Arithmétique - Exercices - Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Dresser la listes des diviseurs de : 150 et 230

Exercice 2 **corrigé disponible**

Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient : $x^2 = y^2 + 21$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

a) $n^2 + n = 20$ b) $n^2 + 2n = 35$

Exercice 4 **corrigé disponible**

Déterminer les entiers relatifs n tel que :

a) $n + 1$ divise $3n - 4$ b) $n + 3$ divise $n + 10$

Exercice 5 **corrigé disponible**

Montrer que pour tout entier relatif a, 6 divise $a(a^2 - 1)$

Exercice 6 **corrigé disponible**

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{N}$: $xy - 5x - 5y - 7 = 0$

a) Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 5)(y - 5) = 32$

b) Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 7 **corrigé disponible**

n est un naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ne nombre n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

Exercice 8 **corrigé disponible**

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminer les valeurs de n pour lesquelles $n + 2$ divise $3n - 1$.

Exercice 9 **corrigé disponible**

n est un entier relatif différent de -2.
On pose $a = -2n^2 - 4n + 6$ et $b = n + 2$.

1. Vérifier que $-2n^2 - 4n + 6 = -2n(n + 2) + 6$.
2. Pour quelles valeurs de n, b divise-t-il a ?

Exercice 10 **corrigé disponible**

n est un entier relatif différent de 4. Pour quelles valeurs de n le nombre rationnel $\dfrac{35}{n-4}$ est-il entier ?

Exercice 11 **corrigé disponible**

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 2$.

Exercice 12 **corrigé disponible**

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{Z}$:

- $4n+1$ divise $10n-1$
- $3n-8$ divise $5n+4$

Exercice 13 **corrigé disponible**

Écrire la division euclidienne de -5000 par 17.

Exercice 14 **corrigé disponible**

La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels

Exercice 15 **corrigé disponible**

Trouver les entiers naturels n qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.

Exercice 16 **corrigé disponible**

Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.

Exercice 17 **corrigé disponible**

Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.

Exercice 18 **corrigé disponible**

Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

Exercice 19 **corrigé disponible**

Si l'on divise un entier A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

Exercice 20 corrigé disponible

1) Citez le théorème sur les propriétés de compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances.
2) Montrer que $11^6 \equiv 1 \mod 7$. En déduire le reste dans la division euclidienne de $11^{2\,011}$ par 7.
3) a) Vérifier que 999 est divisible par 27.
   b) Démontrer que $10^{3n} \equiv 1 \mod 27$.
   c) Quel est le reste dans la division de $10^{100} + 100^{10}$ par 27 ?
4) Soit n un entier naturel, on sépare son nombre de dizaines a et le chiffre des unités b. On a alors : $n = 10a + b$
   Prouver que n est divisible par 17 si et seulement si $a - 5b$ est divisible par 17.

   Application : Montrer par ce procédé (que l'on peut réiterer) que les nombres : 816 et 16 983 sont divisible par 17.

Exercice 21 corrigé disponible

1) Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances. Démontrer la propriété de compatibilité avec l'addition.
2) a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 (\text{modulo } 7)$.
   b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?
3) Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
   On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
   a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 (\text{modulo } 7)$.
   b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 22 corrigé disponible

On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1) Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \mod 5$.
2) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter (sans justification) les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
3) En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
4) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

Exercice 23 corrigé disponible

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

Partie A

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1) a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.
   b) On rappelle le binôme de newton à l'ordre 5 :

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

   Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right].$$

   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2) a) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 625$.

Partie C

On admet que l'on peut montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.

Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Exercice 24 corrigé disponible

1) Donner suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de 2^n par 5. (On pourra éventuellement donner le résultat par un tableau).
2) En déduire alors le reste de la division euclidienne par 5 de 2012^{2015}.

Exercice 25 corrigé disponible

ROC

1) Citer le théorème de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et la puissance.
2) **Pré-requis :** $a \equiv b \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad a - b \equiv 0 \pmod{n}$

   Soit a, b, c et d quatre relatifs tels que : $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$.

   Montrer que : $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
3) **Application :**

   Montrer que $4^4 \equiv 3 \pmod{11}$ puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 4^{4n+2} - 3^{n+3} \text{ est divisible par } 11$$

Exercice 26 corrigé disponible

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance j le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance m, le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, alors $j = 14$ et $m = 5$.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1) Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2) a) Pour un spectateur donné, on note z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

   Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que $z \equiv m \pmod{12}$.

   b) Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 455 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

On considère l'algorithme ci-contre :

```
Variables : j, m entiers
Traitement
  pour m de 1 à ... faire
    pour j de 1 à ... faire
      12j + 31m → z
      si ...... alors
        | Afficher j, m
      fin
    fin
  fin
```

1) Compléter cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que :

$$12j + 31m = 503$$

2) Quel est alors la date d'anniversaire correspondante ?

Exercice 27 corrigé disponible

En rangeant les n pièces de son puzzle, Raja constate que :

- si elle les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces ;
- si elle les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces ;
- si elle les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièces ;
- et si elle les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièce.

Sa mère affirme qu'alors $2n - 11$ est divisible par 5, 7, 9 et 11.

1) A-t-elle raison ?
2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2000 ?

Exercice 28 **corrigé disponible**

1) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
2) Enoncer le critère d'arrêt des nombres premiers.
   Application : 401 est-il premier ? Résoudre alors dans $\mathbb{N}$ l'équation :
   $$x^2 - y^2 = 401$$
3) Quel est le nombre de diviseurs de 13 230.

Exercice 29 **corrigé disponible**

1) Montrer que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est pair.
2) Montrer que $2^{36} - 1$ et $3^{36} - 1$ sont divisible par 37. On citera le théorème utilisé.
3) En déduire alors que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 74.

Exercice 30 **corrigé disponible**

On considère un carré de la forme $17p + 1$ où p est premier.

1) Ecrire $17p$ comme le produit de deux facteurs.
2) En déduire p. On citera le théorème utilisé.

Exercice 31 **corrigé disponible**

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n

1) Montrer que l'on a : $\beta(\alpha - 1) = 4$
2) En déduire n.

Exercice 32 **corrigé disponible**

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1) Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3) En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4) a) Soient a, b et c trois entiers naturels.
      Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.
   b) Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5) Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Exercice 33 **corrigé disponible**

L'exercice a pour but de déterminer par combien de zéros se termine le nombre 1000 ! (factorielle 1000 et non « mille points d'exclamation »)

On rappelle que : $1000! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1000$

1) Montrer qu'il existe des entiers p et q ($p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ et un entier N premier avec 10 tels que :
   $$1000! = 2^p \times 5^q \times N$$
2) On justifiera clairement les questions suivantes :
   a) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5 ?
   b) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^2 ?
   c) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^3 ?
   d) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^4 ?
   e) En déduire alors que $q = 249$
3) Établir que $p > q$ et que le nombre cherché est q

Exercice 34 **corrigé disponible**

On considère un entier n tel que $n^2 = 17p + 1$ où p est premier.

1) Ecrire $17p$ comme le produit de deux facteurs.
2) Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers
3) En déduire n puis p.

Exercice 35 corrigé disponible

Pour la proposition suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition : « Pour tout entier naturel k ($2 \leqslant k \leqslant n$), le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

Exercice 36 corrigé disponible

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

Exercice 37 corrigé disponible

1) Démontrer l'égalité dite de « Sophie Germain» :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$$

2) n est un entier naturel, pour quelles valeurs de n, $n^4 + 4$ est-il premier ?

3) Démontrez que $4^{545} + 545^4$ n'est pas un nombre premier.

4) a) Que peut-on dire si a et b divise c et que $\text{pgcd}(a, b) = 1$?

b) Déduire des questions précédentes que 240 divise n.

5) Existe-t-il 15 nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs à 7, tels que l'entier A ci-dessous soit un nombre premier ?

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{15}^4$$

Exercice 38 corrigé disponible

On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

Variables : A et N entiers naturels
Entrées et initialisation
  Saisir A
  N prend la valeur 1
Traitement
  tant que $N \leqslant \sqrt{A}$ **faire**
    si $\frac{A}{N} = \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ **alors**
      Afficher N et $\frac{A}{N}$
    fin
    N prend la valeur N + 1
  fin

1) Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

2) Que donne cet algorithme dans le cas général ?

Exercice 39 corrigé disponible

On considère un entier n tel que $n^2 = 29p + 1$ où p est premier.

1) Ecrire $29p$ comme le produit de deux facteurs en fonction de n.
2) Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers
3) En déduire n puis p.

Exercice 40 corrigé disponible

p est un nombre premier supérieur ou égal à 7. Le but de cet exercice est de montrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240 puis d'appliquer ce résultat.

1) Peut-on avoir $p \equiv 0 \mod 3$? En analysant les autres cas modulo 3, démontrer que n est divisible par 3.

2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que :

$$p^2 - 1 = 4k(k + 1)$$

En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 8 puis que n est divisible par 16.

3) En raisonnant comme à la question 1) modulo 5, démontrer que 5 divise n.

Exercice 41 corrigé disponible

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Exercice 42 corrigé disponible

Soit à résoudre l'équation $51x+54y=2004$.

1. Démontrer que cette équation diophantienne possède des solutions.
2. Démontrer que cette équation peut s'écrire $17x+18y=668$.
3. On va résoudre l'équation $17x+18y=1$.
   a) Déterminer une solution particulière de cette équation (une solution est ici un couple d'entiers !).
   b) En suivant la méthode décrite plus haut et notamment en utilisant le théorème de Gauss, démontrer que les couples solutions de cette équation sont de la forme $(-1+18k\ ;1-17k)\quad k\in\mathbb{Z}$.
   c) En déduire enfin toutes les solutions de l'équation $17x+18y=668$.

Exercice 43 corrigé disponible

Résoudre les équations diophantiennes suivantes :

$17x-33y=5$

$91x+10y=412$

$14x-6y=21$

Exercice 44 corrigé disponible

1. Calculer le *pgcd* de 8 et 15, et l'exprimer comme combinaison linéaire entière de ces deux nombres.
2. Même questions pour 1769 et 2378.

Exercice 45 corrigé disponible

1. Déterminer le PGCD de 858 et 910
2. Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme restes. Quel est cet entier?
3. Montrer que pour tout entier relatif n, les entiers (14n + 3) et (5n + 1) sont premiers entre eux. En déduire PGCD(87,31).

Exercice 46 corrigé disponible

1. Calculer PGCD de 8303 et 2717 ; en déduire l'identité de Bézout
2. Calculer PPCM de 8303 et 2717
3. Calculer le PGCD de 1001 et 315 ; en déduire l'identité de Bézout
4. Calculer PPCM de 1001 et 315
5. Calculer le PGCD de 2244 et 1089 ; en déduire l'identité de Bézout
6. Calculer PPCM de 2244 et 1089

Exercice 47 corrigé disponible

1. Trouver $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $22x+6y=2$.
2. Même question pour $2011x+24y=1$.

Exercice 48 corrigé disponible

Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $3x-5y=13$
2. $212x+45y=3$
3. $42x+45y=4$
4. $7x+5y=3$

Exercice 49 corrigé disponible

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5^{n+2}+3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Exercice 50 **corrigé disponible**

Soient $a = n - 1$ et $b = n^2 - 3n + 6$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que PGCD(a,b) est un diviseur de 4.
2. Déterminer selon les valeurs de n, le PGCD de a et b.