Exercices bac -- 2011-2016 -- arithmétique

EXERCICE 1 correction **Amérique du Nord 2011**

Enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?

5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

(a) Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

(b) En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.

(c) Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

Exercice 2 correction **Antilles 2011**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

(a) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

(b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).

(c) Résoudre l'équation (E).

(d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\,\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

(a) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

(b) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

(c) En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

EXERCICE 3 correction **Polynésie 2011**

Enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. **(a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$3u_n = 10^{n+1} - 7$.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n, l' écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. **(a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. **(a)** Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

EXERCICE 4 correction **Métropole 2011**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.
Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.

Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \quad [p]$ et $a \equiv 0 \quad [q]$, alors $a \equiv 0 \quad [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 9 \quad [17] \\ n & \equiv & 3 \quad [5] \end{array}\right.$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.

On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

(a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.

(b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.

Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.

(c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.

(a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.

Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.

(b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

3. Application :

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.

Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.

Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

Combien a-t-elle de jetons ?

Exercice 5 correction **Polynésie 2012**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(13\ ;\ 3)$ est solution de cette équation.

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.
On rappelle le petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Soit x un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.

2. (a) On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.

En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

(b) On suppose que a est un multiple de 7.

Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

(c) On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.

Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r, l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.

2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.

Décoder ce message.

Exercice 6 correction **Amérique du Nord 2013**

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a \geqslant b$
	Affecter à c la valeur $c+1$
	Affecter à a la valeur $a-b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.

2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m+5 \equiv p \quad [26] \iff m \equiv 3p-15 \quad [26].$$

3. Décoder alors la lettre B.

EXERCICE 7 correction **Nouvelle Calédonie 2013**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.
On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « $\star$ » considéré comme un caractère.
Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

- Premièrement : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc $a \to 0$, $b \to 1, \dots z \to 25$.

On associe au séparateur « $\star$ » le nombre 26.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	$\star$
14	15	13	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On dit que a a pour rang $0, b$ a pour rang 1, ... , z a pour rang 25 et le séparateur « $\star$ » a pour rang 26.

- Deuxièmement : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x+3$ par 27.

On remarquera que pour tout x de E, $g(x)$ appartient à E.

- Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple :
$s \to 18, \quad g(18) = 21$ et $21 \to v$. Donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1. Trouver tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$ c'est-à-dire invariants par g.

En déduire les caractères invariants dans ce codage.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E, si $y \equiv 4x+3$ modulo 27 alors $x \equiv 7y+6$ modulo 27.

En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3. Proposer une méthode de décodage.

4. Décoder le mot « $v f v$ ».

Exercice 8 correction **Antilles 2014**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements :
L'hébergement A et l'hébergement B.
Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.
On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1. (a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

(b) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\ ;\ y)$ possibles.

```
Entrée :        x et y sont des nombres
Traitement :    Pour x variant de 0 ...     (1)
                    Pour y variant de 0 ...  (2)
                        Si ...        (3)
                            Afficher x et y
                        Fin Si
                    Fin Pour
                Fin Pour
Fin traitement
```

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3. (a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

(b) Déterminer une telle solution.

(c) Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

Calculer ces nombres.

EXERCICE 9 correction Nouvelle Calédonie 2014

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

```
Entrées :      A et B entiers naturels tels que A < B

Variables :    D est un entier
               Les variables d'entrées A et B

Traitement :
               Affecter à D la valeur de B − A

               Tant que D > 0
               B prend la valeur de A
               A prend la valeur de D
                  Si B > A Alors
                     D prend la valeur de B − A
                  Sinon
                     D prend la valeur de A − B
                  Fin Si
               Fin Tant que

Sortie :       Afficher A
```

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.

En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.

En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.

(a) Justifier qu'il existe des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$\text{(E)} \qquad 221x - 331y = 1.$$

(b) Vérifier que le couple $(3\,;\,2)$ est une solution de l'équation (E).

En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n + 331 \end{array}\right.$$

(a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

(b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p\,;\,q)$ tels que

$u_p = v_q, \quad 0 \leqslant p \leqslant 500 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant q \leqslant 500$.

Annexe à rendre avec la copie

réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A	B	D
12	14	

Exercice 10 correction Antilles 2015

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel
	a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a
	Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	Affecter à a le nombre b
	Affecter à b la valeur de c
	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.

Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

(a) Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.

(b) Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.

(c) Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.

(d) Décoder la lettre R.

2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.

Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?

Exercice 11 correction Centres Étrangers 2015

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi (3, 4, 5) est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.

2. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :

$n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.

L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.

Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,

$120 = 2^3 \times 15$.

(a) Donner la décomposition de l'entier 192.

(b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.

Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

(c) En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier $2\,015$ puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2015)$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.

Déterminer un TP de la forme $(2015,\ y,\ z)$.

3. **(a)** En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

(b) En déduire un TP de la forme $(x,\ 2015,\ z)$.

EXERCICE 12 correction **Métropole septembre 2015**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que $15u - 26v = 1$.

Trouver un tel couple.

2. En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ k_0)$ de l'équation (E).

3. Montrer que $(x\ ;\ k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si

$15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$.

4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 26q + 7m \\ k & = & 15q + 4m \end{array}\right. \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,
- on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26,
- on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot **MATHS**.

2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.

(a) Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x - 26k = y - 7$.

(b) En déduire que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$.

(c) En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.

3. Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.

Décoder le mot WHL.

4. Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

EXERCICE 13 correction **Polynésie septembre 2015**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $\mathrm{S}(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $\mathrm{S}(6) = 12$ et calculer $\mathrm{S}(7)$.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\mathrm{S}(n) \geqslant 1 + n$.

(b) Quels sont les entiers naturels n tels que $\mathrm{S}(n) = 1 + n$?

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

(a) Démontrer que $\mathrm{S}(n) = (1 + p)(1 + q)$.

(b) On considère la proposition suivante :

« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts,

$\mathrm{S}(n \times m) = \mathrm{S}(n) \times \mathrm{S}(m)$ ».

Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

(a) Quels sont les diviseurs de n ?

(b) En déduire que $\mathrm{S}(n) = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.

5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

(a) Soit m un entier naturel.

Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

(b) Démontrer que $\mathrm{S}(n) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$.

Exercice 14 correction Pondichéry 2015

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que

PGCD $(b\,;\,c) = 1$.

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.

Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$\left(2^{33}-1\right) \div 3$	2863311530
$\left(2^{33}-1\right) \div 4$	2147483648
$\left(2^{33}-1\right) \div 12$	715827882,6

Il affirme que 3 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

(a) En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.** ?

(b) Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

(c) En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33}-1$.

(d) Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

(e) En déduire que 7 divise $2^{33}-1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD $(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n-1,\ k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n-1}$
	Affecter à k la valeur $k+1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n-1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

(a) Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

(b) Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

(c) Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

Exercice 15 correction **Amérique du Sud S 2016**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ...sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$\mathrm{N}_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.

2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.

(a) Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \bmod 3$.

(b) En déduire que $\mathrm{N}_p \equiv p \bmod 3$.

(c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.

3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.

(a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$ tel que $10^m \equiv a \bmod 7$.

On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

(b) Soit p un entier naturel non nul.

Montrer que $10^p \equiv 1 \bmod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.

On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

(c) Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $\mathrm{N}_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

(d) Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9\mathrm{N}_p$ ».

(e) En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \bmod 10$.

(a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots \; [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots \; [10]$										

(b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

(c) Conclure que $n^2 \equiv 1 \bmod 20$.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

EXERCICE 16 correction Métropole 2016

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note pgcd (a, b) le plus grand diviseur commun de a et b. Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y=\dfrac{5}{4}x-\dfrac{2}{3}$.

(a) Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x-12y$ est divisible par 3.

(b) Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y=\dfrac{m}{n}x-\dfrac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que pgcd $(m, n)=\text{pgcd}(p, q)=1$. Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle. Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $\left(x_0, y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

(a) En remarquant que le nombre ny_0-mx_0 est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.

(b) En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $\left(x_0, y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que $y_0=\dfrac{m}{n}x_0-\dfrac{p}{q}$.

(a) On pose $n=qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru-mv=1$.

(b) En déduire qu'il existe un couple $\left(x_0, y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que

$$y_0=\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}.$$

4. Soit Δ la droite d'équation $y=\dfrac{3}{8}x-\dfrac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que pgcd(M, N) = pgcd(P, Q) = 1 X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	

	Si Q divise N alors
	  X prend la valeur 0
	  Tant que $\left(\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}-\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\text{ n'est pas entier}\right)$
	  et $\left(-\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}-\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\text{ n'est pas entier}\right)$ faire
	    X prend la valeur X + 1
	  Fin tant que
	  Si $\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}-\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est entier alors
	    Afficher X, $\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}-\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$
	  Sinon
	    Afficher $-\mathrm{X}, -\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}-\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$
	  Fin Si
	Sinon
	  Afficher « Pas de solution »
	Fin Si

(a) Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que pgcd (M, N) = pgcd (P, Q) = 1.

(b) Que permet-il d'obtenir ?

Correction

Exercice 1 énoncé Amérique du Nord 2011

Enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soient a, b et c trois entiers non nuls ; supposons que a divise le produit bc et que a et b soient premiers entre eux.

Il existe donc un entier k tel que $bc = ka$. D'autre part puisque a et b soient premiers entre eux, il existe d'après le théorème de Bezout deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$ ou en multipliant par c non nul :
$acu + bcv = c$ et en remplaçant bc par ka :
$acu + kav = c \iff a(cu + kv) = c$.
Cette égalité montre que a divise c.

Partie B

1. On calcule : $u_1 = 2+3+6-1 = 10$;

$u_2 = 4+9+36-1 = 48$;

$u_3 = 8+27+216-1 = 250$;

$u_4 = 16+81+1296-1 = 1392$;

$u_5 = 32+243+7776-1 = 8050$;

$u_6 = 64+729+46656-1 = 47448$.

2. On a : $2 \equiv 0 \mod 2 \implies 2^n \equiv 0 \mod 2$;

$3 \equiv 1 \mod 2 \implies 3^n \equiv 1 \mod 2$;

$6 \equiv 0 \mod 2 \implies 6^n \equiv 0 \mod 2$.

Donc $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0+1+0-1 \equiv 0 \mod 2$

u_n est donc pair.

Ou encore 2^n et 6^n sont pairs ; 3^n et 1 sont impairs, donc leur différence est paire et par somme u_n est pair.

3. n est pair : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$.

On peut donc écrire : $u_n = u_{2k} = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 2^{2k} \times 3^{2k} - 1 = 4^k + 4^k \times 9^k + 9^k - 1$.

Comme $4 \equiv 0 \mod 4$, $4^k \equiv 0 \mod 4$;

$4^k \times 9^k \equiv 0 \mod 4$;

$9 \equiv 1 \mod 4$, donc $9^k \equiv 1 \mod 4$, d'où par somme :

$u_{2k} \equiv 0+0+1-1 = 0 \mod 4$, c'est-à-dire que u_{2k} est un multiple de 4.

4. On a vu que 2 divise u_1, que 3 divise u_2, que 5 divise u_3 et 7 divise u_5.

Donc 2, 3, 5 et 7 appartiennent à l'ensemble (E)

5. (a) D'après le théorème de Fermat, 2 étant premier avec p, on a $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Donc $6 \times 2^{p-2} = 3 \times 2^{p-1} \iff 3 \mod p$.

D'autre part 3 étant premier avec p, $3^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Donc $6 \times 3^{p-2} = 2 \times 3^{p-1} \equiv 2 \mod p$.

(b) Par définition : $6u_{p-2} = 6\left(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) =$
$6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$.

On a vu que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \mod p$, que $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \mod p$ et on a $6^{p-1} \equiv 1 \mod p$ car p premier avec 2 et 3 est premier avec 6.

Donc $6 \times u_{p-2} \equiv 3+2+1-6 \mod p$ soit $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \mod p$.

(c) On vient de démontrer que $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \mod p$: donc p divise $6 \times u_{p-2}$, mais p et 6 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss p divise u_{p-2}.

Conclusion : tout entier p premier appartient à l'ensemble (E)

EXERCICE 2 énoncé **Antilles 2011**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) Les entiers 11 et 7 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $11u-7v=1$. Par ailleurs $11\times2-7\times3=1$, le couple $(2\ ;\ 3)$ répond alors à la question.

(b) On a, en multipliant chaque membre de la dernière égalité par 5,

$11\times10-7\times15=5$. Le couple $(10\ ;\ 15)$ est donc une solution particulière de (E).

(c) Soit $(x\ ;\ y)$ une solution de (E), alors $11x-7y=11\times10-7\times15$, d'où :

$$11(x-10)=7(y-15). \qquad (1)$$

7 divise $11(x-10)$ et est premier avec 11, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x-10$: il existe donc un entier relatif k tel que $x-10=7k$. En remplaçant $x-10$ par $7k$ dans (1), puis en simplifiant, on en déduit que $y-15=11k$. Ainsi, si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors nécessairement $(x\ ;\ y)$ est de la forme $(10+7k\ ;\ 15+11k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie aisément que de tels couples sont bien solutions de (E).

(d) Un point de D à coordonnées entières appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\begin{cases} x\in\mathbb{Z}\ ;\ y\in\mathbb{Z}\\ 11x-7y=5\\ 0\leqslant x\leqslant 50\ ;\ 0\leqslant y\leqslant 50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x\ ;\ y)\text{ solution de (E)}\\ 0\leqslant x\leqslant 50\ ;\ 0\leqslant y\leqslant 50\end{cases}$ On cherche donc tous les entiers relatifs k tels que $0\leqslant 10+7k\leqslant 50$ et $0\leqslant 15+11k\leqslant 50$, ce qui équivaut à $-\dfrac{10}{7}\leqslant k\leqslant\dfrac{50}{7}$ et $-\dfrac{15}{11}\leqslant k\leqslant\dfrac{35}{11}$. Les seules valeurs possibles de k sont -1, 0, 1, 2 et 3. Il y a donc cinq points de $\mathcal{C}$ donc les coordonnées sont entières :

$$A(3\ ;\ 4)\quad B(10\ ;\ 15)\quad C(17\ ;\ 26)\quad D(24\ ;\ 37)\quad E(31\ ;\ 48).$$

2. (a) On a $11\equiv1\ (5)$, $7\equiv2\ (5)$ et $5\equiv0\ (5)$, par conséquent, si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), en « passant » aux congruences : $11x^2-7y^2=5$ devient $x^2-2y^2\equiv0\ (5)$, c'est-à-dire $x^2\equiv2y^2\ (5)$.

(b) On calcule aisément :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont donc 0, 1 et 4. De même, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 2 et 3.

(c) Si $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2\equiv2y^2\ (5)$ ce qui n'est possible, d'après les tableaux précédents, que si $x\equiv0\ (5)$ et $y\equiv0\ (5)$, c'est-à-dire si x et y sont des multiples de 5.

3. Supposons que x et y sont deux entiers multiples de 5. Alors il existe des entiers a et b tels que $x=5a$ et $y=5b$. En « réinjectant » cela dans l'équation (F) on a alors : $11\times25a^2-7\times25b^2=5$, c'est-à-dire $25(11a^2-7b^2)=5$, ce qui est impossible (5 n'est pas multiple de 25 !). L'équation (F) ne possède donc aucune solution.

EXERCICE 3 énoncé **Polynésie 2011**

Enseignement de spécialité

1. $u_1 = 10u_0 + 21$ or $u_0 = 1$ donc $u_1 = 10 \times 1 + 21 = 31$;

$u_2 = 10u_1 + 21 = 10 \times 31 + 21 = 331$;

$u_3 = 10u_2 + 21 = 10 \times 31 + 21 = 3331$.

2. (a)

- Initialisation $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3 = 3 \times 1 = 3u_0$ donc on a bien la propriété vraie au rang 0.
- Hérédité : Supposons que pour un entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$ alors

  $3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 10 \times (3u_n) + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63$

  $= 10^{(n+1)+1} - 70 + 63 = 10^{(n+1)+1} - 7$.

  La propriété est donc bien héréditaire.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout naturel n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

(b) Pour tout naturel n, $10^{n+1} - 7 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n+1} - 7 = \underbrace{9\ldots9}_{n}3$, donc par division par 3, $u_n = \dfrac{10^{n+1} - 7}{3} = \underbrace{3\ldots3}_{n}1$.

3. $u_2 = 331$ avec $\sqrt{331} \approx 18{,}2$ or 331 n'est divisible ni par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 : les nombres premiers inférieurs ou égaux à 18. u_2 est donc premier.

4. D'après 2.a., pour tout naturel n, $u_n = 33...31$ avec n chiffres 3

- Le chiffre des unités de u_n est 1, impair, donc 2 ne divise pas u_n.
- La somme de ses chiffres est $3 + 3 + ... + 3 + 1 \equiv 1$ (modulo 3) donc 3 ne divise pas u_n.
- Le chiffre des unités de u_n est 1, différent de 0 et 5, donc 5 ne divise pas u_n.

(a) $10 = -1 + 11$ et $-7 = 4 - 11$ donc $10 \equiv -1$ et $-7 \equiv 4$ (modulo 11),

donc $3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv (-1)^{n+1} + 4 \equiv (-1)^1(-1)^n + 4 \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo 11)

(b) Si u_n était divisible par 11 alors $3u_n$ le serait a fortiori, or pour n pair $3u_n \equiv 4 - 1 \equiv 3$ (modulo 11) et pour n impair $3u_n \equiv 4 - (-1) \equiv 5$ (modulo 11) donc 11 ne divise pas u_n.

5. (a) 17 est un nombre premier qui ne divise pas 16 donc d'après le petit théorème de Fermat, $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).

(b) Pour tout naturel k, $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7 = \left(10^16\right)^k \times 10^9 - 7 \equiv 1^k \times 10^9 - 7$ (modulo 17). Or $6 \times 17 = 102$ donc $10^2 \equiv -2$ (modulo 17) donc

$10^9 = 10 \times \left(10^2\right)^4 \equiv 10(-2)^4 \equiv 10 \times 16 \equiv 10(-1) \equiv -10$ et donc

$3u_{16k+8} \equiv -10 - 7 \equiv -17 \equiv 0$ (modulo 17) donc 17 divise $3u_{16k+8}$. Or 17 est premier avec 3 et d'après le théorème de Gauss, 17 divise u_{16k+8}.

EXERCICE 4 énoncé Métropole 2011

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

1. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$.

En multipliant par c, on obtient $auc+bcv=c$.

On suppose que a divise bc ; alors a divise bcv et comme a divise auc, a divise la somme $auc+bcv$, donc a divise c.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux. Soit a relatif tel que $a\equiv 0\ [p]$ et $a\equiv 0\ [q]$.

Alors, il existe k et k' relatifs tels que $a=kp$ et $a=k'q$ d'où $kp=k'q$.

p divise $k'q$ et p est premier avec q, donc, d'après le théorème de Gauss, p divise k'. Il existe $k''\in\mathbb{Z}$, $k'=pk''$.

Alors $a=k'q=k''pq$ d'où $a\equiv 0\ [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & [17] \\ n \equiv 3 & [5] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.

On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u+5v=1$.

(a) 17 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v entiers relatifs tels que $17u+5v=1$.

(b) On pose $n_0=3\times 17u+9\times 5v$.

Soit $(u\ ;\ v)$ un couple solution, donc $17u+5v=1$. On en déduit que $17u\equiv 1\ [5]$ et $5v\equiv 1\ [17]$. Alors $n_0=3\times 17u+9\times 5v\equiv 9\times 5v\ [17]\equiv 9\times 1\ [17]\equiv 9\ [17]$.

De même : $n_0=3\times 17u+9\times 5v\equiv 3\times 17u\ [5]\equiv 3\times 1\ [5]\equiv 3\ [5]$.

Par conséquent, $n_0\in\mathcal{S}$.

(c) Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$17=3\times 5+2$ et $5=2\times 2+1$, d'où $1=5-2\times 2$

$=5-(17-5\times 3)\times 2=17\times(-2)+5\times 7$.

On peut prendre $(u\ ;\ v)=(-2\ ;\ 7)$.

On obtient alors $n_0=213$ (ce n'est évidemment pas la seule valeur !)

2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.

(a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.

$n\equiv 9\ [17]$ et $n_0\equiv 9\ [17]$ donc $n-n_0\equiv 0\ [17]$.

De même, $n\equiv 3\ [5]$ et $n_0\equiv 3\ [5]$ donc $n-n_0\equiv 0\ [5]$.

17 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après la partie A, $n-n_0\equiv 0\ [85]$ (car $5\times 17=85$).

(b) On en déduit que, si $n\in\mathcal{S}$, $n\equiv n_0\ [85]$ donc $n\equiv 213\ [85]$.

Or $213=170+43=2\times 85+43\equiv 43\ [85]$ donc $213\equiv 43\ [85]$.

Par conséquent : $n\in\mathcal{S}\iff n\equiv 43\ [85]$ donc $n=43+85k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $n\equiv 43+85k$, $k\in\mathbb{Z}$, il est clair que $n\equiv 9\ [17]$ et $n\equiv 3\ [5]$.

3. Application :

Soit n le nombre de jetons. On a : $n\equiv 9\ [17]$ et $n\equiv 3\ [5]$.

D'après ce qui précède, on a : $n=43+85k$.

On sait que $300\leqslant n\leqslant 400$, donc $300\leqslant 43+85k\leqslant 400$. On en déduit que $k=4$ et que Zoé a 383 jetons.

EXERCICE 5 énoncé **Polynésie 2012**

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x-108y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. $25\times 13-108\times 3=325-224=1$, le couple $(13\ ;\ 3)$ est bien solution de l'équation $25x-108y=1$.

2. $(x_0;y_0)=(13\ ;\ 3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

$(x\ ;\ y)$ est solution de (E) équivaut à $25(x-x_0)=108(y-y_0)$ avec 25 et 108 premier entre eux donc 108 divise $x-x_0$

On a donc $x-x_0=108k$ avec k entier relatif d'où alors $y-y_0=25k$.

L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $\{(13+108k\ ;\ 3+25k)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g-108c=1$.

1. Soit x un entier naturel.
Si $x\equiv a\ [7]$ alors $x-a$ est divisible par 7. De même $x\equiv a\ [19]$ entraîne $x-a$ divisible par 19.

Or 7 et 19 sont premiers entre eux donc $x-a$ divisible par $7\times 19=133$. Ce qui s'écrit encore $x\equiv a\ [133]$.

Donc si $x\equiv a\ [7]$ et $x\equiv a\ [19]$, alors $x\equiv a\ [133]$.

2. **(a)** On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

7 est premier et a n'est pas un multiple de 7 donc d'après le petit théorème de Fermat on a $a^6\equiv 1\ [7]$.

De plus $108=6\times 18$ donc $a^{108}=\left(a^6\right)^{18}\equiv 1^{18}\ [7]\equiv 1\ [7]$.

On a donc $\left(a^{25}\right)^g=a^{25g}=a^{1+108c}a\times\left(a^{108}\right)^c\equiv a\times 1^c\ [7]\equiv a\ [7]$.

(b) On suppose que a est un multiple de 7.
On a alors $a\equiv 0\ [7]$ et $a^{25g}=\left(a^{25}\right)^g\equiv 0\ (7]$ donc $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [7]$.

(c) On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [19]$.

D'après les questions a. et b. on sait que l'on a aussi $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [7]$ on peut donc en appliquant le résultat de la question 1. à $x=\left(a^25\right)^g$ démontrer que $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1\leqslant a\leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25}\equiv r\ [133]$ avec $0\leqslant r<133$.
La phase de décodage consiste à associer à r, l'entier r_1 tel que $r^{13}\equiv r_1\ [133]$ avec $0\leqslant r_1<133$.

1. $r_1\equiv r^{13}\ [133]\equiv\left(a^{25}\right)^{13}\ [133]$ avec $(g\ ,\ c)=(13\ ;\ 3)$ vérifiant la relation $25g-108c=1$ d'après la partie A.

D'où d'après la question 2.c. de la partie B, $\left(a^{25}\right)^{13}\ [133]\equiv a\ [133]$ donc finallement on bien $r_1\equiv a\ [133]$.

2. $128\equiv -5\ [133]$ donc $128^{13}\equiv -5^{13}\ [133]\equiv -131\ [133]\equiv 2\ [133]$

$59^4\equiv 130\ [133]\equiv -3\ [133]$ donc $59^{13}=\left(59^4\right)^3\times 59\equiv -3^3\times 59\ [133]\equiv -130\ [133]\equiv 3\ [133]$

Le message initiale était donc : 2 3.

EXERCICE 6 énoncé **Amérique du Nord 2013**

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a \geqslant b$
	Affecter à c la valeur $c+1$
	Affecter à a la valeur $a-b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1. En faisant tourner l'algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$, on obtient :

Variables	a	b	c
Initialisation			0
Entrées	13	4	0
Traitement	9	4	1
	5	4	2
	1	4	3
Sortie	On affiche la valeur de c : 3		
	On affiche la valeur de a : 1		

2. Dans cet algorithme, on retire le nombre b du nombre a autant de fois que l'on peut et on fait afficher le nombre de fois que l'on a retiré b et ce qui reste dans a ; cet algorithme fournit donc le quotient (dans c) et le reste (dans a) de la division de a par b.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.
Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. On va coder la lettre U.

Étape 1 : La lettre U correspond à $m = 20$.
Étape 2 : $9m+5 = 9\times 20+5 = 185$; le reste de la division de 185 par 26 est $p = 3$.
Étape 3 : Au nombre $p = 3$, on associe la lettre D.

Donc la lettre U se code en D.

2. On modifie l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent :

Variables :	m est un entier naturel
	p est un entier naturel
Initialisation :	Demander la valeur de m
	Affecter à p la valeur $9m+5$
Traitement :	Tant que $p \geqslant 26$
	Affecter à p la valeur $p-26$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher p

Partie C

1. On sait que $9\times 3 = 27 \equiv 1\ [26]$; donc pour $x = 3$, on a $9x \equiv 1\ [26]$.

2. $9m+5 \equiv p\ [26] \Longrightarrow 27m+15 \equiv 3p\ [26] \iff 27m \equiv 3p-15\ [26]$

Or $27 \equiv 1\ [26]$ donc $27m \equiv m\ [26]$

$$\left.\begin{array}{l} 27m \equiv 3p-15 \\ 27m \equiv m\ [26] \end{array}\right\} \Longrightarrow m \equiv 3p-15\ [26]$$

Réciproquement :

$m \equiv 3p-15\ [26] \iff m+15 \equiv 3p\ [26] \Longrightarrow 9m+135 \equiv 27p\ [26]$

Or $27 \equiv 1\ [26]$ donc $27p \equiv p\ [26]$; de plus $135 = 5 \times 26 + 5$ donc $135 \equiv 5\ [26]$.

$135 \equiv 5\ [26] \Longrightarrow 9m+135 \equiv 9m+5\ [26]$

$$\left.\begin{array}{ll} 9m+135 & \equiv 9m+5\ [26] \\ 27p & \equiv p\ [26] \\ 9m+135 & \equiv 27p\ [26] \end{array}\right\} \Longrightarrow 9m+5 \equiv p\ [26]$$

On peut donc dire que : $9m+5 \equiv p\ [26] \iff m \equiv 3p-15\ [26]$.

3. Pour décoder une lettre, on procèdera donc ainsi :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut décoder, on associe le nombre p correspondant dans le tableau.
Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $3p-15$ par 26 et on le note m.
Étape 3 : Au nombre m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

Pour décoder la lettre B :

Étape 1 : À la lettre B, on associe le nombre $p = 1$.
Étape 2 : $3p-15 = -12 \equiv 14\ [26]$ donc $m = 14$.
Étape 3 : Au nombre $m = 14$, on associe la lettre O.

Donc la lettre B se décode en la lettre O.

EXERCICE 7 énoncé **Nouvelle Calédonie 2013**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On cherche tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$:

$g(x) = x \iff 4x + 3 \equiv x \pmod{27} \iff 3x \equiv -3 \pmod{27}$

ce qui veut dire que $3x$ s'écrit $-3 + 27k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{rrcccl} x \in \mathrm{E} \iff & 0 & \leqslant & x & \leqslant & 26 \\ & 0 & \leqslant & 3x & \leqslant & 81 \\ \text{or } 3x = -3 + 27k \text{ donc} & 0 & \leqslant & -3+27k & \leqslant & 81 \\ & 3 & \leqslant & 27k & \leqslant & 84 \\ & \dfrac{3}{27} & \leqslant & k & \leqslant & \dfrac{84}{27} \end{array}$$

Or k est entier donc $k \in \{1, 2, 3\}$.

Pour $k = 1$, $3x = -3 + 27 = 24$ donc $x = 8$;

pour $k = 2$, $3x = -3 + 54 = 51$ donc $x = 17$;

pour $k = 3$, $3x = -3 + 81 = 78$ donc $x = 26$.

Les éléments de E invariants par g sont 8, 17 et 26.

Les caractères invariants dans ce codage sont les caractères correspondant à 8,17 et 26 donc ce sont les caractères i, r et $\star$.

2. Soient x et y deux éléments de E tels que $y \equiv 4x + 3 \pmod{27}$.

$y \equiv 4x + 3 \pmod{27} \iff 7y \equiv 28x + 21 \pmod{27}$;
or $21 \equiv -6 \pmod{27}$ et $28 \equiv 1 \pmod{27}$ donc $28x \equiv x \pmod{27}$

$$\begin{aligned} 7y \equiv 28x + 21 \pmod{27} &\iff 7y \equiv x - 6 \pmod{27} \iff 7y + 6 \equiv x \pmod{27} \\ &\iff x \equiv 7y + 6 \pmod{27} \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe deux caractères x et x' de E qui se codent par le même caractère y de E.

On a donc $x \equiv 7y + 6 \pmod{27}$ et $x' \equiv 7y + 6 \pmod{27}$ ce qui entraîne $x \equiv x' \pmod{27}$ donc on peut écrire $x = x' + 27k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Or $0 \leqslant x \leqslant 26$ et $0 \leqslant x' \leqslant 26$ donc $k = 0$ et $x = x'$.

Deux caractères distincts ne sont pas codés par un même caractère, donc deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3. Une méthode de décodage suit le même principe que la méthode de codage, en remplaçant la fonction g par la fonction f qui, à chaque élément y de E, associe le reste de la division euclidienne de $7y + 6$ par 27.

4. On sait que la lettre s se code en la lettre v, donc la lettre v se décode en s.

La lettre f correspond au nombre $y = 5$; $7y + 6 = 7 \times 5 + 6 = 35 + 6 = 41$.
Or $41 = 27 \times 1 + 14$ donc 14 est le reste de la division de 41 par 27.
Le nombre 14 correspond à la lettre o.

Donc $v\,f\,v$ se décode en $s\,o\,s$.

EXERCICE 8 énoncé **Antilles 2014**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) x et y sont des entiers naturels tels que $24x+45y=438$, par conséquent :

- $24x \leqslant 438$ d'où $x \leqslant \dfrac{438}{24}=18{,}25$, donc $x \leqslant 18$;
- $45y \leqslant 438$ d'où $y \leqslant \dfrac{438}{45} \approx 9{,}73$, donc $y \leqslant 9$.

(b) Voici l'algorithme complété :

```
Entrée :        x et y sont des nombres
Traitement :    Pour x variant de 0 à 18       (1)
                    Pour y variant de 0 à 9    (2)
                        Si 24x+45y=438         (3)
                            Afficher x et y
                        Fin Si
                    Fin Pour
                Fin Pour
Fin traitement
```

(c) Le coût total de réservation étant de 438 €, et 438 étant égal à 146×3, ce montant est multiple de 3 !

(d) **(i)** Les entiers 8 et 15 étant premiers entre eux, le théorème de Bézout entraîne l'existence d'un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que $8x+15y=1$.

(ii) On a de façon évidente $8\times 2+15\times(-1)=1$, le couple $(2\,;\,-1)$ est donc une solution particulière.

(iii) On a $8\times 2+15\times(-1)=1$, donc, en multipliant par 146 :

$$8\times 292+15\times(-146)=146.$$

Soit $(x\,;\,y)$ un autre couple solution de (E), alors :

$$8x+15y=8\times 292+15\times(-146) \iff 8(x-292)=15(-y-146). \qquad (1)$$

15 et 8 sont premiers entre eux et 15 divise $8(x-292)$, donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise $x-292$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $x-292=15k \iff x=292+15k$. La relation (1) entraîne alors que $8\times 15k=15(-y-146)$, d'où $y=-146-8k$.

Les couples solutions sont donc de la forme $(292+15k\,;\,-146-8k)$.

Réciproquement, de tels couples sont bien solutions de (E) car :

$$8(292+15k)+15(-146-8k)=146.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{(292+15k\,;\,-146-8k) \text{ où } k\in\mathbb{Z}\}$.

(e) Soit x et y le nombre de nuitées passées respectivement dans les hébergements A et B, alors $24x+45y=438 \Leftrightarrow 8x+15y=146$. Il existe alors un entier relatif k tel que $x=292+15k$, et par ailleurs $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 13$, d'où :

$$0 \leqslant 292+15k \leqslant 13 \iff -\frac{292}{15} \leqslant k \leqslant -\frac{279}{15}.$$

Comme $-\dfrac{292}{15} \approx -19{,}47$ et $-\dfrac{279}{15}=-18{,}6$, la seule possibilité est que $k=-19$.
On en déduit que $x=292+15\times(-19)=7$ et que $y=-146-8\times(-19)=6$.
Ce randonneur a donc passé 7 nuits en hébergement A et 6 nuits en hébergement B.

Exercice 9 énoncé Nouvelle Calédonie 2014

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que A < B :

```
Entrées :     A et B entiers naturels tels que A < B

Variables :   D est un entier
              Les variables d'entrées A et B

Traitement :  Affecter à D la valeur de B – A
              Tant que D > 0
                 B prend la valeur de A
                 A prend la valeur de D
                   Si B > A Alors
                      D prend la valeur de B – A
                   Sinon
                      D prend la valeur de A – B
                   Fin Si
              Fin Tant que

Sortie :      Afficher A
```

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$. On remplit le tableau donné en **annexe** ; voir page 27.

La valeur affichée par l'algorithme est 2.

2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.

En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.

(a) On a fait tourner l'algorithme pour $A = 221$ et $B = 331$ donc le PGCD de 221 et 331 est 1 ; ces deux nombres sont donc premiers entre eux.

D'après le théorème de Bézout, on peut dire qu'il existe des entiers relatifs x et y tels que $221x - 331y = 1$ (équation (E)).

(b) $221 \times 3 - 331 \times 2 = 663 - 662 = 1$ donc le couple $(3\ ;\ 2)$ est une solution de (E).

$$\begin{array}{rrcrl} \text{(E)} & 221 \times x & - & 331 \times y & = 1 \\ & 221 \times 3 & - & 331 \times 2 & = 1 \\ \hline & 221(x-3) & - & 331(y-2) & = 0 \end{array} \quad \text{par soustraction}$$

Donc $221(x-3) = 331(y-2)$ et donc 221 divise $331(y-2)$. Or on sait que 221 et 331 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 221 divise $y-2$.

On peut donc dire que $y - 2 = 221k$ où $k \in \mathbb{Z}$ et donc que $y = 2 + 221k$.

De $221(x-3) = 331(y-2)$ on déduit $221(x-3) = 331 \times 221k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 331k$; donc $x = 3 + 331k$.

L'ensemble solution de l'équation (E) est $\{(3+331k\,;\,2+221k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n + 331 \end{array} \right.$$

(a) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 331$ et de premier terme $v_0 = 3$; donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + n \times r = 3 + 331n$.

(b) $u_p = v_q \iff 2 + 221p = 3 + 331q \iff 221p - 331q = 1$

D'après les questions précédentes, on a : $(p, q) = (3 + 331k, 2 + 221k)_{k\in\mathbb{Z}}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant p \leqslant 500 \iff 0 \leqslant 3 + 331k \leqslant 500 \Longrightarrow k \in \{0, 1\} \\ 0 \leqslant q \leqslant 500 \iff 0 \leqslant 2 + 221k \leqslant 500 \Longrightarrow k \in \{0, 1, 2\} \end{array}\right\} \Longrightarrow k \in \{0, 1\}$$

Pour $k = 0$, $(p, q) = (3, 2)$ donc $u_3 = v_2 = 665$.

Pour $k = 1$, $(p, q) = (334, 223)$ donc $u_{334} = v_{223} = 73816$.

Annexe de l'exercice 4 -- Spécialité

réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A	B	D
12	14	2
2	12	10
10	2	8
8	10	2
2	8	6
6	2	4
4	6	2
2	4	2
2	2	0

Exercice 10 énoncé **Antilles 2015**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

1.

valeur de a	26	9	8
valeur de b	9	8	1
valeur de c	8	1	0
Affichage			1

2.

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b

Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	    Affecter à a le nombre b
	    Affecter à b la valeur de c
	    Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que

Sortie :	Si $b=1$
	    Afficher « les nombres entrés sont premiers entre eux »
	Sinon
	    Afficher « les nombres entrés ne sont pas premiers entre eux »
	Fin de Si

Partie B

1. Dans cette question, on choisit $p=9$ et $q=2$.

(a) Dans le tableau V correspond à 21, or $9\times 21+2=189+2=191$ et $191=26\times 7+9$; donc $x'\equiv 9 \quad [26]$.

Dans le tableau 9 correspond à la lettre J.

(b) 9 et 26 étant premiers entre eux, le théorème de Bezout permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u+26v=1$.

Le couple $(3\ ;\ -1)$ est un couple simple solution de cette équation.

(c) On a $x'\equiv 9x+2 \quad [26] \iff$ il existe $k\in\mathbb{Z}$, $x'=26k+9x+2 \iff 3x'=26k'+27x+6 \iff 3x'=26k'+26x+x+6 \iff 3x'=26r''+x+6 \iff x=26(-r'')+3x'-6 \iff x=26(-r'')+3x'+20$, soit $x\equiv 3x'+20 \quad [26]$

(d) R correspond à $x'=17$, donc $3x'+20=51+20=71$ et

$71=26\times 2+19$, soit $71\equiv 19 \quad [26]$.

On a donc $x=19$ qui correspond à la lettre T.

2. J correspond à $x=9$ et D correspond à $x'=3$. de plus $q=2$; on a donc :

$3=9p+2 \quad [26] \iff 9p\equiv 1 \quad [26]$ ou encore $27p\equiv 3 \quad [26]$, mais on sait que $27\equiv 1 \quad [26]$; il en résulte que $p\equiv 3 \quad [26]$ et comme p est compris entre 0 et 25, on a donc $p=3$.

3. B correspond à $x=1$, d'où $x'=13x+2\equiv 15 \quad [26]$ et 15 correspond à la lettre P.

D correspond à $x=3$, d'où $x'=13x+2\equiv 41 \quad [26]$ et $41\equiv 15 \quad [26]$ et 15 correspond à la lettre P.

Conclusion : deux lettres différentes sont codées par la même lettre. Ce codage n'est pas bon puisque le décryptage donnera plusieurs solutions.

EXERCICE 11 énoncé Centres Étrangers 2015

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que $x^2+y^2=z^2$.
Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » et notés en abrégé « TP ».

1. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP ; alors $x^2+y^2=z^2$. Soit p un entier naturel non nul.

Alors $p^2\times x^2+p^2\times y^2=p^2\times z^2$ ce qui équivaut à $(px)^2+(py)^2=(pz)^2$.

Donc $(px,\ py,\ pz)$ est aussi un TP.

2. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP.

On va utiliser deux résultats connus du cours : un nombre et son carré ont la même parité, et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ impair} si, et seulement si, x^2 \text{ impair} \\ y \text{ impair} si, et seulement si, y^2 \text{ impair}\end{array}\right\} \Longrightarrow x^2+y^2 \text{ pair} \Longleftrightarrow z^2 \text{ pair} \Longleftrightarrow z \text{ pair}$$

Donc x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance α de 2 par un entier impair k : $n=2^\alpha\times k$

(a) La décomposition en facteurs premiers de 192 est $2^6\times 3$; c'est aussi la *décomposition* de 192 au sens donné dans cet exercice.

(b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les *décompositions* sont $x=2^\alpha\times k$ et $z=2^\beta\times m$.

$x=2^\alpha\times k \Longrightarrow x^2=2^{2\alpha}\times k^2 \Longrightarrow 2x^2=2^{2\alpha+1}\times k^2$

$z=2^\beta\times m \Longrightarrow z^2=2^{2\beta}\times m^2$

(c) Pour que les deux nombres $2x^2$ et z^2 soient égaux, il faut et il suffit que leurs *décompositions* soient les mêmes (puisque cette *décomposition* est unique) ; l'un a pour *décomposition* $2^{\alpha+1}\times k^2$ et l'autre $2^\beta\times m^2$.

Ces deux décompositions ne peuvent être les mêmes car $2\alpha+1$ est impair et 2β est pair.

Donc il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2=z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x<y<z$.

1. $2015=5\times 13\times 31$; on en déduit que $2015=5\times 403$.

On sait que $(3,\ 4,\ 5)$ est un TP donc, d'après la question **1.** $(3\times 403,\ 4\times 403,\ 5\times 403)$ est aussi un TP.

Donc $(1209,\ 1612,\ 2015)$ est un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2+\left(2n^2+2n\right)^2=\left(2n^2+2n+1\right)^2$.

Si $2n+1=2015$, alors $n=1007$.

Pour $n=1007$, on a : $(2n^2+2n)^2=2030112$ et $(2n^2+2n+1)^2+1=2030113$.

Donc $(2015,\ 2030112,\ 2030113)$ est un TP.

3. (a) On cherche deux entiers x et z tels que : $z^2-x^2=403^2 \Longleftrightarrow (z-x)(z+x)=403^2$; or $403^2=169\times 961$. Donc $z^2-x^2=403^2 \Longleftrightarrow (z-x)(z+x)=169\times 961$.

Les nombres x et z tels que $\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169\\ z+x &=& 961\end{array}\right.$ répondent à la question.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169\\ z+x &=& 961\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 961-169\\ 2z &=& 169+961\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 792\\ 2z &=& 1130\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 396\\ z &=& 565\end{array}\right.$$

Donc $565^2-396^2=403^2$.

(b) D'après la question **B 3.a)** : $396^2+403^2=565^2$; on en déduit que $(396,\ 403,\ 565)$ est un TP.

En multipliant par 5 on obtient le TP cherché : $(5\times 396,\ 5\times 403,\ 5\times 565)=(1980,\ 2015,\ 2825)$.

EXERCICE 12 énoncé **Métropole septembre 2015**

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. $15 = 3 \times 5$ et $26 = 2 \times 13$; les deux nombres 15 et 26 sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, on peut déduire qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $15u - 26v = 1$.

On cherche un tel couple en utilisant l'algorithme d'Euclide et en écrivant les restes successifs comme combinaisons linéaires de 15 et de 26 :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
26 &=& 1\times 15+11 & -1\times 15+1\times 26 &=& 11\\
15 &=& 1\times 11+4 & 15-1\times 11 &=& 4\\
 & & & 15-(-1\times 15+1\times 26) &=& 4\\
 & & & 2\times 15-1\times 26 &=& 4\\
11 &=& 2\times 4+3 & 11-2\times 4 &=& 3\\
 & & & (-1\times 15+1\times 26)-2(2\times 15-1\times 26) &=& 3\\
 & & & -5\times 15+3\times 26 &=& 3\\
4 &=& 1\times 3+1 & 4-1\times 3 &=& 1\\
 & & & (2\times 15-1\times 26)-1(-5\times 15+3\times 26) &=& 1\\
 & & & 7\times 15-4\times 26 &=& 1
\end{array}$$

Donc le couple $(7; 4)$ est solution de l'équation $15u - 26v = 1$.

2. $15 \times 7 - 26 \times 4 = 1$ donc $15 \times (7m) - 26 \times (4m) = m$

Le couple $(7m; 4m)$ est une solution particulière de l'équation (E) : $15x - 26k = m$.

3. On suppose que $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$ avec $x_0 = 7m$ et $k_0 = 4m$, donc $15(x - 7m) - 26(k - 4m) = 0$

Alors $15x - 15 \times 7m - 26k + 26 \times 4m = 0$, ce qui implique $15x - 26k = 15 \times 7m - 26 \times 4m$ ou encore $15x - 26k = m$

Donc le couple $(x; k)$ est solution de (E).

- On suppose que $(x; k)$ est solution de (E) : $15x - 26k = m$
  On sait que $(x_0; k_0)$ est une solution de (E) : $15x_0 - 26k_0 = m$
  On soustrait membre à membre : $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$

Donc $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$

On peut dire que $(x; k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$.

4. Si le couple $(x; k)$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 26q + 7m \\ k &=& 15q + 4m \end{array}\right.$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors :

$15x - 26k = 15(26q + 7m) - 26(15q + 4m) = 15 \times 26q + 105m - 26 \times 15q - 104m = m$.

Donc le couple $(x; k)$ est solution de (E).

- Si le couple $(x; k)$ est solution de (E), on sait que $15(x - 7m) - 26(k - 4m) = 0 \iff 15(x - 7m) = 26(k - 4m)$

Donc 15 divise $26(k - 4m)$. Or 15 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gausse, 15 divise $k - 4m$; donc il existe un entier relatif q tel que $k - 4m = 15q$ et donc $k = 15q + 4m$.

$\left.\begin{array}{l} 15(x - 7m) = 26(k - 4m) \\ k - 4m = 15q \end{array}\right\} \Longrightarrow 15(x - 7m) = 26 \times 15q \iff x - 7m = 26q$ donc $x = 26q + 7m$

Donc, si $(x; k)$ est solution de l'équation (E), on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 26q + 7m \\ k &=& 15q + 4m \end{array}\right.$

Les solutions de l'équation (E) sont donc exactement les couples $(x; k)$ d'entiers relatifs tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 26q + 7m \\ k &=& 15q + 4m \end{array}\right.$ où $q \in \mathbb{Z}$

1. On code le mot **MATHS** :

lettre	x	$15x+7$	reste	lettre
M	12	187	5	F
A	0	7	7	H
T	19	292	6	G
H	7	112	8	I
S	18	277	17	R

Donc le mot **MATHS** se code en **FHGIR**.

2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.

(a) Si y est le reste de la division de $15x + 7$ par 26, cela signifie que $(15x + 7) - y$ est un multiple de 26, donc qu'il existe un entier relatif k tel que $(15x + 7) - y = 26k$, ce qui équivaut à

$$15x - 26k = y - 7$$

(b) $15x-26k=y-7 \iff 7\times 15x-7\times 26k=7\times y-7\times 7 \iff 105x-7\times 26k=7y-49$

$$\left.\begin{array}{r} 105=4\times 26+1 \Rightarrow 105\equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 105x\equiv x \pmod{26} \\ 7\times 26\equiv 0 \pmod{26} \Rightarrow 7\times 26k\equiv 0 \pmod{26} \\ -49=-2\times 26+3\equiv 3 \pmod{26} \end{array}\right\} \Longrightarrow x\equiv 7y+3 \pmod{26}$$

(c) Voici donc un système de décodage d'une lettre :

- à cette lettre, on associe l'entier y correspondant,
- on associe ensuite à y l'entier x qui est le reste de la division euclidienne de $7y+3$ par le nombre 26,
- on associe à x la lettre correspondante.

3. On décode les trois lettres W, H et L :

lettre	y	$7y+3$	reste	lettre
W	22	157	1	B
H	7	52	0	A
L	11	80	2	C

Donc le mot **WHL** se décode en **BAC**.

4. À chaque lettre de l'alphabet, on fait correspondre une seule lettre de l'alphabet par le système de codage décrit dans le texte, celui qui fait passer de la lettre correspondant au nombre entier x à la lettre correspondant au nombre entier y.

Réciproquement, chaque lettre de l'alphabet est l'image d'une unique lettre de l'alphabet que l'on obtient par le système de décodage expliqué à la question **2.c.**

Le système de codage réalise donc une bijection sur l'ensemble des lettres de l'alphabet.

Donc deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

EXERCICE 13 énoncé **Polynésie septembre 2015**

Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, on appelle $\mathrm{S}(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Le nombre 6 a pour diviseurs positifs 1, 2, 3 et 6 ; donc $\mathrm{S}(6) = 1+2+3+6 = 12$.

Le nombre 7 n'a que 2 diviseurs, 1 et 7 ; donc $\mathrm{S}(7) = 1+7 = 8$.

2. (a) Tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 a au moins 2 diviseurs, 1 et lui-même ; donc $\mathrm{S}(n) \geqslant 1+n$.

(b) Les entiers naturels n tels que $\mathrm{S}(n) = 1+n$ sont les entiers qui ont exactement 2 diviseurs : 1 et n ; ce sont donc tous les nombres premiers.

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

(a) Si $n = p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers distincts, alors les seuls diviseurs de n sont : 1, p, q et $p \times q$.

Donc $\mathrm{S}(n) = 1+p+q+pq = (1+p)+q(1+p) = (1+p)(1+q)$.

(b) On considère la proposition suivante :

« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $\mathrm{S}(n \times m) = \mathrm{S}(n) \times \mathrm{S}(m)$ ».

L'ensemble des diviseurs de 4 est $\{1;2;4\}$ donc $\mathrm{S}(4) = 1+2+4 = 7$.

On a déjà vu que $\mathrm{S}(6) = 12$.

$4 \times 6 = 24$; les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, donc $\mathrm{S}(24) = 1+2+3+4+6+8+12+24 = 60$.

$\mathrm{S}(4) \times \mathrm{S}(6) = 7 \times 12 = 84$ est différent de $\mathrm{S}(4 \times 6) = 60$.

La proposition est donc fausse.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

(a) Les diviseurs de $n = p^k$ sont 1, p, $p^2, \ldots, p^k$.

(b) La suite $(1, p, p^2, \ldots, p^k, \ldots)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison p ; on en déduit que $s(n) = 1+p+p^2+\ldots+p^k = \dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$ d'après la formule qui donne la somme des premiers termes d'une suite géométrique : premier terme $\times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

5. On suppose que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

(a)• On suppose que l'entier naturel m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

$\left(p^s \times p^{13-s}\right)\left(q^t \times q^{7-t}\right) = p^{13} \times q^7 si, et seulement si, \left(p^s \times q^t\right)\left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) = n si, et seulement si,$
n.

On peut donc dire que m est un diviseur de n.

• Soit m est un diviseur de n. On décompose m en produit de facteurs premiers ; si r est un facteur premier de la décomposition de m, alors r divise $p^{13}q^7$ donc, d'après le théorème de Gauss, r divise p^{13} ou r divise q^7, donc $r = p$ ou $r = q$.

Donc m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$.

Comme m est un diviseur de n, on peut écrire $n = m \times m'$ où m' est un autre diviseur de n qui peut donc s'écrire $m' = p^{s'} \times q^{t'}$. Or $n = p^{13} \times q^7$ et $n = m \times m'$.

On a donc $p^{13}q^7 = p^s q^t \times p^{s'} q^{t'}$ ce qui équivaut à $p^{13}q^7 = p^{s+s'}q^{t+t'}$.

D'après l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, on peut dire que $s+s' = 13$ et que $t+t' = 7$ et comme s, s', t et t' sont des entiers naturels, on peut en déduire que $s \leqslant 13$ et que $t \leqslant 7$.

Donc tout diviseur m de n s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

Tous les diviseurs de n sont :

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & p & p^2 & \ldots & p^i & \ldots & p^{13} \\
q & pq & p^2q & \ldots & p^iq & \ldots & p^{13}q \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q^j & pq^j & p^2q^j & \ldots & p^iq^j & \ldots & p^{13}q^j \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q^7 & pq^7 & p^2q^7 & \ldots & p^iq^7 & \ldots & p^{13}q^7
\end{array}
$$

(b) La somme des $14 \times 8 = 112$ diviseurs de n est :

$\mathrm{S}(n) = \left(1+p+p^2+\ldots+p^{13}\right)+\left(q+pq+p^2q+\ldots+p^{13}q\right)+\ldots+\left(q^7+pq^7+p^2q^7+\ldots+p^{13}q^7\right)$

$$= \left(1+p+p^2+\ldots+p^{13}\right)+\left(1+p+p^2+\ldots+p^{13}\right)q+\ldots+\left(1+p+p^2+\ldots+p^{13}\right)q^7$$

$$= \left(1+p+p^2+\ldots+p^{13}\right)\left(1+q+q^2+\ldots+q^7\right)=\frac{1-p^{14}}{1-p}\times\frac{1-p^8}{1-p}$$

Exercice 14 énoncé **Pondichéry 2015**

1. Si b divise a alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$. De la même manière, si c divise a, alors il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k'c$.

On a donc $kb = k'c$ et par conséquent b divise $k'c$. Or b et c sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss on en déduit que b divise k'. Il existe donc un entier k'' tel que $k' = k''b$.

En remplaçant k' par $k''b$ il vient alors $a = k''bc$ ce qui nous permet de conclure que bc divise a.

2. (a) 3 et 4 sont premiers entre eux. Si 3 et 4 divisent $2^{33}-1$ alors le produit $3 \times 4 = 12$ divise $2^{33}-1$. Or 12 ne divise pas $2^{33}-1$, cette affirmation contredit donc le résultat de la question **1.**

(b) 4 divise 2^{33} donc $2^{33} \equiv 0\ (4)$. On en déduit alors $2^{33}-1 \equiv -1\ (4)$ puis $2^{33}-1 \equiv 3\ (4)$.

4 ne divise donc pas $2^{33}-1$.

(c)

$$\begin{aligned} 2 \equiv -1\ (3) &\implies 2^{33} \equiv (-1)^{33}\ (3) \\ &\implies 2^{33} \equiv -1\ (3) \\ &\implies 2^{33}-1 \equiv -2\ (3) \\ &\implies 2^{33}-1 \equiv 1\ (3) \end{aligned}$$

On en conclut que 3 ne divise pas $2^{33}-1$.

(d) $\mathrm{S} = 1 + 2^3 + \ldots + \left(2^3\right)^{10} = \dfrac{1-\left(2^3\right)^{11}}{1-2^3} = \dfrac{2^{33}-1}{7}$.

(e) $2^{33}-1 = 7 \times \mathrm{S}$ donc 7 divise $2^{33}-1$.

3. $2^7 - 1 = 127$ et $\sqrt{127} \approx 11{,}27$. 127 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7 et 11 donc 127 est premier.

4. (a)

- Si $n = 33$,
  - on sait que $2^{33}-1$ n'est pas pair donc 2 ne divise pas $2^{33}-1$,
  - 3 ne divise pas $2^{33}-1$ d'après **2.(c)**,
  - 4 ne divise pas $2^{33}-1$ d'après **2.(b)**,
  - Vérifions que 5 ne divise pas $2^{33}-1$:

$$\begin{aligned} 2^4 \equiv 1\ (5) &\implies \left(2^4\right)^8 \equiv 1^8\ (5) \\ &\implies \left(2^4\right)^8 \times 2 \equiv 2\ (5) \\ &\implies 2^{33}-1 \equiv 1\ (5) \end{aligned}$$

    5 ne divise donc pas $2^{33}-1$,
  - 6 ne divise pas $2^{33}-1$ car ni 2 ni 3 ne divisent $2^{33}-1$,
  - on sait que 7 divise $2^{33}-1$,

  l'algorithme va donc afficher 7 puis « CAS 2 ».
- Si $n = 7$, $2^7 - 1 = 127$ est premier et $\sqrt{127} \approx 11{,}27$ donc l'algorithme va afficher 12 puis « CAS 1 ».

(b) « CAS 2 » signifie que le nombre de Mersenne étudié n'est pas premier et k est son plus petit diviseur premier.

(c) « CAS 1 » signifie que le nombre de Mersenne étudié est premier.

Exercice 15 énoncé **Amérique du Sud S 2016**

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, … sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$\mathrm{N}_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Le chiffre des unités de N_p est 1 donc N_p est impair donc il n'est pas divisible par 2.

Et comme le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5, le nombre N_p n'est pas divisible par 5.

2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.

(a) $10 = 3\times 3+1 \equiv 1 \mod 3$ et donc, pour tout j de $\mathbb{N}$, $10^j \equiv 1^j \mod 3$ donc $10^j \equiv 1 \mod 3$.

(b) N_p est la somme de p termes de la forme 10^j avec $j \in \mathbb{N}$, et pour tout j de $\mathbb{N}$, $10^j \equiv 1 \mod 3$.

Donc $\mathrm{N}_p \equiv p \mod 3$.

(c) On peut donc dire que N_p est divisible par 3 si et seulement si p est divisible par 3.

3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.

(a) On complète le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$:

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	-1	-3	-2	1

(b) Soit p un entier naturel non nul.

La division euclidienne de p par 6 permet d'écrire $p = 6q+r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$.

$10^p = 10^{6q+r} = 10^{6q}\times 10^r = \left(10^6\right)^q \times 10^r$

Or d'après la question précédente, $10^6 \equiv 1 \mod 7$ donc $\left(10^6\right)^q \equiv 1^q \mod 7$ et donc $10^{6q} \equiv 1 \mod 7$.

On en déduit que $10^p \equiv 10^r \mod 7$.

- Si p est un multiple de 6, alors $r=0$ et $10^r = 10^0 \equiv 1 \mod 7$. Donc $10^p \equiv 1 \mod 7$.
- Si p vérifie $10^p \equiv 1 \mod 7$, alors $10^r \equiv 1 \mod 7$ où r est le reste de la division de p par 6.

  D'après le tableau de la question précédente, la seule valeur possible de r dans $\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$ pour que $10^r \equiv 1 \mod 7$ est $r=0$. On en déduit que p est un multiple de 6.

On a donc démontré que $10^p \equiv 1 \mod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.

(c) $\mathrm{N}_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} 10^k = 1+10+10^2+\ldots+10^{p-1}$ est la somme des p premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10.

Donc $\mathrm{N}_p = \text{premier terme} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} = 1\times\dfrac{1-10^p}{1-10} = \dfrac{10^p-1}{9}$.

(d) • Si 7 divise N_p, alors 7 divise tout multiple de N_p donc 7 divise $9\mathrm{N}_p$.

- On suppose que 7 divise $9\mathrm{N}_p$.

  On sait que 7 et 9 sont premiers entre eux ; donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise N_p.

  On a démontré que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9\mathrm{N}_p$ ».

(e) On a vu dans une question précédente que $\mathrm{N}_p = \dfrac{10^p-1}{9}$ ce qui équivaut à $9\mathrm{N}_p = 10^p-1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_p \text{ est divisible par 7} &\iff 9\mathrm{N}_p \text{ est divisible par 7} \quad \text{(question d.)}\\
&\iff 9\mathrm{N}_p \equiv 0 \mod 7\\
&\iff 10^p - 1 \equiv 0 \mod 7\\
&\iff 10^p \equiv 1 \mod 7\\
&\iff p \text{ est multiple de 6} \quad \text{(question b.)}
\end{aligned}$$

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \bmod 10$.

(a) On complète le tableau de congruences ci-dessous :

$n \equiv \dots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots\ [10]$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

(b) D'après le tableau de la question précédente, pour avoir $n^2 \equiv 1 \mod 10$ il faut

- soit $n \equiv 1 \mod 10$ donc $n = 10m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$;
- soit $n \equiv 9 \mod 10$ donc $n = 10m' + 9$ ou $n = 10m - 1$ avec $m \in \mathbb{N}$.

(c)• Si $n = 10m + 1$, alors $n^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20\left(5m^2 + m\right) + 1 \equiv 1 \mod 20$;

- Si $n = 10m - 1$, alors $n^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20\left(5m^2 - m\right) + 1 \equiv 1 \mod 20$.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On sait que $\mathrm{N}_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$.

Pour tout $k \geqslant 2$, $10^k = 100 \times 10^{k-2} = 20\left(5 \times 10^{k-2}\right) \equiv 0 \mod 20$. Donc $\sum_{k \geqslant 2} 10^k \equiv 0 \mod 20$.

Donc $\mathrm{N}_p \equiv 1 + 10 \mod 20$ c'est-à-dire $\mathrm{N}_p \equiv 11 \mod 20$.

3. On a vu que $n^2 \equiv 1 \mod 10 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \mod 20$; donc tout nombre qui a pour reste 1 dans la division par 10 et qui est un carré parfait, a pour reste 1 dans la division par 20.

Le nombre N_p a pour reste 1 dans la division par 10 et pour reste 11 dans la division par 20.

Donc N_p ne peut pas être le carré d'un entier.

Exercice 16 énoncé **Métropole 2016**

1. (a) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs. On a

$$15x - 12y = 3(5x - 4y)$$

$5x$ et $4y$ sont deux entiers. La différence de deux entiers étant un entier, $5x - 4y$ est un entier, et $3(5x - 4y)$ est ainsi un multiple de 3 :

Si x et y sont deux entiers relatifs, alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3

(b) Supposons qu'existe un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées (x_0, y_0) sont entières.

On a alors

$$y_0 = \frac{5}{4}x_0 - \frac{2}{3}$$

Soit :

$$15x_0 - 8 = 12y_0$$

Ou encore :

$$15x_0 - 12y_0 = 8$$

D'après la question précédente, $15x_0 - 12y_0$ est un multiple de 3.

Or $15x_0 - 12y_0$ est égal à 8. Comme 8 n'est pas un multiple de 3

Aucun point de la droite Δ_1 n'a ses coordonnées entières.

2. (a) Puisque le point de coordonnées (x_0, y_0) appartient à Δ, on en déduit :

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$$

Soit :

$$nqy_0 = mqx_0 - pn$$

Ou encore :

$$q(mx_0 - ny_0) = np$$

Puisque x_0, y_0, m et n sont des entiers, alors $mx_0 - ny_0$ est un entier :

$q(mx_0 - ny_0)$ est donc un multiple de q

Puisque $np = q(mx_0 - ny_0)$, alors

q divise np

(b) D'après la question précédente, q divise np. Comme, par hypothèse, q et p sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le théorème de Gauss, que q divise n.

q divise n

3. (a) Puisque n et m sont premiers entre eux, alors, en vertu du théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que

$$nu + mv' = 1$$

Puisque $n = qr$, l'égalité précédente s'écrit :

$$qru - m(-v') = 1$$

soit, en posant $v = -v'$:

$$qru - mv = 1$$

Il existe deux entiers u et v tels que $qru - mv = 1$

(b) L'égalité

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$$

est équivalente, d'après la question 2.a, à l'égalité

$$q(mx_0 - ny_0) = np$$

soit :

$$q(mx_0 - ny_0) = qrp$$

Puisque $q \neq 0$, cette dernière égalité est équivalente à l'égalité :

$$mx_0 - ny_0 = rp \quad (1)$$

D'après la question précédente, on sait qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$nu - mv = 1$$

Multiplions chacun des deux membres de cette égalité par rp. On obtient alors :

$$nurp - mvrp = rp$$

soit :

$$m(-vrp) - n(-urp) = rp \quad (2)$$

En comparant les égalités (1) et (2), on en déduit :

Le point de coordonnées $(-vrp, -urp)$ est un point de Δ

4. Les questions 2 et 3 permettent d'énoncer le résultat suivant :

> Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que pgcd(n, m) =pgcd$(p, q) = 1$.
> Alors il existe un point de Δ dont les coordonnées sont des entiers *si et seulement si* q divise n.

Dans le cas présent Δ est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$.

Puisque $\begin{cases} \text{pgcd}(3,8) = \text{pgcd}(7,4) = 1 \\ \text{et} \\ 4 \text{ divise } 8 \end{cases}$, alors

Il existe un point de Δ dont les coordonnées sont des entiers

5. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}x - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$.

On applique le résultat énoncé au début de la question précédente :

(a)
- Si Q ne divise pas N, alors l'algorithme affiche « pas de solution » : il se termine donc.
- Si Q divise N, on sait qu'il existe un point de Δ à coordonnées entières. Autrement dit, il existe un couple d'entiers (x_0, y_0) tel que
$$y_0 = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}x_0 - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$$
Il est clair qu'un tel couple existe si et seulement si il existe un entier *relatif* x_0 tel que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}x_0 - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est un entier.
Lorsque X parcourt $\mathbb{N}$ (i.e prend les valeurs $0, 1, 2, \dots$), il existe donc un entier naturel X_0 tel que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}_0 - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ ou $-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}_0 - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est un entier *relatif* : l'algorithme se termine donc.

L'algorithme se termine

(b) L'algorithme affiche les coordonnées du point de la droite d'équation $y = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}x - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ dont l'abscisse a la valeur absolue.