\cos^5(2t)} + 8 \tan(2t) (1 + \tan^2(2t))^2$

On a :  $\vec{V} \cdot \vec{y} > 0$  donc le mouvement de  $M$  est accéléré.

## PROBLEME

$$I. \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x} \sin x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Sur  $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ,  $f$  est continue comme rapport de 2 fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$

continuité en

$$f(0) = 0$$

$$x \rightarrow 0^+ \lim f(x) = x \rightarrow 0^+ \lim \frac{1}{\ln x} = 0$$

donc  $f$  est continue en

**Conclusion**

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Dérivabilité en

$$x \rightarrow 0^+ \lim \frac{f(x) - f(0)}{x} = x \rightarrow 0^+ \lim \frac{1}{x \ln x} = -\infty$$

donc  $f$  n'est pas dérivable en .

2. Variations de  $f$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$  comme rapport de 2 fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

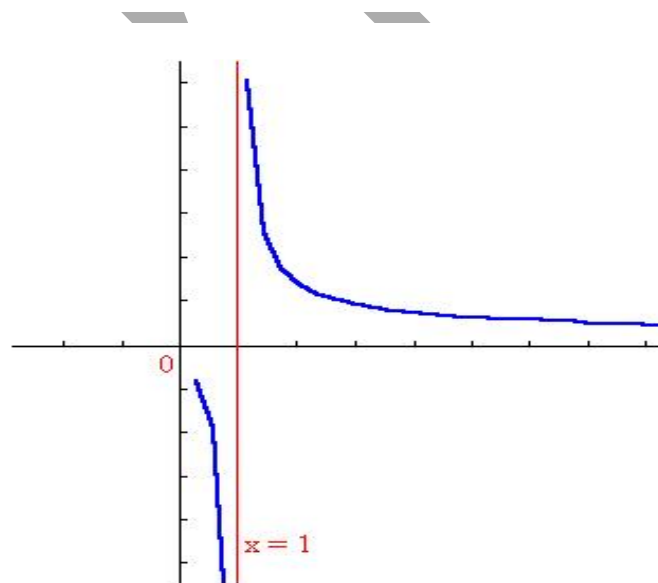
$$x \rightarrow +\infty \lim f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 1^- \lim f(x) = -\infty, \quad x \rightarrow 1^+ \lim f(x) = +\infty$$

**Tableau de variations**

x	0	x	$\sqrt{x}$	1	$+\infty$
f'		—		—	
f	0	$\frac{1}{\ln x}$	$\frac{1}{\ln \sqrt{x}}$	$+\infty$	0

**3. courbe de f**



II.  $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

1 . a) La fonction qui à  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  d'où l'existence de  $H(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

b) si  $t \in [0, 1[$  alors  $f(t) > 0$  et  $H(x) \geq 0$  car pour  $x \in [0, 1[, x \leq \sqrt{x}$

si  $t \in ]1; +\infty[$  alors  $f(t) > 0$  et  $H(x) > 0$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}, H(x) \geq 0$

$$2. H'(x) = f(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} * \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$$

$$H'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x}} * \frac{1}{\ln x}$$

si  $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

3.  $f$  étant décroissante sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  on a  $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], -\frac{1}{\ln 2} \leq f(x) \leq 0$

donc  $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  on a  $|f(x)| \leq \frac{1}{-\ln 2}$  et par suite  $|H(x)| = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln 2} dt$

$$|H(x)| \leq \frac{x - \sqrt{x}}{\ln 2} \text{ or } x \rightarrow 0^+ \lim \frac{x - \sqrt{x}}{\ln 2} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 0$$

$$4. a) K(x) = \int^x \sqrt{t} dt$$

Une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  est la fonction qui à  $t \mapsto \ln(\ln t)$

$$K(x) = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(\sqrt{x}))$$

$$= \ln(\ln(x)) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(\ln(x))$$

donc  $K$  est une fonction constante.

$$K(x) = \ln 2$$

$$b) g(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$$

$$D_g = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

$$x \rightarrow 1 \lim g(x) = x \rightarrow 1 \lim \frac{x-1}{x \ln x}$$

$$= x \rightarrow 1 \lim \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{or } x \rightarrow 1 \lim \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\text{donc } x \rightarrow 1 \lim g(x) = 1$$

$$\text{posons } \begin{cases} \phi(x) = g(x) \text{ si } x \neq 1 \text{ et } x > 0 \\ \phi(1) = 1 \end{cases}$$

$D_\phi = \mathbb{R}_+^*$  et  $\phi$  est continue en 1 donc est le prolongement par continuité de  $g$  en 1

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{x}}^x \phi(t) dt &= \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t} - \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{t \ln t} \\ &= H(x) - K(x) \end{aligned}$$

La fonction  $\phi$  est continue en 1, donc sur  $[1, +\infty[$  et il existe un réel tel que

$$\phi(t) \leq m, \forall t \in [1, +\infty[ \text{ donc } \int_{\sqrt{x}}^x \phi(t) dt \leq (x - \sqrt{x}) m$$

$$\text{et } \int_{\sqrt{x}}^x \phi(t) dt = 0$$

$$\text{or } \int_{\sqrt{x}}^x \phi(t) dt = H(x) - K(x)$$

$$\text{donc } x \rightarrow 1 \lim (H(x) - K(x)) = 0$$

$$\text{et } x \rightarrow 1 \lim H(x) = \ln 2$$

$$\text{c) } \forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$   $f$  est décroissante

\textbullet\ si  $x \in ]0, 1[$

$$\text{donc } \frac{1}{\ln \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}$$

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln \sqrt{x}} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln x} dt$$

car  $x < \sqrt{x}$

$$\text{donc } \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} \leq H(x) \leq \frac{2(x - \sqrt{x})}{\ln x} \forall x \in ]0, 1[$$

\textbullet\ si  $x \in ]1, +\infty[$

$$\text{on a } \frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{2}{\ln x}$$

$$\text{donc } \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} \leq H(x) \leq \frac{2(x - \sqrt{x})}{\ln x}$$

### Conclusion

$$\forall x > 0 \text{ et } x \neq 1 \quad \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} \leq H(x) \leq \frac{2(x - \sqrt{x})}{\ln x}$$

quand  $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} \leq H(x)$$

or  $x \rightarrow +\infty \lim \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} = x \rightarrow +\infty \lim \frac{x}{\ln x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$

$= x \rightarrow +\infty \lim \left(\frac{x}{\ln x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$

$= +\infty$

donc  $x \rightarrow +\infty \lim H(x) = +\infty$

on a  $\frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} \leq \frac{H(x)}{x} \leq \frac{2(x - \sqrt{x})}{x \ln x}$

quand  $x \rightarrow +\infty, \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} \rightarrow 0$

donc  $x \rightarrow +\infty \lim \frac{H(x)}{x} = 0$

donc la courbe de  $H$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

quand  $x \rightarrow 0 \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} \rightarrow +\infty$

donc  $x \rightarrow 0 \lim \frac{H(x)}{x} = +\infty$

donc  $H$  n'est pas dérivable en  $O$ .

donc  $x \rightarrow 0 \lim \frac{H(x)}{x} = +\infty$

donc  $H$  n'est pas dérivable en  $O$ .

**Tableau de variation de  $H$**

$H'(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x}$

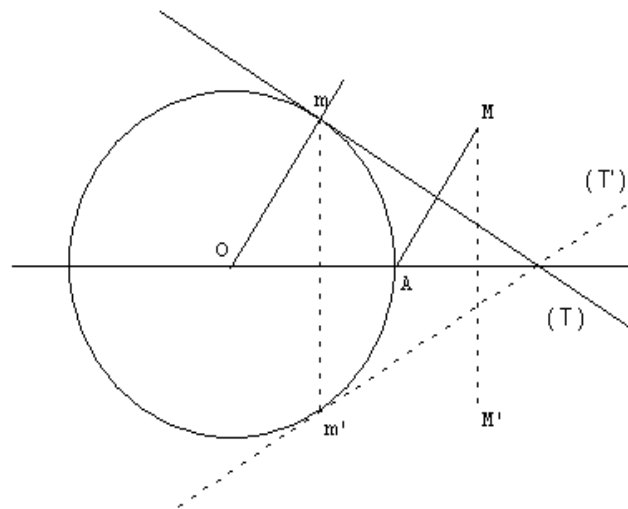
$H'(x) > 0$  si  $x \in ]0, 1[$

$H'(x) > 0$  si  $x \in ]1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
H'	+	+	
H	0	$\ln 2$	$+\infty$

**CORRECTION SESSION NORMALE 2003**

**EXERCICE 1**



(C) est le cercle trigonométrique.

A tout point  $m \in (C)$ , on associe  $M$  symétrique du point  $A$  d'abscisse 1 par rapport à la tangente en  $m$  au cercle (C).

1) montrons que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de  $(\Gamma)$

Soit  $S$  la réflexion d'axe l'axe des abscisses

et posons  $S(M) = M'$

appelons  $(T)$  la tangente en  $m$  au cercle (C)

soit  $S(T) = (T')$ ,  $S(m) = m'$

on a  $T'$  est tangente à (C) en  $m'$

$S(A) = A$

$(T)$  étant la médiatrice de  $[AM]$ , alors  $(T')$  est la médiatrice de  $[AM']$

d'où  $S_{T'}(A) = M'$

donc  $M'$  est le symétrique du point  $A$  par rapport à  $(T')$  qui est la tangente en  $m'$  à (C).

d'où  $M' \in (\Gamma)$

2)

On a  $m(\cos t, \sin t)$ ,  $A(1, 0)$  et  $M(x, y)$

$\vec{Om}$  colinéaire à  $\vec{AM}$  donc  $\det(\vec{Om}, \vec{AM}) = 0$

$$\begin{vmatrix} \cos t & x - 1 \\ \sin t & y \end{vmatrix} = 0$$

donc  $(x - 1) \sin t - y \cos t = 0$

ainsi on obtient  $x \sin t - y \cos t = \sin t$  (1)

$I$  milieu de  $[AM]$  est sur  $(T)$

$$I \left( \frac{x+1}{2}, \frac{y}{2} \right)$$

donc  $I \in (T) \iff \frac{\frac{y}{2} - \sin t}{\frac{x+1}{2} - \cos t} = \frac{-\cos t}{\sin t}$

ce qui donne  $x \cos t + y \sin t = 2 - \cos t$  (2)

On a le système

$$\begin{cases} x \cos t + y \sin t = 2 - \cos t \\ x \sin t - y \cos t = \sin t \end{cases}$$

En résolvant le système on obtient :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

3)

a) Variation de  $x$  et  $y$  sur  $[0, \pi]$

$$x' = 2 \sin t (2 \cos t - 1)$$

$$y' = 2 \cos t - 2 \cos 2t$$

$$y' = -4 \cos^2 t + 2 \cos t + 2$$

$$y' = -4(\cos t - 1)\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)$$

$t$	0	$\frac{\pi}{3}$	$2\frac{\pi}{3}$	$\pi$		
$x'(t)$	0	+	0	-	-	0
$y'(t)$	0	+		+	0	-
$x$	1	$\nearrow$ $\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\searrow$	-3
$y$	0	$\nearrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

b)

b)

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} 2\sin 2t - 2\sin t \\ 2\cos t - 2\cos 2t \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{2}t \\ \sin \frac{3}{2}t \end{pmatrix}$$

Evaluons  $\det(\vec{u}, \vec{v})$ 

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \cos t \cos \frac{3}{2}t - 2 \cos \frac{3}{2}t \cos 2t + 2 \sin t \cos \frac{3}{2}t - 2 \sin 2t \sin \frac{3}{2}t$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \cos \frac{t}{2} - 2 \cos(2t - \frac{3}{2}t)$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \cos \frac{t}{2} - 2 \cos \frac{t}{2} = 0$$

donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéairesc) Pente de  $(AM)$ 

$$\frac{y-0}{x-1} ?$$

$$a(t) = \frac{2 \sin t - \sin 2t}{2 \cos t - \cos 2t - \cos 2t - 1}$$

$$a(t) = \frac{2 \sin t(1 - \cos t)}{-2 \cos^2 t + 2 \cos t} = \frac{2 \sin t(1 - \cos t)}{2 \cos t(1 - \cos t)}$$

$$a(t) = \tan t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0$$

$$a_0 = 0$$

La tangente en  $A$  est parallèle à  $Ox$ , c'est d'ailleurs l'axe  $Ox$ 

d)

Ce sont les points où la direction de  $\vec{u}$  est un des axes du repère

$$\text{c'est à dire } \frac{3t}{2} = k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

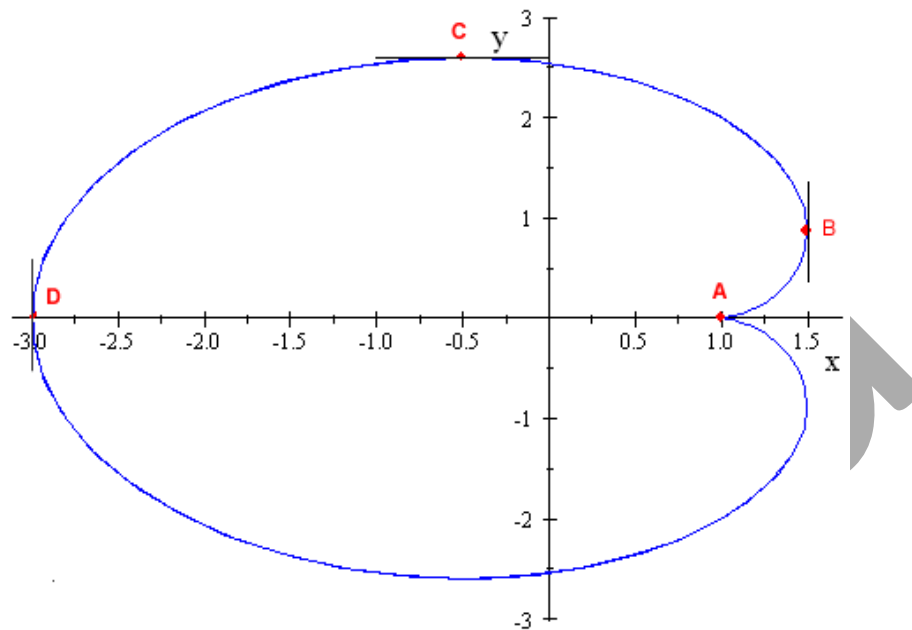
$$t = k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Sur  $[0, \pi]$  on a donc  $k = 0$  ou  $k = 1$  ou  $k = 2$  ou  $k = 3$ pour  $k = 0$ , on a le point  $A$  où la tangente est  $Ox$ pour  $k = 1$ , on obtient le point  $B(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  où la tangente est parallèle à  $Oy$

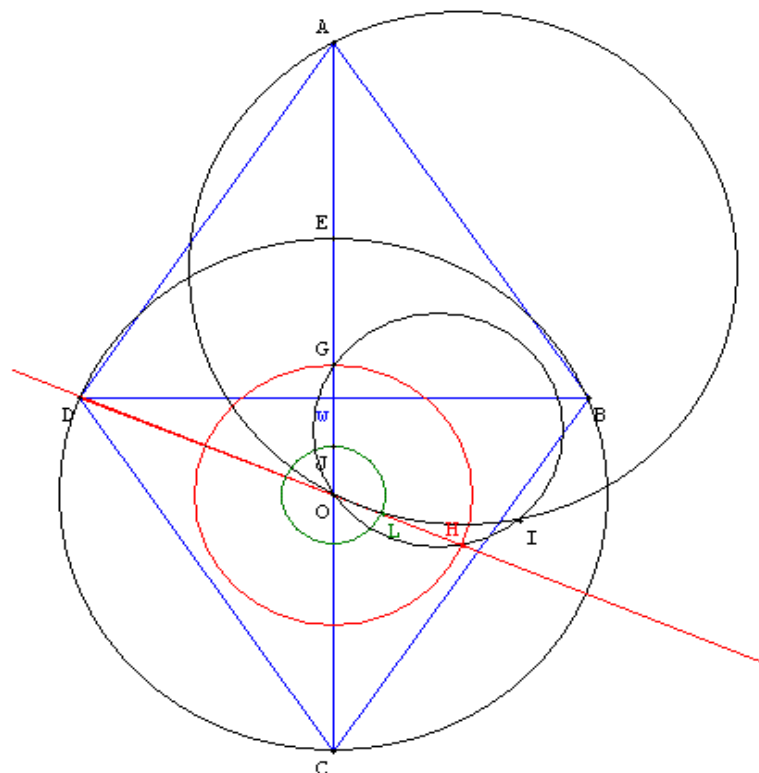
pour  $k = 2$ , on obtient le point  $C(\frac{-1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$  ou la tangente est parallèle à  $Ox$

pour  $k = 3$ , on obtient le point  $D(-3, 0)$  ou la tangente est parallèle à  $Oy$

courbe de  $(\Gamma)$



**EXERCICE 2**



1-a) G isobarycentre de A,B,C,D et E donc

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} + \vec{GE} = \vec{0} \quad (1)$$

or  $\Omega$  milieu de  $[DB]$  et  $[AC]$

$$\text{ainsi } \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{G\Omega} \text{ et } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{G\Omega}$$

en remplaçant dans la relation (1) on obtient

$$4\overrightarrow{G\Omega} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

d'où  $G$  est barycentre du système  $\{(\Omega, 4); (E, 1)\}$

on a également  $O$  milieu de  $[CE]$  donc  $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GO}$

$$(1) \text{ donne alors } \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{G\Omega} + 2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{0}$$

or  $J$  milieu de  $[\Omega O]$

$$\text{donc } \overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{0}$$

d'où  $G$  est barycentre du système  $\{(J, 4); (A, 1)\}$

b)  $f$  est l'application du plan sur lui même associant à tout point  $M$  le point  $M'$  défini par :

$$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$$

Déterminons d'abord l'ensemble des points  $M$  invariants par  $f$  noté  $Invf$

$$Invf = \{ M \in P / f(M) = M \}$$

$$f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{0}$$

L'unique point vérifiant cette relation est  $G$

$$Invf = \{ G \}$$

Nature de  $f$

$$f(M) = M' \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$$

$$4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'}) = 5\overrightarrow{MG}$$

$$4\overrightarrow{GM'} = -\overrightarrow{GM}$$

$$\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{GM}$$

$f$  est l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-\frac{1}{4}$

On sait  $4\vec{G\Omega} + \vec{GE} = \vec{0} \iff \vec{G\Omega} = -\frac{1}{4}\vec{GE}$

d'où les points  $I, G, O, H$  sont cocycliques

donc  $f(E) = \Omega$

alors  $I$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $OGH$

De même  $4\vec{GJ} + \vec{GA} = \vec{0}$

On a aussi :

$\vec{GJ} = -\frac{1}{4}\vec{GA}$

$s(A) = L \Rightarrow (\widehat{IA, IL}) = \theta + \pi + 2k\pi = \theta + (2k+1)\pi$

$f(A) = J$

et  $(\widehat{OA, OL}) = (\widehat{OG, OH}) = \theta$

2) on a  $\theta = (\widehat{OC, OD})$

et  $r$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$

donc  $(\widehat{IA, IL}) = (\widehat{OA, OL}) + (2k+1)\pi$

$r = r(O, \theta)$

$s = r \circ f$

d'où  $I$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $OAL$

a)  $f = h(G, -\frac{1}{4})$

d'où  $\vec{OH}$  et  $\vec{OD}$  colinéaires et de sens opposés

$I$  est l'intersection des deux cercles circonscrits aux triangles  $OGH$  et  $OAL$

cela signifie que  $H$  est sur la demi droite  $[DO)$

d'où  $H = C(O, OG) \cap [DO)$

construction de  $L$

$L = s(A) = r \circ f(A) = r(J)$

$\iff OJ = OL$  et  $(\widehat{OJ, OL}) = \theta [2\pi]$

de la même manière, on montre que  $L = C(O, OJ) \cap [DO)$

]c)  $I$  est le centre de  $s$

unique de Thiès

$s(G) = H \Rightarrow (\widehat{IG, IH}) = \theta + \pi + 2k\pi$

KORKA

**EXERCICE 3**

1)  $\Delta$  est une droite de l'espace,  $F$  un point n'appartenant pas à  $\Delta$ ,  $K$  le projeté orthogonal de  $F$  sur  $\Delta$  et  $A$  un point de  $\Delta$  tel que  $AK = 1$

a)

$$\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK} \wedge (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})$$

$$\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{KA}$$

$$\text{or } \overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MK} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{KA}\|$$

$$\text{aussi } \|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MA}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{KA}\|$$

$$\text{d'où le résultat : } \|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{KA}\|$$

b)

$$d(M, \Delta) = d(M, (AK))$$

$$d(M, (AK)) = \frac{\|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{KA}\|}{\|\overrightarrow{KA}\|} \text{ or } \|\overrightarrow{KA}\| = 1$$

$$\text{ainsi } d(M, \Delta) = \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{KA}\|$$

$$\text{d'où } MF = \frac{1}{2} d(M, \Delta)$$

$$\frac{MF}{d(M, \Delta)} = \frac{1}{2}$$

2)

Dans le plan  $(P_1) = P(K, \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KF})$

$$M \in (P_1), \Delta \in (P_1) \text{ et } M \text{ vérifie } \frac{MF}{d(M, \Delta)} = \frac{1}{2} \text{ et } F \notin \Delta$$

$M$  décrit l'ellipse d'excentricité  $\frac{1}{2}$ , de foyer  $F$  et de directrice associée  $\Delta$ .

3)  $(P_2)$  est le plan passant par  $K$  et perpendiculaire à  $\Delta$

Comme  $P_2 \perp \Delta$  et  $\Delta = (KA)$  donc  $\overrightarrow{KA}$  est normal au plan  $P_2$

$$\text{donc } M \in P_2 \iff \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0$$

$$MF = \frac{1}{2}MK \times KA \times \left| \sin(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KA}) \right| \text{ or } KA = 1$$

$$\text{d'où } MF = \frac{1}{2}MK \times \left| \sin(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KA}) \right| \text{ et } \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0$$

b) l'intersection de  $(\Gamma)$  et  $(P_2)$  est l'ensemble des points qui vérifient :

$$MF = \frac{1}{2}MK \times \left| \sin(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KA}) \right| \text{ et } \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0$$

$$\text{comme } \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0 \text{ donc } \left| \sin(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KA}) \right| = 1$$

$$\text{donc } MF = \frac{1}{2}MK \times \left| \sin(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KA}) \right| = \frac{1}{2}MK$$

cette intersection est donc l'ensemble des points de  $(P_2)$  tels que  $MK = 2MF$

nature de cette intersection :

$$MF = \frac{1}{2}MK \text{ et } MF = \frac{1}{2}d(M, \Delta)$$

cette intersection est donc l'ensemble des points de  $(P_2)$  tels que  $MK = 2MF$

nature de cette intersection :

$$MF = \frac{1}{2}MK \text{ et } MF = \frac{1}{2}d(M, \Delta)$$

et

$$\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0$$

$$\text{donc } \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0$$

$$\frac{d(MF)}{d(M, \Delta)} = \frac{1}{2}$$

$\iff M$  est un sommet de l'ellipse d'excentricité  $\frac{1}{2}$  dont un des foyer est  $F$  et la directrice  $\Delta$

**PROBLEME****PARTIE A**

1)  $\varphi$  est la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right), \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 0$$

a) Sur  $] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$   $\varphi$  est continue et dérivable comme composée de fonctions continues et dérivables.

Continuité de  $\varphi$  en 0

$$\varphi(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \text{ avec } t = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{or } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$$

d'où  $\varphi$  continue sur  $\mathbb{R}$

Dérivabilité de  $\varphi$  en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

car  $te^t$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $-\infty$

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$$

donc  $\varphi$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = 0$

d'où  $\varphi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$

b)

$$\text{Si } x = 0, 2\varphi(x) = 2\varphi(0) = 0$$

$$\text{Si } x = 0, x^3 \varphi'(x) = 0^3 \varphi'(0) = 0$$

$$\text{ainsi } 2\varphi(0) = 0^3 \varphi'(0) \quad (a)$$

$$\text{pour } x \neq 0 \quad \varphi'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'$$

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$$

ainsi  $x^3 \varphi'(x) = 2e^{-\frac{1}{x^2}}$ ,  $x \neq 0$

pour  $x \neq 0$ ,  $x^3 \varphi'(x) = 2\varphi(x)$  (b)

en regroupant les résultats (a) et (b) on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2\varphi(x) = x^3 \varphi'(x)$$

2) Variation de  $\varphi$

pour  $x \neq 0$ ,  $\varphi'(x) = \frac{2\varphi(x)}{x^3}$

$\varphi'(x)$  et  $x^3$  ont le même signe pour  $x \neq 0$

$2\varphi(x)$  garde un signe constant positif

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	$0$	$+$
$\varphi$	1	0	1

**Remarque :**  $\varphi$  est paire

**Recherche des points d'inflexion éventuels.**

$$2\varphi(x) = x^3 \varphi'(x) \text{ pour } x \neq 0$$

$$2\varphi'(x) = 3x^2 \varphi'(x) + x^3 \varphi''(x)$$

$$x^3 \varphi''(x) = 2\varphi'(x) - 3x^2 \varphi'(x)$$

$$x^3 \varphi''(x) = \frac{4\varphi(x)}{x^3} - 3x^2 \frac{2\varphi(x)}{x^3}$$

$$\varphi''(x) = \frac{2\varphi(x)}{x^6} (2 - 3x^2), \quad x \neq 0$$

**Etudions**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\varphi(x)}{x^3}}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\varphi(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

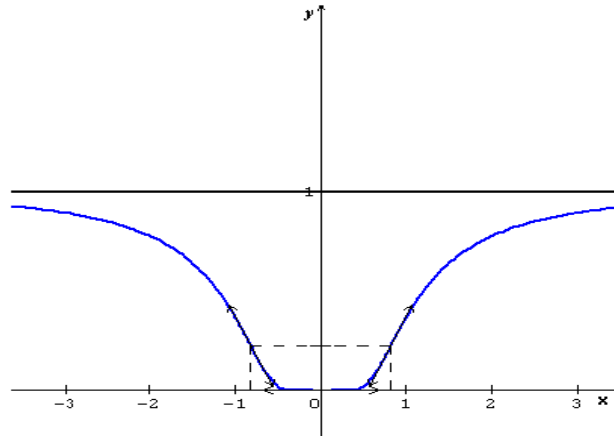
**donc**  $\varphi''(0) = 0$

**signe de  $\varphi''$**

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$0$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+$	$+$	$0$	$-$
$\varphi''(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$+$	$0$	$-$

donc on a deux points d'inflexion en  $A\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \varphi\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$  et  $B\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$

courbe de  $\varphi$



**PARTIE B**

$$f(x) = \frac{\int_0^x \varphi(t) dt}{\varphi(x)}; x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1)

a) Montrons que  $f$  est impaire sur  $R$

$f$  étant définie sur  $R$ , si  $x \in R$  alors  $-x \in R$

$$\text{si } x \neq 0 \quad f(-x) = \frac{\int_0^{-x} \varphi(t) dt}{\varphi(-x)}$$

or  $\varphi$  paire donc  $\varphi(-x) = \varphi(x)$

d'autre part  $\int_0^{-x} \varphi(t) dt$  en posant  $\int_0^x \varphi(t) dt$  on a  $du = -dt$

$$\int_0^{-x} \varphi(t) dt = \int_0^x \varphi(-u) du \text{ or } \varphi(-u) = \varphi(u)$$

$$\int_0^{-x} \varphi(t) dt = -\int_0^x \varphi(u) du \text{ ainsi } f(-x) = \frac{-\int_0^x \varphi(t) dt}{\varphi(x)}; x \neq 0$$

donc pour  $x \neq 0$ ,  $f(-x) = -f(x)$

$f$  est alors impaire sur  $R$ .

b)  $0 \leq t \leq x$

sur  $[0, x]$   $u \mapsto \varphi(u)$  est croissante

**donc**  $\varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x)$

**ce qui entraîne**  $\varphi(t) \leq \varphi(x)$

**la fonction**  $t \mapsto \varphi(t)$  **continue sur**  $[0, x], x > 0$

**par passage de l'intégrale de** à  $x$  **on obtient**

$$\int_0^x \varphi(t) dt \leq \int_0^x \varphi(x) dt$$

**donc**  $\int_0^x \varphi(t) dt \leq x\varphi(x);$  *pour*  $x > 0$

**c) pour**  $x > 0, \int_0^x \varphi(t) dt \geq 0$  **et**  $\varphi(x) > 0$

**donc**  $f(x) = \frac{\int_0^x \varphi(t) dt}{\varphi(x)} \geq 0$

**d'autre part pour**  $x > 0$

$$0 \leq \int_0^x \varphi(t) dt \leq x\varphi(x)$$

$$0 \leq \frac{\int_0^x \varphi(t) dt}{\varphi(x)} \leq x$$

**donc**  $0 \leq f(x) \leq x$

**or**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

**On en déduit que**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

**f étant impaire**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

**donc**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**or**  $f(0) = 0$

**ainsi**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

**f est alors continue en**

**2)**

**a) Pour**  $x = 0, 2J_n(0) = 0$

$$(n+3)J_{n+2}(0) = 0$$

$$0^{n+3}\varphi(0) = 0$$

**donc pour**  $x = 0$  **on a**  $2J_n(x) + (n+3)J_{n+2}(x) = x^{n+3}\varphi(x)$

**étudions le cas où**  $x \neq 0$

$$J_n(x) = \int_0^x t^n \varphi(t) dt \quad \varphi(t) = \frac{t^3}{2} \varphi'(t)$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^x t^{n+3} \varphi'(t) dt$$

**on pose :**

$$u = t^{n+3}, u' = (n+3)t^{n+2}$$

$$v' = \varphi'(t), v = \varphi(t)$$

$$2J_n(x) = \left[ t^{n+3} \varphi(t) \right]_0^x - \int_0^x (n+3)t^{n+2} \varphi(t) dt$$

$$2J_n(x) = x^{n+3} \varphi(x) - (n+3) \int_0^x t^{n+2} \varphi(t) dt$$

$$2J_n(x) + (n+3)J_{n+2}(x) = x^{n+3} \varphi(x)$$

**b) Pour**  $x > 0$  **Montrons que**  $J_n(x) \leq \frac{1}{2} x^{n+3} \varphi(x)$

**on a d'après 2) :**  $2J_n(x) = x^{n+3} \varphi(x) - (n+3)J_{n+2}(x)$

**or**  $-(n+3)J_{n+2}(x) \leq 0$  **donc**  $x^{n+3} \varphi(x) - (n+3)J_{n+2}(x) \leq x^{n+3} \varphi(x)$

**d'où**  $2J_n(x) \leq \frac{1}{2} x^{n+3} \varphi(x)$  **aussi**  $J_n(x) \leq \frac{1}{2} x^{n+3} \varphi(x)$

**Montrons que**  $J_{n+2}(x) \leq \frac{1}{(n+3)} x^{n+3} \varphi(x)$

**d'après la relation 2) :**  $(n+3)J_{n+2}(x) - x^{n+3} \varphi(x) = -2J_n(x)$

**or**  $-2J_n(x) \leq 0$  **donc**  $(n+3)J_{n+2}(x) - x^{n+3} \varphi(x) \leq 0$

**aussi**  $(n+3)J_{n+2}(x) \leq x^{n+3} \varphi(x)$

**d'où**  $J_{n+2}(x) \leq \frac{1}{(n+3)} x^{n+3} \varphi(x)$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ or } f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

d'où  $f$  est dérivable en  $0$  et  $f'(0) = 0$

3)

$$\text{a) pour } n = 0, \text{ on a } 2J_0(x) + 3J_2(x) = x^3 \varphi(x)$$

$$\text{pour } n = 2, \text{ on a } 2J_2(x) + 5J_4(x) = x^5 \varphi(x)$$

ainsi

$$J_2(x) = \frac{x^3 \varphi(x) - 2J_0(x)}{3}$$

$$\frac{2x^3 \varphi(x) - 4J_0(x)}{3} + 5J_4(x) = x^5 \varphi(x)$$

$$15J_4(x) + 2x^3 \varphi(x) - 4J_0(x) = 3x^5 \varphi(x)$$

$$J_0(x) = \frac{15}{4} J_4(x) + \left( \frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^5 \right) \varphi(x)$$

$$\text{b) } J_0(x) = f(x) \varphi(x)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{15}{4} \frac{J_4(x)}{\varphi(x)} + \frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^5$$

$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{15}{4} \frac{J_4(x)}{x^3 \varphi(x)} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} x^2$$

$$\text{or } 0 \leq \frac{J_4(x)}{x^3 \varphi(x)} \leq \frac{1}{5} x^2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{J_4(x)}{x^3 \varphi(x)} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2} \text{ or } x \mapsto \frac{f(x)}{x^3} \text{ paire}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

c) pour  $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\int_0^x \varphi(t) dt}{\varphi(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\int_0^x \varphi(t) dt\right)' \varphi(x) - \varphi(x)' \int_0^x \varphi(t) dt}{[\varphi(x)]^2}$$

or  $\left(\int_0^x \varphi(t) dt\right)' = \varphi(x)$

et  $2\varphi(x) = x^3 \varphi'(x)$

donc  $\varphi'(x) = \frac{2\varphi(x)}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) \times \varphi(x) - \frac{2\varphi(x)}{x^3} \int_0^x \varphi(t) dt}{[\varphi(x)]^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} \frac{\int_0^x \varphi(t) dt}{\varphi(x)}$$

ainsi  $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} f(x); x \neq 0$

ainsi  $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} f(x); x \neq 0$

or  $f'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \frac{2}{x^3} f(x)\right] \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

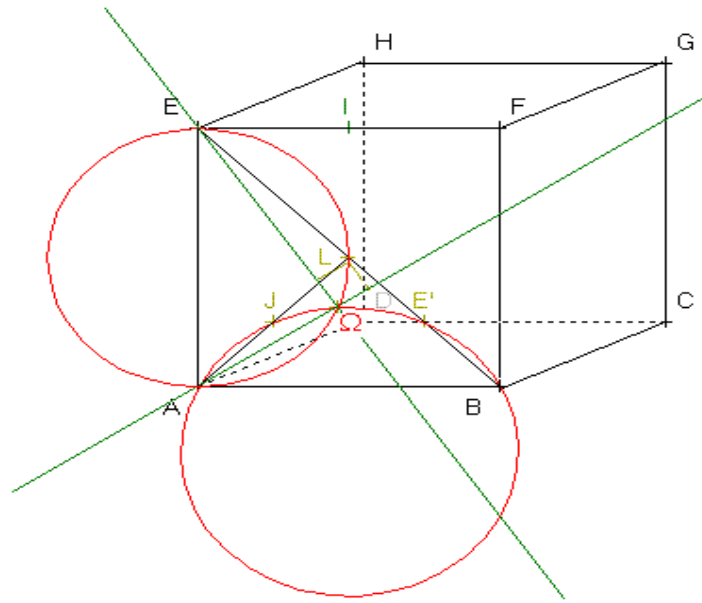
ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$

conclusion :  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$

$f'$  est continue en 0

**CORRECTION SESSION NORMALE 2004**

**EXERCICE 1**



$L$  centre de  $ABFE$

$J$  milieu de  $[AL]$

1) a)  $f(A) = L$

$f(B) = J$

angle  $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{LJ})$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{LJ}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{JL})$$

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{JL}) = (\overrightarrow{FE}, -\overrightarrow{FL})$$

$$\theta = (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FL}) - \pi$$

$$\theta = \frac{-3\pi}{4}$$

rapport  $k = \frac{LJ}{AB}$  avec  $AB = 1; LJ = \frac{1}{4}AF = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b)

$$f(A) = L$$

$$f(B) = J$$

$$f(E) = E'$$

$ABE$  rectangle isocèle en  $A$  et direct et  $f$  conserve les configurations donc  $LJE'$  rectangle isocèle en  $L$  et direct.

Donc  $E'$  milieu de  $[LB]$

détermination de  $f(F)$

Soit  $K$  milieu de  $[AB]$

$$\text{évaluons } \frac{LK}{AF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\left( \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{LK} \right) = \left( \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EA} \right)$$

$$\left( \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{LK} \right) = \left( \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EA} \right) - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{ainsi } \frac{LK}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } \left( \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{LK} \right) = -\frac{3\pi}{4}$$

donc  $f(F) = K$  avec  $K$  milieu de  $[AB]$

c)  $f(\Omega) = \Omega$  et  $f(A) = L$

$$\left( \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega L} \right) = \frac{-3\pi}{4} (2\pi)$$

$$\text{d'autre part } \left( \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EL} \right) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\text{donc } \left( \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega L} \right) + \pi = \left( \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EL} \right) (2\pi)$$

donc  $\Omega, A, L$  et  $E$  cocycliques

$$\text{d'autre part } f(\Omega) = \Omega \text{ et } f(B) = J \text{ donc } \left( \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega J} \right) = \frac{-3\pi}{4} (2\pi)$$

$$\text{or } \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ} \right) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ} \right) = \left( \overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega J} \right) + \pi (2\pi)$$

donc  $\Omega, A, B$  et  $J$  cocycliques

Construction de  $\Omega$

$$\Omega \in C(ALE) \text{ et } \Omega \in C(ABJ) \text{ et } \Omega \neq A$$

$\Omega$  est l'intersection de  $C(ALE)$  et  $C(ABJ)$  autre que  $A$

d) Montrons que  $(\Omega A) \perp (\Omega E)$

$$(\widehat{\overline{\Omega A}}, \widehat{\overline{\Omega E}}) = (\widehat{\overline{\Omega A}}, \widehat{\overline{\Omega L}}) + (\widehat{\overline{\Omega L}}, \widehat{\overline{\Omega E}})$$

$$\text{or } (\widehat{\overline{\Omega A}}, \widehat{\overline{\Omega L}}) = \frac{\pi}{4}(\pi) \text{ car } (\widehat{\overline{\Omega A}}, \widehat{\overline{\Omega L}}) = (\widehat{\overline{EA}}, \widehat{\overline{EL}})(\pi)$$

$$(\widehat{\overline{\Omega L}}, \widehat{\overline{\Omega E}}) = (\widehat{\overline{AL}}, \widehat{\overline{AE}}) = \frac{\pi}{4}(\pi)$$

$$\text{donc } (\widehat{\overline{\Omega A}}, \widehat{\overline{\Omega E}}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(\pi)$$

$$\text{ainsi } (\widehat{\overline{\Omega A}}, \widehat{\overline{\Omega E}}) = \frac{\pi}{2}(\pi)$$

2)

a) dans  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  repère orthonormé direct

$$\begin{array}{cccccc} A(0, 0, 0) & B(1, 0, 0) & D(0, 1, 0) & E(0, 0, 1) & C(1, 1, 0) \\ F(1, 0, 1) & G(1, 1, 1) & H(0, 1, 1) & I\left(1, \frac{1}{2}, 1\right) & L\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\overrightarrow{CL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IH} \wedge \overrightarrow{IB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{IH} \wedge \overrightarrow{IB} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{IH} \wedge \vec{IB} = \frac{-1}{2}\vec{i} - \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

donc  $\vec{CL} = \vec{IH} \wedge \vec{IB}$

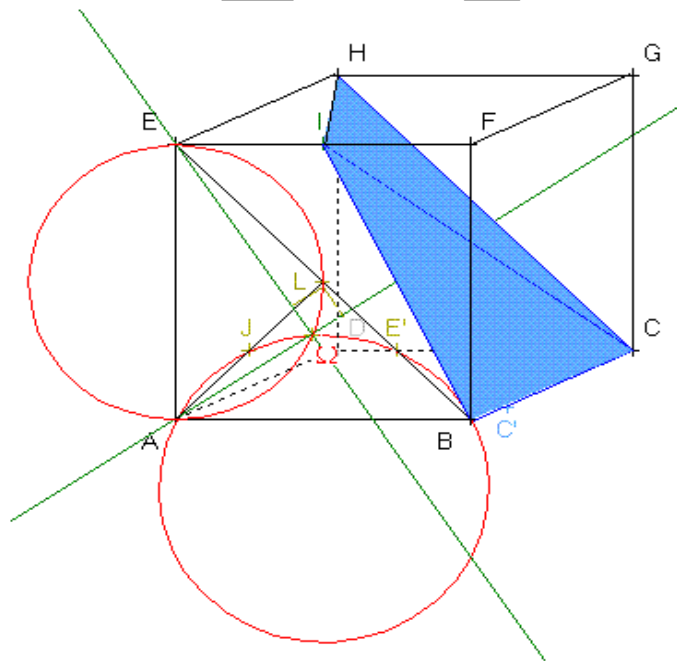
$$\text{Aire}(IHB) = \frac{1}{2} \|\vec{CL}\| \text{ unités cm}$$

$$\text{Aire}(IHB) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}}$$

$$\text{Aire}(IHB) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Aire}(IHB) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

b)



$$v(BCIH) = \frac{1}{6} |\vec{IC} \cdot (\vec{IH} \wedge \vec{IB})|_{uv}$$

$$v(BCIH) = \frac{1}{6} |\vec{IC} \cdot \vec{CL}|_{uv}$$

$$\vec{IC} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CL} \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$v(BCIH) = \frac{1}{6} |-1| uv$$

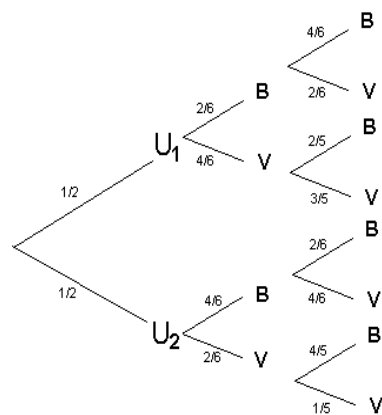
$$v(BCIH) = \frac{1}{6} uv$$

$$v = \frac{1}{3} A(IBH) \times d(C, BIH)$$

$$d = d(C, BIH) = \frac{3v}{A(IBH)}$$

$$d = \frac{3 \left( \frac{1}{6} \right)}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{3}{6} \times \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

**EXERCICE 2**



A est l'évènement « tirer 2 blanches »

$$p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

2) X est la variable aléatoire qui prend la valeur +1 si on obtient deux boules de même couleur et -1 pour deux boules de couleurs distinctes.

$p(X = 1) = p(A) + p(B)$  où B est l'évènement « tirer 2 verts »

$$p(X = 1) = \frac{2}{9} + \frac{7}{30} = \frac{41}{90}$$

$$p(X = -1) = 1 - p(X = 1) = \frac{49}{90}$$

$$E(X) = E(X) = (-1) \times \frac{49}{90} + 1 \times \frac{41}{90} = \frac{-4}{45}$$

$$v(X) = (-1)^2 \times \frac{49}{90} + 1^2 \times \frac{41}{90} - [E(X)]^2$$

$$v(X) = (-1)^2 \times \frac{49}{90} + 1^2 \times \frac{41}{90} - \left[ \frac{4}{45} \right]^2 = \frac{49}{90} + \frac{41}{90} - \frac{16}{2025} = \frac{2009}{2025} = 0,992$$

et  $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2009}{2025}} = 0,996$

$$\sqrt{0,99210} = 0,99604$$

3)

Y suit une loi binomiale de paramètres  $\frac{41}{90}$  et 5

$Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $\frac{41}{90}$  et 5

$$P(Y = 4) = 5 \times \left(\frac{41}{90}\right)^4 \times \left(\frac{49}{90}\right) =$$

$$P(Y = 4) \approx 0,2$$

$$E(Y) = 5 \times \frac{41}{90} = \frac{41}{18}$$

$$V(Y) = 5 \times \frac{41}{90} \times \left(1 - \frac{41}{90}\right) = \frac{2009}{1620}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{2009}{1620}} = 1,114$$

### EXERCICE 3

$$u_n = 2 + 2 \sum_1^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\text{Or } \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 (-t^2)^k dt$$

$$\text{donc } u_n = 2 \int_0^1 (-t^2)^0 dt + 2 \sum_1^n \int_0^1 (-t^2)^k dt = 2 \int_0^1 \left( \sum_0^n (-t^2)^k \right) dt$$

$$\text{Or } \sum_0^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} = \frac{1 + (-1)^n t^{2n+2}}{1 + t^2}$$

$$\text{donc } u_n = \int_0^1 2 \left( \frac{1 + (-1)^n t^{2n+2}}{1 + t^2} \right) dt$$

$$u_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

$$\left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1$$

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$$

d'où  $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$

donc  $\left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq 2 \int_0^1 x^{2n+2} dx$

Or

$$\int_0^1 t^{2n+2} dt = \left[ \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+3}$$

d'où  $\left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+3}$

2)

Soit  $J = \int_0^1 \varphi(x) dx$  avec  $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$F'(x) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 0$$

$$G(v) = F(\tan v)$$

a)

Montrer que G dérivable sur  $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$v \mapsto \tan v$  dérivable sur  $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et \(\forall v\) valeurs dans  $\mathbb{R}$

or  $x \mapsto F(x)$  dérivable sur  $\mathbb{R}$

donc par composition  $v \mapsto F(\tan v)$  dérivable sur  $\mathbb{R}$

Calcul de  $G'(v)$

$$G'(v) = (\tan v)' \times F'(\tan v)$$

$$G'(v) = (1 + \tan^2 v) \varphi(\tan v) \text{ avec } \varphi(\tan v) = \frac{1}{1 + \tan^2 v}$$

donc  $G'(v) = 1$

donc  $G(v) = v + c$

avec  $G(0) = F(\tan 0) = 0$

donc  $0 + c = 0$  soit  $c = 0$

$$G(v) = v$$

b)

$$J = F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)$$

$$J = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

donc  $\left|u_n - \frac{2 \times \pi}{4}\right| \leq \frac{2}{2n+3}$

ainsi  $\left|u_n - \frac{2 \times \pi}{4}\right| \leq \frac{2}{2n+3}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2n+3} = 0$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$

**PROBLEME**

**PROBLEME**

1)

a) Montrons que  $F_a$  admet deux points invariants

$$\text{Inv} F_a = \{M \in P \setminus \{A\} / F_a(M) = M\}$$

$$F_a(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{az-1}{a-z} \Leftrightarrow az - z^2 = az - 1 \text{ donc } z^2 = 1$$

d'où  $z = 1$  ou  $z = -1$

$$\text{Inv} F_a = \{I(1), J(-1)\}$$

b) Montrons que  $F_a$  est une bijection

$$Mf(Z) = M(z)$$

$$Z = \frac{az-1}{a-z} \Leftrightarrow Za - Zz = az - 1$$

donc  $z(a+Z) = Za - 1$

Si  $Z \neq -a$  c'est à dire  $Mf \neq B$

on a  $z = \frac{Za + 1}{a + Z}$  est unique

Ainsi  $F_a$  est une bijection de  $P \setminus \{A\}$  vers  $P \setminus \{B\}$

notons  $F_a^{-1}$  sa bijection réciproque

Montrons que  $F_a^{-1} = F_{-a}$

$$F_a^{-1}(z) = \frac{za + 1}{a + z}$$

$$F_{-a}(z) = \frac{(-a)z - 1}{-a - z} = \frac{+az + 1}{a + z}$$

$$F_a^{-1}(z) = F_{-a}(z) \text{ pour } z \neq -a$$

ainsi  $F_a^{-1} = F_{-a}$

2)

a) Vérifions que  $(Z + a)(z - a) = 1 - a^2$

posons  $p = (Z + a)(z - a)$

$$p = \left( \frac{az - 1}{a - z} + a \right) (z - a)$$

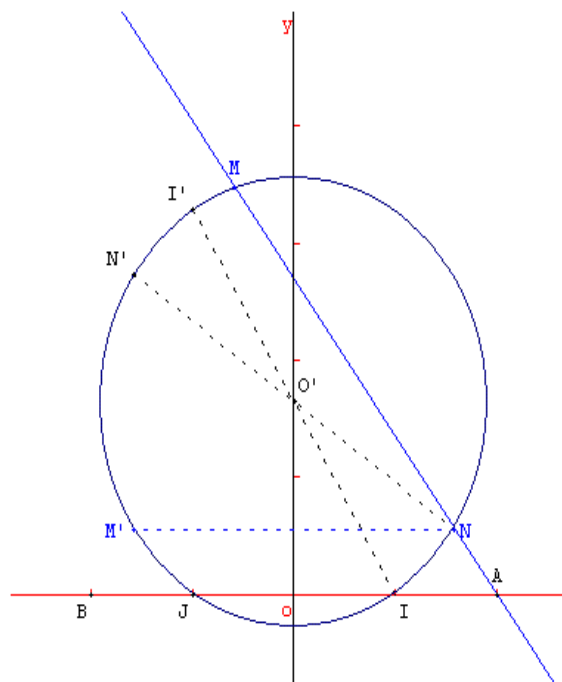
$$p = \frac{(az - 1 + a^2 - az)}{(a - z)} (z - a)$$

$$p = \frac{(a^2 - 1)}{(a - z)} (z - a) \text{ or } z \neq a$$

donc  $p = 1 - a^2$

ainsi  $(Z + a)(z - a) = (1 - a^2)$

b)



Montrons que  $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \vec{AI} \cdot \vec{AJ}$

soit  $N'$  symétrique par rapport au centre du cercle  $(C)$  de  $N$  avec  $O'$  centre de  $(C)$ .

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = (\vec{AN'} + \vec{N'M}) \cdot \vec{AN}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \vec{AN'} \cdot \vec{AN} + \vec{N'M} \cdot \vec{AN}$$

Or  $\vec{N'M} \perp \vec{AN} \rightarrow \vec{N'M} \cdot \vec{AN} = 0$

donc  $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \vec{AN'} \cdot \vec{AN}$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = (\vec{AO'} + \vec{O'N'}) \cdot (\vec{AO'} + \vec{O'N})$$

Or  $\vec{O'N'} = -\vec{O'N}$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = (\vec{AO'} + \vec{O'N'}) \cdot (\vec{AO'} - \vec{O'N'})$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = AO'^2 - O'N'^2$$

$O'N' = r =$  rayon du cercle  $(C)$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = AO'^2 - r^2$$

évaluons  $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = ?$

Soit  $I'$  le point diamétralement opposé à  $I$  sur  $(C)$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{AI'} + \overrightarrow{I'IJ})$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI'} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{I'IJ} \text{ avec } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{I'IJ} = 0$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI'}$$

$$\text{par analogie } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{O'I}^2 - r^2$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$$

c)

$$\vec{U}_1(z_1) \quad \vec{U}_2(z_2)$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ avec } x_1 \text{ et } y_1 \text{ réels}$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \text{ avec } x_2 \text{ et } y_2 \text{ réels}$$

$$\vec{u}_1(z_1) \text{ et } \vec{u}_2(z_2) \text{ colinéaires donc } x_1y_2 - y_1x_2 = 0$$

évaluons alors  $z_1 \bar{z}_2$

$$z_1 \bar{z}_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$z_1 \bar{z}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2) \text{ avec } x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

$$\text{donc } z_1 \bar{z}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$z_1 \bar{z}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$$

La réciproque est facile à établir

$$\text{En déduire que } (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = |z - a|^2$$

$$\text{On a déjà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{AM} = (z - a) \quad \overrightarrow{AN} = (\bar{z} - \bar{a})$$

$$\overrightarrow{AI} = (1 - a) \quad \overrightarrow{AJ} = (-1 - a)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = (z - a)(\bar{z} - \bar{a})$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = (1 - a)(-1 - a) = a^2 - 1$$

$$\text{donc } (z - a)(\bar{z} - a) = a^2 - 1$$

Montrons que  $M'$  est le symétrique de  $N$  par rapport à l'axe des ordonnées

$$\text{On a } (Z + a)(Z - a) = 1 - a^2$$

$$\text{donc } (Z - a)(\bar{Z} - a) = -(Z + a)(Z - a)$$

pour  $Z \neq a$

$$\bar{Z} - a = -Z - a$$

$$\bar{Z} = -Z$$

donc  $M'$  et  $N$  sont symétriques par rapport à  $Oy$ .

3)

a) Construction de  $M'$

$(AM)$  recoupe  $(C)$  en  $N$  et  $M'$  est le symétrique de  $N$  par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Image par  $F_a$  d'un cercle contenant  $I$  et  $J$

Si  $M \in (C)$  alors  $M' \in (C) \setminus$

$$\text{donc } F_a(C) \subseteq (C) \quad (1)$$

Réciproquement soit  $M' \in (C)$  soit  $N = S_{(Oy)}(M')$

donc  $N \in (C)$

la droite  $(AN)$  coupe  $(C)$  en  $M$  tel que  $F_a(M) = M'$

$$\text{ainsi } (C) \subseteq F_a(C) \quad (2)$$

en regroupant (1) et (2) on obtient  $F_a(C) = (C)$

4)

a)

$$g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{ax - 1}{a - x}$$

$g$  dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  comme rapport des fonctions dérivables.

$$g'(x) = \frac{a^2 - 1}{(a - x)^2} > 0$$

tableau de variation de  $g$

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g$	$-a$ ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗ $-a$

En déduire  $F_a([J,I])$

On a  $g$  est strictement croissante sur  $[-1, 1]$

or  $F_a(J) = J$  et  $F_a(I) = I$

donc  $F_a([J,I]) = [J,I]$

Image par  $F_a \setminus$  de l'axe des abscisses privée de  $A$

On a  $g(]-\infty, a]) = ]-a, +\infty[$

et  $g(]a, +\infty[) = ]-\infty, -a[$

d'où l'image par  $F_a \setminus$  de l'axe des abscisses privée de  $A$  est l'axe des abscisses privé de  $B$

b)

$$C\left(\frac{-1}{a}\right)$$

$$\text{On a } \frac{Z + \frac{1}{a}}{Z + a} = \frac{Z + \frac{1}{a}}{Z + a} = \frac{a(az - 1) + a - z}{az - 1 + a^2 - az} \times \frac{1}{a}$$

$$\frac{Z + \frac{1}{a}}{Z + a} = \frac{a^2z - z}{a^2 - 1} = \frac{z(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)} \times \frac{1}{a}$$

$$\frac{Z + \frac{1}{a}}{Z + a} = \frac{z}{a}$$

$$\text{donc } \arg\left(\frac{Z + \frac{1}{a}}{Z + a}\right) = \arg(z)$$

c)(D) une droite passant par  $O$  et distinct de  $(Ox)$

soit  $M(z) \in (D)$  alors  $\arg(z) = \theta$  ou  $\arg(z) = -\theta$  avec  $\theta \in ]0, \pi[$

$$\text{or } \arg\left(\frac{Z + \frac{1}{a}}{Z + a}\right) = \arg(z)$$

$$\text{donc } (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'C}) = \theta(2\pi) \text{ ou } (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'C}) = -\theta(2\pi)$$

donc  $M'$  décrit un cercle passant par  $B$  et  $C$  privé de  $B$  et  $C$

Cas où  $(D) = (Oy)$

$$\text{alors } (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'C}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ ou } (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'C}) = \frac{-\pi}{2}(2\pi)$$

donc  $M'$  décrit le cercle de diamètre  $[BC]$  privé de  $B$  et  $C$

5)  $(\Gamma_r)$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$

a)

$$M \in (\Gamma_r) \Leftrightarrow OM = r.$$

$$\text{On a } \frac{Z + \frac{1}{a}}{Z + a} = \frac{z}{a}$$

$$\frac{|Z + \frac{1}{a}|}{|Z + a|} = \frac{|z|}{|a|} \text{ or } |z| = OM = r \text{ et } |a| = a$$

$$\text{donc } \frac{M'C}{M'B} = \frac{r}{a}$$

b)

$$\text{Si } r \neq a, \frac{M'C}{M'B} = k, k > 0, k \neq 1 \text{ et } k = \frac{r}{a}$$

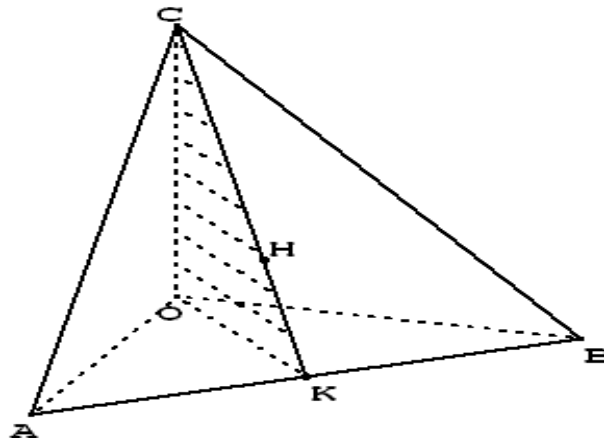
$M'$  décrit le cercle de diamètre  $[SR]$  avec  $S$  barycentre de  $(C(1), B(k))$  et  $R$  barycentre de  $(C(-1), B(k))$

c)

$$\text{si } r = a, M'B = M'C$$

$M'$  décrit la médiatrice de  $[BC]$  l'image de  $(\Gamma_a)$  est la médiatrice de  $[BC]$ .

Si  $r \neq a$ , l'image de  $(\Gamma_a)$  est le cercle de diamètre  $[SR]$

**CORRECTION SESSION NORMALE 2005****EXERCICE 1**

1) Les droites  $(OC) \perp (OA)$  car  $OAC$  rectangle en  $O$

de même  $(OC) \perp (OB)$ .

On a  $(OA)$  et  $(OB)$  sécantes en  $O$

donc  $(OC)$  perpendiculaire au plan  $(OAB)$

or la droite  $(AB)$  est incluse dans le plan  $(OAB)$  d'où  $(OC)$  orthogonale à  $(AB)$

Par un procédé analogue on établit que  $(OA)$  orthogonale à  $(BC)$  et  $(OB)$  orthogonale à  $(AC)$ .

donc  $(OC)$  perpendiculaire au plan  $(OAB)$

or la droite  $(AB)$  est incluse dans le plan  $(OAB)$  d'où  $(OC)$  orthogonale à  $(AB)$

Par un procédé analogue on établit que  $(OA)$  orthogonale à  $(BC)$  et  $(OB)$  orthogonale à  $(AC)$ .

2)

a)  $H$  étant le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(ABC)$  alors  $(OH) \perp (ABC)$

or  $(AB) \subseteq (ABC)$  donc  $(OH) \perp (AB)$

et  $(AB) \perp (OC)$

Ainsi  $(AB) \perp (OC)$  et  $(AB) \perp (OH) \Rightarrow (AB) \perp (OCH)$

b)  $(AB) \perp (OCH)$  et  $(CH) \perp (OCH) \Rightarrow (AB) \perp (CH)$  (1)

D'autre part  $(OB) \perp (AC)$  et  $(OH) \perp (AC)$   $(AC) \perp (OBH)$

or  $(BH)$  incluse dans  $(OBH)$  d'où  $(AC) \perp (BH)$  (2)

En regroupant les résultats (1) et (2) on obtient :

$(AC) \perp (BH)$  et  $(AB) \perp (CH)$  d'où  $H$  est l'orthocentre de  $(ABC)$

c)  $(AB) \perp (OCH)$  or  $(OCH) = (OCK)$  donc  $(AB) \perp (OK)$

D'où (OK) est une hauteur du triangle (OAB)

Calculons l'aire du triangle OAB de deux façons

$$\text{Aire} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{OK \times AB}{2} \text{ d'où } OA^2 \times OB^2 = OK^2 \times AB^2$$

$$\text{or } AB^2 = OA^2 + OB^2 \text{ ainsi } OA^2 \times OB^2 = OK^2 (OA^2 + OB^2)$$

$$\text{d'où } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

### **EXERCICE 2**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_n - 2u_{n-1} = 2n + 3$

1)  $v_n = u_n + 2n + b$

$$v_n = 2u_{n-1} + 4n + b + 3$$

$$v_{n-1} = u_{n-1} + 2n + b - 2$$

$$v_n = 2 \left[ u_{n-1} + 2n + \frac{b+3}{2} \right]$$

Par identification on obtient  $\frac{b+3}{2} = b - 2$  d'où  $b = 7$

$$v_0 = u_0 + 2(0) + 7 = 8$$

$$q = 2 \text{ et } v_0 = 8$$

2)

$$v_n = v_0 \times q^n \text{ donc } v_n = 8 \times 2^n \text{ or } 8 = 2^3$$

$$v_n = 2^{n+3}$$

$$u_n = v_n - (2n + 7)$$

$$u_n = 2^{n+3} - 2n - 7$$

3)

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

$$S_n = v_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_n = 8(2^{n+1} - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$$

$$S_n \geq 2005$$

$$2^3(2^{n+1} - 1) \geq 2005$$

$$2^{n+4} \geq 2013$$

$$\ln(2^{n+4}) \geq \ln(2013)$$

$$n + 4 \geq \frac{\ln(2013)}{\ln 2}$$

$$n \geq -4 + \frac{\ln(2013)}{\ln 2}$$

$$n_0 = E\left(-4 + \frac{\ln(2013)}{\ln 2}\right) + 1 = 7$$

$$n_0 = 7$$

4)

$$u_k = 2^{n+3} - (2k + 7)$$

$$T_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n v_k - \sum_{k=0}^n 2k + 1$$

$$T_n = S_n - \frac{n+1}{2}(7 + 2n + 7)$$

$$T_n = 8(2^{n+1} - 1) - (n+1)(7+n)$$

$$T_n = 8(2^{n+1} - 1) - (n^2 + 8n + 7)$$

$$T_n = n^2 \left[ 8 \left( \frac{2^{n+1}}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) - \left( 1 + \frac{8}{n} + \frac{7}{n^2} \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$$

**PROBLEME**

## PARTIE A

1)

$$(E) : y'' + 2ay' + a^2y = 0$$

Soit l'équation associée à (E)

$$r^2 + 2ar + a^2 = 0$$

$$(r + a)^2 = 0 \text{ donc } r = -a$$

les fonctions solutions  $x \mapsto g(x) = (C_1x + C_2)e^{-ax}$ 

2)

$$g(x) = (C_1x + C_2)e^{-ax}$$

$$g'(x) = C_1e^{-ax} - ag(x)$$

$$g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = c \iff C_2 = 0 \text{ et } C_1 = c$$

## PARTIE B

†

$$f_a(x) = xe^{-ax+1}$$

1)

$$\text{Evaluons } f_a(-x) = -xe^{-ax+1} \quad (1)$$

$$\text{Evaluons } -f_{-a}(x) = -[xe^{-(a)x+1}]$$

$$-f_{-a}(-x) = -xe^{-ax+1} \quad (2)$$

En confrontons (1) et (2) on obtient

$$f_a(-x) = -f_{-a}(-x)$$

En déduire une transformation permettant d'obtenir  $(C_{-a})$  à partir de  $(C_a)$ 

$$f_a(x) = -f_{-a}(x)$$

$$(C_{-a}) = S_0(C_a)$$

 $(C_{-a})$  est l'image de  $(C_a)$  par la symétrie de centre l'origine O du repère.

2)

$$f_a(x) = \frac{1}{a} f_1(ax) \text{ facile à établir}$$

posons  $ax = t$  et  $y = f_a(x)$  on obtient  $x = \frac{1}{a}t$  et  $y = \frac{1}{a}f_1(t)$

donc  $(C_a)$  est l'image de  $(C_1)$  par l'homothétie centrée en l'origine du repère et de rapport  $\frac{1}{a}$ .

3)

$$f_0(x) = xe$$

$f_0$  est strictement croissante sur  $R$

$$f_1(x) = xe^{-x+1} \quad f'_1(x) = e^{-x+1}(1-x)$$

tableau de variation de  $f_1$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	$0$	$-$
$f_1$	$-\infty$	$1$	$0$

4)

a) Les points fixes sont les points communs aux courbes  $(C_a)$  lorsque  $a$  décrit  $R$

$$(C_{a+1}) : f_{a+1}(x) = xe^{-(a+1)x+1}$$

$$f_{a+1}(x) = xe^{-ax+1}e^{-x}$$

posons  $f_{a+1}(x) - f_a(x) = 0$

$$xe^{-ax+1}e^{-x} - xe^{-ax+1} = 0$$

$$xe^{-ax+1}(e^{-x} - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad f_a(0) = 0$$

le point fixe commun à toutes les courbes  $(C_a)$  est l'origine  $O$  du repère.

$$b) E = \{M(x, y) / xy > 0\}$$

$$y = xe^{-ax+1}$$

$$\frac{y}{x} = e^{-ax+1}$$

$$e^{-1} \frac{y}{x} = e^{-ax}$$

$$-ax = \ln \frac{y}{xe}$$

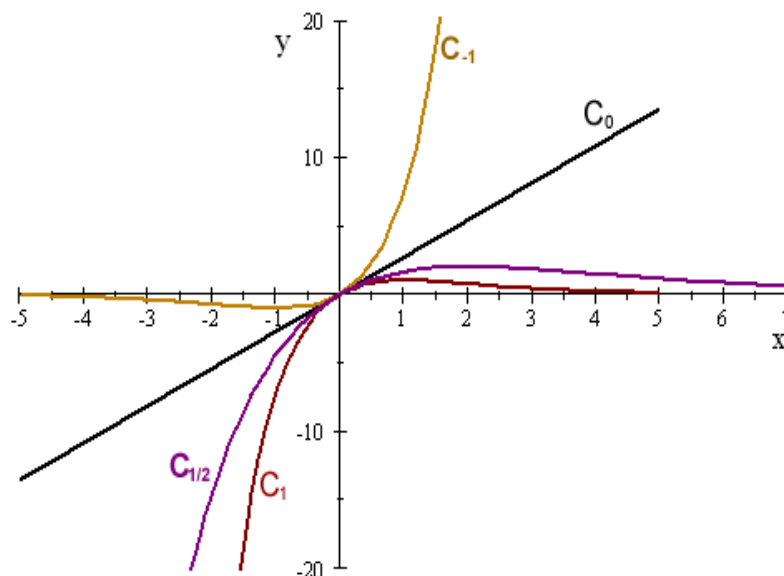
$$ax = \ln \frac{xe}{y}$$

$$a = \frac{1}{x} \ln \frac{xe}{y}$$

pour tout couple  $(x, y)$  de  $E$  il existe un unique réel  $a$

5)  $(C_{-1})$  est l'image de  $(C_1)$  par la symétrie centrale de centre  $O$

$(C_{\frac{1}{2}})$  est l'image de  $(C_1)$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 2.



### PARTIE C

$$I_a = \int_0^1 f_a(x) dx$$

1)

La fonction  $x \mapsto f_a(x)$  est continue et xxx sur  $[0, 1]$

donc  $I_a u_a = \int_0^1 f_a(x) dx \times u_a$  est l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation  $x = 0$ ,  $x = 1$ , l'axe des abscisses et  $(C_a)$

2)

$$I_a = \int_0^1 x e^{-ax+1} dx$$

par intégration par partie

$$u = x \quad v' = e^{-ax+1}$$

$$u' = 1 \quad v = \frac{1}{-a} e^{-ax+1}$$

$$I_a = \left[ \frac{-x}{a} e^{-ax+1} \right]_0^1 + \frac{1}{a} \int_0^1 e^{-ax+1} dx$$

$$I_a = \left[ \frac{-x}{a} e^{-ax+1} - \frac{1}{a^2} e^{-ax+1} \right]_0^1 = \frac{-1}{a} e^{-a+1} - \frac{1}{a^2} e^{-a+1} + \frac{e}{a^2}$$

$$I_a = \frac{e}{a^2} [1 - (a+1)e^{-a}]$$

$$I_a = \frac{e}{a^2} [1 - (a+1)e^{-a}]$$

3)

$$f_a(x) = x e^{-ax+1}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-a \leq -ax \leq 0$$

$$1-a \leq -ax+1 \leq 1$$

$$e^{1-a} \leq e^{-ax+1} \leq e$$

$$x e^{1-a} \leq x e^{-ax+1} \leq x e$$

$$\int_0^1 x e^{1-a} dx \leq I_a \leq \int_0^1 x e dx$$

$$\left[ \frac{x^2}{2} e^{1-a} \right]_0^1 \leq I_a \leq \left[ \frac{x^2 e}{2} \right]_0^1$$

$$\frac{e^{1-a}}{2} \leq I_a \leq \frac{e}{2}$$

**CORRECTION SESSION NORMALE 2006**

1) On considère l'équation différentielle  $y'' + y' = \frac{e^{-x} \cos(x)}{2 + \sin x}$  (E).

On pose  $g(x) = e^x f(x)$ ,  $f$  étant une fonction numérique dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

a) Montrons que  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $g'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$

On suppose que  $f$  est solution de (E), montrons que  $g'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$ .

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$$

$$\text{Donc } f(x) + f'(x) = e^{-x} g'(x) = e^{-x} \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$$

$$\text{d'où } g'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}.$$

On suppose que  $g'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$ , montrons que  $f$  est solution de (E).

$$\frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)} = g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$$

$$\text{donc } f(x) + f'(x) = \frac{e^{-x} \cos(x)}{2 + \sin(x)}$$

$f$  est alors solution de (E).

b)

Déterminons la solution générale de (E).

on a  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $g'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$ .

$$g'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)} = \frac{(2 + \sin(x))'}{2 + \sin(x)}, \text{ donc } g(x) = \ln(2 + \sin(x)) + c.$$

$$\text{or } f(x) = e^{-x} g(x)$$

$$\text{donc } f(x) = e^{-x} \ln(2 + \sin(x)) + c e^{-x}$$

Déterminons la solution de (E) qui s'annule en 0.

$$f(0) = 0 \text{ donne } \ln 2 + c = 0, \text{ donc } c = -\ln 2$$

la solution qui s'annule en 0 est  $f(x) = e^{-x} \ln(2 + \sin(x)) - e^{-x} \ln 2$

$$f(x) = e^{-x} \ln \left( \frac{2 + \sin x}{2} \right)$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe ( $\Gamma$ ) d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin(t)) \\ y(t) = \ln(2 + \cos(t)) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

a) comparons  $M(t)$  et  $M(t + 2\pi)$

$$\begin{cases} x(t + 2\pi) = \ln(2 + \sin(t + 2\pi)) = x(t) \\ y(t + 2\pi) = \ln(2 + \cos(t + 2\pi)) = y(t) \end{cases}$$

donc  $M(t) = M(t + 2\pi)$

comparons  $M(t)$  et  $M(-t + \frac{\pi}{2})$

$$\begin{cases} x(-t + \frac{\pi}{2}) = \ln(2 + \sin(-t + \frac{\pi}{2})) = \ln(2 + \cos(t)) = y(t) \\ y(-t + \frac{\pi}{2}) = \ln(2 + \cos(-t + \frac{\pi}{2})) = \ln(2 + \sin(t)) = x(t) \end{cases}$$

$$M(-t + \frac{\pi}{2}) = S_{\Delta}(M(t))$$

où  $\Delta$  est la première bissectrice

donc  $M(-t + \frac{\pi}{2})$  et  $M(t)$  sont symétriques par rapport à la symétrie orthogonal d'axe la première bissectrice.

b) pour tout  $M \in (\Gamma)$ ,  $S_{\Delta}(M) = M(-t + \frac{\pi}{2}) \in (\Gamma)$ , donc la symétrie orthogonal d'axe la première bissectrice conserve  $(\Gamma)$ .

on a vu que  $M(t) = M(t + 2\pi)$  donc, on peut étudier  $(\Gamma)$  sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , soit  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi[$  et obtenir toute la courbe  $(\Gamma)$ .

On a également un axe de symétrie  $\Delta$  pour  $(\Gamma)$ , ce qui permet de réduire l'étude de  $(\Gamma)$  à un intervalle de longueur  $\pi$ ,

soit  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi[$

d'où pour construire  $(\Gamma)$ , il suffit d'étudier  $x$  et  $y$  dans  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi[ = [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$

c) tableau de variations des fonctions  $x$  et  $y$  dans  $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$ .

$$x(t) = \ln(2 + \sin t)$$

la fonction  $x$  est dérivable sur  $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$  et on a :

$$x'(t) = \frac{\cos t}{2 + \sin t}$$

$$y(t) = \ln(2 + \cos t)$$

la fonction  $y$  est dérivable sur  $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$  et on a :

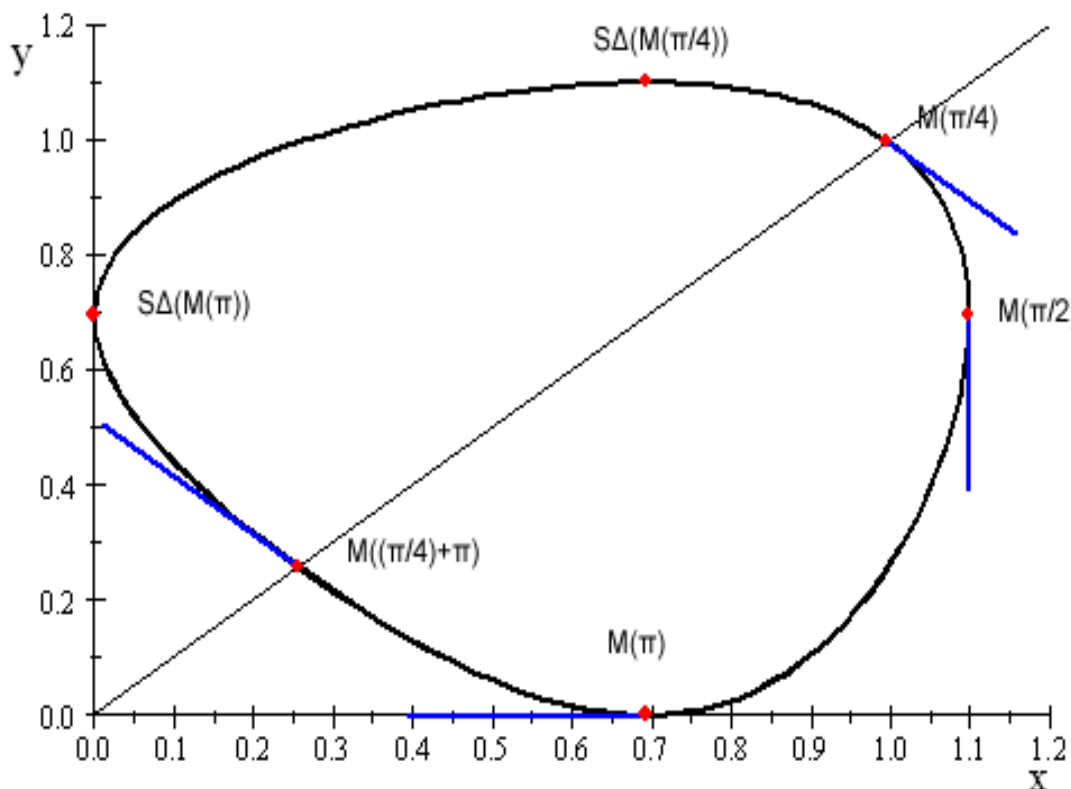
$$y'(t) = \frac{-\sin t}{2 + \cos t}$$

$t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{4} + \pi$
$x'(t)$		+	0	-
$y'(t)$		-	-	0
$x(t)$	$\ln \frac{(4+\sqrt{2})}{2}$	$\nearrow \ln 3$	$\searrow \ln 2$	$\searrow \ln \frac{(4-\sqrt{2})}{2}$
$y(t)$	$\ln \frac{(4+\sqrt{2})}{2}$	$\searrow \ln 2$	$\searrow 0$	$\nearrow \ln \frac{(4-\sqrt{2})}{2}$

Courbe de  $(\Gamma)$  :

On construit  $M(t)$  pour  $t$  appartenant à  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right]$

puis on utilise la symétrie par rapport à  $\Delta$  pour compléter la courbe



**EXERCICE 2**

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.

1) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne.

$X$  est la variable aléatoire qui a chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées.

Déterminons la loi de probabilité de  $X$ .

on a  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

on tire au hasard simultanément 2 boules parmi 6 donc  $Card\Omega = C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

$(X = 0)$  est l'évènement ne pas avoir de boule verte parmi les 2 boules tirées.

$$Card(X = 0) = C_2^2 = 1, P(X = 0) = \frac{1}{15}.$$

$(X = 1)$  est l'évènement obtenir une boule verte parmi les 2 boules tirées.

$$Card(X = 1) = C_4^1 \times C_2^1 = 4 \times 2 = 8, P(X = 1) = \frac{8}{15}$$

$(X = 2)$  est l'évènement, les 2 boules tirées sont vertes.

$$Card(X = 2) = C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6, P(X = 2) = \frac{6}{15}$$

on obtient :

$k$	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

Calculons l'espérance mathématique de  $X$ .

$$\text{On a } E(X) = \sum_{i=0}^n x_i \times p_i,$$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = \frac{14}{15}.$$

2) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne.

Soient  $A, B, C$  et  $D$  les évènements suivants :

$A$  : « Aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules »

$B$  : "Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules"  $C$  : «Deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules»  $D$  : «Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules"

a) Calculons  $P(D/A)$ ,  $P(D/B)$  et  $P(D/C)$ .

$$P(D/A) = 0$$

$$P(D/B) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \frac{1}{2}$$

$$P(D/C) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}$$

b) On en déduit la probabilité des évènements  $D \cap A$ ,  $D \cap B$ ,  $D \cap C$ .

On a :

$$P(D/A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = 0, \text{ donc } P(D \cap A) = 0$$

$$P(D/B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)}, \text{ donc } P(D \cap B) = P(B)P(D/B) = \frac{8}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$$

$$\text{d'où } P(D \cap B) = \frac{4}{15}$$

$$P(D/C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}, \text{ donc } P(D \cap C) = P(C)P(D/C) = \frac{6}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

$$\text{d'où } P(D \cap C) = \frac{4}{15}$$

Calculons  $P(D)$ .

$$\text{On a } D = D \cap (A \cup B \cup C) = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$$

Or  $D \cap A$ ,  $D \cap B$  et  $D \cap C$  sont 2 à 2 disjoints

$$\text{donc } P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$P(D) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

**PROBLEME****Partie A**

$$1) H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

a) La fonction  $t \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc elle y admet des primitives. Soit  $L$  l'une d'entre elles.

$$\text{Donc } H(x) = L(x) - L(0),$$

donc  $H$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$H'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$b) (H \circ \tan)'(x) = (\tan x)' \times \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$$

$$\text{Ainsi } (H \circ \tan)(x) = x + c$$

$$(H \circ \tan)(0) = 0 + c \text{ or } \tan 0 = 0 \text{ et } H(0) = 0 \text{ d'où } c = 0$$

$$\text{Ainsi } (H \circ \tan)(x) = x, x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ avec } (H \circ \tan)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2) a)  $G$  dérivable sur  $]0, +\infty[$

$F$  dérivable sur  $]0, +\infty[$

$g$  dérivable sur  $]0, +\infty[$

$$F'(x) = g'(x) - g'(x) \times H \circ g(x)$$

$$F'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} - \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} \times \frac{1}{1+g^2(x)}$$

$$\text{d'où } F'(x) = \sqrt{e^{2x}-1}$$

$$\text{or } G'(x) = g(x)$$

$$\text{On en déduit que } F'(x) = G'(x)$$

$$b) F'(x) = G'(x)$$

$$\text{donc } G(x) = F(x) + c$$

$$G(0) = 0 \text{ et } F(0) = g(0) - H \circ g(0) = 0$$

$$\text{entraîne } c = 0$$

$$\text{d'où } G(x) = F(x)$$

$$G(\ln \sqrt{2}) = F(\ln \sqrt{2}) = g(\ln \sqrt{2}) - H \circ g(\ln \sqrt{2})$$

$$g(\ln \sqrt{2}) = \sqrt{e^{2 \ln \sqrt{2}} - 1} = 1$$

$$G(\ln \sqrt{2}) = 1 - H(1) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I = 1 - \frac{\pi}{4}$$

**Partie B**

1)a)  $f'(x) = 2e^{2x} \quad e^{2x} = \frac{1}{2}f'(x) \quad f(x) = e^{2x} - 1 \quad e^{2x} = 1 + f(x) = \frac{1}{2}f'(x) = 1 + f(x)$

d'où  $f'(x) = 2[1 + f(x)]$

b)  $I_{n+2} = \int_0^{\ln \sqrt{2}} [f(x)]^{\frac{n+2}{2}} dx$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\ln \sqrt{2}} [f(x)]^{\frac{n+2}{2}} dx + [f(x)]^{\frac{n}{2}} dx$$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\ln \sqrt{2}} [f(x)]^{\frac{n}{2}} [1 + f(x)] dx$$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\ln \sqrt{2}} \frac{1}{2} f'(x) [f(x)]^{\frac{n}{2}} dx$$

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+2}$$

$$n = 0, \quad I_0 + I_2 = \ln \sqrt{2} + \int_0^{\ln \sqrt{2}} (e^{2x} - 1) dx$$

$$I_0 + I_2 = \ln \sqrt{2} + \left[ \frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^{\ln \sqrt{2}}$$

$$I_0 + I_2 = \ln \sqrt{2} + 1 - \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$I_0 + I_2 = \frac{1}{2} \text{ or } \frac{1}{2} = \frac{1}{0+2}$$

$$I_0 + I_2 = \frac{1}{0+2}$$

c)  $I_{n+2} = \frac{1}{n+2} - I_n \geq 0$

donc  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

2)  $U_n = I_{n+4} - I_n$

$$\text{a) } U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$$

$$U_{4n+1} = \frac{1}{(4n+1)+4} - \frac{1}{(4n+1)+2}$$

$$U_{4n+1} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+3}$$

$$\text{b) } U_{4n+1} = I_{4n+1+4} - I_{4n+1}$$

$$U_{4n+1} = I_{4n+5} - I_{4n+1}$$

$$\sum_{n=0}^p U_{4n+1} = \sum_{n=0}^p (I_{4n+5} - I_{4n+1})$$

$$= (I_5 - I_1) + (I_9 - I_5) + \dots + (I_{4p+5} - I_{4p+1})$$

$$= I_{4p+5} - I_1$$

$$\sum_{n=0}^p U_{4n+1} = I_{4p+5} - I_1$$

$$\text{c) On a } \sum_{n=0}^p U_{4n+1} = \sum_{n=0}^p \left( \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+3} \right)$$

$$\sum_{n=0}^p U_{4n+1} = \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left( \frac{1}{4p+5} - \frac{1}{4p+3} \right)$$

$$\text{donc } I_{4p+5} - I_1 = \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left( \frac{1}{4p+5} - \frac{1}{4p+3} \right)$$

$$\text{or } I_1 = \int_0^{\ln \sqrt{2}} \sqrt{e^{2x} - 1} dx = I = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{d'où } I_{4p+5} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4p+3} - \frac{1}{4p+5} = \sum_{n=0}^{2p+2} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{2p+2} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

**PROPOSITION DE CORRIGÉ – SESSION NORMALE 2007****EXERCICE 1**

$$1. \text{ On a : } f(1) + f(j) + f(j^2) = 1 + \alpha + \beta + j^3 + \alpha j^2 + \beta j + j^6 + \alpha j^4 + \beta j^2 \\ \Rightarrow f(1) + f(j) + f(j^2) = 3 + \alpha(1 + j + j^2) + \beta(1 + j + j^2) = 3$$

Donc  $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$

$$2.a \text{ On a : } f(z): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} . \text{ Donc } \left| \underbrace{f(1) + f(j) + f(j^2)}_3 \right| \leq |f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \text{ inégalité triangulaire.}$$

D'où :  $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$

$$b. \text{ Supposons que : } \begin{cases} |f(1)| < 1 \\ |f(j)| < 1 \\ |f(j^2)| < 1 \end{cases} \Rightarrow |f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \leq 3 \text{ Absurde!}$$

Donc l'un au moins des trois est supérieur ou égal à 1.

3. On a :  $A(r)$ ,  $I(a)$  et  $J(b)$ . On construit un repère orthonormé direct de centre  $O$  ( $Z_O = 0$ ).

$$a. \text{ ABC est équilatéral de centre } O \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$$

$$z_A + z_B + z_C = 0 \quad (1)$$

$$\text{Or : } (\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \frac{2\pi}{3} = \arg\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \arg(j) \Rightarrow z_B = jz_A \Rightarrow z_B = rj$$

$$\text{Donc B(j). (1)} \Rightarrow z_C = -(z_A + z_B) = -(r + rj) = -r(1 + j). \text{ Mais or :}$$

$$1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow -(1 + j) = j^2 \Rightarrow z_C = rj^2$$

D'où :  $B(rj)$ ,  $C(rj^2)$

$$b. BO = r|j| ; BI = |a - rj| ; BJ = |b - rj|$$

$$BO \cdot BI \cdot BJ = |rj| \times |a - rj| \times |b - rj| = |rj| \times |ab - arj - brj + (rj)^2| \\ = |rj| \times |(ab) - (a + b)rj + (rj)^2|$$

$$\text{Or : } ab = \beta r^2 \text{ et } -(a + b) = \alpha r$$

$$= |rj| \times |\beta r^2 + \alpha r \cdot rj + r^2 j^2| = r^3 |\beta j + \alpha j^2 + j^3| = r^3 |f(j)|$$

Donc  $BO \cdot BI \cdot BJ = r^3 |f(j)|$

De la même manière, on calculera  $CO.CI.CJ = r^3|f(j^2)|$  puis  $AO.AI.AJ = r^3|f(1)|$

c. évident! Puisque l'un au moins des nombres  $|f(1)|$ ;  $|f(j)|$ ;  $|f(j^2)|$  est supérieur ou égal à 1.

**EXERCICE 2**

1.a  $S_1(M) = N \Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \alpha$ . Or  $S_1(B) = O \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \alpha$ . Avec ABC rectangle isocèle en B. Donc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$ . (AO) est une bissectrice de  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \Rightarrow 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \alpha = -\frac{\pi}{8}(\pi)$ . Par suite,  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = -\frac{\pi}{8}(\pi)$ .

b. – Soit Q ayant pour image  $Q_1$  par  $S'oS_1$ . On a :  $S_1(Q) = Q' \Rightarrow \begin{cases} AQ_1 = k_1AQ \\ (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AQ_1}) = \alpha \end{cases}$

. On a :  $S'(Q'_1) = Q_1 \Rightarrow \begin{cases} AQ_1 = k_2AQ'_1 \\ (\overrightarrow{AQ_1}, \overrightarrow{AQ'_1}) = \alpha' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AQ_1 = k_1k_2AQ \\ (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AQ'_1}) = \alpha + \alpha' \end{cases} \quad (1)$

- Soit  $Q_2$  l'image de Q par  $S_1oS'$ . Par le même procédé, on a :  $AQ_2 = k_1k_2AQ$  et  $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AQ_2}) = \alpha + \alpha(2)$ . (1) et (2)  $\Rightarrow AQ_1 = AQ_2$  et,  $(\overrightarrow{AQ_2}, \overrightarrow{AQ_1}) = 0(2\pi) \Rightarrow Q_1 = Q_2$ . Ainsi :  $S'oS_1 = S_1oS'$ . Déduisons à présent l'image de O par S.

On a :  $S'(B) = M$  et  $S_1(M) = N \Rightarrow S_1oS'(B) = N$ . Or,  $S'oS_1 = S_1oS' \Rightarrow S'oS_1(B) = N$  donc on a :  $S'(O) = N$ . Déterminons une mesure de  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})$ .

On a :  $S'(O) = N$  et  $S'(B) = M \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{NM}) = \alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ . Mais or :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{NM}) &= (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB})(2\pi) \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = \frac{5\pi}{4}(2\pi) \end{aligned}$$

c.  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = -\frac{\pi}{8}(\pi)$ . Alors  $N \in (\Delta)$  tel que  $(\overrightarrow{AM}, (\Delta)) = -\frac{\pi}{8}(\pi)$ . En plus,  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = \frac{5\pi}{4}(2\pi)$  alors  $N \in (\Delta')$  tel que  $(\overrightarrow{MA}, (\Delta')) = \frac{5\pi}{4}(2\pi)$ ; Donc  $N = (\Delta) \cap (\Delta')$ .

2.a La composée de deux similitudes planes directes est une similitude plane directe. Donc  $r = S_1oS_2$  est une similitude plane directe d'angle  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$  avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\pi}{8}(\pi)$  d'où  $\beta = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$ .  $S_2(O) = B$  et  $S_1(B) = O \Rightarrow S_1oS_2(O) = O$  et  $r(O) = O$ .

Donc r est une similitude plane directe de centre O et d'angle  $\beta = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$ .

b. Déterminons r(P) On a :  $P = S_2^{-1}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} S_2(P) = M \\ S_1(M) = N \end{cases} \Rightarrow r(P) = N$

Déduisons une construction géométrique de  $P$  à partir de  $N$ .

On a :  $r(P) = N \Rightarrow (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$ . d'où  $P \in (\Delta_1)$  tel que  $(\overrightarrow{ON}, (\Delta_1)) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$ .  $S_2(P) = M \Rightarrow (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}) = \frac{\pi}{8}(2\pi)$ . Donc  $P \in (\Delta_2)$  tel que  $(\overrightarrow{CM}, (\Delta_2)) = \frac{\pi}{8}(2\pi) \Rightarrow P = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ .

c. On a :  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = -\frac{\pi}{8}(2\pi) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN})$  et  $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{8}(2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) = 0(2\pi) \Rightarrow N \in [AC]$ . Montrons que  $P \in [CA]$ . On a :  $S_2(P) = M \Rightarrow (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CM}) = -\frac{\pi}{8}(2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CO}) = -\frac{\pi}{8}(2\pi)$ . Il vient alors :

$$(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{8}(2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA}) = 0(2\pi). \text{ Donc } P \in [CA].$$

**EXERCICE 3**

1.a On a :  $M(t) = \text{bar}\{(B, (1-t)^2), (A, 2t(1-t)), (C, t^2)\}$  Donc :

$$(1-t)^2 \overrightarrow{BM}(t) + 2t(1-t) \overrightarrow{AM}(t) + t^2 \overrightarrow{CM}(t) = \vec{0}$$

Suivant  $\vec{u}$  : on tire  $x(t) = 2t - t^2$  et suivant  $\vec{v}$  on tire  $y(t) = 2t^2 - 2t + 1$

b.  $x(t)$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, alors :

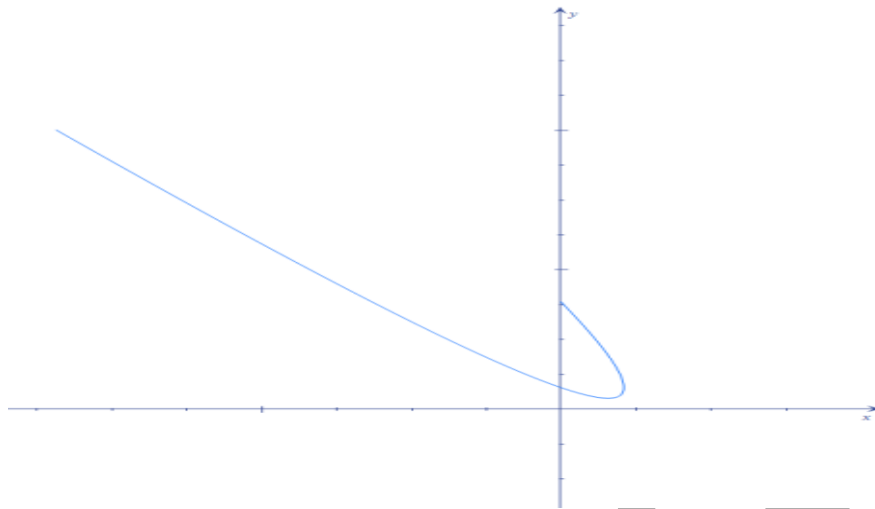
$$x'(t) = 2(1-t) > 0 \text{ car } t \in [0,1]. \text{ Donc } x'(t) \geq 0.$$

$y(t)$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, alors :

$$y'(t) = 4(2t - 1) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

$t$	0	0,5	1
$x'(t)$	2	+	+
$x$	0	$\frac{3}{4}$	1
$y$	1	$\frac{1}{2}$	1
$y'(t)$	-	-	+

Courbe :



2. En C on a une demi tangente verticale :  $T_1(x) : x' = 1$ . En B on a une demi tangente de pente -1 donc  $T_2(x) : y = -x + 1$ .  $\Rightarrow T_1(x) \cap T_2(x) = A(1,0)$ .

$$3. \begin{cases} x(t) = 2t - t^2 \\ y(t) = 2t^2 - 2t + 1 \end{cases} \Rightarrow 2t - t^2 - x = 0.$$

$\Delta' = 1 - x \geq 0$  car  $\forall t \in [0,1], x \in [0,1]$ . Si  $\Delta' > 0$   $t_1 = t = 1 - \sqrt{1-x}$

Si  $\Delta' = 0 \Rightarrow t_0 = 1$ . D'où alors  $t = 1 - \sqrt{1-x}$

$$\Rightarrow y(x) = 2(1 - \sqrt{1-x})^2 - 2(1 - \sqrt{1-x}) + 1$$

Ou encore pour simplifier :  $y(x) = -2x + 2\sqrt{1-x} + 3$

Dérivabilité de  $y$  en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 - \frac{2\sqrt{1-x}}{1-x} = 2 \text{ donc } y \text{ n'est pas dérivable en } 1.$$

### PROBLEME

1.a Soit  $I = [n, n+1] \subset [1, +\infty[$ .  $f'$  est continue, croissante et dérivable sur  $I$ . Donc il existe un réel  $c$  de  $I$  tel que :  $f'(c) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n)$ . Par ailleurs,  $f'$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  donc sur  $I$ , alors  $\forall c \in [n, n+1], f'(n) \leq f'(c) \leq f'(n+1)$

$$\Rightarrow f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$$

2.  $f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{p-1} f'(n) \leq \sum_{n=1}^{p-1} (f(n+1) - f(n)) \leq \sum_{n=1}^{p-1} f'(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{p-1} f'(n) = \underbrace{f'(1) + \dots + f'(p-1) + f'(p)}_{u_p} - f'(p) = u_p - f'(p)$$

$$\sum_{n=1}^{p-1} f'(n+1) = -f'(1) + \underbrace{f'(1) + \dots + f'(p-1) + f'(p)}_{u_p} = u_p - f'(1)$$

$$\sum_{n=1}^{p-1} (f(n+1) - f(n)) = f(p) - f(1)$$

Donc :  $u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1)$

$$3.a \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow u_p = -2 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3}$$

$$u_p - u_{p-1} = -2 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3} + 2 \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^3} = -2 \left( \underbrace{\sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^3}}_{\frac{1}{p^3}} \right) = -\frac{2}{p^3} \leq 0$$

Donc  $(u_p) \downarrow$

b.  $u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1) \Rightarrow \frac{1}{p^2} - 3 \leq u_p \leq \frac{1}{p^2} - \left(\frac{2}{p^3} + 1\right)$  donc  $(u_p)$  est bornée.

c. Pour tout  $p$ ,  $v_p - v_{p-1} = \frac{1}{p^3} > 0 \Rightarrow (v_p) \uparrow$

$$v_p = -\frac{1}{2}u_p \Rightarrow u_p = -2v_p \Rightarrow -\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2} \leq v_p \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2p^2} \Rightarrow v_p \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2p^2}$$

$v_p$  est croissante et majorée donc  $(v_p)$  converge vers  $L$ . Déterminons un encadrement de  $L$ .

$$-\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2} \leq v_p \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{-\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2}}_0 \right) \leq L \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{2} - \underbrace{\frac{1}{2p^2}}_0 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq L \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow L \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

4.a On a :  $u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \Rightarrow u_p \leq f'(p) + f(p) - f(1)$

$$\Rightarrow u_p \leq -\frac{1}{p} - \ln p$$

$$b. \quad u_p \leq -\frac{1}{p} - \ln p \Rightarrow \sum_{p=1}^n f'(n) \leq -\frac{1}{p} - \ln p \quad . \quad f(x) = -\ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\sum_{p=1}^n f'(n) = -\sum_{p=1}^n \frac{1}{n} \leq -\frac{1}{p} - \ln p \Leftrightarrow \sum_{p=1}^n \frac{1}{n} \geq \frac{1}{p} + \ln p. \quad \text{Or, } \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{p} + \ln p \right) = +\infty .$$

$$\text{Donc : } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{n} = +\infty$$

Partie B :

$$1.a \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi |(-1)^n \sin u| du = \int_0^\pi |\sin u| du . \quad \text{Dans } [0, \pi] , \sin u \text{ est positif}$$

$$\text{donc } |\sin u| = \sin u \Rightarrow \int_0^\pi |\sin u| du = \int_0^\pi \sin u du = 2 \Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = 2$$

$$2.a \quad h_a(t) = \left| \frac{\sin at}{t} \right| \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} h_a(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{\sin at}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{\sin at}{at} \times a \right| = 1 \times a = a = h_a(0) \Rightarrow$$

$$\text{les fonctions } h_a \text{ sont continues en } 0 \text{ donc sur } I = [0, +\infty[.$$

b.  $\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi]$  :

$$n\pi \leq t \leq (n+1)\pi \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n\pi} \Rightarrow \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} \leq \frac{|\sin t|}{t} \leq \frac{|\sin t|}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{n\pi} dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \quad (a)$$

$$\Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \quad \text{Pour } n = 0, \text{ on a } \int_0^\pi h_1(t) dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt$$

$$c. \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = 2 \Rightarrow (a) : \frac{2}{(n+1)\pi} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq \frac{2}{n\pi}$$

$$(0.3) \text{ il suffit de prendre } n = 0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \leq \int_0^\pi h_1(t) dt$$

$$3.a \text{ On a : } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq \frac{2}{n\pi} \Rightarrow \sum_{n=1}^p \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq \sum_{n=1}^p \frac{2}{n\pi} \Rightarrow \sum_{n=1}^p \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t) dt \leq$$

$$\sum_{n=1}^p \frac{2}{n\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \Rightarrow \int_{0+p\pi}^{p\pi+\pi} h_1(t) dt = \int_0^{p\pi} h_1(t) dt \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n}$$

$$b. \text{ On avait : } \int_0^{p\pi} h_1(t) dt \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p\pi} h_1(t) dt \leq \frac{2}{\pi} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p\pi} h_1(t) dt = +\infty$$

$$c. \text{ On pose } p = E\left(\frac{x}{\pi}\right) \Rightarrow E\left(\frac{x}{\pi}\right) \leq \frac{x}{\pi} \leq E\left(\frac{x}{\pi}\right) + 1 \Rightarrow \pi E\left(\frac{x}{\pi}\right) \leq x \leq \pi E\left(\frac{x}{\pi}\right) + \pi$$

$$\Rightarrow p\pi \leq x \leq p\pi + \pi \Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p\pi} h_1(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x h_1(t) dt = +\infty$$

4.  $\int_0^\pi h_a(t) dt = \int_0^\pi \left| \frac{\sin at}{t} \right| dt$ . On fait un changement de variable  $at = u$ .

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left| \frac{\sin at}{t} \right| dt = \int_0^{a\pi} \left| \frac{\sin u}{\frac{u}{a}} \right| \frac{du}{a} = \int_0^{a\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du = \int_0^{a\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \int_0^{a\pi} h_1(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi h_a(t) dt = \int_0^{a\pi} h_1(t) dt$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^\pi h_a(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{a\pi} h_1(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x h_1(t) dt = +\infty$$

**CORRECTION SESSION NORMALE 2008****C O R R E C T I O N****Correction de l'exercice 1.**

1. a. En désignant par  $b$  le terme central de la progression arithmétique et par  $r$  sa raison, on peut écrire :  $a = b - r$  et  $c = b + r$ .

Les autres données se traduisent alors par :

$$\begin{cases} \sum_{k \in \{-1,1,2\}} p(X=k) = 1 \\ E(X) = 1 \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{cases} e^a + e^b + e^c = 1 \\ 1.e^a - 1.e^b + 2.e^c = 1 \end{cases} \quad \text{Soit} \quad \begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$$

En faisant la différence membre à membre et en simplifiant par  $e^b$ , on trouve  $e^r = 2$  soit  $r = \ln 2$ .

La première équation devient alors :

$$\left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right)e^b = 1 \quad \text{c'est à dire} \quad e^b = \frac{2}{7} \Rightarrow \boxed{b = \ln \frac{2}{7}}.$$

$$\text{Ensuite } a = b - r = \ln \frac{2}{7} - \ln 2 \Rightarrow \boxed{a = \ln \frac{1}{7}} \quad \text{et} \quad c = b + r = \ln \frac{2}{7} + \ln 2 \Rightarrow \boxed{c = \ln \frac{4}{7}}.$$

Pour calculer la variance, calculons d'abord  $E(X^2)$ .

$$E(X^2) = 1^2 e^a + (-1)^2 e^b + 2^2 e^c = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + 4 \frac{4}{7} = \frac{19}{7}.$$

$$\text{Alors } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{19}{7} - 1 \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{12}{7}}.$$

$$2. \text{ a. } x_G = \frac{1}{7}(1.x_A + 2x_B + 4x_C) = 1 \text{ donc } G = A.$$

$$\text{b. } \varphi(G) = \frac{1}{7}[\overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + 4\overrightarrow{GC}^2].$$

Soit, en se souvenant que  $G = A$  :

$$\varphi(G) = \frac{1}{7}[2\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AC}^2] = \frac{1}{7}(2.4 + 4.1) \Rightarrow \boxed{\varphi(G) = \frac{12}{7} = V(X)}.$$

On peut écrire en utilisant la relation de Stiles et en développant :

$$\varphi(M) = \frac{1}{7}[(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2]$$

$$\varphi(M) = \frac{1}{7}[\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB}) + 4(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC})]$$

$$\varphi(M) = \overrightarrow{MG}^2 + \frac{1}{7}[\overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + 4\overrightarrow{GC}^2] + \frac{1}{7} \cdot 2\overrightarrow{MG} \cdot [\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC}].$$

Le troisième du second membre est nul parce que  $G$  est le barycentre du système  $[(A, 1), (B, 2), (C, 4)]$   
 Donc,  $\varphi(M) = \overline{MG}^2 + \varphi(G)$ .

La relation  $\varphi(G) = 3$  est alors équivalente à :  $\overline{MG}^2 = \frac{9}{7}$  ou  $MG = 3\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

Par conséquent

$$\boxed{(\Gamma) = \{M_1, M_2\} \text{ où } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont les deux points de } (\Delta) \text{ dont la distance au point } A \text{ est } -3\frac{\sqrt{7}}{7} \text{ et } 3\frac{\sqrt{7}}{7}}$$

**Correction de l'exercice 2.**

1. a. On a, pour tout réel  $x$  compris entre  $k$  et  $k + 1$  :  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ .

Puis en intégrant :  $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$ .

c'est à dire  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ .

b.  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k = \ln \frac{k+1}{k} = \frac{1}{k} - f(k)$ .

2. a. En réduisant le deuxième membre au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

Donc  $a$  et  $b$  sont tels que  $\forall x \neq 0$  et  $-1$ ,  $(a+b)x+a = 1$ . Alors  $a+b = 0$  et  $a = 1$ ; ce qui entraîne  $= -1$ .

Par conséquent  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

3. a. On a  $U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{2n} \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \sum_{k=n}^{2n} [\alpha_k - \alpha_{k+1}]$  avec  $\alpha_k = \frac{1}{k}$ .

Donc en procédant à une itération :  $U_n = \alpha_n - \alpha_{2n+1} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$ . Ensuite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ .

b. Dans les inégalités de la question 1.a., remplaçons l'intégrale par sa valeur tirée de la question 1.b.

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - f(k) \leq \frac{1}{k}$$

ce qui permet d'encadrer  $f(k)$  :

$$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Puis sommons membre à membre ces inégalités depuis  $k = n$  à  $2n$ , on obtient la relation demandée :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = U_n$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ , le théorème des gendarmes permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$ .

c. La relation établie dans la question 1.b. donne par sommation :

$$\sum_{k=n}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} f(k)$$

ou en faisant intervenir la relation de Schales pour les intégrales :

$$\int_n^{2n+1} \frac{dx}{x} = S_n - \sum_{k=n}^{2n} f(k)$$

Ensuite en intégrant :

$$\ln(k+1) - \ln k = S_n - \sum_{k=n}^{2n} f(k)$$

Finalement  $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = S_n - \ln \frac{2n+1}{n}$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{2n+1}{n} = \ln 2$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupe

Correction de l'exercice 3.

1. a. Le point  $P'$  est tel que  
 $f(P) = t \circ r(P) = t(P) = P'$ .

Donc le point  $P'$  est entièrement défini par la relation  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{JQ}$ ;

$P'$  est tel que  $JPP'Q$  soit un parallélogramme.

Le point  $Q'$  est tel que  
 $f(Q) = t \circ r(Q) = t(R) = Q'$ .

Donc le point  $Q'$  est entièrement défini par la relation  $\overrightarrow{RQ'} = \overrightarrow{JQ}$ ;

$Q'$  est tel que  $JQQ'R$  soit un parallélogramme.

La droite  $(IJ)$  est une droite des milieux pour le triangle  $PQR$ , donc  $JIR$  a même nature que  $PQR$  :

$JIR$  est équilatéral direct

La droite  $(JQ)$  est la médiatrice du segment  $[P, R]$  parce que le triangle  $PQR$  est équilatérale. Donc, puisque  $J$  est le milieu de  $[Q, Q_1]$ , l'image  $PQ_1R$  du triangle équilatérale direct  $PQR$  par la symétrie orthogonale d'axe  $(PR)$  est un triangle équilatérale indirect.

$r$  est la rotation de centre  $P$  et d'angle  $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \frac{\pi}{3}$ . Donc  $r(R) = Q_1$ .

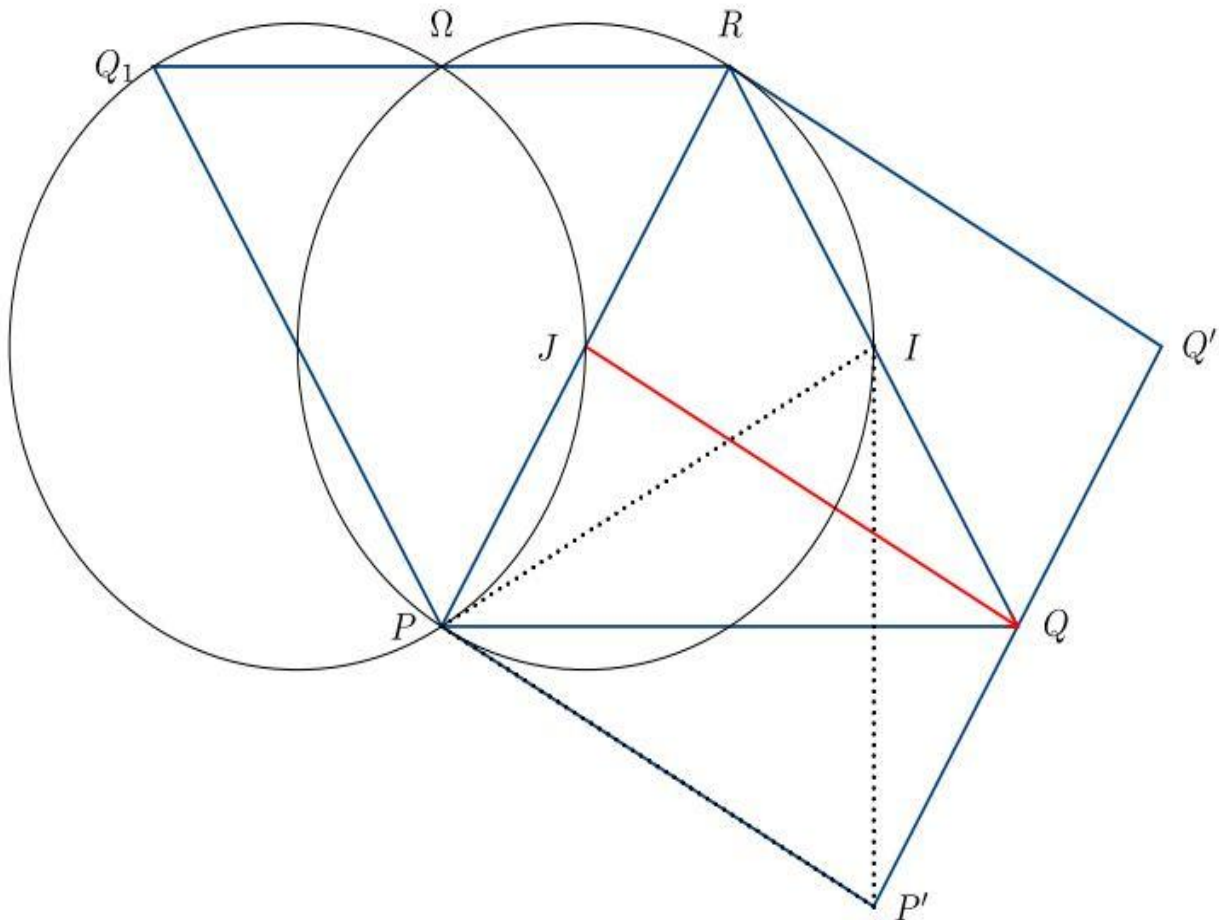
Ensuite,  $f(R) = t \circ r(R) = t(Q_1) = J \Rightarrow f(R) = J$ .

On sait que  $f = t \circ r$  est une rotation de même angle que  $r$  c'est à dire  $\frac{\pi}{3}$ .

La relation  $f(R) = J$  et  $JIR$  est équilatéral direct entraîne que le centre de  $f$  est  $I$ .

$f$  est la rotation de centre  $I$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

On en déduit, puisque  $f(P) = P'$  que le triangle  $IPP'$  est équilatéral direct.



2.

Antécédent	$\Omega$	$J$	$R$	$I$
Image par $s$	$\Omega$	$P$	$I$	$P'$

a. L'angle de  $s$  est  $(\vec{JR}, \vec{PI}) = (\vec{PJ}, \vec{PI})$  L'angle de  $s$  est  $-\frac{\pi}{6}$

Le rapport de  $s$  est  $\frac{PI}{JR}$ . Or  $PI = PR \cos \frac{\pi}{6} = 2JR \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Donc

le rapport de  $s$  est  $\sqrt{3}$ .

On a  $(\vec{RI}, \vec{IP}') = (\vec{IQ}, \vec{IP}') = (\vec{IQ}, \vec{IP}) + (\vec{IP}, \vec{IP}') = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$  angle de  $s$ .

$$\frac{IP'}{RI} = \frac{IP}{RI} = \sqrt{3} \text{ rapport de } s.$$

Les trois conditions :

$$\begin{cases} s(R) = I \\ (\vec{RI}, \vec{IP}') = \text{angle de } s \\ \frac{IP'}{RI} = \text{rapport de } s \end{cases} \text{ suffisent pour dire que } s(I) = P'$$

b. Puisque les similitudes planes directes conservent les angles, on peut lire dans le tableau précédent que : angle de  $s = (\vec{\Omega R}, \vec{\Omega I}) = (\vec{JR}, \vec{PI})$ .

Or  $(\vec{JR}, \vec{PI}) = (\vec{PR}, \vec{PI})$  parce que le point  $J$  appartient au segment  $[P, R]$ .

Donc  $(\vec{\Omega R}, \vec{\Omega I}) = (\vec{PR}, \vec{PI})$

et comme les quatre points  $\Omega, R, P$  et  $I$  ne sont pas alignés, ils sont cocycliques.

De même  $-\frac{\pi}{6} = \text{angle de } s = (\vec{\Omega J}, \vec{\Omega P})$ .

D'un autre côté, la droite  $(Q_1J)$  étant la bissectrice du triangle équilatérale indirect  $PQ_1R$ , l'angle  $(\vec{Q_1J}, \vec{Q_1P})$  vaut  $-\frac{\pi}{6}$ .

On en déduit que  $(\vec{\Omega J}, \vec{\Omega P}) = (\vec{Q_1J}, \vec{Q_1P})$  puis que les points  $\Omega, J, P$  et  $Q_1$  sont cocycliques

En résumé, le point  $\Omega$  appartient à l'intersection des deux cercles  $C_1$  et  $C_2$ ; où  $C_1$  est le cercle contenant les points  $P, I$  et  $R$  et  $C_2$  le cercle contenant les points  $P, J$  et  $Q_1$ .

De plus le point  $\Omega$  est différent de  $P$  parce que  $\Omega$  est fixé par  $s$  et  $P$  non.

Ces conditions définissent parfaitement le point  $\Omega$

**Correction du problème.**

1. a. Nous sommes en présence d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants de degré un ou deux selon que  $m$  est égal à 0 ou non.

L'équation caractéristique est :

$$(E_m^c) : mr^2 + 2r + 2 = 0$$

- Si  $m = 0$ ,  $(E_m^c)$  est une équation du premier degré. Sa seule racine est  $r_0 = -1$ .

La solution générale de l'équation  $(E_m)$  est alors  $y = ke^{-t}$ ,  $k$  constante réelle.

- Si  $m \neq 0$ ,  $(E_m^c)$  est une équation du second degré dont le discriminant réduit est  $\Delta' = 1 - 2m$ .

\* Si  $\Delta'$  est égal à 0 c'est à dire  $m = \frac{1}{2}$ , l'équation  $(E_m^c)$  a une racine double  $r_0 = -\frac{1}{m} = -2$ .

La solution générale de l'équation  $(E_m)$  est alors  $y = (at + b)e^{-2t}$ ,  $a$  et  $b$  constantes réelles.

\* Si  $\Delta'$  est  $> 0$  c'est à dire  $m < \frac{1}{2}$ , l'équation  $(E_m^c)$  a deux racines réelles simples

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2m}}{m} \text{ et } r_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 2m}}{m}.$$

La solution générale de l'équation  $(E_m)$  est alors  $y = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$ ,  $a$  et  $b$  constantes réelles.

\* Si  $\Delta'$  est  $< 0$  c'est à dire  $m > \frac{1}{2}$ , l'équation  $(E_m^c)$  a deux racines complexes simples

conjuguées  $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{2m - 1}}{m} = \alpha + i\beta$  et  $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{2m - 1}}{m} = \alpha - i\beta$  avec  $\alpha = -\frac{1}{m}$  et  $\beta = \frac{\sqrt{2m - 1}}{m}$ .

La solution générale de l'équation  $(E_m)$  est alors  $y = e^{\alpha t}(a \cos \beta t + b \sin \beta t)$ ,  $a$  et  $b$  constantes réelles.

**b.** Notons  $h$  la solution de  $(E_1)$  dont la courbe passe par le point  $A$  et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation  $y = -x$ .

On doit alors avoir  $h(0) = 1$  et  $h'(0) = -1$ .

Ici  $m = 1$  est  $> \frac{1}{2}$ , donc  $h$  s'écrit :  $h(t) = e^{-t}(a \cos t + b \sin t)$ ,  $a$  et  $b$  constantes réelles.

$$h'(t) = [(b - a) \cos t - (b + a) \sin t] e^{-t}.$$

Les conditions satisfaites par  $h$  deviennent :

$$h(0) = a = 1 \text{ et } h'(0) = b - a = -1 \text{ c'est à dire } a = 1 \text{ et } b = 0, \text{ puis } \boxed{h(t) = \cos t e^{-t}}$$

**2.** La fonction  $f$  est continue et dérivable dans  $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  et  $\forall t \in I, f'(t) = -(\cos t + \sin t)e^{-t}$  (à calculé dans la question précédente).

L'équation  $\cos t + \sin t = 0$  est équivalente à  $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Ses solutions dans  $\mathbb{R}$  sont telles que

$$-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ soit } t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de cette équation dans  $I$  sont alors  $t_0 = \frac{3\pi}{4}$  et  $t_1 = -\frac{\pi}{4}$ .

Cette équation et la dérivée  $f'$  ont les mêmes zéro.

Pour déterminer le signe de  $f'$  on peut résoudre des inéquations trigonométriques.

Mais on peut aussi dire que dans tout intervalle où  $f'$  ne s'anulle pas, elle garde un signe constant parce qu'elle est continue. C'est une application très pratique du théorème des valeurs intermédiaires.

$-\frac{\pi}{3}$  appartient à l'intervalle  $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$  et  $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{\frac{\pi}{3}}$  est  $> 0$ , donc  $f'$  est  $> 0$  dans  $I_1$ .

$0$  appartient à l'intervalle  $I_2 = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  et  $f'(0) = -1$  est  $< 0$ , donc  $f'$  est  $< 0$  dans  $I_2$ .

$\pi$  appartient à l'intervalle  $I_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$  et  $f'(\pi) = e^{-\pi}$  est  $> 0$ , donc  $f'$  est  $> 0$  dans  $I_3$ .

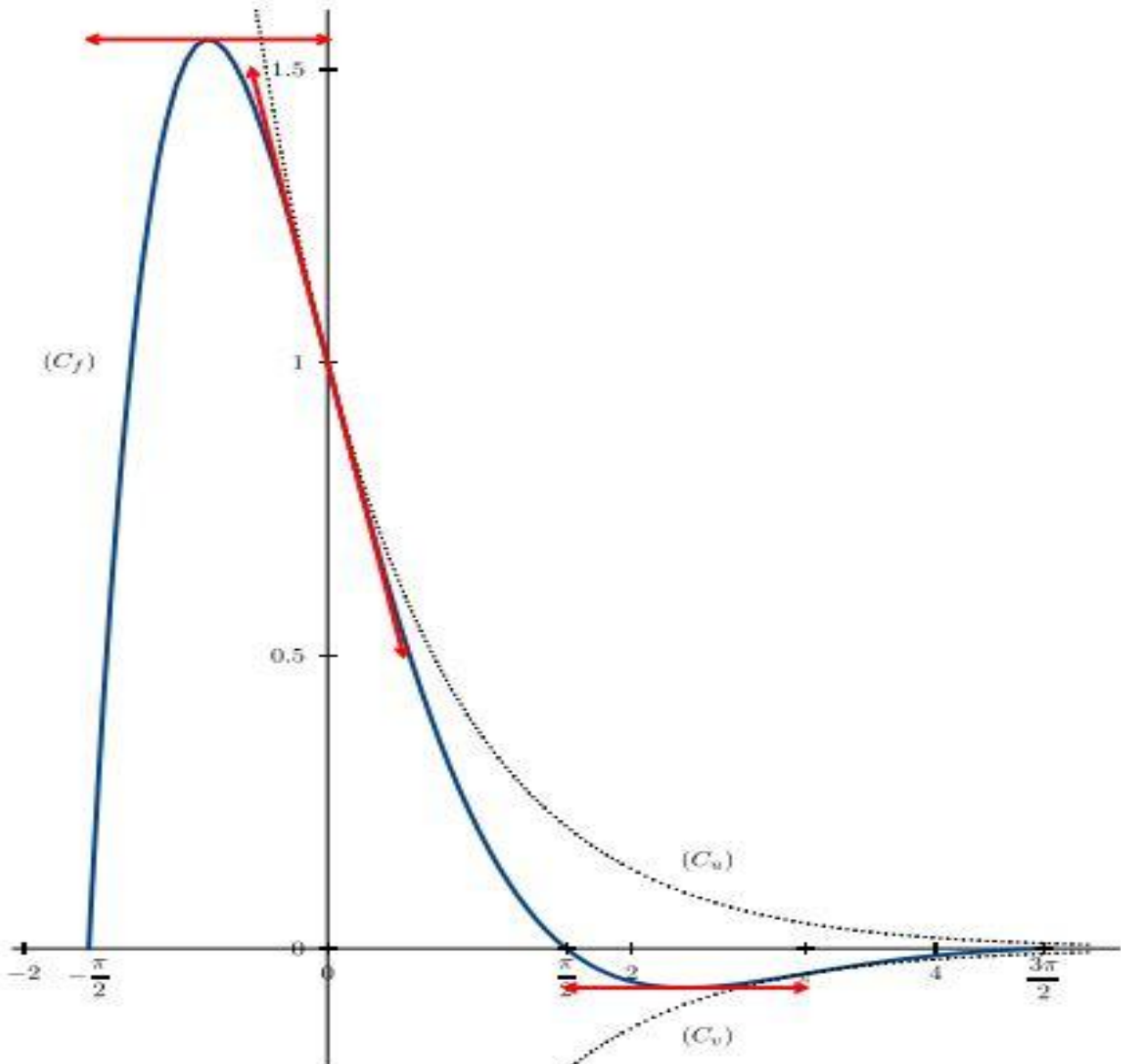
Voici le tableau de variations de  $f$ .

$t$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'$	+	0	-	0
$f$	0	$r$	$s$	0

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

Et voici les courbes représentatives de  $f$ ,  $u$  et  $v$ .



3. a. Pour tout  $k$  appartenant à  $\mathbb{Z}$  et tout  $t$  appartenant à  $\mathbb{R}$ ,  $g(t + 2k\pi) = e^{-t-2k\pi} \cos t$  parce que la fonction cosinus est périodique de période  $2\pi$ .

Donc  $g(t + 2k\pi) = e^{-2k\pi} g(t)$ .

En dérivant cette dernière expression par rapport à  $t$  on obtient :

$$g'(t + 2k\pi) = e^{-2k\pi} g'(t).$$

En particulier pour tout  $t$  appartenant à  $I$  et tout  $k$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ ,  $g'(t + 2k\pi) = e^{-2k\pi} f'(t)$ . Cette relation permet de déterminer parfaitement le signe de  $g'$  dans  $\mathbb{R}$ .

Plus précisément :

Si  $t$  appartient à un intervalle du genre  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$  ou  $\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $g'(t)$  est positif

Si  $t$  appartient à un intervalle du genre  $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $g'(t)$  est positif

**b.** Un point  $M$  de coordonnées  $(t, u(t))$  appartient à  $\Gamma \cap C_u$  si et seulement si  $u(t) = g(t)$  c'est à dire  $\cos t = 1$  ou  $t = 2k\pi$ ,  $k$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ , et alors  $u(t) = e^{-2k\pi}$ .

Donc  $\Gamma \cap C_u = \{M(2k\pi, e^{-2k\pi}), k \in \mathbb{Z}\}$

Un point  $M$  de coordonnées  $(t, v(t))$  appartient à  $\Gamma \cap C_v$  si et seulement si  $v(t) = g(t)$  c'est à dire  $\cos t = -1$  ou  $t = (2k + 1)\pi$ ,  $k$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ , et alors  $v(t) = e^{-(2k+1)\pi}$ .

Donc  $\Gamma \cap C_v = \{M((2k + 1)\pi, e^{-(2k+1)\pi}), k \in \mathbb{Z}\}$ .

**c.** En un point  $M(2k\pi, e^{-2k\pi})$  commun à  $\Gamma$  et à  $C_u$ , la pente de la tangente à  $\Gamma$  est  $g'(2k\pi) = e^{-2k\pi} g'(0) = e^{-2k\pi} f'(0) = -e^{-2k\pi}$  et la pente de la tangente à  $C_u$  est

$$u'(2k\pi) = -e^{-t} \Big|_{t=2k\pi} = -e^{-2k\pi}.$$

Les deux tangentes ayant même pente et passant par le point  $M$  sont confondues.

En un point  $M((2k + 1)\pi, e^{-(2k+1)\pi})$  commun à  $\Gamma$  et à  $C_v$ , la pente de la tangente à  $\Gamma$  est  $g'((2k + 1)\pi) = e^{-2k\pi} g'(\pi) = e^{-2k\pi} f'(\pi) = e^{-(2k+1)\pi}$  et la pente de la tangente à  $C_v$  est

$$v'((2k + 1)\pi) = e^{-t} \Big|_{t=(2k+1)\pi} = e^{-(2k+1)\pi}.$$

Les deux tangentes ayant même pente et passant par le point  $M$  sont confondues.

**d.**  $0 \leq \cos t e^{-t} \leq e^{-t}$ . Or  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$ .

Le théorème des gendarmes permet de conclure que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ .

**4. a.** Pour simplifier posons  $r_k = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $s_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$  de sorte que

$$a_k = \int_{r_k}^{s_k} g_k(t) dt;$$

ensuite intégrons une première fois par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = e^{-t} & \Rightarrow & u'(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = \cos t & \Leftarrow & v(t) = \sin t \end{cases}$$

Alors  $a_k = \left[ \sin t e^{-t} \right]_{r_k}^{s_k} + \int_{r_k}^{s_k} \sin t e^{-t} dt$

intégrons une deuxième fois par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = e^{-t} & \Rightarrow & u'(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = \sin t & \Leftarrow & v(t) = -\cos t \end{cases}$$

Alors  $a_k = \left[ \sin t e^{-t} \right]_{r_k}^{s_k} + \left[ -\cos t e^{-t} \right]_{r_k}^{s_k} - \int_{r_k}^{s_k} \cos t e^{-t} dt$ .

c'est à dire  $a_k = \left[ (\sin t - \cos t) e^{-t} \right]_{r_k}^{s_k} - a_k$  ou  $a_k = \frac{1}{2} \left[ (\sin t - \cos t) e^{-t} \right]_{r_k}^{s_k}$ .

Or  $\cos r_k = \cos s_k = 0$  et  $\sin r_k = (-1)^{k+1}$  et  $\sin s_k = (-1)^k$ .

Donc  $a_k = \frac{1}{2} (-1)^k \left[ e^{-s_k} - (-1)^{k+1} e^{-r_k} \right] = \frac{1}{2} (-1)^k \left[ e^{-s_k} + e^{-r_k} \right]$

$$a_k = \frac{1}{2} (-1)^k e^{-k\pi} \left[ e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} \right]$$

b.  $s_n = C_h \sum_{k=0}^n e^{-k\pi}$  avec  $C_h = \frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} \right]$ .

La somme est la somme des  $n + 1$  premiers termes de la progression géométrique de premier terme 1 et de raison  $e^{-\pi}$ .

Donc  $s_n = C_h \cdot 1 \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1)\pi} = 0$ , la suite  $(s_n)$  admet une limite et cette limite est égale à :

$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = C_h \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$ .

$s_n$  représente l'aire géométrique du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la verticale d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$ , la verticale d'équation  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$  et la courbe représentative de  $g$ .

$s$  représente l'aire géométrique du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la verticale d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et la courbe représentative de  $g$ .

5. a.  $x'_t = -(\cos t + \sin t) e^{-t}$

et  $y'_t = (\cos t - \sin t) e^{-t}$ .

On a :  $x'_t = -(\cos t + \sin t) e^{-t} = -\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2}e^{-t}$

et  $y'_t = (\cos t - \sin t) e^{-t} = -\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2}e^{-t}$ .

$x'_t = \cos\left(\pi + t - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2}e^{-t} = \cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \sqrt{2}e^{-t}$  et

$y'_t = \sin\left(\pi + t - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2}e^{-t} = \sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \sqrt{2}e^{-t}$ .

Les zéro de  $x'$  sont  $t_1 = -\frac{\pi}{4}$  et  $t_2 = \frac{3\pi}{4}$ .

Le zéro de  $y'$  est  $t_3 = \frac{\pi}{4}$ .

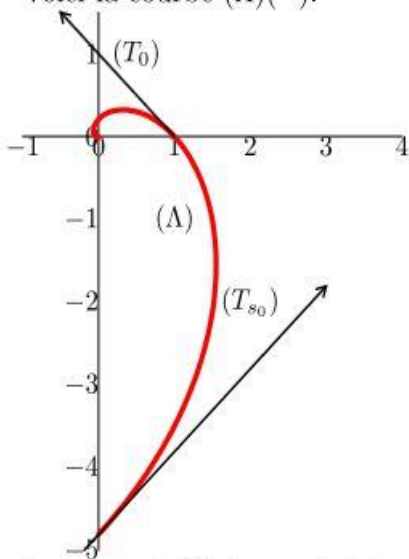
On détermine les signes de  $x'$  et  $y'$  par la méthode utilisée pour déterminer le signe de  $f'$ .

Voici le tableau de variations conjointes.

$t$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	
$x'$	+	0	-	-	0	+
$x$	0	$r$	$s$	$t$	0	
$y$	$v$	$r$	$s$	$t$	$u$	
$y'$	+	+	0	-	-	

$r = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$      
  $s = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$      
  $t = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}$      
  $u = -e^{-\frac{3\pi}{2}}$      
  $v = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

Voici la courbe  $(\Lambda)$  (1).



La tangente  $(T_{s_0})$  au point de paramètre  $s_0 = -\frac{\pi}{2}$  est la droite passant par le point de coordonnées  $(0, -e^{-s_0})$  et dont un vecteur directeur a pour coordonnées  $(x'_{s_0}, y'_{s_0}) = (e^{-s_0}, e^{-s_0})$  ou  $(1, 1)$ .

La tangente  $(T_0)$  au point de paramètre 0 est la droite passant par le point de coordonnées  $(1, 0)$  et dont un vecteur directeur a pour coordonnées  $(x'_0, y'_0) = (-1, 1)$ .

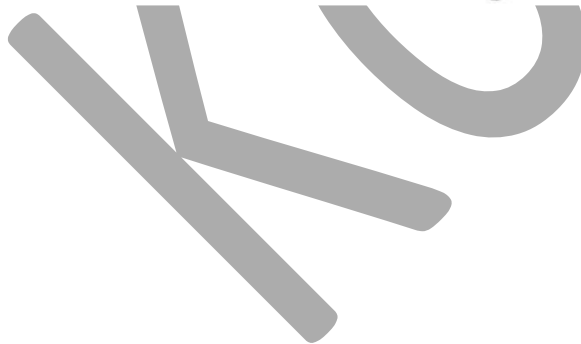
**b.** Rappelons que  $\theta$  étant un réel, le plan étant muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et en désignant par  $M_\theta$  le point de coordonnées  $(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta)$ ,  $\lambda > 0$  alors  $\theta$  est une mesure de l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta})$ .

On en déduit que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_t}) \equiv t$ .

$\vec{V}_t$  a pour coordonnées  $x'_t = \cos(t + \frac{3\pi}{4}) \sqrt{2}e^{-t}$  et  $y'_t = \sin(t + \frac{3\pi}{4}) \sqrt{2}e^{-t}$ .

Donc  $(\vec{i}, \vec{V}_t) \equiv t + \frac{3\pi}{4}$ .

Puis  $(\overrightarrow{OM_t}, \vec{V}_t) = (\overrightarrow{OM_t}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{V}_t) \equiv \frac{3\pi}{4}$ .



## CORRECTION SESSION NORMALE 2009

## 1. CORRECTION

Proposée par les auteurs

À

**EXERCICE 1.** Pour chaque jour  $n$ , posons  $\Omega_n = J_n \cup K_n$ .Cette réunion disjointe car les deux événements  $J_n$  et  $K_n$  sont contrairesLes données du problème se traduisent par :  $p_1 = p(J_1) = \frac{2}{5}$  et pour tout jour  $n$  de l'année différent du premier jour :

$$p(J_n/J_{n-1}) = \frac{1}{3} \text{ et } p(K_n/K_{n-1}) = \frac{1}{3}.$$

$$1. \text{ } \vartheta \quad p(J_2/J_1) = \frac{1}{3}$$

$$p(J_2/K_1) = 1 - p(K_2/K_1) \Rightarrow p(J_2/K_1) = \frac{2}{3}.$$

 $\vartheta$  Pour trouver la troisième valeur, écrivons :

$$J_2 = J_2 \cap \Omega_1 = J_2 \cap (J_1 \cup K_1) = (J_2 \cap J_1) \cup (J_2 \cap K_1).$$

$$\text{Alors } p(J_2) = p[(J_2 \cap J_1) \cup (J_2 \cap K_1)] = p(J_2 \cap J_1) + p(J_2 \cap K_1)$$

$$p(J_2) = p(J_2/J_1)p(J_1) + p(J_2/K_1)p(K_1)$$

Et comme  $p(K_1) = 1 - p(J_1) = \frac{3}{5}$  :

$$p(J_2) = p(J_2/J_1)p(J_1) + p(J_2/K_1)(1 - p(J_1))$$

$$p(J_2) = \frac{1}{3} \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \frac{3}{5} \Rightarrow p(J_2) = \frac{8}{15}$$

Puisque  $J_1$  et  $K_1$  sont contraires,  $p(K_1) = 1 - p(J_1) = \frac{3}{5}$ Puisque  $J_1$  et  $K_1$  sont contraires,  $p(K_1) = 1 - p(J_1) = \frac{3}{5}$ Par conséquent  $p(J_2) = \frac{1}{3} \frac{2}{5} p + (J_2/J_1)p(J_1) + p(J_2/K_1)p(K_1)$ 

2. Comme dans la question précédente, écrivons :

$$J_n = J_n \cap \Omega_{n-1} = J_n \cap (J_{n-1} \cup K_{n-1}) = (J_n \cap J_{n-1}) \cup (J_n \cap K_{n-1}).$$

$$\text{Alors } p(J_n) = p[(J_n \cap J_{n-1}) \cup (J_n \cap K_{n-1})] = p(J_n \cap J_{n-1}) + p(J_n \cap K_{n-1})$$

$$p(J_n) = p(J_n/J_{n-1})p(J_{n-1}) + p(J_n/K_{n-1})p(K_{n-1})$$

Et comme  $p(K_{n-1}) = 1 - p(J_{n-1})$  et  $p(J_n/K_{n-1}) = 1 - p(K_n/K_{n-1})$ 

$$p(J_n) = p(J_n/J_{n-1})p(J_{n-1}) + [1 - p(K_n/K_{n-1})](1 - p(J_{n-1}))$$

$$p(J_n) = [p(J_n/J_{n-1}) + p(K_n/K_{n-1}) - 1]p(J_{n-1}) + 1 - p(K_n/K_{n-1})$$

$$p(J_n) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1\right)p(J_{n-1}) + 1 - \frac{1}{3}$$

$$p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$$

3. a)  $\forall u_n = p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}u_{n-1}$

$(u_n)$  est donc la suite géométrique de premier terme  $u_1 = p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$  et de raison  $-\frac{1}{3}$

b)  $\forall u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u_1 \Rightarrow u_n = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\forall p_n = u_n + \frac{1}{2} \Rightarrow p_n = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$

4. La probabilité que cet élève a de manger du riz est  $m_n = p_{2n} = \frac{1}{10} \frac{1}{3^{2n-1}} + \frac{1}{2}$ .

$m_{n+1} - m_n = \frac{1}{10} \frac{1}{3^{2n+1}} - \frac{1}{10} \frac{1}{3^{2n-1}} = \frac{1}{10} \frac{1}{3^{2n-1}} \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) = -\frac{4}{5} \frac{1}{3^{2n+1}}$ . Cette quantité étant négative, la suite  $(m_n)$  est décroissante. De plus  $m_n \geq \frac{1}{2}$  (D'ailleurs la limite de la suite  $(m_n)$  est  $\frac{1}{2}$ .)

Par conséquent  $\frac{1}{2} \leq m_n \leq m_0 = p_2$  c'est à dire  $\frac{1}{2} \leq p_{2n} \leq \frac{8}{15}$

**EXERCICE 2.**

1. Chacun des entiers qui interviennent dans l'écriture d'un nombre en base  $a$  doit être strictement inférieur à  $a$ . Comme l'entier 3 intervient dans l'écriture de  $C$ , on a  $a > 3$ .

2. a)  $\forall$  Les données du problème se traduisent par

$$\begin{aligned} (1.1) \quad A &= 2 \times a^2 + 1 \times a^1 + 1 \times a^0 \\ B &= 3 \times a^2 + 1 \times a^1 + 2 \times a^0 \\ C &= 1 \times a^5 + 3 \times a^4 + 3 \times a^3 + 0 \times a^2 + 3 \times a + 2 \times a^0 \end{aligned}$$

La relation  $C = AB$  signifie alors :

$$\begin{aligned} 6a^4 + 5a^3 + 8a^2 + 3a + 2 &= a^5 + 3a^4 + 3a^3 + 3a + 2 \\ \text{soit } a^5 - 3a^4 - 2a^3 - 8a^2 &= 0 \\ \text{ou } a^3 - 3a^2 - 2a - 8 &= 0 \end{aligned}$$

b)  $\forall$  La relation  $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$  se traduit par  $a(a^2 - 3a - 2) = 8$ ; ce qui entraîne que  $a$  divise 8, l'autre facteur étant  $T(a) = a^2 - 3a - 2$ .

c)  $\forall$   $a$  étant un diviseur de 8 strictement supérieur à 3 vaut nécessairement 4 ou 8.

Si  $a$  était égal à 8, le facteur  $T(a)$  serait égal à 38 et non à 1.

On vérifie ensuite que pour  $a = 4$  on a bien  $a(a^2 - 3a - 2) = 8$ .

3. Faisons les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{r|l} 214 & 4 \\ 14 & \overline{53} \quad 4 \\ 2 & \overline{13} \quad \overline{13} \quad 4 \\ & \overline{1} \quad \overline{1} \quad \overline{3} \quad 4 \\ & & \overline{3} & 0 \end{array}$$

Le nombre qui s'écrit 214 dans la base 10 à pour écriture 3112 dans la base 4.

Vérification!! On a bien :  $3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 214$

4. a)  $\forall$  Puisque  $a = 4$ , les relations ?? deviennent :

$$\begin{aligned} A &= 2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 1 = 37 \\ B &= 3 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 2 = 54 \\ C &= 1 \times 4^5 + 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4 + 2 = 1998 \end{aligned}$$

Soit  $A = 37, B = 54, C = 1998$

b)  $\vartheta$  On a  $A = 37$  est premier,  $B = 54 = 2 \cdot 3^3$ .

Donc  $\text{ppcm}(A, B) = 37 \cdot 2 \cdot 3^3 = A \cdot B = C$ .

On en déduit aussi  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ .

La propriété  $\text{pgcd}(A, B) = 1$  garantit l'existence des solutions de l'équation  $Ax + By = 1$ .

5. a)  $\vartheta$   $A \cdot 19 + B \cdot (-13) = 1$  donc le couple  $(x_0, y_0) = (19, -13)$  est bien solution de l'équation  $Ax + By = 1$ .

b)  $\vartheta$  La solution générale de l'équation est  $(x, y) = (x_0 + kB, y_0 - kA), k \in \mathbb{Z}$

$$S = \{(19 + 54k, -13 - 37k), k \in \mathbb{Z}\}$$

**PROBLEME.**

**Partie A:**

1. a)  $\vartheta$  notons  $s$  l'application de  $(P)$  dans  $(P)$  définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

et  $t$  l'application de  $(P)$  dans  $(P)$  définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$s$  est la symétrie orthogonale d'axe la deuxième bissectrice,

$t$  la translation de vecteur  $\vec{u}(1, 1)$  et  $\varphi = t \circ s$

(Attention!!  $\varphi$  n'est pas égal à  $s \circ t$ .)

b)  $\vartheta$  Soit  $M(x, y)$  un point de  $(C_a)$  ( c'est à dire tel que  $x \in D_{f_a}$  et  $y = f_a(x)$  ) et  $M'(x', y')$  son image par  $\varphi$ . Il faut montrer que  $y' = f_a(x')$ .

$x' = -y + 1$  appartient à  $D_{f_a}$ .

En effet  $a(-y + 1) - a + 1$  est égal à  $(a - 1) \frac{ax - a + 1}{ax - a + 1} = a - 1$ , il ne peut donc être nul puisque  $a \neq 1$ . De plus

$$\begin{aligned} f_a(x') &= f_a(-y + 1) = \frac{-y + 1}{a(-y + 1) - a + 1} = \frac{-y + 1}{-ay + 1} \\ &= \frac{-\frac{x}{ax - a + 1} + 1}{-a \frac{x}{ax - a + 1} + 1} = \frac{(-x + 1)(-a + 1)}{-a + 1} = -x + 1 = y' \end{aligned}$$

2. a)  $\vartheta$  Cherchons un point  $A(x_0, y_0)$  tel que pour toute valeur du paramètre  $a$ ,  $A$  appartient à  $C_a$  c'est à dire  $x_0 \in D_{f_a}$  et  $y_0 = f_a(x_0)$ .

On doit avoir :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}, y_0 = \frac{x_0}{ax_0 - a + 1}$$

Soit  $\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}, (x_0 y_0 - y_0) a + y_0 - x_0 = 0$

Pour cela, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} y_0 - x_0 = 0 \\ x_0 y_0 - y_0 = 0 \end{cases} \text{ c'est à dire } \begin{cases} y_0 = x_0 \\ x_0^2 - x_0 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_0 = x_0 \\ x_0 = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

En résumé :

Les courbes  $C_a$  passent toutes par les points  $O(0, 0)$  et  $A_1(1, 1)$

b)  $\varnothing$  Cherchons un point  $\ell$  (dépendant éventuellement de  $a$ ) fixé par  $f_a$ , c'est à dire tel que  $\ell \in D_{f_a}$  et  $f_a(\ell) = \ell$ .

On doit avoir :  $\frac{\ell}{a\ell - a + 1} = \ell$  c'est à dire  $a(\ell^2 - \ell) = 0$ . Donc  $\ell = 0$  ou  $1$  puisque  $a$  est non nul.

Les points fixes de  $f_a$  sont  $0$  et  $1$

3. a)  $\varnothing$   $f_a(x)$  est une fraction rationnelle,  $D_{f_a}$  est l'ensemble des réels qui n'annulent pas son dénominateur :

$$D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a-1}{a} \right\}$$

$\varnothing$  La fonction  $f_a$  est définie et continue dans  $D_{f_a}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \frac{1}{a}$

Lorsque  $x$  tend vers  $x_0 = \frac{a-1}{a}$ , le dénominateur de  $f_a(x)$  tend vers  $0$  et son numérateur vers le réel non nul  $x_0$ .

Pour calculer  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_a(x)$ , il faut connaître le signe de  $f_a(x)$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ .

Le signe de  $f_a(x)$  est celui du trinôme  $T(x) = x(ax - a + 1)$  dont les racines sont  $0$  et  $x_0$ . Ce trinôme a le signe de  $a$  à "l'extérieur des racines" et le signe de  $-a$  à "l'intérieur des racines"

Le réel  $x_0$  a même signe que le trinôme  $(a-1)a$ ; donc il est  $< 0$  si  $a$  appartient à  $]0, 1[$  et  $> 0$  sinon; ce qui motive la discussion suivante.

$\varnothing$  Si  $a$  est  $> 1$ , alors  $x_0$  est  $> 0$  et  $T(x)$  a le signe de  $a$  ( c'est à dire est  $> 0$  ) dans  $]x_0, +\infty[$  et le signe de  $-a$  dans  $]0, x_0[$

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_a(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_a(x) = -\infty$

$\varnothing$  Si  $a \in ]0, 1[$ , alors  $x_0$  est  $< 0$  et  $T(x)$  a le signe de  $a$  ( c'est à dire est  $> 0$  ) dans  $] -\infty, x_0[$  et le signe de  $-a$  dans  $]x_0, 0[$

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_a(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_a(x) = +\infty$

$\varnothing$  Si  $a$  est  $< 1$ , alors  $x_0$  est  $> 0$  et  $T(x)$  a le signe de  $a$  ( c'est à dire est  $< 0$  ) dans  $]x_0, +\infty[$  et le signe de  $-a$  dans  $]0, x_0[$

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_a(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_a(x) = +\infty$ .

En résumé :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$\varnothing$  La fonction  $f_a$  est dérivable dans  $D_{f_a}$  et

$$\forall x \in D_{f_a}, f'_a(x) = \frac{-a+1}{(ax-a+1)^2}$$

La dérivée a donc le signe de  $1 - a$ . Plus précisément :

- ⊛ Si  $1 - a > 0$  c'est à dire  $a < 1$ , alors  $\forall x \in D_{f_a}, f'_a(x) > 0$ .
  - ⊛ Si  $1 - a < 0$  c'est à dire  $a > 1$ , alors  $\forall x \in D_{f_a}, f'_a(x) < 0$ .
- Voici les tableaux de variation de  $f_a$  selon  $a$ .

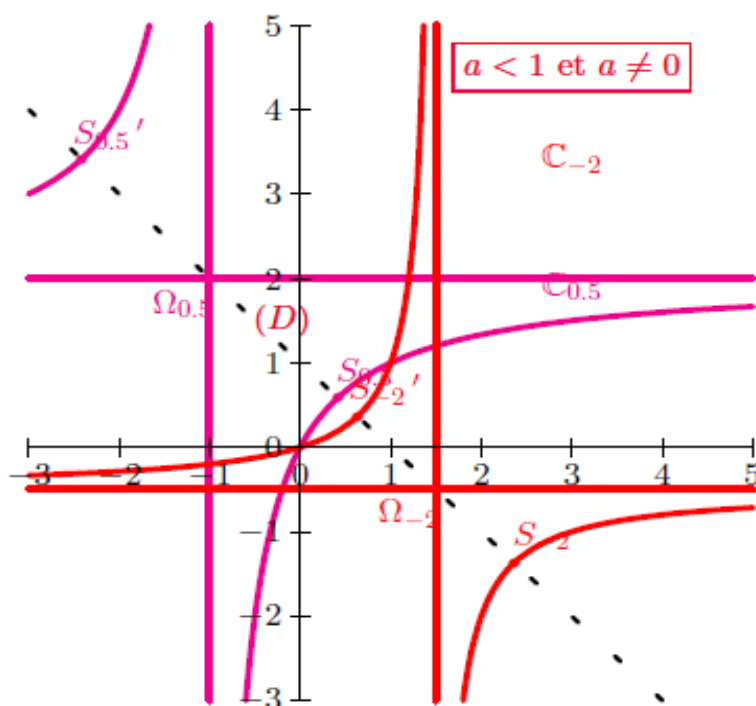
T.V de  $x \rightarrow \frac{x}{ax - a + 1}, a < 1$  et  $a \neq 0$

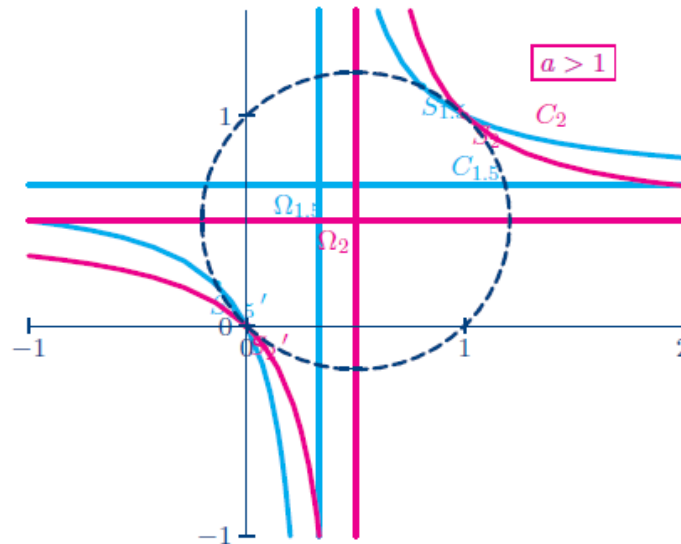
$x$	$-\infty$		$x_0$		$+\infty$
$f'$		+			
$f$	$\frac{1}{a}$	↗		↘ $\frac{1}{a}$	

T.V de  $x \rightarrow \frac{x}{ax - a + 1}, a > 1$

$x$	$-\infty$		$x_0$		$+\infty$
$f'$		-			
$f$	$\frac{1}{a}$	↘		↗ $\frac{1}{a}$	

Et voici les courbes demandées





4. a)  $\Leftrightarrow$  La fonction  $\varphi$  est strictement monotone par ce que sa dérivée est le réel non nul  $a$ . Par conséquent, pour tout  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ ,  $\varphi(x)$  est compris entre  $\varphi(0) = 1 - a$  et  $\varphi(1) = 1$ , réels strictement positifs.  $\varphi$  est donc strictement positif dans  $[0, 1]$  en particulier  $\varphi$  est non nul dans  $[0, 1]$ .

Ainsi la fonction  $x \rightarrow f_a(x)$  qu'il faut intégrer est définie et continue dans  $[0, 1]$ ; de ce fait l'intégrale  $F(a)$  est bien définie si  $a$  est non nul.

$F(0)$  est défini par l'énoncé et  $F(0) = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$

b) Le changement de variable  $t = ax + 1 - a$  donne

$$F(a) = \frac{1}{a^2} \int_{1-a}^1 \left( 1 + \frac{a-1}{t} \, dt \right) = \frac{1}{a^2} \left[ t + (a-1) \ln t \right]_{t=1-a}^{t=1}$$

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1-a}{a^2} \ln(1-a)$$

Lorsque  $a$  tend vers  $1^-$ ,  $h = 1 - a$  tend vers  $0^+$  et  $F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} h \ln h$  tend vers 1 car  $\lim_{h \rightarrow 0^+} h \ln h = 0$ .

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} F(a) = 1$$

Lorsque  $a$  tend vers  $-\infty$ ,  $h = 1 - a$  tend vers  $+\infty$  et  $F(a) = \frac{1}{h+1} + \frac{h^2}{(h+1)^2} \frac{\ln h}{h}$  tend vers 0 car  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h^2}{(h+1)^2} = 1$  et  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\ln h}{h} = 0$ .

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$$

c)  $\Leftrightarrow$  Si  $a < 0$ , alors  $[0, 1]$  est inclus dans  $\left] -\infty, 1 - \frac{1}{a} \right[$ , intervalle dans lequel la fonction  $f_a$  est continue et strictement croissante.

Donc si  $a < 0$ , alors  $\forall x \in [0, 1], f_a(x) \in [f_a(0), f_a(1)] = [0, 1]$ .

⇨ Si  $0 < a < 1$ , alors  $[0, 1]$  est inclus dans  $]1 - \frac{1}{a}, +\infty[$ , intervalle dans lequel la fonction  $f_a$  est continue et strictement croissante.

Donc si  $0 < a < 1$ , alors  $\forall x \in [0, 1], f_a(x) \in [f_a(0), f_a(1)] = [0, 1]$ .

d) On a pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$|f_a(x) - x| = \left| \frac{-ax^2 + ax}{ax - a + 1} \right| = |a| \frac{-x^2 + x}{ax - a + 1} \leq |a| \frac{x}{ax - a + 1} = |a| f_a(x) \leq |a|$$

e) Maintenant on peut écrire :

$$0 \leq |F(a) - F(0)| = \left| \int_0^1 (f_a(x) - x) dx \right| \leq \int_0^1 |f_a(x) - x| dx \leq \int_0^1 |a| dx = |a|$$

et le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{a \rightarrow 0} |F(a) - F(0)| = 0$$

Autrement dit

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = \frac{1}{2} \quad \square$$

Par conséquent  $F$  est continue en 0.

**Partie B:**

1. a) ⇨ Pour prouver que  $\mathcal{R}_a$  est un r.o.n, il suffit de vérifier que  $\|\vec{e}_1\|^2 = \|\vec{e}_2\|^2 = 1$  et  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ .

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_1\|^2 &= \frac{1}{2} (\vec{i} - \vec{j})^2 = \frac{1}{2} (\vec{i}^2 - 2\vec{i}\vec{j} + \vec{j}^2) = 1 \\ \|\vec{e}_2\|^2 &= \frac{1}{2} (\vec{i} + \vec{j})^2 = \frac{1}{2} (\vec{i}^2 + 2\vec{i}\vec{j} + \vec{j}^2) = 1 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= \frac{1}{2} (\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{2} (\vec{i}^2 - \vec{j}^2) = 0 \end{aligned}$$

b) ⇨ Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et de coordonnées  $(X, Y)$  dans le repère  $\mathcal{R}_a$ .

De la relation  $\vec{OM} = \vec{O}\Omega_a + \vec{\Omega}_a M$  on tire :

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)\vec{i} + \frac{1}{a}\vec{j} + X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 \\ x\vec{i} + y\vec{j} &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)\vec{i} + \frac{1}{a}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}X(\vec{i} - \vec{j}) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y(\vec{i} + \vec{j}) \\ x\vec{i} + y\vec{j} &= \left[1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)\right]\vec{i} + \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y)\right]\vec{j} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(1.2) \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) \end{cases}$$

2. Par un développement limité de  $a \rightarrow \ln(1 - a)$  au voisinage de 0 à l'ordre 2 on peut trouver la  $\lim_{a \rightarrow 0} F(a)$  en prenant l'expression  $F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1 - a}{a^2} \ln(1 - a)$ . On trouve  $F(a) = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ .

Ou dire après l'avoit légitimé :  $\lim_{a \rightarrow 0} F(a) = \int_0^1 \lim_{a \rightarrow 0} f_a(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

c)  $\vartheta$  Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et de coordonnées  $(X, Y)$  dans le repère  $\mathcal{R}_a$ .

$$\begin{aligned} M \in C_a &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) = \frac{1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)}{a\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)\right) + 1 - a} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) = \frac{1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)}{\frac{a}{\sqrt{2}}(X + Y)} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{2}(Y^2 - X^2) = 1 - \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow Y^2 - X^2 = \frac{2(a - 1)}{a^2} \end{aligned}$$

La courbe  $C_a$  a donc pour équation dans le repère  $\mathcal{R}_a$  :

$$(1.3) \quad Y^2 - X^2 = \frac{2(a - 1)}{a^2}$$

d)  $\vartheta$  Puisque le paramètre  $a$  est différent de 1, le réel  $a - 1$  est non nul ; nous reconnaissons donc l'équation réduite d'une hyperbole.

Plus précisément :

$\Leftrightarrow$  Si  $a - 1$  est  $> 0$  c'est à dire si  $a > 1$ , alors

$$M \in C_a \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = \left(\frac{\sqrt{2(a - 1)}}{|a|}\right)^2$$

$\Leftrightarrow$  Si  $a - 1$  est  $< 0$  c'est à dire si  $a < 1$  (et  $a \neq 0$ ), alors

$$M \in C_a \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = \left(\frac{\sqrt{2(a - 1)}}{|a|}\right)^2$$

$\Leftrightarrow$  Si  $a - 1$  est  $< 0$  c'est à dire si  $a < 1$  (et  $a \neq 0$ ), alors

$$M \in C_a \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = -\left(\frac{\sqrt{2(1 - a)}}{|a|}\right)^2$$

En résumé en posant  $\alpha = \frac{\sqrt{2|a - 1|}}{|a|}$  :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \text{Si } a > 1, \text{ alors } M \in C_a \Leftrightarrow \frac{Y^2}{\alpha^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 1 \\ \text{Les sommets } S_a \text{ et } S_a' \text{ ont pour coordonnées respectives } (0, \alpha) \text{ et } (0, -\alpha) \text{ dans le repère } \mathcal{R}_a \\ \Leftrightarrow \text{Si } a < 1, \text{ alors } M \in C_a \Leftrightarrow \frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\alpha^2} = 1 \\ \text{Les sommets } S_a \text{ et } S_a' \text{ ont pour coordonnées respectives } (\alpha, 0) \text{ et } (-\alpha, 0) \text{ dans le repère } \mathcal{R}_a \end{array} \right.$$

2.  $\vartheta$  Les axes de l'hyperbole  $C_a$  sont les axes de coordonnées du repère  $\mathcal{R}_a$ .

Elles ont pour équations respectives dans le repère  $\mathcal{R}_a$  :  $X = 0$  (axe des ordonnées) et  $Y = 0$  (axe des abscisses).

On obtient à partir des relations ??, en faisant la somme puis la différence :

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}}Y + 1 &= x + y \\ \frac{2}{\sqrt{2}}X + 1 + \frac{2}{a} &= x - y \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \begin{cases} Y &= \sqrt{2}(x + y - 1) \\ X &= \sqrt{2}(x - y - 1 - \frac{2}{a}) \end{cases}$$

Donc dans le repère  $\mathcal{R}$  l'axe des ordonnées de  $\mathcal{R}_a$  a pour équation :  $x - y - 1 - \frac{2}{a} = 0$  et l'axe des abscisses de  $\mathcal{R}_a$  a pour équation :  $x + y - 1 = 0$ .

L'axe des abscisses du repère  $\mathcal{R}_a$  est donc la droite  $(D)$

Pour que les sommets soient sur la droite  $(D)$  il faut et il suffit que cette droite soit l'axe focal c'est à dire que l'équation réduite de  $C_a$  soit de la forme " $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ".

On en déduit en utilisant ?? que pour que les sommets soient sur  $(D)$  il faut et il suffit que  $a$  soit  $< 1$ .

3. Pour calculer  $\Omega_a S_a$  plaçons-nous dans le repère  $\mathcal{R}_a$ .

Dans ce repère, les coordonnées de  $\Omega_a$  sont  $(0, 0)$  et ceux des sommets  $S_a$  et  $S_a'$  sont les couples  $(0, \alpha)$  et  $(0, -\alpha)$ ; donc  $\overrightarrow{\Omega_a S_a}$  a pour coordonnées  $(\alpha, 0)$  et  $\Omega_a S_a = \alpha$  :

$$\Omega_a S_a = \Omega_a S_a' = \frac{\sqrt{2|a-1|}}{a}$$

Pour calculer  $\Omega_2 \Omega_a$  plaçons-nous dans le repère  $\mathcal{R}$ .

Dans ce repère, les coordonnées de  $\Omega_a$  sont  $(1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{a})$  et ceux de  $\Omega_2$  sont le couple  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; donc  $\overrightarrow{\Omega_2 \Omega_a}$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}, \frac{1}{a} - \frac{1}{2})$  et  $\Omega_2 \Omega_a = \sqrt{2(\frac{1}{2} - \frac{1}{a})^2} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{2a^2}} \Rightarrow$

$$\Omega_2 \Omega_a = \sqrt{2} \frac{|a-2|}{2a}$$

Les points  $\Omega_2$  et  $\Omega_a$  étant les centres des hyperboles  $C_2$  et  $C_a$  sont sur les axes des ces hyperboles en particulier ils sont tous les deux sur l'axe  $(D)$ .

Les points  $S_a$  et  $\Omega_a$  étant respectivement un sommet et le centres de l'hyperbole  $C_a$  sont sur l'axe focal de  $C_a$ .

Comme les axes de  $C_a$  sont perpendiculaires en  $\Omega_a$ , le triangle  $\Omega_2 \Omega_a S_a$  est rectangle en  $\Omega_a$ . On en déduit en appliquant le théorème de pythagore que :

$$\Omega_2 S_a^2 = \Omega_2 \Omega_a^2 + \Omega_a S_a^2 = \frac{(a-2)^2}{2a^2} + \frac{2(a-1)}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Omega_2 S_a^2 = \Omega_2 S_a'^2 = \frac{1}{2}$$

Par conséquent  $\forall a > 1, S_a$  et  $S_a'$  appartiennent au cercle de centre  $\Omega_2$  et de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) Déjà fait, voici le tableau de variation de  $f_a$ .

T.V de  $x \rightarrow \frac{x}{ax+1-a}, 0 < a < 1$

$x$	$-\infty$	$1 - \frac{1}{a}$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$	+			+	
$f$	$\frac{1}{a}$	$+\infty$	$-\infty$	$1$	$\frac{1}{a}$

D'après le tableau de variation, l'image de l'intervalle  $[0, 1]$  est lui-même.

b) Raisonnons par récurrence pour montrer la propriété :

$P_n$  : "  $u_n$  est défini et  $u_n$  appartient à  $[0, 1]$  "

☞ Initialisation : "  $u_0$  est défini et  $u_0$  appartient à  $[0, 1]$  " (données de l'énoncé).  $P_0$  est donc vrai.

☞ Héritage : Supposons la propriété vérifiée jusqu'à un rang  $n$  donnée; en particulier que  $P_n$  soit vraie, c'est à dire "  $u_n$  est défini et  $u_n$  appartient à  $[0, 1]$  ".

Alors puisque  $f_a([0, 1]) = [0, 1]$ ,  $u_{n+1} = f_a(u_n)$  appartient à  $[0, 1]$ . La propriété  $P_{n+1}$  est vérifiée.

Les points fixes de  $f_a$  étant 0 et 1 :

☞ Si  $u_0 = 0$ , alors pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 0$ ; la suite  $(u_n)$  est constante.

☞ Si  $u_0 = 1$ , alors pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 1$ ; la suite  $(u_n)$  est constante.

5. a) ☞ Si  $u_0$  est différent de 0 et 1, il en est de même de  $u_n$  pour tout  $n$ ; et alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_a(u_n) \in ]0, 1[.$$

Pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$u_{n+1} - u_n = f_a(u_n) - u_n = a \cdot \frac{u_n - u_n}{au_n - a + 1} = a(u_n - 1)f_a(u_n)$$

$u_{n+1} - u_n$  est donc strictement négatif parce que  $u_n - 1 < 0$  et  $f_a(u_n) > 0$ .

La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

b) ☞ La suite  $(u_n)$  étant bornée par 0 et 1 et monotone, converge vers un réel  $\ell$  appartenant à  $[0, 1]$ .

A partir de la relation  $0 < u_{n+1} = f_a(u_n) < u_0 < 1$  on obtient par passage la limite :

$$0 \leq \ell = f_a(\ell) \leq u_0 < 1$$

$\ell$  est donc un point fixe de  $f_a$  différent de 1 :  $\ell = 0$ .

La suite  $(u_n)$  converge vers 0

CORRECTION SESSION NORMALE 2010

CORRECTION

EXERCICE 1.

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow MA = 4 MB \\
 &\Leftrightarrow MA^2 = 16 MB^2 \\
 1. \text{ Soit } M \text{ un point du plan.} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 16 \overrightarrow{MB}^2 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 16 \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 4 \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 4 \overrightarrow{MB}) = 0
 \end{aligned}$$

Faisons intervenir les barycentres  $G_1$  et  $G_2$  des systèmes  $((A, 1); (B, -4))$  et  $((A, 1); (B, 4))$  respectivement. Alors

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A} \cdot \overrightarrow{G_2B} = 0$$

$E$  est donc le cercle de diamètre  $[G_1G_2]$ .

2. L'ensemble  $F$  est l'arc capable défini par les points  $A, B$  et l'angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Soit  $T$  l'unique demi droite d'origine  $A$  telle que pour tout point  $P$  de  $T$ , on a :  $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = \theta$ . Désignons par  $H$  l'intersection de la médiatrice de  $[AB]$  avec la perpendiculaire à  $T$  passant par  $A$  et par  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $H$  et de rayon  $HA$ .

Alors  $\mathcal{F}$  est l'arc de  $\mathcal{C}$  d'extrémités  $A$  et  $B$  tel que  $\mathcal{F}$  et  $T$  se trouvent dans des demi plans distincts de frontière la droite  $(AB)$ .

3. a)  $D$  étant l'image de  $B$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\frac{3}{4}$ , on a  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ .  
on en déduit que  $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ .

$C$  étant l'image de  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{3}{4}\pi$ , on a  $AC = AB$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{4}\pi$

Dans le tableau suivant les points de la deuxième ligne sont les images par  $s$  des points de la première ligne.

$A$	$C$	$I$
$B$	$D$	$I$

Le rapport de  $s$  est  $\frac{DB}{CA} = \frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{3}{4}AB} = \frac{1}{3}$  et son angle est modulo  $2\pi$  :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{DB}) = \pi + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \pi + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Le rapport de  $s$  est  $\frac{1}{4}$  et son angle est  $\frac{\pi}{4} [2\pi]$

b) On a aussi  $\frac{IB}{IA} =$  rapport de  $s$  c'est à dire  $\frac{IA}{IB} = 4$  ou  $I$  appartient à  $\mathcal{E}$

Puis  $(\vec{IA}, \vec{IB}) =$  angle de  $s$  c'est à dire  $(\vec{IA}, \vec{IB}) = \frac{\pi}{4}$  ou  $I$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

$I$  est donc le seul point d'intersection de  $\mathcal{E}$  et de  $\mathcal{F}$ .

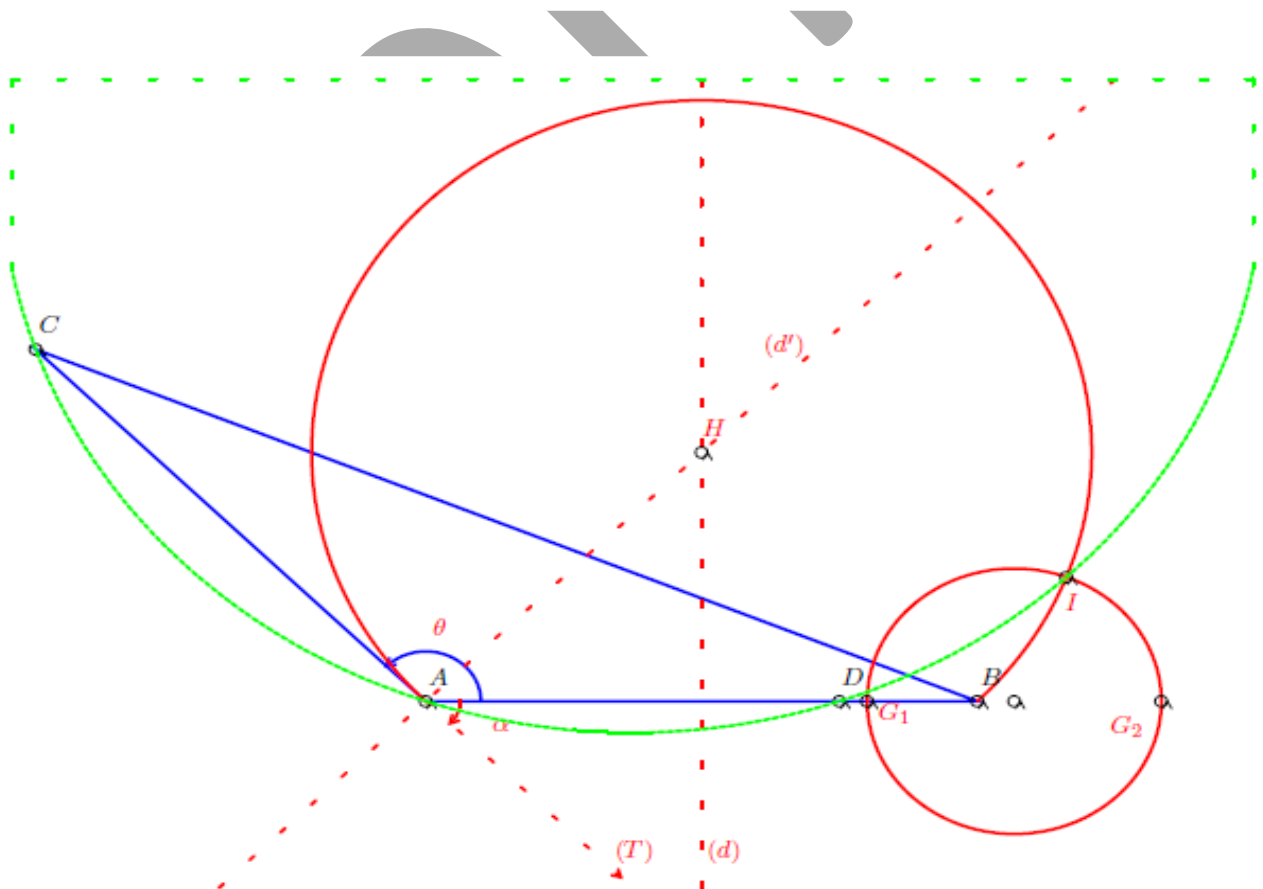
On a encore  $(\vec{IC}, \vec{ID}) =$  angle de  $s$  c'est à dire  $(\vec{IC}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{4}$

D'autre part  $(\vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{AC}, \vec{AB}) = -$  angle de  $s$  c'est à dire  $(\vec{AC}, \vec{AD}) = -\frac{3\pi}{4}$ .

On en déduit en faisant la différence  $(\vec{IC}, \vec{ID}) - (\vec{AC}, \vec{AD}) = \pi$  c'est à dire

$$(\vec{IC}, \vec{ID}) = (\vec{AC}, \vec{AD}) [\pi].$$

Donc les points  $I, A, C$  et  $D$  sont cocycliques, autrement dit  $I$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $ACD$ .



**EXERCICE 2.**

1. a) Pour que 193 soit premier, il faut et il suffit qu'il soit non divisible par tout nombre premier dont le carré est inférieur à 193. Ces nombres sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et aucun d'eux ne divise 193.

b) 193 étant premier, est premier avec tout entier naturel strictement plus petit, en particulier, il est premier avec 192.

Il suffit d'appliquer le *petit théorème de Fermat* avec  $a = 193$  et  $p = 192$ .

2. a) Le couple  $(x_0, y_0) = (155, 67)$  est solution de  $(E)$  parce que  $83.155 - 192.67 = 1$ .

b) Si  $(x, y)$  est une solution de  $(E)$  on peut écrire :

$$\begin{cases} 83.x_0 - 192.y_0 = 1 \\ 83.x - 192.y = 1 \end{cases}$$

Puis en faisant la différence

$$83.(x - x_0) - 192.(y - y_0) = 0$$

c'est à dire

$$83.(x - x_0) = 192.(y - y_0)$$

Or 83 est premier avec 192 parce que l'équation  $(E)$  a une solution (*théorème de Bezout*).

La relation précédente montre que 83 divise le produit  $192.(y - y_0)$  (en  $x - x_0$  parties) ; comme il est premier avec 192, il divise  $y - y_0$  (*théorème de Gauss*).

Donc il existe un entier  $k$  tel que  $y - y_0 = 83k$  soit  $y = y_0 + 83k$ .

La relation  $83.x - 192.y = 1$  devient alors  $83.x = 192.(y_0 + 83k) + 1 = 83.(x_0 + 192k)$  c'est à dire  $x = x_0 + 192k$ .

Ensuite on vérifie que n'importe quel couple du genre  $(x_0 + 192k, y_0 + 83k)$  est bien une solution de  $(E)$ .

L'ensemble des solutions de  $(E)$  est  $\{(155 + 192k, 67 + 83k), k \in \mathbb{Z}\}$

3. On utilisera la propriété suivante : Si  $a, b$  et  $n$  sont des entiers tels que

$$a \equiv b[n],$$

alors pour tout entier naturel  $k$  on a :

$$a^k \equiv b^k[n]$$

Posons  $\mathcal{A} = \{0, \dots, 192\}$ . Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $f(a)$  et  $g(a)$  sont les seuls éléments de  $\mathcal{A}$  tels que :

$$\begin{aligned} f(a) &\equiv a^{83} [193] & (1) \\ \text{et } g(a) &\equiv a^{155} [193] & (2) \end{aligned}$$

Puisque  $g(a)$  appartient à  $\mathcal{A}$ , dans (2), on peut remplacer  $a$  par  $f(a)$  :

$$g(f(a)) \equiv f(a)^{155} [193]$$

Dans (1) utilisons la propriété citée avec  $k = 155$  :

$$f(a)^{155} \equiv (a^{83})^{155} [193]$$

On obtient alors par transitivité de  $\equiv$ :

$$g(f(a)) \equiv a^{83.155} [193] \quad (3)$$

a) Reprenons la relation

$$83.x_0 + 192.y_0 = 1$$

qui s'écrit aussi :

$$83.x_0 = 1 + 192.y_0$$

Cette relation permet d'avoir :

$$a^{83.x_0} = a^{1+192.y_0} = a (a^{192})^{.67}$$

Comme nous le savons déjà  $a^{192} \equiv 1[193]$ . Donc  $a^{83.155} = a^{83.x_0} = a^{1+192.y_0} \equiv a. 1^{67}[193]$ .  
Finalement

$$a^{83.155} \equiv a[193] \quad (4).$$

(3) et (4) entraînent par transitivité :

$$g(f(a)) \equiv a[193]$$

$g(f(a))$  et  $a$  sont des éléments de  $\mathcal{A}$  équivalents modulo 193.

Nous allons montrer qu'ils sont égaux.

$g(f(a))$  et  $a$  sont des éléments de  $\mathcal{A}$  entraîne  $|g(f(a)) - a| \leq 192$

$g(f(a)) \equiv a[193]$  signifie il existe un entier  $k$  tel que  $g(f(a)) - a = 193k$ .

On déduit de ces deux propriétés que  $193|k| \leq 192$  c'est à dire  $k = 0$  ou  $g(f(a)) = a$ .

Le même raisonnement montre que pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , on a :  $f(g(a)) = a$ .

Nous venons de démontrer que  $f \circ g = g \circ f = I_{\mathcal{A}}$

### PROBLEME. Partie A

1. a) Dans 0.1, en dérivant la première équation et en remplaçant  $v'$  par sa valeur tirée de la deuxième équation on obtient :  $u'' = v' = au$ . Cette dernière équation est équivalente à :  $u'' - au = 0$ . La fonction  $u$  est donc solution de 0.2.

De même, dans 0.1, en dérivant la deuxième équation et en remplaçant  $u'$  par sa valeur tirée de la première équation on obtient :  $v'' = au' = av$ . Cette dernière équation est équivalente à :  $v'' - av = 0$ . La fonction  $v$  est donc solution de 0.2, équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficient constants.

b) l'équation caractéristique de 0.2 est  $r^2 - a = 0$ .

• Si  $a > 0$  l'équation caractéristique a pour solutions  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ . La solution générale de  $y'' - ay = 0$  est donc  $y = \lambda e^{\sqrt{a}t} + \mu e^{-\sqrt{a}t}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  constantes arbitraires.

La fonction  $u$  étant solution de 0.2 est de la forme précédente.

La relation  $v = u'$  donne alors  $v = \lambda\sqrt{a}e^{\sqrt{a}t} - \mu\sqrt{a}e^{-\sqrt{a}t}$ .

La solution générale de 0.1 est donc

$$\begin{aligned} u &= \lambda e^{\sqrt{a}t} + \mu e^{-\sqrt{a}t}, \\ v &= \lambda\sqrt{a}e^{\sqrt{a}t} - \mu\sqrt{a}e^{-\sqrt{a}t}, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

• Si  $a < 0$  l'équation caractéristique a pour solutions  $i\sqrt{-a}$  et  $-i\sqrt{-a}$ . La solution générale de  $y'' - ay = 0$  est donc  $y = \lambda \cos \sqrt{-a}t + \mu \sin \sqrt{-a}t$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  constantes arbitraires.

La fonction  $u$  étant solution de 0.2 est de la forme précédente.

La relation  $v = u'$  donne alors  $v = -\lambda\sqrt{-a} \sin \sqrt{-a}t + \mu\sqrt{-a} \cos \sqrt{-a}t$ .

La solution générale de 0.1 est donc

$$\begin{aligned} u &= \lambda \cos \sqrt{-a}t + \mu \sin \sqrt{-a}t, \\ v &= -\lambda\sqrt{-a} \sin \sqrt{-a}t + \mu\sqrt{-a} \cos \sqrt{-a}t, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

• Si  $a = 0$  l'équation caractéristique a pour solution  $0$ . La solution générale de  $y'' - ay = 0$  est donc  $y = \lambda t + \mu$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  constantes arbitraires.

La fonction  $u$  étant solution de **0.2** est de la forme précédente.

La relation  $v = u'$  donne alors  $v = \lambda$ .

La solution générale de **0.1** est donc

$$\begin{aligned} u &= \lambda t + \mu, \\ v &= \lambda, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Si  $a = 1$ , il existe deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telle

$$\begin{aligned} u &= \lambda e^t + \mu e^{-t} \\ v &= \lambda e^t - \mu e^{-t} \end{aligned}$$

La relation  $u(0) = 3$  et  $v(0) = 0$  se traduit par

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= 3 \\ \lambda - \mu &= 0 \end{aligned}$$

En faisant la somme et la différence, on trouve :  $\lambda = \mu = \frac{3}{2}$ .

Finalement

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2}(e^t + e^{-t}) \\ v &= \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) \end{aligned}$$

3. a) Un point  $M$  de coordonnée  $(x, y)$  appartient à  $\Gamma$  si et seulement si  $\exists t \in \mathbb{R} :$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

En élevant au carré et en faisant la différence, on obtient

$$x^2 - y^2 = \frac{9}{4}(e^{2t} + e^{-2t} + 2) - \frac{9}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - 2) = 9$$

Par conséquent  $\Gamma$  est bien contenue dans la courbe d'équation  $x^2 - y^2 - 9 = 0$

b) Pour construire  $\Gamma$  il suffit de savoir que  $\Gamma$  est la partie  $C_0$  de la conique dont les points ont des coordonnées positives.

$\Gamma$  est contenue dans  $C_0$  car pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$  sont positives.

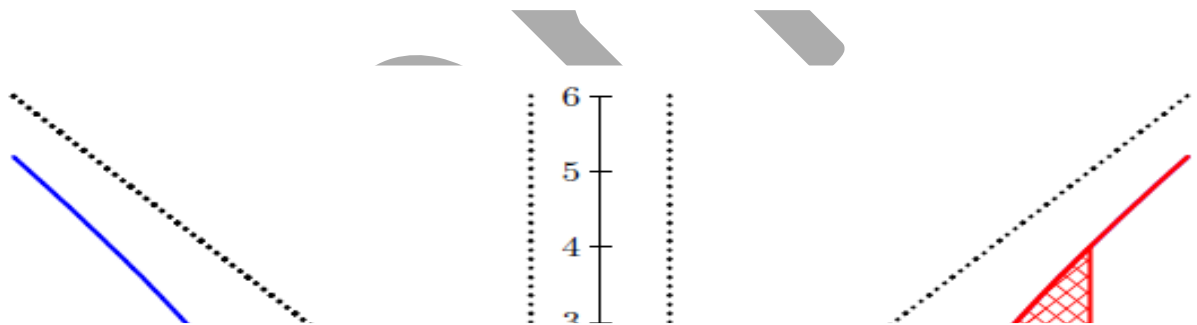
Réciproquement, soit  $M(x, y)$  un point de  $C_0$  c'est à dire un point tel que :

$$\overline{\text{Th}} \quad \begin{cases} x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 9 & = 0 \end{cases} \text{ et cherchons } t \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \begin{cases} x = \frac{3}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

La relation  $x^2 = y^2 + 9$  montre que  $x$  est  $\geq 3$ .

En posant  $s = e^t$  on doit donc chercher un  $s > 1$  tel que  $x = \frac{3}{2}(s + \frac{1}{s}) = 0$  c'est à dire

On prendra donc  $s = s_1 = \frac{1}{3}(x + \sqrt{x^2 - 9})$  c'est à dire  $t = \ln \frac{1}{3}(x + \sqrt{x^2 - 9})$ . Donc  $C_0 \subset \Gamma$   
 Finalement  $C_0 = \Gamma$



On en déduit que la dérivée ne s'annule pas dans  $\overset{\circ}{D}_f$ .  
 Au point 3, le taux d'accroissement est pour  $h > 0$  :

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + 6h}}{h} = \sqrt{1 + \frac{6}{h}}$$

Il a pour limite  $+\infty$  quand  $h$  tend vers  $0^+$ . La fonction  $f$  n'est donc pas dérivable à droite au point 3 et on peut ajouter qu'au point de  $C_f$  dont l'abscisse est 3 il y a une demi-tangente verticale.

Raisonnement analogue au point  $-3$ ; en ce point le taux d'accroissement est pour  $h < 0$  :

$$\tau(h) = \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \frac{\sqrt{h^2 - 6h}}{h} = -\sqrt{1 - \frac{6}{h}}$$

Il a pour limite  $-\infty$  quand  $h$  tend vers  $0^-$ . La fonction  $f$  n'est donc pas dérivable à gauche au point  $-3$  et on peut ajouter qu'au point de  $C_f$  dont l'abscisse est  $-3$  il y a une demi-tangente verticale.

Voir le tableau de variation de  $f$  en fin de document.

b) La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante dans l'intervalle  $I$ . Sa restriction  $\varphi$  à cet intervalle est donc une bijection de  $I$  sur  $J = f(I) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(3)] = ]0, 3]$

c) Soit  $y \in J$  et cherchons  $x \in I$  tel que  $f(x) = y$ .

$$\begin{aligned} \forall y \in J \quad f(x) = y &\Leftrightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 9} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y &\geq 0 \\ (x - y)^2 &= x^2 - 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y &\geq 0 \\ -2xy + y^2 &= -9 \end{cases} \end{aligned}$$

## Partie B

1. a) Un réel  $x$  appartient à l'ensemble  $D_f$  de définition de  $f$  si et seulement si  $x^2 - 9 \geq 0$  c'est à dire  $x \in ]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[$ .

$$\text{Donc } \boxed{D_f = ]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Quand  $x \mapsto +\infty$  nous sommes en présence d'une indétermination de la forme " $+\infty - \infty$ ". Pour lever cette indétermination, on peut écrire :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 9} = \frac{x^2 - (x^2 - 9)}{x + \sqrt{x^2 - 9}} = \frac{9}{x + \sqrt{x^2 - 9}}; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\overset{\circ}{D}_f = ]-\infty, 3[ \cup ]3, +\infty[$  et  $\forall x \in \overset{\circ}{D}_f, f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

Si  $x < -3$ , la dérivée est  $> 0$ .

Si  $x > 3$ , la dérivée est  $< 0$  car

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9} - x}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9}(\sqrt{x^2 - 9} + x)} < 0$$

On en déduit que la dérivée ne s'annule pas dans  $\overset{\circ}{D}_f$ .

Au point 3, le taux d'accroissement est pour  $h > 0$  :

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + 6h}}{h} = \sqrt{1 + \frac{6}{h}}$$

Il a pour limite  $+\infty$  quand  $h$  tend vers  $0^+$ . La fonction  $f$  n'est donc pas dérivable à droite au point 3 et on peut ajouter qu'au point de  $C_f$  dont l'abscisse est 3 il y a une demi-tangente verticale.

Raisonnement analogue au point  $-3$ ; en ce point le taux d'accroissement est pour  $h < 0$  :

$$\tau(h) = \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \frac{\sqrt{h^2 - 6h}}{h} = -\sqrt{1 - \frac{6}{h}}$$

Il a pour limite  $-\infty$  quand  $h$  tend vers  $0^-$ . La fonction  $f$  n'est donc pas dérivable à gauche au point  $-3$  et on peut ajouter qu'au point de  $C_f$  dont l'abscisse est  $-3$  il y a une demi-tangente verticale.

Voir le tableau de variation de  $f$  en fin de document.

b) La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante dans l'intervalle  $I$ . Sa restriction  $\varphi$  à cet intervalle est donc une bijection de  $I$  sur  $J = f(I) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(3)] = ]0, 3]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x = \frac{y}{2} + \frac{9}{2y} \end{cases}$$

L'application réciproque de  $\varphi$  est donc définie par  $\forall y \in J, \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{2} + \frac{9}{2y} = g(y)$

Remarque 1.

1. Une fois que l'on sait que  $\varphi$  est bijective et puisque que la réciproque est donnée par l'énoncé, il suffit de vérifier que  $\forall x \in J, g(x) \in I$  et  $f \circ g(x) = x$ .

L'étude des variations de  $g$  montre bien que  $g(J) = I$ .

$$\forall x \in J, f \circ g(x) = g(x) - \sqrt{g(x)^2 - 9} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{9}{2x}\right)^2 - 9}$$

$$\forall x \in J, f \circ g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \sqrt{\left(\frac{x}{2} - \frac{9}{2x}\right)^2} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \left|\frac{x}{2} - \frac{9}{2x}\right|$$

Or  $x \in ]0, 3] \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{9}{2x} = \frac{x^2 - 9}{2x} = \frac{(x-3)(x+3)}{2x} \leq 0$ ; donc

$$\forall x \in J, f \circ g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \left(-\frac{x}{2} + \frac{9}{2x}\right) = x$$

2. Si on n'a pas montré que  $\varphi$  est bijective, il est nécessaire de vérifier que

$$\begin{aligned} &\forall x \in J, g(x) \in I \text{ et } f \circ g(x) = x. \\ &\text{et } \forall x \in I, f(x) \in J \text{ et } g \circ f(x) = x. \end{aligned}$$

a) On a pour tout  $\beta \in ]0, 3[$ ,

$$\int_{\beta}^3 g(x) dx = \left[ \frac{x^2}{4} + \frac{9}{2} \ln|x| \right]_{\beta}^3$$

$$\int_{\beta}^3 g(x) dx = -\frac{\beta^2}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3}$$

Les courbes  $C_{\varphi}$  et  $C_{\varphi^{-1}}$  étant symétriques par rapport à la première bissectrice,  $\int_3^{\alpha} f(x) dx$  représente aussi l'aire du domaine plan  $\Delta_1$  délimité par les droites  $(B'E)$ ,  $(C'D')$  l'axe des ordonnées et la courbe  $C_{\varphi^{-1}}$ .

Soit  $\Delta_2$  l'aire du rectangle  $B'FD'C'$  et  $\Delta_3$  l'aire du rectangle  $ABEF$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_3^{\alpha} f(x) dx &= \int_{\beta}^3 g(x) dx + \Delta_2 - \Delta_3 \\ &= -\frac{\beta^2}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3} + \beta(\alpha - 3) - 3(3 - \beta) \\ &= -\frac{\beta^2}{4} - \frac{4}{27} - \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3} + \alpha\beta \\ &= -\frac{\beta^2}{4} - \frac{4}{4} - \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{9}{2\beta}\right)\beta \end{aligned}$$

Finalement  $\int_3^{\alpha} f(x) dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3}$

b) Ici  $\alpha = 5$  donc  $\beta$  est tel que  $g(\beta) = 5$  c'est à dire  $\beta = f(5) = 1$ .

c) L'aire demandée est  $\mathcal{A} = \int_3^\alpha \sqrt{x^2 - 9} dx$  en unités d'aire.  $\square$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_3^\alpha \sqrt{x^2 - 9} dx \\ &= -\int_3^\alpha f(x) dx + \int_3^\alpha x dx \\ &= -\frac{4}{\beta^2} + \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3} + \frac{1}{2} [x^2]_3^\alpha \\ &= -\frac{4}{\beta^2} - \frac{4}{4} + \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3} + \frac{1}{2} \alpha^2 \\ &= -\frac{4}{\beta^2} - \frac{4}{4} + \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{9}{2\beta} \right)^2 \\ &= -\frac{\beta^2}{8} + \frac{81}{8\beta^2} + \frac{9}{2} \ln \frac{\beta}{3} \end{aligned}$$

Et puisque  $\beta = 1$ ,  $\mathcal{A} = 10 - \frac{9}{2} \ln 3$  unités d'aire

**Partie C**

1. a) La fonction  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 9}{x^2}$ .

1. En faisant le changement de variable  $x = 3\text{ch}t$ , on trouve :  $\int \sqrt{x^2 - 9} dx = 9 \int \text{sh}^2 t dt = \frac{9}{2} \int (\text{ch}2t - 1) dt = \frac{9}{2} \left( \frac{\text{sh}2t}{2} - t \right) = \frac{9}{2} (\text{shtcht} - t) = \frac{9}{2} \left( \frac{x}{3} \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} - \text{Argch} \frac{x}{3} \right) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \ln \left( \frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} \right) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 9}}{3}$ . Donc l'aire demandée est  $\mathcal{A} = \int_3^5 \sqrt{x^2 - 9} dx = 10 - \frac{9}{2} \ln 3$  u.a.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$  Voir le tableau de variation de  $g$  en fin de document.

Posons  $K = ]3, +\infty[$ . Le tableau de variation de  $g$  montre que  $g(K) = K$ .

Démontrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 3$ .

La propriété est vrai au rang 0 par ce que  $u_0 = 5 > 3$ .

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à un rang  $n$ , en particulier  $u_n > 3$  c'est à dire  $u_n \in K$ . Alors  $u_{n+1} = g(u_n) \in g(K) = K$ .

Par conséquent la propriété est vraie pour tout  $n$ .

La fonction  $g$  étant strictement croissante dans  $K$ , son taux d'accroissement est strictement positif dans  $K$ . Donc, puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  et  $u_{n-1}$  appartiennent à  $K$ , on a :  $\frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}}$  est strictement positif c'est à dire  $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} > 0$ .

b) Les réels  $u_{n+1} - u_n$  et  $u_n - u_{n-1}$  ayant même signe, la suite  $(u_{n+1} - u_n)$  garde un signe constant. Cela signifie que la suite  $(u_n)$  est monotone.

Le signe de  $u_{n+1} - u_n$  est alors celui de  $u_1 - u_0 = \frac{5}{2} + \frac{9}{10} - 5 = -\frac{13}{5} < 0$ .

La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

La suite  $(u_n)$  étant décroissante et minorée par 3, a une limite  $\ell$  supérieure à 3.

c) Puisque la fonction  $g$  est continue dans  $K$  (c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'anulle pas dans  $K$ ) la relation  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $g(u_n) = u_{n+1}$  entraîne  $g(\ell) = \ell$  c'est à dire  $\ell = -3$  ou 3. Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ .

2. a) Soient  $n$  un entier naturel non nul et appliquons le théorème des accroissements finis à  $g$  dans l'intervalle  $]3, u_{n-1}[$  : il existe un réel  $x_0$  dans  $]3, u_{n-1}[$  tel que  $\frac{g(u_{n-1}) - g(3)}{u_{n-1} - 3} = g'(x_0)$

c'est à dire  $\frac{u_n - 3}{u_{n-1} - 3} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x_0^2}$ . Donc  $\frac{u_n - 3}{u_{n-1} - 3} < \frac{1}{2}$

En faisant le produit membre à membre de  $n = 1$  à  $n = p$  entier supérieur à 1 on obtient :

$$\prod_{n=1}^{n=p} \frac{u_n - 3}{u_{n-1} - 3} < \prod_{n=1}^{n=p} \frac{1}{2} \text{ c'est à dire après simplification } \frac{u_p - 3}{u_0 - 3} < \left(\frac{1}{2}\right)^p \text{ soit } u_p - 3 < \frac{1}{2^{p-1}}$$

Puisque  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = 0$  et  $\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_p - 3 < \frac{1}{2^{p-1}}$ , le théorème des gendarmes permet de conclure que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} |u_p - 3| = 0$  c'est à dire  $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 3$ .

b) La relation  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}$  montre que pour que  $n$  soit tel que  $u_n - 3$  soit inférieur à  $10^{-3}$ , il suffit que  $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}$  c'est à dire  $(n-1) \ln \frac{1}{2} \leq -3 \ln 10$  ou  $n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} + 1$ .

Finalement on peut prendre  $n = E\left(\frac{3 \ln 10}{\ln 2} + 1\right) + 1 = 11$  (3)

3. a) Examinons d'abord le rapport  $v_{n+1}$ .

2. On peut améliorer ce résultat en remarquant que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]3, 5]$  et que dans ce intervalle,  $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{9}{50} = \frac{8}{25}$ . En reprenant le même raisonnement avec cette nouvelle borne on trouve :  $n = 7$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{9}{2u_n} - 3}{\frac{u_n}{2} + \frac{9}{2u_n} + 3} = \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{u_n^2 + 6u_n + 9} = \frac{(u_n - 3)^2}{(u_n + 3)^2} = v_n^2$$

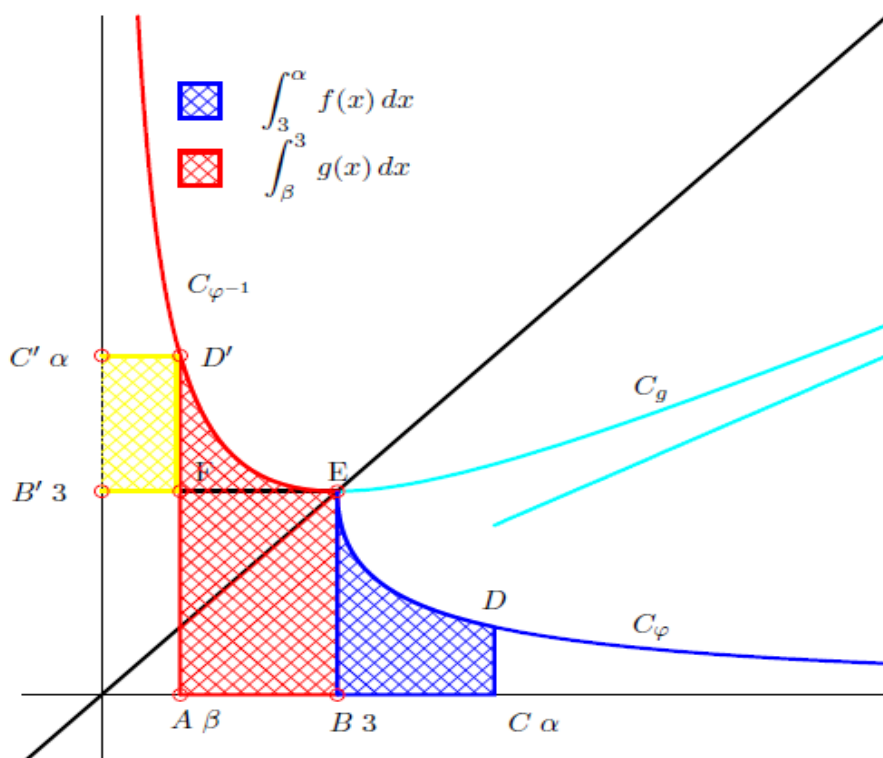
En prenant le logarithme on trouve  $\ln v_{n+1} = 2 \ln v_n$ .

— Th La suite  $(\ln v_n)$  est donc géométrique de raison 2 et de 1<sup>er</sup> terme  $\ln v_0 = \ln \frac{u_0 - 3}{u_0 + 3} = \ln \frac{2}{5}$ .

b) Par conséquent  $\forall n \in \mathbb{N}, \ln v_n = 2^n \ln v_0 = \ln \left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}$ .

KORKA

$x$	$-\infty$	$-3$	$3$	$+\infty$
$f'$	+		-	
$f$	↗ $3$		↘ $0$	



$x$	$-\infty$	$-3$	$3$	$+\infty$
$g'$	+	-	-	+
$g$	↗ $3$	↘ $-\infty$	↘ $3$	↗ $+\infty$

**CORRECTION SESSION NORMALE 2011**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ III

□♦□□

OFFICE DU BACCALAUREAT

BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal

Serveur Vocal: 628 05 59

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

11 G 18bis A 01

Durée: 4 heures

Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeM A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n<sup>o</sup> 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

## 1. CORRECTIONS

CORRECTION 1.

1.  $u_0 = 27, u_1 = 77, u_2 = 227, u_4 = 677$

Conjecturons que les deux derniers chiffres de  $u_n$  sont 27 ou 772. Puisque le premier terme  $u_0$  est un entier, on montre facilement par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est un entier.On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 4 = 3(3u_n - 4) - 4 = 9u_n - 16$ ; donc  $u_{n+2} - u_n = 8u_n - 16 = 8(u_n - 2)$ Ainsi  $u_{n+2} - u_n$  est un multiple de 8; ce qui se traduit par  $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{8}$ En prenant pour  $n$  un entier pair  $2p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  cette relation se traduit par  $u_{2(p+1)} \equiv u_{2p} \pmod{8}$ c'est à dire en posant pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{2p} = a_p$  :  $a_{p+1} \equiv a_p \pmod{8}$ Deux termes consécutifs de la suite  $(a_p)$  sont donc congrus modulo 8; donc tous les termes sont congrus au premier terme  $a_0 = u_0 = 27$  qui lui-même est congru à 3. Conclusion  $u_{2n} \equiv 3 \pmod{8}$ En prenant pour  $n$  un entier impair  $2p+1$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  cette relation se traduit par  $u_{2(p+1)+1} \equiv u_{2p+1} \pmod{8}$  c'est à dire en posant pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{2p+1} = b_p$  :  $b_{p+1} \equiv b_p \pmod{8}$ Deux termes consécutifs de la suite  $(b_p)$  sont donc congrus modulo 8; donc tous les termes sont congrus au premier terme  $b_0 = u_1 = 77$  qui lui-même est congru à 5. Conclusion  $u_{2n+1} \equiv 5 \pmod{8}$ 

3. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$ .

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison 3 et de premier terme  $v_0 = u_0 - 2 = 25$ .Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $v_n = 3^n v_0$  c'est à dire  $u_n = 2 + 25 \times 3^n$  ou  $2u_n = 4 + 50 \times 3^n$ 

4. De cette relation on déduit  $2u_n - 54 = 50(3^n - 1)$ , ce qui entraîne :  $2u_n - 54 \equiv [50]$

De plus  $(3^n - 1)$  est pair parce que  $3^n$  est impair; donc  $2u_n - 54$  est un multiple de  $2 \times 50 = 100$  c'est à dire  $2u_n - 54 \equiv [100]$ .Cette dernière relation se traduit par : il existe un entier  $q$  tel que  $2u_n = 54 + 100q$  soit,  $u_n = 27 + 50q$ . Le nombre  $50q$  se terminant par 50 ou 100, le nombre  $u_n$  se termine par  $27 + 50 = 77$  ou  $27 + 00 = 27$ 5. Remarquons d'abord que  $u_n$  est impair parce que son écriture décimale se termine par 7; donc tous ses diviseurs sont impairs.Soit  $d$  un diviseur commun positif de  $u_{n+1}$  et  $u_n$ . Il existe deux entiers  $p$  et  $q$  (dépendant de  $n$ ) tels que  $u_{n+1} = pd$  et  $u_n = qd$ .

1

La relation  $u_{n+1} = 3u_n - 4$  qui définit la suite  $(u_n)$  devient  $d(3q - p) = 4$ . Ainsi  $d$ , qui est un nombre impair, divise 4 c'est à dire  $d = 1$  et  $u_{n+1}$  et  $u_n$  sont bien premiers entre eux.

On peut aussi dire : Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers tels qu'il existe deux entiers  $q$  et  $r$  avec  $a = bq + r$  alors  $a \wedge b = b \wedge r$  et l'écriture  $u_{n+1} = 3u_n - 4$  montre que  $u_{n+1} \wedge u_n = u_n \wedge 4 = 1$  la dernière égalité provenant de ce que les seuls diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4 et  $u_n$  est impair.

**CORRECTION 2.**

1. a) Pour montrer que  $f$  est une isométrie, il suffit de vérifier qu'elle conserve la distance.

Soient  $M(x_M, y_M, z_M)$  et  $N(x_N, y_N, z_N)$  deux points quelconques de  $\mathcal{E}$  et  $M'(x_{M'}, y_{M'}, z_{M'})$  et  $N'(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'})$  leurs images respectives par  $f$  c'est à dire

$$\begin{cases} x_{M'} = y_M \\ y_{M'} = z_M + 1 \\ z_{M'} = x_M - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{N'} = y_N \\ y_{N'} = z_N + 1 \\ z_{N'} = x_N - 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= (x_{N'} - x_{M'})^2 + (y_{N'} - y_{M'})^2 + (z_{N'} - z_{M'})^2 \\ &= (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2 + (x_N - x_M)^2 \\ &= MN^2 \end{aligned}$$

Un point  $M(x, y, z)$  de  $\mathcal{E}$  est invariant si et seulement si  $f(M) = M$  c'est à dire

$$\begin{cases} x = y \\ y = z + 1 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

Ce système est donc équivalent à  $x = y = z + 1$

On reconnaît là un système d'équations d'une droite.

L'ensemble des points invariants par  $f$  est la droite d'équations :  $x = y = z + 1$

Le point  $A$  appartient manifestement à cette droite puisque  $x_A = y_A = z_A + 1$

Le point  $B(1, 1, 0)$  appartient aussi à cette droite puisque  $x_B = y_B = z_B + 1$ .

Le vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1, 1, 1)$  est donc un vecteur directeur de cette droite

L'ensemble des points invariants par  $f$  est bien la droite  $\Delta$ .

On peut aussi trouver un vecteur directeur de  $\Delta$  en partant d'une représentation paramétrique de  $\Delta$ .

Prenons  $z$  comme paramètre. La relation  $x = y = z + 1$  est équivalente à

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Le vecteur  $\vec{u}(1, 1, 1)$  est donc un vecteur directeur de cette droite

2. Etant donné que le point  $A$  appartient à  $P$ ,

pour prouver que le point  $I$  appartient à  $P$ , il suffit d'établir que  $\overrightarrow{AI}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  c'est à dire  $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u} = 0$ .

$\overrightarrow{AI}$  ayant pour coordonnées  $(-1, 0, 1)$  on a bien :  $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u} = -1.1 + 0.0 + 1.1 = 0$

a)  $I' = f(I)$  a pour coordonnées  $\begin{cases} x_{I'} = y_I = 0 \\ y_{I'} = z_I + 1 = 1 \\ z_{I'} = x_I - 1 = -2 \end{cases}$

Etant donné que le point  $A$  appartient à  $P$ ,

pour prouver que le point  $I'$  appartient à  $P$ , il suffit d'établir que  $\vec{AI}'$  est orthogonal à  $\vec{u}$  c'est à dire  $\vec{AI}' \cdot \vec{u} = 0$ .

$\vec{AI}'$  ayant pour coordonnées  $(0, 1, -2)$  on a bien :  $\vec{AI}' \cdot \vec{u} = 0.1 + 1.1 - 1.1 = 0$ .

On peut aussi donner une équation de  $P$  et établir que les coordonnées des points  $I$  et  $I'$  vérifient cette équation.

Puisque le vecteur  $\vec{u}$  est normal à  $P$ , une équation cartésienne de  $P$  sera de la forme  $x + y + z + d = 0$ . Dire que  $A$  appartient  $P$  signifie alors que  $1 + d = 0$  c'est à dire  $d = -1$ .

3.  $f$  étant une isométrie de l'espace dont l'ensemble des points invariants est la droite  $\Delta$ , elle est une rotation d'axe  $\Delta$ . Son angle a pour mesure  $\theta = (\vec{AI}, \vec{AI}')$

Or  $\vec{AI} \cdot \vec{AI}' = AI \cdot AI' \cos \theta$ ;  $\vec{AI}$  a pour coordonnées  $(-1, 0, 1)$  et  $\vec{AI}'$  a pour coordonnées  $(1, 0, -1)$ . Donc  $-1 = \sqrt{2} \sqrt{2} \cos \theta$  c'est à dire  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ; on peut donc prendre

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{2\pi}{3} \quad (\text{selon l'orientation de } \Delta)$$

4. a) Notons  $Q_1$  l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  d'images  $M'$  tels que le milieu  $J$  de  $[MM']$  appartient au plan  $Q$  d'équation  $2x + y - z = 0$ .

Soit  $M(x, y, z)$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $M'(x', y', z')$  son image par  $f$  c'est à dire  $\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$

Les coordonnées du milieu  $J$  de  $[MM']$  sont

$$x_J = \frac{1}{2}(x + x'), \quad y_J = \frac{1}{2}(y + y') \text{ et } z_J = \frac{1}{2}(z + z')$$

$$x_J = \frac{1}{2}(x + y), \quad y_J = \frac{1}{2}(y + z + 1) \text{ et } z_J = \frac{1}{2}(z + x - 1)$$

Donc

$$\begin{aligned} M \in Q_1 &\Leftrightarrow J \in Q \\ &\Leftrightarrow 2(x + y) + (y + z + 1) - (z + x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y + 2 = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  d'images  $M'$  tels que le milieu  $J$  de  $[MM']$  appartient au plan  $Q$  d'équation  $2x + y - z = 0$  est donc le plan d'équation  $x + 3y + 2 = 0$ .

b) Notons  $D_1$  l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  d'images  $M'$  tels que le milieu  $J$  de  $[MM']$  appartient à la droite  $(D)$  d'équations  $x = y = z$ .

Soit  $M(x, y, z)$  un point de  $Q_1$  et  $M'(x', y', z')$  son image par  $f$ .

Les coordonnées du milieu  $J$  de  $[MM']$  sont  $x_J = \frac{1}{2}(x + y)$ ,  $y_J = \frac{1}{2}(y + z + 1)$  et  $z_J = \frac{1}{2}(z + x - 1)$ .

Donc

$$\begin{aligned} M \in D_1 &\Leftrightarrow J \in (D) \\ &\Leftrightarrow x + y = y + z + 1 = z + x - 1 (*) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  d'images  $M'$  tels que le milieu  $J$  de  $[MM']$  appartient à la droite  $(D)$  d'équations  $x = y = z$  est donc le droite d'équations

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

La relation (\*) constitue aussi un système d'équations de notre ensemble!

**PROBLEME.** (12 pts)

### Partie A

1. a) La fonction  $f'''$  étant continue dans l'intervalle fermé borné  $I$ , est bornée (et atteint même ses bornes)

Il existe donc un réel  $K > 0$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $|f'''(x)| \leq K$ .

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx \right| &\leq \text{signe}(a) \int_0^a |(a-x)^2 f'''(x)| dx \\ &\leq M \cdot \text{signe}(a) \int_0^a (a-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} M \cdot \text{signe}(a) \left[ -(a-x)^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3} M \cdot \text{signe}(a) a^3 \\ &= \frac{1}{3} M |a|^3 \end{aligned}$$

Ensuite  $0 \leq \left| \frac{1}{a^2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx \right| \leq \frac{1}{3} M |a| \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$

et (Théorème des gendarmes) :  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx = 0$

b) La dérivée de  $f''g' - f'g''$  est

$$(f''g' - f'g'')' = f'''g' + f''g'' - (f''g''' + f'g''') = f'''g' - f'g'''$$

En intégrant cette relation de 0 à  $a$  on obtient :

$$\int_0^a (f''g' - f'g'')'(x) dx = \int_0^a (f'''(x)g'(x) - f'(x)g'''(x)) dx$$

c'est à dire la relation demandée

$$\int_0^a f'(x)g'''(x) dx = \left[ (f'g'' - f''g')(x) \right]_0^a + \int_0^a f'''(x)g'(x) dx$$

2. On prend  $g(x) = \frac{1}{6}(a-x)^3$ .

a)  $g'(x) = -\frac{1}{2}(a-x)^2$ ,  $g''(x) = a-x$  et  $g'''(x) = -1$ , et la relation précédente devient :

$$-\int_0^a f'(x) dx = \left[ (f'g'' - f''g')(x) \right]_0^a + \int_0^a f'''(x)g'(x) dx$$

En remarquant que  $g'$  et  $g''$  s'annulent au point  $a$  :

$$-(f(a) - f(0)) = -(f'(0)g''(0) - f''(0)g'(0)) - \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx$$

Il ne reste plus qu'à remplacer  $g'(0)$  et  $g''(0)$  par leurs valeurs respectives  $-\frac{1}{2}a^2$  et  $a$  pour avoir

la relation demandée

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2}f''(0)a^2 + \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx$$

b) Appliquons le résultat précédent à la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^x$ .

Toutes les dérivées de  $f$  en  $x$  sont égales à  $e^x$ ; donc toutes les dérivées de  $f$  en 0 sont égales à 1.

La relation précédente devient alors :

$$e^a = 1 + 1.a + \frac{1}{2}.1.a^2 + \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 e^x dx$$

c'est à dire  $\frac{e^a - a - 1}{a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a^2} \int_0^a (a-x)^2 e^x dx$  et la question 1 permet de conclure, puisque la fonction  $x \mapsto e^x$  est bornée dans  $[-1, 1]$  :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^a - a - 1}{a^2} = \frac{1}{2} + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a^2} \int_0^a (a-x)^2 e^x dx = \frac{1}{2}.$$

3. a)  $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 = x(0)$ , donc la fonction  $x$  est continue au point 0.

$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t)e^t = 1 = y(0)$ , donc la fonction  $y$  est continue au point 0.

Regardons le taux d'accroissement  $\tau_1$  de  $x$  au point 0

$$\begin{aligned} \forall t \neq 0, \tau_1(t) &= \frac{x(t) - x(0)}{t} \\ &= \frac{t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} \\ &= -\frac{e^t - t - 1}{t^2} \frac{t}{e^t - 1} \end{aligned}$$

Le premier facteur de ce dernier membre a pour limite  $-\frac{1}{2}$  quand  $t$  tend vers 0 d'après l'application. Le deuxième facteur a pour limite 1 quand  $t$  tend vers 0.

$$\text{Donc } x \text{ est dérivable au point 0 et } x'(0) = -\frac{1}{2}$$

Regardons le taux d'accroissement  $\tau_2$  de  $y$  au point 0

$$\begin{aligned} \forall t \neq 0, \tau_2(t) &= \frac{y(t) - y(0)}{t} \\ &= \frac{x(t)e^t - 1}{t} \\ &= x(t) \frac{e^t - 1}{t} + \frac{x(t) - 1}{t} \end{aligned}$$

Puisque  $x(t)$  a pour limite 1 quand  $t$  tend vers 0,  $\tau_2(t)$  a pour limite  $1 \times 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  quand  $t$  tend vers 0.

Donc  $y$  est dérivable au point 0 et  $y'(0) = \frac{1}{2}$

b) La tangente à  $\mathcal{G}$  au point  $A(1, 1)$  est la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur le vecteur de coordonnées  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

### Partie B

1. a) Pour simplifier, nous allons poser  $u_n = e + \frac{1}{n}$ .

La fonction  $f_1 : x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = e^x$ ; la fonction  $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Comme  $f$  égale  $f_1 \circ f_2 - u_n \cdot f_2$ , elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) - u_n f_2'(x) = f_2'(x)(f_1'(f_2(x)) - u_n)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - u_n)$$

Pour étudier la dérivabilité de  $f_n$  à droite en 0, regardons le taux d'accroissement

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad x > 0$$

$$\tau(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - u_n \sqrt{x} - 1}{x}$$

Posons  $a = \sqrt{x}$ . Alors quand  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $a$  aussi tend vers  $0^+$  et

$$\tau(x) = \frac{e^a - u_n a - 1}{a^2} = \frac{e^a - a - 1}{a^2} + \frac{(1 - u_n)}{a}$$

Dans le dernier membre de cette relation, le premier terme a pour limite  $\frac{1}{2}$  d'après la partie

A; le deuxième terme a pour limite  $-\infty$ . Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = -\infty$$

La fonction  $f_n$  n'est donc pas dérivable au point 0 et de plus au point de  $C_{f_n}$  d'abscisse 0 (c'est le point de coordonnées  $(0, 1)$ ) il y a une demi-tangente verticale.

*Remarque 1.* Pour étudier la dérivabilité de  $f_n$  en 0, on utilise souvent le théorème suivant :

*Théorème 1.* Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ , dérivable sur  $I$  sauf peut-être en un point  $a$  de  $I$ . Alors

- (i) Si  $f'$  a une limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$
- (ii) Si  $f'$  a pour limite  $+\infty$  ou  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$ , alors  $f$  n'est pas dérivable en  $a$  et de plus au point de  $C_f$  d'abscisse  $a$  il y a une tangente verticale.

Dans le cas présent,  $\forall x > 0, f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - u_n)$  et en posant comme précédemment  $a = \sqrt{x}$ , on a :

$$\forall x > 0, f_n'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^a - u_n}{a} = \frac{1}{2} \frac{e^a - 1}{a} + \frac{1}{2} \frac{1 - u_n}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \text{''}\frac{1}{2} - \infty\text{''} = -\infty$$

b) Au voisinage de  $+\infty$ , on a un indétermination de la forme  $+\infty - \infty$ . Pour lever cette indétermination écrivons :  $f_n(x) = \sqrt{x} \left( \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - u_n \right)$ , puis en posant toujours  $a = \sqrt{x}$ ,  $f_n(x) = a \left( \frac{e^a}{a} - u_n \right)$ . Comme  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{a} = +\infty$ , il vient  $\lim_{a \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ .

On a aussi  $\frac{f_n(x)}{x} = \left( \frac{e^a}{a^2} - \frac{u_n}{a} \right)$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$ .

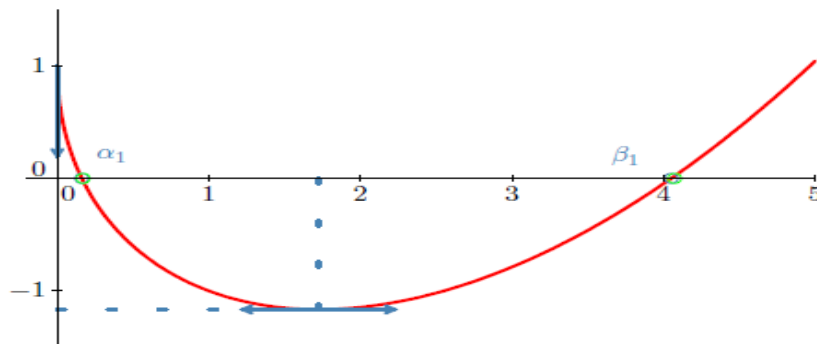
Pour  $x > 0$  on a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}} - u_n > 0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}} > u_n \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} > \ln u_n \Leftrightarrow x > (\ln u_n)^2 \end{aligned}$$

Voici le tableau de variations de  $f_n$ .

$x$	0	$\alpha_n$	1	$(\ln u_n)^2$	$\beta_n$	$+\infty$
$f_n'(x)$		-			+	
$f_n$	1	0	$\frac{1}{n}$	$u_n(1 - \ln u_n)$	0	$+\infty$

c) Et voici la courbe  $\mathcal{C}_1$  et ses tangentes verticale et horizontale.



2. a) Puisque  $u_n$  est strictement supérieur à  $e$ ,  $\ln u_n$  est strictement supérieur 1 ; donc  $f((\ln u_n)^2) = u_n(1 - \ln u_n)$  est strictement négatif.

Comme  $f(0) = 1$  est strictement positif, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f_n(x) = 0$  admet dans  $]0, (\ln u_n)^2[$  une solution unique  $\alpha_n$ .

De même,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  permet d'affirmer d'après ce même théorème que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet dans  $](\ln u_n)^2, +\infty[$  une solution unique  $\beta_n$ .

$1 < (\ln u_n)^2$  et  $f_n(1) = -\frac{1}{n} < 0 = f_n(\alpha_n)$  entraîne  $\alpha_n < 1$  car  $f_n$  est strictement décroissante dans  $[1, (\ln u_n)^2]$

Ainsi on a bien

$$\alpha_n < 1 < (\ln u_n)^2 < \beta_n$$

b)

Pour que la formule d'intégration par parties puisse être appliquée,  $v$  doit être tel que  $uv' = e^{\sqrt{x}}$ , ce qui nécessite  $v' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$  ou  $v' = 2(e^{\sqrt{x}})'$ .

On peut donc prendre  $v = 2e^{\sqrt{x}}$ . La formule donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{\sqrt{x}} dx &= [uv]_0^b - \int_0^b \frac{1}{2\sqrt{x}} 2e^{\sqrt{x}} dx \\ &= [uv]_0^b - \int_0^b v' dx \\ &= [uv - v]_0^b \end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^b e^{\sqrt{x}} dx = 2 + 2e^{\sqrt{b}}(\sqrt{b} - 1)$$

c) On a  $\int_0^b \sqrt{x} dx = \int_0^b x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^b = \left[ \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^b = \frac{2}{3} b\sqrt{b}$

Par conséquent  $\int_0^b f(x) dx = 2 + 2e^{\sqrt{b}}(\sqrt{b} - 1) - \frac{2}{3} u_n b\sqrt{b}$

La relation  $f_n(\alpha_n) = 0$  se traduit par  $e^{\sqrt{\alpha_n}} - u_n \sqrt{\alpha_n} = 0$  c'est à dire  $e^{\sqrt{\alpha_n}} = u_n \sqrt{\alpha_n}$ .  
Donc

$$\begin{aligned} I_n &= 2 + 2e^{\sqrt{\alpha_n}}(\sqrt{\alpha_n} - 1) - \frac{2}{3} u_n \alpha_n \sqrt{\alpha_n} \\ &= 2 + 2u_n \sqrt{\alpha_n}(\sqrt{\alpha_n} - 1) - \frac{2}{3} u_n \alpha_n \sqrt{\alpha_n} \end{aligned}$$

$$I_n = 2 + 2u_n \sqrt{\alpha_n} \left( \sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3} \alpha_n - 1 \right)$$

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$

a) La fonction  $\varphi$  est continue et dérivable dans  $\mathbb{R}_+^*$ , et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^x$$

Le signe de  $\varphi'(x)$  est donc celui de  $x - 1$ . Voici le tableau de variations de  $\varphi$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi$	$+\infty$	$e$	$+\infty$

La fonction  $\varphi$  est continue et strictement décroissante dans  $V_1$ . Sa restriction à  $V_1$  est donc une bijection  $h_1$  de  $V_1$  dans  $\varphi(V_1) = W = [e, +\infty[$ .

La fonction  $\varphi$  est continue et strictement croissante dans  $V_2$ . Sa restriction à  $V_2$  est donc une bijection  $h_2$  de  $V_2$  dans  $\varphi(V_2) = W$

b) La relation  $f_n(\alpha_n) = 0$  se traduit par  $e^{\sqrt{\alpha_n}} - u_n \sqrt{\alpha_n} = 0$  c'est à dire  $\frac{e^{\sqrt{\alpha_n}}}{\sqrt{\alpha_n}} = u_n$  ou, puisque  $\alpha_n$  appartient à  $V_1$ ,  $u_n = h_1(\alpha_n)$ .

On en déduit, puisque  $h_1$  est une bijection :  $\alpha_n = h_1^{-1}(u_n)$ .

La fonction  $h_1$  étant continue et la suite  $(u_n)$  convergente de limite  $e$ ,

la suite  $(\alpha_n)$  est convergente et de limite  $h_1^{-1}(e) = 1$

Sachant que la suite  $(\alpha_n)$  est convergente, la relation  $I_n = 2 + 2u_n \sqrt{\alpha_n} \left( \sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3} \alpha_n - 1 \right)$  montre que

la suite  $(I_n)$  est aussi convergente et de limite  $2 + 2e \cdot 1 \left( 1 - \frac{1}{3} - 1 \right) = 2 - \frac{2}{3}e$

c) Le même raisonnement montre que la suite  $(\beta_n)$  est convergente et de limite  $h_2^{-1}(e) = 1$

4. a) Les relations  $\frac{e^{\sqrt{\alpha_n}}}{\sqrt{\alpha_n}} = \frac{e^{\sqrt{\beta_n}}}{\sqrt{\beta_n}} = u_n$  montrent que

$\varphi(\sqrt{\alpha_n}) = \varphi(\sqrt{\beta_n})$  c'est à dire , puisque  $\sqrt{\alpha_n} \in V_1$  et  $\sqrt{\beta_n} \in V_2$ ,  
 $h_1(\sqrt{\alpha_n}) = h_2(\sqrt{\beta_n})$  ou,  $\sqrt{\beta_n} = h_2^{-1} \circ h_1(\sqrt{\alpha_n}) = h(\sqrt{\alpha_n})$ .  
 le point  $M_n$  appartient bien au graphe de  $h$ .

b)

Soit  $x$  un réel

$$x \in D_h \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_{h_1} \\ h_1(x) \in D_{h_2^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in V_1 \\ h_1(x) \in V_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in V_1$$

Lorsque  $x$  tend vers 0,  $h_1(x) = \varphi(x)$  tend vers  $+\infty$ . Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $h_2^{-1}(x)$  tend

vers  $+\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ .

Lorsque  $x$  tend vers 1,  $h_1(x) = \varphi(x)$  tend vers  $e$ . Lorsque  $x$  tend vers  $e$ ,  $h_2^{-1}(x)$  tend vers 1

donc  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ .

La fonction  $h$  est décroissante car elle la composée de la fonction décroissante  $h_1$  par la fonction croissante  $h_2^{-1}$ .

c)

La fonction  $h_1$  est dérivable sur  $]0, 1[$  car c'est la restriction de  $\varphi$  à  $V_1$ .

La fonction  $h_2^{-1}$  est dérivable sur  $]e, +\infty[$  car  $h_2$  est dérivable sur  $V_2$  ( c'est la restriction de  $\varphi$  à  $V_2$ ,) et sa dérivée ne s'annule pas dans  $]1, +\infty[$ .

Donc  $h = h_2^{-1} \circ h_1$  est dérivable dans  $]0, 1[$ .

Pour tout  $x$  appartenant à  $V_1$  on a

$$\begin{aligned} \varphi[h(x)] &= h_2[h(x)] && \text{car } h(x) \in V_2 \\ &= h_2[h_2^{-1} \circ h_1(x)] \\ &= h_1(x) \\ &= \varphi(x) && \text{car } x \in V_1 \end{aligned}$$

Remarquons que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{x-1}{x^2}e^x = \frac{x-1}{x}\varphi(x)$ .

En dérivant par rapport à  $x$  la relation  $\varphi(h(x)) = \varphi(x)$ , pour  $x \in ]0, 1[$  on obtient :

$\forall x \in ]0, 1[, \varphi'(h(x))h'(x) = \varphi'(x)$  c'est à dire

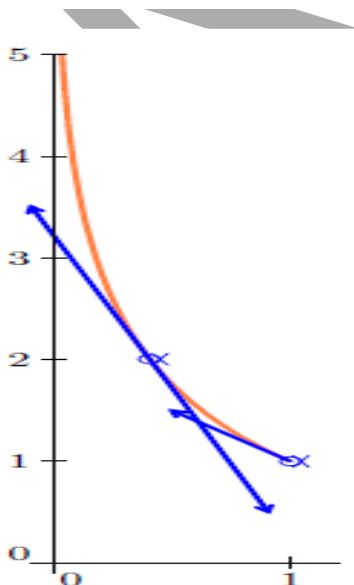
$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, 1[, h'(x) &= \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(h(x))} \\ &= \frac{x-1}{x} \varphi(x) \frac{h(x)}{(h(x)-1)\varphi(h(x))} \\ &= \frac{x-1}{x} \frac{h(x)}{h(x)-1} \quad \text{car } \varphi(x) = \varphi(h(x)) \end{aligned}$$

5. La tangente au point  $A$  a pour pente  $h'(0,4) = \frac{0,4-1}{0,4} \frac{h(0,4)}{h(0,4)-1} = -3$

Une équation de cette tangente est donc  $y = -3(x - 0,4) + 2$

Finalement  $T_A : -3x + 3,2$

La tangente  $T_B$  est déjà déterminée dans la partie A puisque  $\mathcal{G} = \mathcal{C}_h$ .





Né en 1991, Thierno Korka DIALLO est élève ingénieur originaire de la région de Ziguinchor où il fit ses études moyenne et secondaire. Après avoir décroché son Bac en série S1, il est admis à l'Ecole Polytechnique de Thiès. Soucieux de la réussite des élèves, il s'est engagé dans l'élaboration de documents pouvant leur être utiles. Ainsi, son objectif dans cet ouvrage est de briser le mythe dont on entoure à tort les Mathématiques. Il garde encore dans son agenda de nombreux recueils qu'il espère publier dans les années à venir.

Pour plus d'informations, Visitez : <http://document1991.skyrock.com>

La sortie de l'Afrique de sa marginalité sur la scène scientifique mondiale passe d'abord par l'accès à la culture scientifique qui n'a pas nécessairement pour but de former de futurs scientifiques mais d'aider le plus grand nombre à comprendre le monde et permettre à tous de porter un regard critique sur les enjeux des avancées des sciences (risques, utilisation).

A l'école et plus particulièrement au lycée, l'enseignement scientifique est presque essentiellement une acquisition de savoirs. Pour motiver les élèves à l'apprentissage de ces savoirs souvent complexes, peut-être faudrait-il commencer par former les élèves à une démarche scientifique en les mettant dans une véritable situation de recherche ? Entrer dans une démarche de recherche, c'est apprendre la rigueur, se poser des questions, avoir un regard critique à la fois sur les contenus et les méthodes.

Parallèlement, il faudrait former les enseignants, souvent déstabilisés, quand il s'agit d'aider les élèves en situation de recherche. Il n'est pas nécessaire de connaître la réponse à toutes les questions des élèves, mais il s'agit bien de les aider à trouver eux mêmes les réponses.

L'enseignement scientifique attire et fait peur. La démarche scientifique permet de développer, entre autres, l'esprit critique, la créativité, une attitude citoyenne... En ce sens l'apprentissage de cette démarche n'est-elle pas un moyen de contribuer à la réussite du plus grand nombre.

Le savoir est dans la nature, et pour le trouver il faut se détacher des mœurs de la société, c'est comme le disait Rémy de Gourmont "Savoir ce que tout le monde sait, c'est ne rien savoir. Le savoir commence là où commence ce que le monde ignore"; bref, il faut être anticonformiste pour être un bon scientifique.

Thierno Korka DIALLO

Du même auteur, découvrez (pour les élèves de S1) ou visiter le site : <http://document1991.skyrock.com/profil/photos/10>

