Mathématiques

Première année Bac sciences expérimentales

Programme Marocain-BIOF

12 cours bien détaillés

12 résumés bien précis

12 séries d'exercices corrigées

6 devoirs libre corrigés

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 04/09/2024

Table des matières

1

Notions de logique

1) Proposition – Fonction propositionnelle

A retenir 1 :

1/On appelle **proposition** (ou assertion) tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).

2/On appelle **fonction propositionnelle** tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.

Remarques 1 :

1/*/ Si une proposition est vraie, alors on dit que sa valeur de vérité est vraie et on la note par V ou 1

*/ Si une proposition est fausse, alors on dit que sa valeur de vérité est fausse et on la note par F ou 0.

*Le tableau suivant est appelé le **tableau de vérité** de la proposition P :

P
V
F

2/ Une proposition est souvent notée par les lettres : $P,\ Q,\ R...$

3/ Selon le nombre des variables, les fonctions proportionnelles sont notées :
$P(x),\ Q(x;y),\ R(x;y;z)...$

Exemple 1 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 ‘’ 1 est un entier relatif ‘’

P_2 ‘’ $\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}$ ‘’

P_3 “ $\frac{2}{5}$ est un nombre décimale“

P_4 ‘’ 2 est le seul nombre pair et premier ‘’

P_5 ‘’ Un carrée est un parallélogramme ‘’

Application 1 : Déterminer la nature des énoncés mathématiques suivants

P " $\pi=3,14$ "

Q " $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\in\mathbb{N}$ "

$A(x)$ ‘’ $x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$ ’’

$B(x)$ ‘’ $x\in\mathbb{R},\ x^2\geq x$ ’’

R ‘’ $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ’’

$C(n)$ ‘’ $n\in\mathbb{N}^*,\ n^2+n+1$ est un nombre premier ’’

$D(n;m)$ ‘’ $(n;m)\in\mathbb{N}^2,\ n+m=10$ ’’

2) Quantificateurs

Activité

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2-x-6<0$

2) En déduire la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 ‘’ Quel que soit x appartient à $]-2;3[\ : x^2-x-6<0$ ‘’

P_2 ‘’ Il existe au moins un nombre x appartient à $\mathbb{R}$ tel que $x^2-x-6<0$ ‘’

P_3 ‘’ Quel que soit x appartient à $\mathbb{R}\ : x^2-x-6<0$ ‘’

P_4 ‘’ Il existe au moins un nombre x appartient à $]-2;3[$ tel que $x^2-x-6<0$ ‘’

P_5 ‘’ Il existe un unique nombre réel x tel que $x^2-x-6=0$ ‘’

A retenir 2 :

1/ L'expression " **quel que soit** " s'appelle le quantificateur universel et se note $\forall$

2/ L'expression " **il existe au moins** " s'appelle quantificateur existentiel et se note $\exists$

3/ L'expression " **il existe un unique** " s'appelle quantificateur existentiel de l'unicité et se note $\exists!$

4/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.

Remarque 2 :

Exemples de certains types de propositions liés aux fonctions propositionnelles $P(x)$ et $P(x;y)$

1/ $(\forall x\in E)\ P(x)$	5/ $(\forall x\in E)(\exists y\in F)\ P(x;y)$
2/ $(\exists x\in E)\ P(x)$	6/ $(\forall x\in E)(\forall y\in F)\ P(x;y)$
3/ $(\exists! x\in E)\ P(x)$	7/ $(\exists x\in E)(\exists y\in F)\ P(x;y)$
4/ $(\exists x\in E)(\forall y\in F)\ P(x;y)$	

Exemple 2 :

Ecrire les propositions suivantes avec les quantificateurs puis déterminer leurs vérités :

P : L'équation $x^2+x+1=0$ admet au moins une solution réelle.

Q : Tous les nombres naturels sont positifs.

R : Certains nombres réels ne sont pas rationnels.

S : L'équation $2x+1=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

T : Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel m on a : $m=2n$

U : Pour tout nombre réel x, il existe un réel y tel que $y>x$

V : Il existe un réel y tel que pour tout nombre réel x : $y>x$

Remarques 3 :

1/ On peut permuter des quantificateurs de même nature.

2/ On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

3/ */ Quand on écrit $(\exists x\in E)(\forall y\in F)\ P(x;y)$ l'élément x est fourni une bonne fois pour toutes **avant** les y est donc **constant** quand y varie.

*/ Quand on écrit $(\forall y\in F)(\exists x\in E)\ P(x;y)$ l'élément x est fourni **après** chaque y il dépend de y et **peut donc varier** quand y varie.

Exemple : Voici une phrase vraie « Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone », bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : « Il existe un numéro, pour toutes les personnes ». Ce serait le même numéro pour tout le monde !

4/ $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

5/ $x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow[(\exists(a;b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*) :\ x=\dfrac{a}{b}$ et $a\wedge b=1]$.

Exemple 3 :

Etudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1 :\ (\exists! x\in\mathbb{R})\ x^2=4$	$P_5 :\ (\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2)\ \sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
$P_2 :\ (\forall x\in\mathbb{R})\ x^2+x+1>0$	$P_6 :\ (\exists n\in\mathbb{N})(\exists m\in\mathbb{N})\ n\times m=12$
$P_3 :\ (\exists x\in\mathbb{N})\ 3x-1=0$	$P_7 :\ (\forall n\in\mathbb{N})(\forall m\in\mathbb{N})\ n\times m=12$
$P_4 :\ (\forall x\in\mathbb{R})\ \lvert x\rvert=x$	

Application 2 :

Exercice 1 de la série 1.

3) Négation d'une proposition

A retenir 3 :

1/ La négation d'une proposition P est la proposition qui vraie si P est fausse ; et qui est fausse si P est vraie on la note : $\overline{P}$

2/ Le tableau suivant est appelé le **tableau de vérité de la négation :**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

3/ **La négation de certains symboles usuels :**

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$

4/ **Négation d'une proposition quantifiée :**

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble non vide E

*/ La négation de la proposition $(\forall x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$

*/ La négation de la proposition $(\exists x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\forall x \in E)\ \overline{P(x)}$

Exemple 4 :

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes et déterminer leur négation :

$P_1 : \sqrt{1+\sqrt{3}} = 2$; $P_2 : \pi > 3,14$; $P_3 : \sqrt{11} \in [3;4]$; $P_4 : 3 < \sqrt{11} < 4$

Exemple 5 :

Donner la négation des propositions suivantes :

P "$(\forall x \in \mathbb{R})\ |x| > x$ " ; Q "$(\exists x \in \mathbb{Z})\ \sqrt{x} = x^2$ " ; R "$(\exists m \in \mathbb{Z})(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ mn = m+n$"

Exemple 6 :

Déterminer la valeur de vérité et la négation des propositions suivantes :

$P_1 :\quad (\exists x \in \mathbb{N})\ x^2 = 36$

$P_2 :\quad (\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq x$

$P_3 :\quad (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ y = 2x$

$P_4 :\quad (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ y = \dfrac{x}{2}$

$P_5 :\quad (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ y = \sqrt{x}$

$P_6 :\quad (\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\ y = \sqrt{x}$

Application 3 : Exercices 2 et 3 de la série 1

4) Opérations sur deux propositions

4-1 Conjonction - Disjonction

A retenir 4 :

1/ La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note $(P\ et\ Q)$ ou $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2/ La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note $(P \ ou \ Q)$ ou $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 7 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 $2<7$ et $10=5$

P_2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $|-4|=4$

P_3 $2<7$ ou $10=5$

P_4 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ou $|-4|=4$

P_5 $2<-7$ ou $10=5$

P_6 $8 \leq 8$ ou $9 \leq 10$

4-2 Implication

A retenir 5 :

Soient P et Q deux propositions :

La proposition $(\overline{P} \ ou \ Q)$ qui est fausse seulement si P est vraie et Q est fausse s'appelle **l'implication** de deux propositions P et Q (dans cet ordre) se note $P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarques 4 :

1/L'implication : $P \Rightarrow Q$ se lit :

*/ P implique Q.

*/ Si on a P alors Q.

*/ P est une condition suffisante pour avoir Q.

*/ Q est une condition nécessaire pour P.

2/Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ n'ont pas la même table de vérité, alors l'implication logique n'est pas commutative.

3/ L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$

Exemple 8 :

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes

1) 5 un nombre impair $\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 0$

2) $\pi \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \neq 2$

3) $1=2 \Rightarrow 3=4$

4) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{(-3)^2} = -3$

4-3 Equivalence

A retenir 6 :

L'équivalence de deux propositions P et Q, est la proposition qu'on note $P \Leftrightarrow Q$ et elle est vraie seulement si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarques 5 :

1/L'équivalence : $P \Leftrightarrow Q$ se lit :

*/ P équivalent à Q.

*/ P si et seulement si Q.

*/ $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

2/Les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ ont la même table de vérité, alors l'équivalence logique est commutative.

Exemple 9 :

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P: \ |-4| = 4 \Leftrightarrow 3 \leq 12$; $Q: \ 1+\sqrt{6}^2 = 7 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$; $R: \ \pi < 3 \Leftrightarrow 5 \leq \sqrt{2}$

5) Lois logiques

Activité

Dresser le tableau de vérité de la proposition : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

A retenir 7 :

Une **loi logique** est une proposition formée de plusieurs propositions P, Q,..... liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q,.....

Remarque 6 : Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité.

Exemple 10 :

Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1) $P \Rightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$

2) $\left[P \, ou \, (Q \, et \, R)\right] \Leftrightarrow \left[(P \, ou \, Q) \, et \, (P \, ou \, R)\right]$

Solution :

1) (Voir le cahier)

2) Nous avons :

P	Q	R	$Q\,et\,R$	$P\,ou\,Q$	$P\,ou\,R$	$P\,ou\,(Q\,et\,R)$	$(P\,ou\,Q)\,et\,(P\,ou\,R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Donc l'équivalence $\left[P\,ou\,(Q\,et\,R)\right]\Leftrightarrow\left[(P\,ou\,Q)\,et\,(P\,ou\,R)\right]$ est toujours vraie donc la proposition $\left[P\,ou\,(Q\,et\,R)\right]\Leftrightarrow\left[(P\,ou\,Q)\,et\,(P\,ou\,R)\right]$ est une loi logique.

Application 5 : Exercice 5 de la série 1.

Remarque 7 :

Quelles que soit les propositions P, Q et R, les propositions suivantes sont des lois logiques :

1/ Lois logiques usuelles $\overline{\overline{P}}\Leftrightarrow P$ $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\overline{P}\,ou\,Q)$ $(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow[(P\Rightarrow Q)\ et\ (Q\Rightarrow P)]$ $(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(\overline{P}\Leftrightarrow\overline{Q})$ **2/ La commutativité** $(P\,et\,Q)\Leftrightarrow(Q\,et\,P)$ $(P\,ou\,Q)\Leftrightarrow(Q\,ou\,P)$ $(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(Q\Leftrightarrow P)$ **3/ L'associativité** $\left[(P\ et\ Q)\ et\ R\right]\Leftrightarrow\left[P\ et\ (Q\ et\ R)\right]$ $\left[(P\ ou\ Q)\ ou\ R\right]\Leftrightarrow\left[P\ ou\ (Q\ ou\ R)\right]$	**4/ La distributivité** $\left[P\,et\,(Q\,ou\,R)\right]\Leftrightarrow\left[(P\,et\,Q)\,ou\,(P\,et\,R)\right]$ $\left[P\,ou\,(Q\,et\,R)\right]\Leftrightarrow\left[(P\,ou\,Q)\,et\,(P\,ou\,R)\right]$ **5/ Lois de Morgan** $\overline{(P\,et\,Q)}\Leftrightarrow(\overline{P}\,ou\,\overline{Q})$ (On dit que la négation de $(P\,et\,Q)$ est $(\overline{P}\,ou\,\overline{Q})$) $\overline{(P\,ou\,Q)}\Leftrightarrow(\overline{P}\,et\,\overline{Q})$ (On dit que la négation de $(P\,ou\,Q)$ est $(\overline{P}\,et\,\overline{Q})$) **6/ Négation de l'implication** $\overline{(P\Rightarrow Q)}\Leftrightarrow(P\,et\ \overline{Q})$ (On dit que la négation de $(P\Rightarrow Q)$ est $(P\,et\ \overline{Q})$) **7/ Négation de l''équivalence** $\overline{(P\Leftrightarrow Q)}\Leftrightarrow\overline{[(P\Rightarrow Q)\ et\ (Q\Rightarrow P)]}$ $\overline{(P\Leftrightarrow Q)}\Leftrightarrow(\overline{P}\Leftrightarrow Q)$ $\overline{(P\Leftrightarrow Q)}\Leftrightarrow(P\Leftrightarrow\overline{Q})$

Exemple 11 :

Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, déterminer la négation des propositions suivantes :

$P:\ x>2\Rightarrow x\leq 5$ $\qquad$ $Q:\ a=b\ ou\ b=c$ $\qquad$ $R:\ x\in\mathbb{R}^{+}\Leftrightarrow\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $S:\ a<b\ \ et\ \ b<c$

Remarque 8 : la négation de $\exists!$

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble non vide E

La proposition $Q:\ (\exists! x\in E)\ P(x)$ signifie que $\left[\left((\exists x\in E)\ P(x)\right) et\ \left((\forall x;y\in E)\ P(x)=P(y)\Rightarrow x=y\right)\right]$

Donc la négation de la proposition Q est $\overline{Q}:\ \left[\left((\forall x\in E)\ \overline{P(x)}\right)\ ou\ \left((\exists x;y\in E)\ P(x)=P(y)\ et\ x\neq y\right)\right]$

Application 6 : Exercice 6 de la série 1.

6) Raisonnements mathématiques

6-1 Raisonnement par contre-exemple

A retenir 8 :

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x\in E)\ P(x)$ est fausse, il suffit de trouver $x\in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par contre-exemple.

Exemple 12 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ x^{2}+x-2=0$

2) $\left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^{2}\right):\ 3x+5y=8$

Application 7 : Exercice 7 de la série 1.

6-2 Raisonnement direct (déductif)

A retenir 9 :

Pour démontrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on utilise l'un des méthodes suivantes :

1/ On montre que $P \Rightarrow ..... \Rightarrow ..... \Rightarrow ..... \Rightarrow .... \Rightarrow Q$ à l'aide des opérations est des propriétés mathématiques.

$$\boxed{\left[(P \Rightarrow R)\ et\ (R \Rightarrow Q)\right] \Rightarrow \left[P \Rightarrow Q\right]}$$

2/ On suppose P est vraie et on montre que Q est vraie.

Ce type de démonstration est appelé raisonnement direct ou raisonnement déductif ou raisonnement par des implications successives.

Exemples 13 :

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ |x| \leq 2 \Rightarrow |3x+1| \leq 7$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ x > 0 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

Application 8 : Exercice 8 de la série 1.

6-3 Raisonnement par contraposée

A retenir 10 :

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})}$$

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par contraposée.

Remarques 9 :

1/ Il faut bien distinguer entre la négation, la contraposé et la réciproque.

*/ la négation de $P \Rightarrow Q$ est $(P\ et\ \overline{Q})$

*/ la réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$

*/ la contraposé de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n^2\ est\ pair\ \Rightarrow n\ est\ pair$

Exemples 14 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $n^2\ est\ pair\ \Rightarrow n\ est\ pair$

2) Soit a et b deux nombres réels tel que $a \neq -b$. Montrer que : $a \neq -\dfrac{1}{2}b \Rightarrow \dfrac{a-b}{a+b} \neq -3$

Application 9 : Exercice 9 de la série 1.

6-4 Raisonnement par équivalence

A retenir 11 :

1/ Pour démontrer qu'une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on utilise l'un des méthodes suivantes :

*/ On montre que $P \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow Q$ à l'aide des opérations est des propriétés mathématiques.

➢ Ce type de démonstration est appelé raisonnement par des équivalences successives.

$$\boxed{\left[(P \Leftrightarrow R)\ et\ (R \Leftrightarrow Q)\right] \Rightarrow \left[P \Leftrightarrow Q\right]}$$

*/ On montre que les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

2/ Pour démontrer qu'une proposition P est vraie il suffit de montrer que $P \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow Q$ à l'aide des opérations est des propriétés mathématiques où Q une proposition vraie.

Exemples 15 :

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x-1| < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3}$

2) Montrer que $(\forall x \in [-2;2])\ \sqrt{4-x^2} < x + 2\sqrt{2}$

Remarque 10 : Raisonnement par double implication

Pour prouver une équivalence de type $P \Leftrightarrow Q$, il suffit de prouver les doubles implications $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par double implication.

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \left[(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow P)\right]$$

Application 10 : Exercice 10 de la série 1.

6-5 Raisonnement par disjonction des cas

A retenir 12 :

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E)\ P(x)$ est vraie, il suffit de montrer que $P(x)$ est vraie dans tous les cas de la variable x dans E .

$$\left[(R \Rightarrow P)\ et\ (Q \Rightarrow P)\right] \Rightarrow \left[(R\ ou\ Q) \Rightarrow P\right]$$

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par disjonction des cas.

Exemples 16 :

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\quad x^2 - x + 1 \geq |x-1|$; 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n(n+1)$ est pair.

Application 11 : Exercice 11 de la série 1.

6-6 Raisonnement par l'absurde

A retenir 13 :

Pour montrer qu'une proposition est vraie par le raisonnement par l'absurde on suppose que $\overline{P}$ est vraie (C'est-à-dire que P est fausse) et on cherche à trouver une contradiction.

$$\left[(\overline{P} \Rightarrow Q)\ et\ (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})\right] \Rightarrow P$$

Exemples 17 :

1) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; 2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A = \dfrac{n+3}{n+5}$, montrer que $A \neq 1$

3) Soit ABC un triangle et $a > 0$ tel que $BC = 3a,\ CA = 2a$ et $AB = 4a$. Montrer que ABC n'est pas rectangle.

Solution : 1) On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ donc $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$ (d'après la remarque 3 page 5)

Donc $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, c'est-à-dire $a^2 = 2b^2\quad (I)$

Donc a^2 est pair. On déduit que a est pair (d'après la remarque 9 page 10)

Donc $(\exists k \in \mathbb{N})\ \ a = 2k$, on remplace dans (I) on obtient $b^2 = 2k^2$ donc b^2 est pair.

Par suite b est pair (d'après la remarque 9), or a est pair, alors $a \wedge b \neq 1$, contradiction !

2) et 3) (Voir le cahier)

Application 12 : Exercice 12 de la série 1.

6-7 Raisonnement par récurrence

A retenir 14 : Principe de récurrence

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que la proposition $(\forall n \geq n_0)\ P(n)$ est vraie, on suive les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

Exemples 18 :

1) Montrer que la proposition : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ (1+a)^n \geq 1 + na$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: 7 divise $2^{3n+2} - 4$

Application 13 : Exercice 13 de la série 1.

Résumé 1 : Notions de logique

Proposition-fonction propositionnelle

1/ Une proposition (ou assertion) est tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).

2/ On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.

3/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.

Opérations sur les propositions

		conjonction	*disjonction*	*implication*	*équivalence*
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Négation

1/ Tableau de vérité de la négation :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

2/ La négation des symboles usuels :

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$

3/ Négation d'une proposition quantifiée :

A/ La négation de la proposition $(\forall x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$

B/ La négation de la proposition $(\exists x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\forall x \in E)\ \overline{P(x)}$

4/Négation de la conjonction, disjonction, implication et équivalence :

A/ La négation de $(P\,et\,Q)$ est $(\overline{P}\,ou\,\overline{Q})$

B/ La négation de $(P\,ou\,Q)$ est $(\overline{P}\,et\,\overline{Q})$

C/ La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P\,et\ \overline{Q})$)

D/ La négation de $(P \Leftrightarrow Q)$ est $(\overline{P} \Leftrightarrow Q)$

(ou bien $(P \Leftrightarrow \overline{Q})$ ou bien $\overline{[(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)]}$)

Loi logique

1/ Une loi logique est une proposition formée de plusieurs propositions P, Q,..... liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q,..... .

2/ Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité

Raisonnements mathématiques

Question	Raisonnement convenable	Méthode d' utilisation
Montrer que $P \Leftrightarrow Q$	Raisonnement par équivalence.	Voir à retenir 11 (page 10)
Montrer que $P \Rightarrow Q$	Type 1 : Si P et Q ne contiens pas le symbole $\neq$, on utilise souvent le rais. déductif.	Voir à retenir 9 (page 10)
	Type 2 : Si P et Q contiens le symbole $\neq$, on utilise souvent le rais. par contraposée	Voir à retenir 10 (page 10)
Montrer que P	Type 1 : Si P contient la valeur absolue, on utilise souvent le rais. par disjonction des cas. On utilise aussi ce type de raisonnement dans les équations et les inéquations.	Voir à retenir 12 (page 11)
	Type 2 : Si P contient l' un des mots : n' appartient pas, n' admet pas, n' est pas..., on utilise souvent le rais. par l' absurde.	Voir à retenir 13 (page 11)
	Type 2 : Si P est une proposition ni de type 1 ni de type 2, on utilise souvent le rais. par équivalence	Voir à retenir 11 (page 10)
Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ P(n)$ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ P(n)$	On utilise souvent le rais. par récurrence	Voir à retenir 14 (page 11)
Montrer que $(\forall x \in E)\ \ P(x)$ est fausse	On utilise le rais. par contre-exemple	Voir à retenir 8 (page 9)

Il existe d'autres raisonnements mathématiques (de base) comme le calcul de la différence de deux expressions (Comparaison) ou la simplification d'une expression pour obtient une autre (Egalité de deux expressions).

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEF	**Série 1** **Notions de logique**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1

Ecrire en utilisant les quantificateurs les propositions suivantes :

P : Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel m tel que $n+m=10$

Q : Il existe un réel M tel que pour toute x de $\mathbb{R}$ on a : $x \leq M$

R : Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation : $x^2=2$

S : Entre deux réels il existe toujours un rationnel.

Exercice 2

Déterminer la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x^2}=x$

P_2 : $(\forall x \geq 0)\ x^2-x-2 \geq 0$

P_3 : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ y<-x$

P_4 : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ y<-x$

P_5 : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)\ x^2+y^2 \neq 1$

P_6 : $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ y \neq sin(x)$

Exercice 3

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

P : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

Q : Certains nombres entiers sont pairs.

R : Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

S : Tout entier naturel divisible par 3 est divisible par 9

Exercice 4

Déterminer la négation des propositions suivantes :

P : $(\forall x \in \mathbb{R})(x=0 \ ou\ x<50)$

Q : $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2<54 \ et\ x \in \mathbb{Z})$

R : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ x<y-1 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq x^2+y^2$

Exercice 5 : Loi logique

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1) $\overline{(P\, et\, Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\, ou\, \overline{Q})$

2) $\overline{(P\, ou\, Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\, et\, \overline{Q})$

3) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P}\, ou\, Q)$

4) $\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow Q)$

5) $\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow \overline{Q})$

6) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

7) $[P \Rightarrow (Q \ \ ou\ \ R)] \Leftrightarrow [(P \ \ et\ \ \overline{Q}) \Rightarrow R]$

Exercice 6

$a,b,c \in \mathbb{R}$, déterminer la négation des propositions suivantes :

R_1 : $a>b \Rightarrow a \leq c$

R_2 : $a=b=c$

R_3 : $a \leq b \leq c$

R_4 : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ -1 \leq x+y \leq 2 \Rightarrow |x+y| \leq 2$

R_5 : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)\ x-y=1 \Leftrightarrow x>1$

R_6 : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \geq 0 \quad ou \quad x \leq 0$

R_7 : $(\forall a;b \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R})\ cos(x)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ et\ sin(x)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exercice 7 : Rais. par contre-exemple

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) Tous les nombres premiers est impair.

2) Tous les nombres impairs est premier.

3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^2+n+1$ est premier.

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ 3x+5y=8$

5) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ |x|+|y|=|x+y|$

6) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ cos(x+y)=cos(x)+cos(y)$

7) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ sin(x+y)=sin(x)+sin(y)$

8) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x^2-xy+y^2=0$

Exercice 8 : Rais. ditect

Montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x| \leq 2 \Rightarrow |3x+1| \leq 7$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x>0 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x} \geq 2$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x>1 \Rightarrow x^2+x-2>0$

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ 1+xy=x+y \Rightarrow (x=1 \ \ ou\ \ y=1)$

5) $(a \in \mathbb{Q}\ et\ b \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{Q}$

6) $(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall b;c \in \mathbb{R})\ ac \leq 0 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})\ ax^2+bx+c=0$

Exercice 9 : Rais. par contraposée

1) $(\forall x;y \in \mathbb{R})\ x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1+\dfrac{x}{2}$

3) $(\forall x;y \in \mathbb{R})\ (x \neq y\ et\ xy \neq 1) \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1} \neq \dfrac{y}{y^2+y+1}$

4) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2+x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

5) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^2\ est\ impair \Rightarrow n\ est\ impair$

6) $(\forall x;y \in \mathbb{R})\ (x \neq y\ et\ x+y \neq 2) \Rightarrow x^2-2x \neq y^2-2y$

7) $(\forall x;y;z \in \mathbb{R})\ x+y \leq z \Rightarrow \left(x \leq \dfrac{1}{2}z\ ou\ y \leq \dfrac{1}{2}z\right)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1nJzRMXSHzIGL1wrWtyoZhcrD6op7B_tz/view?usp=sharing

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEF	**Série 1** **Notions de logique**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 10 : Rais. par équivalence

1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ \sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$

2) Montrer que $(\forall x\in[1;+\infty[)\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\le\dfrac{1}{2}$

3) Montrer que : $(\forall x;y\in\mathbb{R})\ |x|+|y|=|x+y|\Leftrightarrow xy\ge 0$

4) Montrer que

$(\forall x;y\in\mathbb{R})\quad x^2+y^2=0\Leftrightarrow(x=0\quad et\quad y=0)$

Exercice 11 : Rais. par disjonction des cas

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2+|x-4|+2=0$

2) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{x^2+1}+x>0$

3) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ n(n+1)$ est pair.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2-5x+6}>x+4$

5) Soit $m\in\mathbb{R}^*$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $mx^2-(m+1)x+m-1=0$

Exercice 12 : Rais. par l'absurde

1) Soit ABC un triangle et $a>0$ tel que $BC=3a,\ CA=2a$ et $AB=4a$.

Montrer que ABC n'est pas rectangle.

2) Soit $a;b\in\mathbb{Q}$ montrer que :

$a-b\sqrt{2}=0\Rightarrow(a=0\quad et\quad b=0)$

3) Soit $a;b\in\mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$ab=1\Rightarrow(a\le 1\ \ ou\ \ b\le 1)$

4) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 13 : Rais. par récurrence

Montrer que :

1) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ 1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 3^0+3^1+...+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

3) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ 1^3+2^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4) $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 1+3+...+(2n+1)=(n+1)^2$

5) $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 2^n>n$

6) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ 3^n\ge 2n+1$

7) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+...+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ (par deux méthodes)

Exercice 14

Sans utiliser le tableau de vérité montrer que la proposition $[P\Rightarrow(Q\ \ ou\ \ R)]\Leftrightarrow[(P\ \ et\ \ \overline{Q})\Rightarrow R]$ est une loi logique.

Exercice 15

1) Soit $x\in\mathbb{R}^+$, montrer par l'absurde que : $\sqrt{x}\ne\frac{x+2}{\sqrt{x+4}}$

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ 6 divise n^3-n

3) a. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ \sqrt{x^2+1}>|x|$

b. Montrer par disjonction des cas que $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{x^2+1}>-x$

4) Soit $x;y\in\mathbb{Q}^+$ tel que $x^3y+xy^3=8$, montrer par l'absurde que $x\ne y$.

Exercice 16

1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*):\sqrt{1+x^2}\ne 1+\dfrac{x^2}{2}$

2) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x)=x^4+5x^7+5x^2-8x-1$

3) $x,\ y$ et z des nombres réels tel que : $x+y+z>1$.

Montrer que $x>\dfrac{1}{3}\ \ ou\ \ y>\dfrac{1}{3}\ \ ou\ \ z>\dfrac{1}{3}$

4) x et y deux nombres réels strictement positifs.

Montrer que : $\left|\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right|\ne 1\Rightarrow\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\ne\sqrt{5}$

5) Sachant que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, montrer que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 17

1) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ « 17 divise $2^{6n+3}+3^{4n+2}$ »

2) Soit $a\ ,b\in\mathbb{R}$ tel que $a^2+b^2=1$.

Montrer que : $|a+b|\le\sqrt{2}$

3) Soient $a,\ b$ et c des nombres réels.

a) Montrer que : $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

b) Montrer que : $(a^3+a=b^3+b)\Leftrightarrow a=b$

4) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

Exercice 18

Donner un exemple d'un ensemble E et deux fonctions propositionnelles $p(x)$ et $q(x)$ tel que la proposition :

1) $[(\exists x\in E)\ \ p(x)\ \ et\ (\exists x\in E)\ \ q(x)]\Leftrightarrow[(\exists x\in E)\ \ (p(x)\ \ et\ \ q(x))]$ est fausse.

2) $[(\forall x\in E)\ p(x)\ ou\ (\forall x\in E)\ q(x)]\Leftrightarrow[(\forall x\in E)\ (p(x)\ \ ou\ \ q(x))]$ est fausse.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1nJzRMXSHzIGL1wrWtyoZhcrD6op7B_tz/view?usp=sharing

2

Fonctions numériques

Résumé 2 : Fonctions numériques

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit x et y deux éléments distincts de D_f, on pose $T(x;y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ (Le taux de variation de f entre x et y).

I un intervalle de D_f.

1/ Rappel : Ensemble de définition d'une fonction

- $D_f=\{$les réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)\}$
- Si f est un polynôme alors $D_f=\mathbb{R}$
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ Q(x)\neq 0\}$
- Si $f(x)=\sqrt{P(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ P(x)\geq 0\}$

2/ Parité d'une fonction

Définition :

- f *est paire* $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ (\forall x\in D_f)\ f(-x)=f(x) \end{cases}$
- f *est impaire* $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ (\forall x\in D_f)\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$

Propriété :

- f *est paire* $\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport} \\ \text{à l'axe des ordonnés} \end{cases}$
- f *est impaire* $\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport} \\ \text{à l'origine du repère} \end{cases}$

3/ Variations d'une fonction

Définition :

- f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow [(\forall x;y\in I):\ x>y \Rightarrow f(x)\geq f(y)]$
- f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow [(\forall x;y\in I):\ x>y \Rightarrow f(x)\leq f(y)]$
- f *est constante sur* $I \Leftrightarrow [(\forall x;y\in I):\ x>y \Rightarrow f(x)= f(y)]$

Propriété :

- f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow (\forall x,y\in I):\ T(x;y)\geq 0$
- f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow (\forall x,y\in I):\ T(x;y)\leq 0)$
- f *est constante sur* $I \Leftrightarrow ((\forall x,y\in I):\ T(x;y)=0$

Variations et parité :

Soit I et J deux intervalles symétriques par rapport à 0 de D_f

- Si f est paire, alors :

f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* J

f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est croissante sur* J

- Si f est impaire, alors :

f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est croissante sur* J

f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* J

4/Fonction majorée, minorée, bornée et extremums

Définition : Soit $M,m\in\mathbb{R}$

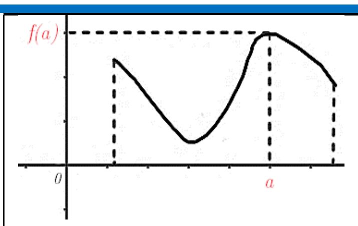
- f est majorée par M sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f(x)\leq M$
- f est minorée par m sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f(x)\geq m$
- f est bornée sur $I \Leftrightarrow f$ est majorée et minorée sur I

Propriété :

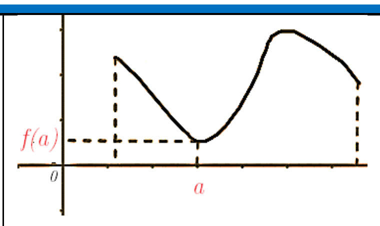
- f est bornée sur $I \Leftrightarrow (\exists m,M\in\mathbb{R})\ (\forall x\in I)\ m\leq f(x)\leq M$
- f est bornée sur $I \Leftrightarrow (\exists M\in\mathbb{R})\ (\forall x\in I)\ |f(x)|\leq M$

Définition :

- $f(a)$ valeur maximale de f sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f(x)\leq f(a)$
- $f(a)$ valeur minimale de f sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f(x)\geq f(a)$



$f(a)$ valeur maximale



$f(a)$ valeur minimale

- $f(a)$ est un extremum de $f \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \text{ valeur maximale de } f \\ \quad\text{ou} \\ f(a) \text{ valeur minimale de } f \end{cases}$

Propriété :

- M valeur maximale de f sur I

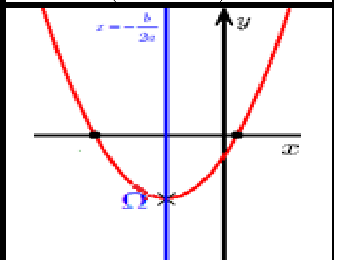
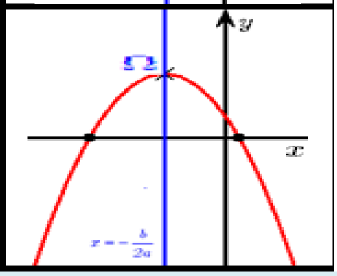
$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est majorée par } M \text{ sur } I \\ l\text{'équation } f(x)=M \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

- m valeur minimale de f sur I

$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est minorée par } m \text{ sur } I \\ l\text{'équation } f(x)=m \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

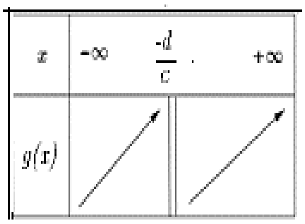
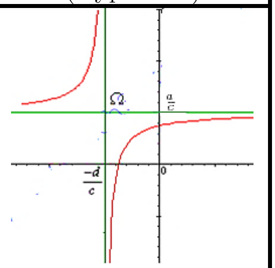
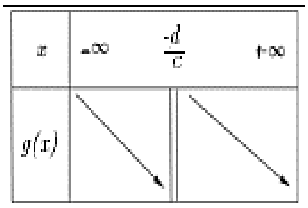
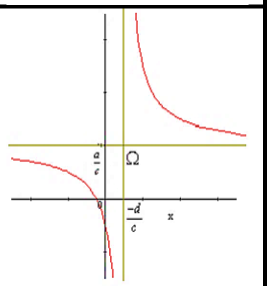
5/Etude de la fonction f tel que $f(x)=ax^2+bx+c$

- f est appelé : fonction polynomiale de deuxième degré.
- $D_f=\mathbb{R}$
- $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de **sommet** $\Omega_1\left(-\dfrac{b}{2a};f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ et d'**axe de symétrie** la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

<table>
<tr><th></th><th>Tableau de variations de f</th><th>La courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Parabole)</th></tr>
<tr><td>$a>0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\searrow$</td><td>$f(-\frac{b}{2a})$</td><td>$\nearrow$</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>$f(-\frac{b}{2a})$</td><td>$\searrow$</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

6/Etude de la fonction g tel que $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

- g est appelé : fonction homographique
- $D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$
- $(\mathcal{C}_g)$ est une hyperbole de **centre** $\Omega_2\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'**asymptotes** les droites $x=\dfrac{-d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	Tableau de variations de g	La courbe $(\mathcal{C}_g)$ (Hyperbole)
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$		
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$		

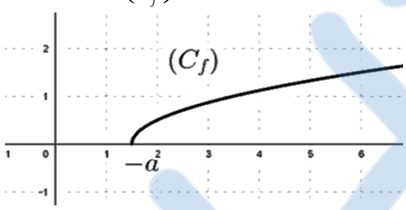
7/Résolution graphique des équations et inéquations

L'équation	$f(x)=m$	$f(x)=g(x)$
Les abscisses des points d'intersection de	$(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{C}_g)$
L'inéquation	$f(x)>m$	$f(x)>g(x)$
Sont les intervalles dont	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$

8/Etude de fonctions $f(x)=\sqrt{x+a}$, $g(x)=ax^3$, $h(x)=f(x)+c$ et $k(x)=c\times f(x)$

Etude de la fonction $f(x)=\sqrt{x+a}$

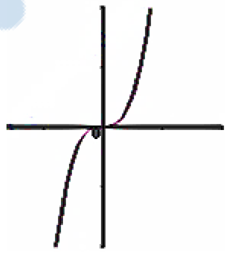
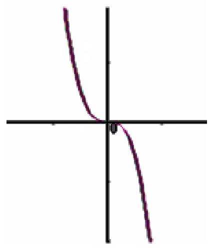
- $D_f=[-a;+\infty[$
- f est strictement croissante sur D_f
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$



1)

Etude de la fonction $g(x)=ax^3$

- $D_g=\mathbb{R}$
- g est une fonction impaire

	Les variations de g	La courbe $(\mathcal{C}_g)$
$a>0$	g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	
$a<0$	g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	

Etude de la fonction $h(x)=f(x)+c$

- $D_h=D_f$
- La fonction h est de mêmes variations que f

Etude de la fonction $k(x)=c\times f(x)$

- $D_k=D_f$
- Si $c>0$ alors la fonction k est de mêmes variations que f
- Si $c<0$ alors k et f sont de variations opposées.

9/ Image d'un intervalle par une fonction

Soit I un intervalle

- $f(I)=\{f(x)\ /\ x\in I\}$
- Si f admet une valeur minimale $V_{\min}$ sur I et une valeur maximale $V_{\max}$ sur I, alors $f(I)=[V_{\min};V_{\max}]$
- On peut déterminer $f(I)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$ ou à partir du tableau de variations de f ou par une méthode algébrique.
- $(\forall x\in I)\ f(x)\in J \Leftrightarrow f(I)=J$

10/ Composé de deux fonctions

- $(\forall x\in D_{gof})\quad gof(x)=g(f(x))$
- $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\}$
- $D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\}$

11/ Variations de gof

- $\begin{cases} f \text{ est croissante sur } I \\ g \text{ est croissante sur } f(I) \end{cases} \Rightarrow gof \text{ est croissante sur } I$
- $\begin{cases} f \text{ est déroissante sur } I \\ g \text{ est décroissante sur } f(I) \end{cases} \Rightarrow gof \text{ est croissante sur } I$
- $\begin{cases} f \text{ est croissante sur } I \\ g \text{ est décroissante sur } f(I) \end{cases} \Rightarrow gof \text{ est décroissante sur } I$
- $\begin{cases} f \text{ est décroissante sur } I \\ g \text{ est croissante sur } f(I) \end{cases} \Rightarrow gof \text{ est décroissante sur } I$

12/Remarques :

- $f=g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f=D_g \\ (\forall x\in D_f)\quad f(x)=g(x) \end{cases}$ (Égalité de deux fonctions)
- $M(x;y)\in(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow x\in D_f\ \ et\ \ f(x)=y$

Intersection avec les axes du repère :

- Les points $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.

13/Fonction périodique

Définition : Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} f \text{ est périodique} \\ \text{de période } T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x\in D_f)\ \ (x+T)\in D_f \\ (\forall x\in D_f)\ \ f(x+T)=f(x) \end{cases}$$

Exemples classiques :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période :

$T=2\pi$ car : $\begin{cases} (\forall x\in\mathbb{R})\ \ (x+2\pi)\in\mathbb{R} \\ (\forall x\in\mathbb{R})\ \ cos(x+2\pi)=cos(x) \end{cases}$

et $\begin{cases} (\forall x\in\mathbb{R})\ \ (x+2\pi)\in\mathbb{R} \\ (\forall x\in\mathbb{R})\ \ sin(x+2\pi)=sin(x) \end{cases}$

- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$

car : $\begin{cases} (\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\})\ \ (x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\} \\ (\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\})\ \ tan(x+\pi)=tan(x) \end{cases}$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEF	**Exemples**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exemple 1 : Ensemble de définition d'une fonction

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f :

$f(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-x-2}$ $\quad f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ $\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\quad f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ $\quad f(x)=\sqrt{7-x}$ $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Exemple 2 : Parité d'une fonction

Etudié la parité de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=x^2+1$ $\quad f(x)=x+\dfrac{1}{4x}$ $\quad f(x)=|x|+5$

$f(x)=x^2+3x+1$ $\quad f(x)=\sqrt{x-3}$ $\quad f(x)=cos(x)$

$f(x)=sin(x)$ $\quad f(x)=tan(x)$

Exemple 3 : Variations d'une fonction

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x+\frac{1}{4x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Vérifier que f est impaire.

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f,

on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=1-\dfrac{1}{4xy}$

4) Etudier les variations de f sur : $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.

5) En déduire les variations de f sur : $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[-\dfrac{1}{2};0\right[$.

6) Dresser le tableau de variations de f.

Exemple 4 : Fonction majorée-valeur minimale

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^2+6x+5$.

1) Montrer que f est majorée par -2 sur $\mathbb{R}_-^*$.

2) Vérifier que -4 est la valeur minimale de g sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5 : Etude de la fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-x^2+2x+3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ puis déduire que f est ni paire, ni impaire.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exemple 6 : Etude d'une fonction homographique

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x+7}{x+1}$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

2) Dresser le tableau de variations de g.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormé.

Exemple 7 : Résolution graphique et algébrique des équations et des inéquations

1) On considère la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f de l'exemple 5 : $f(x)=-x^2+2x+3$

a) Résoudre graphiquement puis algébriquement les équations : $f(x)=3$ et $f(x)=0$

b) Résoudre graphiquement puis algébriquement les inéquations : $f(x)\le 3$ et $f(x)>0$

2) a) Représenter $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère, où g est la fonction de l'exemple 6 : $g(x)=\dfrac{x+7}{x+1}$.

b) Résoudre graphiquement : $f(x)=g(x)$ et $f(x)\ge g(x)$

3) Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right) f(x)-g(x)=\dfrac{-(x-1)(x-2)(x+2)}{x+1}$

4) Résoudre algébriquement : $f(x)=g(x)$ et $f(x)\ge g(x)$

(On pourra remarquer que $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$).

Exemple 8 : Eude des fonctions $x\mapsto\sqrt{x+a}$ et $x\mapsto ax^3$

Dresser le tableau de variations des fonctions f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=2x^3$.

Exemple 9 : Image d'un intervalle par une fonction

1) On considère la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f de l'exemple 5.

Déterminer par deux méthodes l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas suivants :

$I=[1;2]$; $I=[-2;4]$; $I=[2;+\infty[$; $I=\mathbb{R}$.

2) Déterminer par deux méthodes l'image de l'intervalle $I=[2;+\infty[$ par la fonction g de l'exemple 6.

Exemple 10 : Composé de deux fonctions

On pose :

$f(x)=x^2+x$; $g(x)=2x-1$; $h(x)=(2x-1)^2+1$; $k(x)=sin(2x+1)$

1) Déterminer gof et fog puis conclure.

2) Ecrire la fonction h sous forme de composé de deux fonctions.

3) Ecrire la fonction k sous forme de composé de deux fonctions.

Exemple 11 : Variations de composé de deux fonctions

On pose : $f(x)=-x^2+2x+3$ et $g(x)=\dfrac{x+7}{x+1}$ (Les fonctions des exemples 5 et 6).

On considère la fonction h définie par : $h(x)=\dfrac{-x^2+2x+10}{-x^2+2x+4}$

1) Déterminer D_{gof} sans déterminer l'expression de gof.

2) Montrer que $\left(\forall x\in D_{gof}\right)$ $h(x)=gof(x)$.

3) En déduire que $h=gof$.

4) En déduire les variations de la fonction h sur $I=[1;2]$ (On pourra utiliser les résultats des exemples 5, 6 et 10).

Exemple 12 : Fonction périodique

On considère la fonction f définie par : $f(x)=cos(3x+5)$

Montrer que f est périodique de période : $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEF	**Série 2** **Fonctions numériques**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

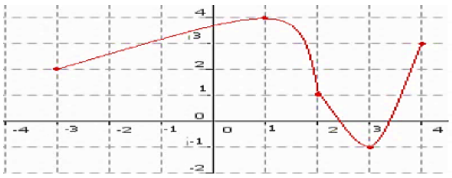
2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par sa courbe :



1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de f .

2) En déduire que $(\forall x\in[-3;4])\quad -1\le f(x)\le 4$

3) Déterminer graphiquement $f([-3;1])$; $f([-3;2])$; $f([2;4])$; $f([3;4])$

4) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par son tableau de variations sur $[-1;4]$:

x	-1		0		3		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

1) Déterminer les extrémums de f sur $[-1;4]$

2) Comparer $f(1)$ et $f(2)$

3) Déterminer $f([-1;0])$; $f([-1;3])$; $f([0;4])$

4) Sachant que f est paire dresser sa table de variations sur $[-4;4]$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est paire.

2) En déduire $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ l'ensemble d'étude de f .

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_E ,

on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\dfrac{x+y}{(x^2-1)(y^2-1)}$

4) Etudier les variations de f sur $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

5) En déduire les variations de f sur $]-1;0]$ et $]-\infty;-1[$

6) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Exercice 6 :

Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x)=\dfrac{9x-10}{2x-3}$ et $g(x)=x^3$

Soient (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques.

2) Dresser les tableaux de variations de f et g

3) Vérifier que les courbes (C_f) et (C_g) sont concourantes aux points $A(1;1)$ et $B(2;8)$

4) Tracer (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{9x-10}{2x-3}-x^3\ge 0$

6) a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\ge 8$

b) Résoudre algébriquement l'inéquation : $f(x)\ge 8$

7) Déterminer graphiquement l'image des intervalles $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ par la fonction f

8) On considère la fonction h définie par $h(x)=\left(\dfrac{9x-10}{2x-3}\right)^3$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h

b) Vérifier que $(\forall x\in D_h)\quad h(x)=gof(x)$

c) Etudier les variations de h sur $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

1) Montrer que f est majorée par 2 et minorée par $-\dfrac{1}{2}$

2) On pose $u(x)=\sqrt{x}$ déterminer la fonction v tel que $f=v\circ u$

3) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 8 :

Montrer que T est une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=sin(2x)$ et $T=\pi$ 2) $f(x)=cos(\pi x)$ et $T=2$

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+sin^2(x)}$ et $T=\pi$

Exercice 9 :

Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x)=\dfrac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ et $g(x)=\dfrac{xsin(x)}{x^2+1}$

1) Montrer que f est bornée par -2 et 5 sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\le 1$

b) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1EQIX0kK8mnwmoWc-E5GMqh2XvpbL-Git/view?usp=sharing

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL1

1BACSEF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Notions de logique)

1) a- Déterminer la négation des propositions suivantes :

P_1 : $a > b \quad ou \quad a \le c$ $\qquad$ P_2 : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R}^*)\ \ x > 1 \Leftrightarrow xy = 1$

P_3 : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ \ |x+y| \le 2 \Rightarrow xy \in \mathbb{R}^+$ $\qquad$ P_4 : $(\forall x \in \mathbb{R}):\ \ 1 \le x \le 2024$

b- Déterminer la valeur de vérité de la proposition P_4.

2) Soit $a;b;c \in \mathbb{R}_+^*$

a- Montrer par contraposée que : $\sqrt{a} \ne 8\sqrt{b} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}} \ne \dfrac{2}{3}$

b- Montrer que : $\dfrac{ab}{a+b} \le \dfrac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$

c- En déduire la valeur de vérité de la proposition : $(\forall a;b \in \mathbb{R}_+^*)\ \ \dfrac{ab}{a+b} \le \dfrac{a+b}{4}$

3) a- Soit $n \in \mathbb{N}$, vérifier que : $2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3)$ et $(\exists k \in \mathbb{N})\ \ n(n+1) = 2k$

b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ 1^2+2^2+3^2+.....+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 6\ divise\ n^3 - n$

4) Soit $x;y \in \mathbb{Q}_+$ tel que $x^3y + xy^3 = 8$, montrer par l'absurde que $x \ne y$.

5) Soient P et Q deux propositions

Montrer que la proposition $\left[(P \Rightarrow Q)\ et\ (\overline{P} \Rightarrow Q)\right] \Rightarrow Q$ est une loi logique.

6) a- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \sqrt{x^2+1} > |x|$ (on rappel que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |x|^2 = x^2$)

b- Montrer par disjonction des cas que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \sqrt{x^2+1} > -x$

7) Montrer par double implication que $(\forall a;b \in \mathbb{R}^+)\ \ a+b=0 \Leftrightarrow (a=0 \quad et \quad b=0)$.

8) Soit $a;b;x;y \in \mathbb{R}^*$, montrer que : $ax+by=1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2} \le a^2+b^2$

Exercice 2 (Fonctions numériques)

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = -x^2+2x+1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$

1) Montrer que f est ni paire ni impaire.
2) Dresser les tableaux de variations de f et de g.
3) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère puis montrer que $A(2;1) \in (\mathcal{C}_f) \cap (\mathcal{C}_g)$
4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
5) a- Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = -2$

   b- Résoudre algébriquement l'équation : $f(x) = -2$
6) Résoudre graphiquement l'équation : $x^2-2x-1+\sqrt{x-1} = 0$
7) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > -2$
8) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2-2x-1+\sqrt{x-1} < 0$
9) Déterminer par deux méthodes l'image de chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$ par la fonction f
10) On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x(2-x)}$

   a- Déterminer D_h l'ensemble de définition de h

   b- Vérifier que $(\forall x \in D_h)\ \ h(x) = gof(x)$

   c- Etudier les variations de h sur $[0;1]$ et $[1;2]$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1OrtX4g39Iovxp0cKvZq5SfvPRWezvURj/view?usp=sharing

3

Barycentre

Définitions et propriétés

Soit A un point du plan et a un nombre réel.

→ Le couple $(A;a)$ est appelé point pondéré ou point massif. Le réel a est appelé le poids ou la masse de A.

On dit aussi que le point A est affecté du coefficient a ou de la masse algébrique a.

→ Un système pondéré est une collection de points pondérés.

Barycentre de deux points pondérés

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b\neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A;a);(B;b)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

$$\boxed{1}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

2) Si $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ alors $G\in(AB)$ tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{2}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$$

→ Cette dernière relation permet de construire le point G.

→ Le point le plus proche du barycentre G est celui dont le coefficient à la plus grande valeur absolue.

→ Le barycentre G est sur le segment $[AB]$ si les poids sont de même signe.

3) Le point $G=bar\{(A;1);(B;1)\}$ est appelé isobarycentre des points A et B c'est le milieu de $[AB]$

4) Si x et y deux réels tel que $x+y=0$ alors le système $\{(A;x);(B;y)\}$ n'admet pas du barycentre.

5) On a $G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G=bar\{(A;k\times a);(B;k\times b)\}$ et $\boxed{3}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G=bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}}$

pour tout $k\in\mathbb{R}^*$. En d'autres termes : le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

6) On a $\boxed{4}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}}$ pour tout $M\in(P)$ .Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

7) Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'un repère.

On a $\boxed{5}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b};\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\right)}$

Barycentre de trois points pondérés

Soit $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c\neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

$$\boxed{1}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

2) Si $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{2}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}}$$

Cette dernière relation permet de construire le point G

3) Si x , y et z trois réels tel que $x+y+z=0$ alors le système $\{(A;x);(B;y);(C;z)\}$ n'admet pas du barycentre.

4) $\boxed{3}\ \boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k});(C;\frac{c}{k})\right\}}$ pour tout $k \in \mathbb{R}^*$. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

5) On a $\boxed{4}\ \boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}}$ pour tout $M \in (P)$. Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

6) Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ trois points d'un repère.

On a $\boxed{5}\ \boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)}$

7) Si $G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ et $H = bar\{(A;a);(B;b)\}$ alors $G = bar\{(H;a+b);(C;c)\}$. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.

$\boxed{6}\ \boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \quad et \quad H = bar\{(A;a);(B;b)\} \Rightarrow G = bar\{(H;a+b);(C;c)\}}$

Cette propriété s'appelle **l'associativité** du barycentre.

8) Le point $G = bar\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$ est appelé isobarycentre des points A, B et C c'est le centre de gravité du triangle ABC.

Barycentre de quatre points pondérés

- De la même manière, on étend à quatre points les définitions et les propriétés vues pour le barycentre de trois points.
- **L'associativité** du barycentre : Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de leurs poids.

Résumé 3 : Barycentre

	Barycentre de deux points	Barycentre de trois points
	$(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b \neq 0$	$(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c \neq 0$
Définition	$\boxed{1}\ \boxed{G = bar\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$	$\boxed{1}\ \boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$
Construction	$\boxed{2}\ \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$	$\boxed{2}\ \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}}$
Homogénéité	$\boxed{3}\ \boxed{G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}}$	$\boxed{3}\ \boxed{G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k});(C;\frac{c}{k})\right\}}$
Propriété caractéristique	$\boxed{4}\ \boxed{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}}$	$\boxed{4}\ \boxed{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}}$
Coordonnées	$\boxed{5}\ G\left(\frac{ax_A+bx_B}{a+b};\frac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$	$\boxed{5}\ G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$
Associativité	$\boxed{6}$ Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme des deux poids.	

Remarques :

Soit A, B et C trois points distincts du plan

1) G est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow G = bar\{(A;1);(B;1)\}$

2) G est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow G = bar\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

3) Pour montrer que $G \in (AB)$ il suffit de :

Trouver $a;b \in \mathbb{R}$ tel que $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ (ou montrer que les points A, B et G sont alignés).

Exemples résolus

Exemple 1

Déterminer deux réels a et b tel que $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ *dans les cas suivants :*

$1)\ 2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}\ ;\quad 2)\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{AB}\quad ;\ 3)\ \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Solution

$1)\ 2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}\right)=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow G = bar\{(A;5);(B;-3)\}\ \text{donc}\ a=5\ \text{et}\ b=-3 \qquad (5+(-3)\neq 0\,)$$

$2)\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow G = bar\{(A;4);(B;-2)\}\ \text{donc}\ a=4\ \text{et}\ b=-2 \qquad (4+(-2)\neq 0\,)$$

$3)\ \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow G = bar\left\{(A;-\frac{1}{3});(B;-\frac{2}{3})\right\}\ \text{donc}\ a=-\frac{1}{3}\ \text{et}\ b=-\frac{2}{3} \qquad (-\frac{1}{3}+(-\frac{2}{3})\neq 0\,)$$

Exemple 2

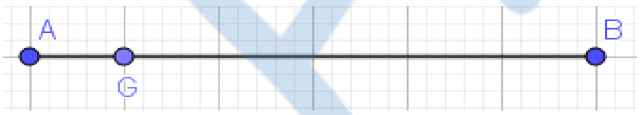
Soit A et B deux point du plan, construire le point G dans chacun des cas suivants :

$1)\ G = bar\{(A;-5);(B;-1)\}$ et $AB=6$ $\qquad 2)\ G = bar\{(A;-1);(B;6)\}$ et $AB=5$

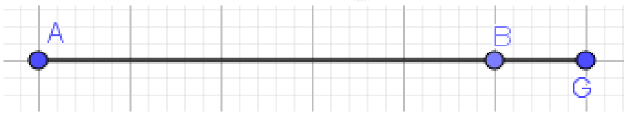
$3)\ G = bar\{(A;5);(B;-1)\}$ et $AB=4$ $\qquad 4)\ G = bar\{(A;-8);(B;5)\}$ et $AB=3$

Solution

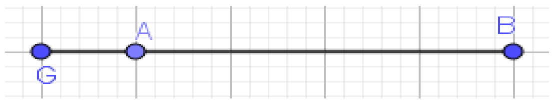
$1)$ On a $G = bar\{(A;-5);(B;-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$



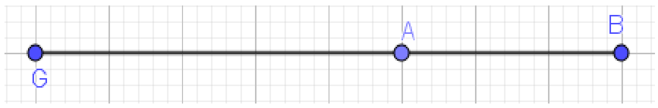
$2)$ On a $G = bar\{(A;-1);(B;6)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$



$3)$ On a $G = bar\{(A;5);(B;-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$



$4)$ On a $G = bar\{(A;-8);(B;5)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$



Exemple 3

Soit A et B deux points distinct du plan et G un point tel que $G = bar\{(A;200);(B;300)\}$

1) *Montrer que* $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$

2) *Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :*

$a)\ \left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=0 \qquad b)\ \left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=20 \qquad c)\ \left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

Solution

1) On a $G = bar\{(A;200);(B;300)\}$ donc d'après la propriété de l'homogénéité $G = bar\left\{(A;\frac{200}{100});(B;\frac{300}{100})\right\}$

C'est-à-dire $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$

2) **Rappel :** Les ensembles des points usuels du plan

Soit A et B deux points distinct du plan et R un réel strictement positif

L'ensemble des points M du plan tel que	Nature
$MA = R$	Le cercle du centre A et de rayon R.
$MA = 0$	Le singleton $\{A\}$
$MA = -R$	L'ensemble vide.
$MA = MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

a) On a $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$ donc d'après la propriété caractéristique :

Pour tout $M \in (P)$ $\quad 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (2+3)\overrightarrow{MG} = 5\overrightarrow{MG}$

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 0 \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = 0 \Leftrightarrow MG = 0$, donc cet ensemble est le singleton $\{G\}$

b) On a $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 20 \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = 20 \Leftrightarrow MG = 4$ donc cet ensemble est le cercle de centre G et de rayon 4

c) Soit $G' = bar\{(A;3);(B;2)\}$ donc d'après la propriété caractéristique :

Pour tout $M \in (P)$ $\quad 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (3+2)\overrightarrow{MG'} = 5\overrightarrow{MG'}$

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|5\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow MG = MG'$, donc cet ensemble est la médiatrice de $[GG']$

Exemple 4

Soit ABC un triangle, on pose $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$ et $G' = bar\{(A;-2);(C;7)\}$

1) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G et G'

Montrer que : $(\forall M \in (P)) \quad 3\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$

2) Soit I un point du plan tel que $I = bar\{(B;3);(C;7)\}$

a) Simplifier par deux méthodes le vecteur $3\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC}$

b) En déduire que I est le milieu du segment $[GG']$

Solution

1) On a $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$ et $G' = bar\{(A;-2);(C;7)\}$

Donc $(\forall M \in (P)) \quad 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$ et $(\forall M \in (P)) \quad -2\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG'}$

Donc $(\forall M \in (P)) \quad \left(\cancel{2\overrightarrow{MA}} + 3\overrightarrow{MB}\right) + \left(\cancel{-2\overrightarrow{MA}} + 7\overrightarrow{MC}\right) = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$

C'est-à-dire $(\forall M \in (P)) \quad 3\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$

2) a) On a $I = bar\{(B;3);(C;7)\}$ donc par définition $3\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

D'autre part on a $(\forall M \in (P)) \quad 3\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$ en particulier $3\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{IG'}$

b) D'après la question précédente en déduit que $5\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{IG'} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IG'} = \vec{0}$

C'est-à-dire $I = bar\{(G;1);(G';1)\}$

Ainsi I est le milieu du segment $[GG']$

Exemple 5

1) *Déterminer les réels* a , b *et* c *tel que* $G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ *sachant que* $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

2) *Placer les points* $A(0;3)$, $B(1;0)$ *et* $C(-2;1)$ *dans un repère puis placer les points* H *et* D *sachant que :*

$$H = bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\} \text{ et } D = bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$$

3) *Montrer que* $H = bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$

4) *Montrer vectoriellement que le quadrilatère* $ADHC$ *est un parallélogramme.*

5) *Déterminer les coordonnées de* H *et* D

6) *Montrer en utilisant les coordonnées que le quadrilatère* $ADHC$ *est un parallélogramme.*

7) *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan tel que* $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution

1) *On a* $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)-\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

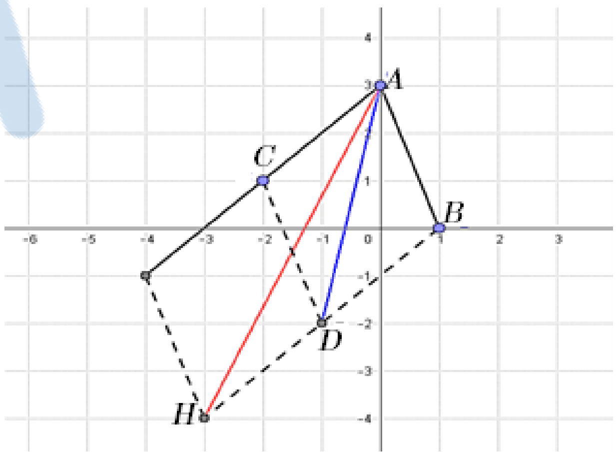
On pose $a=3$; $b=-2$ *et* $c=-2$ *puisque* $a+b+c\neq 0$ *alors* $G = bar\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$

2) *On a* $H = bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

Donc $\overrightarrow{AH}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-3}{6+(-3)+(-6)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-6}{6+(-3)+(-6)}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

On a $D = Bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$

Donc $\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-1}{1+(-1)+(-1)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-1}{1+(-1)+(-1)}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$



3) *On a* $H = bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

Donc $H = bar\left\{(A;\dfrac{6}{3});(B;\dfrac{-3}{3});(C;\dfrac{-6}{3})\right\}$

C'est-à-dire $H = bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$

4) *Il suffit de montrer que* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ *vectoriellement.*

On a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc il suffit montrer que $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \quad C.Q.F.D$$

5) *On a* $H = bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$ *donc* $H\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

C'est-à-dire $H\left(\dfrac{2\times 0+(-1)\times 1+(-2)\times(-2)}{2+(-1)+(-2)};\dfrac{2\times 3+(-1)\times 0+(-2)\times 1}{2+(-1)+(-2)}\right)$ *d'où* $H(-3;-4)$

On a $D = bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$ *donc* $D\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

C'est-à-dire $D\left(\dfrac{1\times 0+(-1)\times 1+(-1)\times(-2)}{1+(-1)+(-1)};\dfrac{1\times 3+(-1)\times 0+(-1)\times 1}{1+(-1)+(-1)}\right)$ *d'où* $D(-1;-2)$

6) *Il suffit de montrer que* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ *par des coordonnées.*

On a $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A;y_D-y_A)=\overrightarrow{AD}(-1-0;-2-3)=\overrightarrow{AD}(-1;-5)$

Et $\overrightarrow{CH}(x_H-x_C;y_H-y_C)=\overrightarrow{CH}(-3+2;-4-1)=\overrightarrow{CH}(-1;-5)$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{CH}$ *ont de mêmes coordonnées donc* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ *C.Q.F.D*

7) On a $G=bar\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$ *donc* $(\forall M\in(P))\ \ 3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(3+(-2)+(-2))\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MG}$

Et $H=Bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$ *donc* $(\forall M\in(P))\ \ 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(2+(-1)+(-2))\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MH}$

On a donc $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|\Leftrightarrow\left\|-\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MH}\right\|$

$$\Leftrightarrow MG=MH$$

Ainsi cet ensemble est la médiatrice du segment $[GH]$

Exemple 6

ABC un triangle.

1) Placer les points D et G tel que $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}$ *et* $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

2) En utilisant l'associativité du barycentre vérifier que G est le milieu du segment $[CD]$

3) On pose $H=bar\{(A;-4);(B;1)\}$ *;* $E=bar\{(B;1);(C;5)\}$ *et* $F=bar\{(A;-4);(C;5)\}$

Montrer que les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en un point à préciser.

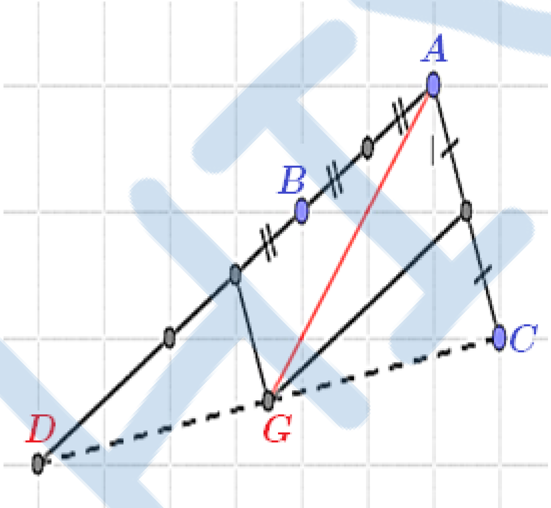
Solution

1) On a $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-3}{2+(-3)}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

Et $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

Donc : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-3}{2+(-3)+(-1)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-1}{2+(-3)+(-1)}\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



2) On a $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$ *et* $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}$ *donc par l'associativité du barycentre on obtient* $G=bar\{(D;2+(-3));((C;-1)\}$ *par suite* $G=bar\{(D;-1);((C;-1)\}$ *donc G est le milieu du segment* $[CD]$

3) On a les points H, E et F sont des barycentres partiels du barycentre $G'=bar\{(A;-4);(B;1);(C;5)\}$

(Le points G' existe est unique car $-4+1+5\neq 0$ *)*

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' et H, on obtient $G'=bar\{(H;-3);(C;5)\}$ *donc* $G'\in(HC)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' et E, on obtient $G'=bar\{(A;-4);(E;6)\}$ *donc* $G'\in(AE)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' et F, on obtient $G'=bar\{(F;1);(B;1)\}$ *donc* $G'\in(FB)$

Ainsi les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en G'.

Prof : Aissa HIYAB | Série 3 | Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF | Barycentre | Matière : Mathématique

Exercice 1

Déterminer deux réels a et b tel que $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ *dans les cas suivants :*

1) $2\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; 2) $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

3) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

Soit A et B deux points du plan, construire le point G dans les cas suivants :

1) $G = bar\{(A;-5);(B;-1)\}$ et $AB = 6$

2) $G = bar\{(A;-1);(B;6)\}$ et $AB = 5$

3) $G = bar\{(A;5);(B;-1)\}$ et $AB = 4$

4) $G = bar\{(A;-8);(B;5)\}$ et $AB = 3$

5) $G = bar\{(A;-2);(B;3)\}$ et $AB = 2$

6) $G = bar\{(A;6);(B;-5)\}$ et $AB = 1$

Exercice 3

On considère un triangle ABC et les points G, K et I tels que : $G = bar\{(A;-1);(B;-4);(C;3)\}$

$K = bar\{(A;-1);(B;-4)\}$ $\quad I = bar\{(B;-4);(C;3)\}$

1) *Construire les points G, K et I*

2) *En utilisant l'associativité du barycentre montrer que G est le milieu de* $[AI]$.

3) a) *En appliquons la propriété caractéristique du barycentre montrer que :*

$\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{CB}$

b) *En déduire que les points C, K et G sont alignés.*

4) *On considère le point* $F = bar\{(A;-1);(C;3)\}$ *montrer que* $G \in (BF)$

5) *En déduire que les droites* (AI), (CK) *et* (BF) *sont concourantes en un point à déterminer.*

6) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que* $\left\|-\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 32$

Exercice 4

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ *du plan, on considère les points* $A(2;0)$; $B(5;6)$; $C(-4;2)$; $D(-1;5)$

On pose $G = bar\{(A;1);(B;2)\}$ et $G' = bar\{(C;1);(D;2)\}$

1) *Déterminer les coordonnées de G et de G'*

2) *Soient I, J et K les milieux des segments* $[AC]$, $[BD]$ *et* $[GG']$ *respectivement.*

a) *Déterminer les coordonnées des points I, J et K*

b) *Montrer que les points I, J et K sont alignés.*

Exercice 5

On considère un triangle ABC et les points G, H et D tels que : $G = bar\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$;

$H = bar\{(A;5);(B;2);(C;-3)\}$; *D est le milieu de* $[AC]$

1) a) *Montrer que* $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{-3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) *Construire les points H et D*

2) a) *Exprimer D sous forme du barycentre de deux points*

b) *En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre déduire que G est le milieu de* $[DB]$

c) *Placer le point G dans la figure.*

3) a) *En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G montrer que* $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) *En déduire que* $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

c) *En déduire que le quadrilatère CGHA est un parallélogramme.*

4) *Soit E le milieu de* $[AB]$, *montrer que les points H, E et G sont alignés.*

5) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :*
$\left\|5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

Exercice 6

On considère un triangle ABC et les points G, I et K tels que $G = bar\{(A;3);(B;2);(C;-1)\}$; *I est le milieu de* $[AC]$ *et* $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

1) *Montrer que* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) *En déduire que* $(BI) \parallel (AG)$

3) a) *Montrer que* $K = bar\{(A;3);(B;2)\}$

b) *Montrer que les points C, K et G sont alignés.*

4) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :* $\left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 10$

Exercice 7

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A;1)$, $(B;4)$ *et* $(C;-3)$.

1) *Construire le barycentre I de* $(B;4)$ *et* $(C;-3)$.

2) *Montrer que* $G = bar\{(A;1);(I;1)\}$

3) *En déduire la position de G sur* (AI).

Exercice 8

1) *Placer dans un repère les points :* $A(1;2)$, $B(3;4)$ *et* $C(2;5)$.

2) *Soit G le barycentre des points pondérés :* $(A;3)$, $(B;2)$ *et* $(C;4)$.

a) *Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.*

b) *La droite* (BG) *passe-t-elle par l'origine du repère ?*

Correction : https://drive.google.com/file/d/1sGlqQCJZAQl46ZMw0qjBwGeQdLnmw3B6/view?usp=sharing

Prof : Aissa HIYAB	**Série 3**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF	**Barycentre**	Matière : Mathématique

Exercice 9

Soit ABC un triangle.

1) a) Construire le point I tel que $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$

b) Montrer que $I=Bar\{(B;-2);(C;3)\}$

c) Montrer que $\overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

2) Soit $G=bar\{(A;-3);(B;-2);(C;3)\}$.

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3) a) En déduire que les points A, I et G sont alignés.

b) Construire le point G.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

a) $\left\|-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right\|$

b) $\left\|-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=3$

Exercice 10

$ABCD$ un quadrilatère dans le plan, on considère les points H, I et J tels que :

$\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

$I=bar\{(A;3);(C;-5)\}$

$J=bar\{(D;-1);(B;2)\}$

1) Montrer que $H=bar\{(A;3);(B;2);(C;-5);(D;-1)\}$

2) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre montrer que $H=bar\{(I;-2);(J;1)\}$

2) En déduire que I est le milieu de $[JH]$

Exercice 11

On considère un triangle ABC et les points I et D tels que $I=bar\{(A;1);(B;3)\}$ et $D=bar\{(I;3);(C;-2)\}$

1) Construire les points I et D

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=4\left\|3\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

3) Montrer que I est le barycentre de $\{(C;2);(D;1)\}$

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|-\left\|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=AB$

Exercice 12

Dans un triangle ABC on définit I le barycentre de $(B;2)$,$(C;1)$, J le barycentre de $(A;3)$,$(C;2)$ et K le barycentre de $(A;3)$ et $(B;4)$.

1) Faire une figure.

2) En considérant G le barycentre de $(A;3)$, $(B;4)$ et $(C;2)$. Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

Exercice 13

Soit ABC un triangle. Y est le milieu de $[BC]$.

1) Placer, en justifiant, le barycentre U de $(A;4)$ et $(C;1)$ puis placer le barycentre E de $(A;4)$ et $(B;1)$

2) Soit $G=bar\{(A;4);(B;1);(C;1)\}$. Montrer que G est aussi barycentre de $(E;5)$ et $(C;1)$.

3) Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes.

Exercice 14

Soit ABC un triangle et D un point tel que : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

1) Construire une figure.

2) Montrer que A est le barycentre des points B et D.

3) Construire le point $G=bar\{(D;-2);(C;3)\}$

4) a) Montrer que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BD}$

b) Déduire que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaire.

5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$\left\|3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\|$

Exercice 15

Étant donné un triangle ABC et k un réel non nul donné, on définit les points D et E par les relations :

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=k\overrightarrow{CA}$

1) Faire une figure illustrant ces données lorsque $k=\frac{1}{3}$, puis lorsque $k=-1$.

2) Montrer que $D=bar\{(A;1-k);(B;k)\}$

3) Montrer que $E=bar\{(C;1-k);(A;k)\}$

4) En déduire que pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{CB}=2\left(\overrightarrow{MB'}+k\overrightarrow{B'C'}\right)$ où B' et C' sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

5) Soit I le milieu de $[DE]$. Déduire de la question précédente que I, B' et C' sont alignés.

Exercice 16

ABC est un triangle de centre de gravité G. On note I, J, M, N, R et S les points définis par :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Démontrer que les droites (IS) (MR) et (NJ) sont concourantes en G.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1sGlqQCJZAQl46ZMw0qjBwGeQdLnmw3B6/view?usp=sharing

4

Analytique du produit scalaire dans le plan

Rappel

1- Repère dans le plan :

1) Tous trois points O, I et J distincts non alignés déterminent un repère du plan notée $(O;I;J)$ ou $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

2) Si on pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé une base du plan

Si $\vec{i}\perp\vec{j}$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthogonale et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthogonal.

Si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base normée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère normé.

Si $\vec{i}\perp\vec{j}$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

2- Coordonnées du milieu - coordonnées d'un vecteur

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

1) Pour tout point A du plan, il existe un unique couple (x_A,y_A) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

(x_A,y_A) est appelé couple de coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $A(x_A,y_A)$

On a donc : $A(x_A,y_A)\in(O;\vec{i};\vec{j})\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

2) Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x;y)$ de nombres réels tel que : $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

$(x;y)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $\vec{u}(x;y)$

On a donc : $\vec{u}(x;y)\in(\vec{i};\vec{j})\Leftrightarrow\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

3) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan alors les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ est $I(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$

4) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan alors les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

3-Formule trigonométrique du produit scalaire :

- Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Autrement dit quel que soit les points A, B et C du plan on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

Cette formule est appelée la formule trigonométrique du produit scalaire.

- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$ on le note $\vec{u}^2$ donc $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}$
- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$; $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

Produit scalaire et orthogonalité :

$\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(AB)\perp(CD)$

4- Déterminant de deux vecteurs :

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le nombre $ab'-a'b$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre, on le note par $det(\vec{u};\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}$ et on écrit : $det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$

Déterminant et colinéarité :

$det(\vec{u};\vec{v})=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

5- Vecteur directeur - équation cartésienne d'une droite

- Soit (D) une droite du plan. Toute vecteur non nul $\vec{u}$ et de même direction de (D) est appelé vecteur directeur de la droite (D).
- Toute droite (D) du plan est un ensemble des points $M(x;y)$ vérifient l'équation $ax+by+c=0$ tel que $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\neq(0,0)$.

  L'équation $(D):\ ax+by+c=0$ est appelé une équation cartésienne de la droite (D).

  Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $(D):\ ax+by+c=0$

6- Représentation paramétrique d'une droite

Soit $B(x_B,y_B)$ un point du plan et $\vec{u}(a';b')$ un vecteur non nul du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) passant par le point $B(x_B,y_B)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a';b')$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifient le système $\begin{cases} x=x_B+a'\times t \\ y=y_B+b'\times t \end{cases} \ /\ t\in\mathbb{R}$
- Le système $(D):\ \begin{cases} x=x_B+a'\times t \\ y=y_B+b'\times t \end{cases} \ /\ t\in\mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D).

7- Résolution graphique d'une inéquation de premier degré de deux inconnus

Soit (D) une droite d'équation $(D):\ ax+by+c=0$ dans un plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) partage le plan en deux demi-plans (D^+) et (D^-) tel que :

  (D^+) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c>0$

  (D^-) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c<0$
- Pour déterminer (D^+) ou (D^-) graphiquement, on procède de la façon suivante :

  On trace la droite (D) ;

  On choisit un point du plan en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou non. Le plus souvent, quand la droite ne passe pas par l'origine, on choisit $O(0,0)$ qui fournit le résultat facilement, mais si la droite passe par l'origine du repère on choisit un autre point.

8- Mesures principal usuelles :
Soit $\theta\in\left]-\pi;\pi\right]$ la mesure principale d'un angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

$$\begin{cases} cos(\theta)=\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi+\frac{\pi}{4}$$

Résumé 4 : Analytique du produit scalaire dans le plan

Dans tous ce qui suit on considère le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

- Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan, alors :

1 $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'}$ (Cette formule est appelée la formule analytique du produit scalaire) ;

2 $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}}$

- Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan, alors :

3 $\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$

- Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls du plan, alors :

4 $\boxed{cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}}$ et 5 $\boxed{sin(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}}$

- L'aire du triangle ABC est : 6 $\boxed{S=\dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|}$

- $\overrightarrow{AB}(\underbrace{x_B-x_A}_{x_{\overrightarrow{AB}}},\underbrace{y_B-y_A}_{y_{\overrightarrow{AB}}})$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AC}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AC}}$
- $AB=\sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2+(y_{\overrightarrow{AB}})^2}$
- $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & x_{\overrightarrow{AC}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AC}} \end{vmatrix}$
- $cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$
- $sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{AB\times AC}$
- $S=\dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})\right|$
- $S=\dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\right|$

- Soit (D) une droite du plan :

$\rightarrow$ Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) est appelé vecteur normal à la droite (D).

$\rightarrow$ 7 Si une équation cartésienne de la droite (D) est $ax+by+c=0$ alors le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est normal à la droite (D).

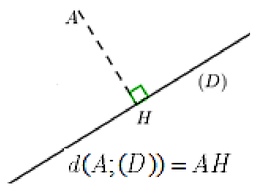
$\rightarrow$ L'équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ est

8 $\boxed{a(x-x_A)+b(y-y_A)=0}$

- Si les droites (D) et (D') sont définies respectivement par les équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ alors 9 $\boxed{(D)\perp(D')\Leftrightarrow aa'+bb'=0}$

- Soit (D) la droite du plan d'équation $ax+by+c=0$ et $A(x_A;y_A)$ un point du plan :

La distance du point A à la droite (D) est 10 $\boxed{d(A;(D))=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$



- Soit Ω un point du plan et R un réel positif.

$\rightarrow$ Le cercle (C) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que : $\Omega M=R$

On le note par $C(\Omega;R)$.

$\rightarrow$ L'équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est 11 $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$

$\rightarrow$ Que l'on peut écrire 12 $\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0}$ où $c=a^2+b^2-R^2$

- Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts dans le plan :

$\rightarrow$ Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\rightarrow$ L'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est 13 $\boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$

14 Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

→ Si $a^2+b^2-4c>0$ alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

→ Si $a^2+b^2-4c=0$ alors l'ensemble (Γ) est le singleton $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$

→ Si $a^2+b^2-4c<0$ alors l'ensemble (Γ) est l'ensemble vide.

15 Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R $(R>0)$ et M un point du plan :

→ Le point M est sur le cercle $(C)\Leftrightarrow\ \Omega M=R$

→ Le point M est à l'intérieur du cercle $(C)\Leftrightarrow \Omega M<R$

→ Le point M est à l'extérieur du cercle $(C)\Leftrightarrow \Omega M>R$

16 Si $(C): x^2+y^2+ax+by+c=0$ est une équation cartésienne du cercle (C) alors :

→ Le point $M(x_M;y_M)$ est sur le cercle $(C)\Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2+ax_M+by_M+c=0$

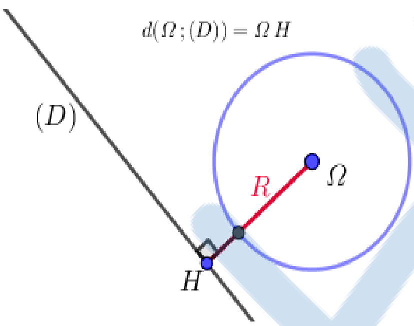
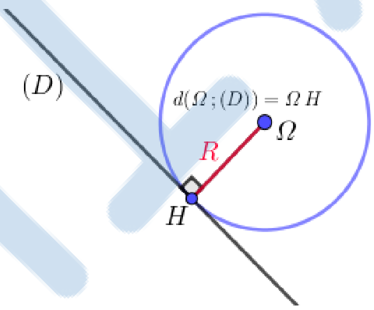
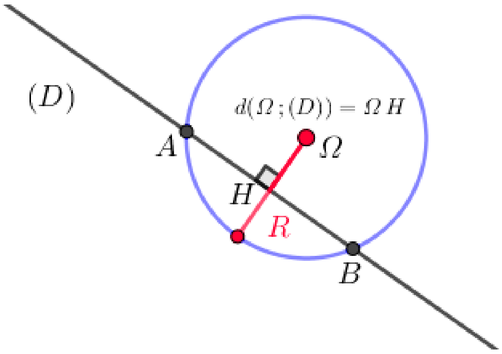
→ Le point $M(x_M;y_M)$ est à l'intérieur du cercle $(C)\Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2+ax_M+by_M+c<0$

→ Le point $M(x_M;y_M)$ est à l'extérieur du cercle $(C)\Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2+ax_M+by_M+c>0$

Ainsi, le cercle (C) détermine trois parties disjointes dans le plan.

Le cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système 17 $\boxed{\begin{cases} x=a+R\cos(\theta) \\ y=b+R\sin(\theta)\end{cases} / \theta\in\mathbb{R}}$, ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle (C)

18 Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R et (D) une droite dans le plan et soit $d=d(\Omega;(D))$ la distance du point Ω à la droite (D)

Si $d>R$ alors (D) ne coupe pas (C)  $(D)\cap(C)=\varnothing$	Si $d=R$ alors (D) coupe (C) en un unique point.  $(D)\cap(C)=\{H\}$	Si $d<R$ alors (D) coupe (C) en deux points.  $(D)\cap(C)=\{A;B\}$

→ Pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un cercle, on résout un système dans lequel on prend les équations cartésiennes qui définissent la droit et le cercle.

Soit (C) un cercle de centre Ω et A un point de (C).

→ La tangente à (C) au point A est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0$.

→ L'équivalence 19 $\boxed{M(x;y)\in(T)\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0}$ permet de déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point A .

Exemples résolus

Exemple 1

On considère les vecteurs suivants $\vec{u}(5;-1)$, $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{w}=(5m+2)\vec{i}-\vec{j}$ $\quad (m\in\mathbb{R})$

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

2) Calculer $cos(\vec{u};\vec{v})$, $sin(\vec{u};\vec{v})$ et déduire $(\overline{\vec{u};\vec{v}})$.

3) Calculer $\vec{u}.\vec{w}$ en fonction de m .

4) En déduire la valeur de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

5) On considère les points $A(1;4)$ et $B(-5;1)$, calculer la distance AB .

Solution

1) On a $\vec{u}(5;-1)$ et $\vec{v}(2;-3)$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=x\times x'+y\times y'=5\times 2+(-1)\times(-3)=13$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$; $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

2) $cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{13}{13\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $sin(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{-13}{13\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Et par conséquent $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

3) On a $\vec{u}(5;-1)$ et $\vec{w}(5m+2;-1)$, donc $\vec{u}.\vec{w}=5\times(5m+2)+(-1)\times(-1)=25m+11$

4) On a $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{w}=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow 25m+11=0$, d'où $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{25}$

5) $AB=\sqrt{(-5-1)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{5}$

Exemple 2

Calculer l'aire du triangle ABC sachant que $A(2;-4)$, $B(1;3)$ et $C(-2;7)$

Solution

On a $\overrightarrow{AB}(-1;7)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;11)$ donc $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 7 & 11\end{vmatrix}=17$.

Par suite l'aire du triangle ABC est : $S=\dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|=\dfrac{17}{2}=4.5$

Exemple 3

1) Déterminer un vecteur normal à la droite (D) dans les cas suivants :

a) $(D):x-4y+1=0$

b) $(D):\dfrac{2}{3}x+3=0$

c) $(D):y=2$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivants :

a) $A(4;-1)$ et $\vec{n}(1;-3)$

b) $A(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ et $\vec{n}(2\sqrt{2};3\sqrt{2})$

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(4;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$

Solution

1) a) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $1x+(-4)y+1=0$ donc le vecteur $\vec{n}(1;-4)$ est un vecteur normal à la droite (D)

b) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $\frac{2}{3}x+0y+3=0$ donc le vecteur $\vec{n}(\frac{2}{3};0)$ est un vecteur normal à la droite (D)

c) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $0x+1y-2=0$ donc le vecteur $\vec{n}(0;1)$ est un vecteur normal à la droite (D)

2) a)

Méthode 1

L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

C'est-à-dire : $(D): 1(x-4)+(-3)(y-(-1))=0$

Ainsi $(D): x-3y-7=0$

Méthode 2

L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): ax+by+c=0$

C'est-à-dire : $(D): 1x-3y+c=0$

Puisque $A\in(D)$ alors $1x_A-3y_A+c=0$

C'est-à-dire : $1\times4-3\times(-1)+c=0$, d'où $c=7$

Ainsi $(D): x-3y-7=0$.

b) L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

C'est-à-dire : $(D): 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(y-(-\sqrt{2}))=0$ on obtient $(D): 2\sqrt{2}x-4+3\sqrt{2}y+6=0$

Ainsi $(D): 2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+2=0$

3) Rappel : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) passant par A, alors :

$M\in(D) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

On a : $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & -1 \\ y-y_A & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(x-4)+(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 3x+y-14=0$. Ainsi l'équation cartésienne de (D) est $(D): 3x+y-14=0$

Exemple 4

Etudier la perpendicularité des droites (Δ) et (Δ') dans chacun des cas suivants :

1) $(\Delta): x-6y+2=0$ et $(\Delta'): 6x+y+1=0$

2) $(\Delta): 2x-y+3=0$ et $(\Delta'): x+y+2=0$

3) $(\Delta): x-y+4=0$ et $(\Delta'): \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \end{cases} \ /(t\in\mathbb{R})$

Solution

1) Puisque $1\times6+(-6)\times1=0$ alors : $(\Delta)\perp(\Delta')$

2) Puisque $2\times1+(-1)\times1=1\neq0$ alors : (Δ) et (Δ') ne sont pas perpendiculaires.

3) On a le vecteur $\vec{n}(1;-1)$ est normal à (Δ) et $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de (Δ').

Or $det(\vec{n};\vec{u})=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=3+2=5\neq0$ alors (Δ) et (Δ') ne sont pas perpendiculaires.

Exemple 5

Calculer la distance du point $A(5;-3)$ à la droite (D) d'équation $3x+2y+4=0$

Solution

La distance du point A à la droite (D) est : $d(A;(D))=\dfrac{|3x_A+2y_A+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|3\times 5+2\times(-3)+4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

Exemple 6

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1) (C) est de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $R=2\sqrt{2}$.
2) (C) est de centre $\Omega(1;3)$ et passant par $A(-1;2)$.
3) (C) est de diamètre $[AB]$ tels que $A(-4;3)$ et $B(2;-1)$.
4) (C) est de centre $\Omega(2;-1)$ et la droite (Δ) d'équation $(\Delta): x-3y+5=0$ tangente à (C).

Solution

1) On a : $a=2$, $b=-1$ et $R=2\sqrt{2}$

Méthode 1

L'équation cartésienne du cercle (C) est : $(x-2)^2+(y-(-1))^2=(2\sqrt{2})^2$

C'est-à-dire $x^2-4x+4+y^2+2y+1=8$ ce qui donne : $x^2+y^2-4x+2y-3=0$

Méthode 2

L'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 2x-2\times(-1)y+c=0$ où $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=2^2+(-1)^2-(2\sqrt{2})^2=-3$, d'où l'équation cartésienne du cercle (C) (C) est $x^2+y^2-4x-2y-3=0$

2) On a : $a=1$, $b=3$ et le rayon de (C) est $R=A\Omega=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 1x-2\times 3y+c=0$ où $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=1^2+3^2-(\sqrt{5})^2=5$, d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2x-6y+5=0$

3) **Méthode 1**

L'équation cartésienne du cercle (C) est : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

C'est-à-dire $(x-(-4))(x-2)+(y-3)(y-(-1))=0$ ce qui donne : $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

Méthode 2

Le centre du cercle (C) est le milieu Ω de $[AB]$

On sait que : $a=x_\Omega=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-4+2}{2}=-1$ et $b=y_\Omega=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+(-1)}{2}=1$

Le rayon du cercle (C) est $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(2+4)^2+((-1-3)^2}}{2}=\sqrt{13}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times(-1)x-2\times 1y+c=0$ où $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=(-1)^2+1^2-(\sqrt{13})^2=-11$, d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

4) On a : $a=2$, $b=-1$ et puisque (Δ) est tangente à (C) alors le rayon de (C) est :

$$R=d(\Omega;(\Delta))=\frac{|x_\Omega-3y_\Omega+5|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2-3\times(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 2x-2\times(-1)y+c=0$ où $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=2^2+(-1)^2-(\sqrt{10})^2=-5$, d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-4x+2y-5=0$

Exemple 7

Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points $M(x;y)$ du plan dans chacun des cas suivants :

1) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ 2) $x^2+y^2+6x-4y+16=0$ 3) $x^2+y^2+4x+10y+29=0$

Solution

1) On a : $a=4$, $b=-6$ et $c=9$ donc $a^2+b^2-4c=4^2+(-6)^2-4\times 9=16>0$ par conséquent (Γ) est le cercle de centre $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ c'est-à-dire $\Omega(-2;3)$ et de rayon $R=2$

2) On a : $a=6$, $b=-4$ et $c=16$ donc $a^2+b^2-4c=6^2+(-4)^2-4\times 16=-12<0$ par conséquent (Γ) est l'ensemble vide.

3) On a : $a=4$, $b=10$ et $c=29$ donc $a^2+b^2-4c=4^2+10^2-4\times 29=0$, d'où (Γ) est le singleton $\Omega(-2;-5)$

Exemple 8

1) Déterminer la position du point M par rapport au cercle (C) dans chacun des cas suivants :

a) $C(\Omega(2;3);1)$ et $M(-1;2)$; b) $(C): x^2+y^2-2x+4y=0$ et $M(0;0)$

2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $x^2+y^2-2x+2y-7=0$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2+y^2-2x+2y-7<0$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x-y>0$

d) Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y>0 \end{cases}$

Solution

1) a) On a : le rayon de (C) est $R=1$ et

$\Omega M=\sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}>1$

Donc M est à l'extérieur du cercle (C)

b) On sait que : (C) est de centre $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Or $a=-2$, $b=4$ et $c=0$ alors $\Omega(1;-2)$ et $R=\sqrt{5}$

On a $\Omega M=\sqrt{(0-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{5}=R$

Donc M est sur le cercle (C).

2) a) On a : $a=-2$; $b=2$ et $c=-7$.

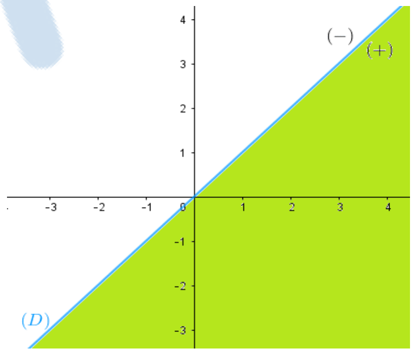
Donc $a^2+b^2-4c=(-2)^2+2^2-4\times(-7)=36>0$.

Par conséquent (C) est le cercle de centre

$\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})=\Omega(1;-1)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=3$

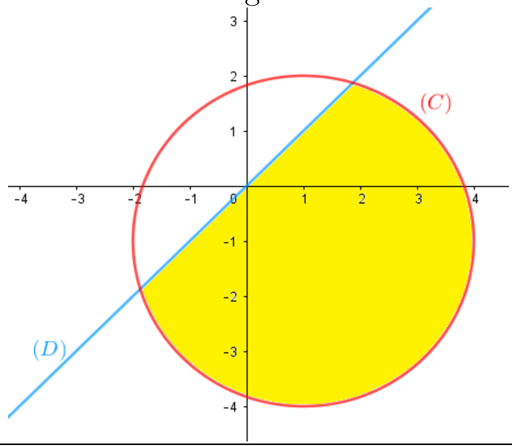
b) Les solutions graphiques de l'inéquation $x^2+y^2-2x+2y-7<0$ sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés à l'intérieur du cercle (C) précédente.

c) Les solutions graphiques de l'inéquation $x-y>0$ sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans (D^+) tel que (D) est la droite d'équation : $x-y=0$:



d) Les solutions graphiques du système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y>0 \end{cases}$ sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés à l'intersection de l'intérieur du cercle (C) avec (D^+)

C'est-à-dire les couples $(x;y)$ des points appartenant à la partie colorée de la figure ci-dessous :



Exemple 9

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

a) (C) est de centre $\Omega(2;3)$ et de rayon $R=5$; b) $(C): x^2+y^2-2x+6y-6=0$

2) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}cos(\theta) \\ y=-3+\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

3) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+3cos(t) \\ y=-1+3sin(t) \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Solution

1) a) une représentation paramétrique du cercle (C) est donnée par $\begin{cases} x=2+5cos(\theta) \\ y=3+5sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

b) Déterminons le centre et le rayon de (C)

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y-6=0\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+6y-6=0\Leftrightarrow(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9-6=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+3)=16=4^2$. D'où (C) est de centre $\Omega(1;-3)$ et de rayon $R=4$

Donc une représentation paramétrique du cercle (C) est le système : $\begin{cases} x=1+4cos(\theta) \\ y=-3+4sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

2) On a $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases} x=1+\sqrt{2}cos(\theta) \\ y=-3+\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=\sqrt{2}cos(\theta) \\ y+3=\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

Donc $M(x;y)\in(C)\Rightarrow(x-1)^2+(y+3)^2=2cos^2(\theta)+2sin^2(\theta)=2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))=2=\sqrt{2}^2$

C'est-à-dire que (C) est le cercle de centre $\Omega(1;-3)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

3) On a $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases} x=1+3cos(t) \\ y=-1+3sin(t) \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=3cos(t) \\ y+1=3sin(t) \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Donc $(x-1)^2+(y+1)^2=9cos^2(t)+9sin^2(t)=9(cos^2(t)+sin^2(t))=9$

C'est-à-dire $(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)=9$ d'où finalement $x^2+y^2-2x+2y-7=0$

Exemple 10

Etudier l'intersection de la droite (D) et du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1) $(C): x^2+y^2-x-6y=0$ et $(D): x-y-1=0$

2) $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=5$ et $(D): 2x+y+4=0$

3) $(C): x^2+y^2=9$ et $(D): y=4$

Solution

1) On sait que (C) est de centre $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Or $a=-1$; $b=-6$ et $c=0$ alors (C) est de centre $\Omega(\frac{1}{2};3)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{37}}{2}$

On a $d(\Omega;(D))=\frac{|x_\Omega-y_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\frac{1}{2}-3-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$ donc $d(\Omega;(D))<R$

Par conséquent, la droite (D) coupe le cercle (C) en deux points A et B

Déterminons le couple des coordonnées de A et de B

$M(x;y)\in(D)\cap(C)\Leftrightarrow\begin{cases} M(x;y)\in(D) \\ M(x;y)\in(C) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+y^2-x-6y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)^2+y^2-(y+1)-6y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y+1 \\ 2y^2-5y=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ y(2y-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ y=0 \quad ou \quad y=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0+1=1 \\ y=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ainsi les points d'intersection de (D) et (C) sont : $A(1;0)$ et $B(\frac{7}{2};\frac{5}{2})$

2) On a (C) est de centre $\Omega(1;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$

On a $d(\Omega;(D))=\frac{|2x_\Omega+y_\Omega+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2\times 1-1+4|}{\sqrt{5}}=\frac{|5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ donc $d(\Omega;(D)))=R$ par conséquent, la droite (D) coupe le cercle (C) en un point H. ((D) est tangente au cercle (C))

Déterminons le couple des coordonnées du point H :

$$M(x;y)\in(D)\cap(C) \Leftrightarrow \begin{cases} M(x;y)\in(D) \\ M(x;y)\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-4+1)^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-3)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ x^2-2x+1+4x^2+12x+9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ 5x^2+10x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y=-2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$, ainsi le point d'intersection de (D) et (C) est $H(-1;-2)$.

3) On a (C) est de centre $\Omega(0;0)$ et de rayon $R=3$ et $(D):0x+1y-4=0$

On a $d(\Omega;(D))=\frac{|0x_\Omega+y_\Omega-4|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|0\times 0+0-4|}{1}=4$, donc $d(\Omega;(D))>R$, par conséquent $(D)\cap(C)=\varnothing$

Exemple 11

Vérifier que le point A appartient au cercle (C) puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point A dans chacun des cas suivants :

1) $(C):x^2+y^2+x-2y=0$ et $A(0;0)$; 2) $(C):(x-2)^2+(y-4)^2=4$ et $A(2;2)$; 3) $(C):x^2+y^2=1$ et $A(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$

Solution

1) On a : $x_A{}^2+y_A{}^2+x_A-2y_A=0+0=0$, donc $A\in(C)$

On a $(C):x^2+y^2+x-2y=0$, donc (C) est de centre $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})=\Omega(-\frac{1}{2};-\frac{-2}{2})=\Omega(-\frac{1}{2};1)$

Donc : $M(x;y)\in(T)\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}-x_A\right)(x-x_A)+(1-y_A)(y-y_A)=0$

$\Leftrightarrow (-\frac{1}{2}-0)(x-0)+(1-0)(y-0)=0$, ainsi $(T):\frac{1}{2}x-y=0$

2) On a : $(x_A-2)^2+(y_A-4)^2=(2-2)^2+(2-4)^2=4$, donc $A\in(C)$

On a $(C):(x-2)^2+(y-4)^2=4$, donc (C) est de centre $\Omega(2;4)$

Donc : $M(x;y)\in(T)\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow (2-x_A)(x-x_A)+(4-y_A)(y-y_A)=0 \Leftrightarrow (2-2)(x-2)+(4-2)(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 2y-4=0$, d'où finalement $(T):y-2=0$

3) On a : $x_A{}^2+y_A{}^2=(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ donc $A\in(C)$

On a $(C):x^2+y^2=1$, donc (C) est de centre $\Omega(0;0)$

$M(x;y)\in(T)\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow (0-x_A)(x-x_A)+(0-y_A)(y-y_A)=0 \Leftrightarrow (0+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})+(0-\frac{\sqrt{3}}{2})(y-\frac{\sqrt{3}}{2})=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1=0$, ainsi $(T):x-\sqrt{3}y+2=0$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEF	**Série 4** **Analytique du produit scalaire**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1

On considère les points : $A(5;7)$, $B(2;3)$ *et* $C(9;4)$

1) *Calculer* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *et* $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2) *En déduire la nature du triangle ABC*

3) *Calculer les distances AB, BC et CA*

4) a) *Calculer* $cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ *et* $sin(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

b) *En déduire la mesure principale de l'angle orienté* $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$

5) *Calculer l'aire du triangle* ABC

Exercice 2

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) *dans les cas suivants :*

1) (D) *passe par le point* $A(1;2)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}(2;\frac{1}{2})$

2) (D) *passe par le point* $A(2;3)$ *et parallèle à la droite* $(\Delta): x+2y-3=0$

3) (D) *passe par le point* $A(5;-2)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}(1;2)$

4) (D) *passe par le point* $A(-2;1)$ *et orthogonal à la droite* $(\Delta):\begin{cases} x=4+2t \\ y=-1+3t \end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$

5) (D) *passe par les points* $A(1;-1)$ *et* $B(1;3)$

6) (D) *à une représentation paramétrique s'écrit :*

$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \end{cases} \quad /t\in\mathbb{R}$

7) (D) *à une équation réduite s'écrit :* $(D): y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

Exercice 3

Calculer la distance du point A *à la droite* (D) *dans les cas suivants :*

1) $A(2;-3)$ *et* $(D): x-y+3=0$

2) $A(1;-1)$ *et* $(D): 2x-4y+3=0$

3) $A(5;-4)$ *et* $(D):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$

Exercice 4

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) *dans les cas suivants :*

1) (C) *est de centre* $\Omega(-1;2)$ *et de rayon* $R=3$

2) (C) *est de centre* $\Omega(-4;3)$ *et passant par* $A(-1;0)$

3) (C) *est de diamètre* $[AB]$ *tels que* $A(-1;3)$ *et* $B(0;3)$

4) (C) *est de centre* $\Omega(-1;1)$ *et la droite* (Δ) *d'équation* $(\Delta): 4x-5y+3=0$ *tangente à* (C)

5) (C) *est le cercle circonscrit au triangle* ABC *tels que* $A(1;2)$, $B(7;4)$ *et* $C(-1;0)$

6) (C) *passe par les points* $A(4;-3)$, $B(0;5)$ *et de centre* Ω *appartient à la droite (D) d'équation* $(D): x+y-1=0$

Exercice 5

Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) *des points* $M(x;y)$ *du plan dans chacun des cas suivants :*

1) $x^2+y^2+x-4y+5=0$ 2) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

3) $(x-1)^2+(y+2)^2=0$ 4) $x^2+y^2=1$

Exercice 6

1) *Déterminer la position du point A par rapport au cercle* (C) *dans les cas suivants :*

a) $C(\Omega(-1;2);\sqrt{10})$ *et* $A(2;1)$

b) $(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0$ *et* $A(-1;0)$

2) a) *Déterminer la nature de l'ensemble* (C) *des points* $M(x;y)$ *du plan tel que* $x^2+y^2+6x-2y+6=0$

b) *Résoudre graphiquement l'inéquation :* $x^2+y^2+6x-2y+6<0$

3) a) *Résoudre graphiquement l'inéquation :* $x+2y-1<0$

b) *En déduire les solutions graphiques du système :*

$\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6<0 \\ x+2y-1<0 \end{cases}$

4) *Résoudre graphiquement les systèmes suivants :*

a) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6<0 \\ x+2y-1<0 \\ 5x+2y+11>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6<0 \\ x^2+y^2+2x-4y-4<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6>0 \\ x^2+y^2+2x-4y-4<0 \end{cases}$

Exercice 7

1) *Déterminer une représentation paramétrique du cercle* (C) *dans les cas suivants :*

a) (C) *est de centre* $\Omega(1;-4)$ *et de rayon* $R=\sqrt{3}$

b) $(C): (x-3)^2+(y+5)^2=9$

c) $(C): x^2+y^2+6x-8y+23=0$

2) *Déterminer l'équation cartésienne du cercle* (C) *dans les cas suivants :*

a) $(C):\begin{cases} x=1+5cos(\theta) \\ y=-2+5sin(\theta) \end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

b) $(C):\begin{cases} x=cos(t) \\ y=-3+sin(t) \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Correction : https://drive.google.com/file/d/13oZDt79sw5dx_BdcV-Yl_Q6CS382nUDM/view?usp=sharing

Prof : Aissa HIYAB	**Série 4**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF	**Analytique du produit scalaire**	Matière : Mathématique

Exercice 8

Etudier l'intersection de la droite (D) *et du cercle* (C) *dans les cas suivants :*

1) $(D): 3x+4y-3=0$; $(C): x^2+y^2-x-7y=0$

2) $(D): -4x+3y-20=0; (C): x^2+y^2-4x-2y-20=0$

3) $(D): y=x-6$; $(C): x^2+y^2=16$

Exercice 9

Vérifier que le point A appartient au cercle (C) *puis déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle* (C) *au point A dans chacun des cas suivants :*

1) $(C): x^2+y^2-2x+6y-19=0$ et $A(-1;2)$

2) $(C): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $A(-5;7)$

3) $(C): x^2+y^2=5$ et $A(-1;2)$

Exercice 10

On considère les points :

$A(1;-1)$, $B(-1;1)$, $C(\sqrt{3};\sqrt{3})$ et $D(1;0)$

1) Calculer AB ; AC ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

2) Calculer $cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ et $sin(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

3) Déterminer la nature du triangle ABC

4) Montrer que l'équation $y=-x$ est une équation cartésienne du droite (AB)

5) Calculer $d(C;(AB))$ la distance du point C à la droite (AB)

6) En déduire l'aire du triangle ABC par deux méthodes.

7) Soit (C) le cercle passant par C et de centre A

a) Vérifier que $x^2+y^2-2x+2y-6=0$ est une équation cartésienne de (C)

b) Montrer que $B\in(C)$ puis déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle (C) au point B

c) Soit (Δ) la droite passant par D et parallèle à (AB)

Montrer que $x+y-1=0$ est une équation cartésienne de (Δ)

d) Etudier l'intersection de la droite (Δ) et du cercle (C)

Exercice 11

On considère les points :

$A(2;-1)$, $B(-4;-3)$, $C(3;1)$ et $D(1;-3)$

1) Calculer AB ; AC ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

2) Calculer $cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ et $sin(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

3) En déduire la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}})$

4) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par B est perpendiculaire à (AD)

5) Montrer que $2\sqrt{5}$ est la distance du point A à (D)

6) Montrer que l'équation cartésienne du cercle (C) de centre A et la droite (D) tangente à (C) s'écrit :

$x^2+y^2-4x+2y-15=0$

7) Déterminer une représentation paramétrique de (C)

8) Déterminer (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $x^2+y^2+2x+4y-5=0$

9) Etudier l'intersection de la droite (Δ) d'équation : $y=x-3$ avec (Γ)

10) Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} y>x-3 \\ x^2+y^2+2x+4y-5<0 \end{cases}$$

Exercice 12

On considère les points : $A(-1;-1)$, $B(7;3)$ et $C(-2;6)$

1) Déterminer les cordonnées de I, J, K les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ respectivement

2) Déterminer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$

3) Soit (D_1) la médiatrice du segment $[AB]$

a) Donner un point de (D_1) et un vecteur normal à (D_1)

b) En déduire que les équations cartésiennes des médiatrices (D_1) , (D_2) et (D_3) des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ respectivement s'écrit sous la forme :

$(D_1): 2x+y-7=0$; $(D_2): 3x-y-3=0$; $(D_3): x-7y+19=0$

c) Montrer que (D_1) , (D_2) et (D_3) sont sécants en un point Ω à préciser

d) On suppose que $\Omega(2;3)$

Montrer que $\Omega A=\Omega B=\Omega C=5$ puis expliquer ce résultat.

Exercice 13

On considère les points : $A(-1;-1)$, $B(7;3)$ et $C(-2;6)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$

2) Soit (D_A) la hauteur du triangle ABC issue de A

a) Donner un point de (D_A) et un vecteur normal à (D_A)

b) En déduire que les équations cartésiennes des hauteurs (D_A) , (D_B) et (D_C) du triangle ABC issue de A, B et C respectivement s'écrit sous la forme :

$(D_A): 3x-y+2=0$; $(D_B): x-7y+14=0$; $(D_C): 2x+y-2=0$

c) Montrer que (D_A) , (D_B) et (D_C) sont sécants en un point H à préciser.

d) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

3) a) Montrer que l'équation cartésienne de (AB) peut s'écrire sous la forme $(AB): x-2y-1=0$

b) Déterminer les coordonnées du point E l'intersection des droites (D_C) et (AB)

c) On suppose que $H(0;2)$ et $E(1;0)$ calculer l'aire du triangle ABC par deux méthodes.

Exercice 14

Vérifier que le point $A(4;-2)$ *est à l'extérieur du cercle :*

$(C): (x-3)^2+(y-1)^2=5$ puis trouver les équations des tangentes au cercle (C) issues de A.

عيسى هياب
الأستاذ
مادة الرياضيات

DL2

Exercice 1 (Barycentre)

ABC un triangle et K le point du plan tel que $3\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que $B=bar\{(C;1);(K;3)\}$

2) On pose $J=bar\{(A;2);(C;1);(K;3)\}$

a) Montrer que $J=bar\{(A;2);(B;4)\}$

b) En déduire que $J=bar\{(A;1);(B;2)\}$ $\boxed{\alpha}$

3) On pose $I=bar\{(A;2);(C;1)\}$

a) Montrer que $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

b) Montrer que J est le milieu de $[KI]$

4) On pose $N=bar\{(C;1);(K;1)\}$

a) Vérifier que $3\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{NK}=\vec{0}$

b) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur B montrer que $3\overrightarrow{NK}=4\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}$

c) En déduire que $N=bar\{(C;1);(B;2)\}$ et $2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CN}$ $\boxed{\beta}$

5) On pose $L=bar\{(C;1);(I;1)\}$

a) Vérifier que $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

b) En déduire que $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur $\boxed{\alpha}$ montrer que $2\overrightarrow{NB}=3\overrightarrow{NJ}-\overrightarrow{NA}$ $\boxed{\delta}$

b) En déduire de $\boxed{\beta}$ et $\boxed{\delta}$ que $\overrightarrow{JN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que le quadrilatère $ILNJ$ est un parallélogramme.

7) Soit O le centre du parallélogramme $ILNJ$

a) Vérifier que $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$

b) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur I, L, N et J montrer que

$$4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}=6\overrightarrow{OI}\ ;\ 3\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OI}=6\overrightarrow{OL}\ ;$$
$$2\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{OB}=6\overrightarrow{ON}\ ;\ 2\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=6\overrightarrow{OJ}$$

c) En déduire que O est le centre de gravité du triangle ABC

Exercice 2 (Analytique du produit scalaire)

On considère les points suivants : $A(0;1)$, $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(1;0)$ et $D(1;-3)$

1) Montrer que $AC=\sqrt{2}$; $AB=\sqrt{2}$; $det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\sqrt{3}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=1$

2) Calculer $cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ et $sin(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

3) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}})$

4) Déterminer la nature du triangle ABC

5) Calculer l'aire du triangle ABC

6) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par C est perpendiculaire à (DA)

7) Montrer que la droite $(D): y=-4x+11$ est perpendiculaire à la droite (Δ)

8) Montrer que $\sqrt{17}$ est la distance du point $E(22;1)$ à la droite (Δ)

9) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C_1) de représentation paramétrique $(C_1):\begin{cases}x=3+cos(\theta)\\ y=2+sin(\theta)\end{cases} / \theta\in\mathbb{R}$

10) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne du cercle (C_2) du diamètre $[AC]$

11) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C_2)

12) Déterminer (C_3) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $x^2+y^2-4x-12=0$

13) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases}-x+4y+1\geq 0\\ x^2+y^2-4x-12\leq 0\end{cases}$

14) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne de (C_4) le cercle circonscrit au triangle ACD

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Correction : https://drive.google.com/file/d/1So9NRcjHqxQR0VSZ803rtsIrFCxwOQZJ/view?usp=sharing

5

Suites numériques

1) Définition d'une suite numérique-suite majorée - minorée - bornée

Activité

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble I par $f(x)=8x+\frac{1}{2}$

1) On suppose que $I=[0;+\infty[$

Calculer si possible $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{4})$, $f(-1)$ et $f(\sqrt{2})$

2) On suppose que $I=\mathbb{N}$

Calculer si possible $f(0)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{8})$ et $f(n)$ (avec $n\in\mathbb{N}$)

Définition 1

- On appelle suite numérique u toute fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
- L'image d'un entier naturel n par la suite numérique u est notée u_n.
- La notation u_n se lit * u indice n *
- Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite numérique u.

Remarque 1

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et u une suite numérique définie sur I

- La suite u est parfois notée $(u_n)_{n\in I}$
- Le nombre u_n s'appelle aussi le terme du rang n
- Il ne faut pas confondre entre u_{n+1} et u_n+1 car :

  u_{n+1} est le terme du rang n

  u_n+1 est la somme du terme du rang n avec 1.
- Si $I=\mathbb{N}$ la suite u est parfois notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou tout simplement (u_n)
- Si $I=\mathbb{N}^*$ la suite u est parfois notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_n=\frac{2n+3}{5n+1}$

1) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3

2) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\leq 3$

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=3-\frac{9}{4u_n}$

1) En remarquant que $u_1=u_{0+1}$ et $u_2=u_{1+1}$, calculer u_1 et u_2

2) Calculer u_3 et u_4

3) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\geq\frac{3}{2}$

Remarque 2

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ peut être définie :

• À partir d'une fonction f de la variable n : $u_n=f(n)$.

• À partir d'une relation de récurrence : $(u_n)_{n\in I}$ est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Définition 2

• On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n\in I)\quad u_n \le M$

• On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n\in I)\quad u_n \ge m$

• On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Exemple 3

1) La suite de l'exemple 1 est majorée par 3 car on a montré que $(\forall n\in \mathbb{N})\quad u_n \le 3$

2) La suite de l'exemple 2 est minorée par $\frac{3}{2}$ car on a montré que $(\forall n\in \mathbb{N})\quad u_n \ge \frac{3}{2}$

2) Monotonie d'une suite numérique

Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si $\forall n;m\in I\quad n>m \Rightarrow u_n \ge u_m$
- $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si $\forall n;m\in I\quad n>m \Rightarrow u_n \le u_m$
- $(u_n)_{n\in I}$ est constante si $\forall n;m\in I\quad n>m \Rightarrow u_n = u_m$

Remarque 3

- Si $(u_n)_{n\ge p}$ est une suite croissante alors $\forall n\ge p\quad u_n \ge u_p$ (C'est-à-dire est $(u_n)_{n\ge p}$ minorée par son premier terme)
- Si $(u_n)_{n\ge p}$ est une suite décroissante alors $\forall n\ge p\quad u_n \le u_p$ (C'est-à-dire est $(u_n)_{n\ge p}$ majorée par son premier terme)

Propriété 1

• $(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)\quad u_{n+1} \ge u_n$

• $(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)\quad u_{n+1} \le u_n$

• $(u_n)_{n\in I}$ est une suite constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)\quad u_{n+1} = u_n$.

Exemple 4

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = 3n+2$

2) Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\ge 1}$ définie par $v_n = \dfrac{2n-3}{n}$

Exemple 5

Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{5} \\ v_{n+1} = v_n^2 + \dfrac{3}{4}v_n \end{cases}$

1) Calculer v_1 et v_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n\in \mathbb{N})\quad 0 < v_n < \dfrac{1}{4}$

3) Vérifier que $(\forall n\in \mathbb{N})\quad v_{n+1} - v_n = v_n\left(v_n - \dfrac{1}{4}\right)$

4) En déduire la monotonie de la suite (v_n)

3) Suite arithmétique

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique définie sur $I \quad (I \subset \mathbb{N})$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n = r$.

Le nombre r est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

Exemple 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -5n+4$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.

Le terme général d'une suite arithmétique

Propriété 2

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n, p \in I$ on a $u_n = u_p + (n-p)r$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 + nr$
- Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 3

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique et $p \in I$ alors pour tout $n \geq p$ on a : $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(n-p+1)}{2} \times (u_p + u_n)$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite arithmétique alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)}{2} \times (u_0 + u_n)$
- Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2} \times (u_1 + u_n)$

Exemple 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -5n+4$ (la suite numérique de l'exemple 6).

Calculer la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_8$

Exemple 8

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

b) Déterminer v_n en fonction de n

c) Déterminer u_n en fonction de v_n puis déduire u_n en fonction de n

d) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

La propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Propriété 4

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique $\Leftrightarrow (\forall\, n \in I) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

Exemple 9

Soit (u_n) une suite arithmétique

1) Vérifier que $u_1 + u_3 = 2u_2$; 2) On suppose que $u_1 + u_2 + u_3 = 15$ calculer u_2

4) Suite géométrique

Définition 5

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique définie sur $I \quad (I \subset \mathbb{N})$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre q est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

Exemple 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

Le terme général d'une suite géométrique

Propriété 5

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n, p \in I$ on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 \times q^n$
- Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 6

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et $p \in I$ alors pour tout $n \geq p$ on a

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

Exemple 11

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n - 1 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 5$

1) Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = \frac{4}{5}(u_n + 5)$ puis déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$

3) Déterminer v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) Montrer que $v_0 + v_1 + \cdots + v_{12} = 30\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$

6) Montrer que $u_0 + u_1 + \cdots + u_{12} = -5\left(7 + 6\left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$

La propriété caractéristique d'une suite géométrique

Propriété 7

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$.

Exemple 12

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique telle que $a+b+c=7$ et $abc=8$

Déterminer a, b et c

Exercice de synthèse

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $u_1=\frac{5}{4}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=\frac{8u_n+3}{u_n+6}$.

1) Calculer u_2 et u_3 .

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad -1<u_n<3$.

3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+6}$.

b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+1}$.

a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) Montrer que : $v_1+v_2+\dots\dots\dots+v_n=-\frac{7}{4}\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$.

Résumé 5 : Suites numériques

- Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
- Une suite numérique $(u_n)_{n\in I}$ peut être définie :
  - À partir d'une fonction f de la variable n: $u_n=f(n)$.
  - À partir d'une relation de récurrence : $(u_n)_{n\in I}$ est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par $M \Leftrightarrow (\forall n\in I)\quad u_n\leq M$
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée par $m \Leftrightarrow (\forall n\in I)\quad u_n\geq m$
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante $\Leftrightarrow (\forall n\in I)\quad u_{n+1}-u_n\geq 0$.
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante $\Leftrightarrow (\forall n\in I)\quad u_{n+1}-u_n\leq 0$.
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite constante $\Leftrightarrow (\forall n\in I)\quad u_{n+1}=u_n$.

	Arithmétique	Géométrique
Comment montrer qu'une suite numérique $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_{n+1}-v_n=r$	$v_{n+1}=qv_n$
Comment déterminer v_n en fonction de n si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_n=v_p+(n-p)r$ ($p=0$ ou $p=1$ ou…….)	$v_n=v_p\times q^{n-p}$ ($p=0$ ou $p=1$ ou…….)
Comment calculer la somme des termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n\in I}$ si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_p+v_{p+1}+\dots+v_n=\dfrac{(n-p+1)}{2}\times(v_p+v_n)$	$v_p+v_{p+1}+\dots+v_n=v_p\times\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Si a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite	alors $b=\dfrac{a+c}{2}$	alors $b^2=a\times c$

Prof : Aissa HIYAB

Niveau : 1BSEF

Série 5

Suites numériques

Lycée qualifiant : Almajd

Matière : Mathématique

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que (u_n) est majorée par 2.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Calculer v_0 et v_1.

b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

d) Montrer que : $v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_n = \frac{(n+8)(n+1)}{8}$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{u_n + 1}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 3$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n + 1}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Montrer que : $v_2 + v_3 + \dots\dots\dots + v_n = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) Montrer que $u_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $u_2 = -\dfrac{1}{2}$.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > -1$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

a) Calculer v_0 puis montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Montrer que : $v_4 + v_5 + \dots\dots\dots + v_n = \dfrac{(n+8)(n-3)}{4}$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite tel que : $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 0$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

Exercice 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1) Supposons que $u_0 = -6$ et $r = 4$

Calculer u_6 et u_{12}

2) Supposons que $u_1 = 5$ et $u_{13} = 7$ Calculer r

3) Supposons que $u_{20} = 11$ et $r = 6$

Calculer u_0 puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 6

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

1) Supposons que $v_0 = 32$ et $q = \dfrac{1}{2}$ Calculer v_4 et v_6

2) Supposons que $v_7 = \frac{1}{18}$ et $v_5 = 3$ Calculer q

3) Supposons que $v_2 = -\frac{1}{81}$ et $q = 3$

Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n.

Exercice 7

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique telle que $a + b + c = 13$ et $abc = 27$

Déterminer a, b et c

Exercice 8

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r telle que :

$a + b + c = 21$ et $2a + b - c = 29$

Déterminer a, b, c et r

Correction : https://drive.google.com/file/d/1cwmUtSzhEHqWPyyCQK7gDzRmHynVtPE6/view?usp=sharing

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 1BSEF

Série 5
Suites numériques

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ une suite arithmétique de raison $r=-2$ tel que $u_0=2$ et $u_p=-18$

1) Déterminer l'entier p
2) Calculer en fonction de n la somme $u_2+u_3+...+u_n$

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ tels que $u_2=23$ et $u_p=5$

Déterminer p puis calculer $u_{10}+u_{11}+...+u_{20}$

Exercice 11

Montrer sans utiliser la récurrence que

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1+5+5^2+.....+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

Exercice 12

Calculer les sommes suivantes :

$S_1=15+21+27+....+603$

$S_2=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+....+\frac{19}{3}+7$

Exercice 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n\leq 1$
2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4) Trouver un entier n tel que pour tout $n>N$: $u_n>0,99$

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.........+\frac{1}{2n}$$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 1.
3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 15 (Complément de cours)

1) Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique.

Montrer que $(\forall n\in I)\quad u_{n+1}=\frac{u_n+u_{n+2}}{2}$.

2) Soit $(v_n)_{n\in I}$ une suite géométrique.

Montrer que $(\forall n\in I)\quad v_{n+1}^2=v_n\times v_{n+2}$.

Exercice 16 :Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci noté $(F_n)_{n\geq 1}$ débute de la manière suivante :

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610…..

" On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun Lapin ne meurt.

La suite de Fibonacci donne le nombre F_n de lapins vivant au bout de n mois.

Elle vérifie la relation $F_{n+1}+F_n=F_{n+2}$

1) Calculer F_{16} .
2) Montrer que l'équation : $x^2-x-1=0$ possède une unique solution positive que nous noterons φ . Le nombre φ est appelé le nombre d'or.
3) Montrer les égalités : $\varphi+1=\varphi^2$, $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$, $1-\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\varphi^2}$ et $\frac{\varphi}{1+\varphi^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.
4) Soient α et β deux réels. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $V_n=\alpha\times\varphi^n+\beta\times\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$.

a) Vérifier que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ satisfait à la relation : $V_{n+1}+V_n=V_{n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer α et β de sorte que $v_1=v_2=1$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=F_n$ désigne le nombre de lapins au bout de n mois.

c) Vérifier que $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\varphi}$ et déduire que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

d) A l'aide d'une calculatrice retrouver F_{16} .

5) On considère la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ définie par : $W_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad W_n=\frac{(-1)^{n+1}\times\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1}-\varphi}{(-1)^n\times\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}-1}$.

b) En déduire : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad W_n=\frac{(-1)^n\varphi+\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1}}{(-1)^n+\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}}$.

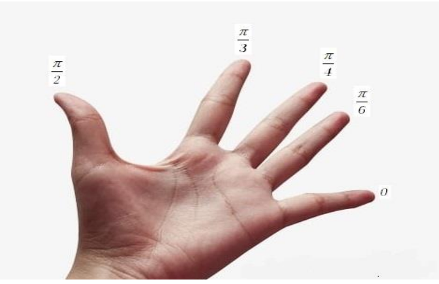
Correction : https://drive.google.com/file/d/1cwmUtSzbEHqWPuyCQK7aDzRmHypVtPE6/view?usp=sharing

6

Trigonométrie

1) Rappel

- **Lignes trigonométriques usuelles :**



Soit $\alpha \in \left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$ On a :

$$cos(\alpha)=\frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}{2}$$

$$sin(\alpha)=\frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{2}$$

$$tan(\alpha)=\frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}$$

- **Parité des fonctions $x \mapsto cos(x)$, $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto tan(x)$:**

Fonction	Ensemble de définition	Parité	Relation mathématique
$x \mapsto cos(x)$	$D_{cos}=\mathbb{R}$	Paire	$cos(-x)=cos(x)$
$x \mapsto sin(x)$	$D_{sin}=\mathbb{R}$	Impaire	$sin(-x)=-sin(x)$
$x \mapsto tan(x)$	$D_{tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$	Impaire	$tan(-x)=-tan(x)$

- **Tableau de signe de $cos(x)$, $sin(x)$ et $tan(x)$ sur $[-\pi;\pi]$:**

X	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(X)$	0	−		−	0	+		+	0
$cos(X)$		−	0	+		+	0	−	
$tan(X)$	0	+	‖	−	0	+	‖	−	0

- **Propriétés trigonométriques**

$cos^2(x)+sin^2(x)=1$

$tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$

$1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$

- **Les relations entre les lignes trigonométriques :**

	$x+2k\pi$	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
sin	$sin(x)$	$-sin(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$	$cos(x)$	$cos(x)$
cos	$cos(x)$	$cos(x)$	$-cos(x)$	$-cos(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$
tan	$tan(x)$	$-tan(x)$	$tan(x)$	$tan(x)$	$\frac{1}{tan(x)}$	$-\frac{1}{tan(x)}$

Exercice de révision :

1) Calculer : $cos(\frac{\pi}{6})$, $sin(\frac{\pi}{6})$, $cos(\frac{\pi}{4})$, $sin(\frac{\pi}{4})$, $tan(\frac{\pi}{6})$, $cos(\frac{\pi}{2})$, $sin(\frac{\pi}{2})$, $tan(\frac{\pi}{3})$

2) Calculer : $cos(\frac{2\pi}{3})$, $sin(\frac{4\pi}{3})$, $cos(-\frac{2\pi}{3})$, $sin(-\frac{4\pi}{3})$, $tan(\frac{7\pi}{6})$, $tan(-\frac{7\pi}{6})$

3) Calculer $cos(x)$ sachant que $sin(x)=-\frac{1}{5}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$

2) Transformation de $cos(a-b)$ et ses résultats

A retenir 1

Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$\boxed{1}$ $cos(a-b)=cosa\,cosb+sina\,sinb$

$\boxed{2}$ $cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb$

$\boxed{3}$ $sin(a-b)=sina\,cosb-cosa\,sinb$

$\boxed{4}$ $sin(a+b)=sina\,cosb+cosa\,sinb$

$\boxed{5}$ $cos(2a)=cos^2a-sin^2a=2cos^2a-1=1-2sin^2a$

$\boxed{6}$ $sin(2a)=2cosa\,sina$

Exemple 1

1) a) Vérifier que $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$

b) Calculer $cos(\dfrac{5\pi}{12})$; $sin(\dfrac{5\pi}{12})$; $cos(\dfrac{\pi}{12})$; $sin(\dfrac{\pi}{12})$

2) a) En remarquant que $\dfrac{\pi}{4}=2\times\dfrac{\pi}{8}$, montrer que $cos(\dfrac{\pi}{4})=2cos^2(\dfrac{\pi}{8})-1$

b) En déduire que $cos(\dfrac{\pi}{8})=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Montrer par deux méthodes que $sin(\dfrac{\pi}{8})=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

d) Vérifier par deux méthodes que $sin(\dfrac{\pi}{4})=2cos(\dfrac{\pi}{8})sin(\dfrac{\pi}{8})$

3) Transformation de $tan(a-b)$ et ses résultats – transformation de $cos^2(a)$ et $sin^2(a)$

A retenir 2

Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$\boxed{7}$ $cos^2(a)=\dfrac{1+cos(2a)}{2}$; $\boxed{8}$ $sin^2(a)=\dfrac{1-cos(2a)}{2}$

Si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $a+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $a-b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ pour tous $k\in\mathbb{Z}$, alors :

$\boxed{9}$ $tan(a-b)=\dfrac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$; $\boxed{10}$ $tan(a+b)=\dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$

Si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ et $2a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ pour tous $k\in\mathbb{Z}$, alors $\boxed{11}$ $tan(2a)=\dfrac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$

Exemple 2

1) Sachant que $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}=2\times\dfrac{\pi}{8}$ calculer $tan(\dfrac{5\pi}{12})$ et $tan(\dfrac{\pi}{8})$

2) a) Soit x un nombre réel, montrer que : $\boxed{7'}$ $cos^2(\dfrac{x}{2})=\dfrac{1+cos(x)}{2}$ et $\boxed{8'}$ $sin^2(\dfrac{x}{2})=\dfrac{1-cos(x)}{2}$

b) Soit x un nombre réel, montrer par deux méthodes que : $1+cos(x)+2sin^2(\dfrac{x}{2})=2$

4) Transformation des produits en sommes et inversement

A retenir 3

Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$\boxed{12}\begin{cases} cos(a)cos(b)=\dfrac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)] \\ sin(a)sin(b)=-\dfrac{1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)] \\ sin(a)cos(b)=\dfrac{1}{2}[sin(a+b)+sin(a-b)] \\ cos(a)sin(b)=\dfrac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)] \end{cases}$	$\boxed{13}\begin{cases} cos(p)+cos(q)=2cos(\dfrac{p+q}{2})cos(\dfrac{p-q}{2}) \\ cos(p)-cos(q)=-2sin(\dfrac{p+q}{2})sin(\dfrac{p-q}{2}) \\ sin(p)+sin(q)=2sin(\dfrac{p+q}{2})cos(\dfrac{p-q}{2}) \\ sin(p)-sin(q)=2cos(\dfrac{p+q}{2})sin(\dfrac{p-q}{2}) \end{cases}$

Exemple 3

1) Ecrire sous forme de somme les produits suivants :

$A(x)=cos(x)cos(5x)$, $B(x)=cos(3x)sin(4x)$, $C(x)=sin(x-\dfrac{\pi}{3})sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$, $D(x)=sin(x+\dfrac{\pi}{6})cos(x-\dfrac{\pi}{6})$

2) Transformer en produits les expressions suivantes :

$A(x)=cos(x)-cos(3x)$, $B(x)=sin(x)+sin(2x)+sin(3x)$, $C(x)=1+cos(x)+cos(2x)+cos(3x)$,

3) Montrer que : $sin(\frac{\pi}{12})-sin(\frac{7\pi}{12})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) Transformation de l'expression $a\times cos(x)+b\times sin(x)$

A retenir 4

Soient a et b deux réels tels que : $(a;b)\neq(0;0)$. Alors il existe un réel α tel que :

$$\boxed{14}\begin{cases} acos(x)+bsin(x)=r\,cos\left(x-\alpha\right) \\ avec \quad r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad cos(\alpha)=\frac{a}{r} \quad et \quad sin(\alpha)=\frac{b}{r} \end{cases}$$

Exemple 4

1) Ecrire sous la forme $rcos(x-\alpha)$ les expressions suivantes :

$A(x)=cos(x)+sin(x)$; $B(x)=\sqrt{3}cos(x)-sin(x)$

2) Montrer que

a) $cos(x)-\sqrt{3}sin(x)=1 \Leftrightarrow cos(x+\frac{\pi}{3})=cos(\frac{\pi}{3})$; b) $cos(2x-\frac{\pi}{3})-sin(2x-\frac{\pi}{3})=-1 \Leftrightarrow cos(2x-\frac{\pi}{12})=cos(\frac{3\pi}{4})$

6) Equations et inéquations trigonométriques

A retenir 5

(Les équations de base) : $\boxed{15}$

$$\begin{cases} cos(x)=cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=-\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \end{cases} \\ sin(x)=sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\pi-\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \end{cases} \\ tan(x)=tan(\alpha) \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\boxed{16}$ Pour résoudre une inéquation de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1):cos(x)=\frac{1}{2}$; $(E_2):sin(x)=\frac{1}{2}$; $(E_3):tan(x)=1$

Exemple 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_4):cos(x)=-\frac{1}{2}$; $(E_5):sin(x)=-\frac{1}{2}$; $(E_6):tan(x)=-1$

Exemple 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation suivante : $(E_7):sin(3x)=sin(x+\frac{\pi}{4})$

Exemple 8

Résoudre dans $I=]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :

$(E_8):cos(x)>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_9):sin(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_{10}):tan(x)\geq-\sqrt{3}$

$(E_{11}):(2sin(x)+\sqrt{2})(2cos(x)+1)<0$; $(E_{12}): -1\leq tan(x)\leq 1$

Exemple 9

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ l'équation suivante : $cos(x)-\sqrt{3}sin(x)=1$

2) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $cos(x)-\sqrt{3}sin(x)<1$

Résumé 6 : Trigonométrie

$\boxed{1}$ $cos(a-b)=cosa\,cosb+sina\,sinb$

$\boxed{2}$ $cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb$

$\boxed{3}$ $sin(a-b)=sina\,cosb-cosa\,sinb$

$\boxed{4}$ $sin(a+b)=sina\,cosb+cosa\,sinb$

$\boxed{5}$ $cos(2a)=cos^2a-sin^2a=2cos^2a-1=1-2sin^2a$

$\boxed{6}$ $sin(2a)=2cosa\,sina$; $\boxed{7}$ $cos^2(a)=\dfrac{1+cos(2a)}{2}$; $\boxed{8}$ $sin^2(a)=\dfrac{1-cos(2a)}{2}$

$\boxed{9}$ $tan(a-b)=\dfrac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$; $\boxed{10}$ $tan(a+b)=\dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$; $\boxed{11}$ $tan(2a)=\dfrac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$

$$\boxed{12}\begin{cases} cos(a)cos(b)=\dfrac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)] \\ sin(a)sin(b)=-\dfrac{1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)] \\ sin(a)cos(b)=\dfrac{1}{2}[sin(a+b)+sin(a-b)] \\ cos(a)sin(b)=\dfrac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)] \end{cases}$$

$$\boxed{13}\begin{cases} cos(p)+cos(q)=2cos(\dfrac{p+q}{2})cos(\dfrac{p-q}{2}) \\ cos(p)-cos(q)=-2sin(\dfrac{p+q}{2})sin(\dfrac{p-q}{2}) \\ sin(p)+sin(q)=2sin(\dfrac{p+q}{2})cos(\dfrac{p-q}{2}) \\ sin(p)-sin(q)=2cos(\dfrac{p+q}{2})sin(\dfrac{p-q}{2}) \end{cases}$$

$$\boxed{14}\begin{cases} acos(x)+bsin(x)=r\,cos(x-\alpha) \\ avec \quad r=\sqrt{a^2+b^2},\ cos(\alpha)=\dfrac{a}{r} \quad et \quad sin(\alpha)=\dfrac{b}{r} \end{cases}$$

(Les équations de base) : $\boxed{15}$
$$\begin{cases} cos(x)=cos(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases} x=\alpha+2k\pi & /\,k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=-\alpha+2k\pi & /\,k\in\mathbb{Z}\end{cases} \\ sin(x)=sin(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases} x=\alpha+2k\pi & /\,k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\pi-\alpha+2k\pi & /\,k\in\mathbb{Z}\end{cases} \\ tan(x)=tan(\alpha)\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad /\,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\boxed{16}$ Pour résoudre une inéquation de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.

Prof : Aissa HIYAB	**Série 6**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF	**Trigonométrie**	Matière : Mathématique

Exercice 1

1) Soit x un nombre réel, montrer que :

a) $cos(x)=cos(x+\frac{\pi}{3})+cos(\frac{\pi}{3}-x)$

b) $sin(x)=sin(x+\frac{\pi}{3})+sin(\frac{\pi}{3}-x)$

2) Soient a et b deux nombres réels tel que

$0<a<\frac{\pi}{2}$, $0<b<\frac{\pi}{2}$ et $sina=cosb=\frac{1}{3}$

a) Calculer $cosa$ et $sinb$

b) Calculer $sin(a+b)$ et en déduire la valeur de $a+b$

Exercice 2

1) Soit x un nombre réel tels que :

$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$

1) Montrer que : $tan(\frac{\pi}{4}-x)\times tan(\frac{\pi}{4}+x)=1$

2) Soit x un nombre réel tels que : $x\neq k\pi$

Montrer que : $\frac{1-cos(x)}{sin(x)}=tan(\frac{x}{2})$

Exercice 3

1) Ecrire sous forme de somme les produits suivants :

$A(x)=cos(3x)sin(x)$, $B(x)=sin(2x)sin(x)$,

$C(x)=sin(x-\frac{\pi}{6})cos(2x)$,

$D(x)=cos(x+\frac{\pi}{3})cos(x-\frac{\pi}{3})$

2) Transformer en produits les expressions suivantes :

$A(x)=cos(7x)-cos(3x)$,

$B(x)=cos(x)+cos(3x)+cos(5x)+cos(7x)$

3) Montrer que :

$sin(\frac{\pi}{12})+sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $sin(\frac{\pi}{12})\times sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{1}{4}$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

(E_1) $2sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$; $I=[0;2\pi[$

(E_2) $cos(3x)+sin(3x)=-1$; $I=[-\pi;\pi[$

(E_3) $cos(x)+cos(2x)+cos(3x)+cos(4x)=0$; $I=\mathbb{R}$

(E_4) $tan^2(x)-\sqrt{2}tan(x)+\sqrt{2}-1=0$; $I=[-5\pi;-3\pi[$

2) Résoudre dans I les inéquations suivantes :

(E_1) $2sin(2x+\frac{\pi}{6})\geq\sqrt{3}$; $I=[0;2\pi[$

(E_2) $cos(3x)+sin(3x)\leq-1$; $I=[-\pi;\pi[$

(E_3) $cos(x)+cos(2x)+cos(3x)+cos(4x)>0$; $I=\mathbb{R}$

(E_4) $tan^2(x)-\sqrt{2}tan(x)+\sqrt{2}-1<0$; $I=[-5\pi;-3\pi[$

Exercice 5

On considère l'expression

$A(x)=sin^2(\frac{\pi}{8}+x)+cos^2(\frac{\pi}{8}-x)-1$

1) Calculer $A(\frac{\pi}{8})$ et $A(\frac{\pi}{4})$

2) Montrer que $2sin^2(\frac{\pi}{8}+x)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}(cos(2x)-sin(2x))$

Et $2cos^2(\frac{\pi}{8}+x)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}(cos(2x)+sin(2x))$

3) Déduire que $A(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}sin(2x)$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=\frac{1}{2}$

Exercice 6

Soit $x;y\in\mathbb{R}$ montrer que :

1) $cos(3x)=4cos^3(x)-3cos(x)$ et

$sin(3x)=-4sin^3(x)+3sin(x)$

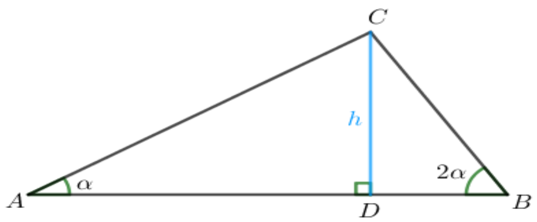
2) $\frac{sin(x+y)}{sin(x-y)}=\frac{tan(x)+tan(y)}{tan(x)-tan(y)}$

3) $tan(x)-tan(y)=\frac{2sin(x-y)}{cos(x+y)+cos(x-y)}$

4) $\frac{cos(x+y)cos(x-y)}{cos^2(x)cos^2(y)}=\frac{tan^2x-tan^2y}{tan(x+y)tan(x-y)}$

Exercice 7

On considère la figure suivante :



1-Montrer que $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ et déduire que $tan(\alpha)\notin\{0;1;\sqrt{3}\}$

2-Montrer que $\frac{1}{tan(2\alpha)}+\frac{1}{tan(\alpha)}=\frac{AB}{h}$

3-En déduire que : $h=2AB\times\frac{tan(\alpha)}{3-tan^2(\alpha)}$

Exercice 8

Soient A, B et C les mesures des angles d'un triangle ABC ($A+B+C=\pi$)

Montrer que :

1) $cos^2(A)+cos^2(B)+cos^2(C)=1-2cos(A)cos(B)cos(C)$

2) $sin(A)+sin(B)+sin(C)=4cos(\frac{A}{2})cos(\frac{B}{2})cos(\frac{C}{2})$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1jW2v4F63948UJ9xYSU0AOWwWX0yFfIXb/view?usp=sharing

DL3

1BACSEF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Analytique du produit scalaire)

1) Vérifier que le point A appartient au cercle (C_n) puis déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle (C_n) au point A dans chacun des cas suivants :

a) $(C_1): x^2+y^2+2x-4y-4=0$ et $A(-1;5)$

b) $(C_2): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $A(-5;7)$

2) Etudier l'intersection du cercle (C_1) et la droite (D) d'équation $(D): 3x+y-8=0$

Exercice 2 (Suites numériques)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=4$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{25u_n-12}{6u_n+3}$.

1) a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>3$

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=-\dfrac{2(3u_n-2)(u_n-3)}{6u_n+3}$ (Rappel $au_n^{\ 2}+bu_n+c=a(u_n-x_1)(u_n-x_2)$)

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

c) En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\le 4$

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\dfrac{u_n-3}{3u_n-2}$.

a) Calculer v_0 , v_1 et v_2

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

c) En déduire v_n en fonction de n

d) Déterminer u_n en fonction de n

e) Montrer que $v_1+v_2+\dots\dots+v_9=\dfrac{1}{20}\left(1-\dfrac{1}{3^9}\right)$

Exercice 3 (Trigonométrie)

1) a) En remarquant que $\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{\pi}{12}$, calculer $sin^2(\dfrac{\pi}{12})$ puis déduire la valeur de $sin(\dfrac{\pi}{12})$

b) Calculer par deux méthodes $cos(\dfrac{\pi}{12})$

c) Calculer par deux méthodes $tan(\dfrac{\pi}{12})$ puis calculer par deux méthodes $tan(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4})$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$, en remarquant que $3x=2x+x$, montrer que :

$cos(3x)=4cos^3(x)-3cos(x)$ et $sin(3x)=-4sin^3(x)+3sin(x)$

3) Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\neq(2k+1)\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on pose $t=tan(\dfrac{x}{2})$:

Montrer que $cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $sin(x)=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $tan(x)=\dfrac{2t}{1-t^2}$; $\dfrac{1-cos(x)}{sin(x)}=t$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi:\pi]$ les équations suivantes :

$2sin(x)-1=0$; $\sqrt{2}cos(x)+1=0$; $cos(x)+\sqrt{3}sin(x)=\sqrt{2}$

b) Placer les solutions des équations précédentes sur le cercle trigonométrique.

c) Résoudre dans $]-\pi:\pi]$ les inéquations suivantes $2sin(x)-1\ge 0$ et $\sqrt{2}cos(x)+1<0$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1F1hjR7iPM0vnG3DpoNOKGHZKV_lKy57h/view?usp=sharing

7

Limite d'une fonction

Résumé 7 : Limite d'une fonction

Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & si\ n\ est\ pair\\ -\infty & si\ n\ est\ impair\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x}$: N'existe pas (On dit que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ n'admet pas de limite en $-\infty$)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$: N'existe pas	$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & si\ n\ est\ pair\\ -\infty & si\ n\ est\ impair\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{x}$: N'existes pas $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$

Limite à droite -limite à gauche

* Pour que f admet une limite l en a, il faut et il suffit qu'elle admette la limite l à droite et à gauche en a. Autrement dit : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l\end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

En particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ alors f n'admet pas de limite en a.

Opérations sur les limites

$"(+\infty)+(+\infty)"=+\infty$	$"(+\infty)\times(+\infty)"=+\infty$	$"\dfrac{1}{\pm\infty}"=0$	$"\dfrac{+\infty}{3}"=+\infty$; $"\dfrac{+\infty}{-3}"=-\infty$
$"(-\infty)+(-\infty)"=-\infty$	$"(+\infty)\times(-\infty)"=-\infty$	$"\dfrac{3}{\pm\infty}"=0$; $"\dfrac{-3}{\pm\infty}"=0$	$"\dfrac{-\infty}{3}"=-\infty$; $"\dfrac{-\infty}{-3}"=+\infty$
$"(+\infty)+(-\infty)"=F.I$	$"(-\infty)\times(-\infty)"=+\infty$	$"\dfrac{1}{0^+}"=+\infty$; $"\dfrac{1}{0^-}"=-\infty$	$"\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}"=F.I$
$"(+\infty)+3"=+\infty$	$"(+\infty)\times3"=+\infty$	$"\dfrac{3}{0^+}"=+\infty$; $"\dfrac{-3}{0^+}"=-\infty$	$"\dfrac{0}{0}"=F.I$
$"(+\infty)-3"=+\infty$	$"(+\infty)\times(-3)"=-\infty$	$"\dfrac{3}{0^-}"=-\infty$; $"\dfrac{-3}{0^-}"=+\infty$	$"(0^+)^n"=0^+$
$"(-\infty)+3"=-\infty$	$"(-\infty)\times3"=-\infty$		$"(0^-)^n"=\begin{cases}0^+ & (n\ est\ pair)\\ 0^- & (n\ est\ impair)\end{cases}$
$"(-\infty)-3"=-\infty$	$'(-\infty)\times(-3)"=+\infty$		
$"(+\infty)^n"=+\infty$	$"(\pm\infty)\times0"=F.I$		
$"(-\infty)^n"=\begin{cases}+\infty & (n\ est\ pair)\\ -\infty & (n\ est\ impair)\end{cases}$	$"\sqrt{+\infty}"=+\infty$		

Remarques 1

* Il existe donc quatre formes indéterminées $"(+\infty)+(-\infty)"$, $"(\pm\infty)\times0"$, $"\dfrac{\infty}{\infty}"$ et $"\dfrac{0}{0}"$ où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.

* Il existe plusieurs méthodes pour lever l'indétermination (exemples : **Les identités remarquables, factorisation, division euclidienne, multiplier par la conjuguée, multiplier et diviser par le même nombre, changement de variables, effectuer un encadrement, utilisation des propriétés 1, 2 et 3)**

Propriétés 1 : Limites des polynômes et de fonctions rationnelles

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes tel que $Q(a)\neq0$, $degP(x)=n$ et $degQ(x)=m$

* $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$ et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n}{bx^m}$ (a et b sont les coefficients de x^n et x^m dans les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement)

Remarques 2 : Conditions nécessaires pour calculer une limite

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition.

* Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a. (Exemple $]a-0,1;a[\cup]a;a+0,1[\subset D_f$)
* Pour calculer $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a à droite. (Exemple $]a;a+0.1[\subset D_f$)
* Pour calculer $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a à gauche. (Exemple $]a-0,1;a[\subset D_f$)
* Pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de $+\infty$. (Exemple $]10^9;+\infty[\subset D_f$)
* Pour calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de $-\infty$. (Exemple $]-\infty;-10^9[\subset D_f$)

Propriétés 2 : Limites de fonctions trigonométriques

$$* \begin{cases} \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{sin(X)}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{tan(X)}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1-cos(X)}{X^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad * \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(ax)}{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tan(ax)}{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-cos(ax)}{(ax)^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Remarques 3

* $(\forall X \in \mathbb{R}) \quad -1 \le cos(X) \le 1 \quad$ et $\quad -1 \le sin(X) \le 1$
* Les fonctions $x \mapsto cos(x)$, $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto tan(x)$ n'admet pas de limite en $\pm\infty$

  Autrement dit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} cos(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} sin(x)$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} tan(x)$ n'existes pas.

Propriétés 3 : Limites et ordre

$* \begin{cases} g(x) < f(x) < h(x) \\ \lim g(x) = l \\ \lim h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = l$	$* \begin{cases} \lvert f(x) - l \rvert < g(x) \\ \lim g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = l$
$* \begin{cases} f(x) > g(x) \\ \lim g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = +\infty$	$* \begin{cases} f(x) < g(x) \\ \lim g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = -\infty$

Remarques 4

* f admet une limite l en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
* Si f admet la limite l en a alors l est unique.
* Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $l \in \mathbb{R}$ on dit que f admet une limite finie en a
* Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ on dit que f admet une limite infinie en a
* $\lim f(x) = l \Leftrightarrow \lim\left(f(x) - l\right) = 0$

$$* \begin{cases} \lim f(x) = l \Rightarrow \lim \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l} & (l \neq 0) \\ \lim f(x) = l \Rightarrow \lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{l} & (l \ge 0) \\ \lim \alpha \times f(x) = \alpha \times \lim f(x) & \\ \lim c = c & (c \in \mathbb{R}) \end{cases} \qquad * \begin{cases} f \text{ est paire} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \\ f \text{ est impaire} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \end{cases}$$

Prof : Aissa HIYAB	**Exemples**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF		Matière : Mathématique

Exemple 1 : Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0} x^5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 \times \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$

Exemple 2 : Limite à gauche – Limite à droite

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-5 & si \quad x>4\\ x-5+\frac{1}{x} & si \quad x<4\end{cases}$$

1) Calculer $f(9)$, $f(1)$, $f(16)$, $f(3)$ et $f(2)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

3) f admet-elle la limite en 4 ?

4) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et conclure.

5) Montrer que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

Exemple 3 : Opérations sur les limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+8$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x-1$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{-5}{x}-\frac{1}{x^2}+2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2+x)^7\left(-4x^2+1\right)$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{3x+5}{x^2-3}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{4-x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-5}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{7}{-x+3}$

$\lim\limits_{x\to5^-} \frac{4}{5-x}$; $\lim\limits_{x\to(-4)^+} \frac{2}{x^2+6x+8}$; $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{3x+5}{x^2-1}$

Exemple 4 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to3} \frac{2x^2-11x+15}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to3} \frac{2x^2-x-15}{x^3+x^2-11x-3}$; $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3-27}{x^3+x^2-11x-3}$

$\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-3x}{6-2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\sqrt{x}-2x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}$

Exemple 5 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}$

Exemple 6 : Polynômes et fonctions rationnelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x^4+8x-4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2-7x+6$

$\lim\limits_{x\to1} 9x^2+3x+1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^3+3x^2-4x+5}{x^2+x^5-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^7+8x^2+1}{x^3-2x+3}$

Exemple 7 : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{ax^2+bx+c}\pm(\alpha x+\beta)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+3}-3x+1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x+1}+3x-2$

Exemple 8 : Fonctions trigonométriques

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} sin(x)$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin(3x)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-cos(5x)}{x^2}$

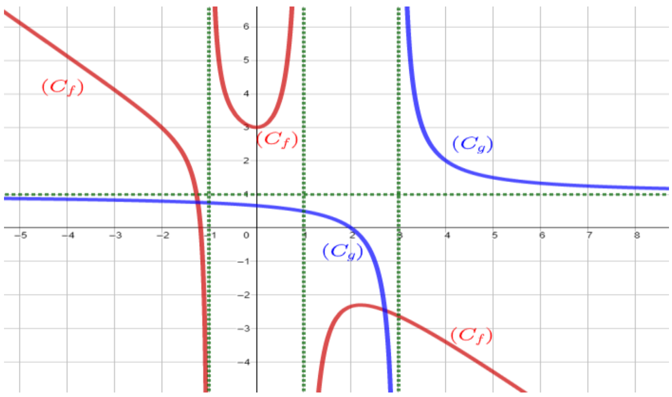
$\lim\limits_{x\to5} \frac{tan(x-5)}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{cos(x)}{x}$

Exemple 9 : Limites et ordre

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+cos(x)\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sin(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0} \left(3x^2\times sin(\frac{1}{x^2})\right)$

Exemple 10 : Détermination des limites graphiquement

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ respectivement.



1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$

2) Dresser le tableau de variations de f en ajoutant les limites précédentes. (On donne $f(2)=-\frac{7}{3}$)

3) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to3^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to3^-} g(x)$

4) Dresser le tableau de variations de g .

Prof : Aissa HIYAB	**Série 7**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF	**Limite d'une fonction**	Matière : Mathématique

Exercice 1 : Opérations sur les limites

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 4} 7x^5+3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-5}{1-x}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{-x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} (1-x)^5(-2x^2+5)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{1-4x}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 2 : Limite à gauche – Limite à droite

Soit a un nombre réel et f la fonction définie

par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{-x+3} & x\le 2 \\ f(x)=1-ax^2 & x>2 \end{cases}$

Calculer $f(2)$ et déterminer a tel que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

Exercice 3 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$; $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$;

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-125}{x-5}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3-8}{x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x-1}-3x^2+x+2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}+2x^4-x-1$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^3+(x-2)^2-3}{x}$;

$\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

Exercice 4 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x}$;

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{4x-3}-x}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{2-7x}-3}$;

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$

Exercice 5 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3x+x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} -\sqrt{2x^2-9x-4}-8x+3$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2-7x+9}+8x-4$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} -\sqrt{x^2-6x-2}-x+12$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2-4x+7}-3x+8$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2+x}-2x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x+2}$;

Exercice 6 : Polynômes et fonctions rationnelles

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2-7x^5+x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -3x^2+x+1$;

$\lim\limits_{x\to -1} x^2+3x^5-4$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2-5x^3-x^5-3$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+x^2+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{27x^7-x^3}{11x^5-2x^2-15}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4-4x}{8x^4+2x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^3}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^2}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{4x^2+x+1}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^2}$

Exercice 7 : Fonctions trigonométriques

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(4x)}{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3(2x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\tan(2x)}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x\times\tan(x)}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x\times\sin(\dfrac{1}{x})$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)(\cos(x)-1)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin(2x)}{\tan(x)}$; $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{1+2\cos(x)}{\sin(x)}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-3+\sin(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(x)+\sin(x)-\sqrt{2}}{x-\dfrac{\pi}{4}}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)-\sqrt{3}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan(x)-\sqrt{3}}{6x-2\pi}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x)-1}{2x-\pi}$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Correction : https://drive.google.com/file/d/1kDs_U-v38j94jpJCxBtK32umBOLEHdAJ/view?usp=sharing

8

Rotation

Rappel

*/ La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.

*/ Si une droite est perpendiculaire à un segment en son milieu, alors c'est sa médiatrice.

*/ Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.

*/ Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

*/ Si une droite passe par deux points équidistants d'un segment, alors c'est sa médiatrice.

*/ Un triangle est rectangle si et seulement si le milieu de son hypoténuse est équidistant de ses sommets.

*/ Si un triangle est isocèle dont l'un de ces angles égale à $60°$ alors il est équilatéral.

*/ $x \equiv y[2\pi]$ se lit « x est congru à y modulo $[2\pi]$ »

*/ $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

*/ $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ y \equiv z[2\pi] \end{cases} \Rightarrow x \equiv z[2\pi]$

*/ $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ x \equiv z[2\pi] \end{cases} \Rightarrow y \equiv z[2\pi]$

*/ $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow y \equiv x[2\pi]$

*/ $\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

*/ $\left(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{v}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

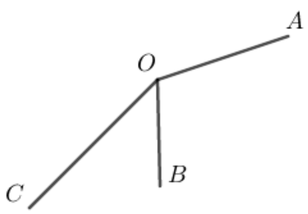
*/ $\left(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{-v}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

*/ $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right) + \left(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$ (Relation de Chasles)

1) Définition d'une rotation – rotation réciproque

Activité

Soit O un point fixe du plan orienté P. On considère les points A, B et C distincts de O



1) a) Construire le cercle (C_A) de centre O et passant par A.

b) Construire sur le cercle (C_A) le point A' tel que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

2) a) Construire le cercle (C_B) de centre O et passant par B.

b) Construire sur le cercle (C_B) l e point B' tel que $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) Construire le point C' tel que $\begin{cases} OC = OC' \\ \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

A retenir 1

Soit O un point fixe du plan orienté P et α un nombre réel.

→ La rotation de centre O et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

Si $M = O$ alors $M' = O$

Si $M \neq O$ alors $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

On la note $r(O;\alpha)$ ou r .Et on écrit $r(M) = M'$

Ainsi si $M \neq O$ alors : $\boxed{r(M) = N \Leftrightarrow \begin{cases} OM = ON \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}}$ $\boxed{1}$

Remarques 1

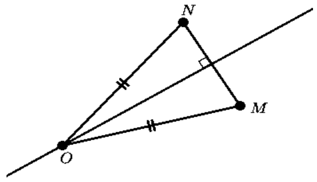
→ La rotation $r(O;-\alpha)$ de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée la rotation réciproque de la rotation $r(O;\alpha)$ de centre O et d'angle α

On la note r^{-1} et on a pour tout point N du plan : $\boxed{r^{-1}(N)=M \Leftrightarrow r(M)=N}$ $\boxed{2}$

→ Si $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$ alors :

a) Le centre O de la rotation $r(O;\alpha)$ est l'unique point invariant par cette rotation.

b) Le centre O de la rotation $r(O;\alpha)$ appartient à la médiatrice du segment $[MN]$ ou $r(M)=N$



→ On dit que la rotation r transforme le point M en N si $r(M)=N$

→ Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$ alors la rotation $r(O;\alpha)$ est la symétrie centrale de centre O

Exemple 1

ABC un triangle isocèle de sommet A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) Construire une figure convenable.

2) On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Vérifier que $r(C)=B$.

b) Construire le point B' l'image de B par la rotation r.

2) L'image des figures usuelles par une rotation

A retenir 2

Soit $ABCD$ un quadrilatère dans le plan P.

Soit r une rotation. On pose $r(A)=A'$, $r(B)=B'$, $r(C)=C'$ et $r(D)=D'$.

Figure :	Droite (AB)	Demi-droite $[AB)$	Segment $[AB]$	Cercle de centre A et de rayon R	Triangle ABC	Quadrilatère $ABCD$
Son image par la rotation r	Est la droite $(A'B')$	Est la demi-droite $[A'B')$	Est le segment $[A'B']$	Est le cercle de centre A' et de même rayon R	Est le Triangle $A'B'C'$	Est le quadrilatère $A'B'C'D'$
Expression mathématique de l'image par la rotation r	$r((AB))=(A'B')$	$r([AB))=[A'B')$	$r([AB])=[A'B']$	$r(C(A;R))=C'(A';R)$		
Cas général $\boxed{3}$	$r((MN))=(r(M)r(N))$	$r([MN))=[r(M)r(N))$	$r([MN])=[r(M)r(N)]$	$r(C(M;R))=C'(r(M);R)$	L'image du triangle MNE par la rotation r est le triangle $r(M)r(N)r(E)$	L'image du quadrilatère MNEF par la rotation r est le quadrilatère $r(M)r(N)r(E)r(F)$
Conclusion	La rotation conserve la nature des figures géométrique. (C'est-à-dire une figure (ξ) et son image $r((\xi))$ ont la même nature)					

3) Les propriétés d'une rotation

A retenir 3

Soit $r(O;\alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α

Soient (ξ) et (Γ) deux figures du plan

	La rotation conserve :	Signification mathématique
1	La distance	$\boxed{MN = r(M)r(N)}$ $\boxed{4}$
2	La mesure d'un angle orienté	$\boxed{\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{EF}\right) \equiv \theta[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{r(M)r(N)};\overrightarrow{r(E)r(F)}\right) \equiv \theta[2\pi]}$ $\boxed{5}$
3	L'alignement	$M,\ N$ et E sont alignés $\Rightarrow$ $r(M), r(N)$ et $r(E)$ sont alignés $\boxed{6}$
4	Le coefficient de colinéarité	$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{r(M)r(N)} = k\overrightarrow{r(E)r(F)}$ $\boxed{7}$
5	Le barycentre	$\boxed{G = Bar\{(M;x);(N;y)\} \Rightarrow r(G) = Bar\{(r(M);x);(r(N);y)\}}$ $\boxed{8}$
6	Le milieu	I *est le milieu du* $[MN] \Rightarrow r(I)$ *est le milieu du* $[r(M)r(N)]$ $\boxed{9}$
7	Le centre de gravité	G *est le centre du gravité du triangle* $MNE \Rightarrow$ $r(G)$ *est le centre du gravité du triangle* $r(M)r(N)r(E)$ $\boxed{10}$
8	L'appartenance	$\boxed{M \in (\xi) \Rightarrow r(M) \in r((\xi))}$ $\boxed{11}$
9	L'intersection.	$\boxed{M = (\xi) \cap (\Gamma) \Rightarrow r(M) = r((\xi)) \cap r((\Gamma))}$ $\boxed{12}$
10	Le parallélisme.	$\boxed{(D) \parallel (\Delta) \Rightarrow r((D)) \parallel r((\Delta))}$ $\boxed{13}$
11	L'orthogonalité.	$\boxed{(D) \perp (\Delta) \Rightarrow r((D)) \perp r((\Delta))}$ $\boxed{14}$

Remarques 2

1) $A,\ B,\ A'$ et B' quatre points du plan.

Si $A \neq B$ et $A' \neq B'$, Alors il existe une rotation r tel que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

$\rightarrow$ Le centre de la rotation r est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$

$\rightarrow$ L'angle α de la rotation r est de mesure : $\alpha \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]$

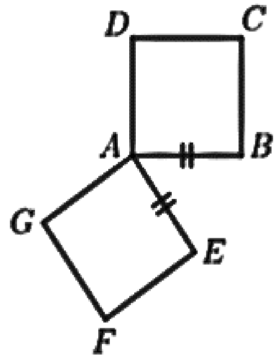
2) Si r est une rotation d'angle α, M et N deux points distincts alors $\boxed{\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{r(M)r(N)}\right) \equiv \alpha[2\pi]}$ $\boxed{15}$

3) Si r est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, M et N deux points distincts alors $(MN) \perp (r(M)r(N))$

Exemple 2

Soient $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés tel que $AB = AE$ (Voir la figure ci-contre).

Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



1) Vérifier que $r(D) = B$ et $r(E) = G$.

2) En déduire que $DE = BG$.

3) En déduire que $\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{BG}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(DE) \perp (BG)$

4) Déterminer $r((DE))$ et $r([DE])$.

5) Soit I et J les milieux respectifs des segments $[DE]$ et $[BG]$.

Montrer que $r(I) = J$.

6) Soit (Δ) une droite coupe (DE) en H. On pose $r((\Delta)) = (\Delta')$.

Supposons que (Δ') coupe (BG) en K. Montrer que $r(H) = K$.

Résumé 8 : Rotation

Définition d'une rotation – rotation réciproque :

→ La rotation $r(O;\alpha)$ de centre O et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

Si $M \neq O$ alors : $\boxed{r(M)=N \Leftrightarrow \begin{cases} OM=ON \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}}$ $\boxed{1}$ et on a $r(O)=O$

→ La rotation $r(O;-\alpha)$ de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée la rotation réciproque de la rotation $r(O;\alpha)$ de centre O et d'angle α

On la note r^{-1} et on a pour tout point N du plan : $\boxed{r^{-1}(N)=M \Leftrightarrow r(M)=N}$ $\boxed{2}$

L'image des figures usuelles par une rotation :

Figure :	Droite (MN)	Demi-droite $[MN)$	Segment $[MN]$	Cercle de centre M et de rayon R	Triangle MNE	Quadrilatère $MNEF$
$\boxed{3}$ Son image :	$r((MN))=(r(M)r(N))$	$r([MN))=[r(M)r(N))$	$r([MN])=[r(M)r(N)]$	$r(C(M;R))=C'(r(M);R)$	L'image du triangle MNE par la rotation r est le triangle $r(M)r(N)r(E)$	L'image du quadrilatère MNEF par la rotation r est le quadrilatère $r(M)r(N)r(E)r(F)$

Les propriétés d'une rotation :

Soit $r(O;\alpha)$ une rotation, (ξ) et (Γ) deux figures du plan

	La rotation conserve :	Signification mathématique
0	La nature des figures géométrique.	Une figure (ξ) et son image $r((\xi))$ ont la même nature
1	La distance	$\boxed{MN=r(M)r(N)}$ $\boxed{4}$
2	La mesure d'un angle orienté	$\boxed{\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{EF}\right)\equiv\theta[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{r(M)r(N)};\overrightarrow{r(E)r(F)}\right)\equiv\theta[2\pi]}$ $\boxed{5}$
3	L'alignement	M, N et E sont alignés $\Rightarrow$ $r(M), r(N)$ et $r(E)$ sont alignés $\boxed{6}$
4	Le coefficient de colinéarité	$\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{r(M)r(N)}=k\overrightarrow{r(E)r(F)}$ $\boxed{7}$
5	Le barycentre	$\boxed{G=Bar\{(M;x);(N;y)\}\Rightarrow r(G)=Bar\{(r(M);x);(r(N);y)\}}$ $\boxed{8}$
6	Le milieu	I *est le milieu du* $[MN]\Rightarrow r(I)$ *est le milieu du* $[r(M)r(N)]$ $\boxed{9}$
7	Le centre de gravité	G *est le centre du gravité du triangle* $MNE\Rightarrow$ $r(G)$ *est le centre du gravité du triangle* $r(M)r(N)r(E)$ $\boxed{10}$
8	L'appartenance	$\boxed{M\in(\xi)\Rightarrow r(M)\in r((\xi))}$ $\boxed{11}$
9	L'intersection.	$\boxed{M=(\xi)\cap(\Gamma)\Rightarrow r(M)=r((\xi))\cap r((\Gamma))}$ $\boxed{12}$
10	Le parallélisme.	$\boxed{(D)\parallel(\Delta)\Rightarrow r((D))\parallel r((\Delta))}$ $\boxed{13}$
11	L'orthogonalité.	$\boxed{(D)\perp(\Delta)\Rightarrow r((D))\perp r((\Delta))}$ $\boxed{14}$

Détermination de l'angle d'une rotation :

Si r est une rotation d'angle α , M et N deux points distincts alors $\boxed{\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{r(M)r(N)}\right)\equiv\alpha[2\pi]}$ $\boxed{15}$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 1BSEF

Série 8
Rotation

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1

$ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer $r(A)$ et en déduire $r^{-1}(D)$

2) Déterminer $r^{-1}(C)$ et en déduire $r(D)$

Exercice 2

ABC un triangle. Soit $r(A;\frac{\pi}{2})$

1) Construire les points E et D tels que : $r(B)=E$ et $r(C)=D$

2) Montrer que $(DE)\perp(BC)$

Exercice 3

Soit A, B et C des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

O est le milieu du segment $[BC]$. On pose $r(O;\frac{\pi}{6})$

Soient $A'=r(A)$, $B'=r(B)$ et $C'=r(C)$

1) Montrer que $\overrightarrow{A'B'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A'C'}$

2) Montrer que O est le milieu du segment $[B'C']$

Exercice 4

ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) Déterminer l'angle de la rotation r de centre B et qui transforme A en C

2) Construire le point D l'image de C par la rotation r

3) En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un losange.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré de centre O, on note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$

En choisissant la rotation $r(O;\frac{\pi}{2})$ montrer que $(CI)\perp(DJ)$

Exercice 6

Soit ABC un triangle, on construit à son extérieur les points D et E tels que ABD et ACE soient des triangles rectangles et isocèles de sommet A

En utilisant une rotation convenable montrer que $CD=EB$

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Déterminer le centre et l'angle de la rotation r tel que $r(C)=A$ et $r(A)=B$

Exercice 7

ABC un triangle tel que $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $CB=CA$

Soit I le milieu de segment $[AB]$ et E un point tel que C est le milieu de segment $[BE]$.

On considère la rotation $r(I;\frac{\pi}{2})$.

1) Construire une figure convenable et montrer que $r(A)=C$ et $r(C)=B$

2) Construire le point F tel que $F=r(E)$

3) Déterminer $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})$ et déduire que $(\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

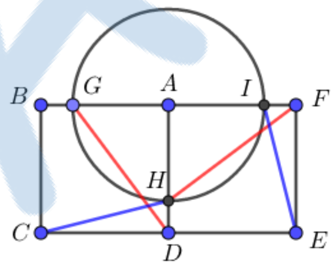
4) Montrer que $BF=CA$

5) Montrer que $AE=AB$ puis $CF=AB$

6) En déduire la nature du quadrilatère $ACFB$.

Exercice 8

$ABCD$ et $ADEF$ deux carrés (Voir la figure ci-contre)



Soit G un point sur le segment $[AB]$

Soit (Γ) le cercle de centre A et passant par G

Le cercle (Γ) coupe les segments $[AD]$ et $[AF]$ respectivement en H et I.

En utilisant une rotation convenable montrer que $DG=HF$ et $CH=EI$

Exercice 9

ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit r la rotation qui transforme A en B et B en C

1) Déterminer α l'angle de la rotation r (on rappelle que $(-\vec{u};\vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u};\vec{v})[2\pi]$)

2) Déterminer O le centre de la rotation r

Exercice 11

Soit $ABCD$ un carré tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I un point du segment $[BD]$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I et de rayon IA.

Le cercle $(\mathcal{C})$ coupe la droite (AB) en J et (AD) en K.

1) Montrer que $C\in(\mathcal{C})$ et que $\hat{KIC}=2\hat{CAK}$

2) En déduire que $(CI)\perp(JK)$ et que $CK=CJ$

3) En utilisant une rotation convenable m.q $DK=BJ$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1JkS3PKuL8tQqLQ3PAXhgz0ZXn2GruGBK/view?usp=sharing

DL4

Exercice 1 (Limite d'une fonction)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{-2x^2+3x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-5x^3-x^5-3$; $\lim\limits_{x\to-1}x^2+3x^5-4$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}$

$\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{3x-2}-x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}-2}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(9x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\tan(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(9x)}{\tan(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\cos(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos(\dfrac{2}{x})\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\tan(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-6x-2}+x+12$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-7x+9}+8x-4$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-4x}-3x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+\sin(x)}{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2x}{\sqrt{x^2-x}+x}$

Exercice 2 (Limite d'une fonction)

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ respectivement.

1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

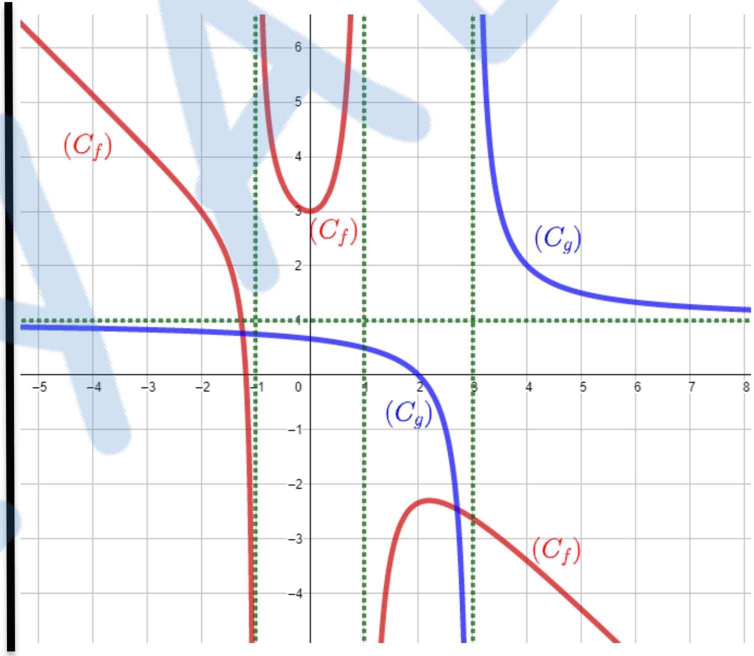
$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)$

2) Dresser le tableau de variations de f en ajoutant les limites précédentes. (On donne $f(2)=-\dfrac{7}{3}$)

3) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to3^+}g(x)$; $\lim\limits_{x\to3^-}g(x)$

4) Dresser le tableau de variations de g .



Exercice 3 (Rotation)

$ABCD$ un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

I et J deux points tels que $\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Les droites (IC) et (JD) coupent respectivement (BD) et (AC) en M et N .

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1) Construire une figure et déterminer $r(A), r(B), r(C)$ et $r(D)$.

2) a) Montrer que $I=bar\{(A;1);(B;-3)\}$ et $J=bar\{(B;1);(C;-3)\}$

b) En déduire que $r(I)=J$.

3) a) Déterminer l'image de chacune des droites (BD) et (IC) par la rotation r .

b) En déduire que $r(M)=N$.

c) En déduire que $IM=JN$.

4) Montrer que $(CM)\perp(DN)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1VG-VxaldLXZ7V5qMhpu6c6W7sSp74z0B/view?usp=sharing

9

Dérivation

Définitions et propriétés

1) Dérivabilité en un point-nombre dérivé :

Soit f une fonction definie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- On dit que f est derivable en a, s'il existe un nombre reel l, tel que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.
- Le réel l est appelé le nombre dérivé de f en a ou dérivé de f en a. On le note par $f'(a)$.

2) Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche en un point :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,b[$.

On dit que f est dérivable à droite en a, si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie.

Cette limite est appelée le nombre dérivé à droite en a .On le note par $f'_d(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b,a]$.

On dit que f est dérivable à gauche en a, si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie.

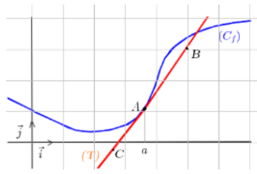
Cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche en a. On le note par $f'_g(a)$.

- f est dérivable en a si, et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$.

3) Intérprétation graphique – équation de la tangente à une courbe en un point

- Soit f une fonction dérivable en a et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

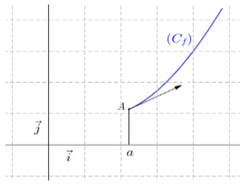
* $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a



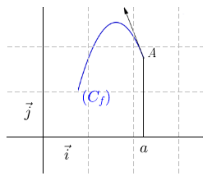
*Donc si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$, alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

*La droite :(T): $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ est appelée la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a.

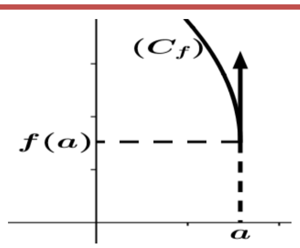
- Si la fonction f est dérivable à droite en a, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(a,f(a))$ une demi-tangente d'équation : $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$; $x\geq a$.



- Si la fonction f est dérivable à gauche en a, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(a,f(a))$ une demi-tangente d'équation : $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$; $x\leq a$

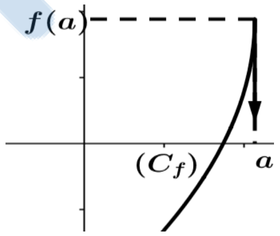


- Si la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie lorsque x tend vers a^+ ou x tend vers a^- alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse a un demi tangent d'équation : $x=a$ (parallèle à l'axe des ordonnées) :



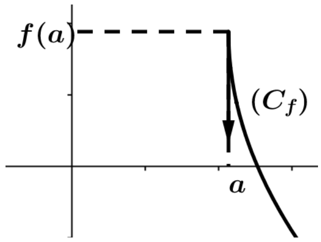
On a $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$

la demi-tangente est dirigée vers le haut.



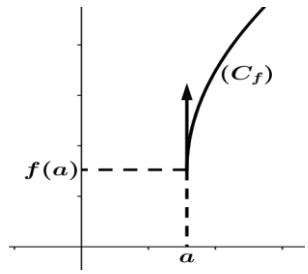
On a $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$

la demi-tangente est dirigée vers le bas.



On a $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$

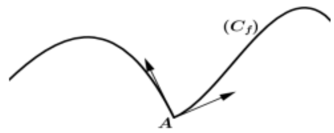
la demi-tangente est dirigée vers le bas.



On a $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$

la demi-tangente est dirigée vers le haut.

- Si $(\mathcal{C}_f)$ admet en un point A deux demi- tangentes de directions différentes, alors A est dit : point anguleux.



4) Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a .

- La fonction g tel que $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a .
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h)\simeq g(h)$

5) Dérivabilité sur un intervalle :

Soit f une fonction numérique.

- On dit que f est dérivable sur un intervalle $]a,b[$ lorsque f est dérivable en tout réel de $]a,b[$.
- On dit que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à droite en a .
- On dit que f est dérivable sur $]a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à gauche en b .
- On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b . (a et b peuvent être finis ou infinis).

6) Fonction dérivée :

- Si f est dérivable sur un intervalle I , alors la fonction qui à chaque réel x de I associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f on la note par f'.
- Si f est dérivable sur un intervalle I , alors elle-est dérivable sur chaque intervalle inclus dans I .

7) Fonction dérivée des fonctions usuelles :

a, b et c des nombres réels et $n\in\mathbb{N}^*$.

$f(x)$	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$	Ecriture mathématique
c	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$(c)'=0$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	$(ax+b)'=a$
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(x^n)'=nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$	$(cos(x))'=-sin(x)$
$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$(sin(x))'=cos(x)$
$tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\right\}$	Tout intervalle de type : $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $k\in\mathbb{Z}$	$1+tan^2\ (x)$	$(tan(x))'=1+tan^2(x)$
$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-a\times sin(ax+b)$	$(cos(ax+b))'=-a\times sin(ax+b)$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\times cos(ax+b)$	$(sin(ax+b))'=a\times cos(ax+b)$

8) Opérations sur les fonctions dérivées :

➢ u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et soit α un réel fixé et $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction	Fonction dérivée	Conditions	Ecriture mathématique :
$u+v$	$u'+v'$		$\left(u(x)+v(x)\right)'=u'(x)+v'(x)$
$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$		$\left(u(x)\times v(x)\right)'=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
$\alpha\times u$	$\alpha\times u'$		$\left(\alpha\times u(x)\right)'=\alpha\times u'(x)$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$(\forall x\in I)\quad u(x)\neq 0$	$\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)'=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$(\forall x\in I)\quad v(x)\neq 0$	$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\forall x\in I)\quad u(x)>0$	$\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
u^n	$n\times u'\times u^{n-1}$		$\left(u^n(x)\right)'=n\times u'(x)\times u^{n-1}(x)$

➢ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

➢ Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

➢ Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors on écrit : $(\forall x\in I)\quad f'(x)=\left(f(x)\right)'$.

9) Dérivée et sens de variations :

➢ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

* f est croissante sur I si et seulement si $f'(x)\geq 0$ pour tout x de I .

* f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x)\leq 0$ pour tout x de I .

* f est constante sur I si et seulement si $f'(x)=0$ pour tout x de I .

➢ Si f est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I

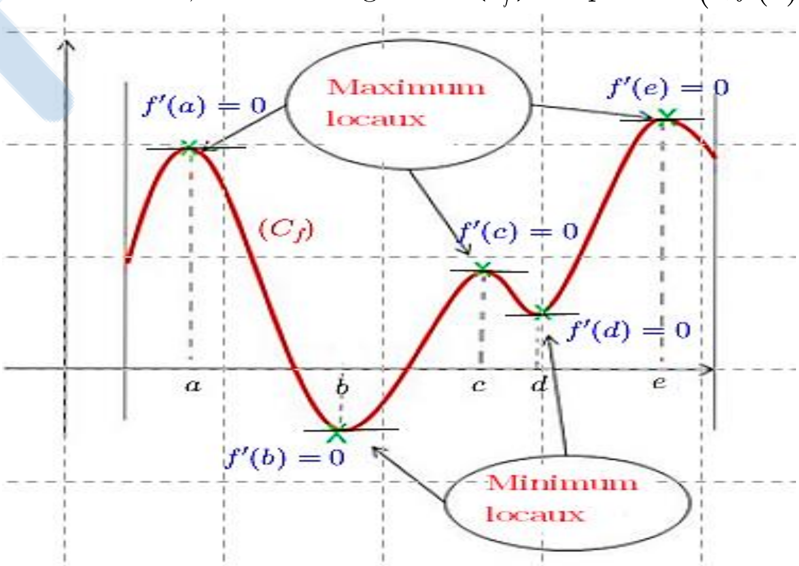
➢ Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I .

10) Dérivée et extremums :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

➢ Si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a, alors $f'(a)=0$

➢ Si f admet un extremum local en a, alors la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A\left(a,f(a)\right)$ est horizontale.



- Si $f'(a)=0$ et f' change de signe au voisinage de a, alors $f(a)$ est un extremum local de f.
- $f(a)$ est la valeur maximale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(a)$
- $f(a)$ est la valeur minimale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(a)$

11) Dérivées successives – écriture différentielle :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

* La dérivé f' de f est appelée la dérivée première de f.

* Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou f''

* Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ (avec $n \geq 3$)est dérivable sur I, sa fonction est appelée dérivée $n^{ème}$ de f et notée $f^{(n)}$.

* La dérivée $n^{ème}$ de f est appelée aussi dérivée d'ordre n de f.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si $y=f(x)$, alors on écrit $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ ou $dy=f'(x)dx$. Cette écriture est appelée : écriture différentielle.

12) Equations différentielles de type : $y''+\omega^2 y=0$

- Une équation différentielle est une équation entre une fonction f et ses dérivées dont la fonction f est l'inconnue.

On note en général la fonction f par y et ses dérivées par y', y'', $y^{(3)}$....

- Soit ω un nombre réel non nul, les solutions de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ sont les fonctions y tel que $y(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$ avec a et b sont des constantes réelles.
- Soit ω un nombre réel non nul et $x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

L'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ admet un unique solution y tel que $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y_1$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEF	**Exemples**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exemple 1 : Dérivabilité en un point-nombre dérivé

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2$ et $a=3$.
2) $f(x)=sin(2x)$ et $a=0$.
3) $f(x)=2x^2-7x+7$ et $a=2$.
4) $f(x)=cos(x)$ et $a=0$.
5) $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=0^+$.

Exemple 2 : Dérivabilité à droite- dérivabilité à gauche

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & si \quad x\geq 4\\ x^2+3 & si \quad x<4\end{cases}$ et $a=4$.
2) $f(x)=|x-3|$ et $a=3$.

Exemple 3 : Approximation affine

On considère la fonction f tel que : $f(x)=(1+x)^2$.

1) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$
2) Déterminer la fonction g l'approximation affine de f au voisinage de zéro.
3) a) Vérifier que $(1{,}0001)^2=f(0{,}0001)$ et $(1{,}009)^2=f(0{,}009)$
b) En déduire une valeur approchée des nombres $(1{,}0001)^2$ et $(1{,}009)^2$
4) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro on a : $(1+h)^2\simeq 1+2h$

Exemple 4 : Dérivabilité sur intervalle- Fonction dérivée

On considère la fonction f tel que : $f(x)=\sqrt{x}$.

1) Déterminer D_f et montrer que f est n'est pas dérivable à droite en 0 .
2) Soit $a\in]0;+\infty[$, montrer que f est dérivable en a et que $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Exemple 5 : Opérations sur les fonctions dérivées

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants

$f(x)=\sqrt{x}+x^5$ $f(x)=x^6\times cos(x)$ $f(x)=3\times sin(x)$ $f(x)=(2x+3)^8$ $f(x)=(2x^2+3x+1)^4$	$f(x)=\dfrac{1}{tan(x)}$ $f(x)=\dfrac{3x+6}{4x+7}$ $f(x)=\sqrt{x^7\times sin(x)}$

Exemple 6 : Lever l'indétermination par le nombre dérivé

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^{20}-2^{20}}{x-2}\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-1}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{cos(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2sin(x)-\sqrt{2}}{4x-\pi}$$

Exemple 7 : Dérivée et sens de variations

On considère la fonction f tel que : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

1) Déterminer D_f et $D_{f'}$
2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f
3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_{f'}$
4) Dresser le tableau de variations de f .
5) Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2

Exemple 8 : Etude d'une fonction polynôme de degré 3

Mêmes questions de l'exemple 7 pour la fonction f tel que : $f(x)=-x^3+x^2+5x+1$.

Exemple 9 : Dérivée et extremums

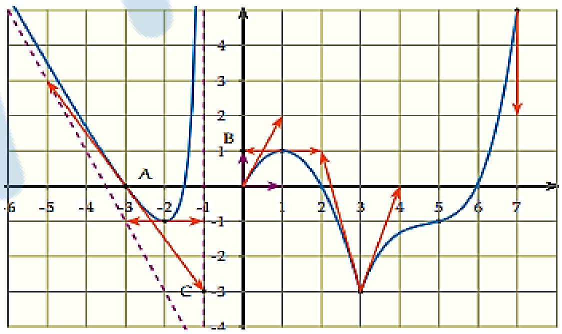
On considère la fonction f tel que : $f(x)=x^2-2x+5$.

1) Etudier les variations de f .
2) En déduire que f admet un extremum à préciser.
3) En déduire que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)\geq 4$

Exemple 10 : Détermination graphique du nombre dérivé

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup[0;7]$ et dérivable sur $]-\infty;-1[\cup[0;7[$.

Soit $A(-3;0)$, $B(0;1)$ et $C(-1;-3)$.



1) Déterminer graphiquement :

$$f'(-2)\ ;\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ ;\ \lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\ ;$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\ ;\ \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)+3}{x-3}\ ;\ \lim_{h\to 7^-}\frac{f(x)-f(7)}{x-7}$$

2) Montrer que $\lim_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{x^2-9}=\dfrac{1}{4}$.

3) La tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 5 est parallèle à la droite (AB) . `

a) Déterminer graphiquement : $\lim_{x\to 5}\dfrac{f(x)+1}{x-5}$

b) Montrer que la droite (T) passe par le point C .

Exemple 11 : L'équation différentielle $y''+\omega^2y=0$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1):\ y''+4y=0$; $(E_2):\ y''+9y=0$

$(E_3):\ y''+5y=0$; $(E_4):\ 2y''+16y=0$

2) Déterminer la solution de l'équation différentielle $(E_5):\ y''+16y=0$ telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$

Résumé 9 : Dérivation

Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$	f est dérivable en a et $f'(a) = l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$	f est dérivable à droite en a et $f_d'(a) = l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y = f_d'(a)(x-a)+f(a)$; $x \geq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$	f est dérivable à gauche en a et $f_g'(a) = l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y = f_g'(a)(x-a)+f(a)$; $x \leq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$	f n'est pas dérivable en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f_d'(a) = f_g'(a)$		

Fonction dérivée des fonctions usuelles - Opérations sur les fonctions dérivée :

$(c)'=0$ $(ax)'=a$ $(ax+b)'=a$ $(x)'=1$	$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(u^n)'=n\times u'\times u^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ $(\alpha\times u)'=\alpha\times u'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$(cos(x))'=-sin(x)$ $(cos(ax+b))'=-a\times sin(ax+b)$		$(sin(x))'=cos(x)$ $(sin(ax+b))'=a\times cos(ax+b)$		$(tan(x))'=1+tan^2(x)$	

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer $f'(a)$

Méthode 1 : Si on a calculé $f'(x)$ pour tout $x \in I$, on remplace x par a dans l'expression de $f'(x)$

Méthode 2 : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Méthode 3 : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a :

Si $A(x_A;y_A) \in (T)$ et $B(x_B;y_B) \in (T)$, alors $f'(a) = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Dérivée et sens de variations :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- $(\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I .
- $(\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I .
- $(\forall x \in I)\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I .

Dérivée et extremums :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

- $f'(a) = 0$ et f' change de signe au voisinage de $a \Rightarrow f(a)$ est un extremum de f
- $f(a)$ est un extremum de $f \Rightarrow f'(a) = 0$
- $f(a)$ est un extremum de $f \Rightarrow$ la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a est horizontale.
- (T) est horizontale $\Leftrightarrow f'(a) = 0$
- $f(a)$ est la valeur maximale de f sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(a)$
- $f(a)$ est la valeur minimale de f sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(a)$

Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a .

- La fonction g tel que $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a .
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h) \simeq g(h)$

Equations différentielles de type : $y'' + \omega^2 y = 0$

Soit ω un nombre réel non nul, les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions y tel que $y(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ avec a et b sont des constantes réelles.

Prof : Aissa HIYAB	**Série 9**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF	**Dérivation**	Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a et interpréter les résultats obtenus dans les cas suivants :

1) $f(x)=5x+2$ et $a=1$.

2) $f(x)=\sqrt{3x-2}$ et $a=2$.

3) $\begin{cases} f(x)=1-cos(x) & si \ \ x\geq 0 \\ f(x)=sin(x) & si \ \ x<0 \end{cases}$ et $a=0$.

4) $f(x)=x^3$ et $a=-1$.

Exercice 2 :

1) On considère la fonction f tel que : $f(x)=(1+x)^3$.

Donner l'approximation affine de f au voisinage de zéro et en déduire une valeur approchée de nombre $b=(1.0044)^3$

2) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro on a :

$\dfrac{1}{1+h}\simeq 1-h$ et $\sqrt{1+h}\simeq 1+\dfrac{h}{2}$.

Exercice 3 :

Préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ lorsqu'il existe dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3-5x^2+7x+3$

2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

3) $f(x)=\sqrt{x+5}$

4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

5) $f(x)=x^2\sqrt{x}-1$

6) $f(x)=2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^3}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x)=4\sqrt{x+1} & si \ \ x\geq 3 \\ f(x)=x^2-5x+c & si \ \ x<3 \end{cases}$

1) Déterminer le réel c pour que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

2) Pour la valeur de c trouvée, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 5 :

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)^{2024}-1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x+7}-6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2cos(x)-1}{tan(x)-\sqrt{3}}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que f possède deux extremums locaux dont on précisera la nature et l'intervalle.

Exercice 7 :

Dresser le tableau de variations de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

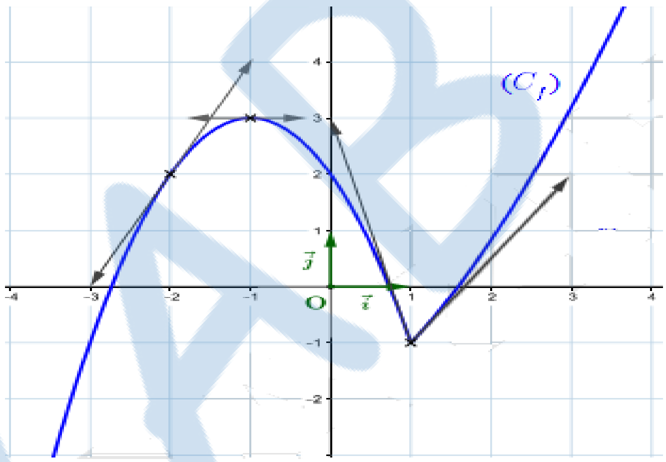
2) $f(x)=3x^4-2x^2+1$

3) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x+1}$

Exercice 8

Dans la figure ci-après $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1) Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$

2) Déterminer graphiquement $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$

3) En déduire que f n'est pas dérivable en 1.

4) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3;3]$ (on donne $f(3)=\dfrac{25}{8}$)

5) En déduire le tableau de signe de f' sur $[-3;3]$

Exercice 9 :

b et c deux nombres réels strictement positifs.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=x^3+b^3+c^3-3xbc$.

1) Vérifier que : $f(\sqrt{bc})=(\sqrt{b^3}-\sqrt{c^3})^2$

2) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$ $f'(x)=3(x+\sqrt{bc})(x-\sqrt{bc})$

3) Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f

4) En déduire que f admet une valeur minimale positive sur $\mathbb{R}_+^*$

5) Déduire que : $(\forall a;b;c\in]0;+\infty[)$ $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

Exercice 10 :

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :

Sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm2, les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et de 2 cm sur les bords verticaux.

Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

Correction : https://drive.google.com/file/d/1eUUlOCdDmy62RP_z346xmpDR0ZSwBpB1/view?usp=sharing

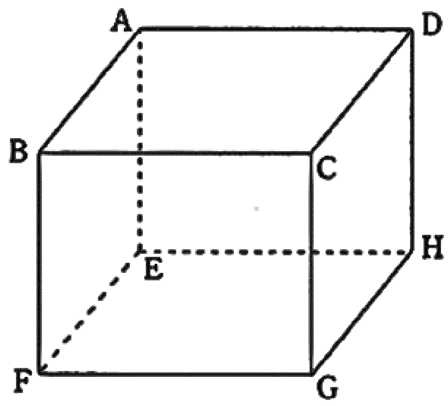
10

Vecteurs de l’espace

Rappel

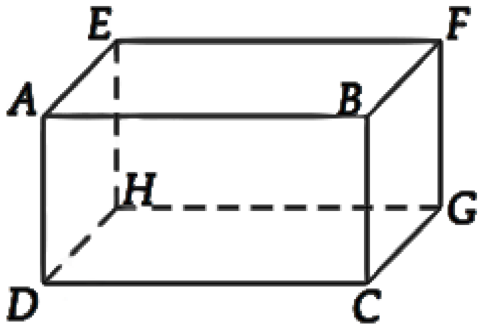
1) Le nombre de faces et de sommets de quelques solides de l'espace

Cube



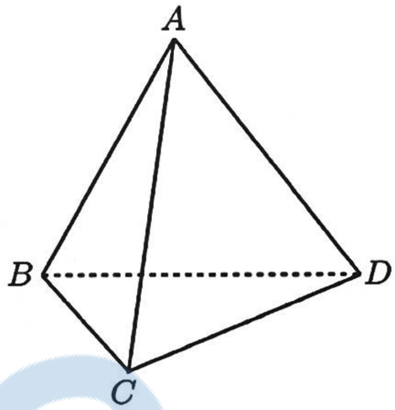
Nombres de faces : 6
Nombres de sommets : 8

Parallélépipède rectangle



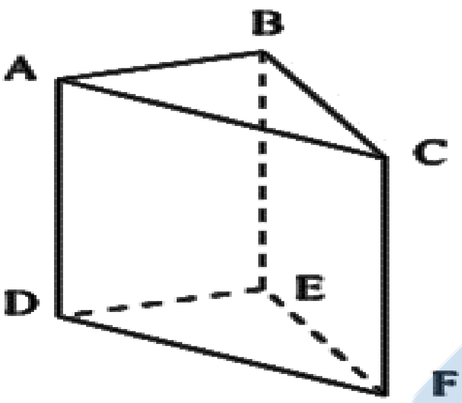
Nombres de faces : 6
Nombres de sommets : 8

Tétraèdre



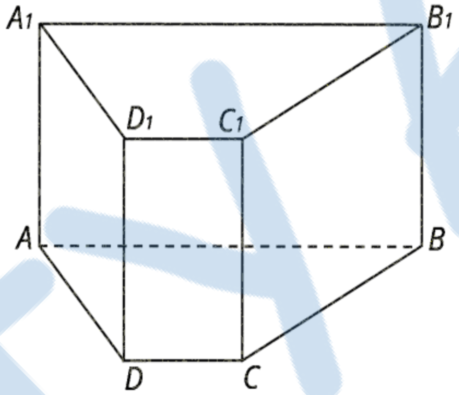
Nombres de faces : 4
Nombres de sommets : 4

Prisme droit à base triangulaire



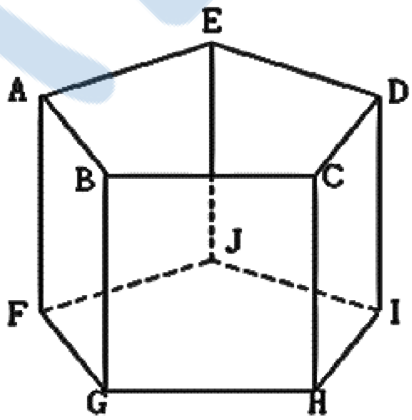
Nombres de faces : 5
Nombres de sommets : 6

Prisme droit à base rectangle



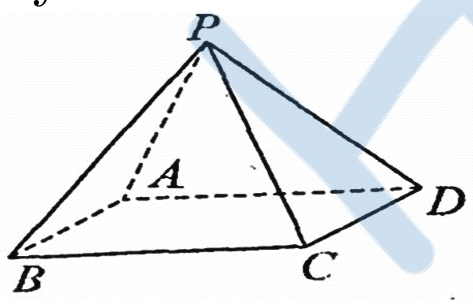
Nombres de faces : 6
Nombres de sommets : 8

Prisme droit à base pentagone



Nombres de faces : 7
Nombres de sommets : 10

Pyramide



Nombres de faces : 5
Nombres de sommets : 5

Cube	مكعب
Parallélépipède	متوازي المستطيلات
Tétraèdre	رباعي أوجه
Prisme	موشور
Pyramide	هرم

2) Perspective cavalière

La perspective cavalière est une manière de représenter sur un plan des solides de l'espace.

Pour tracer un solide dans un plan, on peut utiliser une représentation en perspective cavalière :

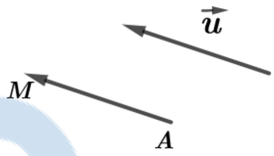
- La face avant est représentée en vraie grandeur.
- Les arêtes parallèles sont représentés par des segments parallèles.
- Les arêtes cachées sont dessinées en pointillés.

1) Le vecteur dans l'espace

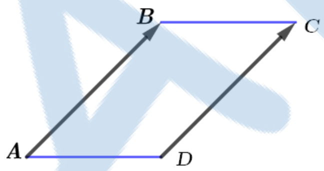
On étend la notion de vecteur dans le plan à l'espace.

Vecteurs -égalité de deux vecteurs dans l'espace

- Chaque deux points différents A et B de l'espace représentent un vecteur de l'espace, noté $\overrightarrow{AB}$ et défini par :
  - une direction (la droite (AB)) • un sens (de A vers B) • une norme ou distance notée : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé : le vecteur nul, noté par $\vec{0}$.
- Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si elles ont la même direction, le même sens et la même norme.
- Pour tout point A et vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$



- Le vecteur $-\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $\vec{u}$ (ils ont la même direction et la même norme mais sont de sens opposés)
- On dit que deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Soit $ABCD$ un quadrilatère de l'espace,
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.



L'addition et la multiplication par un réel :

- Comme l'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des vecteurs de l'espace est muni de deux opérations : l'addition (relation de Chasles et la règle du parallélogramme) et la multiplication par un réel.
- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et les nombres réels a et b, on a :
  - $1\vec{u} = \vec{u}$ • $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ • $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ • $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ • $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace et pour tout nombre réel α, on a : $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à ($\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$).

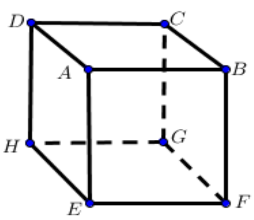
Exemple 1 :

Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ est un cube.

1) Simplifier $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$; $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{HG}$; $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{DH}$

2) Construire les points M et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$



Remarque 1 :

Tous les résultats de la géométrie plane (Théorème de Pythagore, théorème de Thalès, théorème des milieux, etc....) sont applicables dans chaque plan de l'espace.

2) Vecteurs colinéaires-Points alignés

Vecteurs colinéaires

- **Définition 1 :**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls dans l'espace sont dites colinéaires, s'ils ont la même direction.

- **Propriété 1 :**

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans l'espace, si et seulement s'il existe un réel α tel que : $\vec{u} = \alpha\vec{v}$

➢ **Remarque 2**

- $(AB)//(CD) \Leftrightarrow$ Il existe un réel α tel que : $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$
- Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

Points alignés

Soit A, B et C trois points de l'espace.

➢ **Définition 2 :**

Les points A, B et C sont alignés, (appartient au même droite) s'il existe une droite (Δ) tel que :

$A \in (\Delta)$, $B \in (\Delta)$ et $C \in (\Delta)$

➢ **Propriété 2 :**

Les points A, B et C sont alignés, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
(C'est-à-dire s'il existe un réel α tel que : $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$)

Droite parallèle à un plan

Soit (D) une droite et (P) un plan de l'espace.

➢ **Définition 3 : Droite incluse dans un plan**

On dit que la droite (D) est incluse dans le plan (P) et on écrit $(D) \subset (P)$ s'il existe deux points distincts de (D) appartiennent au plan (P).

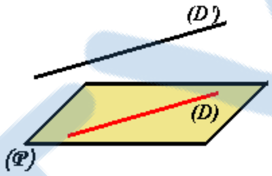
➢ **Cas particulier**

A et B sont deux points distincts de l'espace :
Pour montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan (P) il suffit de montrer que $A \in (P)$ et $B \in (P)$

➢ **Propriété 3 :**

Une droite (D') est parallèle au plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite (D) incluse dans (P). On écrit $(D')//(P)$

$$(D')//(P) \Leftrightarrow \begin{cases} (D')//(D) \\ (D) \subset (P) \end{cases}$$



➢ **Remarque 3**

- Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles.
- Deux droites orthogonales dans l'espace ne sont pas nécessairement perpendiculaires.

Exemple 2 :

1) Dessiner un cube $ABCDEFGH$, puis placer le point J tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et le point I tel que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{EF}$

2) Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB}$. Montrer que la droite (EI) est parallèle à la droite (AK).

3) Soient M et N les points tels que $EFIJABMN$ soit un parallélépipède. Montrer que les points A, C et N sont alignés.

4) Construire les droites $D_1(A;\overrightarrow{DA})$; $D_2(K;\overrightarrow{BC})$; $D_3(E;\overrightarrow{JI})$

Définition vectorielle d'une droite de l'espace :

➢ **Rappel :**

1) Tout droite de l'espace est définie par un point et un vecteur directeur.
2) Tous deux points distincts A et B de l'espace définis une unique droite notée (AB).

➢ **Propriété 4 :**

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
(C'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$), on le note par : $D(A;\vec{u})$

$$M \in D(A;\vec{u}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

3)Vecteurs coplanaires-Points coplanaires

Vecteurs d'un plan

Soit (P) un plan de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a :

$\vec{u} \in (P) \Leftrightarrow \exists A, B \in (P) \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{u} \in (P)$ et $\vec{v} \in (P) \Leftrightarrow \left(\vec{u}+\vec{v}\right) \in (P)$

$\vec{u} \in (P) \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{R}) \quad \left(k\vec{u}\right) \in (P)$

Vecteurs coplanaires

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

➢ **Définition 4 :**

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, (appartient au même plan) s'il existe un plan (P) tel que $\vec{u} \in (P)$, $\vec{v} \in (P)$ et $\vec{w} \in (P)$

➢ **Propriété 5 :**

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

On dit, dans ce cas, que le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Points coplanaires

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace.

➢ **Définition 5 :**

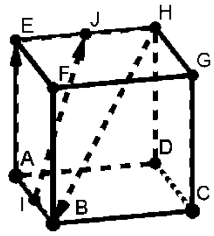
Les points A, B, C et D sont coplanaires, (appartient au même plan) s'il existe un plan (P) tel que : $A \in (P)$, $B \in (P)$, $C \in (P)$ et $D \in (P)$

➢ **Propriété 6 :**

Les points A, B, C et D sont coplanaires, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
(C'est-à-dire s'il existe deux réels α et β tels que : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$)

Exemple 3 :

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[EH]$.



1) Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}$

2) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

3) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$

4) Que peut-on dire sur les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$?

Exemple 4 :

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires et T le point tel que $2\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$

Montrer que les points A, C, D et T sont coplanaires.

Définition vectorielle d'un plan de l'espace :

➢ **Remarque 4 :** Tout plan de l'espace peut être défini par :

1) Trois points A, B et C non alignés. (On le note par (ABC)).

Il est clair qu'on a $A \in (ABC)$, $B \in (ABC)$ et $C \in (ABC)$

Pour tout point M on a : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists \alpha;\beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

2) Deux droites sécantes ou strictement parallèles.

3) Un point et deux vecteurs non colinéaires (sont dites vecteurs directeurs de ce plan).

- **Propriété 7 :**

Soit A un point et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(C'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ avec $\alpha;\beta \in \mathbb{R}$), on le note par : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

$M \in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) \Leftrightarrow \exists \alpha;\beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

Résumé 10 : Vecteurs de l'espace

L'ensemble des vecteurs de l'espace

Comme l'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des vecteurs de l'espace est muni des opérations : Egalités (relation de Chasles et la règle du parallélogramme), l'addition et la multiplication par un réel.

Vecteurs colinéaires

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement s'il existe un réel α tel que : $\vec{u} = \alpha\vec{v}$

Points alignés

Les points A, B et C sont alignés, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Vecteurs coplanaires

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Points coplanaires

Les points A, B, C et D sont coplanaires, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Droite incluse dans un plan

On dit que la droite (D) est incluse dans le plan (P) et on écrit $(D) \subset (P)$ s'il existe deux points distincts de (D) appartiennent au plan (P).

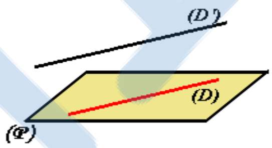
Remarques

Pour montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan (P) il suffit de montrer que $A \in (P)$ et $B \in (P)$
Pour montrer que $M \in (ABC)$ il suffit de trouver $\alpha;\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

Droite parallèle à un plan

Une droite (D') est parallèle au plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite (D) incluse dans (P).
On écrit $(D')//(P)$

$(D')//(P) \Leftrightarrow \begin{cases} (D')//(D) \\ (D) \subset (P) \end{cases}$



Définition vectorielle d'une droite de l'espace

Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$M \in D\left(A;\vec{u}\right) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Définition vectorielle d'un plan de l'espace

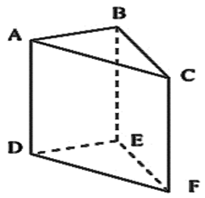
Tout plan de l'espace peut être défini par un point et deux vecteurs non colinéaires (sont dites vecteurs directeurs de ce plan).
Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$M \in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) \Leftrightarrow \exists \alpha;\beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

Prof : Aissa HIYAB	**Série 10**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF	**Vecteurs de l'espace**	Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Dans la figure ci-contre ABCDEF est un prisme à base triangulaire.



1) Déterminer $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

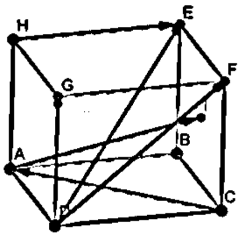
2) Déterminer $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}$

3) Soit G le point tel que : $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$.

Montrer que G est le symétrique de E par rapport à I le milieu de l'arête [DF].

Exercice 2 :

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. I est le milieu de [BF].



1) Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

Exercice 3 :

Soit ABCDEFGH un cube

Déterminer les points P, Q et R tels que :

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{DR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB}\right)$

Et J le centre de la face DCGH.

Soient P et Q définis par $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Soient I et K les milieux respectifs de [AE] et [PQ].

1) Faire une figure.

2) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ puis $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

3) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 4 :

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [HF]

M le point de l'espace tel que : $2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MA}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

2) Construire une figure

3) Montrer que $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

4) J et K sont les milieux respectifs de [EF] et [BC].

Montrer que $\overrightarrow{JK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$.

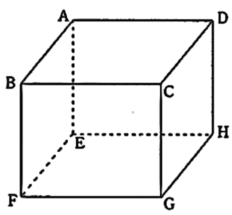
Exercice 5 :

Soit ABCDEFGH un cube.

On note I le milieu de [AE],

J le milieu de [GH] et

O le milieu de [CH].



1) a) Montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AO}$

b) En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACH).

2) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$.

3) Déterminer $D(O;\overrightarrow{IJ})$ et $D(G;\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{OF})$

Exercice 6 :

Soit ABCDEFGH un cube.

1) Déterminer le plan passant par le point G et dirigé par les deux vecteurs $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GH}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que :

$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AE}$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Exercice 7 :

Soit ABCDEFGH est un cube.

Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

1-Faire une figure

2-Montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$

3-En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires.

Exercice 8 :

On considère un tétraèdre ABCD. Les points I, J, K et L sont définis respectivement par :

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$;$\overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

1) Faire une figure.

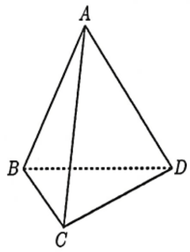
2) a) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires

3) Montrer que la (BD) est parallèle au plan (IJKL).

Exercice 9 :

On considère un tétraèdre ABCD.



Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

F le point défini par $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Et G le point défini par : $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$

1) Faire une figure.

2) Justifier que E se trouve dans le plan (ABC)

3) Les points E, C et D sont-ils alignés ? Justifier.

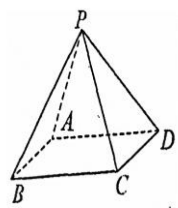
4) Justifier que les droites (FC) et (AD) sont coplanaires.

5) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

6) En déduire que G est le point d'intersection des droites (AD) et (FC).

Exercice 10 :

PABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme.



On considère les points M, N et S

Tels que :

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

2) Déduire que la droite (MN) est parallèle au plan (PAD)

3) Montrer que les plans (MNS) et (PAD) sont parallèles.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1gzs4mnkfDx3cbdvZ7xmNp6KICMIK4uU7/view?usp=sharing

DL5

1BACSEF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Dérivation)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+25}{x^2-25}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Montrer que $(\forall x\in D_f)\qquad f'(x)=\dfrac{-100x}{(x^2-25)^2}$

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) En déduire que $(\forall x\in\left]-5;5\right[)\qquad f(x)\le -1$.

6) Montrer que $y=-\dfrac{\sqrt{5}}{4}x-\dfrac{1}{4}$ est l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $\sqrt{5}$.

Exercice 2 (Dérivation)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter le résultat graphiquement.

3) Déterminer $D_{f'}$ l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_{f'}$.

4) En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ sans la calculer.

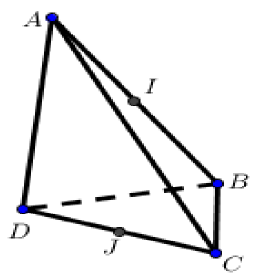
5) Déterminer g l'approximation affine de f au voisinage de 8.

6) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{9,001}$ (on pourra remarquer que $\sqrt{9,001}=f(8,001)$)

Exercice 3 (Vecteurs de l'espace)

$ABCD$ un tétraèdre, I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[DC]$ respectivement.

On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CB}$.



1) a) Montrer que $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{NB}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{JN}-4\overrightarrow{IN}$.

c) Montrer que les points I, J, M et N sont coplanaires.

2) Montrer que les droites (JB) et (DN) sont parallèles.

3) En déduire que la droite (DN) est parallèle au plan (AIJ).

Exercice 4 (Dérivation)

Calculer et simplifier $f'(x)$ dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+5x+3$; $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $f(x)=x^2\sqrt{x}$; $f(x)=\dfrac{sin(x)}{cos^2(x)}$;

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $f(x)=\dfrac{1}{3x+sin(x)}$; $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-3}$; $f(x)=\left(x^2+8x+4\right)^3$

Exercice 5 (Dérivation)

1) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ \ sin(x)\le x$ (On pourra considérer la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-sin(x)$)

2) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ \ 1-\dfrac{x^2}{2}\le cos(x)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1oCp593DxRHFwNOrxwJFLYHeWEUVqKJTt/view?usp=sharing

11

Etude de fonctions

Dans tout ce chapitre f est une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Branches infinies d'une courbe

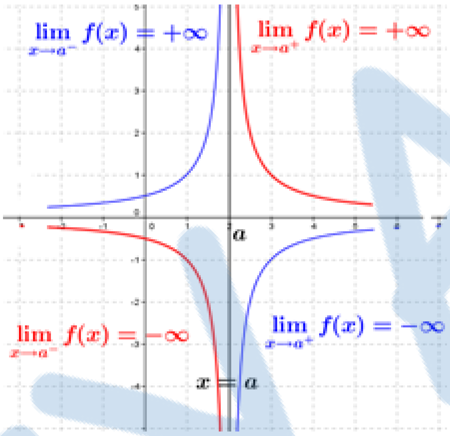
Définition 1 : Branches infinies

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de $(\mathcal{C}_f)$ tend vers l'infini. (C'est à dire $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$, ou $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$)
- Généralement, les branches infinies décrivent le comportement de f aux bornes de D_f, c'est pour cette raison qu'on s'intéresse au calcul des limites aux bornes de D_f.
- Les branches infinies sont constituées de droites asymptotes et de branches paraboliques.

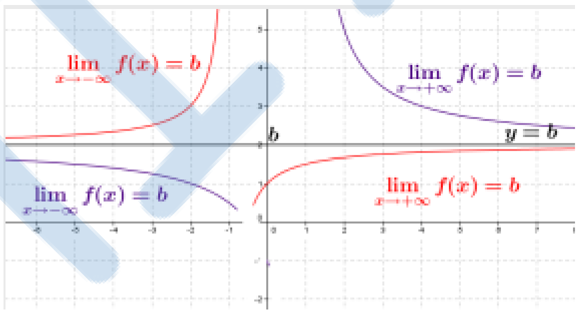
1-1 Asymptote horizontale - Asymptote verticale

Définitions 2 :

- Lorsque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=a$



- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. $-\infty$).



Exemple 1 :

1) Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $+\infty$.

2) Soit g une fonction définie par $g(x)=\dfrac{-2}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=-\infty$ alors $(\mathcal{C}_g)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

Application 1 :

1) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $g(x)=\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$

Calculer $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement.

3) Soit f une fonction numérique définie par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

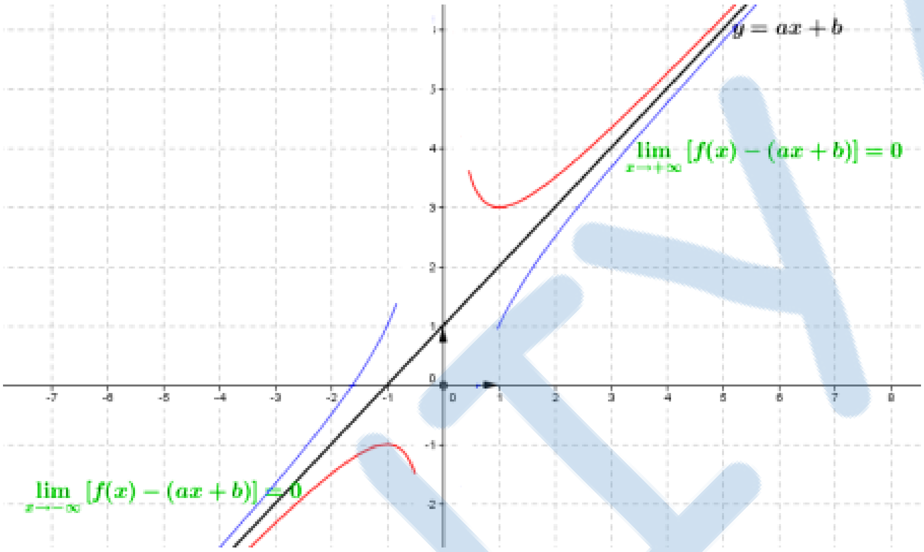
b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter les résultats graphiquement.

1-2 Asymptote oblique

Définition 3 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Exemple 2 :

Soit f une fonction définie par $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{x^2}$.

Montrons que la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-3))=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(2x-3+\dfrac{3}{x^2}\right)-(2x-3)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$

Donc la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

Propriété 1 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-ax=b$), alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).

Remarque 1 :

Cette propriété est utilisée lorsqu'on ne donne pas l'équation de l'asymptote oblique dans l'exercice.

Application 2

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$, en déterminant son équation.

2) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.

Remarque 2 :

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D): $y=ax+b$ se déduit par l'étude de signe de $f(x)-(ax+b)$:

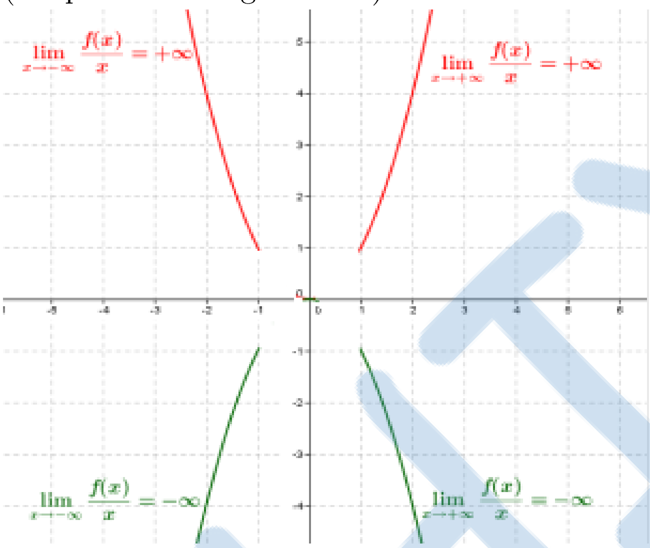
- Si $f(x)-(ax+b)>0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)<0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)=0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .

1-3 Branches paraboliques

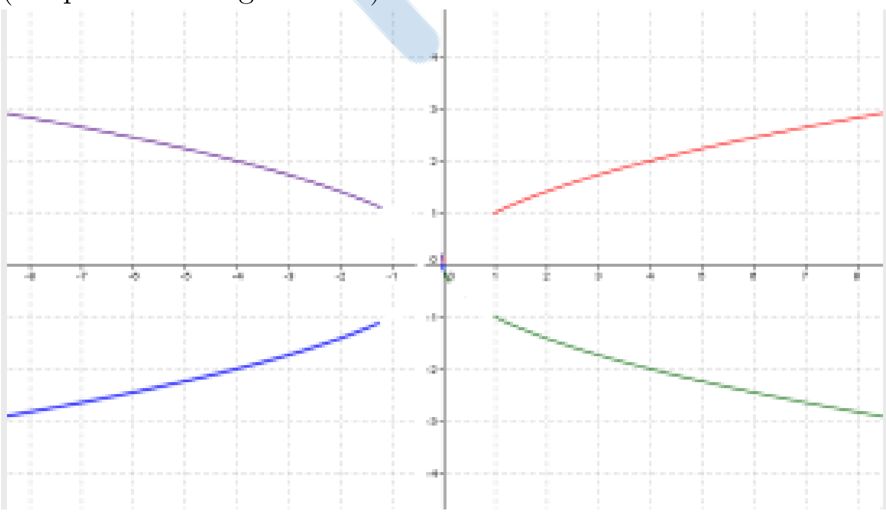
Définition 4 :

Soit f une fonction telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

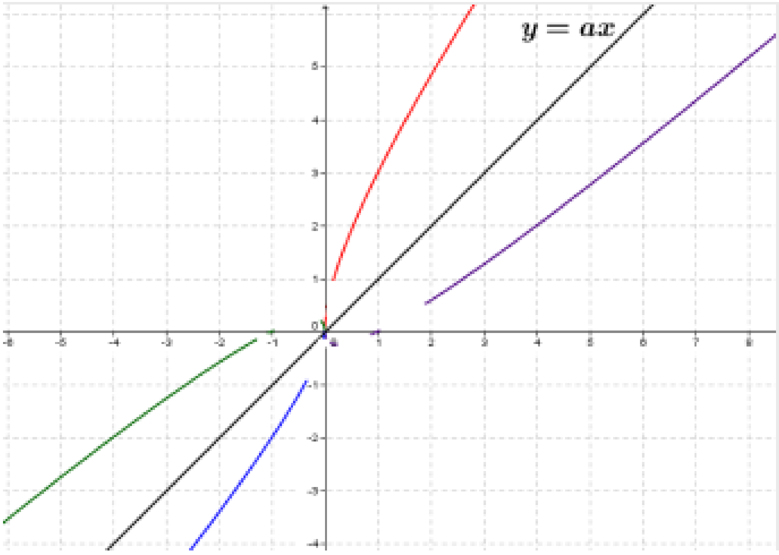
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou bien on dit que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou bien on dit que l'axe des abscisses est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ (ou bien on dit que la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Application 3

Etudier les branches paraboliques de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=2x^3-x$ 2) $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x+2}$

Remarques 3 :

- Quand on demande d'interpréter graphiquement les limites aux bornes du domaine de définition d'une fonction, ça veut dire donner les branches infinies (Asymptotes et branches paraboliques) éventuelles de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les équations des asymptotes et des directions asymptotiques et leurs voisinages.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ n'est pas suffisante pour affirmer qu'on a une branche parabolique mais il faut s'assurer d'abord qu'on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

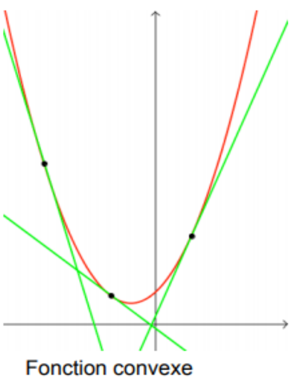
  Par exemple : La fonction $f(x)=\dfrac{sin(x)}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{sin(x)}{x^2}=0$, mais la fonction f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ car elle le coupe indéfiniment aux points d'abscisses $x_0=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$.

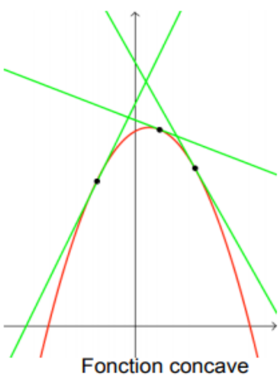
2) Concavité d'une courbe

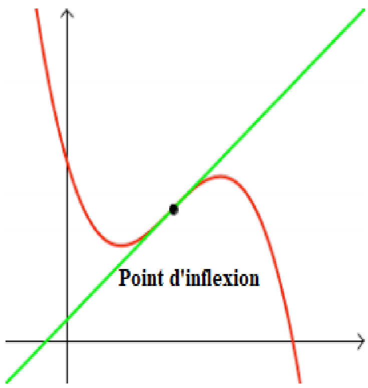
Définition 5 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- On appelle point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$, tout point où elle change de concavité.







Propriété 2 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

- $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \leq 0$
- $f''(a) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de a $\Rightarrow$ le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$

Exemple 3

Etudions la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

On a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
(C_f)	concave		convexe

$f''(1) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de 1 donc le point $A(1; f(1) = 3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

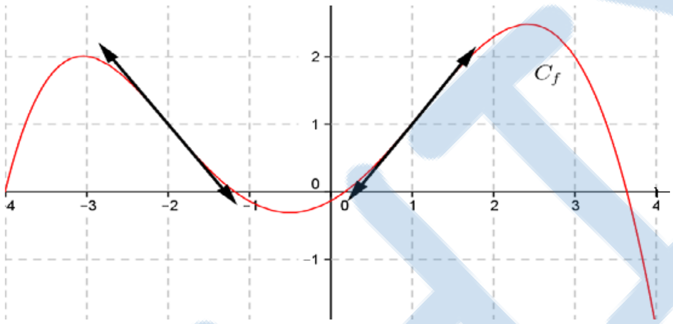
Application 4 :

Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les points d'inflexion s'ils existent dans les cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - 2x^3 + 3x + 5$

2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$

Application 5 : Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-4; 4]$

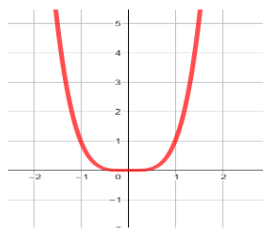


Remarques 4 :

- $f''(a) = 0$ ne suffit pas pour affirmer que le point d'abscisse a est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ mais il faut vérifier de plus si f'' change de signe au voisinage de a.

Par exemple : La fonction définie par $f(x) = x^4$,

On a $f''(0) = 0$ mais la courbe $(\mathcal{C}_f)$ n'admet pas de point d'inflexion en $a = 0$ comme l'indique le graphe ci-contre.



- Une fonction peut admettre plusieurs points d'inflexion.

Par exemple : La fonction f définie par $f(x) = x^4 - 2x^3$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$ donc on obtient le tableau de variations ci-dessous (facile à trouver) :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = (4x^3 - 6x^2)' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$ donc on obtient le tableau de signe de f'' suivant (facile à trouver):

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On constate donc que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion en $a = 0$ et en $a = 1$ et non pas un seul.

3) Eléments de symétrie d'une courbe

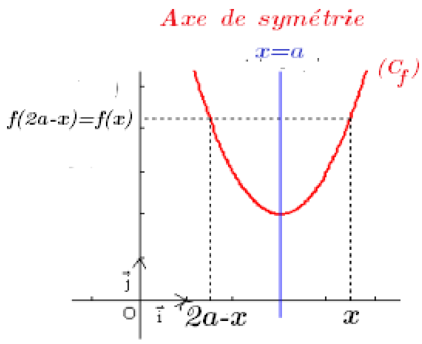
Propriété 3 :

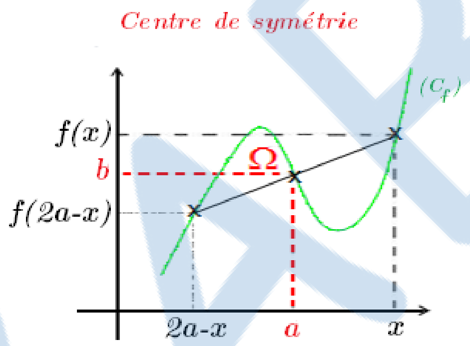
- Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

  $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$

- La droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

  $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$





Exemple 4 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Montrons que le point $\Omega(-1;1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$:

* On a $a = -1$, $b = 1$ et $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

* Soit $x \in D_f$, montrons que $-2 - x \in D_f$

On a $x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1 \Leftrightarrow -2 - x \neq -1$. Donc $-2 - x \in D_f$

* Soit $x \in D_f$, montrons que $f(2a-x) = 2b - f(x)$

On a $f(2a-x) = f(-2-x) = \dfrac{(-2-x)}{(-2-x)+1} = \dfrac{2+x}{x+1}$

Et $2b - f(x) = 2 \times 1 - f(x) = 2 - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2(x+1) - x}{x+1} = \dfrac{x+2}{x+1}$

D'où $f(2a-x) = 2b - f(x)$ C.Q.F.D

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

Montrons que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{3}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$:

* On a $a = \dfrac{1}{3}$ et $D_f = \mathbb{R}$

* Donc pour tout $x \in D_f$ on a $(2a - x) = \dfrac{2}{3} - x \in D_f$

* Pour tout $x \in D_f$ on a $f(2a-x) = f(\dfrac{2}{3} - x) = 3\left(\dfrac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\dfrac{2}{3} - x\right) + 5 = \ldots = 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$

D'où $f(2a-x) = f(x)$ C.Q.F.D

Application 6

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x+3}$

Montrer que le point $A(-3;-1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Application 7

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-4x+7}$

Montrer que la droite d'équation $x=2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Cas particuliers :

- Si f est une fonction impaire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme centre de symétrie le point de coordonnées $(0;0)$ (C'est à dire l'origine du repère).
- Une hyperbole, qui est la courbe d'une fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, (avec $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$) admet comme centre de symétrie le point $\Omega\left(\frac{-d}{c};\frac{a}{c}\right)$.
- Si f est une fonction paire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme axe de symétrie l'axe d'équation $x=0$ (C'est à dire l'axe des ordonnées).
- Une parabole, qui est la courbe d'une fonction polynômiale de degré 2 : $x \mapsto ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x=-\frac{b}{2a}$.

Remarques 6

- Un centre de symétrie n'est pas forcément un point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Par exemples : les hyperboles)
- Les éléments de symétries permettent de réduire l'ensemble sur lequel on étudie une fonction et donc de réduire le coût du travail.

4) Construction d'une courbe

Démarche de la construction d'une courbe

- **Placer le repère orthogonal ou orthonormé :**
  - Placer les deux axes du repère, en respectant l'unité de mesure,
  - Placer l'élément de symétrie (axiale ou centrale), s'il y a une symétrie,
  - Noter le domaine de définition.
- **Comportement local :**
  - Placer les points remarquables (extrémums, intersection avec les axes (ox) et (oy)),
  - Placer les points d'inflexion, s'il existe,
  - Placer les tangentes et les demi-tangentes.
- **Comportement asymptotique :**
  - Placer les asymptotes de la courbe, en respectant les positions relatives,
  - Esquisser les branches paraboliques.
- **Finaliser la construction de la courbe :**
  - Relier, à main levée, tous les éléments présentés ci-dessus, en respectant le tableau de variations de la fonction.

Exemples 6

https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=pfbid02G3ULvQg8FWJgTTmAoWFHviabfkNwUL97LdnSgw8SroTZKWRyy7ntSNGT8SVyNoaul&id=100095283541033&mibextid=Nif5oz

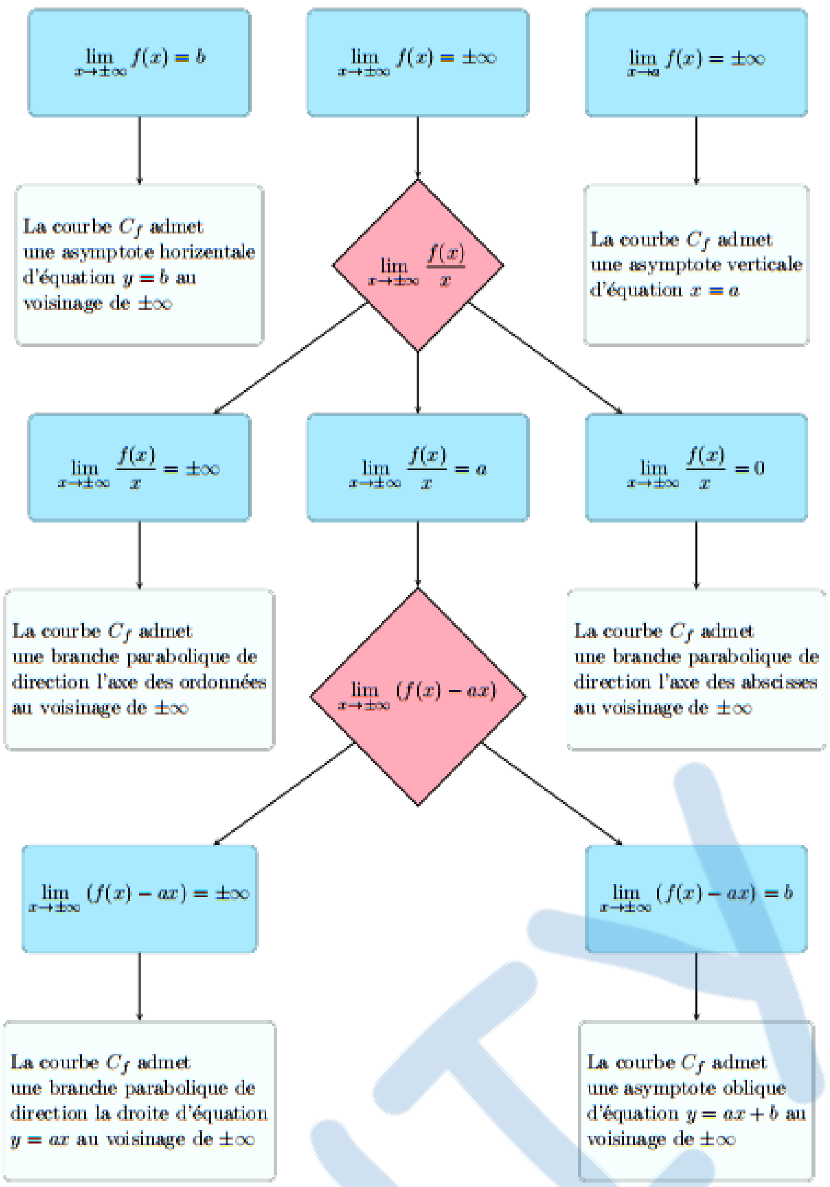
Application 8 : Exercice 6 de la série 11

Remarque 7 : compléments de cours

1) Résolution graphique des équations et des inéquations : **voir résumé 2 (page 17)**
2) Intersection de la courbe avec les axes du repère : **voir résumé 2 (page 17)**
3) Tangentes et demi-tangentes (interprétation graphique de la dérivabilité en un point) : **voir résumé 9 (page 77)**

Résumé 11 : Etude de fonctions

Branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

Concavité de $(\mathcal{C}_f)$

La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ se déduit par l'étude de signe de $f''(x)$:

- **$(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur I $\Leftrightarrow$** $(\forall x\in I)\ \ f''(x)\geq 0$
- **$(\mathcal{C}_f)$ est concave sur I $\Leftrightarrow$** $(\forall x\in I)\ \ f''(x)\leq 0$
- **Si $f''(a)=0$ et f'' change de signe au voisinage de a alors le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.**

Positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et $y=ax+b$

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) : $y=ax+b$ se déduit par l'étude de signe de $f(x)-(ax+b)$:

- **Si $(\forall x\in I)\ \ f(x)-(ax+b)>0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.**
- **Si $(\forall x\in I)\ \ f(x)-(ax+b)<0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.**
- **Si $f(x)-(ax+b)=0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .**

Eléments de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

$\Omega(a;b)$ **est un centre de symétrie de** $(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow\forall x\in D_f$: $2a-x\in D_f$ **et** $f(2a-x)=2b-f(x)$	
$x=a$ **est un axe de symétrie de** $(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow\forall x\in D_f$: $2a-x\in D_f$ **et** $f(2a-x)=f(x)$	

Méthode de construction de $(\mathcal{C}_f)$:

- **Construire les asymptotes et les branches paraboliques ;**
- **Construire les tangentes et les demi-tangentes ;**
- **Construire les points remarquables de $(\mathcal{C}_f)$ s'ils existent : (Points d'inflexion, points d'intersection avec les axes du repère, les extremums et le centre de symétrie)**
- **Construire $(\mathcal{C}_f)$ à partir du tableau de variations de f**

N.B : N'oublier pas de respecter l'unité de mesure du repère, les positions relatives, la concavité et tenant compte le centre ou l'axe de symétrie (s'il existe).

Prof : Aissa HIYAB	**Série 11**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSEF	**Etude de fonctions**	Matière : Mathématique

Exercice 1 : Droites asymptotes

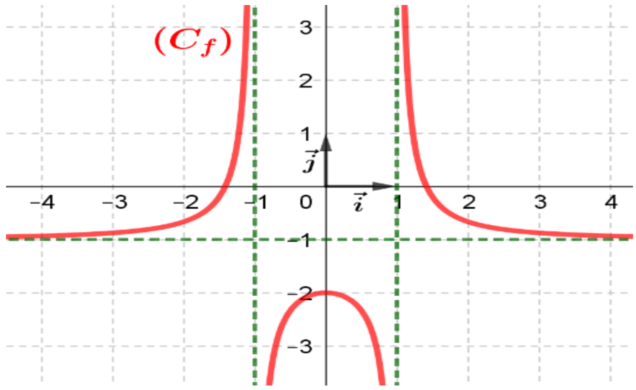
Déterminer D_f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter les résultats graphiquement dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$; $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$; $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+x-2}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+3}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous



1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

3) Interpréter graphiquement ces résultats.

Exercice 3 :

Montrer que (D) est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $y=x$

2) $f(x)=2x+5-\dfrac{3}{x+1}$; $y=2x+5$

Exercice 4 :

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants

$f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$; $f(x)=\dfrac{3x^2}{2-x}$

$f(x)=\dfrac{8x^2-4x+1}{2x+1}$; $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

$f(x)=1+\dfrac{3x^2+5x+1}{x}$; $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Exercice 5 : Branches paraboliques

Déterminer les branches paraboliques de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

$f(x)=-3x^2+x$; $f(x)=x^2+x-7$

$f(x)=2x+1+\dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}$; $f(x)=x+\sqrt{x+1}$

$f(x)=5x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$; $f(x)=-3x-2+\sqrt{3-x}$

$f(x)=3+\sqrt{2x+5}$; $f(x)=x\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 6 : Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2}{2x-1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) En déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x-2}$

b) Montrer par deux méthodes que (D) : $y=x+\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$

4) Montrer que $A(\dfrac{1}{2};1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

5) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f'(x)=\dfrac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

6) Déterminer l'équation de (T) la droite tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

7) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

8) Soit $m\in\mathbb{R}$ déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

Exercice 7 : Etude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{4(x-2)}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) Déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{x-2}$

b) En déduire que (D) : $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$

4) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

5) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$

6) Montrer que $A(2;\dfrac{5}{4})$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

7) Déterminer les points de contact entre $(\mathcal{C}_f)$ et les axes du repère.

8) Construire $(\mathcal{C}_f)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1_caQ2yKs-B9aFq5yUn7mo4VbnjFtXypt/view?usp=sharing

9) Soit (Δ) la droite d'équation $y=\frac{1}{4}x$

a-Vérifier que (Δ) coupe $(\mathcal{C}_f)$ dans le point d'abscisse $\frac{2}{3}$

b-Résoudre graphiquement l'équation $x\in D_f$; $f(x)\leq\frac{1}{4}x$

Exercice 8 : Etude d'une fonction polynomiale

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

3) Dresser le tableau de variations de f

4) Dresser le tableau de concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et déduire qu'elle admet un unique point d'inflexion Ω qu'on déterminer.

5) Vérifier que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

6) Donner l'équation de (T) la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en Ω

7) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T)

Exercice 9 : Etude d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) M. q. la droite $x=2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

3) a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b. Montrer que :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-2\right)=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+2\right)=0$

c. En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes obliques (D) au voisinage de $-\infty$ et (D') au voisinage de $+\infty$

4) a. Vérifier que $(\forall x\in D_f)\ f(x)=\sqrt{-(x-1)}\times\sqrt{-(x-3)}$

b. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en 3 et interpréter graphiquement ces résultats.

5) Montrer que :

$(\forall x\in D_f\setminus\{1;\ 3\}):\ f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

c. Dresser le tableau de variations de f

6) Tracer (D), (D') et $(\mathcal{C}_f)$

Exercice 10 : Etude d'une fonction trigonométrique

f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} & ;\ x\neq 2k\pi \\ f(2k\pi)=0 & ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

1) Montrer que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{(1+2k)\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

2) Montrer que f est impaire.

3) Montrer que f est périodique de période 2π

4) Déduire que le domaine d'étude de f est $D_E=[0;\pi[$

5) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

6) Calculer $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

7) a) Montrer que $(\forall x\in]0;\pi[)\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos(x)}$

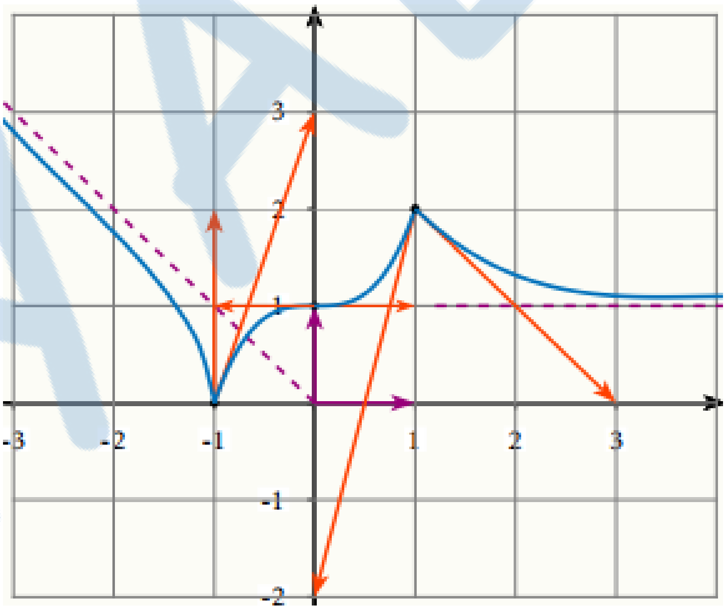
b) Dresser le tableau de variations de f sur D_E

8) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion I qu'on déterminer.

9) Construire $(\mathcal{C}_f)$ sur $[-\pi;3\pi]$

Exercice 11 : Lecture d'une courbe

Dans la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de ∞

3) a) f est-elle dérivable en 1 ? justifier

b) f est-elle dérivable à gauche en -1 ? justifier

c) Déterminer $\lim\limits_{h\to(-1)^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ et $f'_d(-1)$

d) Déterminer $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$

e) Déterminer $f'(0)$

4) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle un point d'inflexion ?

5) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

6) Dresser le tableau de variations de f

7) Dresser le tableau de signe de f'

8) Discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1_caQ2yKs-B9aFq5yUn7mo4VbnjFtXypt/view?usp=sharing

12

Analytique de l'espace

1) Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

1-1 Repère cartésien de l'espace

Définition 1

On considère trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$. *O un point de l'espace.*

- *Le triplet* $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *est appelé une base de l'espace.*
- *Le quadruplet* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *est appelé un repère cartésien de l'espace.*

Remarques 1

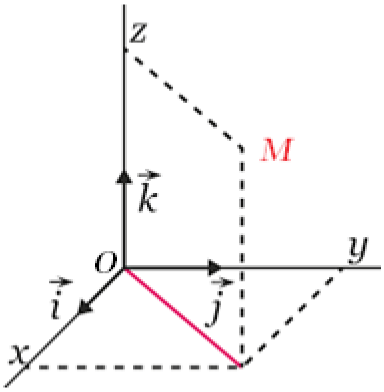
On considère quatre points O, I, J et K non coplanaires. Alors :

- *Le triplet* $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est une base de l'espace.*
- *Le quadruplet* $(O,\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est un repère cartésien de l'espace.*
- *Si les droites* (OI), (OJ) *et* (OK) *sont deux à deux orthogonales alors on dit que le repère* $(O,\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est orthogonal (par exemple : dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH le quadruplet* $(A,\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ *est un repère orthogonal).*
- *Si* $OI = OJ = OK = 1$ *alors on dit que le quadruplet* $(O,\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est un repère normé. (Par exemple dans le cube ABCDEFGH le quadruplet* $(A,\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ *est un repère orthogonal et normé, on dit donc qu'il est orthonormé).*

1-2 Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace

Définition 2

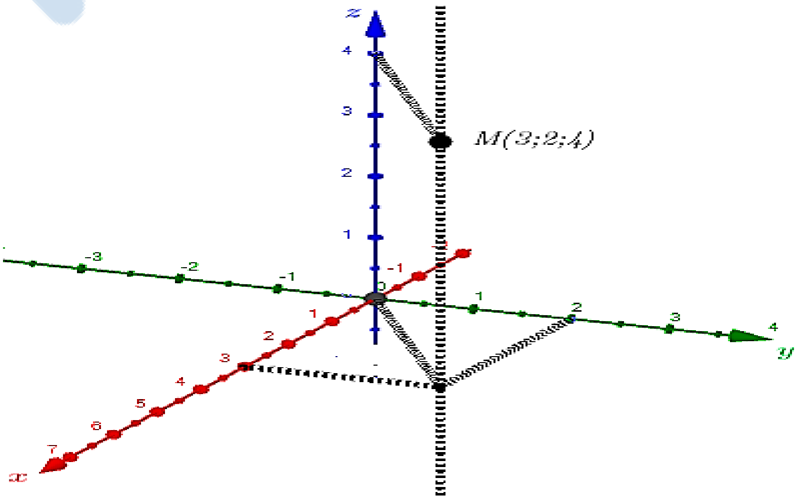
Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *un repère de l'espace.*



- *Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet* $(x;y;z)$ *de réels tel que :* $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- *Le triplet* $(x;y;z)$ *est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. *On note* $M(x;y;z)$ *ou* $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- *x s'appelle l'abscisse de M dans ce repère et* $(O;\vec{i})$ *est l'axe des abscisses.*
- *y s'appelle l'ordonnée de M dans ce repère et* $(O;\vec{j})$ *est l'axe des ordonnées.*
- *z s'appelle la côte de M dans ce repère et* $(O;\vec{k})$ *est l'axe des côtes.*

Exemple 1 :

Plaçons le point $M(3;2;4)$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$:



Remarques 2

- *Le plan* $P(O;\vec{i};\vec{j})$ *est noté* (Oxy) *on écrit* $P(O;\vec{i};\vec{j})=(Oxy)$ *de même :* $P(O;\vec{i};\vec{k})=(Oxz)$ *et* $P(O;\vec{j};\vec{k})=(Oyz)$
- $M(x;y;0)\in(Oxy)$; $M(x;0;z)\in(Oxz)$; $M(0;y;z)\in(Oyz)$

Exemple 2 : *Représenter les points* $A(1;2;0)$, $B(1;2;3)$ *et* $C(-1;2;0)$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1-3 Coordonnées d'un vecteur, coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, $\alpha\vec{u}$ et de $\overrightarrow{AB}$

Définition 3 : *Soit* $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *une base de l'espace.*

- *Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *de l'espace, il existe un unique triplet* $(x;y;z)$ *de réels tel que :* $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
- *Le triplet* $(x;y;z)$ *est appelé triplet de composantes ou de coordonnées du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *et on note* $\vec{u}(x;y;z)$ *ou* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Propriété 1

- *Soient* $\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z')$ *deux vecteurs de l'espace muni de la base* $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *et* $\alpha\in\mathbb{R}$. *On a :*
  - $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$ et $\alpha\vec{u}(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$
  - $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x=x'$ *et* $y=y'$ *et* $z=z'$
- *Soient* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et* $B(x_B;y_B;z_B)$ *deux points de l'espace muni du repère* $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
  - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
  - *Le triplet des coordonnées du point I milieu du segment* $[AB]$ *est :* $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Exemple 3 :

L'espace est rapporté à un repère, on considère les points $A(2;-1;-3)$, $B(7;-6;7)$ *et* $C(-1;3;-2)$

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les coordonnées du point M *sachant que* $\overrightarrow{CM}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

2) Déterminer les coordonnées du point B' *sachant que* A *est le milieu de segment* $[BB']$.

Exemple 4 :

Soit $ABCDEFGH$ *un cube. Déterminer dans la base* $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ *les coordonnées des vecteurs :*

$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{EG}$, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DG}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ et $3\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{BG}$.

2) Condition de colinéarité de deux vecteurs dans l'espace

Propriété 2 *Soit* $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *une base de l'espace,* $\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z')$ *deux vecteurs de l'espace.*

Les vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z')$ *sont colinéaires si et seulement si :*

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=0\ ,\quad \begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}=0 \quad et \quad \begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=0$$

Ces déterminants sont appelés **les déterminants extraits** *des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Remarques 3

1) Si tous les cordonnées x', y' *et* z' *sont non nuls, alors :*

Les vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z')$ *sont colinéaires si et seulement si :* $\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{z}{z'}$

2) Les points A, B *et* C *sont alignés dans l'espace* $\Leftrightarrow$ *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

Exemple 5

1) *Etudier la colinéarité des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *dans les cas suivants :*

a) $\vec{u}(-1;2;1)$ et $\vec{v}(1;-3;2)$

b) $\vec{u}(2;-1;-4)$ et $\vec{v}(-1;\frac{1}{2};2)$

2) *Etudier l'alignements des points* A, B *et* C *dans les cas suivants :*

a) $A(0;0;3)$; $B(-1;0;0)$; $C(5;-3;4)$

b) $A(3;0;-2)$; $B(1;5;-3)$; $C(-3;15;-5)$

3) *Montrer que les points* $D(7;2;2)$, $E(5;-2;2)$ *et* $F(6;3;4)$ *définis un plan.*

3) Condition de coplanarité de trois vecteurs de l'espace

Définition 4

Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *une base de l'espace,* $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ *et* $\vec{w}(x'';y'';z'')$ *trois vecteurs de l'espace.*

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *dans cet ordre est le réel noté* $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ *et défini par :*

$$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Exemple 6

Calculer $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

Remarque 4 : *Pour tous vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *de l'espace on a* $det(\vec{v};\vec{u};\vec{w}) = -det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

Propriété 3 :

Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *une base de l'espace,* $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ *et* $\vec{w}(x'';y'';z'')$ *trois vecteurs de l'espace :*

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires si et seulement si* $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

Remarque 5 : *Les points* A, B, C *et* D *sont coplanaires* $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = 0$

Exemple 7

1) *Etudier la coplanarité des vecteurs* $\vec{u}(-1;2;0)$, $\vec{v}(3;-2;1)$ *et* $\vec{w}(\frac{5}{2};0;4)$

2) *Etudier la coplanarité des points* $A(1;2;3)$; $B(2;-1;1)$; $C(1;1;-1)$; $D(0;4;1)$

4) Etude analytique d'une droite dans l'espace

4-1 Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Propriété 4 et Définition 5 : *L'espace est rapporté à un repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (D) *la droite passant par un point* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{u}(a;b;c)$

On a $M(x;y;z)\in(D)$ *si et seulement si* $(\exists t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x = x_A + a\times t \\ y = y_A + b\times t \\ z = z_A + c\times t \end{cases}$

Ce système est appelé : **une représentation paramétrique** *de la droite* (D).

Remarques 6

- *Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.*
- *Le réel* t *est appelé le paramètre de la droite* (D) *et on peut le noter aussi par :* k, α, β..... *etc*
- *Pour vérifier que* $A\in(D)$, *il suffit de remplacer* x, y *et* z *par les coordonnées de* A *et s'assurer par la suite qu'on obtient* **la même valeur** *du paramètre* t *dans les trois équations de la représentation paramétrique de* (D).

Exemple 8

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $A(-1;2;3)$ et dirigée par $\vec{u}(1;3;-1)$.

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) tel que $A(-1;2;3)$ et $B(2;-3;1)$

b) Le point $C(5;-8;1)$ appartient-il à la droite (AB) ?

3) On considère la droite (Δ) définie par sa représentation paramétrique : $(\Delta):\begin{cases} x=-2+3t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$

Donner un vecteur directeur de (Δ) et deux points appartenant à (Δ).

4-2 Deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Propriété 5 et Définition 6

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (D) la droite passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a;b;c)$.

- Si $a\neq 0$, $b\neq 0$ et $c\neq 0$, alors $M(x;y;z)\in(D)$ si et seulement si $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$
- Si $c=0$ alors $M(x;y;z)\in(D)$ si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b} \\ z-z_A=0 \end{cases}$
- Si $a=0$ et $b=0$ alors $M(x;y;z)\in(D)$ si et seulement si $\begin{cases} x-x_A=0 \\ y-y_A=0 \end{cases}$

Ce système (en rouge) est appelé « **deux équations cartésiennes** de la droite (D) ».

Exemple 9

1) Donner deux équations cartésiennes de la droite (D) dans les cas suivants :

a) (D) passe par les points $A(1;3;2)$ et $B(2;-1;1)$; b) (D) à une représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3 \\ z=2-2t \end{cases}$

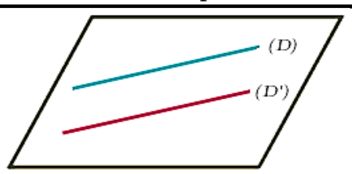
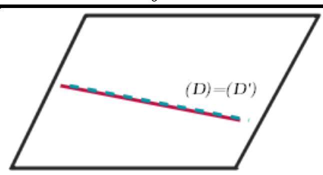
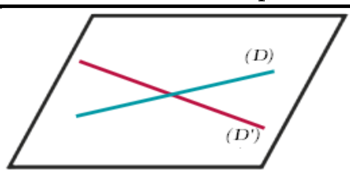
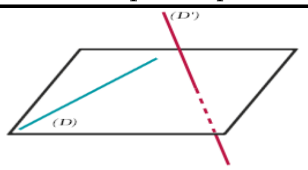
2) On considère la droite (Δ) définie par les deux équations cartésiennes : $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{3-z}{4}$

a) Donner un vecteur directeur de (Δ) et un point appartenant à (Δ).

b) Le point $C(2;-3;2)$ appartient-il à la droite (Δ) ?

4-3 Positions relatives de deux droites dans l'espace

Propriété 6 : Soit $D(A;\vec{u})$ et $D'(B;\vec{v})$ deux droites dans l'espace

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires		$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	
$A\notin(D')$	$A\in(D')$	$\det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})=0$	$\det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})\neq 0$
Strictement parallèles	Confondues	Sécantes en un point	Ne sont pas coplanaires
			
Parallèles		Sécantes	Non parallèles et non sécantes
Coplanaires			Non coplanaires

Remarque 7

Pour déterminer l'intersection de deux droites, on résout un système dans lequel on prend soit des représentations paramétriques, soit des équations cartésiennes qui définissent chaque droite.

Exemple 10 : *Etudier la position relative des deux droites* (D) *et* (D') *dans les cas suivants :*

1) $(D):\begin{cases} x=-1-t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$; $(D'):\begin{cases} x=-2+k \\ y=2-2k \\ z=4+k \end{cases}$; 2) $(D):\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=2+3\alpha \end{cases}$; $(D'):\begin{cases} x=2\beta \\ y=1-\beta \\ z=3+\beta \end{cases}$

3) $(D):\begin{cases} x=t \\ y=5+2t \\ z=2+3t \end{cases}$; $(D'):\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{1-y}{-4}=\dfrac{z+2}{6}$

5) Etude analytique d'un plan dans l'espace

5-1 Représentation paramétrique - Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

Propriété 7 et Définition 7 : *L'espace est rapporté à un repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (P) *la droite passant par un point* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$

On a $M(x;y;z)\in(D)$ *si et seulement si* $(\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)$ $\begin{cases} x=x_A+a\times\alpha+a'\times\beta \\ y=y_A+b\times\alpha+b'\times\beta \\ z=z_A+c\times\alpha+c'\times\beta \end{cases}$

Ce système est appelé : **une représentation paramétrique** *du plan* (P)

Propriété 8 et Définition 8 : *L'espace est rapporté à un repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (P) *la droite passant par un point* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$

Le plan (P) *est un ensemble des points* $M(x;y;z)\in(D)$ *de l'espace vérifiant une équation de type :*

$$(P):\ \begin{vmatrix} x-x_A & a & a' \\ y-y_A & b & b' \\ z-z_A & c & c' \end{vmatrix}=0$$

Cette équation est de la forme $(P):\ \alpha x+\beta y+\delta z+d=0$ *où* $\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}$ *et* $(\alpha;\beta;\delta)\neq(0;0;0)$

L'équation $\alpha x+\beta y+\delta z+d=0$ *est appelée* **une équation cartésienne** *du plan* (P)

Exemple 11

1) *Soit* (P) *le plan passant par* $E(1;-1;1)$ *et dirigé par les deux vecteurs* $\vec{u}(2;4;2)$ *et* $\vec{v}(2;6;0)$.

   a) *Déterminer une représentation paramétrique du plan* (P)

   b) *Déterminer une équation cartésienne du plan* (P)

   c) *Montrer par deux méthodes que le point* $D(-1;-4;-2)$ *appartient au plan* (P)

2) *On considère les points* $A(1;1;-4)$, $B(0;1;-3)$ *et* $C(0;-4;2)$.

   a) *Montrer que les points* A, B *et* C *déterminés un unique plan* (ABC)

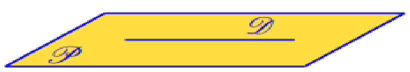
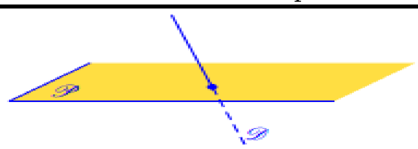
   b) *Déterminer une équation cartésienne du plan* (ABC)

   c) *Donner une représentation paramétrique du plan* (ABC)

5-2 Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

Propriété 9 : *Soit* (D) *la droite passant par le point* A *et dirigée par le vecteur* $\vec{u}$.

(P) *est le plan passant par le point* B *et dirigé par les vecteurs* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

<table>
<tr><td colspan="2">$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$</td><td rowspan="2">$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$A\in(P)$</td><td>$A\notin(P)$</td></tr>
<tr><td>$(D)\subset(P)$</td><td>Strictement parallèles</td><td>Sécants en un point</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Parallèles</td><td>Non parallèles</td></tr>
</table>

Remarque 8

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan, on résout un système dans lequel on prend **une représentation paramétrique de la droite et une équation cartésienne du plan.**

Exemple 12

1) *Etudier la position relative de la droite* $(D_1):\begin{cases} x=2+3t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$ *et du plan* $(P_1):\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=-1-3\alpha+2\beta \\ z=1+\alpha \end{cases}$

2) *Etudier l'intersection de la droite* $(D_2):\begin{cases} x=2-4t \\ y=-1+2t \\ z=3t \end{cases}$ *et du plan* $(P_2):3x+2y+z+1=0$

5-3 Positions relatives de deux plans dans l'espace

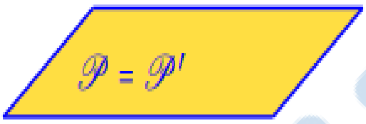
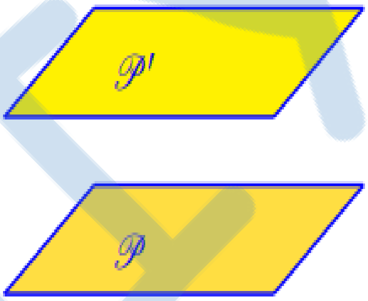
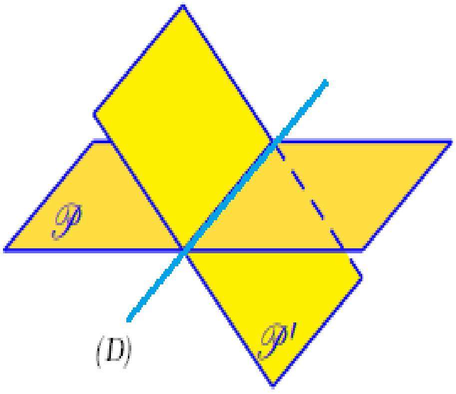
Propriété 10

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soient (P) *et* (P') *les plans définis par les équations cartésiennes :*

$(P):\ ax+by+cz+d=0$ *et* $(P'):\ a'x+b'y+c'z+d'=0$

- *Les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$ *sont colinéaires si et seulement si les plans* (P) *et* (P') *sont parallèles.*
- *Les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$ *ne sont pas colinéaires si et seulement si les plans* (P) *et* (P') *sont sécants (en une droite).*

Plans parallèles		Plans non parallèles
confondus	strictement parallèles	sécants en une droite
		

Remarque 9

Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans, on résout un système dans lequel on prend **des équations cartésiennes** *qui définissent chaque plan.*

Exemple 13

1) *On considère les plans* $(P):\ 2x+y-z+2=0$ *et* $(P'):\ 3x+y-4z-1=0$

   a) *Montrer que* (P) *et* (P') *sont sécants en une droite* (D)

   b) *Déterminer une représentation paramétrique de* (D)

   c) *Vérifier que* $H(6;-13;1)\in(D)$

2) *Etudier la position relative des plans* (Q) *et* (Q') *dans les cas suivants :*

   a) $(Q):4x-6y+2z+5=0$ *et* $(Q'):\ 2x-3y+z+1=0$

   b) $(Q):\begin{cases} x=1+2\alpha-\beta \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha+\beta \end{cases}$ *et* $(Q'):\ -2x+2y+z+1=0$

Résumé 12 : Analytique de l'espace

1) Coordonnées d'un point et d'un vecteur

- $M(x;y;z) \in (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- I le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

- $\vec{u}(x;y;z) \in (\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- $\vec{u}(x;y;z) \Rightarrow \alpha\vec{u}(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$
- $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z') \Rightarrow \vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$
- $\vec{u}(x;y;z) = \vec{v}(x';y';z') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$ et $z = z'$

2) Colinéarité

$\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

3) Déterminant

$\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs

$$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

4) Coplanarité et alignement

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$
- A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = 0$
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a;b;c)$

5) Représentation paramétrique de la droite (D)

$$(D): \begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

6) Deux équations cartésiennes de la droite (D)

- Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $(D): \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$
- Si $c = 0$ alors $(D): \begin{cases} \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$
- Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $(D): \begin{cases} x - x_A = 0 \\ y - y_A = 0 \end{cases}$

Soit (P) la droite passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$

7) Représentation paramétrique du plan (P)

$$(P): \begin{cases} x = x_A + a \times \alpha + a' \times \beta \\ y = y_A + b \times \alpha + b' \times \beta \\ z = z_A + c \times \alpha + c' \times \beta \end{cases} \quad / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

8) Equation cartésienne du plan (P)

$$(P): \begin{vmatrix} x - x_A & a & a' \\ y - y_A & b & b' \\ z - z_A & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

(Cette équation est de la forme (P): $\alpha x + \beta y + \delta z + d = 0$)

9) Positions relatives de deux droites dans l'espace : Soient $D(A;\vec{u})$ et $D'(B;\vec{v})$ deux droites dans l'espace

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires		$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	
$A \notin (D')$	$A \in (D')$	$det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) = 0$	$det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) \neq 0$
Strictement parallèles	Confondues	Sécantes en un point	Ne sont pas coplanaires

10) Positions relatives d'une droite et d'un plan : Soient $D(A;\vec{u})$ une droite et $P(B;\vec{v};\vec{w})$ un plan

$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$		$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$
$A \in (P)$	$A \notin (P)$	
$(D) \subset (P)$	Strictement parallèles	Sécants en un point

11) Positions relatives de deux plans

Soient (P) et (P') les plans définis par : (P): $ax + by + cz + d = 0$ et (P'): $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

- $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (P)$ et (P') sont parallèles.
- $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ ne sont pas colinéaires $\Leftrightarrow (P)$ et (P') sont sécants (en une droite).

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEF	**Série 12** **Analytique de l'espace**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 : Coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1) Placer les points $A(3;-4;0)$, $B(-5;2;4)$ et $C(1;4;-1)$

2) Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

4) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 2 : Colinéarité-Alignement

1) Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants : a) $\vec{u}(6;1;-3)$ et $\vec{v}(-2;\frac{1}{3};-1)$

b) $\vec{u}(2;-1;\frac{1}{2})$ et $\vec{v}(-1;\frac{1}{2};2)$

2) Etudier l'alignements des points A, B et C dans les cas suivants : a) $A(1;2;3)$; $B(2;0;-1)$; $C(\frac{3}{2};1;1)$

b) $A(-1;1;1)$; $B(2;0;-2)$; $C(1;2;-1)$

c) $A(1;1;0)$; $B(2;0;-1)$; $C(3;-1;m)$ avec $m\in\mathbb{R}$

Exercice 3 : Coplanarité

1) Etudier la coplanarité des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans les cas suivants : a) $\vec{u}(2;1;0)$, $\vec{v}(1;0;-1)$ et $\vec{w}(0;1;2)$

b) $\vec{u}(1;0;1)$, $\vec{v}(-1;4;1)$ et $\vec{w}(2;1;-1)$

2) Etudier la coplanarité des points A, B, C et D :

a) $A(1;1;1)$; $B(1;-3;4)$; $C(2;5;1)$; $D(-1;2;3)$

b) $A(2;-4;-1)$; $B(-3;-1;-1)$; $C(0;-2;-1)$; $D(1;-2;2)$

c) $A(m;1;-1)$; $B(-3;-1;0)$; $C(3;-3;1)$; $D(0;1;2)$

Exercice 4: Rep. param. d'une droite / Deux éqts. d'une droite

Donner une représentation paramétrique et deux équations cartésiennes de la droite (D) dans les cas suivants :

1) (D) passant par le point $A(2;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1;2;-1)$

2) (D) passant par les points $A(1;-1;0)$ et $B(1;2;3)$

3) (D) passant par le point $A(2;3;1)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\begin{cases}x=-2+3t\\y=2t\\z=1\end{cases}$

Exercice 5 : Positions relatives de deux droites

Etudier la position relative des deux droites (D) et (D') :

1) $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3t\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}x=-1+2k\\y=-k\\z=3+k\end{cases}$

2) $(D):\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}=z-1$; (D') : $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$

3) $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=3+2t\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}3x+2y+5z=0\\x-y+3=0\end{cases}$

4) $(D):\begin{cases}x-y=0\\3x-z-2=0\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}x-z+1=0\\y+1=0\end{cases}$

5) $(D):\begin{cases}\frac{x+1}{3}=\frac{z+3}{2}\\y=-1\end{cases}$; (D') : $\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z+2}{3}$

Exercice 6 : Equation cartésienne d'un plan/Rep. param. d'un plan

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A et dirigé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

a) $A(-1;3;4)$, $\vec{u}(-1;0;1)$ et $\vec{v}(3;-4;2)$

b) $A(0;2;1)$, $\vec{u}=\vec{i}$ et $\vec{v}=\vec{k}$

c) $A(0;-1;0)$, $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}-\vec{k}$

2) Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan (ABC) dans les cas suivants :

a) $A(0;2;1)$; $B(1;-1;1)$; $C(-1;0;3)$

b) $A(0;0;1)$; $B(-1;\frac{1}{2};0)$; $C(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2})$

3) Déterminer une représentation paramétrique du plan (P) contenant les droites $(D):\begin{cases}x=1+3t\\y=2+2t\\z=-3-2t\end{cases}$ et $(D'):\begin{cases}x=-2+3\beta\\y=-1+2\beta\\z=3-2\beta\end{cases}$

4) Déterminer une représentation paramétrique du plan passant par le point $A(2;2;1)$ et contenant la droite $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-3t\\z=-3+2t\end{cases}$

Exercice 7 : Position relative d'une droite et un plan

1) Etudier la position relative de la droite (D) et du plan (P) :

a) $(D):\begin{cases}x=1+3t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$; $(P):\begin{cases}x=3+\alpha+2\beta\\y=-1+2\alpha+\beta\\z=2+3\alpha+\beta\end{cases}$

b) $(D):\begin{cases}x-y+1=0\\2x-z+1=0\end{cases}$; $(P):3x+y-z+5=0$

c) $(D):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{4}$; $(P):\begin{cases}x=3+\alpha+\beta\\y=-1-\alpha+2\beta\\z=1+\alpha+3\beta\end{cases}$

2) a) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(-1;0;3)$ et contenant la droite $(D):\frac{x+1}{3}=y-2=\frac{z-1}{3}$

b) Etudier l'intersection du plan (P) et la droite $(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=3\\z=4+t\end{cases}$

Exercice 8 : Positions relatives de deux plans

Etudier la position relative des plans (P) et (Q) :

1) (P): $2x-y+z+1=0$; (Q) : $x+2y+z=0$

2) (P): $4x-2y+2z-1=0$; (Q): $-2x+y-z+1=0$

3) (P): $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+z-2\sqrt{2}=0$; (Q): $-2x+\sqrt{6}y-\sqrt{2}z+4=0$

4) (P) : $x+y-z+1=0$; (Q) : $3x-y-2z-2=0$

5) (P) : $-2x+2y+z+1=0$; $(Q):\begin{cases}x=1+2\alpha-\beta\\y=-2-\alpha\\z=\alpha+\beta\end{cases}$

6) $(P):\begin{cases}x=5+5\beta'\\y=3+\alpha'+\beta'\\z=2+\alpha'+3\beta'\end{cases}$; $(Q):\begin{cases}x=1+2\alpha+\beta\\y=2+\alpha+\beta\\z=-1-\beta\end{cases}$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1tgT2Fcf6A6VmzCiotAA3MoQ0K_0soA-b/view?usp=sharing

DL6

Exercice 1 (Etude de fonctions)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}+2$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que $D_f=\mathbb{R}$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f

b) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

2) Montrer que le point $I(0;2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=-\dfrac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f''(x)=\dfrac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

b) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant ses points d'inflexions s'ils existent.

5) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point I.

6) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

7) Soit $m\in\mathbb{R}$, déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

8) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions g et h tel que $g(x)=f(|x|)$ et $h(x)=-f(x)$

Exercice 2 (Analytique de l'espace)

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(6;0;-3)$, $B(0;-3;6)$, $C(7;2;2)$, $D(5;-2;-2)$ et $E(6;3;4)$.

Soit (Δ) la droite définie par $(\Delta):\begin{cases}x+y+3=0\\2y-z+12=0\end{cases}$ et (P) le plan défini par $(P):\ 2x-3y-2z-1=0$.

1) Etudier la coplanarité des points A, B, C et D.
2) Montrer que les points C, D et E ne sont pas alignés.
3) Montrer que l'équation cartésienne du plan (EDC) s'écrit (EDC) : $2x-4y+3z-12=0$.
4) Déterminer une représentation paramétrique du plan (EDC).
5) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB), a-t-on $E\in(AB)$?
   b) Montrer que la droite (AB) et le plan (EDC) sont sécants en un point F à déterminer.
   c) Vérifier que le quadrilatère $CDFE$ est un parallélogramme.
6) a) Déterminer un vecteur directeur de la droite (Δ).
   b) Montrer que (Δ) est strictement parallèle au plan (EDC).
7) a) Montrer que les plans (EDC) et (P) sont sécants en une droite (D) à déterminer.
   b) Vérifier que $H(1,-1;2)\in(D)$ puis étudier la position relative de (D) et (Δ).

Correction : https://drive.google.com/file/d/1pKeXVryLN0vUYLyzeLnn54QWUfHmdmA6/view?usp=sharing